

11 Cammini minimi, sorgente singola

Nota. La prima cosa da fare quando si progetta un algoritmo è capire quale sia la struttura dati adatta a risolvere quel particolare problema.

11.1 Introduzione

Definizione 11.1 (costo del cammino). *Dato un cammino $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ con $k > 1$, il costo del cammino è dato da*

$$w(p) = \sum_{i=2}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

Definizione del problema Dati in input un grafo orientato $G = (V, E)$, un nodo sorgente s ed una funzione di peso $w: E \rightarrow R$ (che associa ad ogni arco un numero reale che rappresenta il peso). Trovare un cammino da s ad u , per ogni nodo $u \in V$, il cui costo sia minimo, ovvero più piccolo o uguale del costo di qualunque altro cammino da s a u .

Nota. Non ci limitiamo a trovare un solo percorso, ma tutti i cammini da un nodo a tutti gli altri nodi.

Panoramica sul problema Per risolvere il problema del cammino minimo fra una coppia di vertici, si risolve il problema di cammini minimi da sorgente unica (si trovano tutti i cammini che partono da un nodo) e si estrae il cammino richiesto. Per quanto riguarda il *caso pessimo* non si conoscono algoritmi che abbiano tempo di esecuzione migliore.

In alcuni casi gli archi possono avere peso negativo. Questo influisce sul problema (se è ben definito oppure no) e sulla soluzione (in assenza di archi negativi si devono utilizzare tecniche diverse).

Nell'algoritmo di Dijkstra si suppone che tutti gli archi abbiano peso positivo, mentre nell'algoritmo di Bellman-Ford gli archi possono avere peso negativo, ma non possono esistere cicli di peso negativo.

Nota. In generale possiamo ammettere pesi negativi, ma non cicli negativi.

Considerazioni sui cicli Se esiste un ciclo di peso negativo raggiungibile dalla sorgente, non esistono cammini finiti di peso minimo; per qualunque cammino, basterà passare per un ciclo negativo più volte per ottenere un cammino di costo inferiore.

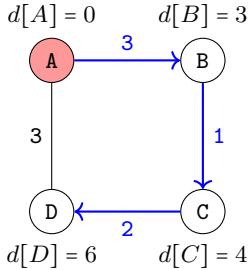
Ovviamente, in un cammino minimo *non è possibile la presenza di un ciclo di peso positivo*. I cicli di peso nullo possono essere banalmente eliminati dal cammino minimo, in quanto inutili e ridondanti.

11.1.1 Sottostruttura ottima

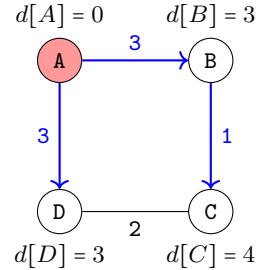
Definizione 11.2 (albero dei cammini minimi). *L'albero dei cammini minimi è un albero di copertura radicato in s avente un cammino da s a tutti i nodi raggiungibili da s .*

Nota. Non bisogna far confusione con gli alberi di copertura di peso minimo.

Soluzione ammissibile Una soluzione *ammissibile* può essere descritta da un *albero di copertura* T radicato in s e da un *vettore delle distanze* d , i cui valori $d[u]$ rappresentano il costo del cammino da s a u in T .



(a) Soluzione ammissibile (albero di peso minimo)



(b) Soluzione ottima (albero dei cammini minimi)

Figura 1: Nota la differenza fra i due alberi: a sinistra l'albero dei *cammini minimi* che rappresenta una soluzione ammissibile, ma non ottima, mentre a destra l'albero dei cammini minimi, ossia l'insieme dei percorsi che minimizzano il peso fra il nodo sorgente e tutti gli altri nodi e rappresenta la soluzione ottima

Nota. In questo problema devo trovare i percorsi che minimizzano il peso fra un nodo e tutti gli altri nodi, e **non**, come sembra spontaneo fare, l'albero che ha complessivamente peso minimo.

Rappresentazione dell'albero Per rappresentare l'albero, utilizziamo la rappresentazione basata su vettore dei padri, così come abbiamo fatto con le visite in ampiezza/profondità.

11.1.2 Teorema di Bellman

Teorema 1 (Teorema di Bellman). Una soluzione ammissibile T è (anche) ottima se e solo se:

$$\begin{aligned} d[v] &= d[u] + w(u, v) && \text{per ogni arco } (u, v) \in T \\ d[v] &\leq d[u] + w(u, v) && \text{per ogni arco } (u, v) \in E \end{aligned}$$

Dimostrazione per assurdo (parte 1). Sia T una soluzione ottima. Consideriamo un qualunque arco $(u, v) \in E$ e sia $w(u, v)$ la sua lunghezza.

