1 Introduzione ai sistemi

1.1 Sistemi e sistemi fisici

Un sistema fisico e' un insieme di oggetti interconnessi di cui si studia il comportamento complessivo.

- APERTO: possono avvenire scambi di energia, materia ed informazione con l'ambiente;
- CHIUSO: scambi di energia ed informazione con l'ambiente
- ISOLATO: scambi di informazioni con l'ambiente

Per lo studio dei sistemi fisici facciamo uso di **modelli matematici**, anche detti semplicemente "sistemi". Un **sistema** e' quindi un insieme di relazioni che legano fra loro le grandezze di interesse del sistema fisico. Il sistema e' quindi un modello astratto del sistema fisico, una sua approssimazione.

2 Sistemi dinamici a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), u(t), t), \qquad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = g(x(t)), u(t), t) \end{cases} \tag{1}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$: vettore dello stato
- $u \in \mathbb{R}^m$: vettore degli ingressi
- $y \in \mathbb{R}^p$: vettore delle uscite
- $t \in \mathbb{R}$: tempo
- t_0 : istante iniziale
- x_0 : vettore valori iniziali delle variabili di stato

2.1 Sistemi Lineari

Se f e g sono funzioni lineari, il sistema assume la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \tag{2}$$

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matrice dinamica
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: matrice degli ingressi
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$: matrice delle uscite
- $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$: matrice diretta ingresso-uscita
- t_0 : istante iniziale
- x_0 : vettore valori iniziali delle variabili di stato

Se il sistema è stazionario le matrici A,B,C,D sono costanti:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3}$$

Le soluzioni (risposta) del sistema sono date dalla formula di Lagrange:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{cases} \tag{4}$$

i cui membri identificano le **evoluzioni libere** (contributi dipendenti esclusivamente dello **stato iniziale**) e le **risposte forzate** (contributi dipendenti esclusivamente dall'**ingresso**):

$$x(t) = x_{el}(t) + x_f(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = y_{el} + y_f(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

La risposta di un sistema lineare si può quindi sempre vedere come la somma della sua evoluzione libera e della sua risposta forzata:

$$\begin{cases} x(t) = x_{el}(t) + x_f(t) \\ y(t) = y_{el}(t) + y_f(t) \end{cases} \tag{5}$$

2.2 Linearizzazione ed equilibrio

In natura non esistono modelli lineari. Per applicare gli strumenti dell'analisi matematica è pertanto necessario linearizzare i sistemi fisici al fine di ottenere un modello approssimato facilmente analizzabile. La linearizzazione consiste nello sviluppare in serie di potenze le funzioni non lineari.

Linearizzazione: descrivere il comportamento di un sistema fisico mediante un particolare sistema lineare approssimato.

Considerando il sistema non lineare stazionario:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), u(t), t), \qquad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = g(x(t)), u(t), t) \end{cases}$$

Supponiamo:

- f e g sviluppabili in serie di potenze
- ingresso $\tilde{u}(t)$ e stato iniziale $\tilde{x}_0 \implies$ risposta nello stato $\tilde{x}(t)$

Se si introduce una perturbazione $\delta u(t), \delta x(t)$, il sistema avrà una nuova risposta che può essere vista come la perturbazione della risposta precedente: $\tilde{y}(t) + \delta y(t)$. Sostanzialmente poniamo:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t) \ , \ u(t) = \delta u(t) + \delta u(t) \ , \ y(t) = \tilde{y}(t) + \delta y(t)$$

Ottenendo il nuovo sistema su cui è stata introdotta la perturbazione:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) + \delta\dot{x}(t) = f(\tilde{x}(t) + \delta x(t), \tilde{u}(t) + \delta u(t)) \\ \tilde{y}(t) + \delta y(t) = g(\tilde{x}(t) + \delta x(t), \tilde{u}(t) + \delta u(t)) \end{cases}$$

Si sviluppano in serie di potenze g ed f:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) + \delta\dot{x}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) + [\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))]\delta x(t) + [\frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))]\delta u(t) + (termini\ ord.\ sup.) \\ \tilde{y}(t) + \delta y(t) = g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) + [\frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))]\delta x(t) + [\frac{\partial g}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))]\delta u(t) + (termini\ ord.\ sup.) \end{cases}$$

