

Esercizio 1

Utilizzando il master theorem, è facile vedere che $T(n) = \Theta(\sqrt[3]{n} \log n)$.

Dimostriamolo per sostituzione, partendo da $T(n) = O(\sqrt[3]{n} \log n)$.

Coinvolgendo il logaritmo, il caso base è fra quelli problematici:

$$T(1) = 1 \not\leq c\sqrt[3]{1} \log 1 = 0$$

Per questo motivo, consideriamo i valori i compresi fra 2 e 15, estremi inclusi; $i/8$ in questo caso è minore di 2; scriviamo quindi

$$T(i) = 2T(i/8) + \sqrt[3]{i} = 2 + \sqrt[3]{i} \leq c\sqrt[3]{i} \log i \quad \forall i : 2 \leq i \leq 15$$

da cui si ottiene:

$$c \geq \frac{2 + \sqrt[3]{i}}{\sqrt[3]{i} \log i} \quad \forall i : 2 \leq i \leq 15$$

Per $i = 16$, $i/8$ è pari a 2 e rientra nei casi base già risolti. Possiamo quindi fermarci a 15.

Nel passo induttivo, dobbiamo dimostrare che $T(n) \leq c\sqrt[3]{n} \log n$ e supponiamo che la relazione $T(n') \leq c\sqrt[3]{n'} \log n'$ sia già stata dimostrata per $2 \leq n' < n$.

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c\sqrt[3]{n/8} \log n/8 + \sqrt[3]{n} \\ &= c\sqrt[3]{n} \log n/8 + \sqrt[3]{n} \\ &= c\sqrt[3]{n}(\log n - \log 8) + \sqrt[3]{n} \\ &= c\sqrt[3]{n} \log n - 3c\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n} \leq c\sqrt[3]{n} \log n \end{aligned}$$

L'ultima disequazione è soddisfatta se $c \geq 1/3$. Poiché questa disequazione per c e tutte quelle derivanti dal caso base sono di tipo \geq , è sufficiente prendere il valore più alto fra questi valori come valore per c .

Consideriamo ora $T(n) = \Omega(\sqrt[3]{n} \log n)$. Il caso base è più facile del precedente:

$$T(1) = 1 \geq c\sqrt[3]{1} \log 1 = 0$$

che è vero per tutti i valori di c . Nel passo induttivo, dobbiamo dimostrare che $T(n) \geq c\sqrt[3]{n} \log n$ e supponiamo che la relazione $T(n') \geq c\sqrt[3]{n'} \log n'$ sia già stata dimostrata per $2 \leq n' < n$.

$$\begin{aligned} T(n) &\geq 2c\sqrt[3]{n/8} \log n/8 + \sqrt[3]{n} \\ &= c\sqrt[3]{n} \log n/8 + \sqrt[3]{n} \\ &= c\sqrt[3]{n}(\log n - \log 8) + \sqrt[3]{n} \\ &= \sqrt[3]{n}(c \log n - 3c + 1) \geq c\sqrt[3]{n} \log n \end{aligned}$$

L'ultima disequazione è vera per $c \leq 1/3$.

Abbiamo quindi che $T(n) = \Theta(\sqrt[3]{n} \log n)$.

Esercizio 2

L'esercizio può essere risolto in modo ricorsivo. La funzione `countTree()` prende in input l'albero e un contatore di ascendenti (*ancestors*), e restituisce un contatore di discendenti e un contatore di nodi che hanno il numero di discendenti uguali al numero di ascendenti.

(int, int) countTreeRec(TREE t, int ancestors)

```

if t = nil then
  | return (0,0)
predL, countL ← countTreeRec(t.left, ancestors + 1)
predR, countR ← countTreeRec(t.right, ancestors + 1)
return (predL + predR + 1, countL + countR + iff(ancestors = predL + predR, 1, 0))
    
```

L'algoritmo viene invocato dalla seguente funzione wrapper:

```
countTree(TREE t)
    pred, count ← countTreeRec(t, 0)
    return count
```

Esercizio 3

Questo esercizio è più semplice di quanto si possa pensare. L'idea è che tutte le volte si incontra una parentesi chiusa, la si associa alla più vicina parentesi aperta precedente.

```
longestBalanced(ITEM[] S, int n)
    int count ← 0
    int open ← 0
    for i ← 1 to n do
        if S[i] = "(" then
            open ← open + 1
        else if S[i] = ")" and open > 0 then
            count ← count + 2
            open ← open - 1
    return count
```

La complessità di questo algoritmo è $\Theta(n)$.

Per dimostrare la correttezza dell'algoritmo, sia j la posizione della prima parentesi chiusa che sia preceduta da almeno una parentesi aperta. Sia i la posizione della più vicina parentesi aperta che precede j ($i < j$). I caratteri compresi fra i e j non possono essere parentesi aperte, in quanto i è la parentesi aperta più vicina a j ; non possono essere parentesi chiuse, perchè j è la prima parentesi chiusa.

Si consideri quindi la stringa derivata da S cui tutti i carattere fra i e j sono stati eliminati, estremi inclusi, e sommiamo 2 al numero di parentesi bilanciate. La stringa così ottenuta sarà potenzialmente composta da parentesi aperte (quelle prima di i) e da parentesi chiuse (quelle dopo di j). Il fatto di aver associato i e j non influisce sulle parentesi chiuse successive (che possono essere associate a quelle precedenti) nè su quelle precedenti (che possono essere associate a quelle successive).

Esistono anche tanti modi per risolvere il problema con programmazione dinamica. Ed esistono anche tanti modi per sbagliare a risolvere il problema con programmazione dinamica. Ne faccio vedere alcuni (senza codice, solo formula ricorsiva).

