Eserciziario di algoritmi

(Si può fare meglio di così?)

Emanuele Nardi

Compilato il 12 giugno 2019
v1.0.0

Parte I
Esercizi d'esame

Premessa

Ho raccolto *tutti* gli esercizi d'esame dal 2011 al 2019 riportando fedelmente la consegna. A margine è riporta la data dell'esame dalla quale l'esercizio è stato estratto, come il numero dello stesso. Enjoy!

1 Analisi della complessità

31 ottobre 2014 ① Si considerino le seguenti equazioni di ricorrenza, per le quali i casi base sono tutti pari a $T(n) = 1$ per $n \leqslant 1$.

- $T(n) = T\left(2\frac{n}{3}\right) + 2n - 4$
- $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\sqrt{n}$
- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n} + 10\log n$
- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + 2n\log n + 10n$
- $T(n) = T(n-6) + n^{\frac{5}{6}}$

Identificare limiti superiori e inferiori per ognuna delle equazioni di ricorrenza (eventualmente stretti, utilizzando la notazione $\Theta(f(n))$), utilizzando un metodo a vostro piacimento. Assumendo che esse provengano dall'analisi di altrettanti algoritmi, quale algoritmo scegliereste?

28 gennaio 2013 ① Supponendo che il caso base sia $\mathcal{O}(1)$ si calcoli l'andamento asintotico delle seguenti equazioni di ricorrenza:

- $A(n) = 4A\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\log n$
- $B(n) = 4B\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
- $C(n) = nC(n-1)$

Trovare un limite superiore e inferiore per la seguente ricorrenza:

11 aprile 2011 ③

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 & \text{se } n > 1 \text{ è pari} \\ T(n-2) + 1 & \text{se } n > 1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

Suggerimento. *utilizzare i teoremi per avere un'idea della soluzione, ma poi sarà necessario utilizzare il metodo di sostituzione per una dimostrazione formale.*

Trovare un limite superiore e inferiore per la seguente ricorrenza, utilizzando il metodo di sostituzione:

7 gennaio 2013 (4)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T\left(\frac{n}{4}\right) + 1 & \text{se } n > 1 \text{ è pari} \\ T(n-4) + 1 & \text{se } n > 1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

Trovare *limiti superiori e inferiori* per la seguente equazione di ricorrenza, utilizzando il metodo di sostituzione (detto anche per tentativi).

2 maggio 2011 (2) $3T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{5}\right) + n$

3 febbraio 2014 (1) $\left(\sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} T\left(\frac{n}{2^i}\right)\right) + 1$

2 maggio 2011 (1) $3T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{5}\right) + n$

6 giugno 2011 (1) $\frac{11}{5}n + T\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{7}{10}n \right\rfloor\right)$

12 gennaio 2015 (1) $T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 2^n$

2 febbraio 2015 (1) $T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{4}} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{8}} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{16}} \right\rfloor\right) + n^2$

8 giugno 2015 (1) $T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt[3]{5}} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{\sqrt[3]{7}} \right\rfloor\right) + n^3$

5 novembre 2015 (2a) $T\left(\left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{4}{5}n \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{3}{10}n \right\rfloor\right) + n^2$

5 novembre 2015 (2b) $T\left(\left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{2}{5}n \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{7}{10}n \right\rfloor\right) + n^2$

Utilizzando un *qualunque metodo*, trovare i limiti inferiori e superiori per le seguenti ricorrenze (assumendo che $0 < \beta < 1$)

5 novembre 2015 (1a) $T(\beta n) + n^\beta$

5 novembre 2015 (1b) $\lfloor \frac{1}{\beta} \rfloor T(\lfloor \beta n \rfloor) + n^\beta$

Trovare *limiti superiori e inferiori* per le seguenti equazioni di ricorrenza:

7 settembre 2011 (1) $4T\left(\sqrt{n}\right) + \log^2 n$

12 gennaio 2011 (1) $T\left(\left\lfloor \frac{n}{c} \right\rfloor\right) + \Theta(1)$

26 gennaio 2016 (1) $\frac{1}{2}\left(T(n-1) + T\left(\frac{3}{4}n\right)\right) + n$

$T\left(\frac{1}{2}n\right) + T\left(\frac{1}{4}n\right) + T\left(\frac{1}{6}n\right) + T\left(\frac{1}{12}n\right) + 1$

6 giugno 2016 (1) $T\left(\frac{1}{10}n\right) + T\left(\frac{5}{6}n\right) + T\left(\frac{1}{16}n\right) + n$

Trovate il *limite inferiore* per la sequente equazione di ricorrenza:

6 luglio 2016 (1) $2T\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - 5\right) + n^{\frac{\pi}{2}}$

29 agosto 2016 (1) $T\left(\left\lfloor \frac{n}{15} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor\right) + 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + \sqrt{n}$

Trovate il *limite superiore* per la sequente equazione di ricorrenza:, utilizzando il metodo di sostituzione (detto anche per tentativi), facendo particolare attenzione ai casi base.