Da cui si ottiene il modello linearizzato:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = [\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))]\delta x(t) + [\frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))]\delta u(t) \\ \delta y(t) = [\frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))]\delta x(t) + [\frac{\partial g}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))]\delta u(t) \end{cases}$$

Ci interessano particolari soluzioni del sistema: stati ed uscite di equilibrio:

$$\dot{x}(t) = 0 \implies \begin{cases} x_e = f(x_e, \bar{u}) = 0 \\ y_e = g(x_e, \tilde{u}) \end{cases}$$

2.2.1 Algoritmo di linearizzazione

1. **Punti di equilibrio:** $\dot{x_k} = 0$
2. **Modello linearizzato generico:**

$$\begin{cases} \delta \dot{x(t)} = A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{cases}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u} \qquad C = \frac{\partial g}{\partial x} \qquad D = \frac{\partial g}{\partial u}$$

3. **Linearizzazione intorno all'equilibrio:** Sostituire x_e al modello linearizzato trovato

2.3 Stabilità

Consideriamo un sistema dinamico stazionario con :

- $\tilde{x}(t)$: risposta nello stato
- $\tilde{x}_0$: stato iniziale
- $\tilde{u}(t)$: ingresso

Se lo stato iniziale subisce una perturbazione, tale perturbazione si ripercuote anche sulla risposta nello stato del sistema: $\tilde{x}_0 + \delta x_0 \implies \tilde{x}(t) + \delta x(t)$

- $\lim_{|\delta x_0 \to 0|} |\delta x(t)| = 0, \forall t \geq 0,$ **Risposta stabile** (perturbazione trascurabile)
- $\begin{cases} \text{è stabile} \\ \lim_{t\to\infty} |\delta x(t_0)| = 0 \end{cases}$ **Risposta asintoticamente stabile** (perturbazione recuperata)

La stabilità di un sistema indica la sua capacità di mantenere un'uscita limitata per ogni ingresso limitato.

2.3.1 Criteri di stabilità

$$\Big(\text{sistema stabile }\Big) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathscr{R}\{\lambda_i\} < 0 \\ \mathscr{R}\{\lambda_i\} = 0 \text{ con } k = 1 \text{ (se presenti)} \end{pmatrix}$$

$$\Big(\text{sistema asintoticamente stabile }\Big) \longleftrightarrow \Big(\mathscr{R}\{\lambda_i\} < 0\Big)$$

λ_i autovalori di A.

2.4 Trasformata di Laplace

$$f(t), t \in [0; \infty] \implies F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \mathscr{L}[f(t)]$$

Usata per la trasformazione di equazioni differenziali in equazioni algebriche.

2.4.1 Trasformate Notevoli

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}(f(t))$	
$\delta(t)$	1	Impulso di Dirac
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	Gradino
$t1(t)$	$\frac{1}{s^2}$	Rampa Lineare
$e^{\alpha t}1(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$	Esponenziale
$\sin(\omega t)1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	Seno
$\cos(\omega t)1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	Coseno

2.4.2 Proprieta' della trasformata

1. **Linearita'**: $\mathscr{L}[\alpha g(t) + \beta h(t)] = \alpha G(s) + \beta H(s)$
2. **Derivazione nel tempo** : $\mathscr{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$
3. **Derivazione nel dominio della s** : $\mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
4. **Traslazione temporale** : $\mathscr{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}F(s)$
5. **Traslazione nel dominio della s** : $\mathscr{L}[e^{\alpha t}f(t)] = F(s-a)$
6. **Integrazione nel dominio del tempo** : $\mathscr{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s}$
7. **Prodotto di convoluzione** : $\mathscr{L}[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau] = \mathscr{L}[\int_0^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau] = G(s)H(s)$
8. **Teorema del valore iniziale**: $f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
9. **Teorema del valore finale** : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

2.4.3 Antitrasformata funzioni razionali fratte

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\text{polinomio grado } m}{\text{polinomio grado } n} = \frac{b_m s^m + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0}$$

Conoscendo i poli p_i della funzione (radici denominatore) e' possibile esprimere la funzione come somma di fratti semplici del tipo $\frac{R_{i,k}}{(s-p_i)^k}$ dove $R_{i,k}$ sono i residui.

