1 Segnali

Segnale: funzione a cui e' associata un'informazione e che rappresenta la variazione di una quantita' di interesse:

$$x : \tau \rightarrow X$$

1. x: variabile dipendente ("ampiezza" del segnale);
2. $n/t \in \tau$: variabile indipendente ("tempo");
3. τ : dominio, valori che puo' assumere t o n (V.I.);
4. X : codominio, valori che puo' assumere x;

1.1 Classificazione elementare

1.1.1 Segnali deterministici ed aleatori

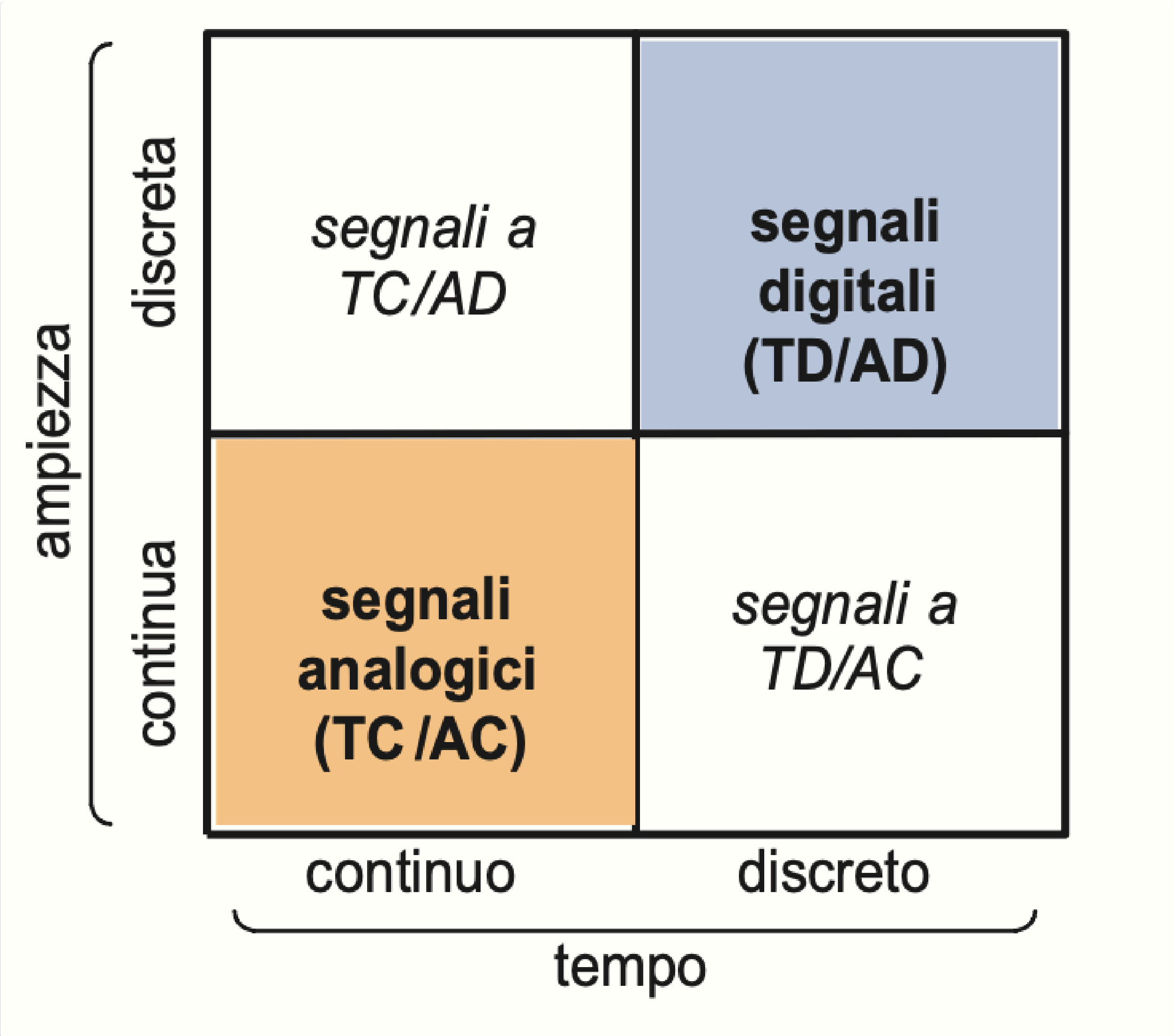
- Deterministico: segnale completamente descrivibile mediante una funzione matematica;
- Aleatorio: segnale non completamente descrivibile mediante una funzione matematica in quanto nella sua stessa definizione è contenuto un certo grado di incertezza. Generalmente rappresentabili mediante collezioni di funzioni.
  I segnali aleatori sono adatti a trasportare informazioni in quanto, lo stesso concetto di informazione è legato al concetto di imprevidibilità.

1.1.2 Proprietà variabile indipendente

- Monodimensionale: segnale descritto da una funzione di 1 variabile indipendente (VI);
- Multimensionale: segnale descritto da una funzione di 2 o più variabili indipendenti (VI);
- Tempo continui (TC o "forme d'onda"): la VI (tempo) varia in un insieme continuo;
- Tempo discreti (TD o "sequenze"): la VI (tempo) varia in un insieme discreto.

1.1.3 Proprietà variabile dipendente

- Scalare: la variabile dipendente (VD) è uno scalare;
- Vettoriale: la variabile dipendente (VD) è un vettore (di scalari);
- Ampiezza continua: la VD (ampiezza) varia in un insieme continuo;
- Ampiezza discreta: la VD (ampiezza) varia in un insieme discreto;



1.1.4 Segnali analogici e digitali##

- Analogico : segnale TC con ampiezza TC;
- Digitale (o numerico): segnale TD con ampiezza TD;
  I segnali digitali possono essere rappresentati mediane stringhe ed elaborati da sistemi digitali.

1.1.5 Segnali pari e dispari

- Pari:
- Dispari:
- Hermitiano:
- Anti-hermitiano:

1.2 Proprietà dei segnali

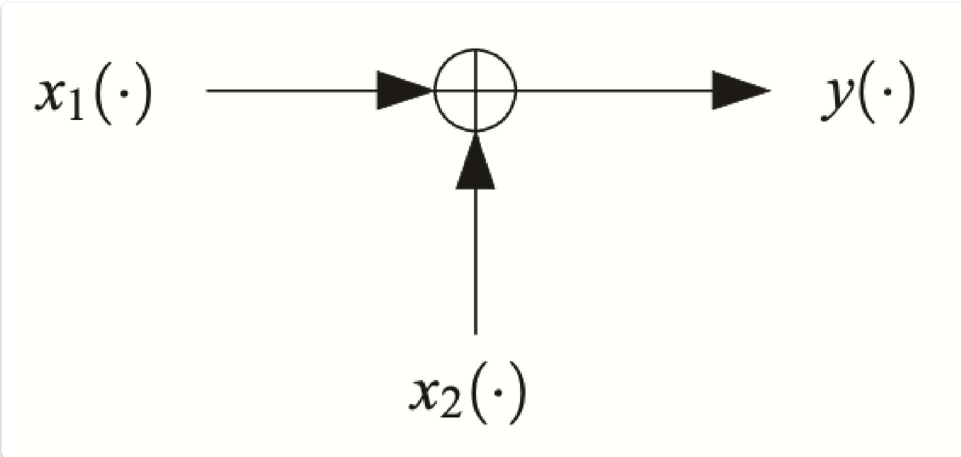
1.2.1 Operazioni elementari sui segnali

Dato che i segnali TC sono descritti mediante funzioni di variabili reali, ad essi possono essere applicati tutti gli operatori dell'analisi matematica; ai segnali TD invece si applicano gli operatori delle successioni aritmetiche.

1.2.1.1 Trasformazione della variabile dipendente

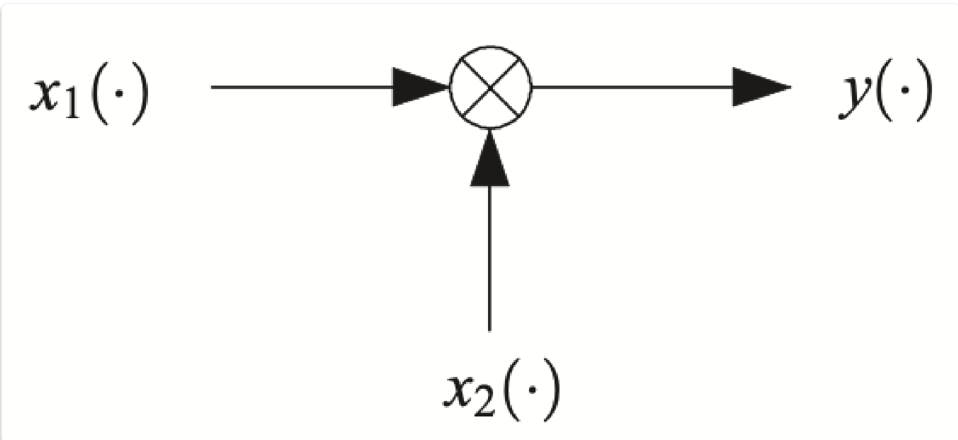
- Somma: si ottiene effettuando la somma punto a punto delle ordinate. E' riconducibile ad un sistema MISO chiamato sommatore:

$$y(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$$



- **Prodotto**: si ottiene effettuando la somma punto a punto delle ordinate. E' riconducibile ad un sistema MISO chiamato **moltiplicatore**:

$$y(\cdot) = x_1(\cdot) \cdot x_2(\cdot)$$

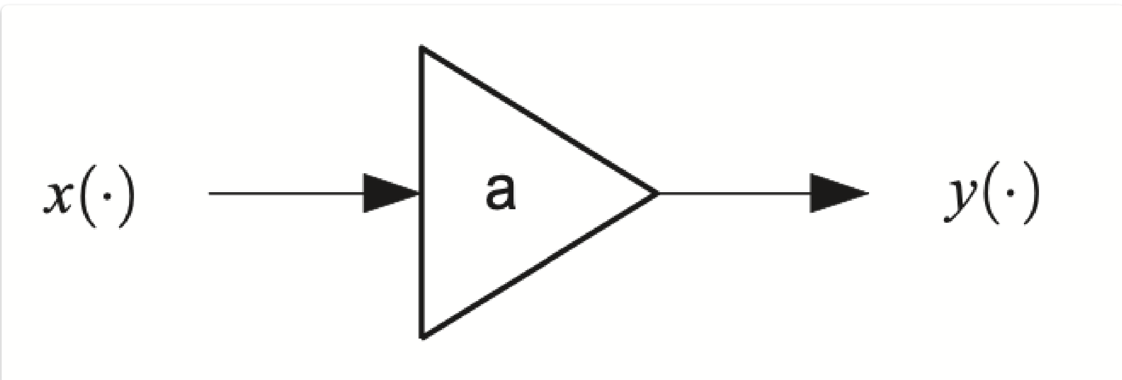


- **Moltiplicazione per costante:** riconducibile ad un sistema SISO detto amplificatore/attenuatore:

$$y(\cdot) = \alpha x(\cdot)$$

- α : **amplificazione**;
- α : **attenuazione**;
- $\alpha = 1$ $y(\cdot) = x(\cdot)$: **inversione**

Il fattore α è detto "guadagno" dell'amplificatore/attenuatore;



1.2.1.2 Trasformazione della variabile indipendente

Per semplicità $\tau = n$ oppure t;

- **Traslazione temporale (ritardo/anticipo):**

$$y(\tau) = x(\tau \quad \tau)$$

  - τ : traslazione verso destra **(ritardo)**;
  - τ : traslazione verso sinistra **(anticipo)**;
- **Cambiamento di scala temporale:**
  TC:

$$y(t) = x(\alpha t)$$

- $\alpha \quad 1$: **compressione** dei tempi;
- $\alpha \quad 1$: **espansione** dei tempi;
- $\alpha \quad 1$: operazione non elementare, riconducibile alla cascata di una riflessione e di un cambiamento di scala di α .

Eg. Se il segnale $x(t)$ fosse un brano musicale, una compressione corrisponderebbe a riprodurre il brano in un tempo più piccolo, ossia a velocità maggiori.

Per i segnali tempo continui, il cambiamento della scala dei tempi è un'operazione perfettamente **reversibile**: il cambiamento di scala di un fattore α è perfettamente compensato dal cambiamento di un fattore 1α .

