

2 Funzioni di costo, notazione asintotica

Ora andremo a formalizzare le nozioni sui limiti superiori ed inferiori che abbiamo accennato in maniera informale nelle lezioni precedenti.

Definizione (Funzione di costo). Utilizziamo il termine “funzione di costo” per indicare una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (dall’insieme dei numeri naturali ai reali).

▲ **Definizione** (Notazione \mathcal{O}). Sia $g(n)$ una funzione di costo; indichiamo con $\mathcal{O}(g(n))$ l’insieme delle funzioni $f(n)$ tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geq 0: f(n) \leq cg(n), \forall n \geq m$$

Nota. Eventuali fattori moltiplicativi non ci interessano.

La notazione si legge $f(n)$ è “O grande” di $g(n)$ e si scrive $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ (questo è un abuso di notazione, dovremmo scrivere $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, in quanto \mathcal{O} è un insieme (una famiglia di funzioni)). Questa notazione è diventata d’uso comune poiché ci si può fare una specie di aritmetica sopra (infatti è la notazione che troverete nella letteratura) e sta a significare che $g(n)$ è un limite asintotico superiore per $f(n)$, ossia che $f(n)$ cresce al più (al massimo) come $g(n)$.

Definizione (Notazione Ω). Sia $g(n)$ una funzione di costo; indichiamo con $\Omega(g(n))$ l’insieme delle funzioni $f(n)$ tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geq 0: f(n) \geq cg(n), \forall n \geq m$$

La notazione si legge $f(n)$ è “Omega grande” (nella letteratura big-O) di $g(n)$, si scrive $f(n) = \Omega(g(n))$ e sta a significare che $g(n)$ è un limite asintotico inferiore per $f(n)$, ossia che $f(n)$ cresce almeno quanto (non di meno) come $g(n)$.

Definizione (Notazione Θ). Sia $g(n)$ una funzione di costo; indichiamo con $\Theta(g(n))$ l’insieme delle funzioni $f(n)$ tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geq 0: c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq m$$

La notazione si legge $f(n)$ è “Theta” di $g(n)$, si scrive $f(n) = \Theta(g(n))$ e sta a significare che $f(n)$ cresce *esattamente* come $g(n)$ al di là di fattori moltiplicativi. Nota che $f(n) = \Theta(g(n))$ avviene se e solo se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$.

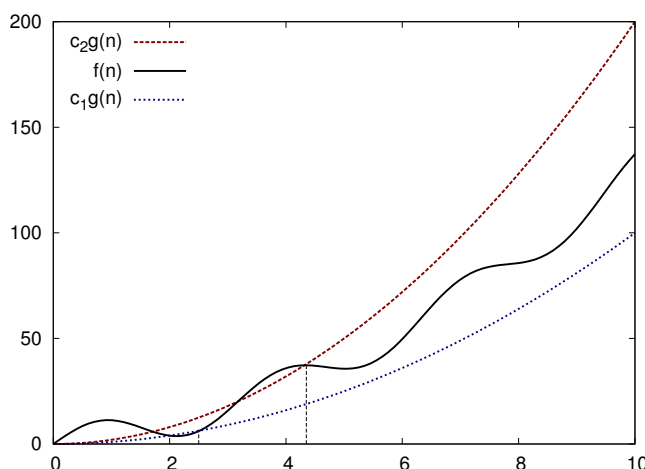


Figura 1: Notazione asintotica