

6 Alberi Binari di Ricerca

Facciamo un breve ripasso della struttura dati dizionario.

La struttura dati dizionario è un insieme dinamico che implementa le seguenti funzionalità:

- `ITEM lookup(ITEM v)` permette di cercare per una certa chiave
- `insert(ITEM k, ITEM v)` permette di associare una chiave ad un valore
- `remove(ITEM k)` permette di rimuovere una certa associazione chiave-valore

Tabella 1: Possibili implementazioni della struttura dati dizionario e delle relative complessità

Struttura dati	lookup	insert	remove
Vettore ordinato	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$
Vettore non ordinato	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)^*$	$\mathcal{O}(1)^*$
Lista non ordinata	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)^*$	$\mathcal{O}(1)^*$

* assumendo che l'elemento sia già stato trovato

Ora vedremo la struttura dati dizionario implementata come un albero binario di ricerca.

L'idea che ha portato allo sviluppo degli alberi binari di ricerca è quella di portare la ricerca binaria (o dicotomica) negli alberi, avendo quindi un meccanismo dinamico per la memorizzazione delle informazioni ma sulla ricerca binaria per recuperarle.

Le associazioni chiave-valore vengono memorizzate in un albero binario. Ogni nodo contiene una coppia $(k.key, u.value)$. Le chiavi devono appartenere ad un insieme *totalmente ordinato*, ossia dev'essere possibile stabilire, date due chiavi, stabilire una relazione di precedenza fra di loro.

Proprietà. *Le seguenti proprietà permettono di realizzare un algoritmo di ricerca dicotomica:*

1. *Le chiavi contenute nei nodi del sottoalbero sinistro di u sono minori di $u.key$*
2. *Le chiavi contenute nei nodi del sottoalbero destro di u sono maggiori di $u.key$*

Nota. *Queste proprietà valgono per ogni nodo e riguardano l'intero sottoalbero.*

Vedremo un algoritmo per verificare se un albero binario è un albero binario di ricerca più avanti (`verifyABR`), il quale controllerà se queste proprietà sono soddisfatte.

Specifica ABR	
<code>// CONTENUTO DI UN NODO</code>	<code>// ORDINAMENTO</code>
<code>TREE parent</code>	<code>TREE successorNode(TREE t)</code>
<code>TREE left</code>	<code>TREE predecessorNode(TREE t)</code>
<code>TREE right</code>	<code>TREE min</code>
<code>TREE key</code>	<code>TREE max</code>
<code>TREE value</code>	<code>// FUNZIONI DIZIONARIO</code>
<code>// GETTERS</code>	<code>ITEM lookup(ITEM k)</code>
<code>ITEM key</code>	<code>insert(ITEM k, ITEM v)</code>
<code>ITEM value</code>	<code>remove(ITEM k)</code>
<code>TREE left</code>	<code>// FUNZIONI INTERNE</code>
<code>TREE right</code>	<code>ITEM lookupNode</code>
<code>TREE parent</code>	<code>insertNode(TREE T, ITEM k, ITEM v)</code>
	<code>removeNode(TREE T, ITEM k)</code>

Ricerca di un nodo

Implementazione DICTIONARY con ABR

```
int lookup(ITEM k)
┌   TREE t = lookupNode(tree, k)
├   se t ≠ nil allora
├   │   ritorna t.value
├   allora
├   │   ritorna nil
└   ┌

// RICERCA DI UN NODO, iterativa
TREE lookupNode(TREE T, ITEM k)
┌   TREE u = T // parto dalla radice
├   finché u ≠ nil and u.key ≠ k fai
├   │   u ← iif(k < u.key, u.left, u.right)
└   ┌

// RICERCA DI UN NODO, ricorsiva
TREE lookupNode(TREE T, ITEM k)
┌   se T == nil or T.key == k allora
├   │   ritorna T
├   allora
├   │   ritorna lookupNode(iif(k < u.key, u.left, u.right), k)
└   ┌
```