TD:

$$y(n) = x(\alpha n) \, \alpha \in$$

- **Decimazione**: il segnale $y(n)$ si costruisce a partire dal segnale $x(n)$ prelevando un campione ogni α ;

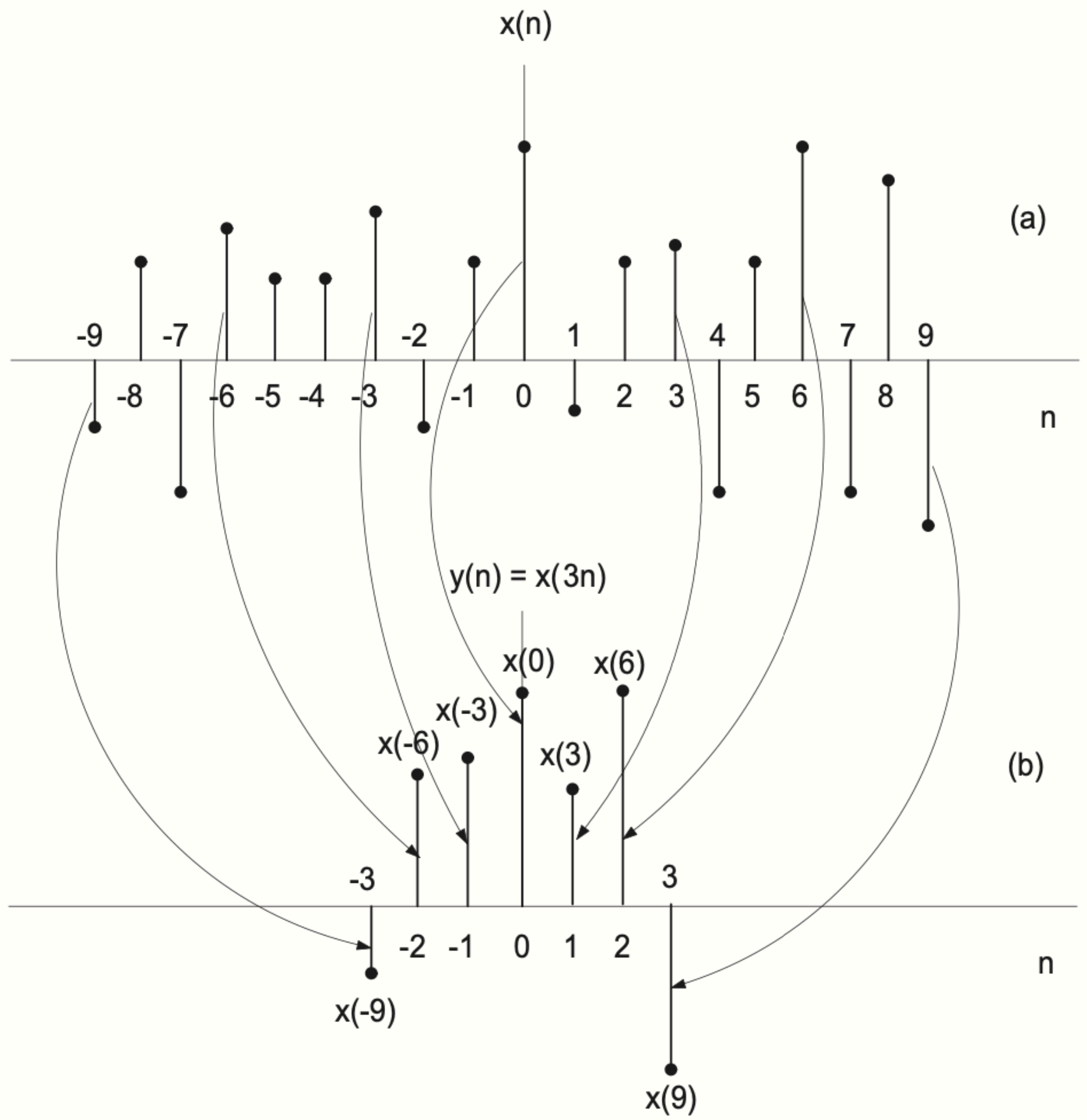


Fig. 2.8. Decimazione di un segnale TD: (a) segnale originario; (b) segnale decimato con $M = 3$.

La decimazione è un'operazione irreversibile in quanto alcuni $(\ 1)$ vengono completamente eliminati;

- Interpolazione: espande il segnale $x(n)$ inserendo $(\ 1)$ campioni nulli tra 2 campioni consecutivi

$$y(n) = xn := x(n) \text{ è}$$

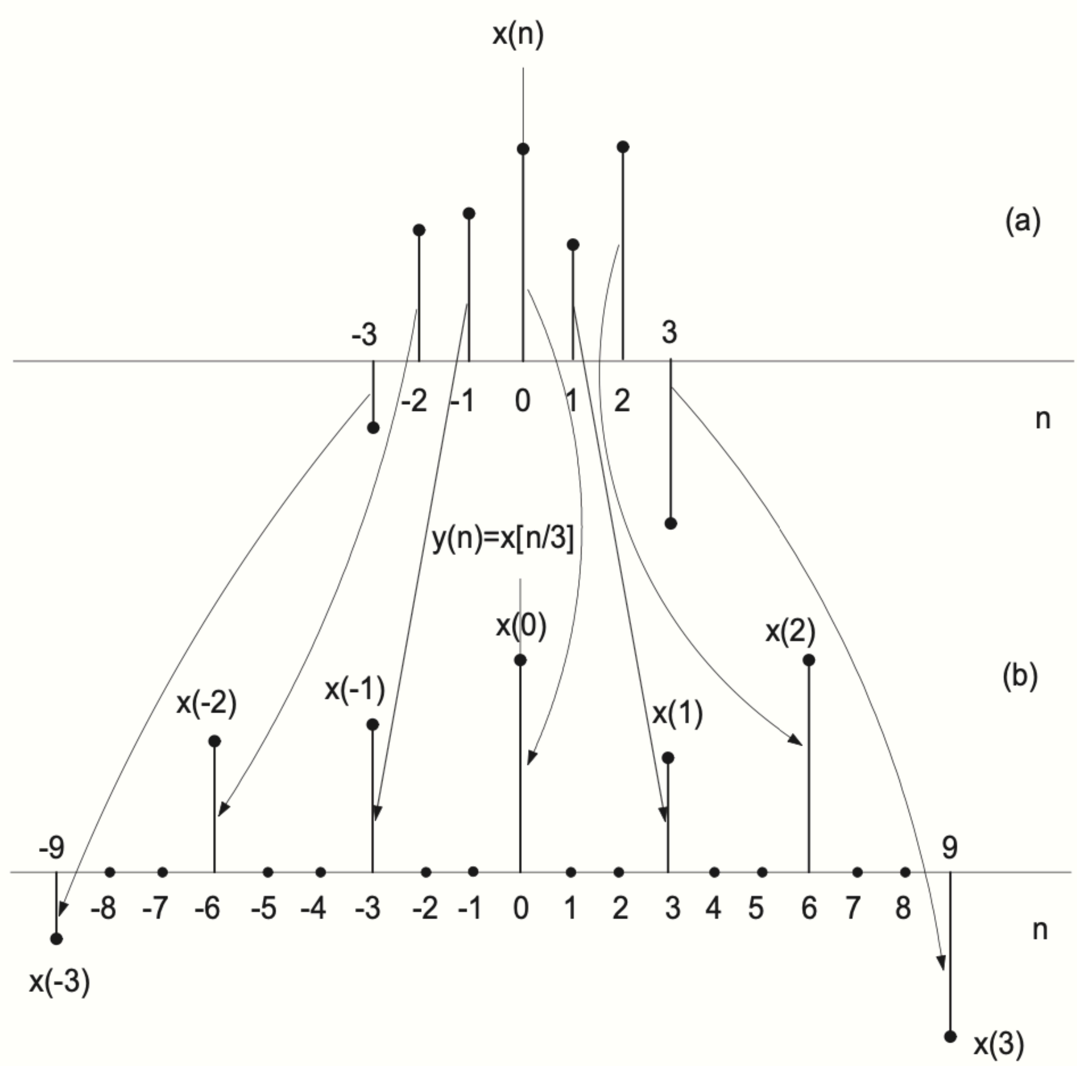


Fig. 2.9. Espansione di un segnale TD: (a) segnale originario; (b) segnale espanso con $L = 3$.

L'interpolazione è reversibile in quanto il segnale originale può essere ottenuto semplicemente eliminando gli zeri inseriti (ovvero effettuando decimazione con uguale fattore).

- Riflessione temporale: ribaltamento della scala dei tempi, il segnale subisce una rotazione attorno all'asse delle ordinate:

$$y(\tau) = x(\tau)$$

Eg. Considerando un segnale audio, una riflessione consiste nel riprodurre l'audio al contrario.

Un segnale invariante alla riflessione $x(\cdot) = x(\cdot)$ si dice pari, mentre un segnale TC invariante rispetto alla cascata di una riflessione ed una inversione $x(\cdot) = x(\cdot)$ si dice dispari.

1.2.1.3 Proprietà dei segnali pari e dispari

- $x(\cdot)$ dispari definito nell'origine $x() =$;
- La somma di segnali dispari [pari] è un segnale dispari [pari];
- $\cdot =$, $\cdot =$, $\cdot =$;
- $x(\cdot)$ nè pari nè dispari può essere decomposto come: $x(\cdot) = x(\cdot) + x(\cdot)$ dove:
  - $x(\cdot) = {\scriptstyle x(\cdot)+x((\cdot))2}$: componente pari;

- $x(\cdot) = x(\cdot)+x((\cdot))2$: componente dispari;

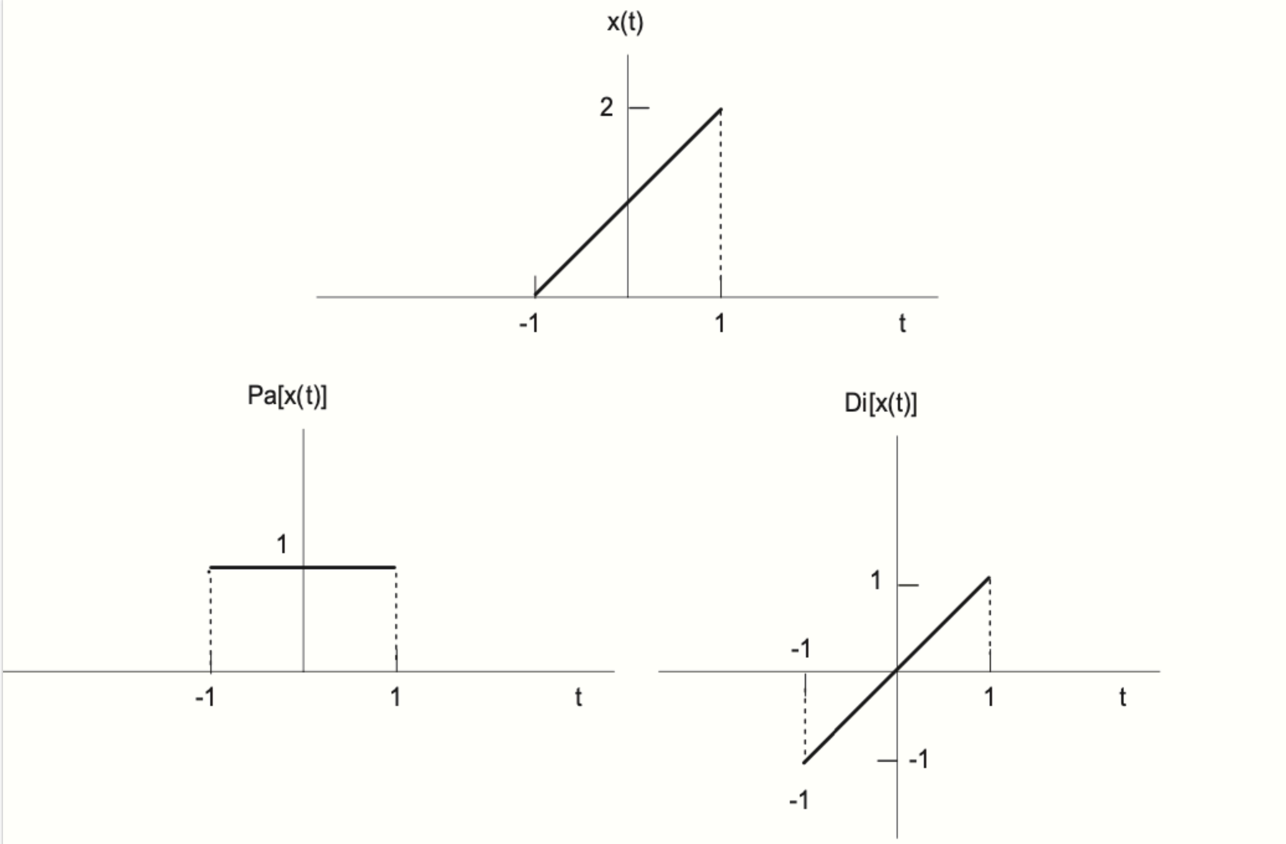


Fig. 2.6. Esempio di decomposizione di un segnale TC in parte pari e dispari.

1.2.1.4 Combinazioni di proprietà elementari

Combinazioni di proprietà elementari possono essere viste come funzioni composte. Per non commettere errori tuttavia conviene effettuare delle sostituzioni formali con le trasformazioni che agiscono sull'asse dei tempi.

Eg. Ritardare un segnale $x(t)$ di 3: si sostituisce ad ogni t, t , ossia: $t \rightarrow t$.
Eg. Espansione di un segnale $x(t)$ di 2: $t2 \rightarrow t$.

1.2.1.5 Derivazione, integrazione e differenza prima

Dato che un segnale TC è sostanzialmente una funzione reale di una variabile reale, ad essa si applicano i concetti di integrazione e derivabilità:

$$\left(x(t) t \in \tau\right) \; x x(t)_{t=t} := {}_{t \to t} x(t) \;\; x(t) t \;\; t$$

Il calcolo della derivata è un problema frequente dal momento che la maggior parte dei segnali presenta uno o più (infinità numerabile) di punti di discontinuità di 1 specie. In tali occasioni si ricorre al concetto di derivata generalizzata o si approssima il segnale da derivare ad una funzione continua.