Ovviamente se $(u, v) \in T$, allora $d[v] = d[u] + w(u, v)$. Invece se $(u, v) \notin T$, allora poiché T è ottimo, deve risultare $d[v] \leq d[u] + w(u, v)$, altrimenti esisterebbe nel grafo G un cammino da s a v più corto di quello in T , che è *assurdo* perché abbiamo ipotizzato che T fosse ottima. \square

Dimostrazione per assurdo (parte 2). Supponiamo per assurdo che il cammino da s a u in T non sia ottimo. Allora esiste un cammino da s a u con distanza $d'[u] < d[u]$. Sia $d'[v]$ la distanza da s ad un generico nodo v che appare in tale cammino. Poiché $d'[s] = d[s] = 0$, ma $d'[u] < d[u]$, esiste un arco (h, k) per cui $d'[h] \geq d[h]$ e $d'[k] < d[k]$. Per costruzione $d'_h + w(h, k) = d'_k$. Per ipotesi $d_h + w(h, k) \geq d_k$. Combinando queste due relazioni, si ottiene:

$$d'_k = d'_h + w(h, k) \geq d_h + w(h, k) \geq d_k$$

che contraddice l'ipotesi. \square

11.1.3 Verso un algoritmo

Algoritmo prototipo L'algoritmo prende in input un grafo e il nodo sorgente. I pesi vengono estratti dalla struttura dati GRAPH. Inizializziamo d con una sovrastima della distanza; $d[s] = 0$ sta a significare che la sorgente ha distanza da sé stessa pari a 0 (caso base) e con $d[x] = +\infty$ indico che la distanza di tutti gli altri nodi, fintanto che non è nota, è pari a $+\infty$.

Algoritmo generico

```
// Algoritmo prototipo dei cammini minimi
(int, int) CamminiMinimi(GRAPH G, NODE s)
    // Inizializza T ad una foresta di copertura composta da nodi isolati
    // Inizializza d con una sovrastima della distanza ( $d[s] = 0$ ,  $d[x] = +\infty$ )
    while  $\exists(u,v): d[u] + G.w(u,v) < d[v]$  do
        // Esiste un arco che mi permette di migliorare la stima
         $d[v] = d[u] + w(u,v)$  // Aggiorno la distanza
        // Sostituisci il padre di v in T con u
    return (T,d)
```

Nota. Se al termine dell'esecuzione qualche nodo mantiene una distanza infinita, allora esso non è raggiungibile.

Algoritmo generico `bool[]` ci permette di sapere in tempo costante se un certo nodo appartiene ad una struttura dati oppure no, non è necessario quando si implementerà realmente il codice.

Algoritmo prototipo

```

(int, int) CamminiMinimi(GRAPH G, NODE s)
    // Inizializzazione dei vettori
    int[] d ← new int[1...G.n]                                // distanze dalla sorgente
    int[] T ← new int[1...G.n]                                // vettore dei padri
    bool[] b ← new bool[1...G.n]                             // per sapere in tempo costante se  $u \in S$ 

    // Inizializzo tutti i nodi tranne la sorgente
    foreach  $u \in G.V - \{s\}$  do
        T[u] ← nil // non hanno padri
        d[u] ← +∞ // non li ho ancora raggiunti
        b[u] ← falso // non appartengono ancora all'insieme

    // Inizializzo la sorgente
    T[s] ← nil // non ha padre
    d[s] ← 0 // per convenzione
    b[s] ← vero // appartiene all'insieme

(1)   STRUTTURADATI  $S \leftarrow$  StrutturaDati
      S.aggiungi( $s$ )
      while not  $S.isEmpty$  do
(2)       int  $u \leftarrow S.estrai$  // estraggo un nodo
          b[u] ← falso // non è più contenuto nella struttura dati
          foreach  $v \in G.adj(u)$  do // per tutti i vicini
              if  $d[u] + G.w(u,v) < d[v]$  then // se migliora la stima
                  if not  $b[v]$  then // se non fa già parte dell'insieme
(3)                      S.aggiungi( $v$ ) // aggiungilo
                      b[v] ← vero // fa parte dell'insieme
                  else
(4)                      // Azione da intraprendere nel caso  $v$  sia già presente in  $S$ 
                      // aggiorno i vettori
                      T[v] ← u
                      d[v] ←  $d[u] + G.w(u,v)$ 
      return ( $T, d$ )

```

11.2 Dijkstra

Il seguente algoritmo è stato sviluppato da Edsger W. Dijkstra nel 1956, pubblicato nel 1959. Nella versione originale veniva utilizzato per trovare la distanza minima fra due nodi sfruttando il concetto di coda con priorità. Tieni conto però che le code di priorità basate sugli heap binari sono state proposte nel '64, infatti l'algoritmo che di solito viene considerato di Dijkstra in realtà è la versione modificata di Johnson.