Ricerca del minimo e del massimo

Implementazione DICTIONARY con ABR

<pre>// RICERCA DEL MINIMO TREE min(TREE <i>T</i>) ┌ TREE <i>u</i> = <i>T</i> // parto dalla radice ├ finché <i>u.left</i> ≠ nil fai ├ │ <i>u</i> ← <i>u.left</i> └ ┌ ritorna <i>u</i></pre>	<pre>// RICERCA DEL MASSIMO TREE max(TREE <i>T</i>) ┌ TREE <i>u</i> = <i>T</i> // parto dalla radice ├ finché <i>u.right</i> ≠ nil fai ├ │ <i>u</i> ← <i>u.right</i> └ ┌ ritorna <i>u</i></pre>
---	--

Ricerca del predecessore, successore

Implementazione DICTIONARY con ABR	
	// RICERCA DEL PREDECESSORE
	TREE successorNode(TREE t)
	se $t == \text{nil}$ allora
	ritorna t
(1)	se $t.\text{left} \neq \text{nil}$ allora
	ritorna $\max(t.\text{left})$
(2)	allora
	TREE $p \leftarrow t.\text{parent}$
	finché $p \neq \text{nil}$ and $t == p.\text{left}$ fai
	$t \leftarrow p$ // padre
	$p \leftarrow p.\text{parent}$ // nonno
	ritorna p
	// RICERCA DEL SUCCESSORE
	TREE successorNode(TREE t)
	se $t == \text{nil}$ allora
	ritorna t
(3)	se $t.\text{right} \neq \text{nil}$ allora
	ritorna $\min(t.\text{right})$
(4)	allora
	TREE $p \leftarrow t.\text{parent}$
	finché $p \neq \text{nil}$ and $t == p.\text{right}$ fai
	$t \leftarrow p$
	$p \leftarrow p.\text{parent}$
	ritorna p

- (1) u ha figlio sinistro: il successore è il minimo del sottoalbero destro di u ;
- (2) u non ha figlio sinistro: risalendo attraverso i padri, il successore è il primo avo v tale per cui u sta nel sottoalbero sinistro di v ;
- (3) u ha figlio destro: il successore è il minimo del sottoalbero destro di u ;
- (4) u non ha figlio destro: risalendo attraverso i padri, il successore è il primo avo v tale per cui u sta nel sottoalbero sinistro di v .

Inserimento di un nodo

La funzione `insertNode` inserisce un'associazione chiave-valore (k, v) nell'albero T . Se la chiave è già presente, sostituisce il valore associato; altrimenti, viene inserita una nuova associazione. Se l'albero è vuoto ($T == \text{nil}$) restituisce il primo nodo dell'albero, altrimenti restituisce l'albero T inalterato. La funzione ausiliaria `link` si occupa di inserire il nodo collegandolo al corretto genitore.

Implementazione `DICTIONARY` con `ABR`

```
// IMPLEMENTAZIONE DIZIONARIO
insert(ITEM  $k$ , ITEM  $v$ )
└    $tree = \text{insertNode}(tree, k, v)$ 

// INSERIMENTO DI UN NODO
TREE insertNode(TREE  $T$ , ITEM  $k$ , ITEM  $v$ )
┌   TREE  $p \leftarrow \text{nil}$  // padre
┌   TREE  $u \leftarrow T$  // parto dalla radice

    // cerco posizione inserimento
    finché  $u \neq \text{nil}$  and  $u.key \neq k$  fai
    ┌    $p \leftarrow u$ 
    └    $u \leftarrow \text{iif}(k < u.key, u.left, u.right)$ 

    se  $u \neq \text{nil}$  and  $u.key == k$  allora
    ┌   // la chiave è già presente, aggiorni il valore
    └    $u.value \leftarrow v$ 

    altrimenti
    ┌   // la chiave non è presente
    ┌   // creo un nodo coppia chiave-valore
    └   TREE  $new \leftarrow \text{Tree}(k, v)$ 

    ┌   // collego il nodo creato
    └   link( $p, new, k$ )

    se  $p == \text{nil}$  allora
    └    $T \leftarrow new$  // primo nodo ad essere inserito

    // restituisco l'albero non modificato o il nuovo nodo
    ritorna  $T$ 

// collega un nodo padre  $p$  ad un nodo figlio  $u$ 
link(TREE  $p$ , TREE  $u$ , ITEM  $x$ )
┌   se  $u \neq \text{nil}$  allora
└   ┌   // il nodo è stato cancellato
    └    $u.parent = p$  // registro il padre

    se  $p \neq \text{nil}$  allora
    ┌   // collego il nodo sul figlio corretto
    └    $u \leftarrow \text{iif}(x < p.key, p.left, p.right)$ 
```