Eg. gradino a TC:

$$(t) := 1 t \;\; ntn \;\; ntntà \;\; n ttnnnn : (t) := t \;\; 12(1+t) t \;\; 1 t$$

L'approssimazione è migliore quanto più è piccolo:

$$_{t\to t}(t) = (t)$$

(t) è continua anche in e pertanto derivabile:

$$(t) = t(t) = t \quad {}_{12} t$$

$$t(t) = {}_{\to}(t)$$

1.3 Caratterizzazione sintetica dei segnali

Talvolta la descrizione completa di un segnale mediante una funzione è eccessivamente dettagliata; è possibile descrivere sinteticamente un segnale mediante alcuni parametri numerici:

- Durata temporale
- Area e media temporale
- Energia e potenza

Parametro	Notazione	Definizione
Estensione temporale	$\mathscr{D}_x$	intervallo di tempo in cui $\lvert x(\cdot)\rvert$ assume valori non trascurabili
Durata temporale	Δ_x	misura dell'estensione temporale $\mathscr{D}_x$
Area	A_x	$\lim\limits_{Z\to+\infty}\int_{-Z}^{Z} x(t)\,\mathrm{d}t$ (segnali TC) $\lim\limits_{K\to+\infty}\sum_{n=-K}^{K} x(n)$ (segnali TD)
Media temporale (componente continua)	$x_{\mathrm{dc}} = \langle x(\cdot)\rangle$	$\lim\limits_{Z\to+\infty}\frac{1}{2Z}\int_{-Z}^{Z} x(t)\,\mathrm{d}t$ (segnali TC) $\lim\limits_{K\to+\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K} x(n)$ (segnali TD)
Energia	$\mathcal{E}_x$	area del modulo al quadrato $\lvert x(\cdot)\rvert^2$ del segnale
Potenza	$\mathcal{P}_x$	media temporale del modulo al quadrato $\lvert x(\cdot)\rvert^2$ del segnale

Tab. 2.1. Riepilogo dei parametri che caratterizzano sinteticamente un segnale $x(\cdot)$.

1.3.1 Durata temporale

Misura dell'estensione temporale del segnale, ossia l'intervallo di tempo all'interno del quale assume valori non trascurabili.

1.3.2 Area e media temporale

$$_x = {}_{\to +}\; x(t) t\; () {}_{\to +}\, {}_{n=} x(n)\; ()$$

La misura dell'intensità del segnale mediante la sua area porta a 2 problemi:

- E' possibile che l'area assuma valore infinito;
- Due segnali uguali ma opposti presenterebbero aree differenti

La media temporale rappresenta un valore di confronto più robusto:

$$x(\cdot) := {}_{\to + 12}\; x(t) t\; () {}_{\to +\; 12+1}\, {}_{n=} x(n) ()$$

1.3.2.1 Proprietà della media temporale

1. Linearità: $\alpha_1 x_1(\cdot) + \alpha_2 x_2(\cdot) = \alpha_1 x_1(\cdot) + \alpha_2 x_2(\cdot) \alpha_1\, \alpha_2 \in$

2. **Invarianza temporale:**

$$x(t\ t) = x(t) t \in x(n\ n) = x(n) n \in$$

3. **Media di un segnale periodico**: $x(\cdot)$ segnale periodico di periodo (o in TD):

$$x(\cdot) := 1\ x(t) t () 1_1 x(n) ()$$

1.3.2.2 Componente continua ed alternata

- **componente continua** (DC): $x := x(\cdot)$
  La componente continua coincide con la **media temporale** del segnale e rappresenta la **parte "costante"** del segnale.
- **componente alternata** (AC): $x := x(\cdot)\ x$
  La componente alternata si ottiene **depurando** il segnale dalla componente costante e pertanto rappresenta la **parte "variabile"** del segnale. Essa ha quindi media (ossia la componente continua) nulla.
  Qualunque segnale può essere espresso in relazioni delle componenti AC e DC:

$$x(\cdot) = x + x(\cdot)$$

1.3.3 Energia e segnali di energia

$$_x = {}_{\to+}\ x(t)^2 t\ ()_{\to+}\ {}_{n=} x(n)^2\ ()$$

Il consente l'applicazione della formula anche a segnali complessi. L'**energia** può essere vista come l'area del segnale $x(\cdot)^2$ e pertanto è una quantità non negativa.

I segnali $x(\cdot)$ aventi energia finita non nulla ($_x$ $+$) sono detti *"segnali di energia."* La maggior parte dei segnali di durata limitata (o transitori) sono anche segnali di energia, viceversa , i segnali di durata non limitata o persistenti non sono di energia in quanto tipicamente hanno $_x = +$.
L'insieme dei segnali di energia è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per una costante.

1.3.3.1 Energia mutua

$$_{x+y} = {}_x + {}_y + 2({}_{xy})$$

Nella somma delle energie di 2 segnali compare un termine aggiuntivo $_{xy}$ che è detto "**energia mutua**", il quale può essere visto come il prodotto scalare tra i due segnali $x(t)$ ed $y(t)$ visti come vettori:

$$_{xy} := {}_{\to+}\ x(t) y(t) t\ ()_{\to+}\ x(n) y(n)\ ()$$

L´energia mutua è una quantità **complessa**.

1. $_{yx} = {}_{xy}$

Nel caso di **segnali reali** l'**energia muta** è anch'essa **reale** e risulta simmetrica:

$$\left(n\right)\ \left({}_{yx} = {}_{xy}\right)\ \left({}_{x+y} = {}_x + {}_y + 2_{xy}\right)$$
$${}_{\to+}\ x(t) y(t) t\ ()_{\to+}\ x(n) y(n)\ ()$$

$$_{xy} = \quad {}_{x+y} = {}_x + {}_y x(\cdot)\ y(\cdot)$$

garantisce l'**additività delle energie** e l'**ortogonalità tra segnali**. Sono ortogonali i segnali che non si sovrappongono nel tempo.

1.3.4 Potenza e segnali di potenza

$$_x := x(\cdot)^2 = {}_{\to+}\,12\ x(t)^2 t\ ()_{\to+}\,12{+}1\,{}_{n=}\,x(n)^2\ ()$$

La potenza è una quantità non negativa e può essere vista come la media temporale del segnale $x(t)^2$.
I segnali $x(\cdot)$ aventi potenza finita non nulla ($_x$ $+$) si dicono "segnali di potenza". Segnali di durata non limitata o persistenti (eg. fasori, sinusoidi, gradino, signum) generalmente sono segnali di potenza.

Per i segnali periodici la potenza si può calcolare come:

$$_x := x(\cdot)^2 = {}_1\ x(t)^2 t\ ()_1\ x(n)^2\ ()$$

1.3.4.1 Valore efficace (Root Mean Square - RMS)

$$x := {}_x = x(\cdot)^2$$

Può essere visto come il valore che deve assumere un segnale costante per avere la stessa potenza del segnale dato.

1.3.4.2 Potenza mutua

$$_{x+y} = {}_x + {}_y + 2({}_{xy})$$

Il termine $_{xy}$ è detto "potenza mutua":

$$_{xy} := x(\cdot)y(\cdot) = {}_{\to+}\,12\ x(t)y(t)t\ ({}_{\to+}\,12{+}1\,{}_{n=}\,x(n)y(n)\ ()$$

Si tratta di una grandezza generalmente complessa.

1. $_{yx} = {}_{xy}$
   Se i segnali sono reali, la potenza mutua è simmetrica $_{yx} = {}_{xy}$ e reale:

$$_{x+y} = {}_x + {}_y + 2_{xy}$$

$$_{xy} = \quad x(\cdot)\ y(\cdot)\quad {}_{x+y} = {}_x + {}_y$$

1.3.5 Relazioni tra segnali di energia e di potenza

1. $x(\cdot)$ segnale di potenza $_x = +$
2. $x(\cdot)$ segnale di energia $_x =$
   Esistono tuttavia segnali che non sono annoverabili in nessuna delle due categorie, un esempio è il segnale nullo $x(\cdot) =$ che ha $_x = {}_x =$.

1.3.6 Misure in dB di potenza ed energia

Per semplificare alcuni calcoli legati a potenza ed energia, è possibile esprimere queste grandezze sfruttando una scala logaritmica ed adimensionale, espressa in deciBel (dB).

$$_x := 1\ {}_{1x}$$

è una potenza di riferimento scelta opportunamente in base alle applicazioni.
Tale concetto può essere applicato anche ai valori efficaci e all'energia.

2 Sistemi

Sistema: modello matematico che descrive la relazione tra due o più segnali, identificati in segnali di ingresso (cause) e segnali di uscita (effetti). Formalmente, un sistema è un operatore che trasforma i segnali di ingresso in segnali di uscita.

$$: \to$$

- : operatore (trasformazione): definisce la relazione tra i segnali in ingresso e quelli in uscita ;
- : insieme segnali in ingresso;
- : insieme segnali in uscita;

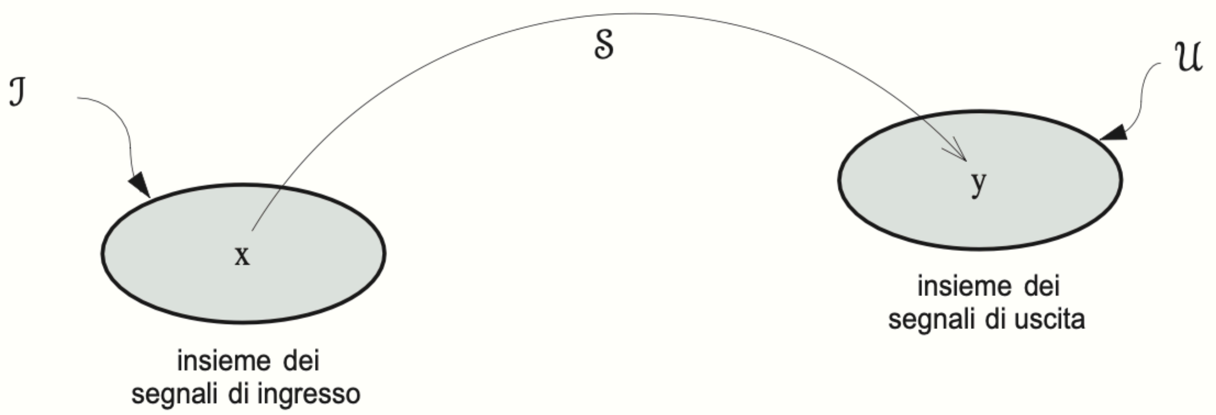


Fig. 1.8. L'operatore $\mathcal{S}$ associa ad ogni segnale x di $\mathcal{I}$ un segnale y di $\mathcal{U}$.

$$y(t) = x()_{\in\mathcal{T}} t$$

$$y(n) = x()_{\in\mathcal{T}} n$$

2.1 Classificazione elementare dei sistemi

2.1.1 Classificazione sul numero di ingressi e uscite

- SISO: Single-input Single-output;
- MISO: Multiple-input Single-output;
- SIMO: Single-input Multiple-output;
- MIMO: Multiple-input Multiple-output;

2.1.2 Classificazione in base alla natura temporale

- Tempo continuo (TC): ingresso e uscita sono entrambi segnali TC;
- Tempo discreto (TD): ingresso e uscita sono entrambi segnali TD;
- Misto: ingresso e uscita sono uno a TC, l'altro a TD o viceversa.

2.2 Sistemi SISO: relazione ingresso-uscita (I-U)

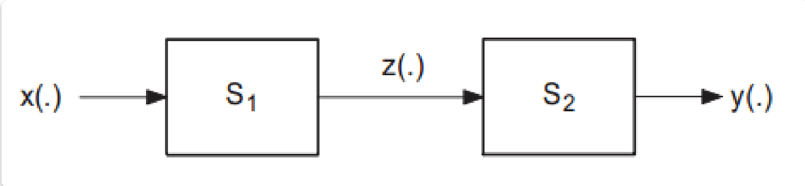
Un sistema SISO é un sistema che ha 1 ingresso ed 1 uscita e può essere descritto mediante la relazione I-U:

$$y(t) = x()_{\in} t \, x(t) \in \; y(t) \in \; y(n) = x()_{\in} n \, x(n) \in \; y(n) \in$$

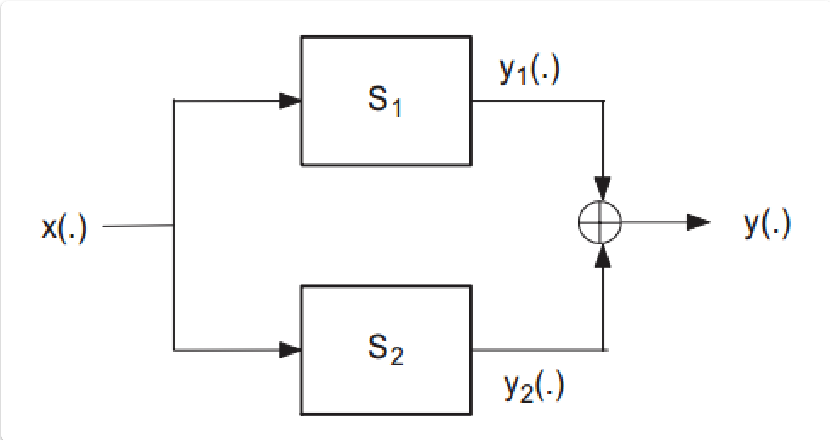
La quale sottolinea esplicitamente che l'uscita $y(t)$ all'istante t , dipende dall'intero segnale in ingresso $x()_{\in}$ e non dal suo valore nell'istante t e dal tempo.

