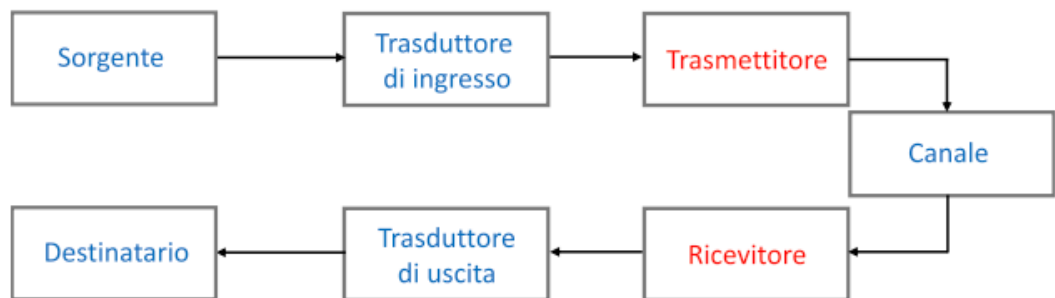


# 1 Informazione e sistema di comunicazione

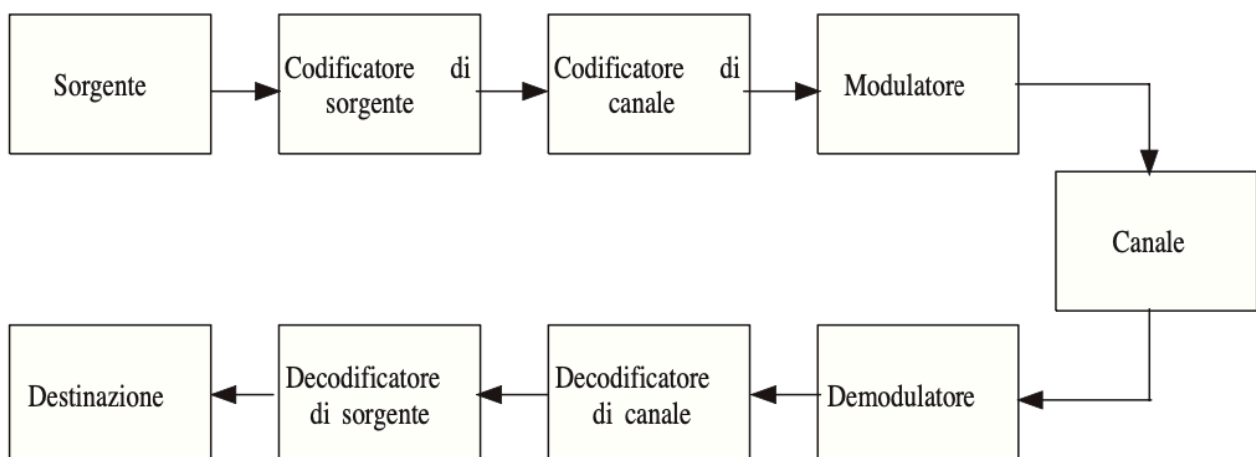
La **teoria dell'informazione** studia la trasmissione, ricezione, elaborazione e memorizzazione dell'informazione. Il significato di "informazione" assume connotazioni differenti in base al contesto all'interno del quale é applicato... la teoria dell'informazione fa riferimento al caso di un **sistema di comunicazione**, dove l'**informazione** viene emessa da una **sorgente** e trasportata fino a **destinazione** mediante un **canale di comunicazione**.



Lo schema essenziale di un sistema di telecomunicazioni è composto da

- una sorgente,
- un trasduttore in ingresso,
- un canale,
- un ricevitore,
- un trasduttore in uscita,
- un destinatario.

L'interesse principale é verso i sistemi di comunicazione digitale, rappresentabili mediante lo schema di Shannon:



**Fig. 10.1.** Schema di Shannon di un sistema di comunicazione per la trasmissione di informazione da una sorgente ad una destinazione.

Il sistema si compone di:

1. **codificatore di sorgente**: codifica l'uscita della sorgente fornendo una rappresentazione più compatta e sintetica dei simboli emessi dalla sorgente, al fine di ridurre la ridondanza;
2. **codificatore di canale**: modifica la sequenza binaria per aumentarne l'affidabilità;
3. **modulatore**: converte la sequenza binaria in una **sequenza di forme d'onda** adatte alla trasmissione sul canale fisico. Sostanzialmente converte i simboli in segnali fisici. Il blocco modulatore/demodulatore è comunemente denominato "**modem**";

E delle relative controparti. Le aree di studio della teoria dell'informazione coincidono con i principali blocchi del diagramma di Shannon:

- **codifica di sorgente**: rappresentazione dell'informazione nella forma più efficiente possibile, eliminando ridondanza e quindi riducendo i simboli necessari
- **capacità di canale**: determinazione della massima quantità di informazione che è possibile trasmettere con degradazione piccola;
- **codifica di canale**: introduzione di ridondanza controllata al fine di limitare le degradazioni (disturbi) introdotti dal canale di comunicazione.

## 1.1 Misura dell'informazione ed entropia

Il concetto di **informazione** è strettamente correlato a quello di **incertezza**: l'informazione associata ad un evento è **inversamente proporzionale** alla probabilità con la quale quel dato evento può verificarsi. Ciò significa che ad una minore probabilità corrisponde una maggiore quantità di informazione.

Il concetto di informazione può quindi essere espresso matematicamente mediante l'ausilio della **teoria della probabilità**, modellando un **esperimento aleatorio** i cui possibili risultati siano biunivocamente associati i valori  $x \in X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ .

$X$  è una variabile aleatoria discreta con PDF

$$p_X(x) := P(X = x)$$

### 1.1.1 Autoinformazione

#### Autoinformazione

$X$  variabile aleatoria discreta con PDF  $p_X(x)$ . L'**autoinformazione** associata all'evento  $\{X = x\}$  è:

$$I(x) := \log \frac{q}{p_X(x)} = -\log p_X(x)$$

dove  $\log$  è il logaritmo in una base qualsiasi maggiore di 1.

Nonostante sia esplicita la dipendenza da  $x$  ( $I(x)$ ), l'autoinformazione **dipende** solamente dalla **probabilità**  $p_X(x)$  e assume valori tanto maggiori quanto meno probabile è l'evento  $\{X = x\}$ .

Solitamente si utilizza il logaritmo in base 2 o in base  $e$ . Nel primo caso l'autoinformazione è misurata in *nat*, nel secondo caso in *bit*.

$$\log_2() \implies \text{nat}$$

$$\ln() \implies \text{bit}$$

### 1.1.2 Entropia

L'autoinformazione è quindi una funzione che associa ad ogni  $x$  il numero reale positivo  $I(x)$ , pertanto, al variare di  $x \in X$ , la funzione definisce una variabile aleatoria  $I(X) = -\log(p_X(X))$ , funzione della variabile aleatoria  $X$ .

La **media statistica** di questa quantità rappresenta una misura media dell'autoinformazione associata alla variabile aleatoria  $X$  ed è detta **entropia informazionale**.

$X$  VA, la sua entropia é la media dell'autoinformazione  $I(x)$ :

$$H(X) := E(-\log p_X(X)) = - \sum_{x \in X} p_X(x) \log p_X(x)$$

## 1.2 Sorgenti di informazione

Una sorgente di informazione é un dispositivo che emette "simboli" con regolarit  statistica.

### 1.2.1 Entropia di sorgente

Si considera una **sorgente discreta** che emette simboli in istanti discreti di tempo  $n \in \mathbb{N}$ . Al generico istante  $n$ , il simbolo emesso pu  essere modellato come una variabile aleatoria  $X_n$  che assume valori in un alfabeto numerico di cardinalit   $K$ :  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ . La sorgente  $S$  pu  essere quindi immaginata come una **sequenza infinita di variabili aleatorie discrete**  $X_1, X_2, \dots$ , dove l'indice fa riferimento all'istante di tempo in cui   stato emesso il simbolo.

Possiamo quindi **calcolare l'entropia di sorgente**  $H(S)$ , considerando l'informazione media per simbolo di sorgente:

$$H(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Rappresenta il **contenuto medio di informazione** associata ad un qualunque simbolo della sorgente e si misura in *bit/simbolo*.

Dato che  $H(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \sum_{i=1}^n H(X_i) \leq n \log(K)$ , si ha:

$$H(S) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(X_i) \leq \log(K)$$

Per cui l'entropia di sorgente è limitata superiormente.