Rimozione di un nodo

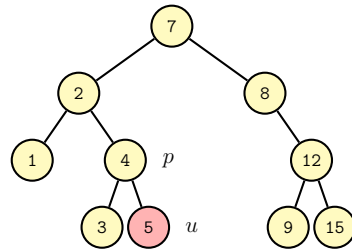
Rimuove il nodo contenente la chiave k dall'albero T , restituisce la radice dell'albero (potenzialmente cambiata).

Implementazione della rimozione di un nodo in un `DICTIONARY` realizzato tramite `ABR`

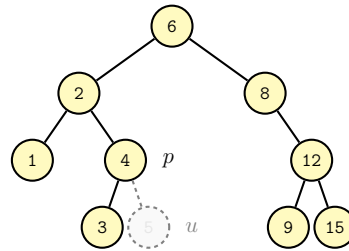
```
// IMPLEMENTAZIONE DIZIONARIO
remove(ITEM k)
└   TREE tree ← removeNode(tree, k)

// RIMOZIONE DI UN NODO
TREE removeNode(TREE T, ITEM k)
┌
│   // individuo il nodo da rimuovere
│   TREE u ← lookupNode(T, k)
│
│   // se il nodo da rimuovere è presente nell'albero...
│   se u ≠ nil allora
│       (1) // ...e non ha figli
│       se u.left == nil and u.right == nil allora
│           se u.parent ≠ nil allora // se esiste il padre
│               └   link(u.parent, nil, k) // rimuovo il puntatore al figlio
│
│               // rimuovo direttamente il nodo
│               delete u
│
│       (3) // ...ed ha due figli
│       se u.left ≠ nil and u.right ≠ nil allora
│           TREE s = successorNode // individuo il successore
│
│           link(s.parent, s.right, s.key) // collego il sottoalbero destro
│
│           // copio il successore
│           // nella posizione del nodo rimosso
│           u.key ← s.key
│           u.value ← s.value
│
│           // rimuovo il successore
│           delete s
│
│       (2) // ...ed ha un solo figlio (sinistro)
│       se u.left ≠ nil and u.right == nil allora
│           link(u.parent, u.left, k) // collega il figlio al padre
│
│           se u.parent == nil allora // se il padre non esiste
│               └   T == u.right // il figlio diventa la radice
│
│       // ...ed ha un solo figlio (sinistro)
│       altrimenti
│           link(u.parent, u.right, k) // collega il figlio al padre
│
│           se u.parent == nil allora // se il padre non esiste
│               └   T == u.right // il figlio diventa la radice
│
│   // restituisco la radice
│   ritorna T
```

- (1) se il nodo da eliminare u non ha figli: lo si elimina semplicemente, in quanto togliere una foglia non altera le proprietà di ordinamento dell'albero;

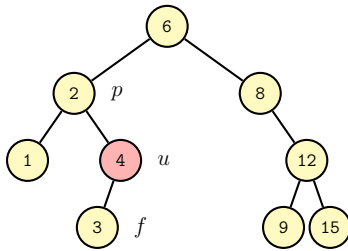


(a) Individuazione nodo foglia

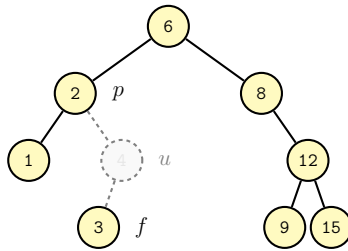


(b) Rimozione del nodo foglia

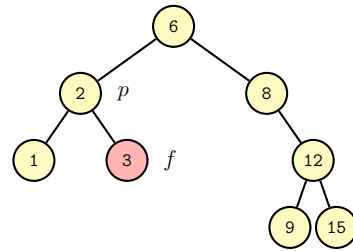
- (2) se il nodo da eliminare ha un solo figlio f (destro o sinistro): si elimina u e si collega f all'ex-padre p di u in sostituzione di u (tramite la funzione link); le proprietà di ordinamento non vengono alterate in quanto tutti i nodi del sottoalbero destro di p sono maggiori di p stesso;



