CheatSheet Analisi 2

ANALISI COMPLESSA

1. Limite complesso:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l \leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z\to z_0} Re(f(z)) = Re(l) \\ \lim_{z\to z_0} Im(f(z)) = Im(l) \end{cases}$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \leftrightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$$

2. Continuitá complessa:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

3. Funzione olomorfa

Si definisce funzione **olomorfa** una funzione complessa di variabile complessa, che é **derivabile** in senso complesso in un aperto.

$$A \text{ aperto di } \mathbb{C};$$
$$f : A \to \mathbb{C}$$

f é derivabile in senso complesso se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Oppure considerando gli incrementi:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

4. Funzione analitica

Una funzione di variabili complesse é **analitica** nel punto z_0 se é derivabile nel punto e in tutto un suo intorno. $f(z)$ é analitica in D se é derivabile in tutti i punti di D. Una funzione analitica é continua nel punto.

5. Condizione necessaria Cauchy-Riemann

$$f \text{ olomorfa in } z_0 \implies \begin{cases} u, v \text{ ammettono derivate parziali in } (x_0, y_0) \\ \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE

Per la dimostrazione della condizione necessaria di Cauchy - Riemann si parte dalla **definizione di limite complesso:**

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Si va ad esplicitare $z = x + iy$

$$f'(z_0) = \lim_{(x,y)\to(x_o,y_0)} \frac{f(x+iy) - f(x_0+iy_0)}{(x+iy) - (x_0+iy_0)}$$

Sapendo che, ad una qualunque funzione complessa puó essere associata una coppia di funzioni reali $u(x,y)$ e $v(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si sostituisce $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$:

$$\lim_{(x,y)\to(x,y_0)} \frac{\big[u(x,y)+iv(x,y)\big] - \big[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\big]}{(x+iy)-(x_0+iy_0)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x,y_0)} \frac{\big[u(x,y)-u(x_0,y_0)\big] + i\big[v(x,y)-v(x_0,y_0)\big]}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

Considerando invece gli incrementi possiamo riscrivere il limite in forma compatta:

$$\begin{gathered} u(x,y)-u(x_0,y_0) = \Delta u \\ v(x,y)-v(x_0,y_0) = \Delta v \\ (x-x_0)+i(y-y_0) = \Delta z = \Delta x + i\Delta y \end{gathered}$$

Si ottiene:

$$\lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

Che corrisponde proprio alla definizione di derivata in campo complesso:

$$f'(x_0+iy_0) = f'(z_0)$$

Dove:

$$f'(z_0) = a + ib$$

Sará quindi composta da una parte reale a ed una immaginaria ib.

Per cui, per la definizione di limite complessa:

$$\begin{cases} a = Ref'(z_0) \\ b = Imf'(z_0) \end{cases} \implies \begin{cases} \lim_{z\to z_0} Re\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right] = Ref'(z_0) = a \\ \lim_{z\to z_0} Re\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right] = Imf'(z_0) = b \end{cases}$$

Analogamente, tenendo conto degli incrementi:

$$\begin{cases} \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}} Re\left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}\right) = a \\ \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}} Im\left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}\right) = b \end{cases}$$

Quanto valgono a e b?

Il limite esiste nel senso di $\mathbb{R}^2$ per cui il vettore (x,y) puó avvicinarsi a (x_0,y_0) in qualunque modo. Supponiamo quindi che y é costante ed uguale a y_0 mentre $x \to x_0$... ovvero che $\Delta y = 0:$

$$\left| \lim_{\Delta x\to 0} Re\left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = a \right.$$

$$\left| \lim_{\Delta x\to 0} Im\left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = b \right.$$

Ma é anche vero che:

$$\left| \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u_x \implies a = u_x \right.$$

$$\left| \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v_x \implies b = v_x \right.$$

Per cui segue che:

$$f'(z_0) = a + ib = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \tag{1}$$

Consideriamo ora la direzione opposta, supponendo quindi che $x = x_0$ ovvero $(\Delta x = 0)$ e facendo tendere $y \to y_0$. Analogamente al caso $\Delta y = 0$ si ha:

$$\left| \lim_{\Delta y \to 0} Re\left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y}\right) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = a \right.$$

$$\left| \lim_{\Delta y \to 0} Im\left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y}\right) = \lim_{\Delta y \to 0} -\frac{\Delta u}{\Delta y} = b \right.$$

