Algoritmi e Strutture Dati - 19/12/14

Esercizio 1

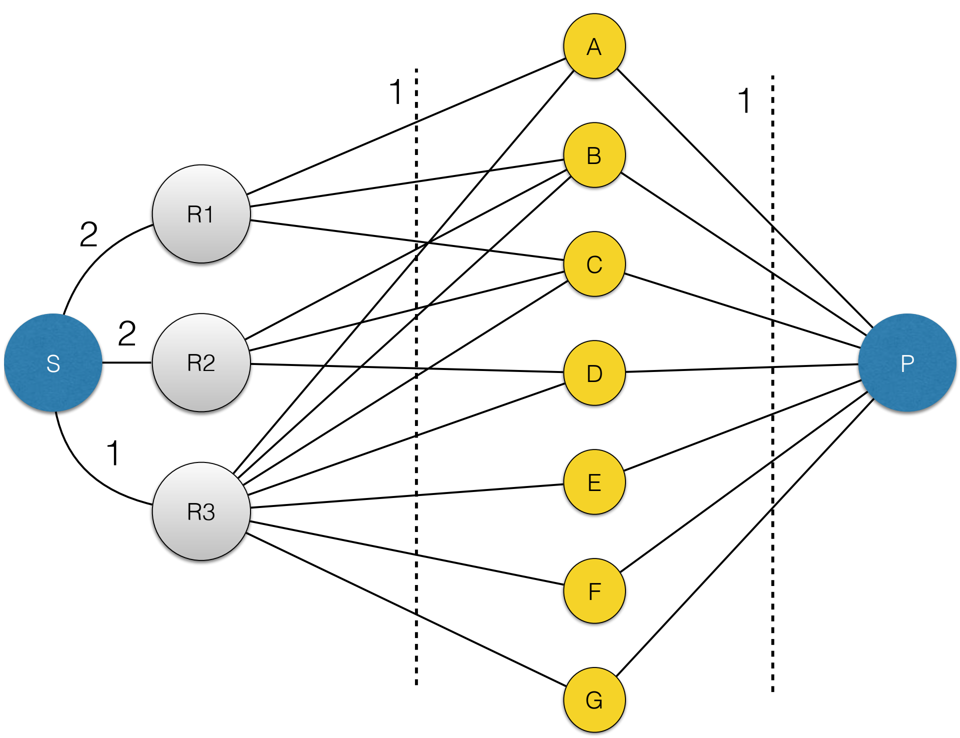
Assumiamo che il vettore sia ordinato. Se così non è, è sufficiente ordinarlo in tempo $O(n \log n)$.
Vogliamo dimostrare che un intervallo l'intervallo $[V[1], V[1]+1]$ (l'intervallo unitario che inizia in $V[1]$) fa sempre parte di una soluzione ottima. Si prenda una soluzione ottima S e si consideri l'intervallo $[x, x+1] \in S$ che "ricopre" $V[1]$, ovvero tale per cui $x \leq V[1] \leq x+1$; tale intervallo deve esistere, in quanto $V[1]$ deve essere ricoperto. Poichè $V[1] \geq x$ e $V[1]$ è il primo punto del vettore, è possibile ottenere una soluzione $C - \{[x, x+1]\} \cup \{[V[1], V[1]+1]\}$ che ha la stessa dimensione di C, ricopre $V[1]$ e tutti i punti precedentementi ricoperti da $[x, x+1]$.
L'algoritmo è quindi il seguente:

```
covering(real[] V, integer n)
    sort(V, n)                                   % O(n log n)

    SET s ← {1}
    integer last ← 1
    for i ← 2 to n do
        if V[i] > V[last] + 1 then
            S.append(i)
            last ← i
    return s
```

Esercizio 2

E' possibile utilizzare l'algoritmo per identificare il flusso massimo, inserendo un nodo per ogni requisito, un nodo per ogni corso, una supersorgente e un superpozzo. Il superpozzo è collegato al requisito i-esimo con capacità m_i; i requisiti sono collegati ai corsi con archi di peso 1; i corsi sono collegati al superpozzo con archi di peso 1. Il regolamento è soddisfacibile se è possibile trovare un flusso di valore t; si noti che condizione necessaria (ma non sufficiente) perchè questo avvenga è che $t = \sum_{i=1}^{k} m_i$. Il grafo risultante per l'esempio del compito è riportato di seguito.



