Contents

Chapter 1

Concetti Introduttivi

1.1 Anelli, Moduli e Campi

Un anello è una terna ordinata $(R, +, \cdot)$, tale che R è un insieme non vuoto, $(R, +)$ è un gruppo abeliano, la moltiplicazione è associativa su R e valgono le seguenti leggi distributive: $a(b+c) = ab + ac, (b+c)a = ba + ca$ per ogni $a, b, c \in R$. Se anche la moltiplicazione è commutativa diremo che l'anello è commutativo. Infine se esiste un elemento $e \in R$ tale che per ogni $a \in R$, vale che $ae = ea = a$, tale elemento è detto identità, è unico e l'anello è detto con identità.

Definizione 1.1. Un anello R in cui ogni ideale è finitamente generato è detto *noetheriano*.

D'ora in poi verranno considearti solo anelli commutativi con identità e, con abuso di nomenclatura, mi riferirò a questi come anelli.

Esercizio 1.2. *Sia R un anello noetheriano, e sia $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq R$ una successione di elementi di R tali che $(r_i) \subseteq (r_{i+1})$ per ogni i. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(r_n) = (r_j)$ per ogni $j \geq n$.*

Proof. Considero l'ideale $I = (r_i : i \in \mathbb{N})$; siccome R è noetheriano, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $I = (r_0, \ldots, r_n)$. Affermo che $(r_n) = (r_j)$ per ogni $j \geq n$. Sia dunque $j \geq n$ fissato.
L'inclusione $(r_n) \subseteq (r_j)$ è data per ipotesi. Viceversa siccome $r_j \in I = (r_0, \ldots, r_n)$, esistono $a_0, \ldots, a_n \in R$ tali che $r_j = \sum_{i=0}^{n} a_i r_i$, ma siccome $r_i \in (r_n)\, \forall i \leq n$, si ha che $r_j = \sum_{i=0}^{n} a_i r_i \in (r_n)$. $\square$

Lemma 1.3. *Sia R un anello. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a L'insieme degli elementi non invertibili in R ha la struttura di ideale

b R ha un unico ideale massimale che contiene tutti gli altri ideali propri di R.

Un anello che rispetta una (e quindi entrambe) delle condizioni del Lemma 1.3 è detto *anello locale.*

Lemma 1.4. *Sia R un dominio che non è un campo. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

a R è noetheriano, locale e tale che l'ideale massimale sia principale.

b R è tale che esiste un elemento irriducibile $t \in R$ tale che per ogni altro elemento non nullo di $r \in R$, esistono unici un invertibile $u \in R$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che $r = ut^n$.

Proof. Sia R noetheriano, locale e con ideale massimale principale. Sia M tale ideale e sia $t \in R$ un suo generatore.
Dimostro che, per ogni $r \in R, r \neq 0$, esistono u, n come nella seconda condizione: sia $r \in R, r \neq 0$ fissato.
Se r è un invertibile, basta scegliere $u = r, n = 0$ e si conclude. Sia quindi r un non invertibile: allora, $r \in M$, ed esiste $r_0 \in R$ tale che $r = r_0 t$; se r_0 è un invertibile ho concluso, altrimenti $r_0 \in M$, ed esiste $r_1 \in R$ tale che $r_0 = r_1 t$. Itero l'argomento.
Affermo che entro un numero finito di passi trovo un r_i che è un invertibile. Se per assurdo così non fosse, costruisco una successione $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq R$ di elementi non invertibili tali che $(r_i) \subseteq (r_{i+1})$ per ogni i. Per l'Esercizio 1.2 esiste un elemento massimale nella catena degli ideali principali, ovvero, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(r_n) = (r_j) \, \forall j \geq n$, in particolare $(r_n) = (r_{n+1})$, ma allora, esiste $s \in R$ tale che $r_{n+1} = s r_n$, perciò:

$$r_n = r_{n+1} t = s r_n t = s t r_n \Longrightarrow st = 1$$

Ma questo è assurdo perché t non è invertibile.
Dimostro l'unicità della scrittura: sia $r \in R$, e siano $u, v \in R$ invertibili ed $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $r = ut^m = vt^n$. Ne segue che $ut^{m-n} = v$ dunque $m = n$ e di conseguenza $u = v$.
Viceversa, sia R tale che esiste un elemento irriducibile t, tale che per ogni altro elemento $r \in R, r \neq 0$, esistono unici $u \in R$ invertibile e $n \in \mathbb{N}$ tali che $r = ut^n$.
Chiaramente $M = (t)$ è un ideale massimale, e se $r \in R$ non è invertibile,

per ipotesi è in M; viceversa se in M ci fosse un invertibile, allora $M = R$, ma questo è assurdo perché t è irriducibile. Ne segue che M contiene tutti e soli i non invertibili. Questo dimostra che R è locale.
Inoltre, essendo M l'unico ideale massimale, è principale perché generato da t.
Sia ora $I \trianglelefteq R$ non banale e diverso da M. Essendo R locale, $I \subseteq M$. Sia $r \in I$, allora esiste $u \in R$ invertibile tale che $r = ut^n$ per un opportuno naturale n. Sia $m = \min\{n \in \mathbb{N} : r = ut^n, r \in I\}$. Dimostro che $I = (t^m)$.
Sia $r \in I$, allora $r = ut^n$ per opportuni $u \in R$ invertibile, $n \in \mathbb{N}, n \geq m$, dunque $r = ut^{n-m}t^m \in (t^m)$.
Viceversa, esiste $r \in I$ tale che $r = ut^m$, per un opportuno invertibile u, allora $t^m = u^{-1}r \in I$. □

Un anello che rispetta una (e quindi entrambe) delle condizioni del Lemma 1.4 è detto *anello di valutazione discreta* e si scrive che è un DVR. Un elemento $t \in R$ come nella seconda condizione è detto *parametro uniformizzante*. Parametri uniformizzanti distinti sono tra loro associati.
Sia ora K il campo dei quozienti di R e sia t un parametro uniformizzante fissato: si osserva semplicemente che ogni elemento non nullo $z \in K$ ammette un'unica scrittura nella forma $z = ut^n$, dove u è un'invertibile in R e $n \in \mathbb{Z}$. L'esponente n è detto *ordine* di z e si scrive $n = \operatorname{ord}(z)$. Si pone $\operatorname{ord}(0) = \infty$.
L'ordine di un elemento di K è ben definito, ovvero, non dipende dalla scelta del parametro uniformizzante.

Proof. Siano $t, s \in R$ due parametri uniformizzanti e sia $u \in R$ invertibile tale che $t = us$. Sia ora $z \in K$ (con le stesse notazioni di sopra), e siano n_t, n_s gli ordini di z calcolati a partire da t e da s rispettivamente. Allora, per un opportuno invertibile $v \in R$:

$$z = vt^{n_t} = v(us)^{n_t} = vu^{n_t}s^{n_t}$$

e per l'unicità della scrittura con il parametro uniformizzante, $n_t = n_s$. □

Osservazione 1.5. Vale che $R = \{z \in K : \operatorname{ord}(z) \geq 0\}$ e $M = \{z \in K : \operatorname{ord}(z) > 0\}$.

Definizione 1.6. Sia R un anello ed M un insieme non vuoto, allora M si dice *R-modulo* se M è dotato di una operazione $+$ rispetto alla quale è un gruppo abeliano ed esiste un'azione di R su M, indicata come $\cdot : R \times M \to M$ tale che :

- $(a+b)m = am + bm$, $\forall a, b \in R, m \in M$;
- $a(m+n) = am + an$, $\forall a \in R, m, n \in M$;
- $(ab)m = a(bm)$, $\forall a, b \in R, m \in M$;
- $1_R m = m$, $\forall m \in M$.

Se $N \subseteq M$ è non vuoto, chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalare, allora N è detto *sotto-R-modulo* di M. Il sotto-R-modulo generato da $S \subseteq M$ è l'insieme $M(S) = \{\sum_{i=0}^{k} r_i s_i : r_i \in R, s_i \in S \, \forall i \leq k, k \in \mathbb{N}\}$.
Sia ora X un insieme qualsiasi e considero l'insieme $M_X = \{\varphi : X \to R\}$, con la somma definita puntualmente ed il prodotto per scalare definito anch'esso puntualmente. Allora M_X è un R-modulo, ed è detto *R-modulo libero su X*. Sia ora $x \in X$ e sia $\varphi_x \in M_X$ definita come $\varphi_x(y) = 0$, se $x \neq y$ e $\varphi_x(x) = 1$, allora $X \subseteq M_X$.
Siano $K \leq L$ campi. Indico l'estensione di campi con $\frac{L}{K}$

Definizione 1.7. Un elemento $x \in L$ si dice *algebrico* su K, se esiste un polinomio $F \in K[X]$, tale che $F(x) = 0$, *trascendente* altrimenti. Allora $K[x]$ è il più piccolo anello che contiene sia K che x. Il suo campo dei quozienti è $K(x)$ ed è il più piccolo campo contenete sia K che x.
L'estensione $\frac{L}{K}$ si dice *algerbica* se ogni $x \in L$ è algebrico su K.

