

Capitolo 6

Alberi Binari di Ricerca

6.1 Introduzione

Facciamo un breve ripasso della struttura dati dizionario. La struttura dati dizionario è un insieme dinamico che implementa le seguenti funzionalità:

- ITEM $\text{lookup}(\text{ITEM } v)$ permette di cercare per una certa chiave;
- $\text{insert}(\text{ITEM } k, \text{ITEM } v)$ permette di associare una chiave ad un valore;
- $\text{remove}(\text{ITEM } k)$ permette di rimuovere una certa associazione chiave-valore.

Tabella 6.1: Possibili implementazioni della struttura dati dizionario e relative complessità

Struttura dati	lookup	insert	remove
Vettore ordinato	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$
Vettore non ordinato	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)^*$	$\mathcal{O}(1)^*$
Lista non ordinata	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)^*$	$\mathcal{O}(1)^*$

* assumendo che l'elemento sia già stato trovato, $\mathcal{O}(n)$ altrimenti.

Ora vedremo la struttura dati dizionario implementata come un albero binario di ricerca.

L'idea che ha portato allo sviluppo degli alberi binari di ricerca è stata quella di portare la ricerca binaria (o dicotomica) negli alberi, avendo quindi un meccanismo dinamico per la memorizzazione delle informazioni ma basandosi sul meccanismo della ricerca binaria per recuperarle.

Le associazioni chiave-valore vengono memorizzate in un albero binario. Ogni nodo contiene una coppia ($u.key, u.value$). Le chiavi devono appartenere ad un insieme *totalmente ordinato*, ossia dev'essere possibile stabilire, date due chiavi, una relazione di precendenza fra di loro.

Proprietà. Le seguenti proprietà permettono di realizzare un algoritmo di ricerca dicotomica:

1. Le chiavi contenute nei nodi del sottoalbero sinistro di u sono minori di $u.key$;
2. Le chiavi contenute nei nodi del sottoalbero destro di u sono maggiori di $u.key$.

Nota. Queste proprietà valgono per ogni nodo e riguardano l'intero sottoalbero.

Vedremo un algoritmo per verificare se un albero binario è un albero binario di ricerca più avanti (verifyABR), il quale controllerà se queste proprietà sono soddisfatte.

Algoritmo 0: Specifica Alberi Binari di Ricerca (A B R)

```
// CONTENUTO DI UN NODO                                // ORDINAMENTO
TREE parent                                         TREE successorNode(TREE t)
TREE left                                           TREE predecessorNode(TREE t)
TREE right                                         TREE min
ITEM key                                            TREE max
ITEM value

// GETTERS
TREE parent                                         ITEM lookup(ITEM k)
TREE left                                           insert(ITEM k, ITEM v)
TREE right                                         remove(ITEM k)

// FUNZIONI INTERNE
ITEM key                                            ITEM lookupNode
ITEM value                                         insertNode(TREE T, ITEM k, ITEM v)
                                                     removeNode(TREE T, ITEM k)
```

Ricerca di un nodo

Algoritmo 1: Ricerca di un nodo in un dizionario realizzato tramite A B R

```
int lookup(ITEM k)
  TREE t ← lookupNode(tree, k)
  if t ≠ nil then
    |   return t.value
  else
    |   return nil

// RICERCA DI UN NODO, iterativa
TREE lookupNode(TREE T, ITEM k)
  TREE u ← T // parto dalla radice
  while u ≠ nil and u.key ≠ k do
    |   u ← iif(k < u.key, u.left, u.right)

// RICERCA DI UN NODO, ricorsiva
TREE lookupNode(TREE T, ITEM k)
  if T == nil or T.key == k then
    |   return T
  else
    |   return lookupNode(iif(k < u.key, u.left, u.right), k)
```

Ricerca del minimo e del massimo

Algoritmo 2: Ricerca del minimo e del massimo in un dizionario realizzato tramite ABR

<pre>// RICERCA DEL MINIMO TREE min(TREE T) TREE u = T // parto dalla radice while u.left ≠ nil do u ← u.left return u</pre>	<pre>// RICERCA DEL MASSIMO TREE max(TREE T) TREE u = T // parto dalla radice while u.right ≠ nil do u ← u.right return u</pre>
--	---

Ricerca del predecessore, successore

Algoritmo 3: Ricerca del predecessore e del successore di un nodo in un dizionario realizzato tramite ABR

<pre>// RICERCA DEL PREDECESSORE TREE predecessorNode(TREE t) if t == nil then return t if t.left ≠ nil then (1) return max(t.left) else (2) TREE p ← t.parent while p ≠ nil and t == p.left do t ← p // padre p ← p.parent // nonno return p</pre>	<pre>// RICERCA DEL SUCCESSORE TREE successorNode(TREE t) if t == nil then return t if t.right ≠ nil then (3) return min(t.right) else (4) TREE p ← t.parent while p ≠ nil and t == p.right do t ← p p ← p.parent return p</pre>
---	--

- (1) u ha figlio sinistro: il predecessore è il massimo del sottoalbero sinistro di u ;
- (2) u non ha figlio sinistro: risalendo attraverso i padri, il predecessore è il primo avo v tale per cui u sta nel sottoalbero destro di v ;
- (3) u ha figlio destro: il successore è il minimo del sottoalbero destro di u ;
- (4) u non ha figlio destro: risalendo attraverso i padri, il successore è il primo avo v tale per cui u sta nel sottoalbero sinistro di v .

Nota. Posso trovare **nil** se passo alla funzione `successorNode` il nodo massimo o alla funzione `predecessorNode` il minimo (usciranno dal ciclo restituendo p che sarà pari a **nil**).

Inserimento di un nodo

La funzione `insertNode` inserisce un'associazione chiave-valore (k, v) nell'albero T . Se la chiave è già presente, sostituisce il valore associato; altrimenti, viene inserita una nuova associazione. Se l'albero è vuoto ($T == \text{nil}$) restituisce il primo nodo dell'albero, altrimenti restituisce la radice di T inalterata.

La funzione ausiliaria `link` si occupa di inserire il nodo collegandolo al corretto genitore.