► **Esempio 10.6 (entropia della lingua italiana).** Un esempio di sorgente discreta di informazione è il **linguaggio (scritto)**, che possiamo vedere come una **successione di simboli** appartenenti ad un certo **alfabeto**, con in aggiunta lo spazio ed i simboli di interpunzione. L'assunzione di indipendenza tra i simboli non è certamente appropriato per il linguaggio, in quanto si intuisce che qualsiasi lingua presenta un elevato grado di *struttura*, come provato anche dalla possibilità, spesso sfruttata nei giochi enigmistici, di ricostruire parole o anche frasi a partire da poche lettere. Consideriamo ad esempio la lingua italiana: **date le lettere "a" e "c"** in successione, è **più probabile** che la **successiva lettera** sia una **"q" piuttosto che una "t"**. Per approfondire questo aspetto con riferimento alla lingua italiana, consideriamo un **alfabeto semplificato** composto dalle **21 lettere dell'alfabeto** (a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, z) **più lo spazio**, che indichiamo con **–**, e **l'apostrofo ' (23 simboli in totale)**; non consideriamo per semplicità la punteggiatura e non facciamo distinzione tra lettere maiuscole e minuscole,

Se si dispone di un **campione di testo sufficientemente lungo**, e di un po' di pazienza (meglio ancora, di un buon programma al calcolatore) è possibile **calcolare** empiricamente la **frequenza di occorrenza dei 23 simboli**, i cui risultati indicativi sono riportati in Tab. 10.1. Osserviamo che la **massima entropia** che

lettera	probabilità	lettera	probabilità	lettera	probabilità
–	0.161	d	0.038	h	0.009
a	0.108	u	0.027	z	0.008
e	0.085	v	0.025	g	0.006
o	0.079	m	0.016	q	0.004
i	0.073	p	0.015	'	0.004
s	0.060	f	0.014		
n	0.055	b	0.010		
l	0.053				
t	0.051				
r	0.050				
c	0.049				

**Tab. 10.1.** Le lettere dell'alfabeto italiano con le relative probabilità di occorrenza (in ordine decrescente di probabilità).

si può ottenere con 23 lettere è **pari a  $\log 23 = 4.52$  bit**, mentre quella **effettiva delle lettere dell'alfabeto italiano** è pari a  **$H(X_1) \approx 4$  bit**, con una ridondanza di soli 0.5 bit. L'esempio non deve però indurre a **conclusioni errate**: in realtà, la **ridondanza della lingua italiana è molto più elevata**, ma richiede che si considerino gruppi di 2 lettere, di 3 lettere e così via, cioè richiede il calcolo dell'entropia media per lettera  $\frac{1}{n} H(X_1, X_2, \dots, X_n)$  e, al limite per  $n \rightarrow \infty$ , dell'entropia di sorgente.

Un calcolo di questo tipo è riportato in [13] per la lingua inglese, con un alfabeto di 27 simboli (26 lettere ed uno spazio), per il quale la massima entropia è pari a  $\log 27 = 4.76$  bit. L'entropia di una lettera isolata nella lingua inglese è invece pari a  $H(X_1) \approx 4$  bit, quindi praticamente coincidente con quella dell'alfabeto italiano, nonostante il maggior numero di simboli dell'alfabeto; se si considerano gruppi di più lettere, l'entropia per lettera diminuisce; ad esempio, per 4 lettere l'entropia media per lettera  $\frac{1}{4} H(X_1, X_2, X_3, X_4)$  è pari a 2.8 bit. Esperimenti condotti dallo stesso Shannon e da **altri ricercatori stimano l'entropia di sorgente  $H(S)$  della lingua inglese pari a circa 1.3 bit per lettera**, che confrontato con il valore massimo di 4.76 bit mostra l'**elevato grado di ridondanza della lingua inglese**. ◀

## 1.2.2 Tasso d'informazione di una sorgente

Immaginando che la sorgente  $S$  emetta simboli con una **cadenza regolare** e, supponendo  $T_S$  l'intervallo temporale che intercorre tra **due simboli consecutivi**, è possibile definire il **tasso di informazione**  $R_S$ :

$$R_S = \frac{H(S)}{T_S}$$

Si misura in *bit/s*.

Il tasso di informazione è **limitato superiormente** dal bitrate  $R_b$  :

$$R_S \leq R_b = \frac{\log K}{T_S}$$

Il **bitrate** è pertanto una semplice **misura della velocità di emissione** delle sorgente ma non tiene in

considerazione le sue proprietà statistiche. Tali proprietà sono invece misurate dal tasso di informazione  $R_S$ , che rappresenta la **vera misura della quantità di informazione** emessa dalla sorgente.

### 1.2.3 Sorgenti discrete senza memoria (DMS)

Un caso particolare è rappresentato dalle sorgenti **DMS stazionarie**: i successivi simboli  $X_1, X_2, \dots$  emessi, sono assunti **indipendenti** (senza memoria) ed **identicamente distribuiti** (stazionari) con PDF  $p_X(x)$ . In questo caso si ha:

$$H(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \dots, X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nH(X_1)}{n} = H(X_1) = - \sum_{x \in X} p_X(x) \log p_X(x)$$

L'**entropia della sorgente** coincide con l'**entropia dell'alfabeto di sorgente**. Similmente, il **tasso di informazione** vale:

$$R_S = \frac{H(X_1)}{T_S}$$

### 1.2.4 Codifica di sorgente

Con codifica di sorgente si intende l'efficiente rappresentazione dei simboli emessi dalla sorgente. Un esempio tipo è il codice ASCII che converte i caratteri alfanumerici in stringhe da 8 bit.

L'obiettivo è la riduzione (compattazione) della lunghezza delle stringhe binarie necessarie a codificare la sorgente, eliminando ridondanza. La riduzione della ridondanza viene effettuata proprio dal codificatore di sorgente ed è un'operazione fondamentale al punto da poter impedire la ricostruzione dei simboli originali. In tal senso, è possibile definire 2 tipologie di codifica:

- **con perdita** (lossy coding o compressione): si ha un perdita accettabile di informazione che non consente al destinatario di ricostruire esattamente i simboli emessi dalla sorgente. Viene utilizzata nella telefonia voip, jpeg, mpeg, mp3...
- **senza perdita** (lossless coding o compattazione): consente la perfetta ricostruzione dei simboli emessi dalla sorgente. Viene utilizzato da sistemi come winzip, 7zip, gzip.

## 2 Progettazione di un modulatore

### 2.1 Sistema di riferimento: rappresentazione geometrica dei segnali

Modulazione e Demodulazione non avvengono direttamente sulle forme d'onda trasmesse ma su alcune caratteristiche di esse, dette **features**. A partire da un generico segnale  $s(t)$  è possibile costruire un vettore  $\bar{s} = [s_1, \dots, s_N]$  di features estratte, il quale semplifica notevolmente la fase di demodulazione e il progetto del decisore. L'obiettivo sostanzialmente è la **rappresentazione dei segnali in uno spazio vettoriale** per facilitare la demodulazione.

Per ottenere un vettore  $x$  di features, si fissa un insieme  $N$  di funzioni  $\{s_1(t), \dots, s_N(t)\}$  che saranno combinate linearmente ai segnali  $\{s_1(t), \dots, s_M(t)\}$  prima della trasmissione:

$$s_m(t) = \sum_{i=1}^N s_{mi}(t), \quad m = 1, \dots, M$$

Il vettore di features è dato dai coefficienti  $s_{mi} = [s_{m1}, \dots, s_{mN}]$ ... conoscere tali coefficienti equivale a **conoscere il segnale inviato**  $s_m(t)$ ... per questo motivo è possibile utilizzare solamente il vettore di features in uno spazio discreto, anziché lavorare con segnali nel dominio del tempo.

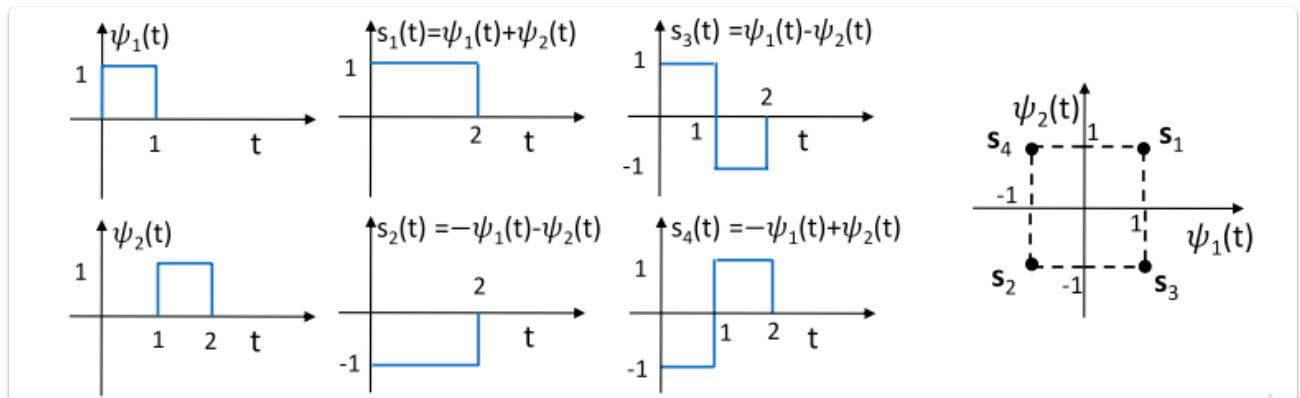
L'insieme delle funzioni , costituisce la base dello spazio vettoriale ed è solitamente **ortonormale**, ossia:

- a due a due **ortogonali** (energia mutua nulla e prodotto scalare nullo)

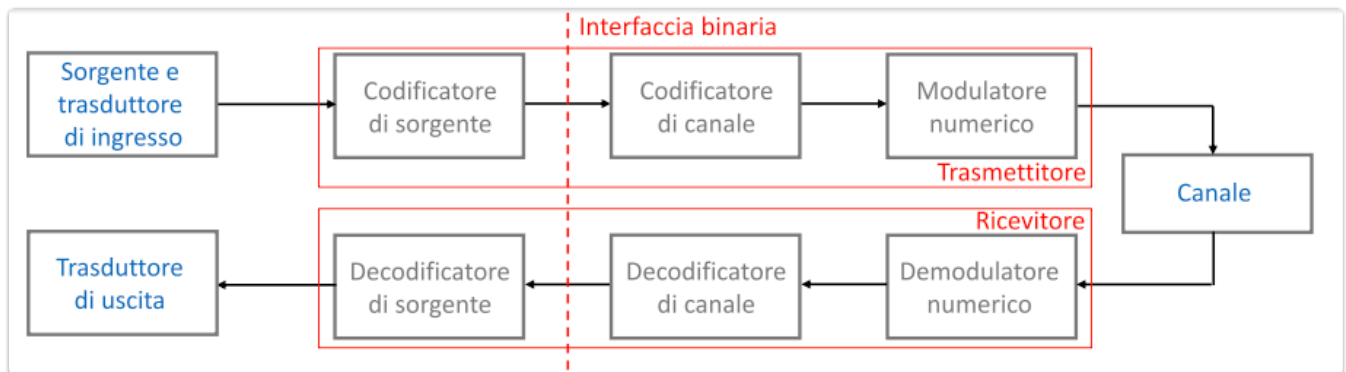
$$i(t) \perp j(t) \iff \langle i(t), j(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} i(t)j(t)dt = 0$$