2.3 Interconnessione di sistemi

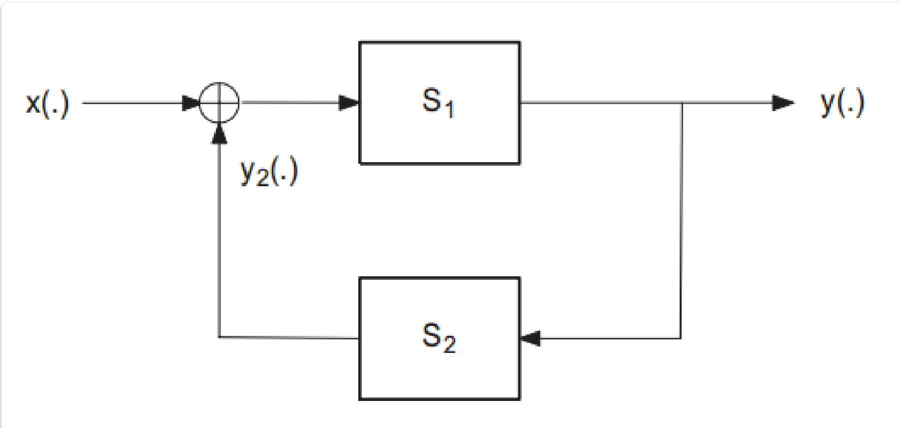
1. Serie:



2. Parallelo:



3. Retroazione:



2.4 Proprietà dei sistemi

1. Non dispersività: l'uscita all'istante t è funzione solo dell'ingresso allo stesso istante:

$$y(t) = x(t)\, t$$
$$y(n) = x(n)\, n$$

2. Causalità: l'uscita all'istante t dipende solamente dai valori del segnale di ingresso negli istanti precedenti:

$$y(t) = x()_t\, t y(n) = x()_n\, n$$

3. Invertibilità: un sistema è invertibile se esiste un sistema inverso tale che la cascata dei due sistemi fornisca il sistema identico.

$$\big(: \to \big) \; y(\cdot)\, x(\cdot) \in \; : x(\cdot) = y(\cdot)$$

Ossia è possibile costruire un sistema $^1 : \to$ detto sistema inverso, tale che:

$$^1 x(\cdot) = x(\cdot)$$

4. Stabilità (*BIBO* - Bounded-input Bounded-output): la risposta a qualunque ingresso limitato é anch'essa limitata:

$$x(t) \;\; _x t \in \;\; y(t) \;\; _y t \in x(n) \;\; _x n \in \;\; y(n) \;\; _y n \in$$

5. **Invarianza temporale**: ad una traslazione dell'ingresso corrisponde la stessa traslazione dell'uscita:

$$x(t \quad t) \quad y(t \quad t) \, t \in x(n \quad n) \quad y(n \quad n) \, n \in$$

Ossia il sistema assume la forma:

$$y(t) = x()_{\in} y(n) = x()_{\in}$$

Fisicamente, la tempo-invarianza, rappresenta la proprietà del sistema di non cambiare nel tempo, ovvero di non "invecchiare" e al limite "non rompersi" mai.

6. **Linearità**: soddisfa le seguenti proprietà:
- **Omogeneitá**: Ad un cambiamento di scala delle ampiezze dell'ingresso corrisponde lo stesso cambiamento di scala delle uscite:

$$\alpha x(\cdot) \rightarrow \alpha y(\cdot) \, \alpha \in$$

- . **Additivitá**: la risposta alla somma degli ingressi è la somma delle risposte ai singoli ingressi:

$$x_1(\cdot) + x_2(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot) = y_1(\cdot) + y_2(\cdot)$$

Ossia:

$$x_1(\cdot) + x_2(\cdot) \rightarrow y_1(\cdot) + y_2(\cdot)$$

Le due precedenti proprietà riassumono il **principio di sovrapposizione**:

$$\alpha_1 x_1(\cdot) + \alpha_2 x_2(\cdot) \rightarrow \alpha_1 y_1(\cdot) + \alpha_2 y_2(\cdot) \, \alpha_1 \, \alpha_2 \in$$

2.5 Sistemi lineari tempo-invarianti (LTI)

Sistemi che godono simultaneamente della proprietà di **linearità** e **tempo invarianza**. Lo studio dei sistemi LTI è semplificato dal **principio di sovrapposizione**:
Considerando un sistema lineare $: \ \rightarrow$, si suppone che l'ingresso possa essere espresso come sovrapposizione di segnali elementari $x(\cdot) \in \ :$

$$x(\cdot) = \quad \alpha x(\cdot)$$

Si applica il principio di sovrapposizione:

$$y(\cdot) = x(\cdot) = \quad \alpha x(\cdot) = \quad \alpha x(\cdot) = \quad \alpha y(\cdot)$$

Dove $y(\cdot) := x(\cdot)$, ovvero è l'uscita corrispondente all'ingresso $x(\cdot)$.
L'uscita $y(\cdot)$ è esprimibile come sovrapposizione con gli stessi coefficienti $x(\cdot)$ che compaiono in $y(\cdot)$.
I segnali $x(\cdot)$ devono essere scelti accuratamente, si usano solitamente:

- **Impulsi**: la funzione che caratterizza il sistema LTI (rappresentazione nel dominio del tempo) si chiama *risposta impulsiva*;
- **Fasori**: la funzione che caratterizza il sistema LTI (rappresentazione nel dominio della frequenza) si chiama *risposta armonica* o in frequenza.

2.5.1 Uscita di un sistema LTI: risposta impulsiva

2.5.1.1 Sistema TD

$$\left(x(n) = \ \sum_{=}^{+} x()(n \quad)\right) \left(y(n) = \ \sum_{=}^{+} x()(n \quad) = \ \sum_{=}^{+} x(n \quad)() = x(n) \quad (n)\right)$$

Un arbitrario segnale TD $x(n)$ si può scrivere come sovrapposizione di impulsi:

$$x(n) = \ \sum_{=}^{+} x()(n \quad)$$

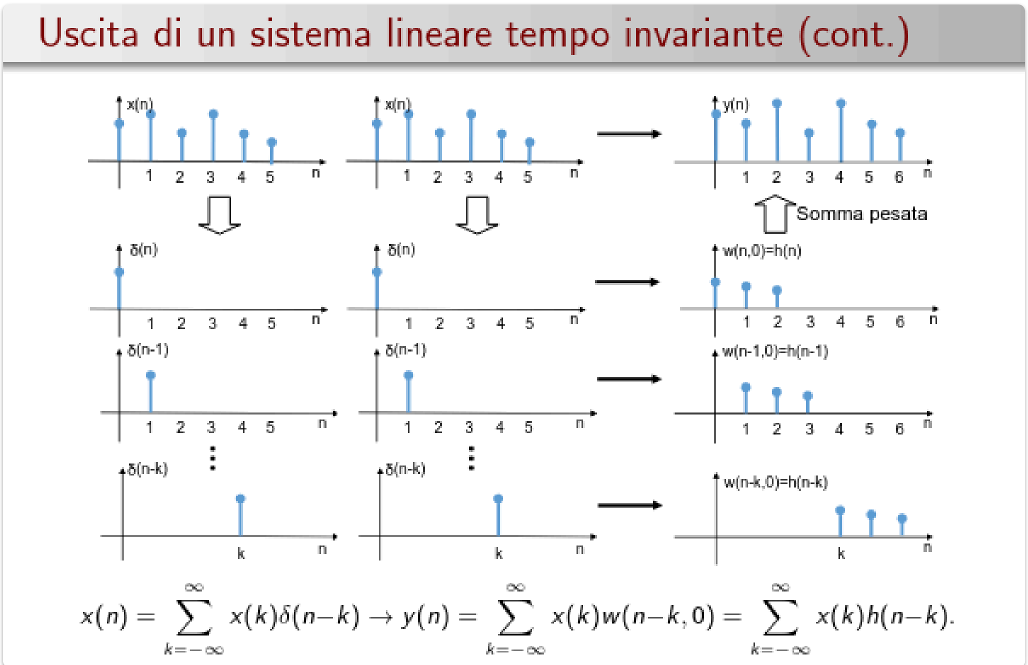
Il segnale $x(n)$ è ora posto in ingresso ad un sistema LTI. Applicando il principio di sovrapposizione è possibile calcolare la sua uscita:

$$y(n) = x(n) = \ +_{=} x()(n\ ) = \ +_{=} x()(n\ )$$

Si definisce la funzione $(n) := (n)$ come la risposta del sistema LTI all'impulso (n) o risposta impulsiva del sistema LTI. Quindi, per la proprietà di invarianza temporale:
$(n\ ) = (n\ ) \in\ .$

$$y(n) = \ +_{=} x()(n\ ) = \ +_{=} x(n\ )()$$

La conoscenza della risposta impulsiva (n) consente di calcolare l'uscita del sistema in corrispondenza di qualunque ingresso $x(n)$; si parla pertanto di risposta canonica in quanto, la risposta impulsiva, caratterizza completamente il sistema LTI.



2.5.1.1.1 Uscita di un sistema lineare NON tempo invariante

Un sistema lineare a differenza di un sistema LTI, non gode della proprietà di tempo invarianza pertanto: ad una traslazione dell'ingresso puó corrispondere una differente traslazione dell'uscita.

Si definisce una nuova funzione detta risposta impulsiva in tempo-istante di applicazione: $(n\ ) = (n\,)$ che mantiene la dipendenza dal tempo.

$$y(n) = \ +_{=} x()(n\,)$$

2.5.1.1.2 Confronto uscite sistema LTI e sistema lineare

La differenza nelle due uscite sta nella funzione $(n\,)$ É possibile descrivere il sistema LTI utilizzando la medesima funzione. Nei sistemi LTI é garantita la proprietá di tempo invarianza per cui, la traslazione in ingresso è riportata anche sull'uscita del sistema:

$$(n) = (n\,)\quad (n\ ) = (n\ \ )$$

Considerando $\ := n\ $ si ha la risposta impulsiva (in tempo ritardo) trovata precedentemente. In questo caso lo esplicita l'indipendenza dal tempo:

$$() = ()$$

Da cui si ha:

$$x(n) = \ +_{=} x()(n\ )\quad y(n) = \ +_{=} x()(n\ ) = x(n)\ \ (n)$$

2.5.1.2 Sistema TC

$$\left(x(t) = \ _{+} \ x()(t \ )\right) \left(y(t) = \ _{+} \ x()(t \ ) = \ _{+} \ x(t \ )() = (t) \ x(t)\right)$$

A TC un generico segnale può essere riscritto come sovrapposizione di impulsi di Dirac. L'uscita può essere espressa anche mediante la funzione :

$$(t) = (t) \ \ (t \ ) = (t \ \ )$$

Per cui:

$$y(t) = \ _{+} \ x()(t \ \ )$$

$\tau = (t \ ) \ \ (\tau) = (\tau)$ definisce la risposta impulsiva (in tempo ritardo).

2.5.1.3 Convoluzione

La relazione I-U di un sistema LTI puó sempre essere espressa in termini di convoluzione.

$$y(n) = \ _{+=} x()(n \ ) = \ _{+=} x(n \ )()()y(t) = \ _{+} x()(t \ ) = \ _{+} x(t \ )() \ ()$$

2.5.1.3.1 Algoritmo di calcolo

Il calcolo della convoluzione consiste sostanzialmente nel tenere fermo un segnale, considerare la versione ribaltata del secondo e traslarlo affinché le repliche coincidono...

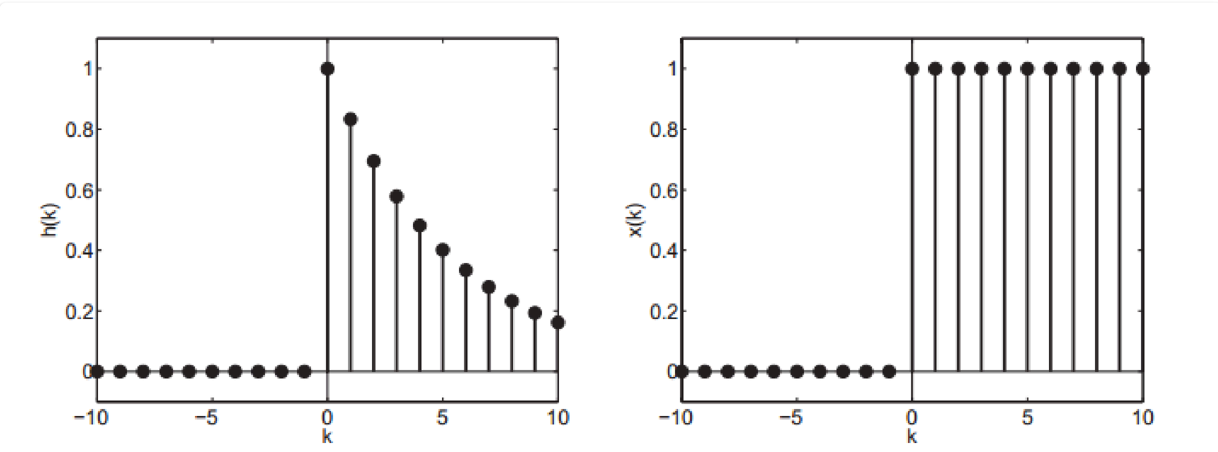
2.5.1.3.2 Algoritmo per il calcolo della convoluzione a TD

1. Rappresentare () e $x()$ in funzione di $\ \in \ $;
2. Riflettere il segnale $x()$ costruendo il segnale $() = x()$;
3. Traslare il segnale () verso destra se n , verso sinistra se n e costruire il segnale $_{n}() = (\ n) = x(\ n) = x(n \ )$;
4. $n \in$, il valore della convoluzione all'istante n si ottiene moltiplicando i campioni corrispondenti () e $_{n}()$ per tutti i valori di $\ \in \ $, e sommando i risultati dei prodotti ottenuti.

