Capitolo 5

Alberi

5.1 Definizioni

Definizione 5.1.1 (albero radicato, *rooted tree*)**.** Un albero consiste di un insieme di nodi e un insieme di archi orientati che connettono coppie di nodi, con le seguenti proprietà:

- un nodo dell'albero è designato come nodo radice;
- ogni nodo n, a parte la radice, ha esattamente un arco entrante;
- esiste un cammino unico dalla radice ad ogni nodo;
- l'albero è connesso.

Definizione 5.1.2 (albero radicato, definizione ricorsiva)**.** Un albero è dato da:

- un insieme vuoto, oppure
- una radice e zero o più sottoalberi, ognuno dei quali è albero; la radice è connessa alla radice di ogni sottoalbero con un arco orientato.

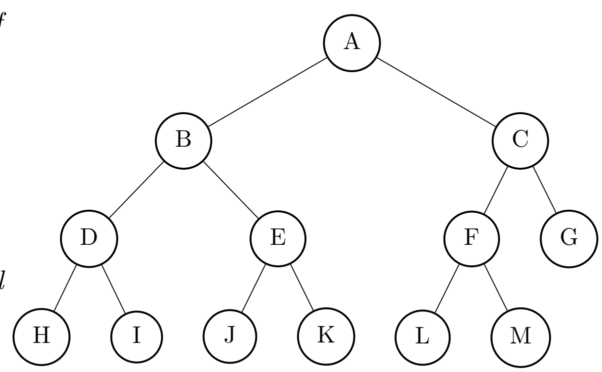
Definizione 5.1.3 (profondità, *depth*)**.** La lunghezza del cammino semplice dalla radice al nodo (misurato in archi).

Definizione 5.1.4 (livello, *level*)**.** L'insieme dei nodi alla stessa profondità.

Definizione 5.1.5 (altezza dell'albero, *height*)**.** La profondità massima delle sue foglie.

5.2 Terminologia

- A è la radice (*root*);
- B, C sono radici dei sottoalberi (*roots of their subtrees*);
- D, E sono fratelli (*siblings*);
- D, E sono figli (*children*) di B;
- B è il padre (*parent*) di D, E;
- H, I, J, K, L, M, G sono foglie (*leafs*);
- gli altri nodi sono nodi interni (*internal nodes*);
- E è lo zio (il fratello del padre) di I;
- B è il nonno di I, I è il nipote di B.



5.3 Alberi binari

Definizione 5.3.1 (Albero binario)**.** Un albero binario è un albero radicato in cui ogni nodo ha al massimo due figli, che vengono identificati come figlio sinistro e figlio destro.

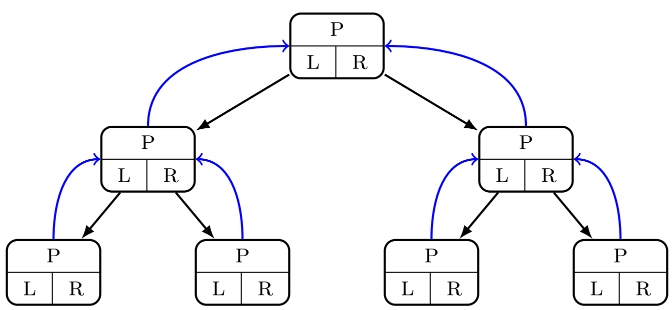
Nota. Due alberi T e U che hanno gli stessi nodi, gli stessi figli per ogni nodo e la stessa radice, sono distinti qualora un nodo u sia designato come figlio sinistro di un nodo v in T come figlio destro del medesimo nodo in U. In altre parole, anche se due alberi hanno lo stesso numero di nodi ed ognuno di questi nodi ha lo stesso numero di figli non è che detto che l'albero risultante sia identico.

Algoritmo 0: Specifica albero binario

```
// GESTIONE ALBERO

Tree(ITEM v) // costruisce un nuovo nodo, contenente v, senza figli o genitori
ITEM read // legge il valore memorizzato nel nodo
write(ITEM v) // modifica il valore memorizzato nel nodo
TREE parent // restituisce il padre, oppure nil se questo nodo è radice

// GESTIONE STRUTTURA

// restituiscono il figlio sinistro (destro) di questo nodo,
// restituisce nil se assente
TREE left
TREE right

// inserisce il sottoalbero radicato in t
// come figlio sinistro (destro) di questo nodo
insertLeft(TREE t)
insertRight(TREE t)

// distrugge (ricorsivamente) il figlio sinistro (destro) di questo nodo
deleteLeft
deleteRight
```

Nota. Le funzioni *senza parametri* sono indicate con un carattere senza grazie e privi di parentesi tonde vuote al fine di alleggerire la lettura del codice.