Implementazione L'algoritmo utilizza una coda con priorità basata su vettore.

Algoritmo 11.1: Algoritmo di Dijkstra

```
(int[], int[]) CamminiMinimi(GRAPH G, NODE s)
(1)    PRIORITYQUEUE S ← PriorityQueue //  $O(n)$  · 1
          S.inserisci(s, 0)

        while not S.isEmpty do //  $O(n)$ 
(2)          //  $O(n)$  vettore ordinato /  $O(\log n)$  heap binario
          int u ← S.deleteMin
          b[u] ← falso

          foreach v ∈ G.adj(u) do
            if  $d[u] + G.w(u,v) < d[v]$  then
              if not b[v] then
                //  $O(1) \cdot n$  vettore ordinato /  $O(\log n) \cdot n$  heap binario
                S.inserisci(v,  $d[u] + G.w(u,v)$ )
                b[v] ← vero
              else
                //  $O(1) \cdot m$  vettore ordinato /  $O(\log n) \cdot m$  heap binario
                S.decrease(v,  $d[u] + G.w(u,v)$ )
            T[v] ← u
            d[v] ←  $d[u] + G.w(u,v)$ 

(3)      (4)

return (T, d)
```

Commento sulla complessità

- ① Viene creato un vettore di dimensione n . Ogni elemento u -esimo rappresenta il nodo u . Le priorità (distanze) vengono inizializzate ad $+\infty$. La priorità di s è posta uguale a 0. Per un costo computazionale di $O(n)$;
- ② Si ricerca il minimo all'interno del vettore, una volta trovato si “cancella” la sua priorità. Per un costo computazionale di $O(n)$;
- ③ Si registra la priorità nella posizione corrispondente all'indice v . Per un costo computazionale di $O(1)$;
- ④ Si aggiorna la priorità nella posizione corrispondente all'indice v . Per un costo computazionale di $O(1)$.

Commento Tutte le volte che estraiamo un nodo, quel nodo ha una distanza (priorità) positiva ed estraiamo nodi a distanza progressivamente crescenti. Se estraggo un nodo dalla coda tutti gli altri nodi hanno distanze più grandi. Tutte le volte che estraggo un nodo la sua distanza non può più essere modificata. Ed è questo il motivo per cui l'algoritmo di Dijkstra funziona bene solo con pesi positivi.

Nota. *L'algoritmo di Dijkstra funziona bene solo con pesi positivi.*

11.2.1 Correttezza per pesi positivi

Ogni nodo viene estratto una e una sola volta. Al momento dell'estrazione la sua distanza è minima.

Dimostrazione per induzione sul numero k di nodi estratti. Per $k = 0$ (caso base) è vero poiché $d[s] = 0$ e non ci sono lunghezze negative. Supponiamo che sia vero per i primi $k - 1$ nodi (ipotesi induttiva). Quando viene estratto il k -esimo nodo u , la sua distanza $d[u]$ dipende dai $k - 1$ nodi già estratti (passo induttivo). Non può quindi dipendere dai nodi ancora da estrarre, che hanno distanza $\geq d[u]$. Di conseguenza $d[u]$ è minimo e u non verrà più re-inserito, perché non ci sono distanze negative. \square

11.3 Johnson

Analisi della complessità $\mathcal{O}(n^2 + m)$ ma siccome $m = \mathcal{O}(n^2)$, allora il costo è $\mathcal{O}(n^2)$, con l'introduzione dell'heap binario nel '64 le operazioni che prima venivano svolte con complessità $\mathcal{O}(n)$ sul vettore ordinato passano ad avere una complessità di $\mathcal{O}(\log n)$. Di conseguenza la complessità dell'algoritmo diventa $\mathcal{O}(m \log n)$.

Per *grafi densi* non conviene utilizzare uno heap binario in quanto $m = \Theta(n^2)$ e di conseguenza l'algoritmo avrebbe una complessità di $\mathcal{O}(n^2 \log n)$, mentre per *grafi sparsi* $m = \Theta(n)$ e l'algoritmo $\mathcal{O}(n \log n)$.

