

Cognome:

Nome:

Matricola:

Riga:

Col:

Algoritmi e Strutture Dati - 04/06/2018

Esercizio -1 Iscriversi allo scritto entro la scadenza. In caso di inadempienza, -1 al voto finale.

Esercizio 0 Scrivere correttamente nome, cognome, numero di matricola, riga e colonna su tutti i fogli consegnati. Consegnare foglio A4 e foglio protocollo di bella. In caso di inadempienza, -1 al voto finale.

Esercizio 1 – Punti ≥ 6

Si consideri un vettore X contenente n valori interi distinti. Dato un insieme S di indici del vettore ($S \subseteq \{1, \dots, n\}$), il vettore \bar{X}_S negazione di X sugli indici S è tale per cui:

$$\bar{X}_S[i] = \begin{cases} -X[i] & i \in S \\ X[i] & i \notin S \end{cases}$$

Ad es., dato un vettore $X = [7, 4, -2, 10, 12, 5, 3, 8]$ e un insieme $S = \{2, 4\}$, $\bar{X}_S = [7, -4, -2, -10, 12, 5, 3, 8]$.

Un insieme di indici M di dimensione k è detto k -massimale se la somma degli elementi di \bar{X}_M è più grande o uguale della somma degli elementi di qualsiasi vettore \bar{X}_S , con $|S| = k$,

$$\sum_{i=1}^n \bar{X}_M[i] \geq \sum_{i=1}^n \bar{X}_S[i], \quad \forall S \subseteq \{1, \dots, n\} : |S| = k$$

Scrivere un algoritmo che prenda in input un vettore X e un intero k , e restituisca la somma associata ad un insieme di indici k -massimale per X .

Ad esempio, dati un vettore $X = [7, 4, -2, 10, 12, 5, 3, 8]$ e $k = 2$, la somma massimale è data dall'insieme $S = \{3, 7\}$, $\bar{X}_S = [7, 4, 2, 10, 12, 5, -3, 8]$, e il valore da restituire è pari a $7 + 4 + 2 + 10 + 12 + 5 - 3 + 8 = 45$.

Discutere esaustivamente correttezza e complessità dell'algoritmo proposto.

Esercizio 2 – Punti ≥ 7

Due interi si dicono *inquadrabili* se la loro somma è pari al quadrato di un intero; ad esempio, 4 e 5 sono inquadrabili, in quanto $4 + 5 = 3^2$.

Sia dato un vettore X contenente n valori interi distinti. Scrivere un algoritmo che dato un vettore X restituisca il maggior numero di coppie di valori inquadrabili che è possibile trovare contemporaneamente nel vettore, assumendo che ogni valore possa essere utilizzato al più una volta.

Ad esempio, se $X = [7, 1, 15, 10, 3]$, il maggior numero di coppie inquadrabili è 2, dato da $1 + 3 = 2^2$, $15 + 10 = 5^2$; il fatto che sia anche presente $1 + 15 = 4^2$ non conta, perché se viene usata quella coppia, gli altri numeri non danno origine a coppie inquadrabili.

Discutere correttezza e complessità dell'algoritmo proposto.

Esercizio 3 – Punti ≥ 8

Scrivere un algoritmo che, dati in input un vettore X contenente n interi distinti e un intero w , stampi tutti i modi in cui è possibile ottenere esattamente il valore w sommando un sottoinsieme dei valori contenuti in X .

Ad esempio, se $X = [-1, 3, 6, 4, 5, 7, 8]$ e $w = 13$, l'algoritmo deve stampare, non necessariamente in questo ordine:

$$\begin{aligned} 5 &+ 8 \\ 6 &+ 7 \\ 3 &+ 6 + 4 \\ -1 &+ 6 + 8 \\ -1 &+ 3 + 4 + 7 \\ -1 &+ 3 + 6 + 5 \end{aligned}$$

Discutere correttezza e complessità dell'algoritmo proposto. Non perdete tempo a realizzare funzioni di stampa "sofisticate", è sufficiente stampare – per ogni somma – l'elenco dei numeri che la compongono.

Esercizio 4 – Punti ≥ 10

Siano dati un vettore X contenente n valori interi positivi distinti e due valori interi positivi k, w , con $k \leq n$. La somma massimale (k, w) -vincolata di X è il più grande valore v ottenibile come somma di non più di k valori contenuti in X , tale che $v \leq w$. Formalmente,

$$v = \max_{S \subseteq \{1, \dots, n\} \wedge |S| \leq k} \sum_{i \in S} X[i]$$

$$v \leq w$$

Ad esempio, se $X = [12, 13, 11, 6, 23, 19]$, $w = 27$, $k = 3$, il valore da restituire è pari a $25 = 12 + 13$ oppure $19 + 6$. Non è possibile ottenere 26 o 27, nemmeno utilizzando tre valori.

Scrivere un algoritmo che dati in input X, n, k, w , restituisca il valore della somma massimale (k, w) -vincolata. Discutere correttezza e complessità dell'algoritmo proposto.