Eg: convoluzione a TD con ingresso a gradino

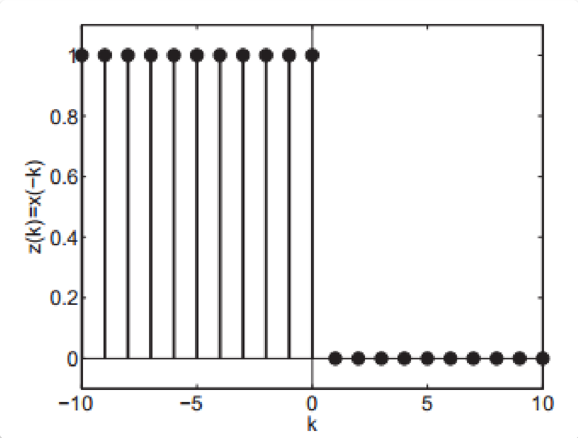
$$(n) = {}^{n}(n)x(n) = (n)$$

1. Si rappresentano () ed $x()$ in funzione di :

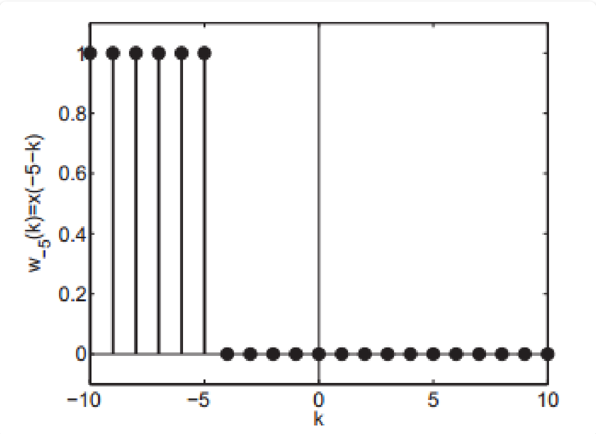


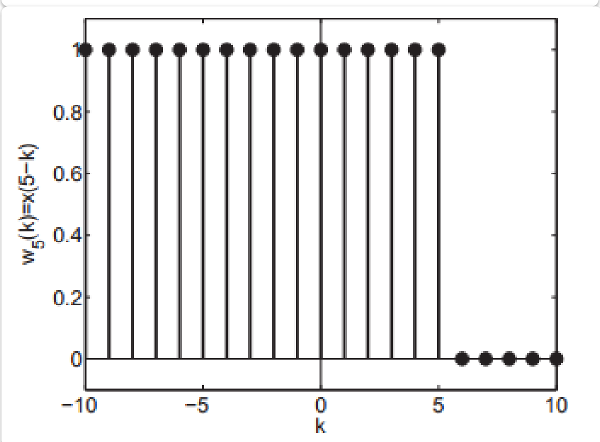
(a) (b)

2. Si costruisce il segnale $() = x()$ riflettendo $x()$:



3. Si costruisce il segnale $_n() = (\ \ n)$ traslando $()$ di n campioni. Per n $_n()$ e $()$ non si sovrappongono pertanto la convoluzione é nulla. Per n i due segnali, si sovrappongono per $n + 1$ campioni:

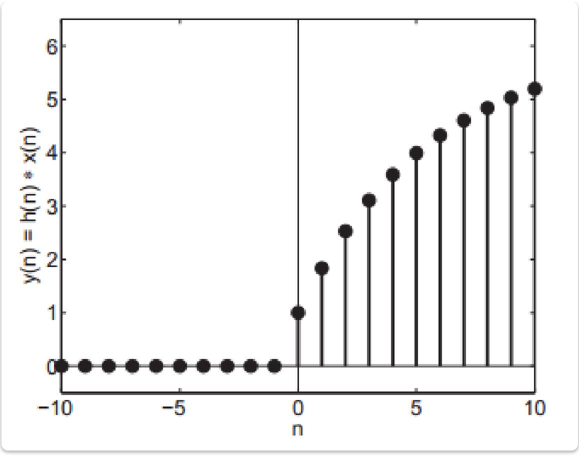




4. Si calcola la convoluzione effettuando la somma dei prodotti dei campioni $()$ e $_n()$.
$y(1) = {}_{+=} ()_1() = 1 +$
$y(2) = {}_{+=} ()_2() = 1 + \ + {}^2$
$y() = {}_{+=} ()() = 1 + \ + {}^2 +$
$y(n) = {}_{+=} ()_n() = 1 + \ + {}^2 + + \ + {}^n = {}_{n=} = {}_1{}^{n+1}{}_1$

La convoluzione restituisce il segnale:

$$ {}_1{}^{n+1}{}_1\, tnt $$



Senza effettuare alcuna traslazione é possibile ricavare direttamente il risultato della convoluzione per $n = \ : y() = ()() = 1$.

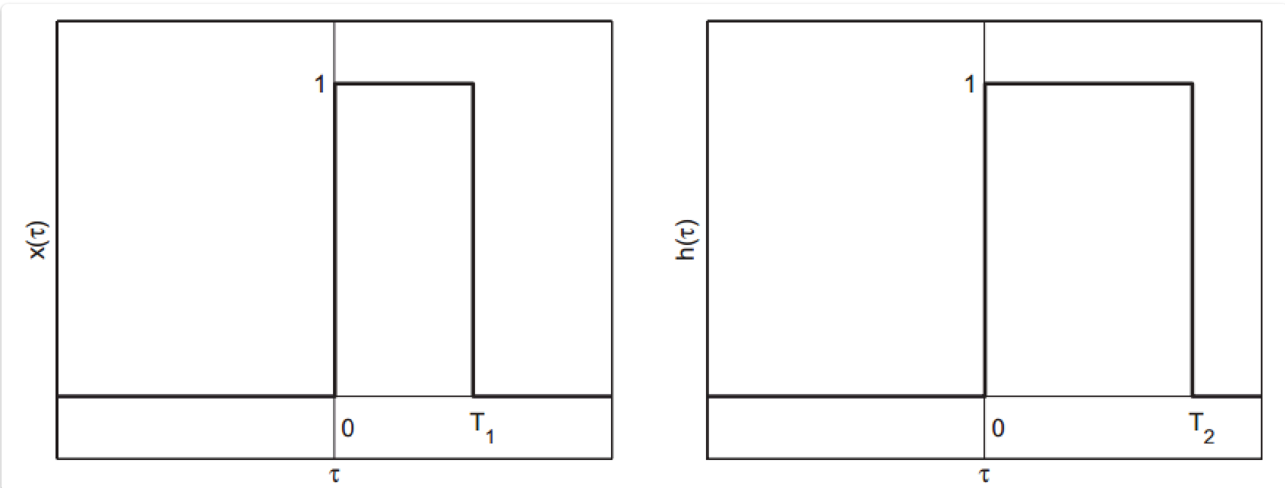
2.5.1.3.3 Algoritmo per il calcolo della convoluzione a TC

1. Rappresentare () e $x()$ in funzione di $\ \in \ $;
2. Riflettere il segnale $x()$ costruendo il segnale $() = x()$;
3. Traslare il segnale () verso destra se $t \ $, verso sinistra se $t \ $ e costruire il segnale ${}_t() = (\ t) = x(\ t) = x(t \ )$;
4. $t \in \ $, il valore della convoluzione all'istante t si ottiene moltiplicando i segnali () e ${}_t()$ per tutti i valori di $\ \in \ $, ed effettuando l'integrale del prodotto.

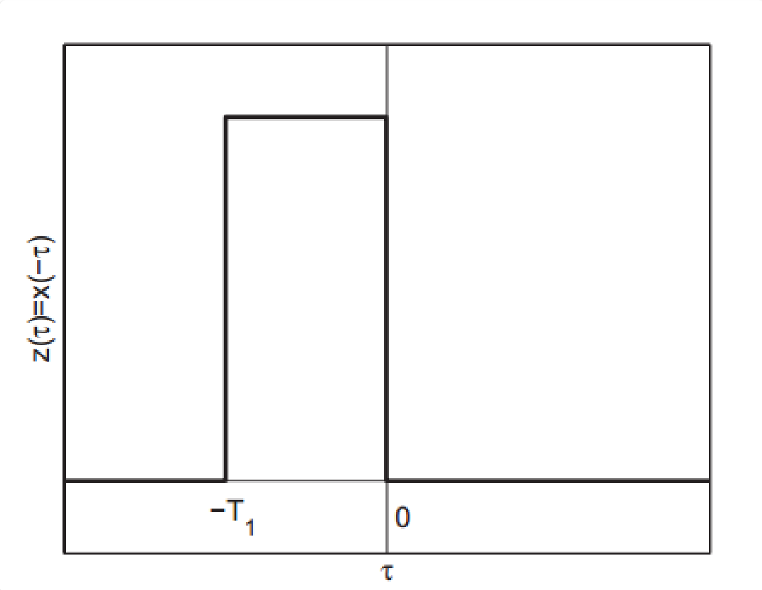
Eg: convoluzione a TC tra due finestre rettangolari:

$$x(t) = t\left(_{t_1}\right)_x = {}_1(t) = t\left(_{t_2}\right) = {}_2$$

1. Si rappresentano () ed $x()$ in funzione di :



2. Si costruisce il segnale $() = x()$ riflettendo $x()$:



3. Si costruisce il segnale $_t() = (\; t) = x(t \;)$ traslando $()$ di n campioni. Per $t \quad _{,t}()$ e $()$ non si sovrappongono pertanto la convoluzione é nulla $y(t) = .$ Per t i due segnali, iniziano a sovrapposrsi. Per $t \; _1$, le due finestre si sovrappongono nell'intervallo $(\; t)$:
$y(t) = \; _t = \quad t \; _1$
$y(t) = \; _{tt_1} \; = _{11} \; t \; _2$
$y(t) = \; _{2t_1} \; = _2 + _1 \; t_2 \; t \; _2 + _1$
$y(t) = \; , \; _2 + _1$

$t \;\; t \;\; _2 + _1 t \;\; t \;\; _{111} \;\; t \;\; _{22} + _1 \;\; t_2 \;\; t \;\; _2 + _1$

2.5.1.3.4 Proprietá della convoluzione

Proprietà 4.2 (proprietà della convoluzione)

(a) **Proprietà commutativa:**

$$x(\cdot) * h(\cdot) = h(\cdot) * x(\cdot) .$$

(b) **Proprietà associativa:**

$$x(\cdot) * [h_1(\cdot) * h_2(\cdot)] = [x(\cdot) * h_1(\cdot)] * h_2(\cdot) .$$

(c) **Proprietà distributiva:**

$$x(\cdot) * [h_1(\cdot) + h_2(\cdot)] = x(\cdot) * h_1(\cdot) + x(\cdot) * h_2(\cdot) .$$

(d) **Proprietà di esistenza dell'unità:**

$$x(\cdot) = x(\cdot) * \delta(\cdot) = \delta(\cdot) * x(\cdot) .$$

(e) **Proprietà di invarianza temporale:**

$$h(\cdot) * x(\cdot) = y(\cdot) \Longrightarrow \begin{cases} h(t-t_1) * x(t-t_2) = y[t-(t_1+t_2)] , & \forall t_1 \in \mathbb{R}, \forall t_2 \in \mathbb{R} ; \\ h(n-n_1) * x(n-n_2) = y[n-(n_1+n_2)] , & \forall n_1 \in \mathbb{Z}, \forall n_2 \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

(f) **Proprietà di convoluzione con l'impulso:**

$$x(t-t_0) = x(t) * \delta(t-t_0) = \delta(t-t_0) * x(t) , \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} ;$$
$$x(n-n_0) = x(n) * \delta(n-n_0) = \delta(n-n_0) * x(n) , \quad \forall n_0 \in \mathbb{Z} .$$

(g) **Proprietà di durata della convoluzione:**

Siano $x(t)$ e $h(t)$ di durata rigorosamente limitata, con durate $\Delta_x, \Delta_h \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$ è di durata rigorosamente limitata, con durata $\Delta_y \leq \Delta_x + \Delta_h$.
Siano $x(n)$ e $h(n)$ di durata rigorosamente limitata, con durate $\Delta_x, \Delta_h \in \mathbb{N} \Longrightarrow y(n) = x(n) * h(n)$ è di durata rigorosamente limitata, con durata $\Delta_y \leq \Delta_x + \Delta_h - 1$.