Il numero di nodi è $|V| = n + k + 2$; il numero di archi è limitato superiormente da $|E| = O(k + nk + n)$. La complessità è quindi pari a:

$$O(t \cdot [(n + k + 2) + (n + k + nk)]) = O(tnk)$$

Esercizio 3

Definiamo la matrice M, dove $M[i,c]$ contiene la lunghezza della più lunga sottosequenza ordinata-distinta contenuta nella prefisso $S(i)$ (ovvero i primi i caratteri di S) composta dai primi c caratteri dell'alfabeto. Il problema originale corrisponde quindi a $M[n, 26]$.
E' possibile calcolare M nel modo ricorsivo seguente:

$$M[i,c] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ M[i-1,c] & i > 0 \wedge S[i] > c \\ \max\{M[i-1,c], M[i-1,S[i]-1]+1\} & i > 0 \wedge S[i] \leq c \end{cases}$$

- Se stiamo considerando un prefisso di 0 caratteri, la sottosequenza ha lunghezza nulla.
- Se il carattere i-esimo non rientra nei primi c caratteri dell'alfabeto, lo scartiamo considerando il problema con $i-1$ caratteri.
- Se il carattere i-esimo rientra nei primi c caratteri dell'alfabeto, abbiamo due possibilità: o lo scartiamo, e allora consideriamo il problema con $i-1$ caratteri e lo stesso alfabeto; o lo prendiamo, nel qual caso dobbiamo comunque considerare $i-1$ caratteri, eliminando tuttavia $S[i]$ e tutti i caratteri seguenti dall'alfabeto.

Questa definizione si traduce in questo algoritmo basato su memoization:

```
integer maxOrdinataDistinta(integer[] S, integer n)
    integer[][] M ← new integer[0...n, 0...26]          % Inizializzato a ⊥
    maxRec(S, n, 26, M)
    return M[n, c]
```

```
integer maxRec(integer[] S, integer i, integerc, integer[][] M)
    if i = 0 then
        return 0
    if M[i, c] = ⊥ then
        if S[i] > c then
            M[i, c] = maxRec(S, i − 1, c, M)
        else
            M[i, c] = max(maxRec(S, i − 1, c, M), maxRec(S, i − 1, S[i] − 1, M) + 1)
```

Tuttavia, il modo più semplice per risolvere questo problema è rendersi conto che è sufficiente utilizzare l'algoritmo LCS, chiamato passando questa stringa e la stringa `ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ`. Il costo di questa soluzione è pari a $\Theta(n)$, in quanto deve essere riempita una matrice $n \times 26$.

```
integer maxOrdinataDistinta(ITEM[] S, integer n)
    integer[][] M ← new integer[0...n, 0...26]
    lcs(M, S, "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ", n, 26)
    return M[m, n]
```

Esercizio 4

Questo esercizio si risolve in maniera simile agli algoritmi di confronto stringhe che abbiamo visto a lezione. Sia $D[i,j]$ il numero di caratteri dash necessari per allineare le stringhe prefisso $P(i)$ (i primi i caratteri di P) e $T(j)$ (i primi j caratteri di T). $D[i,j]$ può essere calcolata in modo ricorsivo nel modo seguente:

$$D[i,j] = \begin{cases} j & i = 0, \text{oppure} \\ i & j = 0, \text{oppure} \\ D[i-1,j-1] & P(i) = T(j) \\ \mathit{min}\{D[i-1,j], D[i,j-1]\}+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Se una delle stringhe è vuota, bisognerà inserire un carattere dash per oguno dei caratteri dell'altra string;

- Se gli ultimi due caratteri sono uguali, possono essere allineati senza dover inserire caratteri dash;
- Altrimenti, se gli ultimi due caratteri sono diversi, prendiamo il minimo di due casi: il caso in cui l'ultimo carattere di $P(i)$ deve essere allineato con un dash, oppure il caso in cui l'ultimo carattere di $T(j)$ deve essere allineato con un dash. In entrambi i casi, bisogna aggiungere $+1$ per tener conto del carattere aggiunto.

La formula ricorsiva può essere risolta tramite memoization; qui presento invece una versione basata su programmazione dinamica.

```
integer minAllineamento(ITEM[] P, ITEM[] S, integer n, integer m)
    integer[][] D ← new[0...n][0...m]
    for i ← 0 to n do D[i, 0] ← i

    for j ← 0 to m do D[j, 0] ← i

    for i ← 1 to n do
        for j ← 1 to m do
            if P[i] = T[j] then
                D[i, j] = D[i − 1, j − 1]
            else
                D[i, j] = min(D[i − 1, j], D[i, j − 1]) + 1
```

La complessità dell'algoritmo risultante è $O(mn)$.