Algoritmi e strutture dati

Algoritmi di ordinamento

Alberto Montresor

Università di Trento

2018/05/21

Introduzione

Sommario - Algoritmi di ordinamento

- SelectionSort - $\Theta(n^2)$
- InsertionSort - $\Omega(n)$, $O(n^2)$
- ShellSort - $\Omega(n)$, $O(n^{3/2})$
- MergeSort - $\Theta(n \log n)$
- HeapSort - $\Theta(n \log n)$
- QuickSort - $\Omega(n \log n)$, $O(n^2)$

Sommario - Problema dell'ordinamento

- Tutti questi algoritmi sono basati su confronti
  - Le decisioni sull'ordinamento vengono prese in base al confronto (<,=,>) fra due valori
- Algoritmi migliori: $O(n \log n)$
  - InsertionSort e ShellSort sono più veloci solo in casi speciali

Introduzione

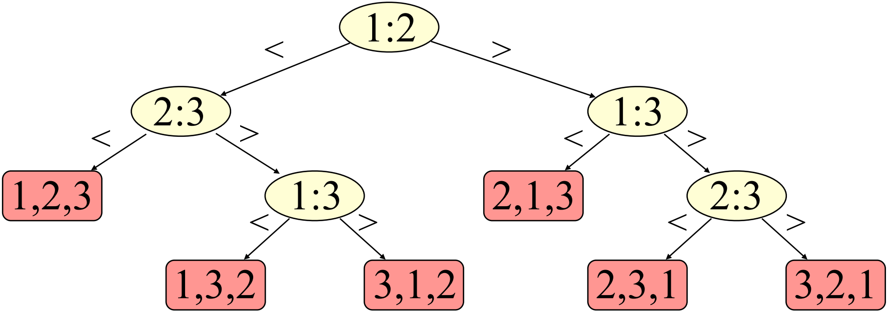
Problema dell'ordinamento - Limite inferiore

E' possibile dimostrare che qualunque algoritmo di ordinamento basato su confronti ha una complessità $\Omega(n \log n)$.

Assunzioni

- Consideriamo un qualunque algoritmo A basato su confronti
- Assumiamo che tutti i valori siano distinti (no perdita di generalità)
- L'algoritmo A può essere rappresentato tramite un albero di decisione, un albero binario che rappresenta i confronti fra gli elementi

Albero di decisione



Albero di decisione

Proprietà

- Cammino radice-foglia in un albero di decisione: sequenza di confronti eseguiti dall'algoritmo corrispondente
- Altezza dell'albero di decisione: numero confronti eseguiti dall'algoritmo corrispondente nel caso pessimo

Si considerino tutti gli alberi di decisioni ottenibili da algoritmi di ordinamento basati su confronti

Limite inferiore per l'ordinamento

Lemma 1

Un albero di decisione per l'ordinamento di n elementi contiene almeno $n!$ foglie

Lemma 2

Sia T un albero binario in cui ogni nodo interno ha esattamente 2 figli e sia k il numero delle sue foglie. L'altezza dell'albero è almeno $\log k$ - ovvero $\Omega(\log k)$.

Teorema

Il numero di confronti necessari per ordinare n elementi nel caso peggiore è $\Omega(n \log n)$

Spaghetti Sort

Algoritmo Spaghetti Sort – $O(n)$

1. Prendi n spaghetti
2. Taglia lo spaghetto i-esimo in modo proporzionale all'i-esimo valore da ordinare
3. Con la mano, afferra gli n spaghetti e appoggiali verticalmente sul tavolo
4. Prendi il più lungo, misuralo e metti il valore corrispondente in fondo al vettore da ordinare
5. Ripeti (4) fino a quando non hai terminato gli spaghetti

Counting Sort

Assunzione:

- I numeri da ordinare sono compresi in un intervallo $[1 \ldots k]$

Come funziona:

- Costruisce un array $B[1 \ldots k]$ che conta il numero di volte che un valore compreso in $[1 \ldots k]$ compare in A
- Ricolloca i valori così ottenuti nel vettore da ordinare A

Miglioramenti:

- L'intervallo non deve necessariamente iniziare in 1 e finire in k; qualunque intervallo di cui conosciamo gli estremi può essere utilizzato nel Counting Sort.