2.5.1.4 Proprietá della risposta impulsiva - caratterizzazione dei sistemi

Dato che la risposta impulsiva é una risposta canonica, é possibile legare le proprietá del sistema ad essa:

- Dispersività: un sistema é non dispersivo se l'uscita all'istante τ dipende solo dall'ingresso allo stesso istante:

$$\Big(\Big) \ (n) = (n) \ ()(t) = (t) \ ()$$

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} x(t-\tau)a\delta(\tau)d\tau$$
$$= a\int_{\mathbb{R}} x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = ax(t).$$

- Causalitá: un sistema é causale se l'uscita all'istante τ dipende dal valore dell'ingresso allo stesso istante e negli istanti precedenti.

$$\Big(\Big) \ (n) = n \ \ ()(t) = t \ \ ()$$

$$y(t) = \int_{\mathcal{R}} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$
$$\overset{[\sigma=t-\tau]}{=} \int_t^{-\infty} x(\sigma)h(t-\sigma)(-d\sigma) = \int_{-\infty}^{t} x(\sigma)h(t-\sigma)d\sigma.$$

In un sistema LTI causale, la risposta é facilmente calcolabile:

$$x(\cdot)t \quad y(\cdot)t$$

Un particolare sistema causale é il sistema anticausale:

$$\Big() \ (n) = n \ \ ()(t) = t \ \ ()$$

- Invertibilitá: Il sistema inverso é quel sistema con risposta impulsiva $(\cdot)$ che,se connesso in serie al sistema originale $(\cdot)$, restituisce il sistema identico, la cui risposta impulsiva é $(\cdot)$:

  $$(\cdot) \ (\cdot) = (\cdot)$$

  Il sistema inverso é anch'esso LTI.
- Stabilitá BIBO: un sistema é stabile BIBO se, l'uscita corrispondente ad un ingresso di ampiezza limitato é a sua volta limitata in ampiezza.

  $$_{+=}() \ \ ()_{+}() \ \ ()$$

Esempio

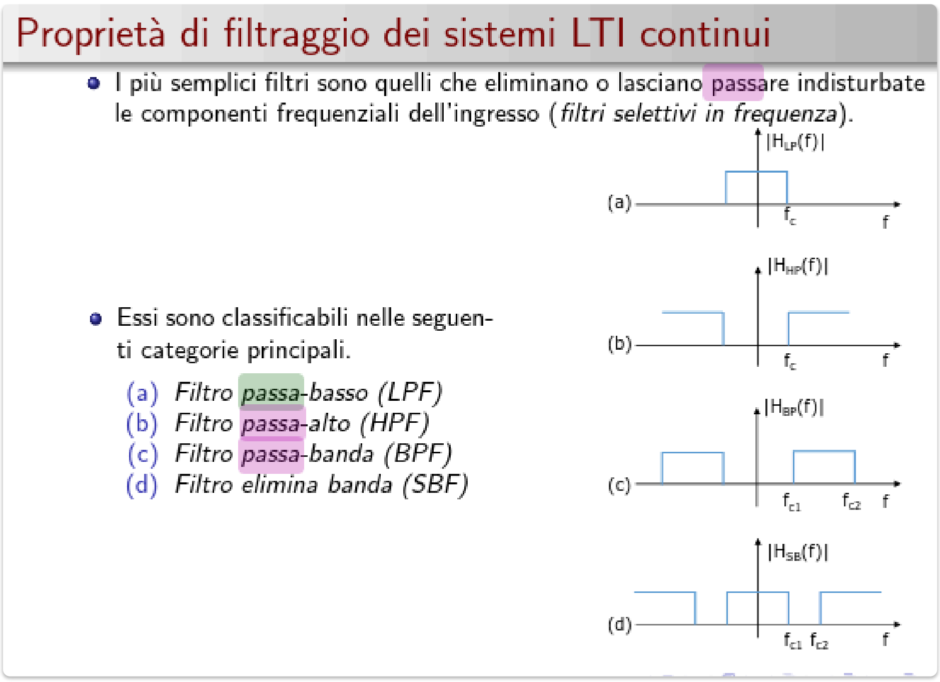
Si classifichi in base alle proprietà di causalità e stabilità il sistema LTI definito dalla seguente risposta impulsiva
$$h(t) = e^{-4t}u(t-2)$$

- Il sistema è causale perché $h(t) = 0$ per $t < 0$.
- Per la stabilità si deve calcolare
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-4t}u(t-2)|dt = \int_2^{\infty} e^{-4t}dt = \left[\frac{e^{-4t}}{-4}\right]_2^{\infty}$$
$$= \frac{e^{-8}}{4} < \infty.$$
Quindi il sistema è stabile.

2.5.2 Uscita di un sistema LTI: risposta in frequenza

Determinati segnali $x(\cdot)$ possono essere rappresentati anche come sovrapposizioni di fasori o sinusoidi. La funzione che descrive il sistema in tale situazione é detta risposta in frequenza.
I segnali periodici possono essere rappresentati come sovrapposizione discreta di fasori (serie di Fourier). La rappresentazione generica prende il nome di trasformata di Fourier.

2.6 Sistemi LTI come filtri



3 Serie di Fourier

3.1 Serie di Fourier per segnali TC

I segnali periodici possono essere rappresentati mediante serie di Fourier ovvero sovrapposizioni discrete di fasori:

$$x(t) = {}_{=} X^{2t} \;\in\; X = {}_{1}\; x(t)^{2t} t \;\in$$

- L'equazione di sintesi consente di sintetizzare il segnale $x(t)$ sovrapponendo i singoli fasori.
- L'equazione di analisi consente di analizzare o decomporre il segnale $x(t)$ calcolando i coefficienti complessi X .

Prendendo in considerazione un generico segnale periodico:

$$x(t) = \;(2t)$$

Segnale periodico di periodo $= 1/$, puó essere rappresentato come sovrapposizione di fasori mediante la formula di Eulero, la quale consente di scrivere i numeri complessi in forma esponenziale:

$$^{x} = x + nx \;\; x(t) = 2^{2t} + 2^{2t}$$

Il segnale $x(t)$ puó anche essere formato da sinusoidi a frequenze differenti tuttavia, per essere periodico, le frequenze devono essere tutte multiple di una frequenza comune :

$$x(t) = {}_{1}(t) + {}_{2}(22t) + (2t)$$
$$x(t) = {}_{1}2^{2t} + {}_{1}2^{2t} + {}_{2}2^{22t} + {}_{2}2^{22t} + 2^{2t} + 2^{2t}$$

Non tutti i segnali continui possono essere rappresentati come somma di un finito numero di fasori. In tal caso il segnale $x(t)$ é espresso come somma di una serie:

$$x(t) = {}_{\to}\;\; {}_{=} X^{2t} = \;{}_{+}{}_{=} X^{2t}$$

Dove i coefficienti complessi X sono calcolabile mediante l'equazione di analisi:

$$X = 1\; x(t)^{2t} t \;\in$$

3.2 Serie di Fourier per segnali TD (DFS) - Discrete Fourier Series

$$x(n) = 1 _{1=} X()^{2n} X() = _{1n=} x(n)^{2n}$$

Consideriamo un segnale $x(n)$ con periodo $\in$ e frequenza fondamentale $:= 1/$. Il segnale $x(n)$ puó essere rappresentato da una sovrapposizione di fasori a frequenze multiple della frequenza base :

$$x(n) = 1 _{=} X^{2n}$$

A differenza del caso TC, il numero di armoniche é finito ed é pari proprio a . Quindi, un segnale $x(n)$ puó essere rappresentato mediante armoniche.

4 Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier é uno strumento matematico che consente di introdurre un dominio alternativo a quello del tempo, il dominio della frequenza, nel quale si semplifica lo studio dei segnali e dei sistemi. In tale dominio, un sistema è completamente identificato dalla sua risposta in frequenza $(\cdot)$ che corrisponde alla trasformata di Fourier della risposta impulsiva $(\cdot)$.
La trasformata consente di rappresentare come sovrapposizione di fasori, anche segnali non periodici.

4.1 Trasformata di Fourier per segnali TC

$$X() = _{+} x(t)^{2t} t \, x(t) = _{+} X()^{2t}$$

L'equazione di sintesi definisce l'anti trasformata.

$$X() = x(t) \quad x(t) = {}^{1} X()$$

Eg: trasformata finestra rettangolare

$$x(t) = t\left(t\right)$$

$$X() = _{+} t\left(t\right)^{2t} t = _{22} {}^{2t} t = {}^{2t} _{t=/2t=/2} =$$

$$2 = n() = n()$$

$$x(t) = t\left(t\right) \quad X() = n()$$

4.2 Trasformata di Fourier per segnali TD

$$X() = _{+n=} x(n)^{2n} x(n) = _{1/21/2} X()^{2n}$$

Eg: trasformata della finestra rettangolare

$$x(n) = (n)$$

$$X() = _{+n=} (n)^{2n} = 1 _{n=} {}^{2n} = 1 \; {}^{2}1 \; {}^{2} = n() n()^{(1)} := ()$$

$$x(n) = (n) \quad X() = ()$$

4.3 Trasformate notevoli

Segnale $x(t)$	Trasformata $X(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\mathrm{u}(t)$	$\frac{1}{2}\,\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\frac{1}{t}$	$-j\pi\mathrm{sgn}(f)$
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}(f)$
$\Lambda(t)$	$\mathrm{sinc}^2(f)$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}(f)$
$\mathrm{sinc}^2(t)$	$\Lambda(f)$
$e^{-at}\,\mathrm{u}(t),\, a\in\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$t\,e^{-at}\mathrm{u}(t),\, a\in\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert},\, a\in\mathbb{R}_+$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t+\varphi_0)$	$\frac{1}{2}\,e^{j\varphi_0}\,\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\,e^{-j\varphi_0}\,\delta(f+f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t+\varphi_0)$	$\frac{1}{2j}\,e^{j\varphi_0}\,\delta(f-f_0)-\frac{1}{2j}\,e^{-j\varphi_0}\,\delta(f+f_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0),\, T_0\in\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)$

Segnale $x(n)$	Trasformata $X(\nu)$
$\delta(n)$	1
1	$\widetilde{\delta}(\nu)$
$\mathrm{u}(n)$	$\frac{1}{2}\widetilde{\delta}(\nu)+\frac{1}{1-e^{-j2\pi\nu}}$
$\mathrm{sgn}(n)$	$\frac{2}{1-e^{-j2\pi\nu}}$
$\mathcal{R}_N(n)$	$\mathcal{D}_N(\nu)$
$\mathscr{B}_{2N}(n)$	$\frac{1}{N}\mathcal{D}_N^2(\nu)\,e^{-j2\pi\nu}$
$\mathrm{sinc}(2\nu_c n),\ 0<\nu_c<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\nu_c}\mathrm{rep}_1\left[\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)\right]$
$\mathrm{sinc}^2(2\nu_c n),\ 0<\nu_c<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\nu_c}\mathrm{rep}_1\left[\Lambda\left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)\right]$
$a^n\mathrm{u}(n),\ \|a\|<1$	$\frac{1}{1-a\,e^{-j2\pi\nu}}$
$(n+1)\,a^n\mathrm{u}(n),\ \|a\|<1$	$\frac{1}{(1-a\,e^{-j2\pi\nu})^2}$
$a^{\|n\|},\ \|a\|<1$	$\frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos(2\pi\nu)}$
$e^{j2\pi\nu_0 n}$	$\widetilde{\delta}(\nu-\nu_0)$
$\cos(2\pi\nu_0 n+\varphi_0)$	$\frac{1}{2}e^{j\varphi_0}\widetilde{\delta}(\nu-\nu_0)+\frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}\widetilde{\delta}(\nu+\nu_0)$
$\sin(2\pi\nu_0 n+\varphi_0)$	$\frac{1}{2j}e^{j\varphi_0}\widetilde{\delta}(\nu-\nu_0)-\frac{1}{2j}e^{-j\varphi_0}\widetilde{\delta}(\nu+\nu_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n-kN_0),\ N_0\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1}\widetilde{\delta}\left(\nu-\frac{k}{N_0}\right)$

4.4 Proprietà della trasformata

4.4.1 Proprietá elementari

- Linearitá:

Proprietà 6.2 (linearità della trasformata di Fourier)
Siano $x_1(\cdot) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X_1(\cdot)$ e $x_2(\cdot) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X_2(\cdot)$, e siano $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, si ha:

$$y(\cdot) = \alpha_1 x_1(\cdot) + \alpha_2 x_2(\cdot) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} Y(\cdot) = \alpha_1 X_1(\cdot) + \alpha_2 X_2(\cdot)\,.$$

- Simmetria hermitiana:

Proprietà 6.3 (simmetria hermitiana della trasformata di Fourier)
Sia $x(\cdot) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X(\cdot)$, valgono i seguenti risultati:

(a) Se $x(\cdot)$ è reale, allora $X(\cdot)$ possiede la seguente proprietà di simmetria hermitiana:

$$X^*(\cdot) = X(-(\cdot))\,.$$

(b) Se $X(\cdot)$ possiede la proprietà di simmetria hermitiana (6.14), allora $x(\cdot)$ è reale.

- Periodicità:$X() = X(+ 1) \in$, ls trasformata é periodica di periodo unitario;
- Dualitá TC:

$$\left(x(t) \, X() \, x()\right) \left(X(t)\right.$$

Se si effettua la sostituzione $t \rightarrow$, la trasformata del segnale $X(t)$ é $x()$. Non vale a TD!
- Valore nell'origine: Il valore del segnale nell'origine in un dominio, corrisponde all'area del segnale nell'altro dominio.