Ma é anche vero che:

$$\left| \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v_y \implies a = v_y \right.$$

$$\left| \lim_{\Delta y \to 0} -\frac{\Delta u}{\Delta x} = -u_y \implies b = -u_y \right.$$

Da cui si ottiene:

$$f'(z_0) = a + ib = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \tag{2}$$

Dalle equazioni 41 e 42 seguono le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

6. Condizione sufficiente Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u, v \text{ differenziabili in } (x_0, y_0) \\ \text{valgono le equazioni di Cauchy - Riemann} \end{cases} \implies f \text{ olomorfa in } z_0$$

7. Integrale curvilineo

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)dz &= \int_b^a z(t) \cdot z'(t)dt = \int_b^a \Big[f(x(t) + iy(t)\Big] \cdot \Big[x'(t) + iy'(t)\Big]dt = \\ &= \int_b^a \Big[u\Big(x(t), y(t)\Big) + iv\Big(x(t), y(t)\Big)\Big] \cdot \Big[x'(t) + iy'(t)\Big]dt = \\ &= \int_b^a (ux' - vy')dt + i\int_b^a (uy' + vx')dt \end{aligned}$$

8. Singolaritá

Punto del dominio in cui la funzione non é olomorfa.

- eliminabile $\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = l \in \mathbb{C}$
- polo $\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$
- essenziale $\Leftrightarrow \nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$

Nel caso di polo é possibile determinarne **l'ordine** p risolvendo il limite:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0)^p = l \neq 0 \in \mathbb{C}$$

9. Teorema dei residui

$$\begin{pmatrix} \subseteq \mathbb{C} \text{ dominio regolare} \\ z_1, \ldots, z_n \in D \text{ interni} \\ f \text{ olomorfa in } D - \{z_1, \ldots, z_n\} \end{pmatrix} \implies \left(\int_{+\delta D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, z_j)\right)$$

$$z_0 \text{ polo di ordine } p$$

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{(p-1)}}{dz^{(p-1)}} \left[(z - z_0)^p f(z)\right]$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. Forma

Le **equazioni differenziali** sono delle particolari tipologie di equazioni in cui **l'incognita è una funzione** e i termini sono le sue derivate. La **forma generale** di un'equazione differenziale è la seguente:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Un'**equazione lineare** di ordine k si presenta nella forma:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Esprimibile compattamente nel seguente modo:

$$L(x) = f(x)$$

Dove $L(x)$ prende il nome di **operatore differenziale.**

2. Soluzioni

Analogamente alle equazioni algebriche, la soluzione di un'equazione lineare é una **funzione** che, se sostituita nell'equazione assegnata, restituisce un'uguaglianza vera.

Gli integrali generali (le soluzioni) sono generalmente dipendenti da delle costanti c_n... risolvendo un'equazione generale andiamo infatti a ricercare una **famiglia di funzioni**, parliamo infatti di "insieme di soluzioni".

3. Problema di Cauchy

Un **problema di Cauchy** si presenta nella forma generale:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Nel caso $n = 1$, ovvero di equazione differenziale di ordine 1 :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

La soluzione di un problema di Cauchy è unica.

4 Determinante Wronskiano e teorema del Wronskiano

Il **determinante Wronskiano** puó essere talvolta utilizzato per determinare l'integrale particolare di un'**equazione differenziale del 2 ordine non omogenea a coefficienti variabili**... In senso piú ampio il Wronskiano puó essere utilizzato per stabilire se un insieme di funzioni é linearmente indipendente (o dipendente) su un determinato intervallo.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Dove $y_1, y_2, ..., y_n$ sono integrali particolari dell'equazione omogenea.

- $\exists x_0 \in [a,b] : W(x_0) = 0 \Leftrightarrow y_1, ..., y_n \text{ linearmente dipendenti}$
- $\exists x_1 \in [a,b] : W(x_1) \neq 0 \Leftrightarrow y_1, ..., y_n \text{ linearmente indipendenti}$

DIMOSTRAZIONE

Per la **dimostrazione del teorema sul Wronskiano** basta verificare uno dei due casi, la lineare dipendenza o la lineare indipendenza. La dimostrazione prevede sostanzialmente 2 step derivanti dalla duplice modalitá di lettura del bicondizionale $\Leftrightarrow$.

Verifichiamo il primo caso ovvero $W(x_0) = 0$.