Algoritmo 4: Inserimento di un nodo in un DICTIONARY realizzato tramite ABR

```
// IMPLEMENTAZIONE DIZIONARIO
insert(ITEM k, ITEM v)
    tree ← insertNode(tree, k, v)

// INSERIMENTO DI UN NODO
TREE insertNode(TREE T, ITEM k, ITEM v)
    TREE p ← nil // padre
    TREE u ← T // parto dalla radice

    // cerco posizione inserimento
    while u ≠ nil and u.key ≠ k do
        p ← u
        u ← iif(k < u.key, u.left, u.right)

    if u ≠ nil and u.key == k then
        // la chiave è già presente, aggiorno il valore
        u.value ← v
    else
        // la chiave non è presente
        // creo un nodo coppia chiave-valore
        TREE new ← Tree(k, v)

        // collogo il nodo creato
        link(p, new, k)

        if p == nil then
            T ← new // primo nodo ad essere inserito

    // restituisco l'albero non modificato o il nuovo nodo
    return T

// collega un nodo padre p ad un nodo figlio u
link(TREE p, TREE u, ITEM x)
    if u ≠ nil then
        // il nodo è stato cancellato
        u.parent ← p // registro il padre

    if p ≠ nil then
        // collogo il nodo sul figlio corretto
        u ← iif(x < p.key, p.left, p.right)
```

Rimozione di un nodo

Rimuove il nodo contenente la chiave k dall'albero T , restituisce la radice dell'albero (potenzialmente cambiata).

Algoritmo 5: Rimozione di un nodo in un DICTIONARY realizzato tramite ABR

```

// IMPLEMENTAZIONE DIZIONARIO
remove(ITEM k)
    TREE tree ← removeNode(tree, k)

// RIMOZIONE DI UN NODO
TREE removeNode(TREE T, ITEM k)
    // individuo il nodo da rimuovere
    TREE u ← lookupNode(T, k)

    // se il nodo da rimuovere è presente nell'albero...
    if u ≠ nil then
        // ...e non ha figli
        if u.left == nil and u.right == nil then
            if u.parent == nil then // se esiste il padre
                link(u.parent, nil, k) // rimuovo il puntatore al figlio

            // rimuovo direttamente il nodo
            delete u
        (1) // ...ed ha due figli
        if u.left ≠ nil and u.right ≠ nil then
            TREE s ← successorNode // individuo il successore
            link(s.parent, s.right, s.key) // collego il sottoalbero destro

            // copio il successore
            // nella posizione del nodo rimosso
            u.key ← s.key
            u.value ← s.value

            // rimuovo il successore
            delete s
        (3) // ...ed ha un solo figlio (sinistro)
        if u.left ≠ nil and u.right == nil then
            link(u.parent, u.left, k) // collega il figlio al padre

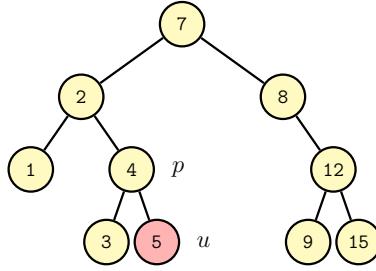
            if u.parent == nil then // se il padre non esiste
                T == u.right // il figlio diventa la radice
        (2) // ...ed ha un solo figlio (sinistro)
        else
            link(u.parent, u.right, k) // collega il figlio al padre

            if u.parent == nil then // se il padre non esiste
                T == u.right // il figlio diventa la radice

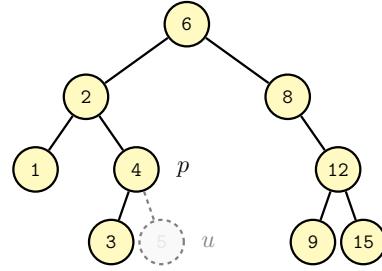
        // restituisco la radice
    return T

```

- (1) se il nodo da eliminare u non ha figli: lo si elimina semplicemente, in quanto togliere una foglia non altera le proprietà di ordinamento dell'albero;

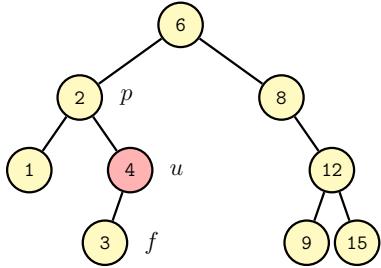


(a) Individuazione nodo foglia

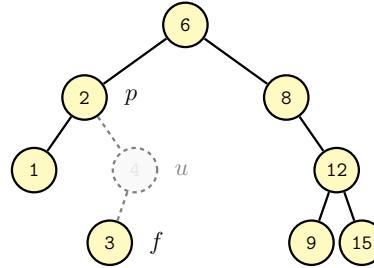


(b) Rimozione del nodo foglia

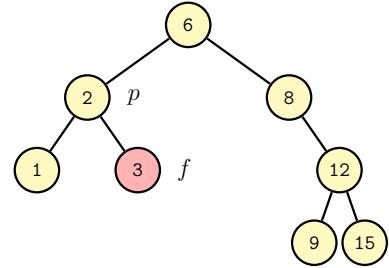
- (2) se il nodo da eliminare ha un solo figlio f (destro o sinistro): si elimina u e si collega f all'ex-padre p di u in sostituzione di u (tramite la funzione `link`); le proprietà di ordinamento non vengono alterate in quanto tutti i nodi del sottoalbero destro di p sono maggiori di p stesso;