- **norma** (radice quadrata dell'energia) unitaria:

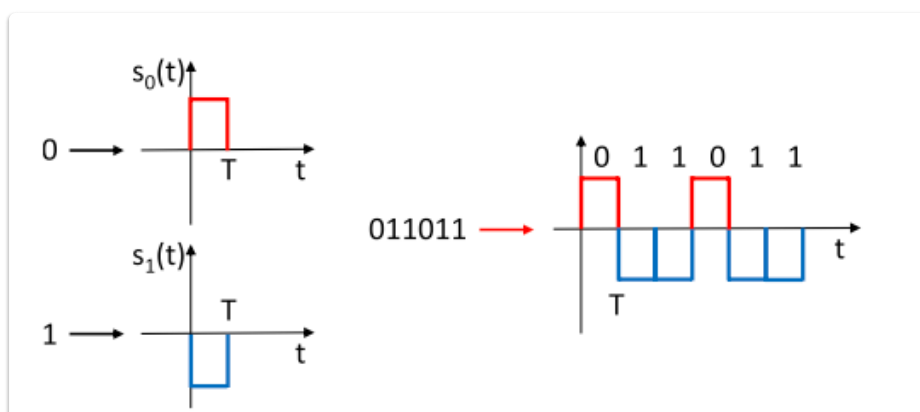
$$\|i(t)\| = \sqrt{E_i} = 1$$



## 2.2 Modulatore digitale



1. **Codificatore di sorgente** e di canale possono essere progettati in maniera indipendente grazie al teorema di separazione sorgente/canale.
2. Il **codificatore di sorgente** riduce al minimo la quantità di bit per codificare l'informazione da trasmettere, nei vincoli del I Teorema di Shannon.
3. Il **codificatore di canale** introduce una ridondanza nella sequenza per aumentare l'affidabilità della trasmissione, nei vincoli del II Teorema di Shannon.



Il **modulatore** ha il compito di convertire i simboli emessi dalla sorgente in segnali fisici, in forme d'onda di durata  $T$  (**intervallo simbolo**). Tale conversione può essere effettuata in 2 modi:

1. associando direttamente ad ogni bit di valore 0, un segnale  $s_0(t)$  ed ad ogni bit di valore 1 un segnale  $s_1(t)$

2. Si possono usare  $M > 2$  segnali  $\{s_m(t)\}_{m=1,\dots,M}$  associando ad ogni forma d'onda trasmessa un gruppo di  $k$  bit con  $k \leq \log_2 M$ . Per evitare segnali inutilizzati si usa  $M = 2^k$

### 2.2.1 Tasso di simbolo e tasso di bit per trasmissioni binarie ed M-arie

La durata  $T$  delle forme d'onda trasmesse dal modulatore é detta **intervallo di simbolo**. Il suo inverso rappresenta il numero di simboli trasmessi al secondo ed é detto **tasso di simbolo** o tasso d'informazione:

$$R_S = 1/T \quad \text{tasso di simbolo}$$

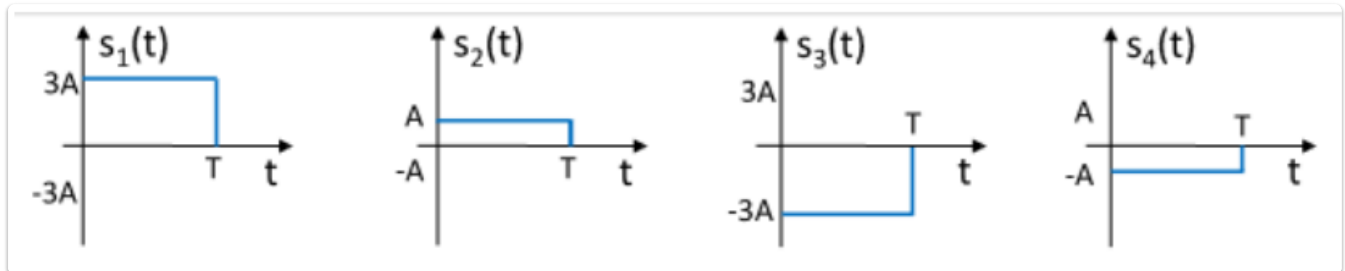
Genericamente il tasso d'informazione é limitato superiormente dal **bitrate** :

$$R_S \leq R_b = \frac{\log K}{T_S}$$

- Trasmissioni **binarie**:  $R_b = R_S$
- Trasmissione **M-arie**:  $R_b = kR_S$

### 2.2.2 Modulazioni monodimensionali - PAM

**PAM - Pulse Amplitude Modulation**, l'informazione é associata all'ampiezza delle forme d'onda trasmesse.



Considerando una forma d'onda arbitraria  $g_T(t)$ , i segnali trasmessi si possono scrivere come:

$$s_m(t) = A_m g_T(t), \quad m = 1, \dots, M; \quad 0 \leq t \leq T$$

Dove  $A_m$  rappresenta l'**ampiezza** (coefficiente di ampiezza) associato al segnale trasmesso.

É possibile ricavare la **funzione di base**, normalizzando:

$$g(t) = \frac{g_T(t)}{\|g_T(t)\|} = \frac{g_T(t)}{\sqrt{E_g}}$$

Da cui é possibile ricavare nuovamente i coefficienti della rappresentazione, ossia il vettore di features:

$$s_m = A_m \sqrt{E_g}$$

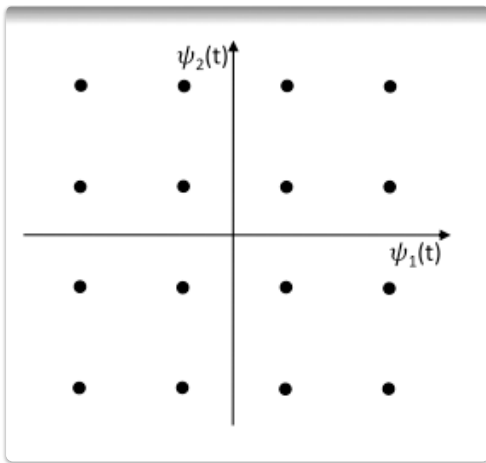
Dove  $E_g = \int_0^T g_T^2(t) dt$  é l'energia del segnale  $g_T(t)$ .

- L'energia di ogni segnale vale:  $E_m = s_m^2 = E_g A_m^2$
- L'energia media vale:  $E_{av} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_m = \frac{E_g}{M} \sum_{m=1}^M A_m^2$

### 2.2.3 Modulazioni bidimensionali - QAM

**QAM - Quadrature Amplitude Modulation**, é una tecnica avanzata che consente di combinare due segnali (che differiscono di 90 gradi in fase) di modulazione di ampiezza (AM) in un singolo canale per la trasmissione dei dati.

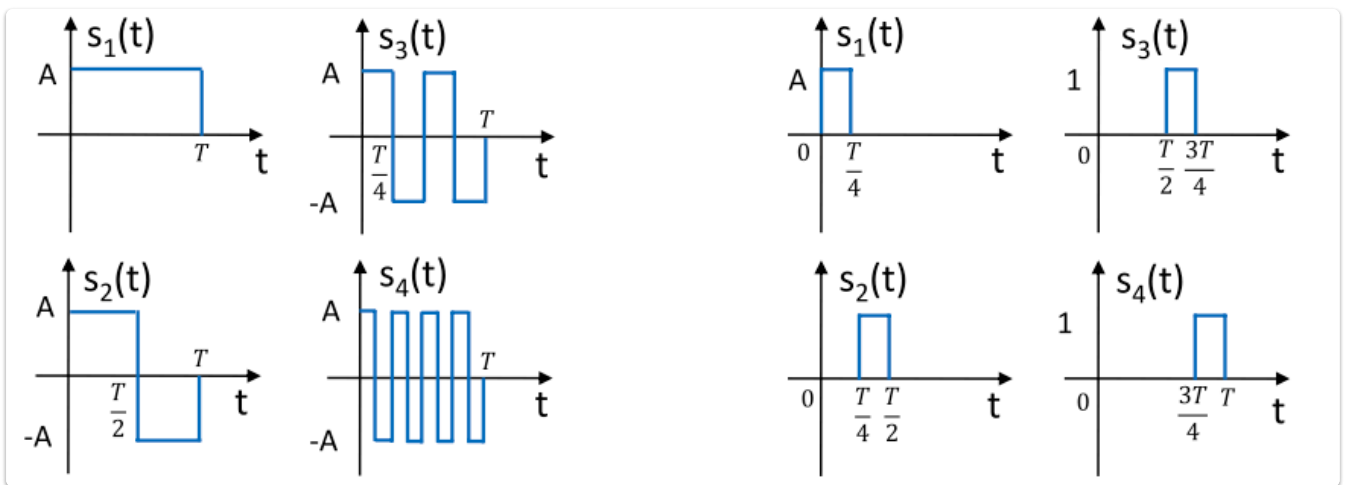
Nelle trasmissioni QAM, l'informazione trasmessa é associata all'**ampiezza** e alla **fase** delle forme d'onda trasmesse.