(a) Individuazione nodo u da eliminare

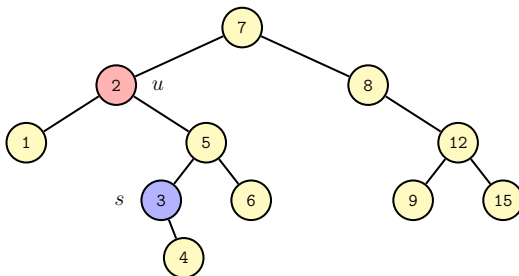


(b) Rimozione nodo u

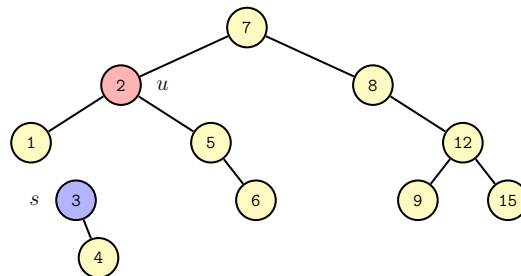


(c) Collegamento del sottoalbero f di u al padre p di u

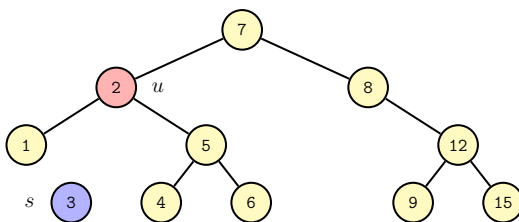
- (3) se il nodo da eliminare u ha due figli: cerchiamo di ricadere nel caso (2); (a) individuiamo il successore (predecessore) s di u , il quale è il più piccolo valore maggiore di u (il più grande valore minore di u) e di conseguenza non ha figli sinistri (non ha figli destri); (b) si "stacca" il successore s ; (c) si collega l'eventuale figlio destro di s al padre (tramite la funzione link) in quanto trovandosi nel sottoalbero sinistro del nonno vuol dire che sicuramente il suo valore non è maggiore del padre di s ; (d) si copia s su u , si rimuove il nodo s , così facendo rispetto comunque l'ordine parziale.



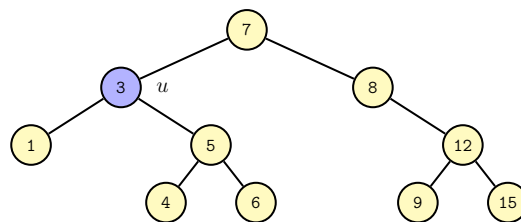
(a) Individuiamo il successore s di u



(b) Si "stacca" il successore s



(c) Si collega l'eventuale figlio destro di s al padre



(d) Si copia s su u , si rimuove il nodo s

Costo computazionale delle operazioni

Tutte le operazioni sono confinate ai nodi posizionati lungo un cammino semplice dalla radice ad una foglia. Quindi se l'altezza dell'albero è definita come h , il tempo di ricerca ha complessità $\mathcal{O}(h)$.

Il caso pessimo è rappresentato da un albero sbilanciato completamente a destra o completamente a sinistra. Questo caso può accadere quando si inseriscono ordinatamente i dati nell'albero. Questo caso, dove l'altezza $h = n$ porta ad una complessità $\mathcal{O}(n)$.

Mentre il caso ottimo è rappresentato da un albero bilanciato. Nell'esempio è mostrato un albero perfetto con $2^h - 1$ nodi, dove h è l'altezza. In questo caso la complessità è pari a $\mathcal{O}(\log n)$, ad esempio con $h = 2^3 - 1$ la complessità è $\mathcal{O}(\log h) = \mathcal{O}(\log 7) < 3$.