(a) Individuazione nodo u da eliminare

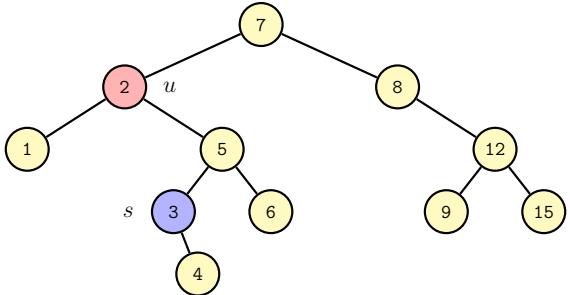


(b) Rimozione nodo u

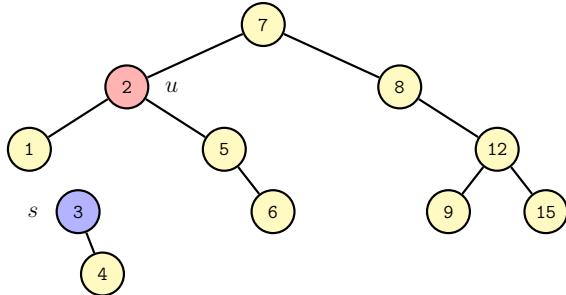


(c) Collegamento del sottoalbero f di u al padre p di u

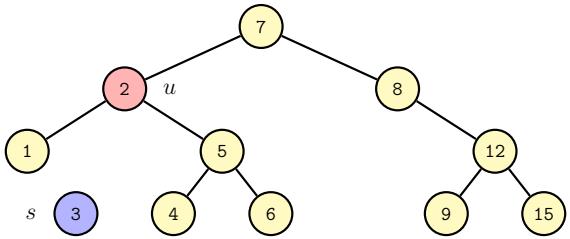
- (3) se il nodo da eliminare u ha due figli: cerchiamo di ricadere nel caso (2); (a) individuiamo il successore (predecessore) s di u , il quale è il più piccolo valore maggiore di u (il più grande valore minore di u) e di conseguenza non ha figli sinistri (non ha figli destri); (b) si “stacca” il successore s ; (c) si collega l’eventuale figlio destro di s al padre (tramite la funzione `link`) in quanto trovandosi nel sottoalbero sinistro del nonno vuol dire che sicuramente il suo valore non è maggiore del padre di s ; (d) si copia s su u , si rimuove il nodo s , così facendo rispetta comunque l’ordine parziale.



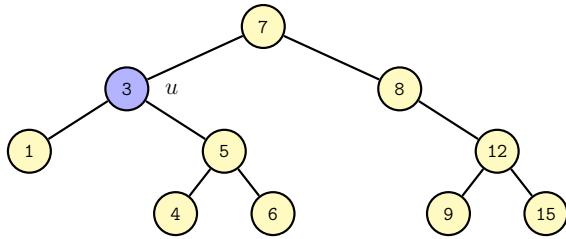
(a) Individuiamo il successore s di u



(b) Si “stacca” il successore s



(c) Si collega l’eventuale figlio destro di s al padre



(d) Si copia s su u , si rimuove il nodo s

Costo computazionale delle operazioni

Tutte le operazioni sono confinate ai nodi posizionati lungo un cammino semplice dalla radice ad una foglia. Quindi se l'altezza dell'albero è definita come h , il tempo di ricerca ha complessità $\mathcal{O}(h)$.

Il caso pessimo è rappresentato da un albero sbilanciato completamente a destra o completamente a sinistra. Questo caso può accadere quando si inseriscono ordinatamente i dati nell'albero. Questo caso, dove l'altezza $h = n$ porta ad una complessità $\mathcal{O}(n)$.

Mentre il caso ottimo è rappresentato da un albero perfettamente bilanciato. Nell'esempio è mostrato un albero perfetto con $2^h - 1$ nodi, dove h è l'altezza. In questo caso la complessità è pari a $\mathcal{O}(\log n)$, ad esempio con $h = 2^3 - 1$ la complessità è $\mathcal{O}(\log h) = \mathcal{O}(\log 7) < 3$.

Ci domandiamo quindi quale sia l'altezza media di un albero binario di ricerca. Il caso "semplice" è quello di considerare che gli inserimenti avvengano in maniera statisticamente uniforme, è possibile dimostrare che l'altezza media è $\mathcal{O}(\log n)$, mentre il caso generale, ossia quello in cui avvengono sia inserimenti che cancellazioni è di difficile trattazione. Per evitare questa casistica si utilizzano varie tecniche per mantenere l'albero bilanciato. Per capire queste tecniche abbiamo prima bisogno di fissare un concetto.

Definizione 6.1.1 (Fattore di bilanciamento). Il fattore di bilanciamento $\beta(v)$ di un nodo v è la massima differenza di altezza fra i sottoalberi di v .

Negli anni sono state usate diverse tecniche, ora in disuso:

- Alberi AVL (1962): $\beta(v) \leq 1$ per ogni nodo v , il bilanciamento dell'albero avveniva tramite rotazioni;
- B-Alberi (1972): $\beta(v) = 0$ per ogni nodo v , sono specializzati per strutture in memoria secondaria;
- Alberi 2-3 (1983): $\beta(v) = 0$ per ogni nodo v , in cui ogni nodo può avere 0, 2 o 3 figli, se ad un nodo viene aggiunto un ulteriore figlio, il ramo viene spezzato in due rami con 2 figli ciascuno, mentre se ad un ramo con 2 figli ne viene tolto uno allora l'unico figlio rimanente viene collegato al padre, questo potrebbe riportare il problema al primo caso; il bilanciamento viene ottenuto quindi tramite merge/split, il grado è variabile.

Nota (Meccanismo di rotazione). Il meccanismo di rotazione ci permette di abbassare il fattore di sbilanciamento rispettando le proprietà di ordinamento parziale.

6.2 Alberi Binari di Ricerca bilanciati

Definizione 6.2.1 (Albero Red-Black). Un albero red-black è un albero binario di ricerca in cui:

- ogni nodo è colorato di rosso o di nero;
- le chiavi vengono mantenute solo nei nodi interni dell'albero;
- le foglie sono costituite solo da nodi speciali **Nil**.

I nodi speciali **Nil** sono dei nodi sentinella il cui unico scopo è quello di evitare di trattare diversamente i puntatori ai nodi, dai puntatori **nil**; infatti al posto di un puntatore **nil** si usa un puntatore ad un nodo **Nil**; in memoria ne esiste solo uno per motivi di economia. I nodi con figli **Nil** sono le foglie nell'albero binario di ricerca corrispondente.

Un albero red-black deve rispettare i seguenti vincoli:

1. la radice è nera;
2. tutte le foglie sono nere;
3. entrambi i figli di un nodo rosso sono neri;
4. ogni cammino semplice da un nodo u ad una delle foglie contenute nel sottoalbero radicato in u ha lo stesso numero di nodi neri.