I segnali possono essere rappresentati vettorialmente mediante i coefficienti della combinazione lineare con le funzioni (vettore di features):

$$s_m = [\sqrt{E_s}A_{mc}, \sqrt{E_s}A_{ms}] \quad m = 0, \dots, M - 1$$

## 2.2.4 Modulazioni multidimensionali



Costituiscono il caso più generale e pertanto ogni modulazione deve essere trattata singolarmente. Un caso di particolare interesse riguarda la trasmissioni con funzioni d'onda ortogonali. Fra esse rientra la **modulazione PPM**.

### 2.2.4.1 Modulazioni multidimensionali ortogonali

Dato che i segnali trasmessi sono **ortogonali**, il sistema ortonormale é costituito dagli stessi segnali normalizzati:

$$m(t) = \frac{s_m(t)}{\|s_m(t)\|}$$

Per cui i segnali si scrivono come:

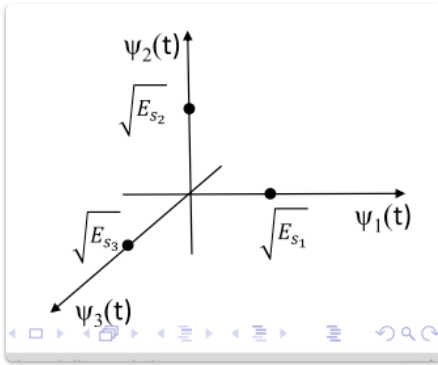
$$s_m(t) = \|s_m(t)\| m(t) = \sqrt{E_{s_m}} m(t)$$

Da cui é possibile ricavare il vettore di features:

$$\bar{s}_{mk} = \begin{cases} \sqrt{E_{s_m}} & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

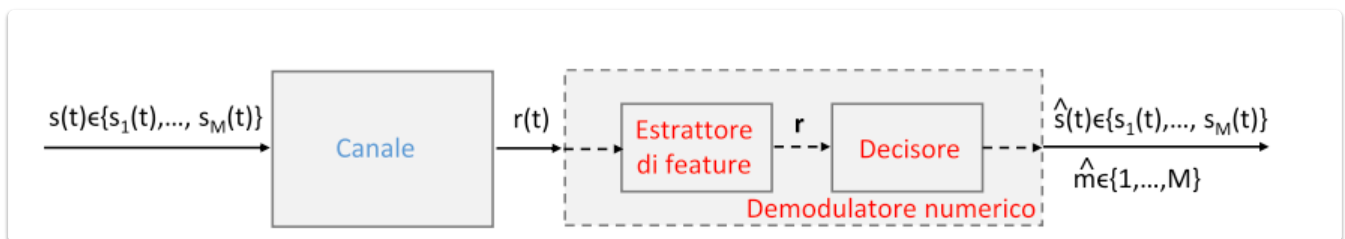


$$\bar{s}_1 = [\sqrt{E_{s_1}}, 0, \dots, 0], \quad \bar{s}_2 = [0, \sqrt{E_{s_2}}, \dots, 0], \quad \dots$$



### 3 Progetto di un demodulatore

#### 3.1 Demodulatore digitale



Il ricevitore ha il compito di **ricostruire l'informazione** trasmessa a partire dal segnale ricevuto  $r(t)$ .

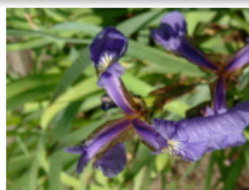
- **trasmissioni analogiche**: ricostruire nel miglior modo possibile il segnale trasmesso  $s(t)$  (problema di stima)
- **trasmissioni digitali**: il ricevitore deve solamente riconoscere quale, fra le  $M$  forme d'onda, è stata trasmessa (problema di **classificazione**)

Il progetto del demodulatore dipende principalmente da 2 fattori:

1. criterio di ottimo che si vuole perseguire (ML);
2. caratteristiche dei segnali coinvolti  $s(t)$ ,  $r(t)$  che sono funzionalmente legati dal canale di trasmissione (canale AWGN).

Per semplificare la classificazione, si dà in ingresso al classificatore un **vettore**  $r = [r_1, \dots, r_n]$  di feature astratte da  $r(t)$ , segnale in ingresso. Per l'estrazione delle features si ricorre alla **rappresentazione geometrica dei segnali**.

## Esempio di classificazione



1 Setosa



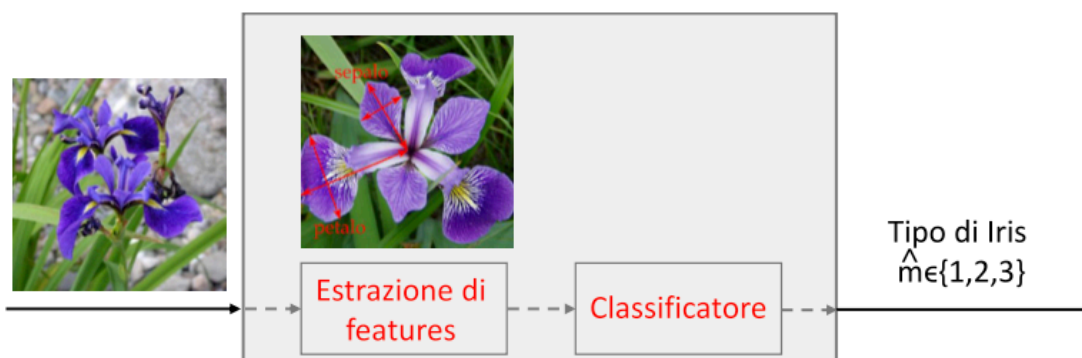
2 Versicolor



3 Virginica

Uno degli esempi di classificazione più usati nella letteratura scientifica è quella dei *fiori Iris* nelle classi *Setosa*, *Versicolor* e *Virginica*.

- Il classificatore può operare direttamente sull'immagine dell'iris da classificare.
- Il classificatore può usare alcune feature (lunghezza e larghezza dei petali e sepal).



### 3.1.1 Criterio ML

#### ✍ Criterio ML (Maximum Likelihood)

Il modulatore numerico seleziona, fra i segnali  $s_m(t) \in \{s_1(t), \dots, s_m(t)\}$ , quello che massimizza la probabilità del segnale ricevuto dato il segnale trasmesso (**verosomiglianza**).

$$s = \operatorname{argmax}[f(\bar{r}|\bar{s}_m)]$$

A seguito dell'estrazione delle features dal segnale  $r(t)$  ricevuto, il decisore (componente interno al demodulatore), usa il criterio ML per selezionare, il segnale  $s_m$  (i segnali trasmessi sono noti a priori), che ha le features più simili al segnale  $r(t)$  ricevuto.

### 3.1.2 Canale AWGN

Una tipologia di canale di comunicazione utilizzato molto spesso è il canale AWGN, alla cui uscita viene sommato un **rumore gaussiano**.

#### ✍ Canale AWGN (Additive White Gaussian Noise)

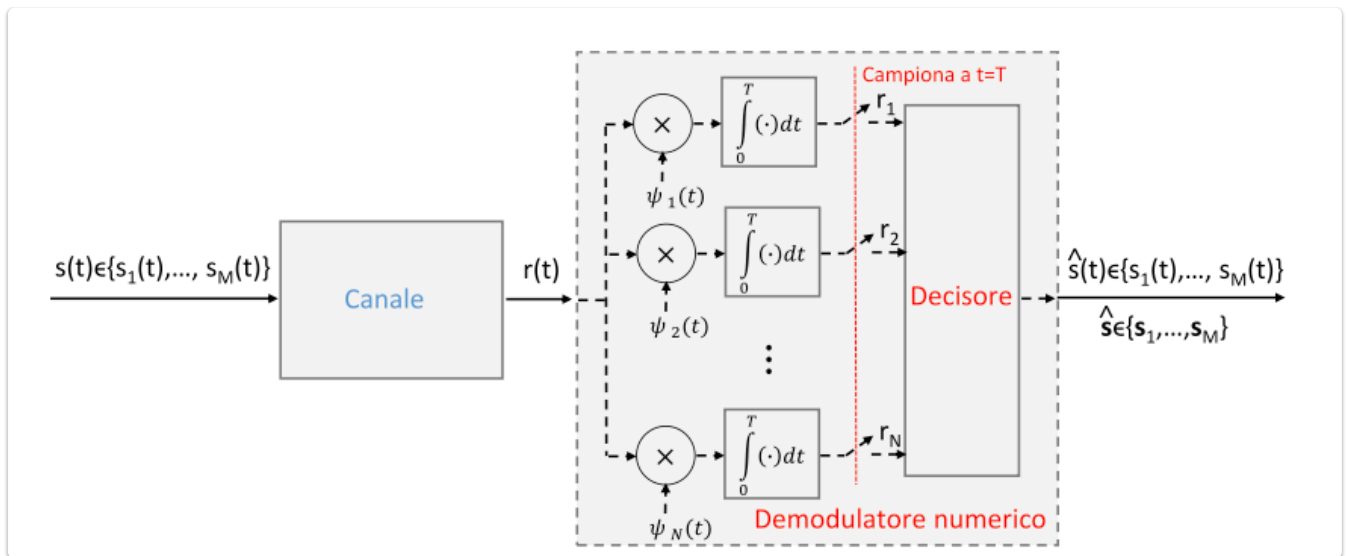
Caratteristiche:

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

Il rumore  $n(t)$  è una realizzazione di un processo Gaussiano incorrelato (bianco)  $N(t)$  a media nulla e densità spettrale di potenza (PSD) costante  $S_n(f) = \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$

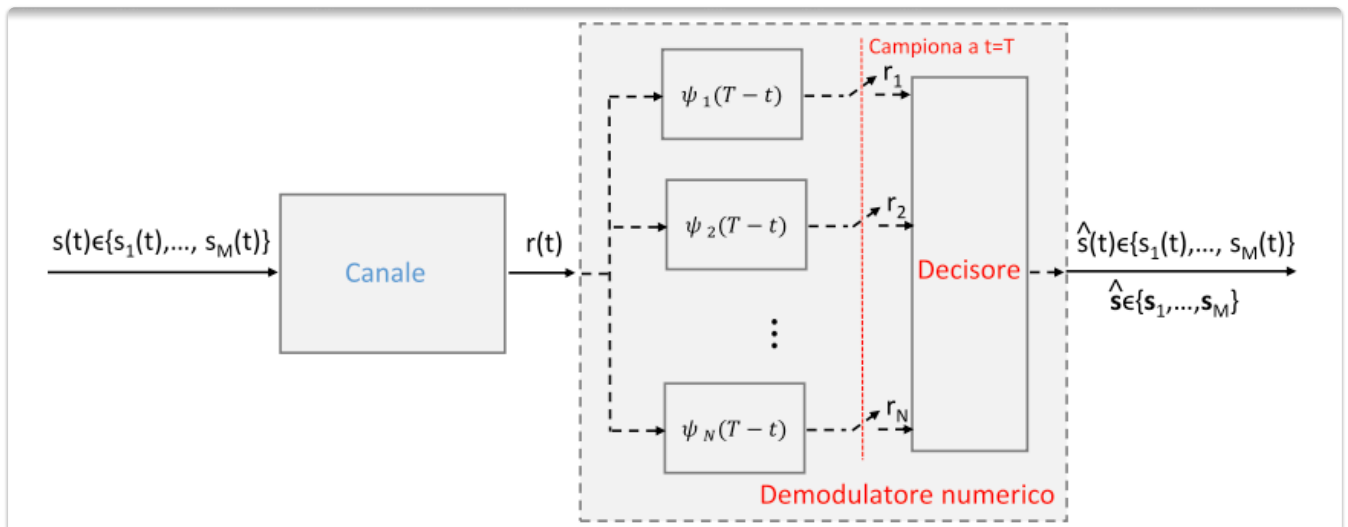
Il canale AWGN consente di avere numerosi semplificazioni matematiche.

### 3.1.3 Demodulatore a correlatori



Il segnale  $s(t)$  viene ricostruito a partire da  $r(t)$ , il segnale ricevuto, andando a ricalcolare i coefficienti dell'espansione.

### 3.1.4 Demodulatore a filtri adattati



Un'alternativa al demodulatore a correlatore è quello a filtri adattati, dove l'uscita  $r_k(t)$  del k-esimo correlatore viene calcolata come uscita all'istante  $T$  di un filtro LTI con risposta impulsiva  $h(t) = \psi_k(T-t)$  con ingresso  $r(t)$ :

$$r(t) * h(t)|_{t=T} = \int_0^T r(\tau) h(t - \tau) d\tau \Big|_{t=T} = \int_0^T r(\tau) \psi_k(t - [T - \tau]) d\tau \Big|_{t=T} \\ = \int_0^T r(\tau) \psi_k(\tau) d\tau.$$

### 3.1.5 Demodulatore vettoriale a massima somiglianza



Si tratta di un demodulatore vettoriale che utilizza il **criterio ML** per prendere decisioni.

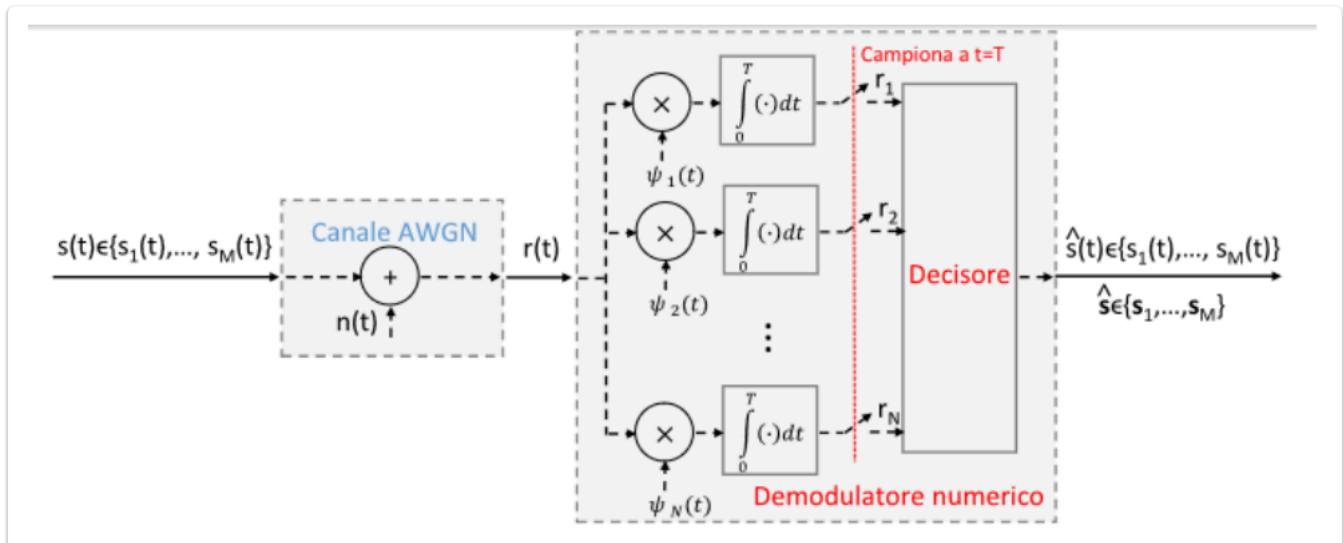
Per **minimizzare l'errore** sul decisore, occorre massimizzare la probabilità di corretta decisione, scegliendo l'ipotesi più probabile:

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}_m \in \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_M\}}{\operatorname{argmax}} [\mathbb{P}(\mathbf{s}_m | \mathbf{r})] \stackrel{(a)}{=} \underset{\mathbf{s}_m \in \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_M\}}{\operatorname{argmax}} \left[ \frac{f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) \mathbb{P}(\mathbf{s}_m)}{f(\mathbf{r})} \right] \stackrel{(b)}{=} \underset{\mathbf{s}_m \in \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_M\}}{\operatorname{argmax}} [f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) \mathbb{P}(\mathbf{s}_m)],$$

in cui la (a) è dovuta al teorema di Bayes e la (b) al fatto che il denominatore non dipende dalle ipotesi. Si parla di *criterio MAP (Massima probabilità a posteriori)*.

- In caso di ipotesi con probabilità a priori  $\mathbb{P}(\mathbf{s}_m)$  uguali (o sconosciute) è equivalente alla massimizzazione della sola verosimiglianza  $f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)$ .

### 3.2 Demulatore a correlatori su canale AWGN



Per utilizzare un decisore basato sul criterio ML bisogna calcolare le verosimiglianze  $f_{R|S}(\bar{r} | \bar{s}_m)$  nelle varie ipotesi.

Sul canale AWGN, in uscita è presente un rumore additivo  $n(t)$  e di conseguenza, il vettore  $\bar{r} = [r_1, \dots, r_N]$  è composto dalle componenti:

$$\bar{r}_k = \int_0^T r(t)_k(t) dt = \int_0^T s_m(t)_k(t) dt + \int_0^T n(t)_k(t) dt = s_{mk} + n_k, \quad k = 1, \dots, N$$

In cui continua a comparire il rumore gaussiano introdotto dal canale di comunicazione, il quale, essendo una quantità aleatoria può essere espresso mediante una variabile aleatoria  $N_k$ .

Tali VA, essendo il rumore gaussiano bianco a media nulla, sono **gaussiane** a media nulla, **incorrelate** e a varianza  $\frac{N_0}{2}$ .

$$E(N_k) = 0; \quad E(N_k N_m) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

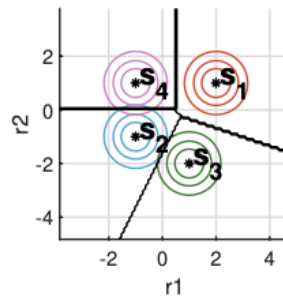
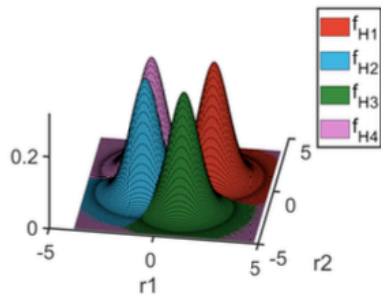
Quindi il vettore delle uscite val:  $\bar{R} = [R_1, \dots, R_N] = [s_{m1} + N_1, \dots, s_{mN} + N_N]$

le componenti di  $\mathbf{R}$  sono v.a. Gaussiane incorrelate (quindi indipendenti) con medie  $s_{mi}$

$$R_i \sim \mathcal{N}\left(s_{mi}, \frac{N_0}{2}\right), \quad i = 1, \dots, N.$$

La pdf congiunta è il prodotto delle pdf marginali  $f_{R_i}(r_i)$  e quindi vale

$$f_{\mathbf{R}|\mathbf{S}}(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) = \prod_{i=1}^N f_{R_i}(r_i) = \frac{1}{(\pi N_0)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(r_1 - s_{m1})^2}{N_0}} \dots \frac{1}{(\pi N_0)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(r_N - s_{mN})^2}{N_0}}$$



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Una volta modellato il vettore  $\bar{r}$  in ingresso al decisore, si può scrivere il criterio ML:

$$\hat{s} = \underset{\mathbf{s}_m \in \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_M\}}{\operatorname{argmax}} [f_{\mathbf{R}|\mathbf{S}}(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)] = \underset{\mathbf{s}_m \in \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_M\}}{\operatorname{argmax}} [\log f_{\mathbf{R}|\mathbf{S}}(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)],$$

in cui l'ultimo passaggio è permesso dal fatto che il logaritmo è una funzione monotona crescente, rendendo le due massimizzazioni equivalenti.