Ci domandiamo quindi quale sia l'altezza media di un albero binario di ricerca. Il caso "semplice" è quello di considerare che gli inserimenti avvengano in maniera statisticamente uniforme, è possibile dimostrare che l'altezza media è $\mathcal{O}(\log n)$, mentre il caso generale, ossia quello in cui avvengono sia inserimenti che cancellazioni è di difficile trattazione. Per evitare questa casistica si utilizzano varie tecniche per mantenere l'albero bilanciato. Per capire queste tecniche abbiamo prima bisogno di fissare un concetto.

Definizione 6.1 (Fattore di bilanciamento). *Il fattore di bilanciamento $\beta(v)$ di un nodo v è la massima differenza di altezza fra i sottoalberi di v .*

Negli anni sono state usate diverse tecniche, ora in disuso:

- Alberi AVL (1962): $\beta(v) \leq 1$ per ogni nodo v , il bilanciamento dell'albero avveniva tramite rotazioni;
- B-Alberi (1972): $\beta(v) = 0$ per ogni nodo v , sono specializzati per strutture in memoria secondaria;
- Alberi 2-3 (1983): $\beta(v) = 0$ per ogni nodo v , in cui ogni nodo può avere 0, 2 o 3 figli, se ad un nodo viene aggiunto un ulteriore figlio, il ramo viene spezzato in due rami con 2 figli ciascuno, mentre se ad un ramo con 2 figli ne viene tolto uno allora l'unico figlio rimanente viene collegato al padre, questo potrebbe riportare il problema al primo caso; il bilanciamento viene ottenuto quindi tramite merge/split, il grado è variabile.

Meccanismo di rotazione

Il meccanismo di rotazione ci permette di abbassare il fattore di sbilanciamento rispettando le proprietà di ordinamento parziale.

6.1 Alberi Binari di Ricerca bilanciati

Definizione 6.2 (Albero Red-Black). *Un albero red-black è un albero binario di ricerca in cui:*

- ogni nodo è colorato di rosso o di nero;
- le chiavi vengono mantenute solo nei nodi interni dell'albero;
- le foglie sono costituite solo da nodi speciali **Nil**.

I nodi speciali **Nil** sono dei nodi sentinella il cui unico scopo è quello di evitare di trattare diversamente i puntatori ai nodi, dai puntatori **nil**; infatti al posto di un puntatore **nil** si usa un puntatore ad un nodo **Nil**; in memoria ne esiste solo uno per motivi di economia. I nodi con figli **Nil** sono le foglie nell'albero binario di ricerca corrispondente.

Un albero red-black deve rispettare i seguenti vincoli:

1. La radice è nera;
2. Tutte le foglie sono nere;
3. Entrambi i figli di un nodo rosso sono neri;
4. Ogni cammino semplice da un nodo u ad una delle foglie contenute nel sottoalbero radicato in u hanno lo stesso numero di nodi neri.

Specifica RED-BLACK TREE

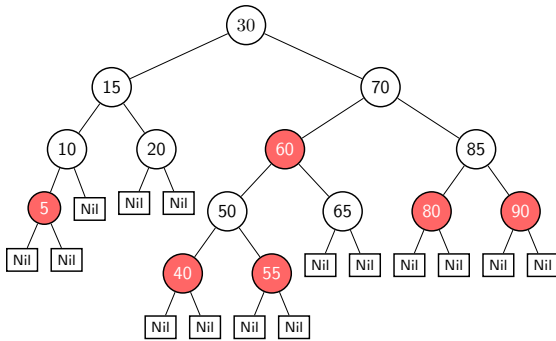
```
// CONTENUTO DI UN NODO
TREE parent
TREE left
TREE right
int color // RED o BLACK
TREE key
TREE value
```

Proprietà (Altezza nera di un nodo v). *L'altezza nera $b(v)$ di un nodo v è il numero di nodi neri lungo ogni percorso da v (escluso) ad ogni foglia (inclusa) del suo sottoalbero.*

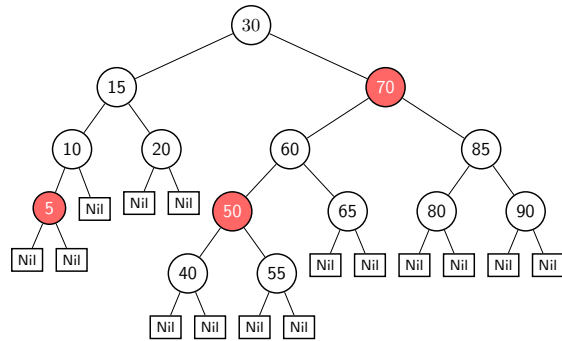
Proprietà (Altezza nera di un albero Red-Black). *L'altezza nera di un albero Red-Black è pari all'altezza nera della sua radice.*

Entrambe le proprietà sono ben definite perché tutti i percorsi hanno lo stesso numero di nodi neri (per via della regola no. 4).