Algoritmo 5: Specifica RED-BLACK TREE

```
// CONTENUTO DI UN NODO
TREE parent
TREE left
TREE right
int color // RED O BLACK
ITEM key
ITEM value

// GETTERS
TREE parent
TREE left
TREE right
int color
ITEM key
ITEM value
```

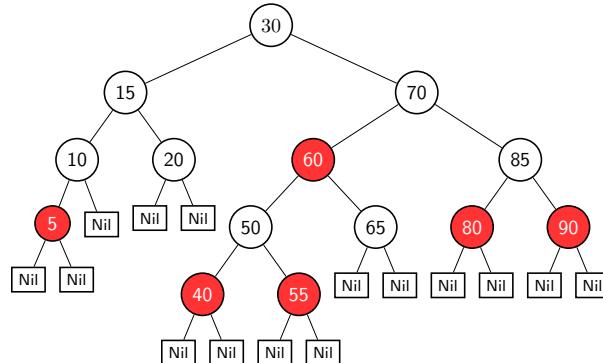
Proprietà (Altezza nera di un nodo v). *L'altezza nera $b(v)$ di un nodo v è il numero di nodi neri lungo ogni percorso da v (escluso) ad ogni foglia (inclusa) del suo sottoalbero.*

Proprietà (Altezza nera di un albero Red-Black). *L'altezza nera di un albero Red-Black è pari all'altezza nera della sua radice.*

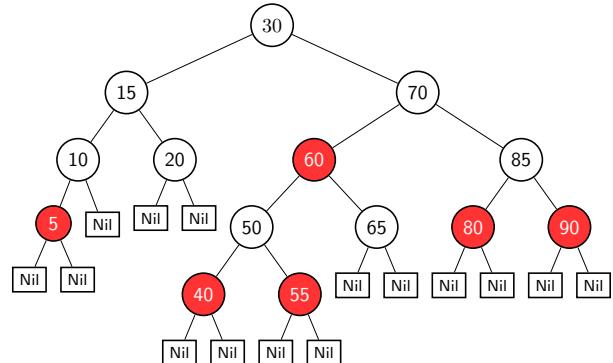
Entrambe le proprietà sono ben definite perché tutti i percorsi hanno lo stesso numero di nodi neri (per via della regola no. 4).

Esempi

Nelle seguenti figure i nodi neri sono segnati in bianco, mentre quelli rossi sono segnati.

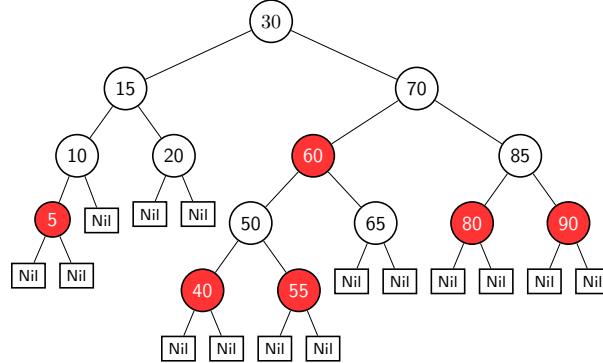


Es. 1 Entrambi i figli di un nodo rosso sono neri (3), ma un nodo nero può avere figli neri.

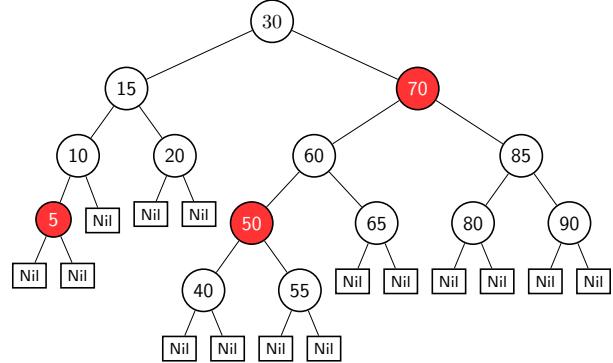


Es. 2 Ogni percorso da un nodo interno ad un nodo **Nil** ha lo stesso numero di nodi neri (4).
L'altezza nera di quest'albero è 3

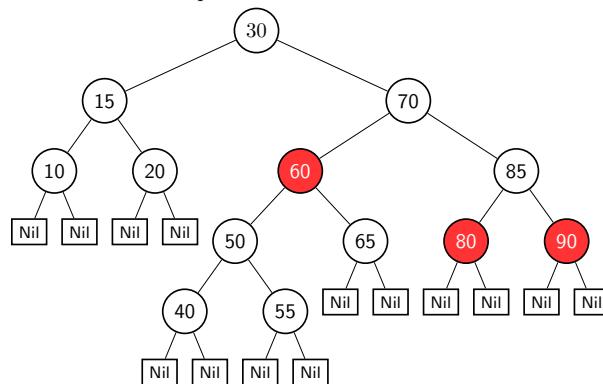
Lemma 1. *L'altezza totale di un albero è al più il doppio della sua altezza nera.*



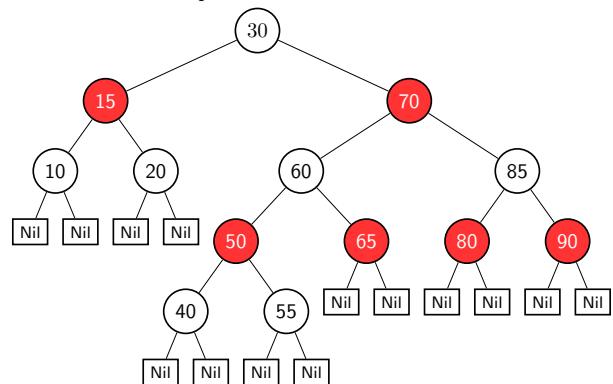
Es. 3 Più colorazioni sono possibili (versione 1).
L'altezza di questo albero è 3



Es. 4 Più colorazioni sono possibili (versione 2).
L'altezza di questo albero è 3



Es. 5 Cambiare colorazione può cambiare l'altezza nera.
L'altezza di questo albero è 3



Es. 6 Cambiare colorazione può cambiare l'altezza nera.
Stesso albero, l'altezza nera di questo albero è 2

6.2.1 Inserimento di un nodo

Durante la modifica di un albero Red-Black è possibile che le condizioni di bilanciamento risultino violate. Quando i vincoli Red-Black vengono violati si può agire in due modi:

- modificando i colori nella zona della violazione;
- operando dei bilanciamenti dell'albero tramite rotazioni (a destra o a sinistra)

6.2.2 Bilanciamento dell'albero

Rotazione a sinistra

Algoritmo 5: Bilanciamento dell'albero tramite rotazione a sinistra

```
// effettua una rotazione verso sinistra
TREE rotateLeft(TREE x)
(1)   TREE y ← x.right
      TREE p ← x.parent
(2)   x.right ← y.left // il sottoalbero B diventa figlio destro di x
      if y.left ≠ nil then
          | y.left.parent ← x
(3)   y.left ← x // x diventa figlio sinistro di y
      x.parent ← y
(4)   y.parent ← p // y diventa figlio di p
      if p ≠ nil then
          | if p.left == x then
              | | p.left ← y
          | else
              | | p.right ← y
      |
      |
      |
return y
```

Nota. Il disegno differisce minimamente da quello che si trova sulle slide per motivi di comodità nel disegnarli con L^AT_EX