STEP 1: Dimostrazione nel verso $\rightarrow$.

$W(x_0) = 0 \implies y_1, ..., y_n \text{ linearmente dipendenti}$

Nel primo step della dimostrazione sostanzialmente andiamo a verificare la **lineare dipendenza** (o la lineare indipendenza) del sistema collegato alla matrice Wronskiana. In questo caso verifichiamo la lineare dipendenza:

Consideriamo il sistema lineare nelle incognite $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$:

$$\begin{cases} y_1(x_0)\xi_1 + y_2(x_0)\xi_2 + ... + y_n(x_0)\xi_n = 0 \\ y_1'(x_0)\xi_1 + y_2'(x_0)\xi_2 + ... + y_n'(x_0)\xi_n = 0 \\ .... \\ y_1^{(n-1)}(x_0)\xi_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)\xi_2 + ... + y_n^{(n-1)}(x_0)\xi_n = 0 \end{cases}$$

n vettori sono **linearmente indipendenti** se l'unica n-upla di scalari che annulla la combinazione lineare $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$ é il vettore nullo. Sono **linearmente dipendenti** se, oltre al vettore nullo esiste qualche altra n-upla che annulla la combinazione...

Considerando una generica combinazione lineare: $a_1v_1 + ... + a_nv_n$ si ha:

- lineare indipendenza se: $(a_a, ..., a_n) = (0, ..., 0)$
- lineare dipendenza se: $(a_a, ..., a_n) \neq (0, ..., 0)$

Dal momento che, abbiamo supposto che $W(x_0) = 0$ e, tenendo conto le condizioni iniziali che impongono ogni equazione del sistema $= 0$, il sistema ammette soluzione diversa da quella nulla :

$$(c_1, ..., c_n) \neq (0, ..., 0)$$

$(y_1, ..., y_n)$, soluzioni dell'equazione $L(y) = 0$ sono linearmente indipendenti.

Per il principio di additivitá allora, ogni loro composizione lineare é soluzione dell'equazione differenziale omogenea.

Per cui $y(x) = c_1y_1(x) + ... + c_ny_n(x)$ è un integrale particolare dell'equazione $L(y) = 0$, che soddisfa le condizioni iniziali $y(x_0) = y'(x_0) = ... = y^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Infatti:

$$\begin{cases} y_1(x_0)c_1 + ... + y_n(x_0)c_n = 0 \\ y_1'(x_0)c_1 + ... + y_n'(x_0)c_n = 0 \\ .... \\ y_1^{(n-1)}(x_0)c_1 + ... + y_n^{(n-1)}(x_0)c_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

L'integrale particolare si annulla in x_0 insieme a tutte le sue $n-1$ derivate, ne consegue che gli integrali $y_1, y_2, ..., y_n$ sono linearmente dipendenti.

$$(c_!, ..., c_n) \neq (0, ..., 0) \implies y_1, ..., y_n \text{ linearmente dipendenti}$$

STEP 1: Dimostrazione nel verso $\leftarrow$.

$$y_1, ..., y_n \text{ linearmente dipendenti} \implies W(x_0) = 0$$

Passiamo ora alla dimostrazione in senso opposto. Supponendo che gli integrali $y_1, ..., y_n$ siano **linearmente dipendenti**, dobbiamo provare l'esistenza di un punto x_0 in cui il Wronskiano si annulla.

$$(c_1, ..., c_n) \neq (0, ..., 0) \implies c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) = 0$$

Si costruisce il sistema:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) = 0 \\ c_1 y_1'(x) + ... + c_n y_n'(x) = 0 \\ .... \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + ... + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Dal momento che, per supposizione $(c_1, ..., c_n) \neq (0, ..., 0)$, affinché le equazioni si annullino deve valere $y_n(x) = 0$. Esiste pertanto un punto, che chiameremo x_0 in cui il wronskiano si annulla:

$$W(x_0) = 0 \qquad \forall x_0 \in [a, b]$$

4.5 Teorema sull'integrale generale di un'equazione omogenea

$$\left(y_1, ..., y_n \text{ n integrali particolari linearmente indipendenti di: } L(y) = 0 \right) \implies \left(\text{integrale generale: } y(x) = c \right.$$

Il teorema sostanzialmente afferma che, dati gli integrali particolari linearmente indipendenti di un'equazione differenziale omogenea, l'integrale generale dell'equazioene é data dalla combinazione lineare di quelli particolari.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che, per ogni soluzione particolare dell'equazione esiste una ed una sola n-upla $(c_1, ..., c_n) : y(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) \qquad \forall c \in [a, b]$.