Esempi

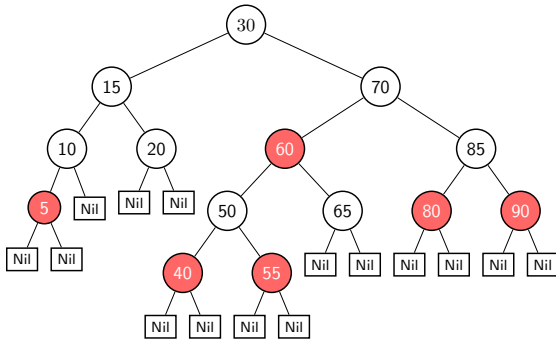


Es. 1 Entrambi i figli di un nodo rosso sono neri (3),
ma un nodo nero può avere figli neri.

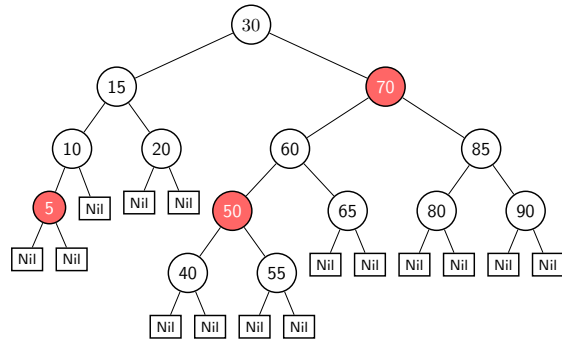


Es. 2 Ogni percorso da un nodo interno ad un nodo Nil
ha lo stesso numero di nodi neri (4).
Altezza nera di quest'albero: 3

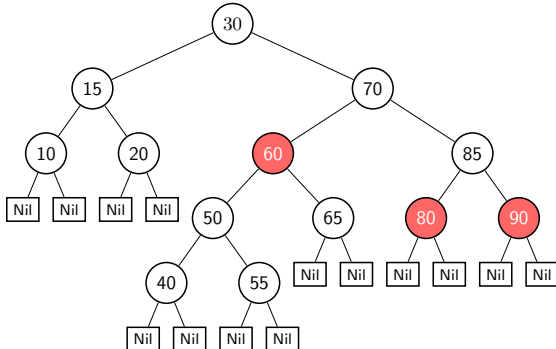
Lemma 1. *L'altezza totale di un albero è al più il doppio della sua altezza nera.*



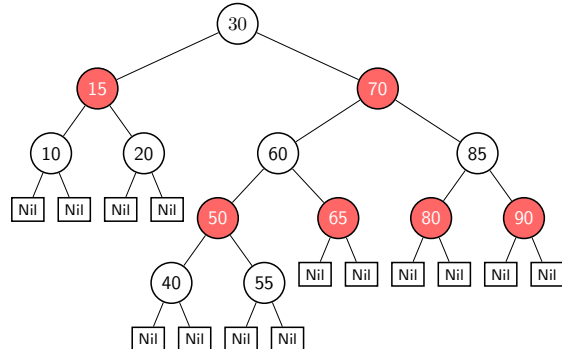
Es. 3 Più colorazioni sono possibili (versione 1).
Altezza di questo albero: 3



Es. 4 Più colorazioni sono possibili (versione 2).
Altezza di questo albero: 3



Es. 5 Cambiare colorazione può cambiare l'altezza nera.
Altezza di questo albero: 3



Es. 6 Cambiare colorazione può cambiare l'altezza nera.
Stesso albero, altezza nera di questo albero: 2

6.1.1 Inserimento di un nodo

Durante la modifica di un albero Red-Black è possibile che le condizioni di bilanciamento risultino violate. Quando i vincoli Red-Black vengono violate si può agire in due modi:

- modificando i colori nella zona della violazione;
- operando dei bilanciamenti dell'albero tramite rotazioni (a destra o a sinistra)

Rotazione a sinistra

Nota. *Il disegno differisce un minimo da quello che si trova sulle slide per motivi di comodità nel disegnarli.*



Rotazione a destra

La rotazione a destra è simmetrica e viene spiegata ed illustrata per completezza.

```
// effettua una rotazione verso destra
rotateRight(TREE p, TREE u, ITEM x)
// entrambi potrebbero essere nil
(1)  TREE y ← x.left
    TREE p ← x.parent
(2)  x.left ← y.right // il sottoalbero B diventa figlio sinistro di x
    se y.right ≠ nil allora
        | y.right.parent ← x
(3)  y.right ← x // x diventa figlio destro di y
    x.parent ← y
(4)  y.parent ← p // y diventa figlio di p
    se p ≠ nil allora
        | se p.right == x allora
            | | p.right ← y
            | p.left ← x
    ritorna y
```

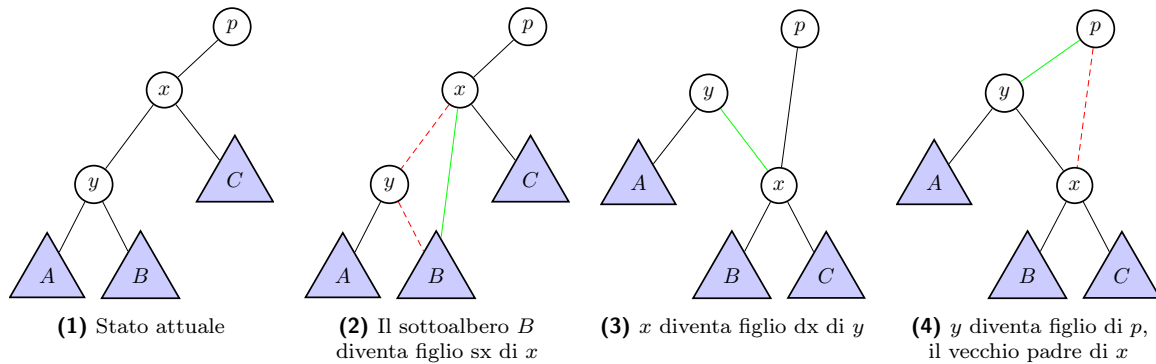


Figura 6: Esempio di rotazione a destra

Inserimento di un nodo in un albero Red-Black

Per inserire un nodo in un albero Red-Black si usa la stessa procedura usata per gli alberi binari di ricerca e si colora il nuovo nodo di RED. Il vincolo che violeremo è il terzo, quello che prevede che entrambi i figli di un nodo rosso siano neri.

Inserimento di un nodo in un RED-BLACK TREE

```
// Inserimento di un nodo in un albero Red-Black
insertNode(TREE T, TREE k, ITEM x)
    TREE p ← nil // riferimento al padre
    TREE u ← T // riferimento alla radice

    // cerco posizione inserimento
    finché u ≠ nil and u.key ≠ k fai
        p ← u
        u ← iff(k < u.key, u.left, u.right)

    se u ≠ nil and u.key == k allora
        // la chiave è già presente, aggiorno il valore
        u.value ← v
    altrimenti
        // la chiave non è presente
        // creo un nodo coppia chiave-valore
        TREE new ← Tree(k, v)

        // collego il nodo creato
        link(p, new, k)
        balancelInsert(new)

    se p == nil allora
        T ← new // primo nodo ad essere inserito

    // restituisco l'albero non modificato o il nuovo nodo
    ritorna T
```

Ci spostiamo verso l'alto lungo il percorso di inserimento; cercheremo di ripristinare il terzo vincolo; sposteremo le violazioni verso l'alto rispettando il quarto vincolo (mantenendo l'altezza nera dell'albero); al termine, coloreremo la radice di nero (rispettando il primo vincolo).

Nota. Le operazioni di ripristino sono necessarie solo quando due nodi consecutivi sono rossi, altrimenti non sono necessarie.