Osservo ora che L ha una struttura di spazio vettoriale su K; allora, si dice che l'estensione $\frac{L}{K}$ è *finita* se $[L : K] = \dim_K L$ è finita.

Esercizio 1.8. *Siano $K \leq L$ campi e sia L un modulo finitamente generato su K. Allora per ogni anello $K \leq R \leq L$, R è un campo.*

Proof. Sia $r \in R, r \neq 0$ un elemento algebrico su K, allora esiste un polinomio monico $F \in K[X]$ tale che $F(r) = 0$, sia $F(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i$. Considero il polinomio $G(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i r^{n-i}$; allora $G(r^{-1}) = 0$, moltiplicando per r^{1-n} e riordinando si trova che r^{-1} è combinazione di elementi di R, dunque è in R. Se r non è algerbico su K, il più piccolo modulo su K che contiene $K[r]$ non è finitamente generato, ma L contiene tale modulo ed L è finitamente generato per ipotesi. Dunque un tale elemento non può esistere. Ne segue che R è un campo. $\square$

Teorema 1.9 (Dell'elemento primitivo)**.** *Sia K un campo di caratteristica 0, e sia $\frac{L}{K}$ un'estensione algebrica finita. Allora, esiste $\alpha \in L$, tale che $L = K(\alpha)$.*

1.2 Insiemi Algebrici

Sia d'ora in poi k un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0, e siano $\mathbb{A}^n, \mathbb{P}^n$ lo spazio affine e lo spazio proiettivo standard di dimensione n su k.

1.2.1 Caso Affine

Definizione 1.10. Sia $S \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$, definisco *l'insieme algebrico affine* $V(S) = \{P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n : F(P) = 0 \forall F \in S\}$. Se $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ è l'ideale generato da S, vale che $V(I) = V(S)$. Un insieme algebrico affine V è detto *irriducibile* se non è unione di insiemi algebrici affini strettamente contenuti in V. Un insieme algebrico affine irriducibile è detto *varietà affine.*

Proposizione 1.11. *Unione finita di insiemi algebrici è un insieme algebrico. Intersezione arbitraria di insiemi algebrici è un insieme algebrico.* $\emptyset, \mathbb{P}^n$ *sono insiemi algebrici.*

Proof. La dimostrazione di questo fatto nel caso affine è analoga a quella del caso proiettivo nella proposizione 1.21 □

Definizione 1.12. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$, definisco l'ideale associato ad X come $I(X) = \{F \in k[X_1, \ldots, X_n] : F(P) = 0 \, \forall P \in X\}$.

Osservazione 1.13. La definizione è ben posta, ovvero $I(X)$ è effettivamente un ideale per ogni X.

Proposizione 1.14. *Un insieme algebrico V è irriducibile se e solo se $I(V)$ è un ideale primo.*

Proof. Sia V irriducibile e siano $F, G \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tali che $FG \in I(V)$. Allora, considero gli insiemi $V(F) = \{P \in V : F(P) = 0\}$ e $V(G) = \{P \in V : G(P) = 0\}$. Chiaramente $V(F) \cup V(G) \subseteq V$. Inoltre siccome $FG \in I(V), F(P)G(P) = 0$, quindi per ogni $P \in V, F(P) = 0$ oppure $G(P) = 0$, dunque $V \subseteq V(F) \cup V(G)$.
Ma V è irriducibile, quindi $V = V(F)$ oppure $V = V(G)$, da cui $F \in I(V)$ oppure $G \in I(V)$.
Viceversa sia V tale che $I(V)$ sia primo e siano $V_1, V_2 \subseteq V$ insiemi algebrici tali che $V = V_1 \cup V_2$. Se $V_1 = \emptyset$ oppure $V_2 = \emptyset$, allora l'altro è uguale a V e non c'è nulla da dimostrare. Suppongo quindi $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$. Allora $I(V) \subseteq I(V_1), I(V_2) \subseteq I(V_1)I(V_2)$. Viceversa:

$$F \in I(V_1)I(V_2) \Longrightarrow F = GH, G \in I(V_1), H \in I(V_2)$$

Ma per $P \in V = V_1 \cup V_2$, deve valere $G(P) = 0$ oppure $H(P) = 0$, dunque $F(P) = 0$. Ovvero $F \in I(V)$.
Vale che $I(V) = I(V_1)I(V_2)$, ed essendo $I(V)$ primo e $I(V_1), I(V_2)$ non banali in $k[X_1, \dots, X_n]$, segue che $I(V) = I(V_1) = I(V_2)$, da cui $V = V_1 = V_2$. $\square$

Sia dunque $V \subseteq \mathbb{A}^n$ un insieme algebrico irriducibile e sia $I(V)$ il suo ideale primo associato. Allora considero l'anello $\Gamma(V) = \frac{k[X_1,\dots,X_n]}{I(V)}$. Siccome $I(V)$ è primo, $\Gamma(V)$ è un dominio ed è detto *anello coordinato associato* a V.
Siccome $\Gamma(V)$ è dominio, allora è ben definito il suo campo dei quozienti. Sia $k(V)$. Tale campo è detto *campo delle funzioni razionali su V*. Siano ora $P \in V, z \in k(V)$ fissati; si dice che z è definita in P, se esistono $f, g \in \Gamma(V)$, tali che $z = \frac{f}{g}$ e $g(P) \neq 0$. Si definisce a questo punto $\mathcal{O}_P(V) = \{z \in k(V) : z \text{ è definita in } P\}$. $\mathcal{O}_P(V)$ è un anello locale, con ideale massimale $M_P(V) = \{z \in \mathcal{O}_P(V) : z(P) = 0\}$.

1.2.2 Caso Proiettivo

Definizione 1.15. Un punto $P \in \mathbb{P}^n$ si dice *zero* del polinomio $F \in k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ se per ogni scelta $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ di coordinate omogenee per P, vale che $F(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$, e si scrive $F(P) = 0$.

Vale il seguente:

Lemma 1.16. *Sia $F \in k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ un polinomio di grado d, e siano $F_0, \dots, F_d \in k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ polinomi omogenei tali che $F = \sum_{i=0}^{d} F_i$ e F_i ha grado i. Allora un punto $P \in \mathbb{P}^n$ è zero di F se e solo se è zero di F_i per ogni i.*

Sia ora $S \subseteq k[X_1, \dots, X_{n+1}]$, allora definisco $V(S) = \{P \in \mathbb{P}^n : F(P) = 0 \forall F \in S\}$. Chiaramente se I è l'ideale generato da S, vale che: $V(I) = V(S)$. Un tale insieme è detto *insieme algebrico proiettivo*.
Osservo ora che siccome $k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ è noetheriano, I è finitamente generato, ovvero $I = (F^1, \dots, F^r)$. Ciascuno degli $(F^i)_{i=1}^{r}$ può essere scritto come somma di polinomi omogenei nella forma $F^i = \sum_{j=0}^{d_i} F^i_j$, con d_i grado di F_i e F^i_j polinomio omogeneo di grado j. Dunque $V(I) = V(F^1, \dots, F^r) = V(F^i_j : j \in \{0, \dots, d_i\}, i \in \{1, \dots, r\})$.

Definizione 1.17. Un ideale $I \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ si dice *omogeneo* se per ogni $F \in I, F = \sum_{i=0}^{d} F_i$, dove d è il grado di F e F_i è un polinomio omogeneo di grado i per ogni i, allora $F_i \in I$ per ogni i.

Definizione 1.18. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ pongo $I(X) = \{F \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}] : F(P) = 0 \forall P \in X\}$ l'ideale associato ad X.

Osservazione 1.19. $I(X)$ è omogeneo per ogni $X \subseteq \mathbb{P}^n$.

