2 Funzioni di costo, notazione asintotica

Ora andremo a formalizzare le nozioni sui limiti superiori ed inferiori che abbiamo accennato in maniera informale nelle lezioni precedenti.

Definizione (Funzione di costo)**.** Utilizziamo il termine "funzione di costo" per indicare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (dall'insieme dei numeri naturali ai reali).

Definizione (Notazione $\mathcal{O}$)**.** Sia $g(n)$ una funzione di costo; indichiamo con $\mathcal{O}(g(n))$ l'insieme delle funzioni $f(n)$ tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geqslant 0 : f(n) \leqslant cg(n), \forall n \geqslant m$$

Nota. Eventuali fattori moltiplicativi non ci interessano.

La notazione si legge $f(n)$ è "O grande" di $g(n)$ e si scrive $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$. Questo è un abuso di notazione, dovemmo scrivere $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, in quanto $\mathcal{O}$ è un insieme (più precisamente una famiglia di funzioni). Questa notazione è però diventata d'uso comune poiché ci si può fare una specie di aritmetica sopra (infatti è la notazione che troverete nella letteratura) e sta a significare che $g(n)$ è un limite asintotico superiore per $f(n)$, ossia che $f(n)$ cresce al più (al massimo) come $g(n)$.

Definizione (Notazione Ω)**.** Sia $g(n)$ una funzione di costo; indichiamo con $\Omega(g(n))$ l'insieme delle funzioni $f(n)$ tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geqslant 0 : f(n) \geqslant cg(n), \forall n \geqslant m$$

La notazione si legge $f(n)$ è "Omega grande" (nella letteratura big-O) di $g(n)$, si scrive $f(n) = \Omega(g(n))$ e sta a significare che $g(n)$ è un limite asintotico inferiore per $f(n)$, ossia che $f(n)$ cresce almeno quanto (non di meno) come $g(n)$.

Definizione (Notazione Θ)**.** Sia $g(n)$ una funzione di costo; indichiamo con $\Theta(g(n))$ l'insieme delle funzioni $f(n)$ tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geqslant 0 : c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant m$$

La notazione si legge $f(n)$ è "Theta" di $g(n)$, si scrive $f(n) = \Theta(g(n))$ e sta a significare che $f(n)$ cresce *esattamente* come $g(n)$ al di là di fattori moltiplicativi. Nota che $f(n) = \Theta(g(n))$ avviene se e solo se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ e $f(n) = \Theta(g(n))$.

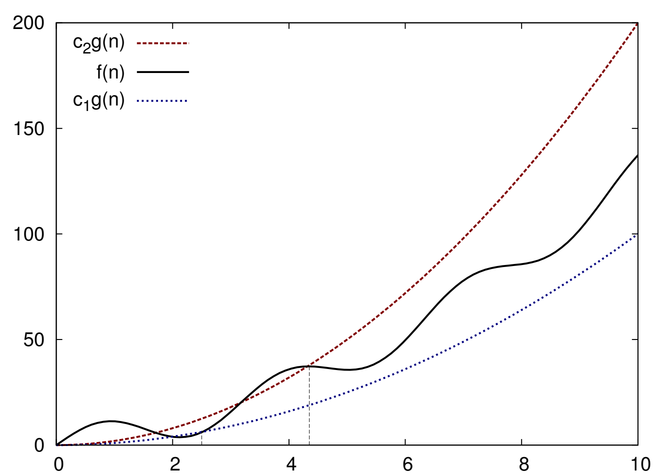

Figura 1: Notazione asintotica