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_{i,k}}{(s-p_i)^k}$$

$$R_{i,k} = lim_{s\to p_i} \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}[(s-p_i)^n F(s)]$$

2.4.3.1 Scomposizione in fratti semplici (residui)

$$Res(p_i) = \lim_{s\to p_i} \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}[(s-p_i)^n F(s)]$$

Esempio:

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+3)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+3)^3} + \frac{C}{(s+3)^2} + \frac{D}{s+3}$$

$$p_i = \{0\ (k=1), -3\ (k=3)\}$$

$$A = Res(0) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+2}{(s+3)^3} = \frac{2}{27}$$

$$B = Res(-3)_{k=1} = \lim_{s\to -3} (s+3)^3 F(s) = \lim_{s\to -3} \frac{s+2}{s} = \frac{1}{3}$$

$$C = Res(-3)_{k=2} = \lim_{s\to -3} \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}(1+\frac{2}{s}) = \lim_{s\to -3} -\frac{2}{s^2} = -\frac{2}{9}$$

$$D = Res(-3)_{k=3} = \lim_{s\to -3} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}(1+\frac{2}{s}) = \lim_{s\to -3} \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(-\frac{2}{s^2}) = -\frac{2}{27}$$

2.5 Risposta dei sistemi lineari nel dominio della frequenza

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{cases} \implies \mathscr{L} \begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) + [C(sI-A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases}$$

Da cui le soluzioni formali rappresentate sempre come somma di un movimento in evoluzione libera ed uno forzato:

$$\begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(SI-A)^{-1}x(0) + [C(sI-A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} X_{el}(s) = (sI-A)^{-1}x(0) \\ Y_{el}(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) \\ X_f(s) = (sI-A)^{-1}BU(s) \\ Y_f(s) = [C(sI-A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases}$$

	dominio del tempo	dominio simbolico
Sistema	$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$	$\begin{cases} sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$
Risposta	$\begin{cases} x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{cases}$	$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases}$
X_{el}	$e^{At}x(0)$	$(sI - A)^{-1}x(0)$
y_{el}	$Ce^{At}x(0)$	$C(sI - A)^{-1}x(0)$
X_f	$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$	$(sI - A)^{-1}x(0)$
Y_f	$C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$	$[C(sI - A)^{-1}B + D]$

2.6 Confronto dominio temporale e dominio simbolico

2.7 Funzione (matrice) di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \qquad \textbf{Matrice di trasferimento ingresso - uscita} \tag{7}$$

La **funzione di trasferimento** caratterizza il comportamento del sistema nel dominio della frequenza, mettendo in relazione l'ingresso e l'uscita.

$$G_x(s) = (sI - A)^{-1}B \qquad \textbf{Matrice di trasferimento ingresso-stato} \tag{8}$$

$$\begin{cases} X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) = G_x(s)U(s) \\ Y_f(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) = G(s)U(s) \end{cases} \tag{9}$$

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)} \qquad \text{Risposta forzata}$$

2.7.1 Teorema del valor finale

Il teorema del valor finale consente di calcolare immediatamente l'**uscita** o lo **stato** di un sistema **asintoticamente stabile**.

$$y(t) = G(0)\bar{u} \qquad , \qquad x(t) = G_x(0)\bar{u}$$

2.7.2 Realizzazione funzione di trasferimento (rappresentazioni ISU)

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{s^v + a_{v-1}s^{v-1} + ... + a_1 s + a_0}$$

Rappresentazione ISU (**forma canonica di controllo**):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{v-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_v & b_1 - a_1 b_v & b_2 - a_2 b_v \cdots b_{v-1} - a_{v-1}b_v \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_v \end{bmatrix} u(t)$$

Per la realizzazione si puo' procedere in 2 modi:

1. Si trova la funzione di trasferimento complessiva del sistema e poi si passa alla realizzazione. Gli stati non possono essere associati ai singoli sottosistemi;

2. Si realizzano le rappresentazioni ISU dei singoli sottosistemi e successivamente si mettono insieme le equazioni risultanti utilizzando le equazioni di congruenza (si osserva lo schema a blocchi e si vede come sono legati ingressi, stati ed uscite dei vari blocchi)r. Gli stati sono associabili ai sottosistemi.