Proposizione 1.20. *Un ideale $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ è omogeneo se e solo se è generato da un numero finito di polinomi omogenei*

Proposizione 1.21. *Unione finita di insiemi algebrici è un insieme algebrico. Intersezione arbitraria di insiemi algebrici è un insieme algebrico. $\emptyset, \mathbb{P}^n$ sono insiemi algebrici.*

Proof. Siano $S_1, S_2 \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$, dimostro che $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 S_2)$: Sia $P \in V(S_1) \cup V(S_2)$, allora $P \in V(S_1)$ oppure $P \in V(S_2)$, cioè $F(P) = 0 \forall F \in S_1$ oppure $G(P) = 0 \forall G \in S_2$. Ne segue che $\forall F \in S_1 \forall G \in S_2 FG(P) = F(P)G(P) = 0$, dunque $V(S_1) \cup V(S_2) \subseteq V(S_1 S_2)$.
Viceversa sia $P \in V(S_1 S_2)$ e suppongo per assurdo che $P \notin V(S_1) \cup V(S_2)$, ovvero che esistano $F \in S_1, G \in S_2$ tali che $F(P) \neq 0 \neq G(P)$, allora $0 = FG(P) = F(P)G(P)$, entrambi non nulli. Assurdo.
Per induzione segue il risultato per famiglie finite.
Sia ora $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$, con A insieme arbitrario, tali che $S_\alpha \subseteq k[X_1, \ldots, X_{n+1}] \forall \alpha \in A$. Allora, $\cap_{\alpha \in A} V(S_\alpha)$ è un insieme algebrico: chiaramente,

$$\bigcap_{\alpha \in A} V(S_\alpha) = V(\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha)$$

e quest'ultimo è algebrico. Per dimostrare tale uguaglianza:

$$P \in big\cap_{\alpha \in A} V(S_\alpha) \Longrightarrow \forall \alpha \in A \forall F \in S_\alpha F(P) = 0 \Longrightarrow \forall F \in \cup_{\alpha \in A} F(P) = 0$$

. Viceversa:

$$P \in V(\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha) \Longrightarrow \forall F \in \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha F(P) = 0 \Longrightarrow \forall \alpha \in A \forall F \in S_\alpha F(P) = 0$$

.
$\emptyset = \{P \in \mathbb{P}^n : 1 = 0\} = V(1)$ e $\mathbb{P}^n = \{P \in \mathbb{P}^n : 0 = 0\} = V(0)$. □

Osservazione 1.22. Gli insiemi algebrici, sia affini che proiettivi, sono dei chiusi per una topologia.

Osservo ora che se $F \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ è un polinomio omogeneo, è ben definito, per ogni $i \leq n+1$ un polinomio in n indeterminate, detto affinizzato di F rispetto alla i-esima coordinata omogenea: $F_i(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{n+1}) = F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n)$. $V = V(F), V_i = V(F_i) \forall i \leq n+1$, sono

insiemi algebrici proiettivo e affini tali che $\forall i \leq n+1 \varphi_i(V \cap U_i) = V_i$. Un insieme algebrico proiettivo $V = V(S) \subseteq \mathbb{P}^n, S \subseteq k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ si dice *irriducibile* se non è unione di insiemi algebrici più piccoli. Un insieme algebrico irriducibile è detto *varietà*. Vale anche in questo caso che V è irriducibile se e solo se $I(V)$ è primo.
Sia dunque V un insieme algebrico irriducibile proiettivo e sia $I(V)$ il suo ideale primo associato. Allora considero l'anello $\Gamma_h(V) = \frac{k[X_1,\ldots,X_{n+1}]}{I(V)}$. Siccome $I(V)$ è primo, $\Gamma_h(V)$ è un dominio ed è detto *anello omogeneo associato* a V.
Un elemento di $\Gamma_h(V)$ è detto omogeneo se è immagine, tramite la proiezione, di un polinomio omogeneo in $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Indico la proiezione con π_V. Siccome $\Gamma_h(V)$ è dominio, allora è ben definito il suo campo dei quozienti. Sia $k_h(V)$. Osservo ora che se $f, g \in \Gamma_h(V)$ sono omogenei dello stesso grado, il rapporto $\frac{f}{g}$ induce una funzione sui punti di V sui quali g non si annulla, infatti, fissato un punto $P \in V$ tale che $g(P) \neq 0$, fissate delle coordinate omogenee $\bar{x}$ per P, e detto d il comune grado di f e g, per ogni $\lambda \in k \setminus \{0\}$, quindi per ogni altra scelta di coordinate omogenee per P:

$$\frac{f(\lambda x)}{g(\lambda x)} = \frac{\lambda^d f(x)}{\lambda^d g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Queste osservazioni portano a dare la seguente:

Definizione 1.23. Il campo delle funzioni su V è $k(V) = \{z \in k_h(V) : z = \frac{f}{g}, f, g$ omogenei di stesso grado$\}$. Gli elementi di $k(V)$ sono detti *funzioni razionali su V*.

$k(V)$ è un sottocampo di $k_h(V)$.
Siano ora $P \in V, z \in k(V)$ fissati; si dice che z è definita in P, se esiste una coppia di omogenei dello stesso grado f, g, tali che $z = \frac{f}{g}$ e $g(P) \neq 0$. Si definisce a questo punto $\mathcal{O}_P(V) = \{z \in k(V) : z$ è definita in $P\}$. $\mathcal{O}_P(V)$ è un anello locale, con ideale massimale $M_P(V) = \{z \in \mathcal{O}_P(V) : z(P) = 0\}$.
Considero ora brevemente il caso di un multispazio, ovvero uno spazio del tipo $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} = X$, per opportuni $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.24. Un polinomio $F \in k[X_{1,1}, \ldots, X_{n_1,1}, \ldots, X_{1,r}, \ldots, X_{n_r,r}] = Y$ si dice omogeneo se è omogeneo rispetto ad ogni famiglia di indeterminate. Un insieme algebrico in X è $V(S)$, per un opportuno $S \subseteq Y$.

Valgono risultati e definizioni analoghi a quelli visti nel caso di insiemi affini e proiettivi.

1.3 Curve Algebriche Piane

1.3.1 Caso Affine

Siano $F, G \in k[X,Y]$, tali polinomi si dicono equivalenti se esiste $\lambda \in k, \lambda \neq 0$ tale che $F = \lambda G$. Questa relazione è un'equivalenza su $k[X,Y]$.
Definisco una *curva piana affine* una classe di equivalenza di polinomi non costanti rispetto a tale equivalenza. Dunque posso definire il grado di una curva come il grado di un polinomio (e quindi di tutti i polinomi) della classe di equivalenza.
Sia quindi una curva fissata ed F un rappresentante. Se $F = \prod F_i^{e_i}$, con gli F_i non costanti, irriducibili ed a due a due non associati, allora, si dice che F_i è una *componente della curva F di molteplicità e_i*. Se invece, F è irriducibile, allora $V(F)$ è una varietà affine, dunque sono ben definiti $\Gamma(V(F)), k(V(F)), \mathcal{O}_P(V(F))$, e si indicano con $\Gamma(F), k(F), \mathcal{O}_P(F)$.
Sia ora F una curva e P un suo punto. Si dice che P è un *punto semplice per F* se $F_X(P) \neq 0$ o $F_Y(P) \neq 0$, dove F_X, F_Y sono le derivate parziali di F. In tal caso, la retta $F_X(P)(X - x_P) + F_Y(P)(Y - y_P) = 0$, è detta retta tangente ad F in P.
Suppongo ora che, a meno di una traslazione, $P = (0,0)$; allora $F = F_m + \cdots + F_n$, dove $n = \deg(F), F_i$ è polinomio omogeneo di grado i in $k[X,Y]$, per ogni i ed $F_m \neq 0$. Si definisce la *molteplicità della curva F nel punto P* come m e si scrive $m_P(F) = m$. Infine siccome, F_m è omogeno in due variabili, può essere scritto nella forma $F_m = \prod_{i=1}^{s} L_i^{r_i}$, dove gli L_i sono fattori lineari a due a due non associati. Gli L_i sono le rette tangenti a F in P e ciascuna ha molteplicità r_i.

Osservazione 1.25. $P \in F \iff m_P(F) > 0$. Se P è semplice $m_P(F) = 1$. Se $m_P(F) > 1, P$ è detto punto *multiplo*.

Il linguaggio degli anelli coordinati e degli anelli locali offre una diversa, ma equivalente caratterizzazione dei punti semplici e della molteplicità di una curva in un suo punto. Userò la seguente notazione: per $G \in k[X,Y], g$ è la sua immagine in $\Gamma(F) = \frac{k[X,Y]}{(F)}$.