- Si dimostra che  $\mathbf{r}$  contiene tutta l'informazione necessaria per la decisione (è una *statistica sufficiente*) e che il resto di  $r(t)$  è irrilevante (*teorema dell'irrelevanza*).

Dal momento che le verosomiglianze  $f_{\mathbf{R}|\mathbf{S}}(\bar{r}|\bar{s}_m)$  hanno la stessa forma a campana circolare, il decisore ML è un decisore a minima distanza:

$$s = \operatorname{argmin} D(\bar{r}, \bar{s}_m)$$

## 4 Prestazioni dei sistemi di trasmissione

L'analisi delle prestazioni dei sistemi di trasmissione permette di valutare l'opportunità di scegliere una specifica costellazione di segnali in funzione dell'applicazione e del canale. Conviene:

- usare **modulazioni M-arie** che trasmettono  $k = \log_2 M$  bit in un intervallo simbolo,
  - oppure associare un singolo bit ad ogni forma d'onda trasmessa (**modulazione binaria**)?
- Per confrontare le varie modulazioni si usano alcuni **parametri numerici**: probabilità di errore (che decresce all'aumentare della potenza trasmessa) e l'occupazione di banda del canale.

### ✍ Energia media per bit

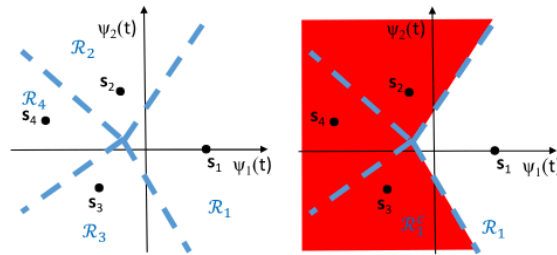
$$E_{bav} = \frac{E_{av}}{k} = \frac{E_{av}}{\log_2 M}$$

### ✍ Rapporto segnale/rumore

$$b = \frac{E_{bav}}{N_0}$$

### ✍ Efficienza spettrale

$$= \frac{R_b}{W}$$



Per calcolare la probabilità di errore, si ricordi che il decisore ML, massimizzando le verosimiglianze delle osservazioni nelle varie ipotesi, divide i segnali ricevuti in  $M$  regioni di decisione  $\{\mathcal{R}_m\}_{m=1,\dots,M}$ , composte dai vettori  $\mathbf{r}$  associati ai segnali trasmessi  $\{\mathbf{s}_m\}_{m=1,\dots,M}$ :

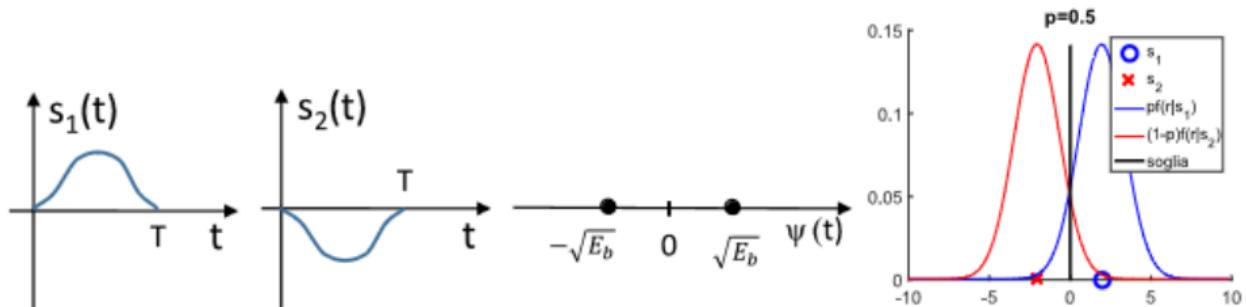
$$\mathcal{R}_m = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N | \mathbf{s}_m = \underset{\mathbf{s}_m \in \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_M\}}{\operatorname{argmax}} [f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)]\}.$$

- La probabilità di errore  $\mathbb{P}(e)$  è la probabilità che il vettore  $\mathbf{r}$  appartenga alla regione di decisione sbagliata e si può ottenere con la legge della probabilità totale.

#### Probabilità di errore

$$P(e) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P(e | s_m) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P(r \in R_m^c | s_m) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \int_{R_m^c} f_{R|S}(r | s_m) dr$$

### 4.1 Probabilità di errore PAM binario



Si considera una trasmissione PAM simmetrica su canale AWGN con i segnali:

$$s_1 = \sqrt{E_b}, \quad s_2 = -\sqrt{E_b}$$

I cui segnali vengono trasmessi con la stessa probabilità  $P(s_1) = P(s_2) = 0.5$ .

Cosiderando il **rumore** introdotto dal canale, il ricevitore legge il segnale:

$$r = \pm \sqrt{E_b} + n$$

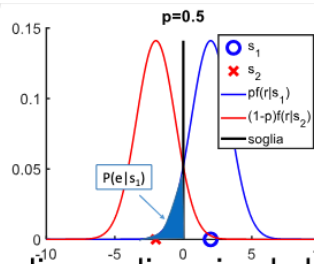
dove  $n \sim N(0, \sigma_n^2) = N(0, N_0/2)$ .

Il criterio ML coincide con il criterio di minima distanza

$$s = \operatorname{argmax}[f_{R|S}(\bar{r} | \bar{s}_m)] = \operatorname{argmin}[||\bar{r} - \bar{s}_m||]$$

Ossia si possono usare le **regioni di decisione**:

- $R_1 = \{r \in \mathbb{R} | r > 0\} = \mathbb{R}^+$
- $R_2 = \{r \in \mathbb{R} | r < 0\} = \mathbb{R}^-$



La probabilità di errore nel caso di segnali equiprobabili si scrive come

$$\mathbb{P}(e) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbb{P}(e|s_m) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \int_{\mathcal{R}_m^c} f_{R|S}(r|s_m) dr.$$

- La verosimiglianza nelle due ipotesi è

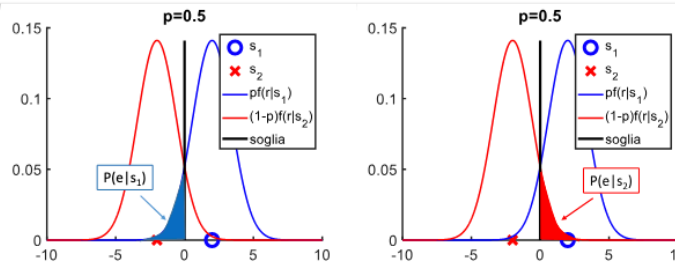
$$f_{r|s}(r|s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r-\sqrt{E_b})^2}{N_0}}; \quad f_{r|s}(r|s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r+\sqrt{E_b})^2}{N_0}}.$$

- Pertanto, la probabilità di errore nell'ipotesi  $s_1$  vale

$$\mathbb{P}(e|s_1) = \mathbb{P}(r < 0|s_1) = \mathbb{P}\left(\frac{r - \sqrt{E_b}}{\sqrt{N_0/2}} < \frac{0 - \sqrt{E_b}}{\sqrt{N_0/2}} \middle| s_1\right) = F_Z\left(-\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right),$$

in cui  $F_Z(z)$  indica la CDF di una v.a. Gaussiana standard e

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = F_Z(-t).$$



- Analogamente, per simmetria, la probabilità di errore nell'ipotesi  $s_2$  vale

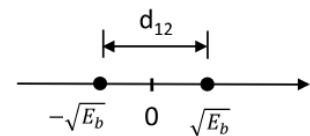
$$\mathbb{P}(e|s_2) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right).$$