5.3.1 Memorizzazione di un albero binario



Vengono memorizzati i seguenti campi:

- *parent*: riferimento al nodo padre;
- *left*: riferimento al figlio sinistro;
- *right*: riferimento al figlio destro.

Uno qualunque di questi oggetti potrebbe essere pari a **nil**, stando ad indicare che non esiste nessun sottoalbero.

5.3.2 Implementazione

Algoritmo 1: Implementazione albero binario in pseudocodice

```
// crea un nuovo albero
// restituisce la radice dell'albero creato
TREE Tree(ITEM v)
    TREE t = new TREE
    t.parent ← nil
    t.left ← t.right ← nil
    t.value ← v
    return t

insertLeft(TREE t)
    if left ≠ nil then
        t.parent ← this
        left ← t

insertRight(TREE t)
    if right ≠ nil then
        t.parent ← this
        right ← t

// elimina ricorsivamente il sottoalbero sinistro
deleteLeft()
    if left ≠ nil then
        left.deleteLeft
        left.deleteRight
        left ← nil

// elimina ricorsivamente il sottoalbero destro
deleteRight()
    if right ≠ nil then
        right.deleteLeft
        right.deleteRight
        right ← nil
```

5.3.3 Visite

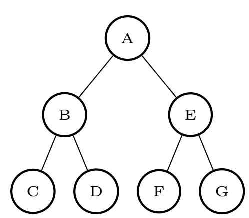
La visita di un albero (o la ricerca) è una strategia per passare attraverso (visitare) tutti i nodi di un albero. Si possono distinguere due tipi di visite:

1. visita in profondità: chiamata anche *Depth-First Search* (DFS), per visitare un albero visita ricorsivamente ognuno dei suoi sottoalberi; esistono tre varianti in base a quando il nodo viene visitato (pre, in o post-ordine); questa particolare visita sfrutta implicitamente il meccanismo di una pila (*stack*) tramite le chiamate ricorsive effettuate;

2. visita in ampiezza: chiamata anche *Breadth First Search* (BFS), per visitare un albero visita ogni livello, uno dopo l'altro partendo dalla radice; richiede esplicitamente l'utilizzo di una coda (*queue*).

Algoritmo 2: Schema per visita in profondità

```
dfs-schema(TREE t)
    if t ≠ nil then
        // pre-order visit
        stampa t
        dfs(t.left)
        // in-order visit
        stampa t
        dfs(t.right)
        // post-order visit
        stampa t
```



pre-visita	A B C D E F G
in-visita	C B D A F E G
post-visita	C D B F G E A

A seconda di dove scrivo il codice in questo schema ottengo una visita diversa.

5.3.4 Applicazioni

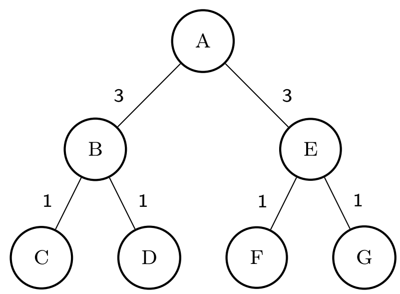
In genere post-visita e in-visita sono quelle più applicate, la pre-visita meno.

Visita in post-ordine

Una possibile applicazione della visita post-ordine è quella di effettuare un conteggio dei nodi presenti nell'albero.

Algoritmo 3: Conteggio dei nodi in un albero

count(TREE t)
  if $t ==$ **nil then**
    `// è un albero vuoto`
    return 0
  else
    `// conto ricorsivamente i nodi`
    C_ℓ = count(t.left)
    C_r = count(t.right)
    return $C_\ell + C_r + 1$

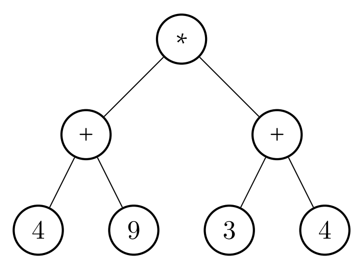


Visita in ordine (in-visita)

Una possibile applicazione della visita post-ordine è quella di stampare espressioni con operatori binari.

Algoritmo 4: Stampa espressioni con operatori binari

int stampaEspressioni(TREE t)
  if t.left $==$ **nil and** t.right $==$ **nil then**
    `// siamo in una foglia`
    stampa t.read
  else
    `// sono su un nodo interno`
    stampa "("
    stampaEspressioni(t.left)
    stampa t.read
    stampaEspressioni(t.right)
    stampa ")"



Stampa: `(( 4 + 9 ) * ( 3 + 4 ))`

Complessità di una visita

Il costo di una visita di un albero contenente n nodi è $\Theta(n)$, in quanto ogni nodo viene visitato al massimo una volta.