Proposizione 1.26. *Un punto $P \in F$ è semplice se e solo se $\mathcal{O}_P(F)$ è un DVR. Inoltre se L è una retta per P che non è tangente in P a F, allora $\ell \in \mathcal{O}_P(F)$ è un parametro uniformizzante.*

Proposizione 1.27. *Sia $P \in F, F$ irriducibile. Allora $m_P(F) = dim_k \frac{M_P(F)^n}{M_P(F)^{n+1}}$ per n sufficientemente grande.*

In particolare, da questo segue che la molteplicità di un punto dipende solo dal suo anello locale. Inoltre se P è semplice, allora $\mathcal{O}_P(F)$ è un DVR; sia ord_P^F la funzione ordine indotta su $k(F)$.
Siano ora F, G curve piane e $P \in \mathbb{A}^2$. Si definisce la *molteplicità di intersezione* di F e G in P come $I(P, F \cap G) = \dim_k(\frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)}{(F,G)})$. La moltepilicità di intersezione gode delle seguenti proprietà:

- $I(P, F \cap G)$ esiste per ogni coppia di curve e per ogni punto;
- $I(P, F \cap G) \in \mathbb{N}$ se F, G non hanno componenti comuni passanti per P, altrimenti, se F, G hanno componenti comuni passanti per $P, I(P, F \cap G) = \infty$;
- $I(P, F \cap G) = 0 \iff P \notin F \cap G$, e $I(P, F \cap G)$ dipende solo dalle componenti di F e G passanti per P;
- Se T è un cambio di coordinate affini, e $T(Q) = P$, allora $I(Q, F \cap G) = I(P, F^T \cap G^T)$;
- $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$;
- $I(P, F \cap G) \geq m_P(F)m_P(G)$ e vale l'uguaglianza se e solo se F, G non hanno tangenti in P in comune;
- Se $F = \prod_{i=1}^p F_i^{r_i}, G = \prod_{j=1}^q G_j^{s_j}$, allora $I(P, F \cap G) = \sum_{i,j} r_i s_j I(P, F_i \cap G_j)$;
- $I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G + AF)), \forall A \in k[X, Y]$;
- Se P è un punto semplice di F, allora, $I(P, F \cap G) = \mathrm{ord}_P^F(G)$;
- Se F, G non hanno componenti comuni $\sum_{P \in \mathbb{A}^2} I(P, F \cap G) = \dim_k(\frac{k[X,Y]}{(F,G)})$.

1.3.2 Caso Proiettivo

Siano $F, G \in k[X, Y, Z]$ due polinomi omogenei non-costanti. Allora, F, G si dicono equivalenti se esiste $\lambda \in k, \lambda \neq 0$, tale che $F = \lambda G$. Questa è un'equivalenza tra i polinomi omogenei. Si definisce una *curva piana proiettiva* come una classe di equivalenza. Il grado di una tale curva è il grado di un polinomiale che la definisce.
Osservo ora che se F è una curva proiettiva e $P = [x, y, 1]$ è un suo punto, allora, $(x, y) \in \mathbb{A}^2$ è un punto della curva affine F_*, definita come $F_*(X, Y) = F(X, Y, 1)$, ovvero F_* è *l'affinizzato* di F. In particolare $\mathcal{O}_P(F)$ è isomorfo

a $\mathcal{O}_{(x,y)}(F_*)$, dunque se $P \in U_3$ (o simmetricamente in U_1 o U_2), risulta ben definita la molteplicità in P di F, grazie alla teoria delle curve affini.
In generale, dati dei punti $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}^2$, esiste una retta L che non contiene alcuno di questi punti. Allora, a meno di un cambio di coordinate, posso supporre che questa retta sia la retta Z, quindi i P_i hanno coordinate $[x_i, y_i, 1]$.
Siccome c'è questa corrispondenza fra curve proiettive ed affini, risulta definita anche la molteplicità di intersezione di due curve proiettive in un punto. Una retta L è detta *tangente* ad una curva F in un punto P se $I(P, L \cap F) \geq m_P(F)$. Un punto multiplo è detto *ordinario* se ammette $m_P(F)$ tangenti distinte.
Enuncio ora due teoremi che saranno molto importanti nel seguito.

Teorema 1.28 (di Bezout). *Siano F, G curve piane proiettive prive di componenti comuni. Sia $n = \deg(F), m = \deg(G)$. Allora $\sum_{P \in \mathbb{P}^2} I(P, F \cap G) = mn$.*

Definizione 1.29. Siano F, G due curve passanti per P prive di componenti comuni per P e sia H un'altra curva. Allora, si dice che *le condizioni di Noether sono soddisfate in P rispettivamente a F, G, H* se $H_* \in (F_*, G_*)$.

Teorema 1.30 (Fondamentale di Noether). *Siano F, G, H curve piane proiettive. Suppongo che F, G non abbiano componenti comuni. Allora esistono $A, B \in k[X, Y, Z]$ omogenei tali che $H = AF + BG$ se e solo se le condizioni di Noether sono soddisfatte in P, per ogni $P \in F \cap G$.*

1.4 Varietà, Morfismi e Mappe Razionali

A questo punto risulta utile definire una topologia su $\mathbb{P}^n$(e su $\mathbb{A}^n$): la *topologia di Zariski*, definita per ogni $U \subseteq \mathbb{P}^n$, come U è un aperto se e solo se $\mathbb{P}^n \backslash U$ è un insieme algebrico. Per l'Osservazione 1.22, quella definita è effettivamente una topologia. Sia ora V un insieme algebrico irriducibile, e considero su V la topologia indotta dalla topologia di Zariski. Siano $U_1, U_2 \subseteq V$ due aperti, allora, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ perché altrimenti, $V = (V \setminus U_1) \cup (V \setminus U_2)$, sarebbe riducibile. Ne segue che per ogni coppia di punti distinti $P, Q \in V$ i loro intorni non sono mai disgiunti. Ne segue che $\mathbb{P}^n$ con la topologia di Zariski non è uno spazio Hausdorff.
La topologia di Zariski è ben definita anche nei multispazi.

Definizione 1.31. Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n$ un insieme algebrico irriducibile, e sia $X \subseteq V$ un aperto. X è detto varietà. Analogamente risultano definite le varietà per insiemi affini ed in mutlispazi.

Analogamente a quanto visto per gli insiemi algebrici, possiamo definire le funzioni razionali su X varietà, come $k(X) = \{f_{\restriction X} : f \in k(V)\}$, ed analogamente, per $P \in X, \mathcal{O}_P(X) = \{f \in k(X) : f \text{ è definita in } P\}$.
Se $U \subseteq X$ è aperto, allora U è aperto in V, dunque è una varietà ed è detto *sottovarietà aperta* di X.
Sia ora $Y \subseteq X$ un chiuso, allora, Y si dice irriducibile se non è unione di due suoi sottoinsiemi propri e chiusi in X. Se Y è irriducibile, allora, detta $\bar{Y}$ la sua chiusura in V, $Y = \bar{Y} \cap X$ è un aperto di $\bar{Y}$, quindi è una varietà di $\bar{Y}$, ed è detta *sottovarietà chiusa* di X. Analoghe definizioni valgono nel caso affine.
Sia ora $U \subseteq X$ un aperto non vuoto; definisco $\Gamma(U) = \{f \in k(X) : f \text{ è definita in ogni punto } P \in U\} = \cap_{P \in U} \mathcal{O}_P(X)$.
Considero dunque l'anello $\mathcal{I}(U, k)$ delle mappe da U a k.

Lemma 1.32. *Sia X una varietà proiettiva e sia U un suo sottoinsieme aperto. Sia $z \in \Gamma(U)$ tale che $z(P) = 0$ per ogni $P \in U$. Allora $z = 0$.*

Proof. Sia $z \in \Gamma(U)$, allora $z \in k(X)$ e z è definita in ogni punto di U; cioè $z = \frac{f}{g}, f, g \in \Gamma_h(X)$ omogenei dello stesso grado, con $g(p) \neq 0 \forall P \in U$. Allora $f(P) = 0 \forall P \in U$.
Dimostro ora che $z = \frac{f}{g} : U \to k$ è una funzione continua se considero su U la topologia indotta dalla topologia di Zariski e su k la topologia di Zariski, una volta identificato $k = \mathbb{A}^1(k) = \mathbb{A}^1$. Sia un chiuso $A \subseteq \mathbb{A}^1$ un chiuso, allora, è un insieme finito. Dunque siccome le antiimmagini commutano con

le unioni è sufficiente dimostrare che $z^{-1}(a)$ è un chiuso per ogni $a \in \mathbb{A}^1 = k$.

$$\begin{aligned} z^{-1}(a) = \{P \in U : z(P) = a\} = \{P \in U : f(P) - ag(P) = 0\} = \\ = \{P \in U : F(P) - aG(P) = 0\} = V(F - aG) \cap U \end{aligned}$$

dove F, G sono polinomi omogenei che vengono mappati in f, g nel quoziente $\Gamma_h(X)$. In particolare, $z^{-1}(a)$ è algebrico quindi chiuso.
Infine essendo quindi z continua, ed essendo U denso per la topologia di Zariski, $z(X) = z(\bar{U}) \subseteq \bar{0} = 0$. Ne segue $z = 0$. □

Siccome quindi la mappa $\Gamma(U) \to \mathcal{I}(U, k)$ è una mappa iniettiva, posso identificare $\Gamma(U)$ con la sua immagine.
D'ora in poi con varietà intenderò sia insiemi algebrici proiettivi (o affini) irriducibili, sia quelle che ho chiamato sottovarietà (aperte e chiuse) sia affini che proiettive. Siano quindi X, Y varietà e sia $\varphi : X \to Y$ una mappa insiemistica. Allora è ben definito l'omomorfismo d'anelli, $\tilde{\varphi} : \mathcal{I}(Y, k) \to \mathcal{I}(X, k)$ definito per ogni funzione $f \in \mathcal{I}(Y, k)$ da $\tilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi$.

