Algoritmi e Strutture Dati - 01/09/15

Esercizio 1

E' possibile utilizzare una struttura dati di tipo red-black trees come dizionario per memorizzare, per ognuno dei valori distinti presenti, il numero di occorrenze. E' poi sufficiente scorrere l'albero binario di ricerca utilizzando un iteratore ordinato (operazione possibile grazie alle funzioni minimo e successore presenti in un albero ABR), in modo da ottenere i valori in ordine e quindi scrivere ripetutamente il valore, tante volte quante sono le sue ripetizioni. Il costo computazionale è pari a $O(n \log m)$, in quanto è necessario cercare gli n valori in un albero che contiene al più m elementi.

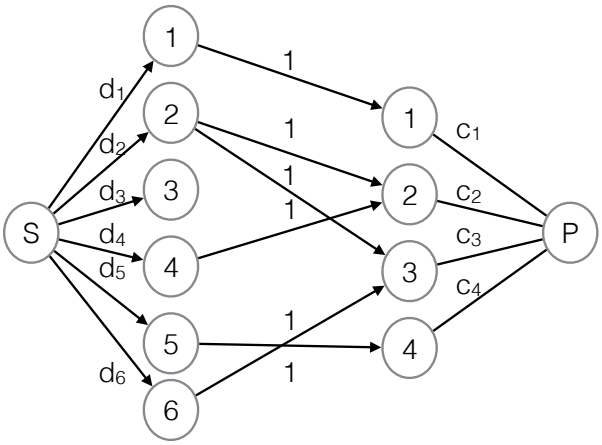
```
repeatSort(integer[] A, integer n)
    DICTIONARY D ← new RedBlackTree()
    for i ← 1 to n do
        ITEM v ← D.lookup(A[i])
        if v = nil then
            v ← 0
        D.insert(A[i], v + 1)
    integer j ← 1
    for v ∈ D.keys() do                          % Itera sulle chiave in ordine crescente
        for k ← 1 to D.lookup(v) do
            A[j] ← v
            j ← j + 1
```

Una versione più veloce utilizza una tabella hash; tuttavia, la tabella hash non garantisce l'ordinamento; è quindi necessario copiare tutte le chiavi (non ordinate) in un vettore e quindi ordinare tale vettore. Il costo computazionale è quindi $O(n + m \log m)$, dove $O(n)$ deriva dall'inserimento di tutti gli elementi nella tabella hash, mentre $O(m \log m)$ deriva dall'ordinamento di tali valori.

```
repeatSort(integer[] A, integer n)
    DICTIONARY D ← new HashTable()
    for i ← 1 to n do
        ITEM v ← D.lookup(A[i])
        if v = nil then
            v ← 0
        D.insert(A[i], v + 1)
    integer m ← D.size()
    integer B ← new integer[1 . . . m] integer j ← 1
    for v ∈ D.keys() do                          % Itera sulle chiave in ordine crescente
        B[j] ← v
        j ← j + 1
    integer k
    for j ← 1 to m do
        for k ← 1 to D.lookup(B[j]) do
            A[k] ← B[j]
            k ← k + 1
```

Esercizio 2

Il problema è risolvibile con una rete di flusso come quella mostrata in figura.



Definiamo:

- $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$, il numero totale di partecipanti
- $W = \sum_{i=1}^{n} |w_i|$, il numero totale di richieste
- $C = \sum_{j=1}^{m} c_j$, la capacità totale dei workshop

L'insieme dei nodi è così costituito:

- una supersorgente,
- un nodo per ognuna delle società,
- un nodo per ognuno dei workshop;
- un superpozzo,

per un totale di $|V| = m + n + 2$ nodi.
L'insieme degli archi è così costituito:

- un arco da supersorgente ad ogni società i, con capacità pari a d_i (il numero di dipendenti mandati alla conferenza),
- un arco da ogni società i all'insieme dei workshop contenuti in W_i, con peso 1,
- un arco da ogni workshop j al superpozzo, con capacità pari al numero massimo di partecipanti c_j,

per un totale di $|E| = m + n + W$ archi.
Il flusso massimo è limitato superiormente da $\min(D, W, C)$ (per via del teorema massimo flusso, minimo taglio). Il costo totale è quindi limitato superiormente da $\min(D, W, C)(2m + 2n + W + 2)$.