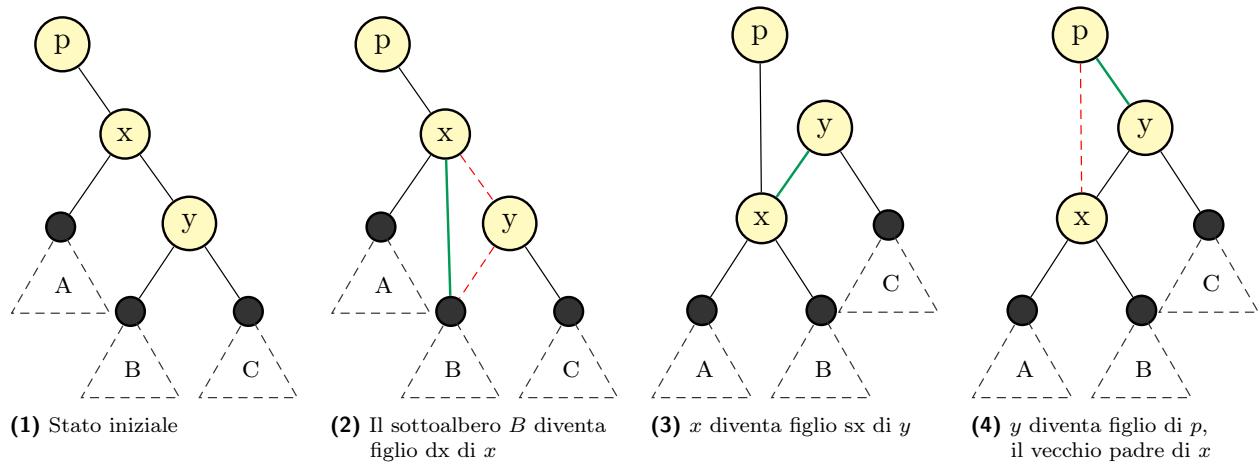


Figura 6.5: Esempio di rotazione a sinistra

Rotazione a destra

La rotazione a destra è simmetrica e viene spiegata ed illustrata per completezza.

Algoritmo 6: Bilanciamento dell'albero tramite rotazione a destra

```

// effettua una rotazione verso destra
TREE rotateRight(TREE x)
    // entrambi potrebbero essere nil
(1)    TREE y ← x.left
    TREE p ← x.parent
(2)    x.left ← y.right // il sottoalbero B diventa figlio sinistro di x
    if y.right ≠ nil then
        y.right.parent ← x
(3)    y.right ← x // x diventa figlio destro di y
    x.parent ← y
(4)    y.parent ← p // y diventa figlio di p
    if p ≠ nil then
        if p.right == x then
            p.right ← y
        p.left ← y
return y

```

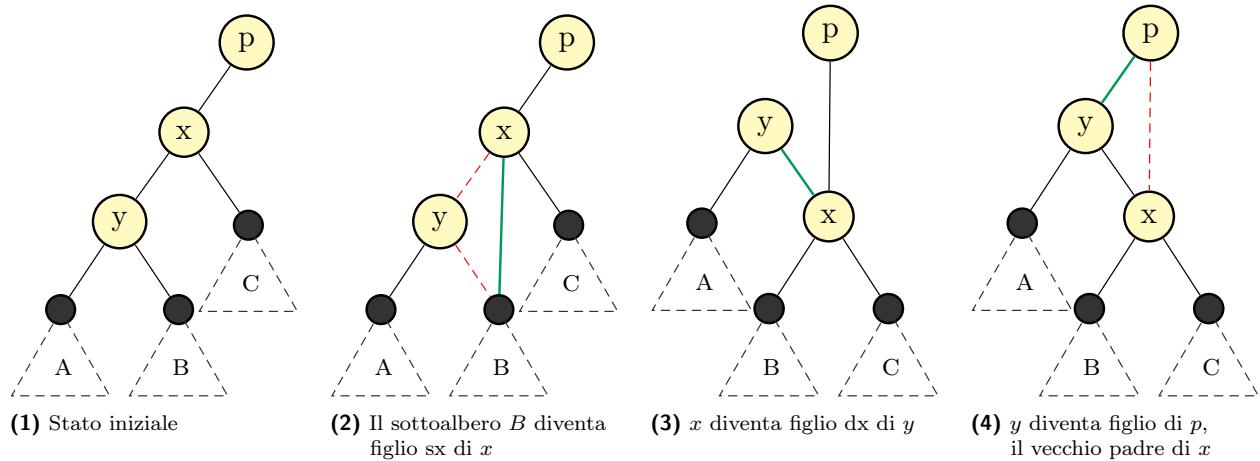


Figura 6.6: Esempio di rotazione a destra

Inserimento di un nodo in un albero binario bilanciato

Per inserire un nodo in un albero Red-Black si usa la stessa procedura usata per gli alberi binari di ricerca e si colora il nuovo nodo di RED. Il vincolo che potremmo violare è il terzo, quello che prevede che entrambi i figli di un nodo rosso siano neri.

Algoritmo 7: Inserimento di un nodo in un RED-BLACK TREE

```
// Inserimento di un nodo in un albero Red-Black
TREE insertNode(TREE T, TREE k, ITEM x)
    TREE p ← nil // riferimento al padre
    TREE u ← T // riferimento alla radice

    // cerco posizione inserimento
    while u ≠ nil and u.key ≠ k do
        p ← u
        u ← iif(k < u.key, u.left, u.right)

        if u ≠ nil and u.key == k then
            // la chiave è già presente, aggiorno il valore
            u.value ← v
        else
            // la chiave non è presente
            // creo un nodo coppia chiave-valore
            TREE new ← Tree(k, v)

            // collego il nodo creato
            link(p, new, k)
            balanceInsert(new)

            if p == nil then
                T ← new // primo nodo ad essere inserito

        // restituisco l'albero non modificato o il nuovo nodo
    return T
```

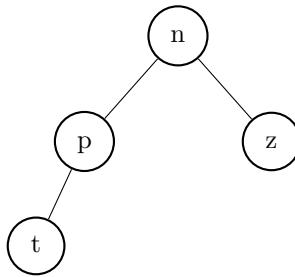
Nel caso in cui l'inserimento violi il terzo vincolo ci sposteremo verso l'alto lungo il percorso di inserimento; cercheremo di ripristinare il terzo vincolo; sposteremo le violazioni verso l'alto rispettando il quarto vincolo (mantenendo l'altezza nera dell'albero); al termine, coloreremo la radice di nero (onorando il primo vincolo).