2.7.3 Schemi a blocchi

- Serie: $G(s) = G_1(s) * G_2(s)$
- Parallelo: $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$
- Retroazione negativa: $G(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)*G_2(s)}$

La serie o il parallelo di **sistemi asintoticamente stabili**, restituisce sistemi che sono ancora asintoticamente stabili. Con la retroazione negativa invece, sistemi asintoticamente stabili possono realizzare un sistema instabile.

2.8 Rappresentazione grafica della funzione di trasferimento

2.8.1 Teorema della risposta armonica

$$\begin{pmatrix}\text{sistema lineare stazionario}\\ \text{asintoticamente stabile}\\ u(t) = U\sin(\omega t + \phi)\end{pmatrix} \implies \big(y(t) = |G(j\omega)|U\sin(\omega t + \phi + \angle G(j\omega)\big)$$

Il **teorema della risposta armonica** permette di calcolare l'uscita quando in ingresso e' presente una funzione sinusoidale. La sinusoide in uscita ha la stessa pulsazione ma ampiezza e fase diverse della sinusoide in ingresso.

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\Im^2 + \Re^2}$$

$$\angle Gj\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \Re = 0, \Im > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \Re = 0, \Im < 0 \\ \arctan(\frac{\Im}{\Re}) & \Re > 0, b \text{ qualsiasi} \\ \arctan(\frac{\Im}{\Re}) + \pi & \Re < 0, b \geq 0 \\ \arctan(\frac{\Im}{\Re}) - \pi & \Re < 0, b < 0 \end{cases}$$

I **diagrammi di Bode** sono una rappresentazione grafica della funzione di trasferimento $G(j\omega)$ di un sistema. Sono composti da 2 grafici che rappresentano rispettivamente il modulo e la fase. Sulle ordinate si usa una scala logaritmica (decibel) $x|_{dB} = 20\log_{10}(x),\ x > 0$, sulle ascisse una scala lineare.

$$G(s)|_{s=j\omega} = \frac{k}{s^g}\frac{\prod_i(1+\tau_i^z s) * \prod_i(1+\frac{2\zeta_i^z}{\omega_{n,i}^z}s + \frac{1}{\omega^z_{n,i}{}^2}s^2)}{\prod_j(1+\tau_j^p s) * \prod_j(1+\frac{2\zeta_j^z}{\omega_{n,j}^p}s + \frac{1}{\omega^p_{n,j}{}^2}s^2)} \tag{10}$$

Nella forma alternativa per Bode si indentificano 3 termini:

1. **Monomio**

$$\frac{k}{s^g}\Big|_{s=j\omega} = \frac{k}{(j\omega)^g}$$

- **Modulo**: $||_{dB} = 20\log_{10}|k| - 20\log_{10}(\omega)$
- **Fase**: $\angle = \angle k - g\frac{\pi}{2}$ con: $\angle k = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ -\pi & k < 0 \end{cases}$

2. **Binomio**

$$(1 + \tau s)\Big|_{s=j\omega} = (1 + \tau j\omega)$$

- **Modulo:** $||_{dB} = 20\log_{10}(\sqrt{1+\omega^2\tau^2}) = 10\log_{10}(1+\omega^2+\tau^2)$
  (a) $\omega|\tau| \ll 1 \longleftrightarrow \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \implies ||_{dB} = 0$
  (b) $\omega|\tau| \gg 1 \longleftrightarrow \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \implies ||_{dB} = |monomio|$
- **Fase:** $\angle = \arctan(\omega\tau)$
  (a) 0 fino ad una decade prima di ω_R pulsazione di rottura
  (b) $\frac{\pi}{2}$ per $\tau > 0$
  (c) $-\frac{\pi}{2}$ per $\tau < 0$

3. **Trinomio**

- **Modulo:** $||_{dB} = \begin{cases} (1 + (\frac{s}{\omega_n})^2 & \zeta = 1 \\ (1 + (\frac{s}{\omega_n})^{2n} & trinomio^n \end{cases}$
- **Fase:** $\angle = (1 + sign(\zeta)\frac{s}{\omega_n})^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \zeta > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \zeta < 0 \end{cases}$