Definizione 1.33. Una mappa $\varphi : X \to Y$, con X, Y varietà è detta *morfismo*, se:

1. φ è continua rispetto alle topologie di Zariski su X e Y;
2. per ogni aperto $U \subseteq Y$ e per ogni $f \in \Gamma(U)$, allora $f \circ \varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}(U))$.

Un *isomorfismo* è un morfismo φ che è invertibile e φ^{-1} è un morfismo.

Definizione 1.34. Siano $V \subseteq \mathbb{A}^n, W \subseteq \mathbb{A}^m$; una mappa $p : V \to W$ è una *mappa polinomiale* se $p = (p_1, \ldots, p_m)$ e $p_i \in k[X_1, \ldots, X_n]\, \forall i$.

D'ora in poi mi userò la seguente nomenclatura: dirò che una varietà è affine se è isomorfa ad una varietà in uno spazio affine.

Proposizione 1.35. *Siano X,Y varietà affini. Allora esiste una corrispondenza iniettiva fra morfismi $\varphi : X \to Y$ ed omomorfismi $\tilde{\varphi} : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$. In particolare, un morfismo di $X \subseteq \mathbb{A}^n$ in $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ è equivalente ad una mappa polinomiale.*

Esempio 1.36. Fissato $V \subseteq \mathbb{P}^n$, una varietà, $U_i, \varphi_i, i\{1, \ldots, n+1\}$ gli aperti e le mappe canoniche che mettono in biiezione $\mathbb{A}^n$ con gli $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$. Siano inoltre $V_i = V \cap U_i, \tilde{V}_i = \varphi_i(V_i)$, allora $\varphi_i : V_i \to \tilde{V}_i$ è isomorfismo per ogni i, quindi ogni varietà proiettiva è unione di sottovarietà aperte isomorfe a varietà affini.

Definizione 1.37. Sia K un'estensione di k generata aggiungendo a k un numero finito di elementi. Si dice grado di trascendenza di K su k, e si denota con $\text{tr.deg}_k K$, il più piccolo intero n, tale che esistono $x_1, \ldots, x_n \in K$, tali che K è algebrico su $k(x_1, \ldots, x_n)$. In tal caso si dice che K è un campo di funzioni algebriche in n variabili su k.

Proposizione 1.38. *Sia K un campo di funzioni algebriche in una variabile su k, tale che per ogni $t \in K$, tale che K è algebrico su $k(t)$, allora l'estensione $\frac{K}{k(t)}$ è finita e sia $x \in K \setminus k$. Allora:*

1. *K è algebrico su $k(x)$;*
2. *Esiste un elemento $y \in K$ tale che $K = k(x, y)$.*

Proof. Sia $t \in K$ tale che K è estensione algebrica di $k(t)$; allora esiste un polinomio $F \in k(t)[X]$ tale che $F(t, x) = 0$. In particolare, siccome x non è algebrico su k, perché k è algebricamente chiuso, allora t compare in $F(t, x)$. Allora, moltiplicando gli eventuali denominatori, posso concludere che esiste $G \in k(x)[T]$ tale che $G(x, t) = 0$, da cui t è algebrico su $k(x)$, ma allora $k(x, t)$ è algebrico su $k(x)$ e di conseguenza lo è K.
Siccome K è algebrico su $k(x)$, allora l'estensione è algebrica e finita, quindi ammette elemento primitivo, ovvero esiste $y \in K$ tale che $K = k(x, y)$. $\square$

Se X è una varietà, allora, $k(X)$ è un'estensione di k finitamente generata. Si definisce allora $\dim(X) = \text{tr.deg}_k k(X)$. Una varietà di dimensione 1 è detta curva.

Osservazione 1.39. Una curva secondo questa definizione è irriducibile, mentre una curva piana definita come in 1.3 può essere riducibile.

Proposizione 1.40.

1. *Se U è una sottovarietà aperta di X, allora $dim(U) = dim(X)$;*
2. *Se V è la chiusura proiettiva di una varietà affine V', allora $dim(V) = dim(V')$;*
3. *Una varietà ha dimensione zero se e solo se è un punto;*

Proof. I primi due punti discendono dal fatto che i campi di funzioni coincidono.
Sia ora V una varietà di dimensione zero: per i primi due punti possiamo supporre sia affine; allora siccome $k(V)$ è algebrico su k, ma k è algebricamente chiuso, segue che $k(V) = k$. In particolare $\Gamma(V) = k$, quindi i resti modulo $I(V)$ sono solo costanti, quindi $I(V)$ è generato da n polinomi di

primo grado linearmente indipendenti su k, che si annullano in V, ma quindi V è un unico punto in $\mathbb{A}^n$. Il viceversa è ovvio. □

Definizione 1.41. Siano X, Y varietà, due morfismi $f_1 : U_1 \to Y, f_2 : U_2 \to Y$, con $U_1, U_2 \subseteq X$ aperti, si dicono equivalenti se le loro restrizioni a $U_1 \cap U_2$ coincidono.

Siccome $U_1 \cap U_2$ è denso in X, f_1, f_2 sono determinati dalle loro restrizioni su $U_1 \cap U_2$. Questa relazione è effettivamente una relazione di equivalenza fra i morfismi. Una classe di equivalenza di morfismi è una coppia (U, f) dove $U \subseteq X, U = \cup_\alpha U_\alpha, U_\alpha$ dominio di un singolo morfismo, $f : U \to Y$ definita da $P \in U \implies P \in U_\alpha \exists \alpha, f(P) = f_\alpha(P)$, con f_α morfismo di dominio U_α. Siccome morfismi equivalenti coincidono sulle intersezioni dei rispettivi domini, la definizione di f è ben posta. f è detta *mappa razionale* ed U è il suo dominio.

Definizione 1.42. Una mappa razionale $f : U \to Y, U \subseteq X$ è detta *dominante* se $f(U)$ è denso in Y.
Siano A, B anelli locali tali che $A \leq B$; si dice che B *domina* A, se l'ideale massimale di B contiene l'ideale massimale di A.

Proposizione 1.43. *Siano X, Y varietà e sia $F : X \to Y$ una mappa razionale dominante. Siano $U \subseteq X, V \subseteq Y$ aperti tali che $f : U \to V$ è un morfismo che rappresenta F. Allora:*

1. *l'omomorfismo indotto $\tilde{f} : \Gamma(V) \to \Gamma(U)$ è iniettivo, quindi si estende unicamente ad un omomorfismo di $k(V) = k(Y)$ in $k(U) = k(V)$; inoltre è indipendente dalla scelta di f, quindi si denota con $\tilde{F}$;*

2. *se P è nel dominio di $F, F(P) = Q$, allora $\mathcal{O}_P(X)$ domina $\tilde{F}(O_Q(Y))$; viceversa se $\mathcal{O}_P(X)$ domina $\tilde{F}(\mathcal{O}_Q(Y))$ per oppurtuni $P \in X, Q \in Y$, allora P è nel dominio di F e $F(P) = Q$;*

3. *ogni omomorfismo di $k(Y)$ in $k(X)$ è indotto da un un'unica mappa razionale dominante di X in Y.*

Una mappa razionale di X in Y è detta birazionale se esistono degli aperti $U \subseteq X, V \subseteq Y$ ed un isomorfismo $f : U \to V$ che rappresenta F. Due varietà tra cui esiste una mappa birazionale, si dicono birazionalmente equivalenti. Ad esempio ogni varietà è birazionalmente equivalente ad ogni sua sottovarietà aperta.

Proposizione 1.44. *Due varietà sono birazionalmente equivalenti se e solo se i loro campi di funzioni sono isomorfi*

Proof. Che due varietà birazionalmente equivalenti abbiano campi di funzioni isomorfi è ovvio.
Viceversa, se $\varphi : k(Y) \to k(X)$ è un isomorfismo, allora, per la dimostrazione della Proposizione 1.43 $\varphi(\Gamma(X)) \subseteq \Gamma(Y_b)$ per un opportuno $b \in \Gamma(Y)$ e $\varphi^{-1}(\Gamma(Y)) \subseteq \Gamma(X_d)$ per un opportuno $d \in \Gamma(X)$. Allora φ si restringe ad un isomorfismo tra $\Gamma((Y_b)_{\varphi^{-1}(d)})$ e $\Gamma((X_d)_{\varphi(b)})$, che è generato da un unico morfismo $f : (X_d)_{\varphi(b)} \to (Y_b)_{\varphi^{-1}(d)}$. □

Corollario 1.45. *Ogni curva è birazionalmente equivalente ad una curva piana.*

Proof. Sia V una curva allora, per la proposizione 1.38, esistono $x, y \in k(V)$ tali che $k(V) = k(x, y)$. Considero perciò il naturale omomorfismo d'anelli da $k[X; Y]$ in $k[x, y]$, e sia I il suo nucleo. In particolare, essendo V irriducibile, I è primo, dunque $V' = V(I) \subseteq \mathbb{A}^2$ è una varietà. Inoltre, $\Gamma(V') = \frac{k[X,Y]}{I}$ è isomorfo a $k[x, y]$, quindi $k(V')$ è isomorfo, a $k(V)$, quindi per la proposizione precedente le due varietà sono birazionalmente equivalenti. Per vedere che V' è una curva è sufficiente osservare che essendo $k(V), k(V')$ isomorfi, $\dim V' = \dim V = 1$. □