Nota. Le operazioni di ripristino sono necessarie solo quando due nodi consecutivi sono rossi, altrimenti non sono necessarie.

Algoritmo 8: Bilanciamento dell'albero in seguito all'inserimento di un nodo rosso

```
balanceInsert(TREE t)
    t.color ← RED // coloro il nodo da inserire di rosso
    // t==nil è la condizione di fine ciclo
    while t ≠ nil do
        (0)      TREE p ← t.parent                                // riferimento al padre
        TREE n ← iif(p≠nil, p.parent, nil)                      // riferimento al nonno
        TREE z ← iif(n==nil, nil, iif(n.left==p, n.right, n.left)) // riferimento allo zio
        (1)      if p == nil then
                    t.color ← BLACK
                    t ← nil // fine
        (2)      else if p.color == BLACK then
                    t ← nil // fine
        (3)      else if z.color == RED then
                    p.color ← z.color ← BLACK
                    n.color ← RED
                    t ← n // passo il problema al nonno
        else
            (4a)     if (t == p.right) and (p == n.left) then
                        rotateLeft(p)
                        t ← p // passo il problema al padre
            (4b)     if (t == p.left) and (p == n.right) then
                        rotateRight(p)
                        t ← p // passo il problema al padre
            else
                (5a)     if (t == p.left) and (p == n.left) then
                            rotateRight(n)
                else if (t == p.right) and (p == n.right) then
                            rotateLeft(n)
                p.color ← BLACK
                n.color ← RED
                t ← nil // fine
```

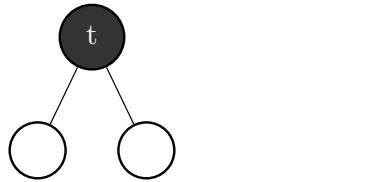
(o) dichiaro dei riferimento al padre, al nonno e allo zio



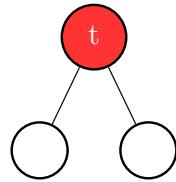
(1) il nuovo nodo t non ha padre; Questo può accadere in due casi:

- è il primo nodo ad essere inserito, oppure
- quando abbiamo spostato la violazione verso l'alto fino a raggiungere la radice

Ricoloriamo t di BLACK in quanto trovandosi sulla radice dell'albero non viola nessun vincolo.

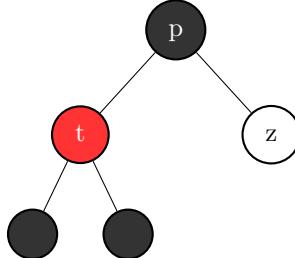


(a) Possibile violazione del primo vincolo

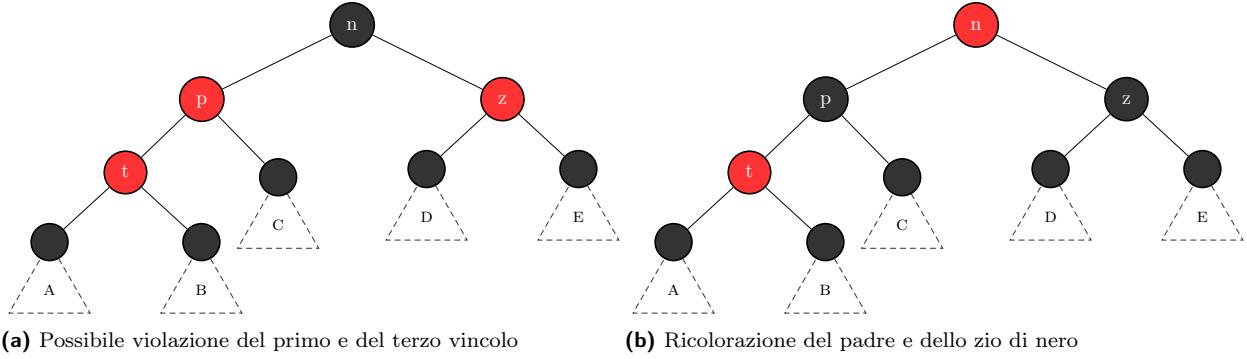


(b) Ricolorazione del nodo t

(2) il padre p di t è nero; anche in questo caso non abbiamo violato nessun vincolo perché avendo inserito un nodo rosso la lunghezza dei cammini neri non cambia e avendo inserito un nodo rosso figlio di un nodo nero non violiamo il terzo vincolo;



(3) il padre p e lo zio z sono rossi; Se z è rosso è possibile ricolorare di nero p e z , e di rosso n ; poiché tutti i cammini che passano per z e p passano anche per n , l'altezza nera non è cambiata (non abbiamo violato il quarto vincolo); Abbiamo spostato così il problema verso l'alto, più precisamente sul nonno che potrebbe aver violato il primo o il terzo vincolo, ovvero che n può essere una radice rossa o che abbia un padre rosso. Per risolvere il problema poniamo $t \leftarrow n$ e continuiamo il ciclo.



- (4a) il padre p è rosso e lo zio z è nero; si assuma che t sia figlio *destro* di p e che p sia figlio *sinistro* di n ; effettuando una rotazione a sinistra a partire dal nodo p scambiamo i ruoli di t e di p ottenendo il caso (5a), dove i nodi in conflitto sul terzo vincolo sono entrambi figli *sinistri* dei loro padri; i nodi coinvolti nel cambiamento sono p e t , entrambi rossi, quindi l'altezza nera non cambia; abbiamo spostato il problema al padre, quindi poniamo $t \leftarrow p$ e continuiamo il ciclo.
- (4b) speculare al caso (4a) (ossia che t sia figlio *sinistro* di p e che p sia figlio *destro* di n)