2.8.1.1 Algoritmo di tracciamento

1. Scrivere in forma di **Bode alternativa** (si mettono in evidenza i termini noti);
$$G(s) = \frac{k}{s^g} \frac{\prod_i (1+\tau_i^z s) * \prod_i (1+\frac{2\zeta_i^z}{\omega_{n,i}^z} s + \frac{1}{\omega_{n,i^2}^z} s^2)}{\prod_j (1+\tau_j^p s) * \prod_j (1+\frac{2\zeta_j^z}{\omega_{n,j}^p} s + \frac{1}{\omega_{n,j^2}^p} s^2)}$$
2. Determinare il **guadagno statico** (modulo iniziale)
$$g \neq 0 \implies k = \text{ numeratore termine monomio in forma di Bode}$$
$$g = 0 \implies k = \lim_{s\to 0} G(s) \qquad \implies \qquad ||_{dB} = 20 * \log_{10}(k)$$
3. Determinare **intercetta**
$$\omega_I = \sqrt[g]{k}$$
4. Determinare **fase iniziale**
$$\angle = \angle k - \frac{\pi}{2} g, \qquad \angle k = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ -\pi & k < 0 \end{cases}$$
5. Determinare **pulsazioni di interesse** (zeri e poli) di G(s) in modulo e determinare un range di pulsazioni (multiple di 10) all'interno del quale esse rientrano considerando uno scarto di 10 (sostanzialmente si considerano il polo minore e quello maggiore in modulo e lo si divide e successivamente moltiplica per 10. Si sceglie un range (multipli di 10) che comprende questi valori).
6. Disegnare assi semilogaritmi e posizionare poli e zeri indicandone il comportamento con una freccia:
   - **Modulo** $||_{dB|}$: Si posiziona una freccia nel punto di rottura:
     - Zero z_i: $\uparrow$
     - Polo p_i: $\downarrow$
   - **Fase** $\angle$: Si posiziona una freccia 1 decade prima del punto di rottura ed una opposta 1 decade dopo
     - Zero con parte reale positiva: $\downarrow$
     - Zero con parte reale negativa: $\uparrow$
     - Polo con parte reale positiva: $\uparrow$
     - Polo con parte reale negativa: $\downarrow$

2.8.1.2 Effetto di un ritardo temporale

Se e' presente un ritardo temporale Δ, allora: $\tilde{G(j\omega)} = G(j\omega)e^{-j\omega\Delta}$. Il ritardo temporale puo' essere facilmente implementato direttamente nel diagramma di Bode:

- Non altera il modulo dato che $|e^{-j\omega\Delta}| = 1$
- Modifica solo la fase, aggiungendo un ritardo pari a $-\omega\Delta$ rad

2.8.1.3 Parametri caratteristici

I diagrammi di Bode restituiscono moltissime informazioni reperibili direttamente dal grafico:

- **Istante di massima sovraelongazione** t_{MAX}: istante in cui $y = y_{MAX}$;
- **Tempo di salita** t_s: tempo necessario affinchè l'uscita passi per la prima volta da 10% al 90% del valore finale;
- **Tempo all'emivalore** t_e: primo istante in cui $y = 0.5y_\infty$ (50% del regime)
- **Tempo di assestamento** t_{as} : tempo necessario affincheè
- **Sovraelongazione massima percentuale**: $s(\%) = 100\frac{y_{MAX}-y_\infty}{y_\infty}$

2.8.2 Diagrammi (polari) di Nyquist

Rappresentazione alternativa della $G(j\omega)$ sul piano complesso al variare della pulsazione ω da $-\infty$ a $+\infty$. Il diagramma polare e' simmetrico rispetto all'asse reale per cui, solitamente, si cerca la curva per $\omega \in [0, +\infty]$ e successivamente si ricostruisce la parte da $-\infty$ a 0 per simmetria.

La rappresentazione della funzione di trasferimento puo' essere effettuata sul piano complesso in quanto la stessa $G(s)$ e' una funzione di variabile complessa $s = j\omega$, per cui: $G(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$.

- $|G(j\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\angle G(j\omega = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Altrimenti, modulo e fase possono essere ricavati direttamente dai diagrammi di Bode.