Proprietà 6.5 (valore nell'origine della trasformata di Fourier)
Sia $x(\cdot) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X(\cdot)$, si ha:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,\mathrm{d}f \qquad \text{(caso TC)}$$

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,, \qquad x(0) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\,\mathrm{d}\nu \qquad \text{(caso TD)}$$

- Proprietá di convoluzione:

Proprietà 6.6 (proprietà di convoluzione della trasformata di Fourier)
Siano $x_1(\cdot) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X_1(\cdot)$ e $x_2(\cdot) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X_2(\cdot)$, si ha

$$y(\cdot) = x_1(\cdot) * x_2(\cdot) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} Y(\cdot) = X_1(\cdot) X_2(\cdot)\,.$$

Alla convoluzione di 2 segnali nel dominio del tempo corrisponde il prodotto delle trasformate nel dominio della frequenza.

4.4.2 Trasformazioni della variabile dipendente

- Moltiplicazione per costante (omogeneitá): $y(\cdot) = \alpha x(\cdot)$ $(\cdot) = \alpha X(\cdot)$;
- Somma di segnali (additivitá): $y(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$ $(\cdot) = X_1(\cdot) + X_2(\cdot)$;

- Prodotto di segnali:

Proprietà 6.12 (proprietà del prodotto della trasformata di Fourier)
Siano $x_1(\cdot) \xleftrightarrow{\text{FT}} X_1(\cdot)$ e $x_2(\cdot) \xleftrightarrow{\text{FT}} X_2(\cdot)$, si ha

$$y(\cdot) = x_1(\cdot)x_2(\cdot) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(\cdot) = X_1(\cdot) * X_2(\cdot)\,.$$

- Traslazione frequenziale:

Proprietà 6.14 (proprietà di traslazione frequenziale della trasformata di Fourier)
Sia $x(\cdot) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(\cdot)$ e $f_0 \in \mathbb{R}$, $\nu_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{array}{lcll} y(t) = x(t)\,e^{j2\pi f_0 t} & \xleftrightarrow{\text{FT}} & Y(f) = X(f-f_0) & \text{(segnali TC)} \\ y(n) = x(n)\,e^{j2\pi \nu_0 n} & \xleftrightarrow{\text{FT}} & Y(\nu) = X(\nu-\nu_0) & \text{(segnali TD)} \end{array}$$

La moltiplicazione per un fasore nel dominio temporale corrisponde ad una traslazione nel dominio della frequenza.

- Modulazione:

Proprietà 6.15 (proprietà di modulazione della trasformata di Fourier)
Sia $x(\cdot) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(\cdot)$ e $f_0, \nu_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}X(f-f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}X(f+f_0) \quad \text{(segnali TC)}$$

$$y(n) = x(n)\cos(2\pi \nu_0 n + \varphi_0) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(\nu) = \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}X(\nu-\nu_0) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}X(\nu+\nu_0) \quad \text{(segnali TD)}$$

La moltiplicazione per una sinusoide nel dominio del tempo, corrisponde ad una doppia traslazione nel dominio della frequenza.

4.4.3 Trasformazioni della variabile indipendente

- Traslazione temporale:

Proprietà 6.16 (proprietà di traslazione temporale della trasformata di Fourier)
Sia $x(\cdot) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(\cdot)$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\begin{array}{lcll} y(t) = x(t-t_0) & \xleftrightarrow{\text{FT}} & Y(f) = X(f)\,e^{-j2\pi f t_0} & \text{(segnali TC)} \\ y(n) = x(n-n_0) & \xleftrightarrow{\text{FT}} & Y(\nu) = X(\nu)\,e^{-j2\pi \nu n_0} & \text{(segnali TD)} \end{array}$$

- Riflessione temporale:

Proprietà 6.17 (proprietà di riflessione della trasformata di Fourier)
Sia $x(\cdot) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(\cdot)$, si ha

$$y(\cdot) = x(-(\cdot)) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(\cdot) = X(-(\cdot))\,.$$

- Coniugazione:

Proprietà 6.18 (proprietà di coniugazione della trasformata di Fourier)
Sia $x(\cdot) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(\cdot)$, si ha

$$y(\cdot) = x^*(\cdot) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(\cdot) = X^*(-(\cdot))\,.$$

- Cambiamento di scala temporale:

Proprietà 6.20 (cambiamento di scala temporale per la trasformata di Fourier a TC)
Sia $x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(f)$ e $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, si ha

$$y(t) = x(at) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right). \quad (6$$

- Espansione:

Proprietà 6.21 (proprietà di espansione della trasformata di Fourier a TD)
Sia $x(n) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(\nu)$ e $L \in \mathbb{N}$, si ha

$$y(n) = x\left[\frac{n}{L}\right] \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(\nu) = X(L\nu).$$

- Derivazione:

Proprietà 6.22 (proprietà di derivazione k-esima della trasformata di Fourier a TC)
Sia $x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(f)$ e $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = (j2\pi f)^k X(f). \quad (6.101)$$

- Differenza prima:

Proprietà 6.23 (proprietà di differenza k-esima della trasformata di Fourier a TD)
Sia $x(n) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(\nu)$ e $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$y(n) = \nabla_k[x(n)] \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(\nu) = \left(1 - e^{-j2\pi\nu}\right)^k X(\nu). \quad (6.10$$

- Integrazione:

Proprietà 6.24 (proprietà di integrazione della trasformata di Fourier a TC)
Sia $x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(f)$, si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0)\,\delta(f).$$

- Somma corrente:

Proprietà 6.25 (proprietà di somma corrente della trasformata di Fourier a TD)
Sia $x(n) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(\nu)$, si ha

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(\nu) = \frac{X(\nu)}{1 - e^{-j2\pi\nu}} + \frac{1}{2} X(0)\,\tilde{\delta}(\nu).$$

4.5 Relazione I-U nel dominio della frequenza per sistemi LTI

La risposta in frequenza $(\cdot)$ consente di calcolare l'uscita del sistema per segnali in ingresso arbitrari.

$$(\cdot) \quad (\cdot)$$

$$() = ()^2$$

La risposta armonica $(\cdot)$ é una risposta canonica e descrive completamente il sistema LTI nel dominio della frequenza. La relazione I-U consente di calcolare l'uscita di un sistema LTI a partire da un ingresso.

$$(\cdot) = X(\cdot)(\cdot) \quad (\cdot) = (\cdot)X(\cdot)$$

5 Conversione Analogico - Digitale

La maggior parte dei segnali presenti in natura sono segnali analogici (segnali TC con ampiezza TC) i quali quindi non possono essere gestiti direttamente dai circuiti elettronici in quanto non è possibile rappresentare un numero infinito di valori nel calcolatore. E' pertanto necessario convertire il segnale analogico in un segnale digitale (TC con ampiezza TC) senza perdere informazione utile.

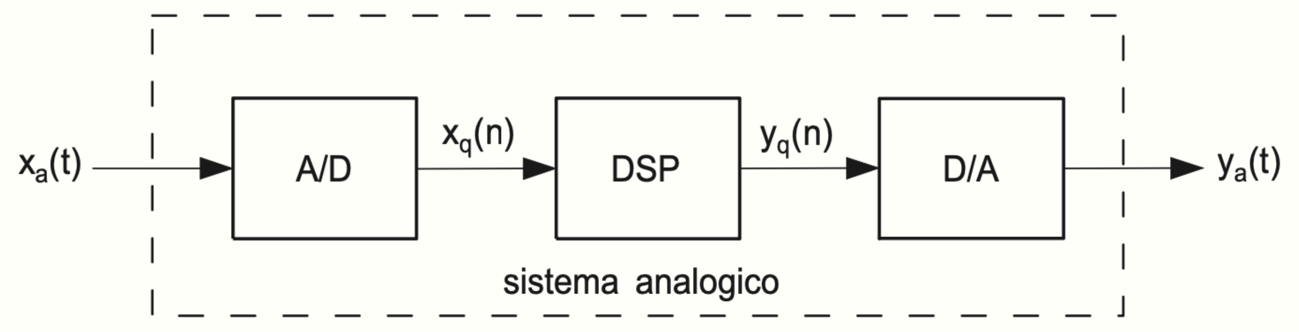


Fig. 7.1. Schema di principio per l'elaborazione digitale dei segnali analogici.

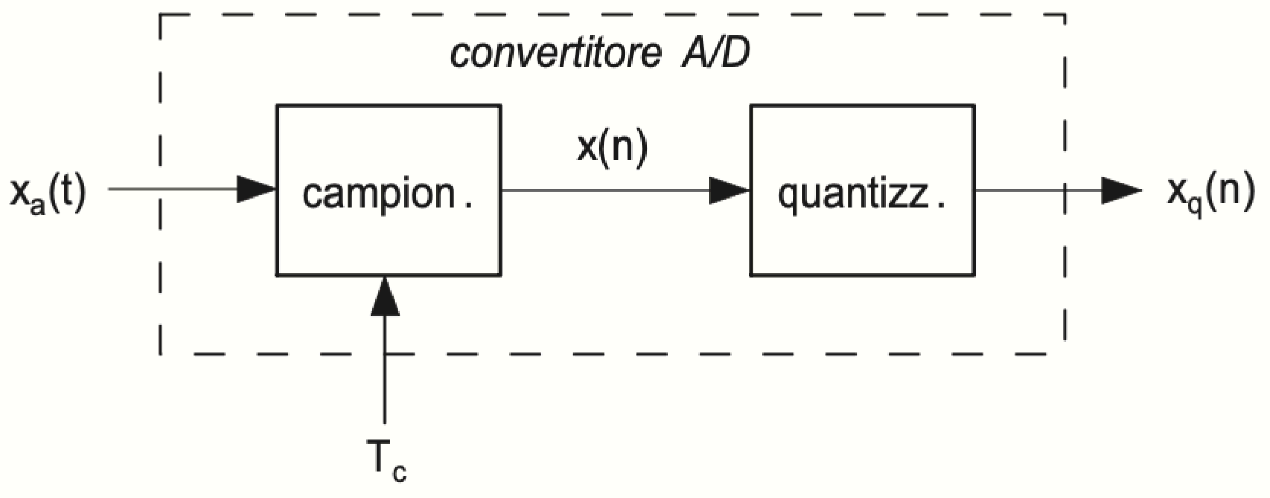


Fig. 7.2. Schema a blocchi di un convertitore A/D.

La conversione A/D si compone di 2 operazioni:

1. Campionamento: da un segnale analogico $x(t)$ si ottiene un segnale TD $x(n) = x(n)$ ottenuto prelevando dal segnale analogico, i suoi campioni equi-spaziati nel tempo di una quantità detta passo di campionamento.
2. Quantizzazione: dato che $x(t)$ è un segnale ad ampiezza reale, a seguito del campionamento, il segnale $x(n)$ presenta anch'esso ampiezza reale pertanto non è ancora un segnale digitale. Con la quantizzazione si limita sostanzialmente il numero di valori che il segnale può assumere, andando ad ottenere un nuovo segnale $x(n)$. Sostanzialmente si va a limitare il codominio del segnale ad un sottoinsieme finito. E' un'operazione NON REVERSIBILE!
   Dualmente la conversione D/A:

3. **Interpolazione**: a partire dal segnale digitale $x(n)$ si ottiene un segnale analogico $x(t)$ mediante l'interpolazione dell'andamento del segnale TC tra due qualsiasi campioni consecutivi di $x(n)$.

5.1 Campionamento

Il **campionamento** (uniforme) consente di convertire un segnale TC $x(t)$ in un segnale TD $x(n)$ ottenuto prelevando dal segnale TC, i soli campioni presi con passo di campionamento $\in {}_{+}$:

$$\underset{nnt}{x(t)}$$

$$x(n) = x(n)\; n \in$$

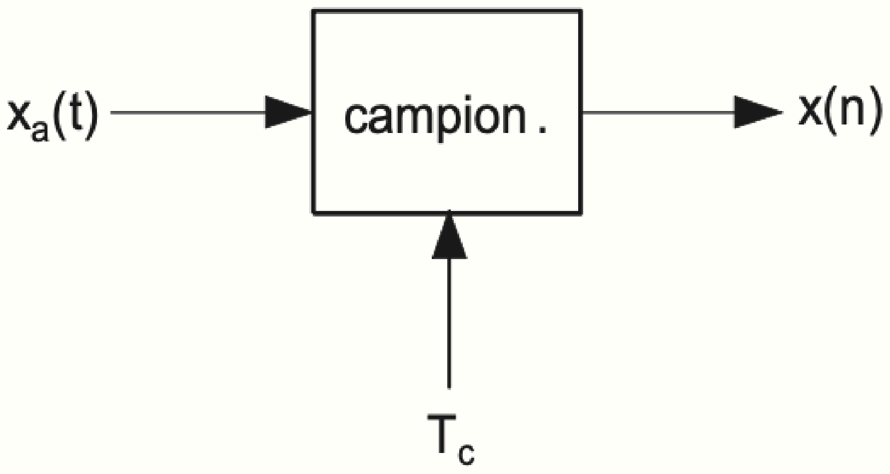


Fig. 7.5. Schema a blocchi di un campionatore con passo T_c.

Il **campionatore è invertibile**? Ossia è possibile **ricostruire esattamente** il segnale $x(t)$ a partire dal segnale $x(n)$? La ricostruzione esatta del segnale può avvenire solamente se viene soddisfatto il **teorema del campionamento (teorema di Shannon)** in quanto, i campioni prelevati, devono "catturare" con sufficiente accuratezza l'andamento temporale del segnale.