Esercizio 1.46. *Siano C, C' curve e sia F una mappa razionale tra C e C'. Allora F è dominante oppure è costante. Inoltre se F è dominante, $k(C)$ è un'estensione algebrica finita di $\tilde{F}(k(C'))$.*

Proof. Se F è dominante allora non c'è niente da dimostrare.
Sia quindi F non dominante, e sia $f : U \to V$ morfismo che rappresenta F. Allora, siccome F non è dominante, $f(U)$ è non vuoto e non è denso in C'. Esiste perciò $\emptyset \neq V \subseteq C'$ aperto tale che $f(U) \cap V = \emptyset \Longrightarrow f(U) \subseteq C' \setminus V$ che è algebrico, quindi è una sottovarietà chiusa di C' e siccome $f(U) \neq \emptyset$ è non banale ovvero è un punto. Ne segue $f(U) = \{P\}$ per un opportuno $P \in C'$. Essendo U denso in C segue la tesi.
Sia ora F dominante allora $\tilde{F}$ è un omomorfismo non banale di campi, dunque $L = \tilde{F}(k(C'))$ è isomorfo a $k(C')$. Sia L che $k(C)$ sono campi di funzione in una variabile su k. Dunque per la proposizione 1.38 esistono $x, y \in k(C), t, s \in L$, nessuno dei quattro in k tali che $k(C) = k(x, y), L = k(t, s)$. Sempre per la Proposizione 1.38 $k(C)$ è estensione algebrica finita di L: basta aggiungere x, y, quando non già presenti. □

1.5 Esplosione di punti affini e proiettivi, Trasformazioni quadratiche e Modello non-singolare

Sia C una curva arbitraria e sia P un suo punto. P è detto punto semplice se $\mathcal{O}_P(C)$ è un DVR.
Sia quindi ord_P^C la funzione d'ordine su $k(C)$ associata a $\mathcal{O}_P(C)$. Se ogni punto di C è semplice, la curva è detta *non-singolare*.

Definizione 1.47. Siano $k \leq K$ campi; un sottoanello A di K è detto *anello locale di* K, se A è un anello locale, K è il campo dei quozienti di A e $k \leq A$. Analogamente si dice che A è un *anello di valutazione discreta di* K se A è un anello locale di K ed è un DVR.

Proposizione 1.48. *Sia C una curva proiettiva e sia $K = k(C)$. Sia inoltre L un campo contenete K ed R un DVR di L che non contiene K. Allora esiste un unico punto $P \in C$ tale che R domina $\mathcal{O}_P(C)$.*

Corollario 1.49. *Sia F una mappa razionale da una curva C ad una curva proiettiva C'; allora i punti semplici di C sono nel dominio di F.*

Proof. Se F non è domininante allora è costante (Esercizio 1.46), quindi è definita su ogni punto di C.
Sia quindi F dominante e $P \in C$ un punto semplice. Allora, posto $R = \mathcal{O}_P(C), L = \tilde{F}(k(C'))$, per la Proposizione 1.43, se R domina $\tilde{F}(\mathcal{O}_Q(C'))$ per un $Q \in C'$, allora P è nel dominio di F. Ma siccome F è dominante $\tilde{F}$ è isomorfismo tra $k(C')$ ed L, quindi R domina $\tilde{F}(\mathcal{O}_Q(C'))$ per un oppurtuno Q se $L \nsubseteq R$.
Se per assurdo fosse $L \subseteq R \subseteq k(C)$, essendo $\frac{k(C)}{L}$ algebrica finita per l'Esercizio 1.46, segue che R è un campo per 1.8. Ma questo è assurdo perché un DVR non è un campo. □

Corollario 1.50. *Sia C una curva proiettiva non-singolare, $K = k(C)$. Allora i DVR di K sono tutti e soli gli $\mathcal{O}_P(C)$.*

Proof. Che i $\mathcal{O}_P(C)$ siano DVR di K è ovvio. Viceversa se R è un DVR di K, allora per la Proposizione 1.48 R domina un unico $\mathcal{O}_P(C)$. Quindi siamo nella situazione di due DVR con uno che domina l'altro inclusi nello stesso campo, che per entrambi è il campo dei quozienti. Ne segue $R = \mathcal{O}_P(C)$.
L'inclusione non banale si dimostra così: $r \in R \subseteq K \Longrightarrow r = \frac{g_1}{g_2}, g_2 \neq 0, g_1, g_2 \in \mathcal{O}_P(C)$; se g_2 è invertibile in $\mathcal{O}_P(C)$, allora $r \in \mathcal{O}_P(C)$, altrimenti, se g_2 non è ivi invertibile, allora, neanche in R lo è, quindi $r \notin R$, assurdo. □

Con "risolvere le singolarità" di una curva proiettiva C si intende trovare una curva proiettiva non-singolare X ed una mappa birazionale $f : X \to C$. Per fare questo si parte dalle curve piane, infatti, se si riesce a dimostrare che per ogni curva piana esiste una tale curva non-singolare, allora, siccome tutte le curve proiettive sono birazionalmente equivalenti ad una curva piana, seguirà che ogni curva è birazionalmente equivalente ad una non-singolare.
L'idea fondamentale è quella dell' "esplosione dei punti singolari di una curva", che ad un livello intuitivo può essere descritto nel seguente modo: sai $C \subseteq \mathbb{P}^2$ una curva e P un suo punto multiplo. Si rimuove il punto P dal piano e lo si sostituisce con una retta proiettiva r. I punti di r corrispondono alle direzioni tangenti a C in P. Tutto questo si può fare in modo che il "piano esploso", ovvero $B = \mathbb{P}^2 \setminus \{P\} \cup r$ sia ancora una varietà. In tal modo si può costruire una cuva $C' \subseteq B$ birazionalmente equivalente a C, ma con singolarità "migliori".
Studierò prima cosa avviene nel caso affine e poi in quello proiettivo.
Sia $P = (0, 0) \in \mathbb{A}^2$ e sia $U = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : x \neq 0\}$. Considero ora il morfismo $f : U \to \mathbb{A}^1 = k$ definito per ogni $(x, y) \in U$ da $f(x, y) = \frac{y}{x}$. Allora, $G \subseteq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^3, G = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{A}^3 : y = xz, x \neq 0\}$, è il grafico di f.
Sia ora $B = \{P = (x, y, z) : y = xz\}$; siccome $Y - XZ \in k[X, Y, Z]$ è irriducibile, B è varietà. Sia inoltre $\pi : B \to \mathbb{A}^2$, la restrizione a B della proiezione da $\mathbb{A}^3$ sulle prime due coordinate: π è un morfismo.
Valgono le seguenti:

- $\pi(B) = U \cup \{P\}$;
- $\pi^{-1}(P) = L = \{(0, 0, z) : z \in k\}$ e $\pi^{-1}(U) = G$

Ne segue che π è un isomorfismo fra G ed U, da cui G è sottovarietà aperta di B, e B è la chiusura di G in $\mathbb{A}^3$. Infine L è sottovarietà chiusa di B.
Sia $\varphi : \mathbb{A}^2 \to B$ definita per ogni $(x, z) \in \mathbb{A}^2$ da $\varphi(x, z) = (x, xz, z)$: è un isomorfismo con inversa la proiezione sulla prima e terza coordinata. Considero quindi $\psi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, definita come $\psi = \pi \circ \varphi$; è morfismo perché composta di morfismi.
Sia $E = \psi^{-1}(P) = \varphi^{-1}(L) = \{(x, z) \in \mathbb{A}^2 : x = 0\}$. Ne deduco che $\psi : \mathbb{A}^2 \setminus E \to U$ è isomorfismo.
Sia ora C una curva irriducibile del piano affine e sia $C_0 = C \cap U$ unaa sottovarietà aperta di C. Sia $C_0' = \psi^{-1}(C_0)$ e sia C' la chiusura di C_0' in $\mathbb{A}^2$. Sia infine $f : C' \to C$ la restrizione di ψ a C'. Siccome $C_0 \subseteq U, f$ è un isomorfismo. Dunque tramite $\tilde{f}$ possiamo identificare $k(C) = k(x, y)$ con $k(C') = k(x, z), y = xz$.

Valgono i seguenti fatti:

- Sia $C = V(F), F = F_r + \cdots + F_n, F_i$ polinomio omogeneo di grado i in $k[X,Y]$, e siano $r = m_P(C), n = \deg(C)$. Allora, $C' = V(F'), F'(X,Z) = F_r(1,Z) + XF_{r+1}(1,Z) + \cdots + X^{n-r}F_n(1,Z)$.