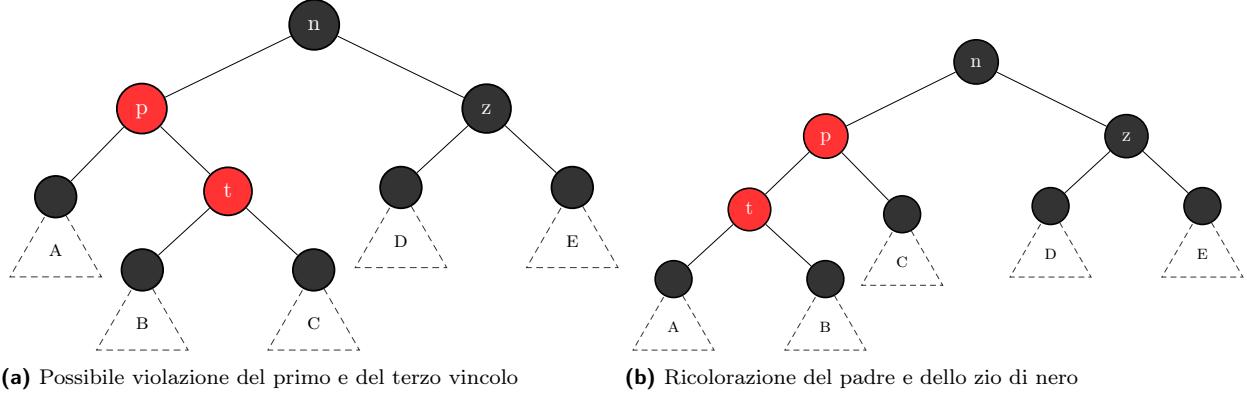
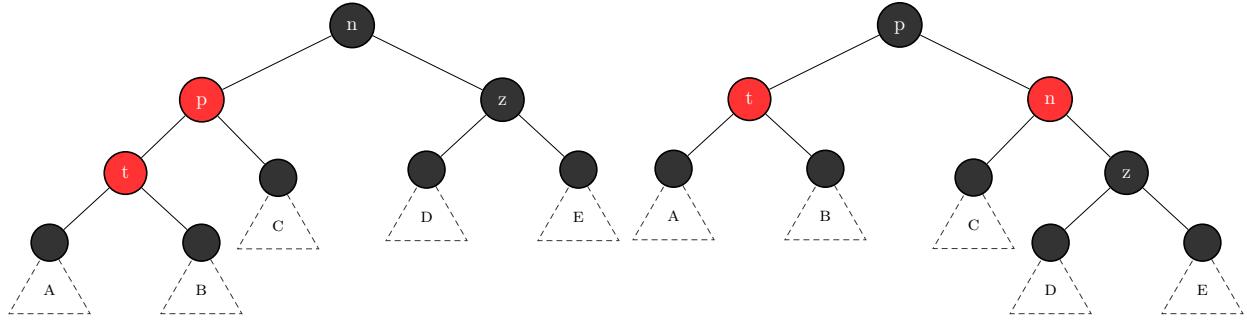


Figura 6.9: Rappresentazione grafica del caso (4a)

- (5a) anche in questo caso il padre p è rosso e lo zio z è nero; ma si assuma che t sia figlio *sinistro* di p e che p sia figlio *sinistro* di n ; effettuando una rotazione a destra a partire dal nodo n ci porta ad una situazione in cui t e n sono figli di p ; colorando p di nero ed n di rosso ci troviamo in una situazione in cui tutti i vincoli vengono rispettati (in particolare, l'altezza nera che passano per la radice è uguale a quella iniziale).
- (5b) speculare al caso (5a) (ossia che t sia figlio *destro* di p e che p sia figlio *destro* di n)



(a) Possibile violazione del primo e del terzo vincolo

(b) Ricolorazione del padre e dello zio di nero

Figura 6.10: Rappresentazione grafica del caso (5a)

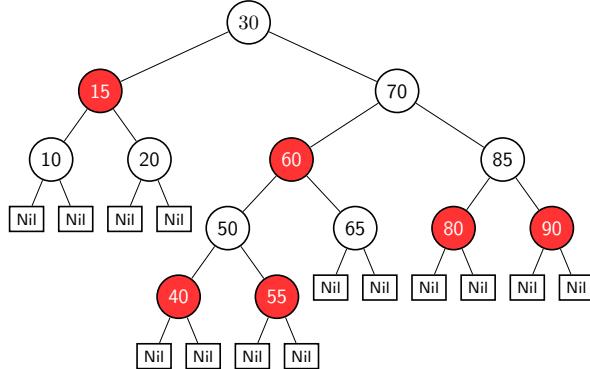
Complessità Ognuna di queste operazioni avviene in tempo costante. Ogni volta il problema può salire di uno o due livelli, in quanto l'altezza dell'albero è limitata da $\log n$, il nostro algoritmo è limitato superiormente da $\log n$, ossia $\mathcal{O}(\log n)$.

Più precisamente:

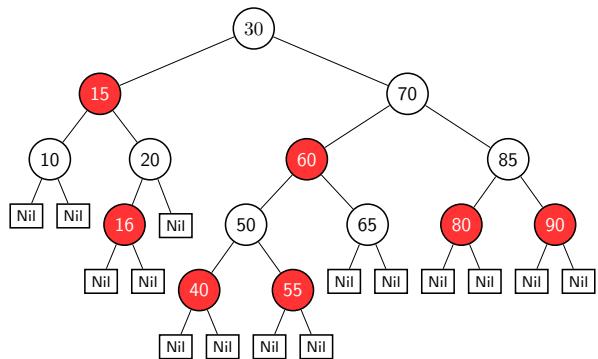
- $\mathcal{O}(\log n)$ per scendere fino al punto di inserimento;
- $\mathcal{O}(1)$ per effettuare l'inserimento;
- $\mathcal{O}(\log n)$ per risalire ed “aggiustare” (caso 3)

Esempi di inserimento

Proviamo ad inserire il nodo 16 nell'albero red-black sottostante.