- Pertanto la probabilità di errore vale

$$\mathbb{P}(e) = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right).$$

- Si noti che la distanza fra i due segnali vale  $d_{12} = 2\sqrt{E_b}$ .
- Un'espressione equivalente per  $\mathbb{P}(e)$  è perciò

$$\mathbb{P}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right).$$



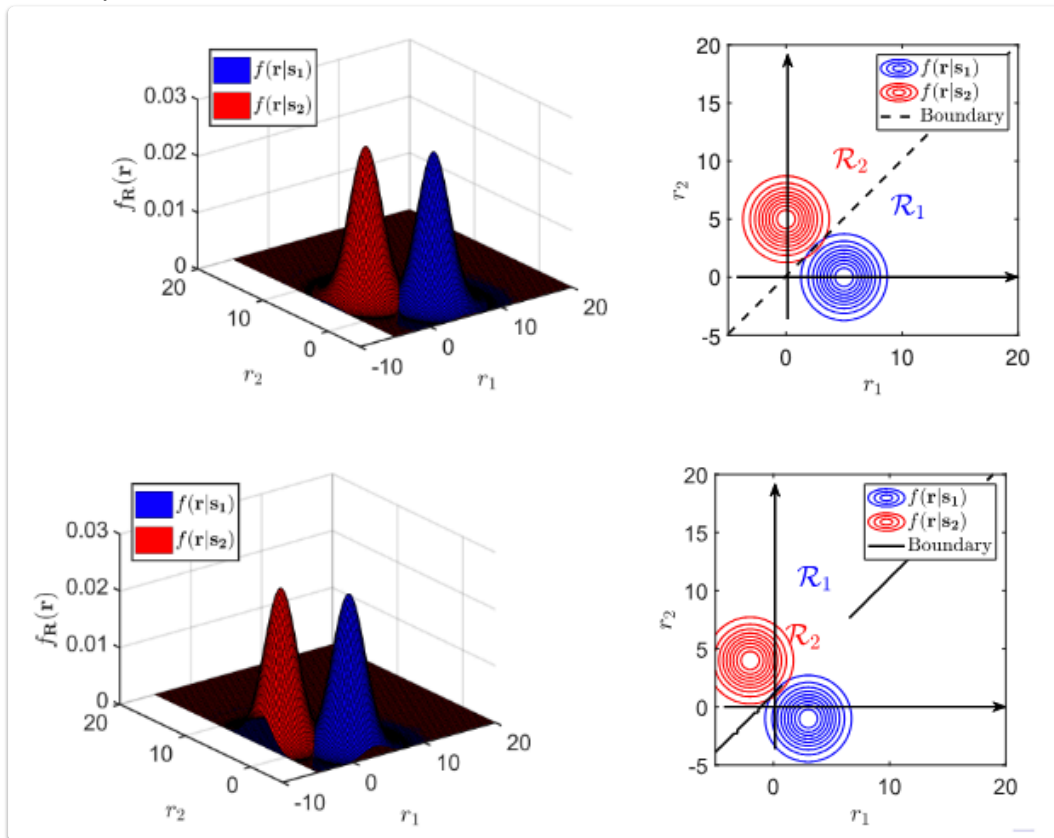
La distanza tra due segnali vale  $d_{12} = 2\sqrt{E_b}$  mentre, per simmetria, la probabilità di errore:

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right)$$

**L'espressione vale per una qualunque coppia di segnali equiprobabili!** Infatti il ricevitore si basa solo sul calcolo della distanza, per cui le regioni di decisioni sono sempre definite dall'asse del segmento fra  $s_1$  e  $s_2$



anche spostando o ruotando la costellazione e il rumore ha simmetria circolare.



#### 4.1.1 Probabilità di errore per coppie di segnali ortogonali

Si considerano 2 segnali equienergetici ed equiprobabili.

Per garantire l'ortogonalità basta normalizzare i segnali:

$$i(t) = \frac{s_1(t)}{\|s_1(t)\|}, \quad 2 = \frac{s_2(t)}{\|s_2(t)\|}$$

con rappresentazione vettoriale:

$$s_1 = (\sqrt{E_b}, 0) \quad s_2 = (0, \sqrt{E_b})$$

Il segnale ricevuto é quindi:

$$H_1 : r = [\sqrt{E_b} + n_1, n_2] \quad H_2 : r = [n_1, \sqrt{E_b} + n_2]$$

dove

$$n_1 = n_2 \sim N(0, \sigma_n^2) = N(0, N/2)$$

#### ● Il criterio ML equivale al criterio a minima distanza

$$\hat{s} = \underset{s_m \in \{s_1, s_2\}}{\operatorname{argmax}} [f_{R|S}(r|s_m)] = \underset{s_m \in \{s_1, s_2\}}{\operatorname{argmin}} [\|r - s_m\|]$$

ovvero  $\mathcal{R}_1 = \{r \in \mathbb{R}^2 | r_1 > r_2\}$ ,  $\mathcal{R}_2 = \{r \in \mathbb{R}^2 | r_1 < r_2\}$ .

Pertanto si possono utilizzare direttamente le regioni di decisione:

$$R_1 = \{\bar{r} \in \mathbb{R}^2 | r_1 > r_2\} \quad , \quad R_2 = \{\bar{r} \in \mathbb{R}^2 | r_1 < r_2\}$$



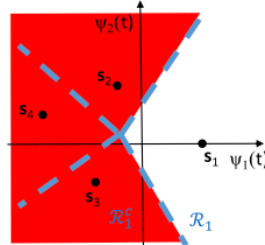
La probabilità di errore può essere definita in funzione della **distanza**:

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{b})$$

La trasmissione di segnali ortogonali richiede più energia (esattamente il doppio) per raggiungere la stessa probabilità di errore della trasmissione di segnali simmetrici:

$$\begin{cases} P(e) = Q(\sqrt{2b}) & \text{segnali simmetrici} \\ P(e) = Q(\sqrt{b}) & \text{segnali ortogonali} \end{cases}$$

## 4.2 Trasmissioni M-arie



Il decisore ML divide i segnali ricevuti in  $M$  regioni di decisione  $\{\mathcal{R}_m\}_{m=1,\dots,M}$ , composte dai vettori  $\mathbf{r}$  associati ad ognuno dei segnali trasmessi  $\{\mathbf{s}_m\}_{m=1,\dots,M}$

$$\mathcal{R}_m = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N | \mathbf{s} = \mathbf{s}_m\}, \quad m = 1, \dots, M.$$

- La probabilità di errore  $\mathbb{P}(e)$  è la probabilità che il vettore  $\mathbf{r}$  appartenga alla regione di decisione sbagliata e si può ottenere con la legge della probabilità totale.

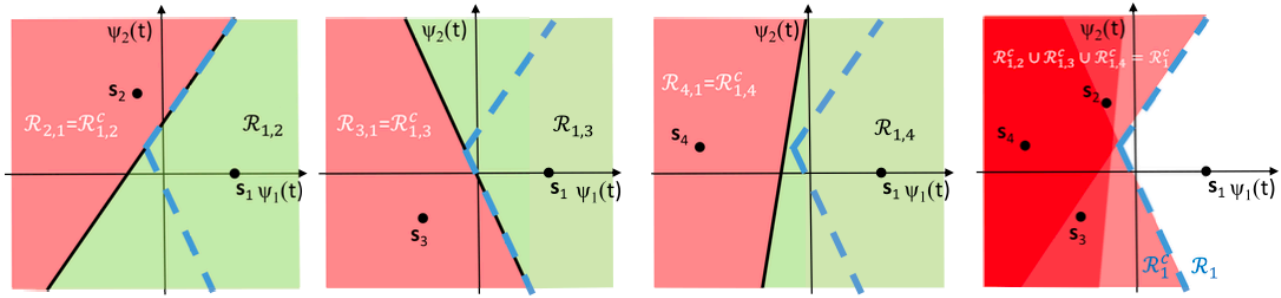
### ✍ Probabilità di errore

$$P(e) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P(e|s_m) = \frac{1}{M} P(r \in R_m^c | s_m) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \int_{R_m^c} f_{R|S}(r|s_m) dr$$

Il calcolo della probabilità di errore è generalmente complesso e pertanto spesso si approssima, andandone a calcolare l'upper-bound.

### 4.2.1 Union Bound

## Union Bound (cont.)



- Per calcolare ognuna delle  $\mathbb{P}(e|\mathbf{s}_m)$ , si definisca, per ogni coppia  $(m, k)$ , la regione di decisione binaria  $\mathcal{R}_{m,k}$ , come la regione di decisione corrispondenti ad  $\mathbf{s}_m$  in una trasmissione in cui sono presenti solo i segnali  $\mathbf{s}_m$  ed  $\mathbf{s}_k \neq \mathbf{s}_m$ .

- Naturalmente, vale

$$\mathcal{R}_{m,k}^c = \mathcal{R}_{k,m}.$$

- Con tale definizione, si verifica facilmente che

$$\mathcal{R}_m^c = \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M \mathcal{R}_{m,k}^c.$$

- Utilizzando la relazione  $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ , valida per qualunque coppia di eventi  $A$  e  $B$ , la probabilità di errore  $\mathbb{P}(e|\mathbf{s}_m) = \mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_m^c | \mathbf{s}_m)$  nell'ipotesi  $\mathbf{s}_m$  si può maggiorare con l'espressione

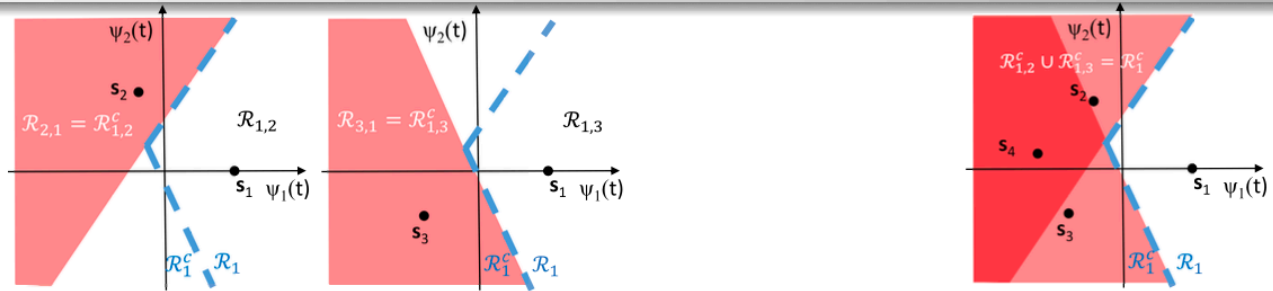
$$\mathbb{P}(e|\mathbf{s}_m) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M \{\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{m,k}^c\} | \mathbf{s}_m\right) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M \mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{m,k}^c | \mathbf{s}_m) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M Q\left(\sqrt{\frac{d_{m,k}^2}{2N_0}}\right).$$

- Conseguentemente, per la probabilità di errore complessiva  $\mathbb{P}(e)$  vale l'*upper-bound*

$$\mathbb{P}(e) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbb{P}(e|\mathbf{s}_m) \leq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M Q\left(\sqrt{\frac{d_{m,k}^2}{2N_0}}\right).$$

### 4.2.2 Tight Union Bound

## Tight Union Bound



In alcuni casi è possibile approssimare meglio la probabilità di errore.