  Proof. $F(X, XZ) = \sum_{i=r}^{n} X^i F_i(1,Z) = X^r F'(X,Z)$. Ma siccome $F_r(1,Z) \neq 0$, allora, X non divide F'. Se per assurdo $F' = GH$, tali che

  $$F = X^r F'(X,Z) = X^r F'(X, \frac{Y}{X}) = XrG(X, \frac{Y}{X})H(X, \frac{Y}{X})$$

  , ma allora F è riducibile, che è assurdo. Ne segue che anche F' è irriducibile, ne segue che $V(F')$ è un chiuso che contiene C'_0. Quindi $C' \subseteq V(F')$.
  Viceversa

  $$F'(P) = 0 \Longrightarrow F(\psi(P)) = 0 \Longrightarrow \psi(P) \in C \Longrightarrow P \in C'$$

  □

- Supposto che la retta X non sia tangente a C in P, posso supporre che $F_r(X,Y) = \prod_{i=1}^{s}(Y - \alpha_i X)^{r_i}$. Allora $f^{-1}(P) = \{P-1, \ldots, P_s\}$, con $P_i = (0, \alpha_i)$ e vale che $m_{P_i}(C') \leq I(P, C \cap E) = r_i$. In particolare, se P è un punto multiplo ordinario, P_i è un punto semplice di C' e $\mathrm{ord}_{P_i}^{C'}(x) = 1$.

  Proof. Chiaramente:

  $$f^{-1}(P) = C' \cap E = \{(0,\alpha) : F_r(1,\alpha) = 0\}.$$

  Inoltre $m_{P_i}(C) \leq I(P_i, F' \cap X) = I(P_i, \prod_{i=1}^{r}(Z - \alpha_i) \cap X) = r_i$. La parte di enunciato riguardo l'ordine in P_i della funzione x è ovvia. □

- Esiste un intorno affine W di P in C tale che $W' = f^{-1}(W)$ sia una sottovarietà aperta affine di C'. Inoltre $\Gamma(W')$ è un modulo finitamente generato su $\Gamma(W)$ e $x^{r-1}\Gamma(W') \subseteq \Gamma(W)$.

  Proof. Sia $F(X,Y) = \sum_{i+\geq r} a_{ij} X^i Y^j$ e sia $H(Y) = \sum_{j \geq r} a_{0j} Y^{j-r}$, ovvero $F(X,Y) = Y^r H(Y) + XG(X,Y)$. Sia infine h l'immagine in

$\Gamma(C)$ di H.
Chiaramente $H(0) \neq 0$, quindi $W = C_h = \{Q \in C : h(Q) \neq 0\}$ è un intorno aperto affine di P in C. Dimostro che $W = (C_h \cap U) \cup \{P\}$; un'inclusione $(\supseteq)$ è ovvia.
Viceversa,

$$Q \in W \Longrightarrow F(Q) = 0, H(Q) \neq 0 \Longrightarrow x_Q = 0 = y_Q \text{oppure} x_Q \neq 0 \Longrightarrow Q \in (C_h \cap U) \cup \{P\}$$

Infine osservo che

$$F'(X,Z) = \sum_{i+j \geq r} a_{ij} X^{i+j-r} Z^j = \sum_{i<r} a_{ij} X^{i+j-r} Z^{r-i} + \sum_{i \geq r} a_{ij} X^{i-r} Y^j$$

Ma questo prova che z^r è una combinazione della forma $\sum_i b_i z^{r-i}$, da cui $\Gamma(W')$ è un modulo finitamente generato su $\Gamma(W)$. Inoltre per $i \leq r-1$:

$$x^{r-1} z^i = x^{r-1} \frac{y^i}{x^i} \in \Gamma(W)$$

$\square$

Siano ora $P-1, \ldots, P_t \in \mathbb{P}^2$, e per semplicità nella trattazione suppongo che $P_i \in U_3$ per ogni i, quindi $P_i = [a_{i1}, a_{i2}, 1]$. Sia $U = \mathbb{P}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_t\}$.
Definisco i morfismi $f_i : U \to \mathbb{P}^1, f_i(X_1, X_2, X_3) = [X_1 - a_{i1}X_3, X_2 - a_{i2}X_3]$ e sia $f = (f_1, \ldots, f_t) : U \to \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ la mappa prodotto. Sia infine $G \subseteq U \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ il grafico di f.
Fissate quindi le coordinate omogenee X_1, X_2, X_3 per $\mathbb{P}^2$ e Y_{i1}, Y_{i2} per la i-esima copia di $\mathbb{P}^1$, considero $B = V(Y_{i2}(X_1 - a_{i1}X_3) - Y_{i1}(X_2 - a_{i2}X_3) : i \in \{1, \ldots, t\})$.
Chiaramente $G \subseteq B$. Sia $\pi : B \to \mathbb{P}^2$ la restrizione della proiezione e sia, per ogni i, $E_i = \pi^{-1}(P_i)$. Valgono i seguenti fatti:

1. $E_i = \{P_i\} \times \{f_1(P_i)\} \times \cdots \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \{f_t(P_i)\}$, con $\mathbb{P}^1$ nell'i-esima posizione; quindi E_i è isomorfo a $\mathbb{P}^1$.

2. $B \setminus \cup_{i=1}^t E_i = B \cap (U \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1) = G$, perciò π si restringe ad un isomorfismo tra $B \setminus \cup_{i=1}^t E_i$ e U.

3. Se T è un cambio di coordinate proiettive di $\mathbb{P}^2$, con $T(P_i) = P'_i$, e le mappe $f'_i : \mathbb{P}^2 \setminus \{P'_1, \ldots, P'_t\} \to \mathbb{P}^1$ sono definite come le f_i, ma con i P'_i al posto dei P_i, allora esiste un unico cambio di coordinate proiettive T_i di $\mathbb{P}^1$ tale che $T_i \circ f_i = f'_i \circ T$, dunque $(T_1, \ldots, T_t) \circ f = f' \circ T$. Infine $(T, T_1, \ldots, T_t)$ mappa isomorficamente G, B, E_i nei corrispondenti G', B', E'_i definiti a partire da f'.

4. Se T_i è un cambio di coordinate in $\mathbb{P}^1$ per un i fissato, esiste un cambio di coordinate T di $\mathbb{P}^2$, tale che $T(P_i) = P_i$ e $T_i \circ f_i = f_i \circ T$.

5. Siano $i \in \{1, \ldots, t\}, Q \in E_i$ fissati; per gli ultimi due punti posso supporre che $P_1 = [0, 0, 1], Q = [\lambda, 1], \exists \lambda \in k$. Sia $\varphi_3 : \mathbb{A}^2 \to U_3$ il morfismo canonico. Siano $V = U_3 \setminus \{P_j : j \neq i\}, W = \varphi_3^{-1}(V), \psi$ la mappa definita nel caso affine e $W' = \psi^{-1}(W)$. A questo punto considero $\varphi : W' \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ definita da

$$\varphi(x, z) = ((x, xz, 1), f_1(x, xz, 1), \ldots, f_{i-1}(x, xz, 1), (z, 1), f_{i+1}(x, xz, 1), \ldots, f_t(x, xz, 1))$$

. φ è un morfismo, ed è tale che $\pi \circ \varphi = \varphi_3 \circ \psi$. Posto $V' = \varphi(W') = B \setminus (\cup_{j \neq i} E_j \cup V(X_3) \cup V(Y_{i2})), V'$ è intorno aperto di Q in B.

6. B è la chiusura di G: se S è un chiuso che contiene G, allora $\varphi^{-1}(S)$ è un chiuso di W' che contiene $\varphi^{-1}(G) = W' \setminus V(X)$, che è aperto quindi denso, ne segue che $\varphi^{-1}(S) = W'$, da cui $Q \in S$. Data l'arbitrarietà di Q in $B \setminus G$, segue che B è la chiusura di G.

7. Il morfismo definito su $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1 \setminus V(X_3 Y_{i2})$ verso $\mathbb{A}^2$ che mappa un elemento del suo dominio in $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{y_{i1}}{y_{i2}})$ è, se ristretto a V', l'inversa di φ. Allora abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^2 \arrow[d, "\psi"] & W' \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & V' \arrow[r, hook] \arrow[d] & B \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{A}^2 & W \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\varphi_3"] & V \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

Quindi π, attorno a Q si comporta analogamente alla mappa ψ, dunque valgono per π tutte le proprietà di ψ.

8. Sia C una curva irriducibile in $\mathbb{P}^2$. Sia $C_0 = C \cap U, C'_0 = \pi^{-1}(C_0) \subseteq G$ e C' la chiusura di C'_0 in B. Allora $f : C' \to C$ si restringe ad un isomorfismo tra C'_0 e C_0. Per quanto visto nel punto precedente, tale isomorfismo ha la stessa forma del caso affine.

