# Eserciziario di algoritmi

(Si può fare meglio di così?)

Emanuele Nardi

Compilato il 10 aprile 2019
`v1.0.0`

## Parte I
# Esercizi d'esame

## Premessa

Ho raccolto *tutti* gli esercizi d'esame dal 2011 al 2019 riportando fedelmente la consegna. A margine è riporta la data dalla quale l'esercizio è stato estratto, come il numero dello stesso. Enjoy!

## 1 Analisi della complessità

*ottobre 2014* ① Si considerino le seguenti equazioni di ricorrenza, per le quali i casi base sono tutti pari a $T(n) = 1$ per $n \leqslant 1$.

- $T(n) = T\left(2\frac{n}{3}\right) + 2n - 4$
- $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\sqrt{n}$
- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n} + 10\log n$
- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + 2n\log n + 10n$
- $T(n) = T(n-6) + n^{\frac{5}{6}}$

Identificare limiti superiori e inferiori per ognuna delle equazioni di ricorrenza (eventualmente stretti, utilizzando la notazione $\Theta(f(n))$), utilizzando un metodo a vostro piacimento. Assumendo che esse provengano dall'analisi di altrettanti algoritmi, quale algoritmo scegliereste?

*gennaio 2013* ① Supponendo che il caso base sia $\mathcal{O}(1)$ si calcoli l'andamento asintotico delle seguenti equazioni di ricorrenza:

- $A(n) = 4A\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\log n$
- $B(n) = 4B\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
- $C(n) = nC(n-1)$

Trovare un limite superiore e inferiore per la seguente ricorrenza:

*aprile 2011* ③
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 & \text{se } n > 1 \text{ è pari} \\ T(n-2) + 1 & \text{se } n > 1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

**Suggerimento.** *utilizzare i teoremi per avere un'idea della soluzione, ma poi sarà necessario utilizzare il metodo di sostituzione per una dimostrazione formale.*

Trovare un limite superiore e inferiore per la seguente ricorrenza, utilizzando il metodo di sostituzione:

*gennaio 2013* (4)
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T\left(\frac{n}{4}\right) + 1 & \text{se } n > 1 \text{ è pari} \\ T(n-4) + 1 & \text{se } n > 1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

Trovare *limiti superiori e inferiori* per la seguente equazione di ricorrenza, utilizzando il metodo di sostituzione (detto anche per tentativi).

*maggio 2011* (2) $3T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{5}\right) + n$

*febbraio 2014* (1) $\left(\sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} T\left(\frac{n}{2^i}\right)\right) + 1$

*maggio 2011* (1) $3T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{5}\right) + n$

*giugno 2011* (1) $\frac{11}{5}n + T\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{7}{10}n \right\rfloor\right)$

*gennaio 2015* (1) $T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 2^n$

*febbraio 2015* (1) $T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{4}} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{8}} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{16}} \right\rfloor\right) + n^2$

*giugno 2015* (1) $T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt[3]{5}} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt[3]{7}} \right\rfloor\right) + n^3$

*novembre 2015* (2a) $T\left(\left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{4}{5}n \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{3}{10}n \right\rfloor\right) + n^2$

*novembre 2015* (2b) $T\left(\left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{2}{5}n \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{7}{10}n \right\rfloor\right) + n^2$

Utilizzando un *qualunque metodo*, trovare i limiti inferiori e superiori per le seguenti ricorrenze (assumendo che $0 < \beta < 1$)

*novembre 2015* (1a) $T(\beta n) + n^\beta$

*novembre 2015* (1b) $\frac{1}{\beta}T(\beta n) + n^\beta$

Trovare *limiti superiori e inferiori* per le seguenti equazioni di ricorrenza:

*settembre 2011* (1) $4T\left(\sqrt{n}\right) + \log^2 n$

*gennaio 2011* (1) $T\left(\left\lfloor \frac{n}{c} \right\rfloor\right) + \Theta(1)$

*gennaio 2016* (1) $\frac{1}{2}T(n-1) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

$T\left(\frac{1}{2}n\right) + T\left(\frac{1}{4}n\right) + T\left(\frac{1}{6}n\right) + T\left(\frac{1}{12}n\right) + 1$

giugno 2016 ① $T\left(\frac{1}{10}n\right) + T\left(\frac{5}{6}n\right) + T\left(\frac{1}{16}n\right) + n$

Trovate il *limite inferiore* per la sequente equazione di ricorrenza:

luglio 2016 ① $2T\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - 5\right) + n^{\frac{\pi}{2}}$

agosto 2016 ① $T\left(\left\lfloor\frac{n}{15}\right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor\frac{n}{10}\right\rfloor\right) + 2T\left(\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor\right) + \sqrt{n}$