18 luglio 2011 (1) $\sqrt{n}T\left(\sqrt{n}\right) + \sqrt{n}$

3 novembre 2016 (1a) $27T\left(\left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor\right) + n\sqrt{n}$

Trovate il *limite inferiore* per la sequente equazione di ricorrenza:, utilizzando il metodo di sostituzione (detto anche per tentativi), facendo particolare attenzione ai casi base.

3 novembre 2016 (1b) $64T\left(\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor\right) + n\sqrt{n}$

Trovare *un limite superiore ed un limite inferiore*, i più stretti possibili, per la seguente equazione di ricorrenza, utilizzando il metodo di sostituzione.

22 luglio 2013 (1) $2T\left(2\frac{n}{3}\right) + n^2$

3 maggio 2012 (1) $2T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + \sqrt{n}$

7 febbraio 2017 (1) $2T\left(\frac{n}{8}\right) + \sqrt[3]{n}$

Trovare i *limiti superiori e inferiori* più stretti possibili per la seguente equazione di ricorrenza:

4 settembre 2017 (1) $$T(n) = \begin{cases} 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 6T\left(\frac{n}{6}\right) + 54T\left(\frac{n}{12}\right) + n^2 & n > 12 \\ 1 & n \leqslant 12 \end{cases}$$

Trovare i *limiti superiori e inferiori* più stretti possibili per la seguente equazione di ricorrenza, utilizzando il metodo di sostituzione:

31 gennaio 2018 (1) $T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + n\log n$

Si consideri la seguente equazione di ricorrenza, parametrizzata rispetto al valore k:

25 luglio 2018 (1) $k^2T_k\left(\frac{n}{k}\right) + n^{\frac{k}{2}}$

Si supponga che esistano tre algoritmi, con complessità $T_2(n)$, $T_3(n)$, $T_4(n)$. Quale algoritmo scartereste? Giustificate la risposta.
Trovare i limiti *superiori e inferiori* il più stretti possibili per la seguente equazione di ricorrenza:

21 agosto 2018 (1) $$T(n) = \begin{cases} 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + 12T\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + n^2 & n > 6 \\ 1 & n \leqslant 6 \end{cases}$$

21 gennaio 2019 ①

$$T(n) = \begin{cases} 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + 9T\left(\left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor\right) + n\sqrt{n} & n > 9 \\ 1 & n \leqslant 9 \end{cases}$$

Si trovino, tramite il *metodo della sostituzione*, un limite superiore ed un limite inferiore per la seguente ricorrenza (m costante intera positiva):

0 2000 ①

$$T(m) + T(n-m) + 1$$

Fare particolare attenzione ai casi base.
Trovare un *limite superiore*, il più stretto possibile, per la seguente equazione di ricorrenza, utilizzando il metodo di sostituzione.

16 giugno 2014 ①

$$2T\left(\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor\right) + \sqrt[3]{n}$$

21 luglio 2014 ①

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \{T[k] + T(n-k)\} + 1$$

1 settembre 2014 ①

$$6T\left(\frac{n}{8}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + 1$$

1.1 Trovare la complessità di una procedura

17 giugno 2013 ① Trovare un limite superiore e un limite inferiore alla complessita della seguente procedura:

```
// chiamata iniziale
fun(V, 1, n)

fun(int[ ] V, int i, int j)
    se i = j allora
        ritorna 1
    int T = 0
    da k = i fino a j fai
        T += V[k]
    ritorna T + fun(V, i, j − 1) + fun(V, i, i + ⌊√(j − i + 1)⌋)
```

7 gennaio 2014 ① Calcolare la complessità della procedura mistery descritto di seguito:

```
mistery(int n)
    int i, j, s, k
    s ← 0
    da i ← 1 fino a n fai
        j ← 1
        finché j < n fai
            k ← 1
            finché k ⩽ n fai
                s++
                k *= 3
            j *= 2
```

24 aprile 2014 ①

Trovare un *limite superiore* alla complessita della seguente procedura. La procedura $\mathsf{random}(n)$ ha complessità $\mathcal{O}(1)$ e ritorna un intero casuale compreso fra 0 e $n-1$.

$\mathsf{mistery}(\textbf{int}[\,]\ A,\ \textbf{int}\ i,\ \textbf{int}\ j)$

- **se** $j < i$ **allora ritorna** 0
- **se** $i = j$ **allora ritorna** $2 \cdot A[i]$
- **int** $n \leftarrow j - i + 1$
- **int** $sum \leftarrow 0$
- **int** $k \leftarrow \mathsf{random}(n+1)$
- **da** $r \leftarrow 1$ **fino a** 2^k **fai**
  - $sum \mathrel{+}= A[i + \mathsf{random}(n)]$
- **ritorna** $sum + \mathsf{mistery}(A,\ i,\ \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor) + \mathsf{mistery}(A,\ \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor + 1,\ j)$