Supponendo che $y(x)$ sia una soluzione dell'equazione che verifica le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Considero il sistema:

$$\begin{cases} y_1(x_0)\xi_1 + y_2(x_0)\xi_2 + ... + y_n(x_0)\xi_n = y_0 \\ y_1'(x_0)\xi_1 + y_2'(x_0)\xi_2 + ... + y_n'(x_0)\xi_n = y_1 \\ .... \\ y_1^{(n-1)}(x_0)\xi_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)\xi_2 + ... + y_n^{(n-1)}(x_0)\xi_n = y_{n-1} \end{cases}$$

Per supposizione le soluzioni sono linearmente indipendenti per cui vale la relazione:

$$(\xi_1, ..., \xi_n) = (0, ..., 0) \implies W(x_0) \neq 0$$

Il sistema quindi ammette un'unica soluzione che é quella nulla.

La funzione $y(x) = c_1y_1(x) + ... + c_ny_n(x)$ é ancora un integrale generale dell'equazione differenziale in quanto soddisfa le condizioni di Cauchy.

$$\begin{cases} c_1y_1(x) + ... + c_ny_n(x) = y_0 \\ c_1y_1'(x) + ... + c_ny_n'(x) = y_1 \\ .... \\ c_1y_1^{(n-1)}(x) + ... + c_ny_n^{(n-1)}(x) = y_{n-1} \end{cases}$$

Ci troviamo di fronte a 2 soluzioni che verificano le stesse condizioni iniziali ma sappiamo che la soluzione di un problema di Cauchy é unica! Soluzioni:

- $c_1y_1(x) + ... + c_ny_n(x)$
- $y(x)$

Dato che la soluzione é unica, le due soluzioni coincidono:

$$y(x) = c_1y_1(x) + ... + c_ny_n(x)$$

FUNZIONI 2 VARIABILI

1. Differenziabilitá

- f é derivabile in (x, y)
- vale la seguente relazione di limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - (Df(x), h)}{|h|} = 0 \tag{3}$$

2. Derivate direzionali

Il vettore $v = (v_1, v_2) \in R^2$ di norma unitaria, rappresenta la direzione nel piano.

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$$

Si definisce derivata direzionale, nella direzione v, il limite:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv_1, y + tv_2) - f(x, y)}{t}$$

3. MAX e min

$$x_0 \in A \text{ é un minimo relativo se esiste un intorno circolare } I_\delta(x_0), \text{per cui:}$$
$$f(x_0) \le f(x) \qquad \forall x \in I_\delta(x_0) \cap A$$
$$x_0 \in A \text{ é un massimo relativo se esiste un intorno circolare } I_\delta(x_0), \text{per cui:}$$
$$f(x_0) \ge f(x) \qquad \forall x \in I_\delta(x_0) \cap A$$

4. Condizione necessaria del 1 ordine (generalizzazione teorema di Fermat)

$$\text{Se } f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ é derivabile in un punto } x_0 \text{ di massimo o di minimo relativo, allora:}$$
$$Df(x_0) = 0$$

Sostanzialmente stiamo affermando che i punti in cui il gradiente della funzione si annulla, sono candidati ad essere punti di massimo o minimo relativo.

5. Condizione sufficiente nel caso di n variabili

$$\text{Se } f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

é una funzione di classe C^2 definita in un intorno x_0, punto critico interno ad A, se:

- $D^2f(x_0)$ definita positiva $(|A| > 0 \; e \; a_{11} > 0) \implies x_0$ punto di minimo relativo
- $D^2f(x_0)$ definita negativa $(|A| > 0 \; e \; a_{11} < 0) \implies x_0$ punto di MASSIMO relativo
- $D^2f(x_0)$ indefinita $(|A| < 0) \implies x_0$ punto sella

Il criterio non tiene conto del caso di matrice semidefinita.

6. Autovalori

Data una matrice quadrata di ordine n, $\alpha \in R$ si dice autovalore di A se esiste un vettore $v \neq 0, v \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$Av = \alpha v$$

α è autovalore se e soltanto se è radice del polinomio caratteristico $P = |A - \alpha I|$ dove I rappresenta la matrice identica.