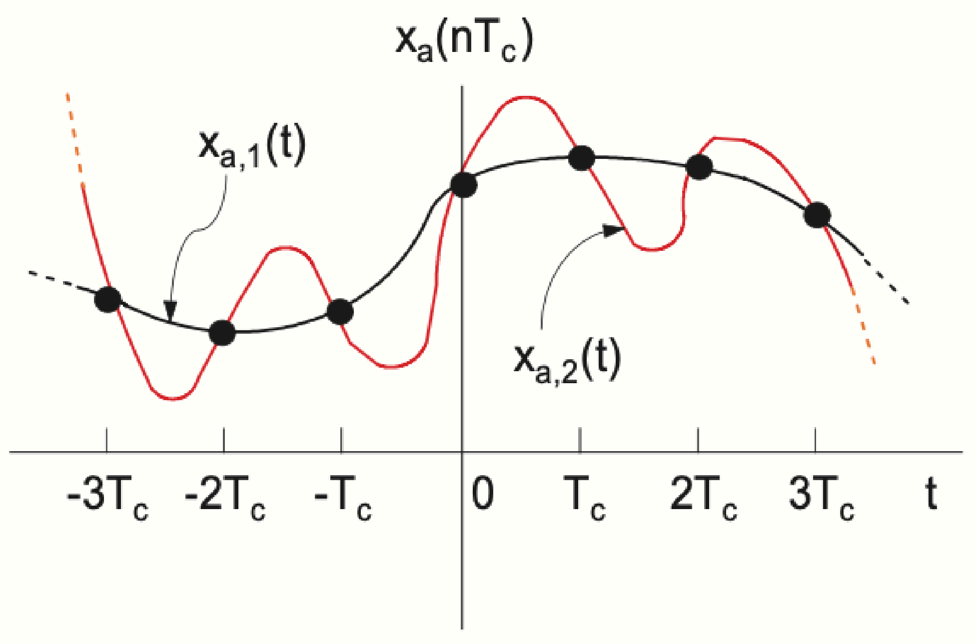


Fig. 7.6. A partire dai campioni $x_a(nT_c)$, è possibile ricostruire due (in realtà infiniti) segnali $x_{a,1}(t)$ (in nero) ed $x_{a,2}(t)$ (in rosso) tali che $x_{a,1}(nT_c) = x_{a,2}(nT_c) = x_a(nT_c)$.

Senza il vincolo imposto dal teorema, esistono infiniti segnali analogici che, se campionati con passo , generano la sequenza $x(n)$.

5.1.1 Teorema del campionamento

Consente di ricostruire esattamente un segnale TC a partire da un segnale TD ottenuto mediante campionamento di un segnale TC. Il teorema descrive la relazione tra il passo di campionamento e la variabilità del segnale nel dominio del tempo.

Teorema 7.1 (teorema del campionamento o teorema di Shannon)
Sia $x_a(t) \stackrel{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X_a(f)$ un segnale a TC, e siano $x(n) = x_a(nT_c)$ i suoi campioni presi con passo di campionamento T_c. Se:

(i) il segnale $x_a(t)$ è a banda rigorosamente limitata, con banda monolatera $B_x = W$, ovvero:

$$X_a(f) = 0\,, \quad \forall |f| \geq W\,;$$

(ii) la frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$ soddisfa la *condizione di Nyquist*:

$$f_c \geq 2W\,; \tag{7.3}$$

allora il segnale $x_a(t)$ è perfettamente rappresentato dai suoi campioni $x(n) = x_a(nT_c)$. La minima frequenza di campionamento $f_{c,\min} = 2W$ nella (7.3) prende il nome di *frequenza di Nyquist* del segnale $x_a(t)$.

La condizione di Nyquist: 2 evita il fenomeno dell'aliasing ossia la sovrapposizione delle repliche nel dominio della frequenza. In particolare:

- 2 repliche di $X()$ non sovrapposte;
- $= 2$ repliche di $X()$ affiancate;

- 2 repliche di $X()$ sovrapposte.

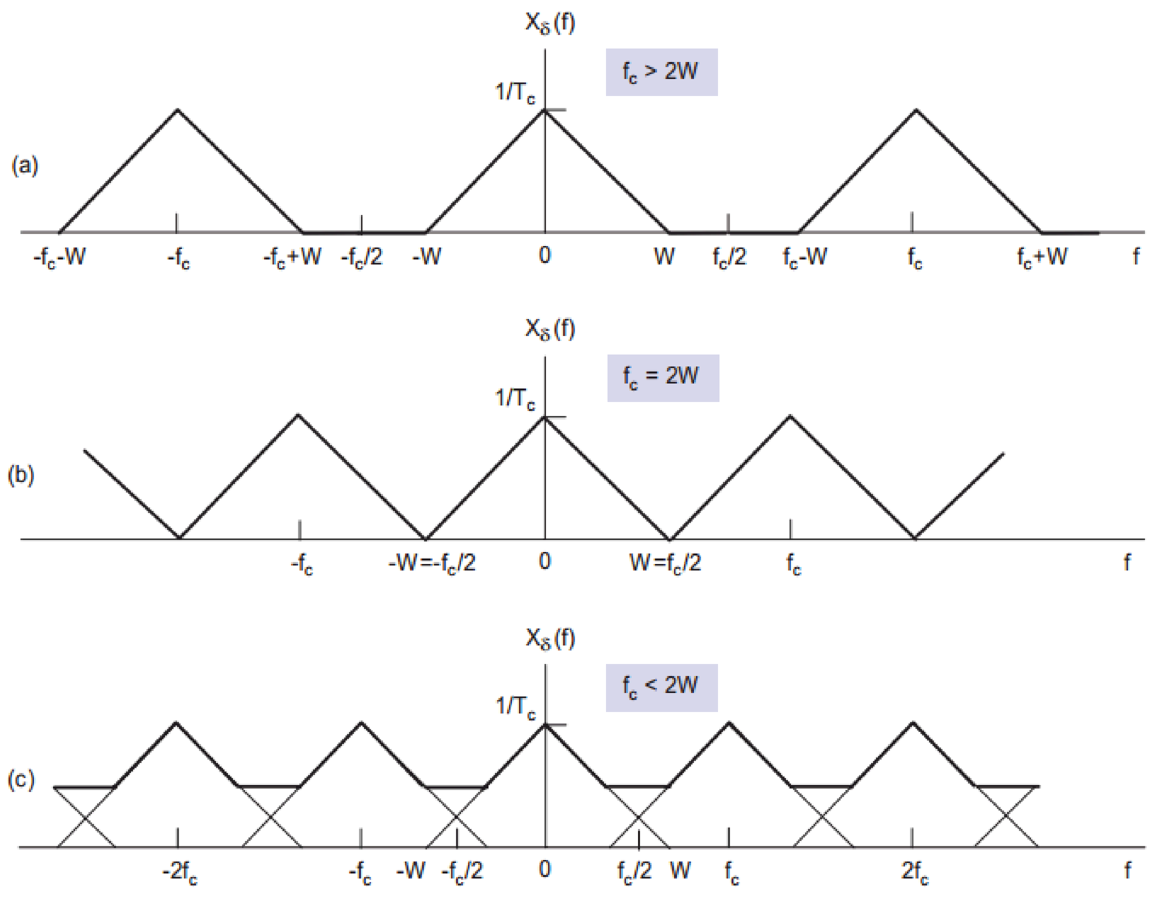


Fig. 7.12. Spettro $X_\delta(f)$ risultante dal campionamento di un segnale $x_a(t)$ a banda limitata avente lo spettro di fig. 7.10: (a) campionamento con $f_c > 2W$; (b) campionamento con $f_c = 2W$; (c) campionamento con $f_c < 2W$.

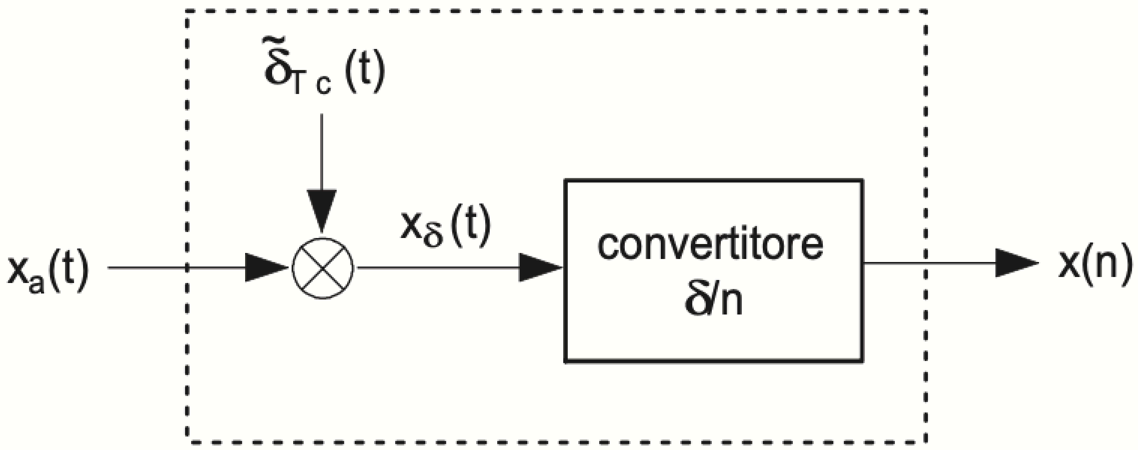


Fig. 7.8. Interpretazione del campionamento come un sistema a due stadi: il segnale analogico $x_a(t)$ è moltiplicato per il pettine di δ di periodo T_c, detto $\tilde{\delta}_{T_c}(t)$, e il blocco denominato "convertitore δ/n" trasforma il segnale impulsivo $x_\delta(t)$ nel segnale TD $x(n)$.

Il campionamento ideale avviene in 2 step:

1. Si moltiplica il segnale analogico $x(t)$ ed un pettine di di periodo ((t))

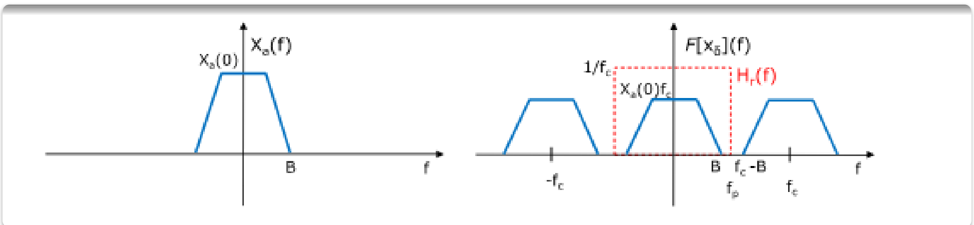
$$(t) = (t) = \sum_{n=} (t \ n)$$

$$x(t) = x(t) \ (t) = x(t) \ \sum_{n=}^{+} (t \ n) = \sum_{=} x(n)(t \ n)$$

$x(t)$ rappresenta il segnale campionato idealmente in quanto composto da impulsi di Dirac, astrazione matematica non riproducibile in pratica. Il segnale in questa fase è ancora TC, formato da impulsi centrati negli istanti n .

2. Il convertitore $/n$ converte l'impulso $x(t)$ associando all'n-esimo impulso $x(n)(t \ n)$, il campione $x(n) = x(n)$.

Se valgono le condizioni del teorema (2), il segnale originario può essere ricostruito mediante l'applicazione di un filtro passa-basso nel dominio della frequenza, con frequenza compresa tra:



$$X() = X()()$$

$$() = \left(2\right)$$

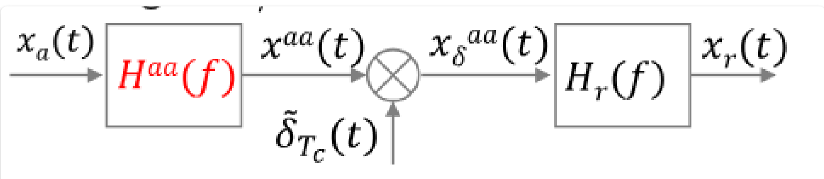
Anti-trasformando si ottiene il segnale ricostruito nel dominio del tempo:

$$x(t) = (t) \ \sum_{n=} x(n)(t \ n) = \sum_{n=} x(n)(t \ n) = 2 \ \sum_{n=} x(n)n\left(t \ n\right)$$

Solitamente: $= /2 = 12$ che corrisponde alla formula di interpolazione cardinale (o formula di Shannon).

5.1.2 Aliasing

Con aliasing si intende la sovrapposizione delle repliche del segnale e si verifica quando la condizione di Nyquist non è soddisfatta.
Per i segnali reali non é possibile evitare completamente l'aliasing in quanto, avendo durata finita, non hanno banda strettamente limitata (e quindi non soddisfano la prima condizione del teorema).
Per limitarne gli effetti, é possibile introdurre un filtro anti-aliasing prima del campionamento. Si tratta di un filtro passa basso con frequenza di taglio 2 .



Il filtro consente di mantenere inalterate le repliche per $/2$ alterando le altre. Per questo spesso si campiona ad una frequenza più alta di quella di Nyquist.

5.2 Relazione Campionamento/Replicazione

L'operazione duale nel dominio della frequenza prende il nome di Replicazione.

$$n \quad nnt$$

Un campionamento del dominio del tempo corrisponde ad una replicazione nel dominio della frequenza e viceversa.

15. Replicazione/campionamento:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0) \stackrel{\text{FT}}{\longleftrightarrow} Y(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right), \quad \forall T_0 \in \mathbb{R}_+,$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_0)\, \delta(t - kT_0) \stackrel{\text{FT}}{\longleftrightarrow} Y(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_0}\right), \quad \forall T_0 \in \mathbb{R}_+.$$