Trovate il *limite superiore* per la sequente equazione di ricorrenza:, utilizzando il metodo di sostituzione (detto anche per tentativi), facendo particolare attenzione ai casi base.

luglio 2011 ① $\sqrt{n}T\left(\sqrt{n}\right) + \sqrt{n}$

novembre 2016 ① $27T\left(\left\lfloor\frac{n}{9}\right\rfloor\right) + n\sqrt{n}$

Trovate il *limite inferiore* per la sequente equazione di ricorrenza:, utilizzando il metodo di sostituzione (detto anche per tentativi), facendo particolare attenzione ai casi base.

novembre 2016 ① $64T\left(\left\lfloor\frac{n}{16}\right\rfloor\right) + n\sqrt{n}$

Trovare *un limite superiore ed un limite inferiore*, i più stretti possibili, per la seguente equazione di ricorrenza, utilizzando il metodo di sostituzione.

luglio 2013 ① $2T\left(2\frac{n}{3}\right) + n^2$

maggio 2012 ① $2T\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right) + \sqrt{n}$

febbraio 2017 ① $2T\left(\frac{n}{8}\right) + \sqrt[3]{n}$

Trovare i *limiti superiori e inferiori* più stretti possibili per la seguente equazione di ricorrenza:

settembre 2017 ① $3T\left(\frac{n}{3}\right) + 6T\left(\frac{n}{6}\right) + 54T\left(\frac{n}{12}\right) + n^2$

Trovare i *limiti superiori e inferiori* più stretti possibili per la seguente equazione di ricorrenza, utilizzando il metodo di sostituzione:

gennaio 2018 ① $T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + n\log n$

Si consideri la seguente equazione di ricorrenza, parametrizzata rispetto al valore $k$:

luglio 2018 ① $k^2T_k\left(\frac{n}{k}\right) + n^{\frac{k}{2}}$

Supponete che esistano tre algoritmi, con complessità $T_2(n)$, $T_3(n)$, $T_4(n)$. Quale algoritmo scartereste? Giustificate la risposta.
Trovare i limiti *superiori e inferiori* il più stretti possibili per la seguente equazione di ricorrenza:

agosto 2018 ① $3T\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right) + 4T\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right) + 12T\left(\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor\right) + n^2$

gennaio 2019 ① $$4T\left(\left\lfloor \frac{n}{4}\right\rfloor\right)+9T\left(\left\lfloor \frac{n}{9}\right\rfloor\right)+n\sqrt{n}$$

Si trovino, tramite il *metodo della sostituzione*, un limite superiore ed un limite inferiore per la seguente ricorrenza ($m$ costante intera positiva):

gennaio 2019 ① $$T(m)+T(n-m)+1$$

Fare particolare attenzione ai casi base.
Trovare un *limite superiore*, il più stretto possibile, per la seguente equazione di ricorrenza, utilizzando il metodo di sostituzione.

giugno 2014 ① $$2T\left(\left\lfloor \frac{n}{8}\right\rfloor\right)+\sqrt[3]{n}$$

luglio 2014 ① $$\min_{1\leqslant k\leqslant n-1}\{T[k]+T(n-k)\}+1$$

settembre 2014 ① $$6T\left(\frac{n}{8}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)+1$$

## 1.1 Trovare la complessità di una procedura

giugno 2013 ① Trovare un limite superiore e un limite inferiore alla complessita della seguente procedura:

```
// chiamata iniziale
fun(V, 1, n)
fun(int[ ] V, int i, int j)
    se i = j allora
        ritorna 1
    int T = 0
    da k = i fino a j fai
        T = T + V[k]
    ritorna T + fun(V, i, j − 1) + fun(V, i, i + ⌊√(j − i + 1)⌋)
```

gennaio 2014 ① Calcolare la complessità della procedura mistery descritto di seguito:

```
mistery(int n)
    int i, j, s, k
    s ← 0
    da i ← 1 fino a n fai
        j ← 1
        finché j < n fai
            k ← 1
            finché k ⩽ n fai
                s++
                k *= 3
            j *= 2
```

aprile 2014 ①

Trovare un *limite superiore* alla complessita della seguente procedura. La procedura random($n$) ha complessità $\mathcal{O}(1)$ e ritorna un intero casuale compreso fra 0 e $n-1$.

```
mistery(int[ ] A, int i, int j)
    se j < i allora ritorna 0
    se i = j allora ritorna 2 · A[i]
    int n ← j − i + 1
    int sum ← 0
    int k ← random(n + 1)
    da r ← 1 fino a 2^k fai
        sum += A[i + random(n)]
    ritorna sum + mistery(A, i, ⌊(i+j)/2⌋) + mistery(A, ⌊(i+j)/2⌋ + 1, j)
```