- Si può rendere più stretto (*tight*) l'upper bound, facendo in modo da approssimare le regioni  $\mathcal{R}_m^c$  in modo meno ridondante, cioè trovando l'insieme  $\mathcal{I}_m$  di regioni di decisione binarie più piccolo tale che

$$\mathcal{R}_m^c = \bigcup_{k \in \mathcal{I}_m} \mathcal{R}_{m,k}^c.$$

- Ad esempio, nella figura è illustrata l'applicazione della tecnica dell'Union Bound al calcolo di  $\mathbb{P}(e|s_1)$  in una costellazione con quattro segnali, per la quale vale

$$\mathcal{R}_1^c = \mathcal{R}_{1,2}^c \cup \mathcal{R}_{1,3}^c \cup \mathcal{R}_{1,4}^c.$$

- È possibile costruire un upper-bound più tight usando solo i segnali  $s_2$  ed  $s_3$ , essendo

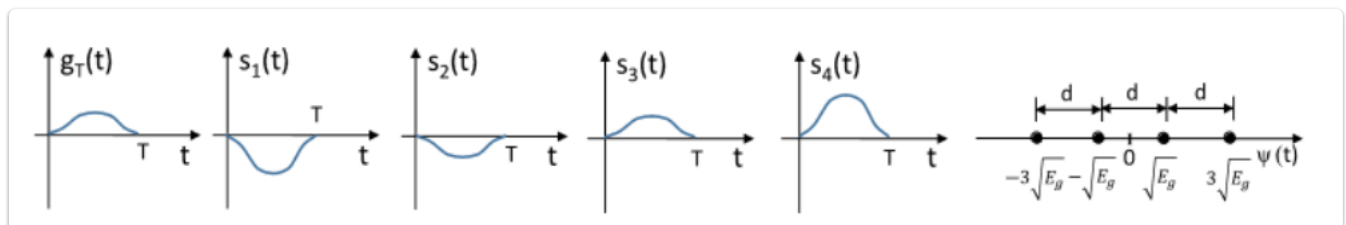
$$\mathcal{R}_1^c = \mathcal{R}_{1,2}^c \cup \mathcal{R}_{1,3}^c.$$

R. Restaino

AS - Prestazioni dei sistemi di trasmissione

15/34

### 4.2.3 Probabilità di errore PAM M-ario



Si vuole calcolare la probabilità di errore per una costellazione PAM equiprobabile in cui, i segnali utilizzati, equispaziati sono definiti a partire da una forma d'onda  $g_T(t)$  con energia  $E_g$ :

$$s_m(t) = A_m g_T(t), \quad m = 1, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T$$

- Ampiezza:  $A_m = (2m - 1 - M)$ ,  $n = 1, \dots, M$
- Energia Media:  $E_{av} = E_g \frac{M^2 - 1}{3}$
- Energia Media per Bit:  $E_{bav} = E_g \frac{M^2 - 1}{3 \log_2 M}$
- Criterio ML - minima distanza

I 2 segnali esterni della costellazione presentano caratteristiche diverse rispetto agli  $M - 2$  segnali interni. Per i **punti esterni** infatti, la probabilità di errore vale:

$$P(e|s_1) = P(r \in \mathcal{R}_1^c | s_1) = P(r \in \mathcal{R}_{1,2}^c | s_1) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{1,2}^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

Per i **punti interni** invece

$$P(e|s_1) = P(r \in \mathcal{R}_2^c | s_2) = P(r \in \mathcal{R}_{2,1}^c | s_2) + P(r \in \mathcal{R}_{2,3}^c | s_2) =$$

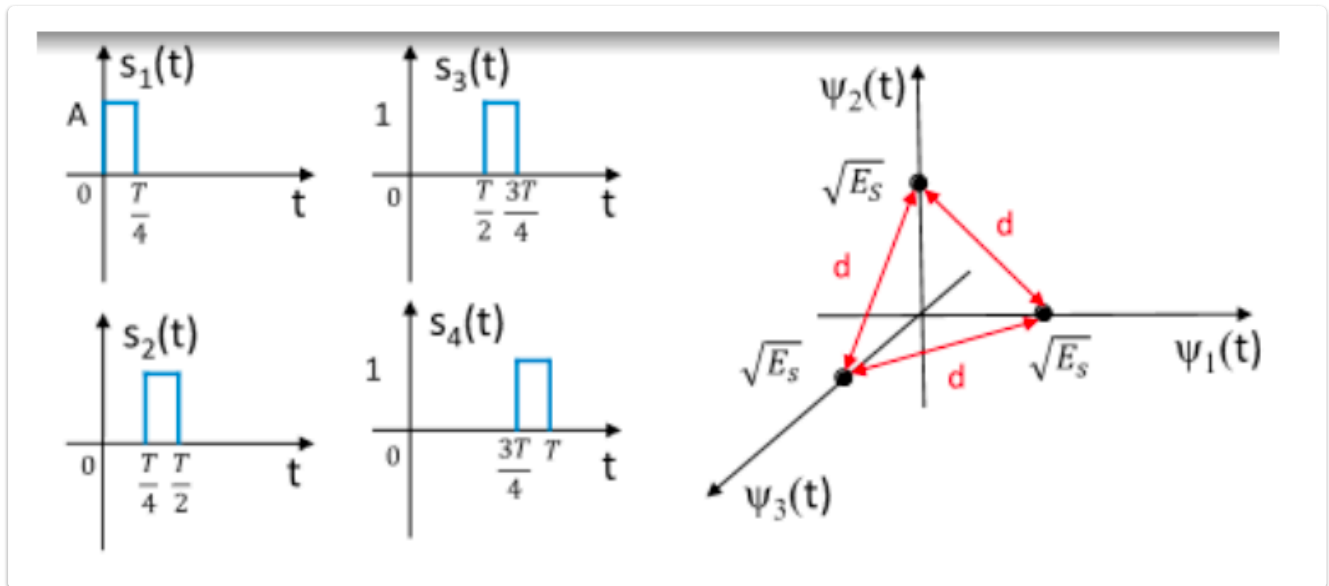
$$= Q\left(\sqrt{\frac{d_{1,2}^2}{2N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{d_{2,3}^2}{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{4E_g}{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

In definitiva, la **probabilità di errore** vale:

$$P(e) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P(e|\bar{s}_m) = \frac{1}{M} [2(P(e|s_1) + (M-2)P(e|s_2))] =$$

$$= \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} b}\right)$$

#### 4.2.4 Probabilità errore PPM M-ario



Si considera una modulazione PPM con segnali equiprobabili:

$$s_m(t) = A_{g_T}(T - (M-1)t/m), M = 1, \dots, m$$

Con energia  $E_s = A^2 E_g$  dove  $E_g$  è l'energia di  $g_T(t)$ . Le componenti valgono:

$$s_1 = (\sqrt{E_s}, 0, \dots, 0)$$

$$s_2 = (0, \sqrt{E_s}, \dots, 0)$$

...

$$s_m = (0, 0, \dots, \sqrt{E_s})$$

Con l'union bound, la probabilità di errore può essere maggiorata:

$$P(e) \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2NO}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{NO}}\right) < MQ\left(\sqrt{\frac{E_s}{NO}}\right)$$

Si ottiene l'importante risultato  $\frac{E_b}{NO} = b > 2 \ln 2 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} P(e) = 0$

### 4.3 Confronto tra modulazioni

Un altro parametro di confronto è l'**efficienza spettrale**  $= \frac{R_b}{W}$ .

- **PAM** - La larghezza di banda è dettata dall'impulso  $g_T(t)$ :

$$W_{PAM} \geq \frac{1}{2T} \implies \eta_{PAM} = \frac{R_b}{W_{PAM}} = \frac{k/T}{1/2T} = 2k$$

- **PPM** - Utilizzando la stessa forma d'onda del PAM, i segnali hanno durata  $M$  volte minore per cui, la banda sarà  $M$  volte maggiore:

$$W_{PPM} = \frac{M}{2T} \implies \eta_{PPM} = \frac{R_b}{W_{PPM}} = \frac{k/t}{M/2T} = \frac{2k}{M}$$

Il confronto tra modulazioni utilizza il piano di Shannon che riporta sulle ascisse il rapporto  $SNR/bit$   $\eta_b = \frac{E_b}{N_0}$  e sulle ordinate l'efficienza spettrale  $\eta = R_b/W$ .

Le modulazioni PAM e QAM e in generale tutte quelle in cui la dimensionalità non cresce con  $M$ , sono dette **efficienti in banda**, in quanto permettono di ottenere un'efficienza elevata aumentando  $M$ . D'altro canto, il rapporto rumore rumore/bit  $\eta_b$  necessario ad ottenere una determinata probabilità di errore, aumenta con  $M$ .

Modulazioni PPM e in generale tutte quelle ortogonali, sono dette efficienti in potenza in quanto permettono di ottenere una  $P(e)$  sempre più bassa al crescere di  $M$ . Di contro, l'efficienza spettrale diminuisce con  $M$ .