5.4 Alberi generici

Algoritmo 5: Specifica albero generico

```
// GESTIONE ALBERO
Tree(ITEM v) // costruisce un nuovo nodo, contenente v, senza figli o genitori
ITEM read // legge il valore memorizzato nel nodo
write(ITEM v) // modifica il valore memorizzato nel nodo
TREE parent // restituisce il padre, oppure nil se questo nodo è radice

// GESTIONE STRUTTURA
// restituiscono il primo figlio,
// oppure nil se questo nodo è una foglia
TREE leftmostChild

// restituisce il prossimo fratello,
// oppure nil se assente
TREE rightSibling

// inserisce il sottoalbero t
// come primo figlio di questo nodo
insertChild(TREE t)

// inserisce il sottoalbero t
// come prossimo fratello di questo nodo
insertSibling(TREE t)

// distuggi l'albero radicato
// identificato dal primo fratello
deleteChild

// distuggi l'albero radicato
// identificato dal primo figlio
deleteSibling
```

5.4.1 Visita in profondità

Un albero binario è anche un albero generale e lo visitiamo esattamente come lo visitavamo prima.

Algoritmo 6: Visita in profondità

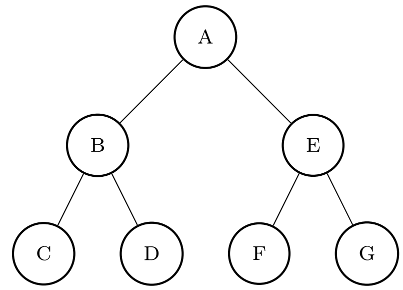
```
dfs(TREE t)
    if t ≠ nil then
        // pre-order visit
        stampa t
        dfs(t.left())
        // effettuo visita
        TREE u ← t.leftmostChild
        while u ≠ nil do
            dfs(u)
            u.rightSibling
        // post-order visit
        stampa t
```

5.4.2 Visita in ampiezza

Mentre nella visita in profondità il meccanismo della pila (*stack*) era implicito nelle chiamate ricorsive, in questo caso è necessario utilizzare *esplicitamente* una coda (*queue*). Un'altra differenza fra i due algoritmi è che quello in profondità è un algoritmo ricorsivo, l'altro è iterativo. Quando tutti i nodi di un livello vengono estratti dalla coda, la coda contiene solo ed unicamente i nodi del livello successivo.

Algoritmo 7: Visita in ampiezza

```
bfs(Tree t)
    Queue Q ← Queue
    Q.enqueue(t)  // inserisci la radice
    while not Q.isEmpty do
        // fintanto che la coda non è vuota
        // estraggo un nodo dalla coda
        Tree u ← Q.dequeue
        // visita per livelli del nodo u
        stampa u
        // fintanto che ho almeno un figlio
        u ← u.leftmostChild
        while u ≠ nil do
            // metto in coda il figlio
            Q.enqueue(u)
            // passo al figlio destro
            u ← u.rightSibling
```



Sequenza: A B E C D F G

Commento Mettiamo in coda tutti i nodi che vogliamo visitare passo passo. Qui la stampa è in pre-visita ma qui – a differenza dei grafi – non ha molta importanza se la visita la facciamo prima o dopo. Visito tutti i figli prima di passare al livello successivo.

5.5 Memorizzazione

Esistono diversi modi per memorizzare un albero, più o meno indicati a seconda del numero massimo e medio di figli presenti. Le realizzazioni possibili sono:

1. con vettore dei figli;
2. primo figlio, prossimo fratello;
3. con vettore dei padri

5.5.1 Realizzazione con vettore dei figli

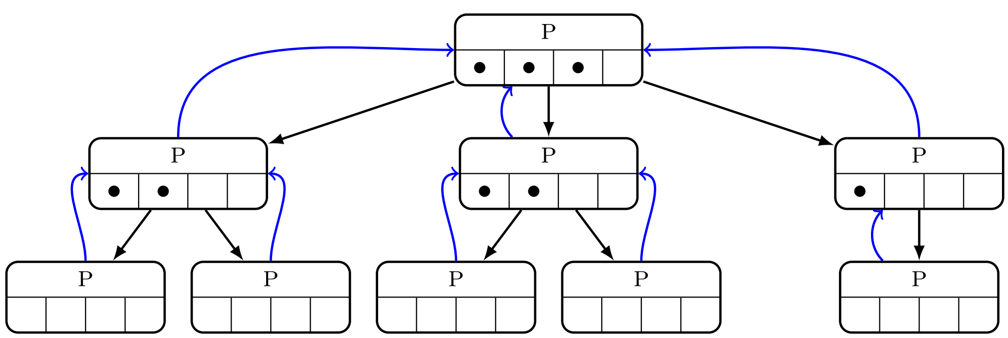


Figura 5.1: Realizzazione con vettore dei figli

Vengono memorizzati i seguenti campi:

- *parent* che è il riferimento al nodo padre;

- vettore dei figli il quale a seconda del numero dei figli può comportare una discreta quantità di spazio sprecato.