11.4 Fredman-Tarjan

Analisi della complessità Sfruttando un heap di fibonacci l'operazione di *decrease* ha costo ammortizzato costante; così facendo hanno abbassato la complessità a $\mathcal{O}(m + n \log n)$. Per *grafi sparsi* produce un miglioramento nella complessità.

11.5 Bellman-Ford-Moore

Nota. È computazionalmente più pesante dell'algoritmo di Dijkstra ma può lavorare anche con archi di peso negativo.

Implementazione Coda senza priorità.

Algoritmo 11.2: Algoritmo di Bellman-Ford-Moore

```

int[], int[ ] CamminiMinimi(GRAPH G, NODE s)
    QUEUE S  $\leftarrow$  Queue
    S.enqueue(s) // metto in coda la sorgente
    while not S.isEmpty do //  $\mathcal{O}(n)$ 
        int u  $\leftarrow$  S.dequeue //  $\mathcal{O}(1 \cdot n)$ 
        b[u]  $\leftarrow$  falso
        foreach v  $\in$  G.adj(u) do
            if d[u] + G.w(u,v)  $<$  d[v] then
                if not b[v] then
                    // lo metto in coda quando c'è un miglioramento
                    S.enqueue(v) //  $\mathcal{O}(m \cdot n)$ 
                    b[v]  $\leftarrow$  vero
                T[v]  $\leftarrow$  u
                d[v]  $\leftarrow$  d[u] + G.w(u,v)
    return (T,d)

```

- ⑤ Viene creata una coda di dimensione n . Per un costo computazionale di $O(n)$;
- ⑥ Viene estratto il prossimo elemento della coda. Per un costo computazionale di $O(1)$;
- ⑦ Si inserisce l'indice v in coda. Per un costo computazionale di $O(1)$.

L'inserimento in coda può essere fatto più di una volta durante il ciclo di esecuzione dell'algoritmo, al contrario di quel che accade nell'algoritmo di Dijkstra. Il passo ④ non è necessario in quanto non c'è una priorità da aggiornare.

Il vettore delle distanze è rappresentato dalle colonne, su fondo potete vedere lo stato della coda.

Dimostrazione di correttezza

Analisi di complessità

Cammini minimi su DAG I cammini minimi su DAG sono sempre ben definiti; anche in presenza di pesi negativi, in quanto non esistono cicli (né tantomeno quelli negativi). È possibile rilassare gli archi *in ordine topologico, una volta sola*. Non essendoci cicli, non c'è modo di tornare su un nodo già visitato ed abbassare il valore della sua distanza (il suo campo d). Si utilizza quindi l'ordine topologico.

11.5.1 Riassumendo

Tabella 1: Quale complessità preferire?

Algoritmo	Complessità	Input
Dijkstra	$\mathcal{O}(n^2)$	Pesi positivi, grafi denso
Johnson	$\mathcal{O}(m \log n)$	Pesi positivi, grafi sparso
Fredman-Tarjan	$\mathcal{O}(m + n \log n)$	Pesi positivi, grafi denso, dimensioni molto grandi
Bellman-Ford	$\mathcal{O}(m \cdot n)$ $\mathcal{O}(m + n)$	Pesi negativi DAG
BFS	$\mathcal{O}(m + n)$	Senza pesi

11.5.2 Cammini minimi, sorgente multipla

Vogliamo cercare i cammini minimi fra tutti i nodi.

Tabella 2: Quale complessità preferire?

Algoritmo	Complessità	Input
Pesi positivi, grafo denso	$\mathcal{O}(n \cdot n^2)$	Applicazione ripetuta (n) dell'algoritmo di Dijkstra
Pesi positivi, grafo sparso	$\mathcal{O}(n \cdot (m \log n))$	Applicazione ripetuta dell'algoritmo di Johnson
Pesi negativi	$\mathcal{O}(n \cdot nm)$	Applicazione ripetuta di Bellman-Ford, <i>sconsigliata</i>
Pesi negativi, grafo denso	$\mathcal{O}(n^3)$	Algoritmo di <i>Floyd e Warshall</i>
Pesi negativi, grafo sparso	$\mathcal{O}(nm \log n)$	Algoritmo di <i>Johnson per sorgente multipla</i>

L'algoritmo di Bellman-Ford è sconsigliato per grafi densi perché può arrivare ad avere una complessità di $\mathcal{O}(n^4)$, mentre l'algoritmo di Floyd e Warshall ha una complessità di $\mathcal{O}(n^3)$ indipendentemente dalla forma del grafo.

11.6 Floyd-Warshall

Utilizza la programmazione dinamica. Ci riesce ridefinendo la definizione del costo di cammino in modo tale che possa essere calcolato in modo ricorsivo.