Counting Sort

countingSort(**int**[ ] A, **int** n, **int** k)

```
int[] B = new int[1 ... k]
for i = 1 to k do
    B[i] = 0
for j = 1 to n do
    B[A[j]] = B[A[j]] + 1
j = 1
for i = 1 to k do
    while B[i] > 0 do
        A[j] = i
        j = j + 1
        B[i] = B[i] - 1
```

Counting Sort

Complessità di Counting Sort

- $O(n + k)$
- Se k è $O(n)$, allora la complessità di Counting Sort è $O(n)$

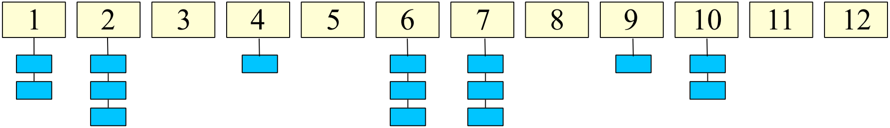
Counting Sort e limiti inferiore per l'ordinamento

- Counting Sort non è basato su confronti
- Abbiamo cambiato le condizioni di base
- Se k è $O(n^3)$, questo algoritmo è peggiore di tutti quelli visti finora

Pigeonhole Sort

Casellario

- Cosa succede se i valori non sono numeri interi, ma record associati ad una chiave da ordinare?
- Non possiamo usare counting
- Ma possiamo usare liste concatenate!



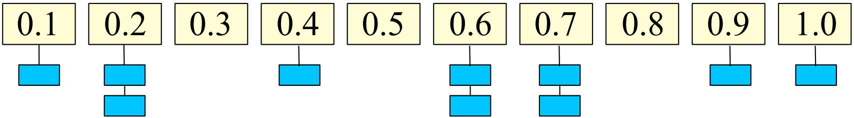
Bucket Sort

Ipotesi sull'input

- Valori reali uniformemente distribuiti nell'intervallo $[0, 1)$
- Qualunque insieme di valori distribuiti uniformemente può essere normalizzato nell'intervallo $[0, 1)$ in tempo lineare

Idea

- Dividere l'intervallo in n sottointervalli di dimensione $1/n$, detti bucket, e poi distribuire gli n numeri nei bucket
- Per l'ipotesi di uniformità, il numero atteso di valori nei bucket è 1
- Possono essere ordinati con Insertion Sort



Proprietà degli algoritmi di ordinamento

Stabilità

Un algoritmo di ordinamento è stabile se preserva l'ordine iniziale tra due elementi con la stessa chiave

Domande

- Quali dei seguenti algoritmi sono stabili? Insertion Sort, Merge Sort, Heap Sort, Quick Sort, Pigeonhole Sort
- Come si può rendere un qualunque algoritmo stabile?

Risposte

- Stabili: Insertion Sort, Merge Sort, Pigeonhole Sort
- Basta usare come chiave di ordinamento la coppia (chiave, posizione iniziale)

Riassunto ordinamento

Insertion Sort

$\Omega(n)$, $O(n^2)$, stabile, sul posto, iterativo. Adatto per piccoli valori, sequenze quasi ordinate.

Merge Sort

$\Theta(n \log n)$, stabile, richiede $O(n)$ spazio aggiuntivo, ricorsivo (richiede $O(\log n)$ spazio nello stack). Buona performance in cache, buona parallelizzazione.

Heap Sort

$\Theta(n \log n)$, non stabile, sul posto, iterativo. Cattiva performance in cache, cattiva parallelizzazione. Preferito in sistemi embedded.

Riassunto ordinamento

Quick Sort

$O(n \log n)$ in media, $O(n^2)$ nel caso peggiore, non stabile, ricorsivo (richiede $O(\log n)$ spazio nello stack). Buona performance in cache, buona parallelizzazione, buoni fattori moltiplicativi.

Counting Sort

$\Theta(n+k)$, richiede $O(k)$ memoria aggiuntiva, iterativo. Molto veloce quando $k = O(n)$

Pigeonhole Sort

$\Theta(n+k)$, stabile, richiede $O(n+k)$ memoria aggiuntiva, iterativo. Molto veloce quando $k = O(n)$

Riassunto ordinamento

Bucket Sort

$O(n)$ nel caso i valori siano distribuiti uniformemente, stabile, richiede $O(n)$ spazio aggiuntivo

Shell Sort

$O(n\sqrt{n})$, stabile, adatto per piccoli valori, sequenze quasi ordinate.

Reality check

Tim Sort

- Algoritmo ibrido, basato su Merge Sort e Insertion Sort
- Cerca sequenze consecutive (run) già ordinate
- Complessità:
  - $\Omega(n)$ (sequenze già ordinate)
  - $O(n \log n)$ nel caso pessimo

Utilizzazione

- Python
- Java 7
- Gnu Octave