5.5.2 Realizzazione basata su primo figlio, prossimo fratello

Viene implementato come una lista di fratelli.

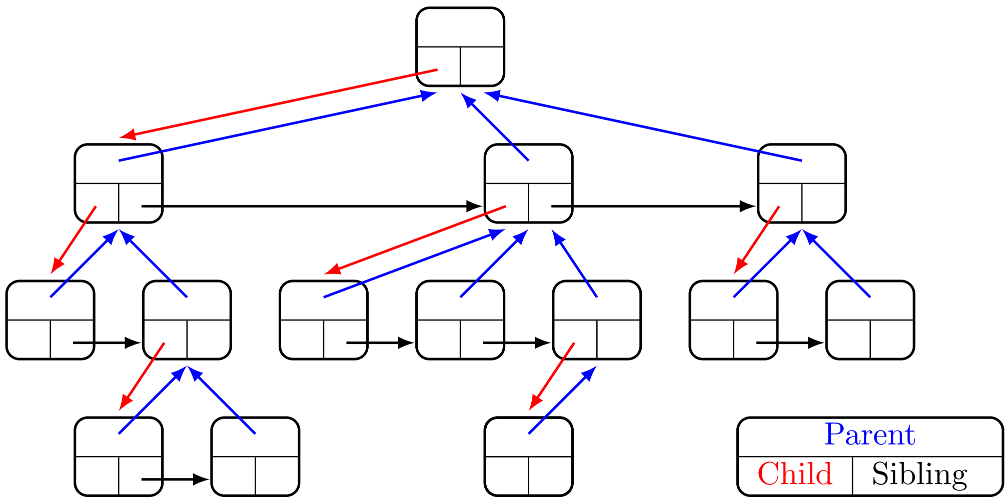


Figura 5.2: Realizzazione basata su primo figlio, prossimo fratello

La memorizzazione che viene utilizzata nel *file system* è esattamente questa.

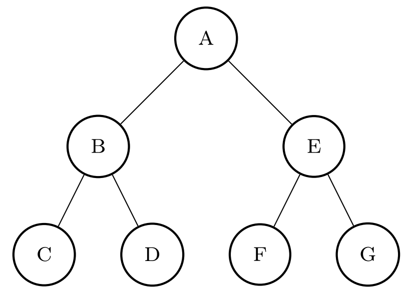
Algoritmo 8: Implementazione albero "primo figlio, prossimo fratello" in pseudocodice

```
TREE parent                                  // Riferimento al padre
TREE child                                   // Riferimento al primo figlio
TREE sibling                                 // Riferimento al prossimo fratello
ITEM value                                   // Valore memorizzato nel nodo

TREE Tree(ITEM v)
    TREE t = new TREE
    t.value ← v
    t.parent ← t.child ← t.sibling ← nil
    return t

insertChild(TREE t)
    t.parent ← self
    // inserisci t prima dell'attuale primo figlio
    t.sibling ← child
    child ← t

insertSibling(TREE t)
    t.parent ← parent
    // inserisci t prima dell'attuale prossimo fratello
    t.sibling ← sibling
    sibling ← t

deleteChild()
    TREE newChild ← child.rightSibling
    delete(child)
    child ← newChild

deleteSibling()
    TREE newBrother ← sibling.rightSibling
    delete(sibling)
    sibling ← newBrother

// metodo ausiliare
delete(TREE t)
    TREE u ← t.leftmostChild
    while u ≠ nil do
        TREE next ← u.rightSibling
        delete(u)
        u ← next
```

5.5.3 Realizzazione con vettore dei padri

Nella realizzazione con vettore dei padri, l'albero è rappresentato da un vettore i cui elementi contengono il valore associato al nodo e l'indice della posizione del padre del vettore.

1	A	0
2	B	1
3	E	1
4	C	2
5	D	2
6	F	3
7	G	3



Questa realizzazione può sembrare particolarmente assurda poiché dato un nodo non permette di stabilire direttamente quali sono i suoi figli, ma ci sono molti algoritmi che sono interessati solo ai padri. Questa è la rappresentazione più compatta che possiamo creare, vedremo la sua utilità quando andremo a studiare le visite sui grafi.