Sia $D[i, j]$ la lunghezza della più lunga sottosequenza contenuta in $S[i \dots j]$ che sia una stringa bilanciata di parentesi. $D[i, j]$ può essere calcolata in questo modo:

$$D[i, j] = \begin{cases} 0 & i \geq j \\ D[i + 1, j] & S[i] \neq "(" \\ D[i, j - 1] & S[j] \neq ")" \\ \max\{D[i + 1, j - 1] + 2, \max_{i \leq k \leq j} \{D[i, k] + D[k + 1, j]\}\} & S[i] = "(" \wedge S[j] = ")" \end{cases}$$

L'idea è la seguente:

- Il caso base è costituito da stringhe di 0 o 1 caratteri, ed ovviamente la più lunga sottostringa bilanciata è lunga 0
- Se ci sono caratteri diversi da parentesi aperte e chiuse all'inizio e alla fine della stringa, rispettivamente, la accorciamo facendo scorrere gli indici i e j
- Se il primo e ultimo carattere sono parentesi tonde, allora possono darsi due casi:
 - la stringa corrisponde al secondo caso della definizione di stringhe di parentesi bilanciate, ovvero $w = (x)$; togliamo il primo e l'ultimo carattere e sommiamo due alla più lunga sottosequenza di parentesi bilanciate contenuta all'interno
 - la stringa corrisponde al terzo caso della definizione di stringhe di parentesi bilanciate, ovvero $w = xy$; nel qual caso proviamo a spezzare la stringa in tutte le posizioni possibili e restituiamo il massimo fra esse

Fra questi due casi, dovremo prendere il massimo.

Trasformando questa formula ricorsiva tramite programmazione dinamica o memoization, si ottiene un costo pari a $O(n^3)$. Non utilizzando programmazione dinamica o memoization, il costo è esponenziale.

Un errore comune è stato dimenticarsi del terzo caso, e scrivere una formula tipo questa:

$$D[i, j] = \begin{cases} 0 & i \geq j \\ D[i + 1, j] & S[i] \neq "(" \\ D[i, j - 1] & S[j] \neq ")" \\ D[i + 1, j - 1] + 2 & S[i] = "(" \wedge S[j] = ")" \end{cases}$$

Se l'input è "())", questa formula restituisce 2 invece che 4.

Esercizio 4

Nota: l'esercizio aveva due forme, una con un limite sul numero di nodi con 1 figlio, una con un limite sul numero di nodi con 2 figli. Riportiamo qui la versione con nodi con 1 figlio; la formula con nodi con 2 figli è riportata in fondo, con l'unica differenza su che valore di k viene passato.

Una formula ricorsiva per calcolare il numero di alberi k -limitati strutturalmente diversi può essere derivata dalla formula ricorsiva per calcolare il numero di alberi binari strutturalmente diversi vista a lezione:

$$T(n, k) = \begin{cases} 1 & n = 1 \wedge k = 0 \\ 0 & k \geq n \\ 2T(n - 1, k - 1) + \sum_{i=1}^{n-2} T(i, k)T(n - 1 - i, k) & n > 1 \wedge k < n \end{cases}$$

Spiegazione:

- Se $n = 1$, esiste un solo albero binario 0-limitato: l'albero formato da un singolo nodo.
- Se $k = n$, non è possibile costruire un albero binario k -limitato: tutti i nodi dovrebbero avere esattamente un figlio, ma almeno uno di essi è una foglia; ancora più banalmente, non è possibile avere k nodi con un figlio se $k > n$.
- Altrimenti, ci sono due possibilità: questo nodo ha esattamente un figlio, oppure ne ha due. Se ha un figlio, questo può essere destro o sinistro; i restanti $n - 1$ nodi devono contenere $k - 1$ nodi con max 1 figlio; questo spiega la componente $2T(n - 1, k - 1)$. Se ha due figli, siano i i nodi che vanno a sinistra; e siano $n - 1 - i$ i nodi che vanno a destra. Il numero di combinazioni possibili è quindi pari a $T(i, k) \cdot T(n - 1 - i, k)$, in quanto il numero di nodi con un figlio non va diminuito. Dobbiamo sommare tutti questi casi, con i che va da 1 a $n - 2$.

L'algoritmo per calcolare $T(n, k)$, basato su programmazione dinamica è il seguente:

k-limitato(int n, int k)	
int [][] $T \leftarrow$ new int [0...n][0...k]	% Initialized with \perp
k-limitato-rec (T, n, k)	
return $T[n, k]$	
<hr/>	
k-limitato-rec(int [][] T, int n, int k)	
if $n = 1$ and $k = 0$ then	
return 1	
if $k \geq n$ then	
return 0	
if $T[n, k] = \perp$ then	
$T[n, k] \leftarrow 2 \cdot$ k-limitato-rec ($T, n - 1, k - 1$)	
for $i \leftarrow 2$ to $n - 2$ do	
$T[n, k] = T[n, k] +$ k-limitato-rec (T, i, k) \cdot k-limitato-rec ($T, n - i - 1, k$)	
return $T[n, k]$	

Il costo della procedura è pari a $O(kn^2)$

La formula nel caso in cui i nodi con 2 figli siano limitati è la seguente:

$$T(n, k) = \begin{cases} 1 & n = 1 \wedge k = 0 \\ 0 & k \geq n \\ 2T(n - 1, k) + \sum_{i=1}^{n-2} T(i, k - 1)T(n - 1 - i, k - 1) & n > 1 \wedge k < n \end{cases}$$