Esercizio 3

La dimostrazione è semplice: il valore massimo del vettore è necessariamente più grande dei suoi vicini, essendo questi distinti, e quindi è un picco.
Dato un sottovettore $A[i \dots j]$ con almeno tre elementi in cui è contenuto sicuramente un picco, si consideri l'elemento centrale $m = \lfloor (i + j)/2 \rfloor$. Se è un picco, abbiamo trovato la nostra soluzione.
Altrimenti, si considerino i suoi vicini.

- Se $A[m-1] > A[m] > A[m+1]$, è possibile che nel sottovettore destro $A[m+1 \dots j]$ non vi sia alcun picco, in quanto il sottovettorepotrebbe essere monotono decrescente. Il picco si troverà quindi nel sottovettore sinistro $A[i \dots m-1]$.
- Se $A[m-1] < A[m] < A[m+1]$, è possibile che nel sottovettore sinistro $A[i \dots m-1]$ non vi sia alcun picco, in quanto il sottovettore potrebbe essere monotono crescente. Il picco si troverà quindi nel sottovettore destro $A[m+1 \dots j]$.
- Se $A[m-1] > A[m] < A[m+1]$, ci troviamo in una valle, e quindi esiste sicuramente un picco sia a destra che a sinistra; è quindi sufficiente scegliere un lato.

Se il sottovettore $A[i \dots j]$ in cui è contenuto sicuramente un picco ha due elementi ($m = i$ per via delll'operazione $\lfloor \rfloor$); se questo non è un picco, allora il picco si trova nell'elemento j.
Se il sottovettore $A[i \dots j]$ in cui è contenuto sicuramente un picco ha un elemento ($m = i = j$), allora m è sicuramente un picco e non necessita di caso speciale.
E' possibile scrivere il codice nel modo seguente:

```
findPeak(integer[] A, integer n, integer i, integer j)
    integer m ← ⌊(i + j)/2⌋
    if (m = 1 or A[m − 1] < A[m]) and (m = n or A[m] > A[m + 1]) then
        return m
    if j − i = 1 then
        return j
    if A[m − 1] > A[m] then
        return findPeak(A, n, i, m − 1)
    else
        return findPeak(A, n, m + 1, j)
```

La complessità è $O(\log n)$, in quanto simile alla ricerca dicotomica.

Esercizio 4

Questo è un problema interessante, che è stato studiato a lungo in ambito di ricerca e per cui esistono soluzioni in tempo lineare.[1]
Per quanto riguarda questo compito, è sufficiente trovare una soluzione in tempo quadratico utilizzando la programmazione dinamica.
Sia $M[i, j]$ la lunghezza della più lunga sottostringa palindroma contenuta in nella stringa $S[i \dots j]$. Si noti che $j - i + 1$ è la lunghezza della sottostringa, e quindi se $M[i, j] = j - i + 1$, allora l'intera sottostringa è palindroma.
Possono darsi i seguenti casi:

- Il caso base corrisponde a sottostringhe con 0 caratteri ($j - i + 1 = 0$) oppure sottostringhe con 1 caratteri ($j - i + 1 = 1$), che ovviamente sono palindrome. In questi casi, $M[i, j] = j - i + 1$.
- Se $s[i] = s[j]$ sono uguali, e $s[i+1\ ldots j-1]$ è palindroma (questo avviene se $M[i+1, j-1] = (j-1)-(i+1)+1 = j-i-1$), allora la stringa $s[i \dots j]$ è palindroma, e quindi $M[i, j] = j - i + 1$.
- Altrimenti, prendiamo la sottostringa palindroma massimale scegliendo fra $M[i + 1, j]$ e $M[i, j - 1]$.

Riassumendo:

$$M[i,j] = \begin{cases} j-i+1 & j-i+1 \leq 1 \\ j-i+1 & s[i] = s[j] \wedge M[i+1, j-1] = j-i-1 \\ \max\{M[i, j-1], M[i+1, j]\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Utilizzando memoization, traduciamo la formula ricorsiva nel seguente codice che prende in input una tabella M inizializzata a **nil**.

```
maxPalindromeSubstring(ITEM[] s, integer n, integer i, integer j, integer[][] M)
    if j − i + 1 ≤ 1 then
        return j − i + 1
    if s[i] = s[j] and maxPalindromeSubstring(s, n, i + 1, j − 1, M) = j − i + 1 then
        return j − i + 1
    return max{maxPalindromeSubstring(s, n, i + 1, j, M), maxPalindromeSubstring(s, n, i, j − 1, M)}
```

La complessità è $O(n^2)$, dovendo al limite riempire tutta la tabella M di dimensione $n \times n$.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Longest_palindromic_substring