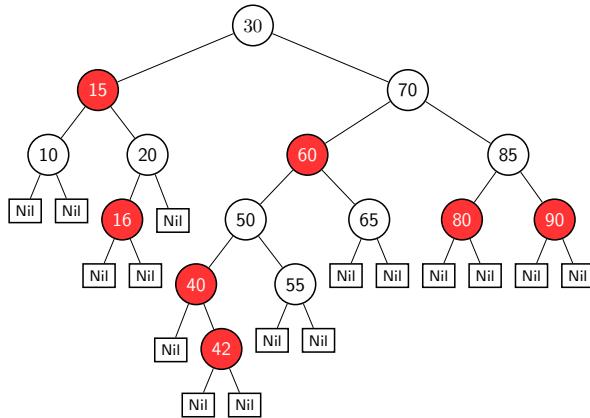


(a) Stato attuale

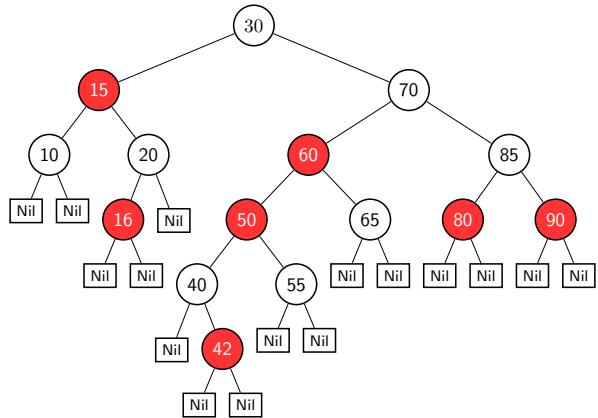


(b) Inserimento del nodo 16 andato a buon fine

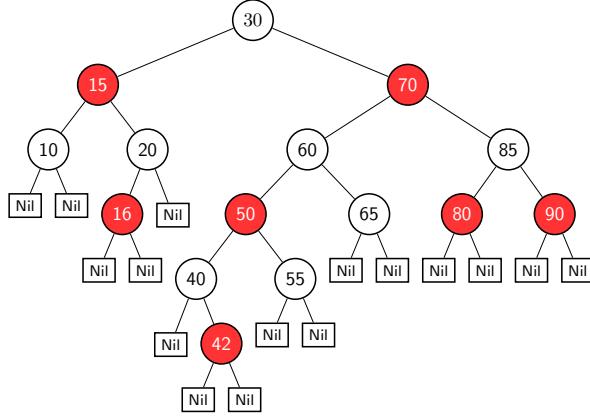
Non violiamo alcun vincolo in quanto il padre di 16 è nero e non abbiamo modificato l'altezza nera. Questo caso rappresenta il caso 2, l'inserimento del nodo 16 è quindi andato a buon fine. Alternativamente proviamo ad inserire il nodo 42 sempre nello stesso albero.



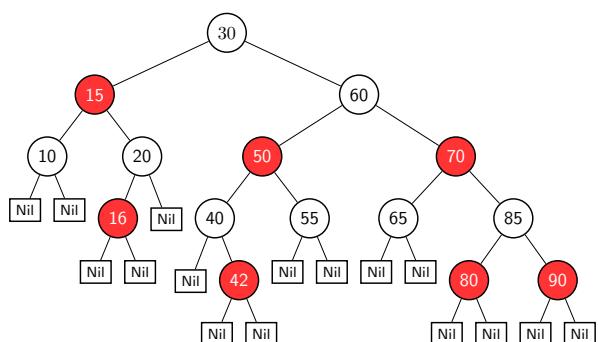
(a) Inserimento del nodo 42, violiamo il secondo vincolo, ci troviamo nel caso 3 (z rosso), quindi coloriamo di nero p e z e di rosso n , il problema si sposta ad n



(b) Violiamo il terzo vincolo, entrambi i nodi rossi sono figli sinistri quindi ci troviamo nel caso 5a, quindi coloriamo di nero p , di rosso n ...



(c) ... ed effettuiamo una rotazione a destra con perno n



(d) Abbiamo ripristinato il terzo vincolo, gli altri vincoli non sono mai stati violati, quindi abbiamo finito

Questo esempio ci mostra chiaramente come gli alberi Red-Black, attraverso il rispetto dei vincoli, tendano a mantenere bilanciato l'albero. Esiste una versione *top-down* dell'algoritmo di inserimento che scende fino interessato “aggiustando” l'albero man mano.

6.2.3 Rimozione di un nodo

Se il nodo rimosso è rosso l'altezza nera rimane invariata, non sono stati creati nodi rossi consecutivi e la radice resta nera. Il problema sorge quando si rimuovono nodi neri in quanto è possibile che siano stati violati il primo ed il terzo vincolo e sicuramente è stato violato il quarto vincolo in quanto cambia l'altezza nera. L'algoritmo `balanceDelete(T, t)` ripristina la proprietà Red-Black con rotazioni e cambiamenti di colore. Ci sono quattro casi possibili (e 4 simmetrici).

Algoritmo 8: Rimozione di un nodo in un RED-BLACK TREE

```

balanceDelete(TREE  $T$ , TREE  $t$ )
     $t.\text{color} \leftarrow \text{RED}$  // coloro il nodo da inserire di rosso
    while ( $t \neq T$ ) and ( $t.\text{color} == \text{BLACK}$ ) do
        TREE  $p \leftarrow t.\text{parent}$  // riferimento al padre
        if  $t == p.\text{left}$  then
            TREE  $f \leftarrow p.\text{right}$  // riferimento al fratello
            TREE  $ns \leftarrow f.\text{left}$  // riferimento al nipote sinistro
            TREE  $nd \leftarrow f.\text{right}$  // riferimento al nipote destro
            (1) if  $f.\text{color} == \text{RED}$  then
                 $p.\text{color} \leftarrow \text{RED}$ 
                 $f.\text{color} \leftarrow \text{BLACK}$ 
                 $\text{rotateLeft}(p)$ 
                //  $t$  viene lasciato inalterato, quindi si ricade nei casi 2, 3, 4
            (2) else
                if  $ns.\text{color} == nd.\text{color} == \text{BLACK}$  then
                     $f.\text{color} == \text{RED}$ 
                     $t \leftarrow p$  // passo il problema al padre
                (3) else if ( $ns.\text{color} == \text{RED}$ ) and ( $nd.\text{color} == \text{BLACK}$ ) then
                     $ns.\text{color} \leftarrow \text{BLACK}$ 
                     $f.\text{color} \leftarrow \text{RED}$ 
                     $\text{rotateRight}(f)$ 
                    //  $t$  viene lasciato inalterato, quindi si ricade nel caso 4
                (4) else if  $nd.\text{color} == \text{RED}$  then
                     $f.\text{color} == p.\text{color}$ 
                     $p.\text{color} \leftarrow \text{BLACK}$ 
                     $nd.\text{color} \leftarrow \text{BLACK}$ 
                     $\text{rotateLeft}(p)$ 
                     $t \leftarrow T$ 
            (5) else // casi speculari
        
```

La cancellazione è concettualmente complicata, ma è efficiente.

- (1) si passa ad uno dei casi 2, 3, 4;
- (2) si torna ad uno degli altri casi, ma risalendo di un livello l'albero;
- (3) si passa al caso 4;
- (4) si termina.

È possibile visitare al massimo un numero $\mathcal{O}(\log n)$ di casi, ognuno dei quali è gestito in $\mathcal{O}(1)$.