Vale quindi la seguente:

Proposizione 1.51. *Sia C una curva proiettiva piana irriducibile, e suppongo che tutti i suoi punti multipli, siano ordinari. Allora esiste una curva non-singolare C' ed una mappa birazionale da C' a C.*

Per quanto visto quindi, se C è una curva piana proiettiva i cui punti multipli sono ordinari, allora C è birazionalmente equivalente ad una curva non singolare. Adesso dimostro che ogni curva piana è birazionalmente equivalente ad una curva i cui punti multipli sono ordinari.
Siano $P = [0,0,1], P' = [0,1,0], P'' = [1,0,0] \in \mathbb{P}^2$; tali punti sono detti fondamentali. Siano $L = V(Z), L' = V(Y), L'' = V(X)$ e queste rette sono dette eccezionali. Sia infine $U = \mathbb{P}^2 \setminus V(XYZ)$.
Definisco $Q : \mathbb{P}^2 \setminus \{P, P', P''\} \to U \cup \{P, P', P''\}, Q(x,y,z) = [yz, xz, xy]$. Q è un morfismo ed è tale che $Q^{-1}(P) = L \setminus \{P', P''\}$ (e simmetricamente per P', P'').
Osservo ora che se $[x,y,z] \in U$:

$$Q^2(x,y,z) = Q(yz, xz, xy) = [xxyz, yxyz, zxyz] = [x,y,z]$$

Quindi su $U, Q = Q^{-1}$, quindi Q è un isomorfismo di U con se stesso. In particolare induce una mappa birazionale di $\mathbb{P}^2$ con se stesso. La mappa Q è detta trasformazione quadratica standard.
Sia C una curva irriducibile in $\mathbb{P}^2$, e suppongo non sia una retta eccezionale. Allora $C \cap U$ è una curva chiusa in U. Sia C' la chiusura di $Q(C \cap U) = Q^{-1}(C \cap U)$ in $\mathbb{P}^2$; Q si restringe ad un morfismo tra $C' \setminus \{P, P', P''\}$ e C. Inoltre $(C')' = C$ perché $Q^2 = \mathrm{id}_U$.
Sia $F \in k[X,Y,Z]$, tale che $C = V(F), n = \deg(F)$ definisco la trasformata algebrica di F come: $F^Q = F(YZ, XZ, XY)$. Tale polinomio è omogeneo di grado $2n$.
Valgono i seguenti fatti:

1. Se $m_P(C) = r$, allora, Z^r è la più alta potenza di Z che divide F^Q, e simmetricamente in P', P''.

Se $F^Q = X^{r''} Y^{r'} Z^r F'$, il polinomio omogeneo F' è detto trasformata propria di F.

2. $\deg(F') = 2n - r - r' - r'', (F')' = F, V(F') = C'$.

3. $m_P(C') = n - r' - r''$, e simmetricamente per P', P''.

Suppongo ora che nessuna retta eccezionale sia tangente a C in un punto fondamentale. Una tale curva si dice essere in buona posizione.

4. Se C è in buona posizione, allora, anche C' lo è.

Sia C in buona posizione e che $P \in C$; sia $C_0 = (C \cap U) \cup \{P\}, C_0' = C' \setminus V(XY)$. Allora $f : C_0' \to C_0$ è la restrizione di Q Considero ora il polinomio affinizzato $F_* = F(X, Y, 1)$, e la curva affinizzata $C_* = V(F_*) \subseteq \mathbb{A}^2$; definisco $(F_*)' = F(X, XZ, 1)X^{-r} C_*' = V(F_*') \subseteq \mathbb{A}^2$ ed $f_* : C_*' \to C_*, f_*(x, z) = (x, xz)$.

5. Esiste un intorno W di $(0, 0)$ in C_* e isomorfismi $\varphi : W \to C_0, \varphi' 0 : W' = f_*^{-1}(W) \to C_0'$ tali che $\varphi \circ f_* = \varphi' \circ f$.
6. Se C è in buona posizione e $P_1, \dots, P_s$ sono punti non-fondamentali su $C' \cap L$, allora, $m_{P_i}(C') \leq I(P_i, C' \cap L)$.

Si dice che la curva C è in posizione eccellente se interseca L trasversalmente in n punti non-fondamentali distinti, ed interseca trasversalmente L', L'' ciascuna in $n - r$ punti non-fondamentali distinti.

7. Se C è in posizione eccellente, allora gli unici punti multipli di C' sono quelli in $C' \cap U$ che corrispondono a quelli in $C \cap U$ e questa corrispondenza rispetta la molteplicità dei punti e se questi sono ordinari o meno; P, P', P'' che sono ordinari di molteplicità $n, n - r, n - r$ rispettivamente e dei punti $P_1, \dots, P_s$ non fondamentali su $C' \cap L$, di molteplicità tali che $m_{P_i}(C') \leq I(P_i, C' \cap L), \sum_{i=1}^{s} I(P_i, C' \cap L) = r$.

Per C curva piana proiettiva irriducibile, di grado n si definisce $g_*(C) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{r_P(r_P - 1)}{2}$, dove $r_P = m_P(C)$.

8. Se C è in posizione eccellente allora, $g_*(C') = g_*(C) - \sum_{i=1}^{s} \frac{r_i(r_i-1)}{2}$, dove $r_i = m_{P_i}(C')$ e $P_1, \dots, P_s$ sono i punti non fondamentali di $C' \cap L$.

Abbandono ora le notazioni per punti fondamentali e rette eccezionali che ho usato fino ad ora.

Lemma 1.52. *Sia F una curva piana proiettiva irriducibile e P un suo punto, allora esiste un cambio di coordinate T, tale che F^T è in posizione eccellente e $T(0, 0, 1) = P$.*

Se T è un cambio di coordinate omogenee, allora, $Q \circ T$ è detta trasforazione quadratica e $(F^T)'$ è detto trasformata quadratica di F. Se F^T è in posizione eccellente e $T(0, 0, 1) = P$, allora si dice che la trasformata è centrata in P. Se $F = F_1, \dots, F_n = G$ sono curve e F_i è trasformata quadratica di F_{i-1}, allora, si dice che F è trasformata in G da una sequenza finita di trasformazioni quadratiche.

Proposizione 1.53. *Tramite un numero finito di trasformazioni quadratiche, ogni curva piana proiettiva irriducibile può essere trasformata in una curva i cui punti multipli sono ordinari.*

Teorema 1.54. *Sia C una curva proiettiva. Allora esiste una curva proiettiva non-singolare X ed una mappa birazionale f da X a C. Se $f' : X' \to C$ sono un'altra mappa birazionale ed un altra curva non-singolare, allora esiste un unico isomorfismo $g : X \to X'$ tale che $f' \circ g = f$.*

Corollario 1.55. *Esiste un corrispondenza biiettiva fra curve proiettive non-singolari e campi di funzioni in una variabile. Se X, X' sono due tali curve, i morfismi dominanti da X a X' corrispondono agli omomorfismi da $k(X')$ a $k(X)$.*

Sia C una curva proiettiva. $f : X \to C$ come nel Teorema 1.54. Si dice che X è il modello non-singolare di C o di $K = k(C)$. Si identifica $k(X)$ con $k(C)$ tramite $\tilde{f}$. I punti di X sono detti posti di C ed un posto $Q \in X$ si dice centrato in $P \in C$ se $F(Q) = P$.
Suppongo ora che C sia piana, $Q \in X, f(Q) = P \in C$. Per ogni altra curva piana G, eventualmente riducibile, sia $G_* \in \mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)$ e sia g l'immagine di G_* in $\mathcal{O}_P(C) \subseteq k(C) = k(X)$. Definisco $\mathrm{ord}_Q(G) = \mathrm{ord}_Q(g)$.

Proposizione 1.56. *Sia C una curva piana proiettiva irriducibile, $P \in C, f : X \to C$ come sopra. Sia G un'altra curva piana, eventualmente riducibile. Allora: $I(P, C \cap G) = \sum_{Q \in f^{-1}(P)} ord_Q(G)$.*

Lemma 1.57. *Se P è un punto multiplo ordinario su C di molteplicità r e sia $f^{-1}(P) = \{P_1, \dots, P_r\}$. Se $z \in k(C)$ e $ord_{P_i}(z) \geq r - 1$, allora $z \in \mathcal{O}_P(C)$.*

Proposizione 1.58. *Siano F una curva piana proiettiva irriducibile e P un suo punto multiplo ordinario di molteplicità r e siano $P_1, \dots, P_r$ i posti di F centrati in P. Siano inoltre G, H altre due curve piane, eventualmente riducibili. Allora P soddisfa le condizioni di Noether rispetto a F, G, H se e solo se $\forall i \in \{1, \dots, r\} ord_{P_i}(H) \geq ord_{P_i}(G) + r - 1$.*