2.8.2.1 Algoritmo di tracciamento

1. tracciare diagramma di Bode;
2. leggere modulo e fase della $G(j\omega)$ per $\omega \to 0^+$ e rappresentare il risultato sul piano complesso (nel caso di polo nell'origine si ha $||_{dB} \to \infty$ pertanto si individua solo una direzione, il quadrante di partenza);
   - $\lim_{\omega \to 0^+} |G(j\omega)|$
   - $\lim_{\omega \to 0^+} \angle G(j\omega)$
3. leggere modulo e fase della $G(j\omega)$ per $\omega \to +\infty$
   - $\lim_{\omega \to +\infty} |G(j\omega)|$
   - $\lim_{\omega \to +\infty} \angle G(j\omega)$
4. tracciare eventuali punti esatti noti da Bode
5. tracciare il diagramma polare facendolo passare per i punti noti e rispettando modulo e fase individuati nel diagramma di Bode;
6. eventualmente estendere il diagramma al range $\omega \in [-\infty; +\infty]$ ribaltando il diagramma per $\omega \in [0; +\infty]$ rispetto all'asse reale.
7. Se $g > 1$ completare il grafico (dopo aver esteso il diagramma a $\omega \in [-\infty; +\infty]$), percorrendo $\frac{1}{4}$ di arco di circonferenza in senso antiorario per ogni g (es. $g = 2$, si percorrono in senso antiorario $\frac{2}{4}$ di arco di circonferenza - ossia si percorrono 2 quadranti -). Partire quindi dall'inizio del grafico per 0^+ e disegnare l'arco di circonferenza

.

3 Sistemi dinamici a tempo discreto

Nonostante i fenomeni fisici si svolgano nel tempo continuo, talvolta e' di interesse valutarli solamente in un intervallo di tempo finito. $t = kT_\delta$ (dove T_δ 'e detto **tempo di campionamento**) rappresenta la **relazione** tra tempo continuo t e tempo discreto k.

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)), u(k), k) & x(k_0) = x_0 \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases} \tag{11}$$

Se f e g sono **funzioni lineari**, il sistema assume la forma:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) & x(k_0) = x_0 \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases} \tag{12}$$

Se il sistema e' **stazionario** le matrici A, B, C, D sono costanti:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & x(k_0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \tag{13}$$

Per i sistemi **lineari**, dato che vale il **principio di sovrapposizione**, la risposta puo' essere scomposta:

$$x(k) = x_{el}(k) + x_f(k) = A^k x(0) + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} Bu(h)$$

$$y(k) = y_{el}(k) + y_f(k) = CA^k x(0) + C\sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} Bu(h) + Du(k)$$

3.1 Trasformata Zeta

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k} \tag{14}$$

3.1.1 Trasformate notevoli

$f(k)$	$F(z) = \mathcal{Z}(f(k))$	
$\delta(k)$	1	Impulso discreto
$1(k)$	$\frac{z}{z-1}$	Gradino discreto
$k1(k)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	Rampa Lineare discreta
$a^k 1(k)$	$\frac{z}{z-a}$	Esponenziale discreto
$\sin(\theta k)1(k)$	$\frac{z \sin\theta}{z^2 - 2\cos(\theta)z + 1}$	Seno discreto
$\cos(\theta k)1(k)$	$\frac{z[z-\cos(\theta)]}{z^2 - 2\cos(\theta)z+1}$	Coseno discreto

3.1.2 Proprieta' della trasformata

1. **Linearita':** $\mathcal{Z}[\alpha g(k) + \beta h(k) = \alpha G(z) + \beta H(z)$
2. **Anticipo:** $\mathcal{Z}[f(k+1)] = zF(z) - zf(0)$
3. **Ritardo :** $\mathcal{Z}[f(k-1)] = \frac{F(z)}{z}$
4. **Derivazione nel dominio della** z**:** $\mathcal{Z}[kf(k)] = -z\frac{dF(z)}{dz}$
5. **Moltiplicazione per esponenziale discreto :** $\mathcal{Z}[a^k f(k)] = F\left(\frac{z}{a}\right)$
6. **Prodotto di convoluzione :** $\mathcal{Z}[\sum_{h=-\infty}^{+\infty} g(h)h(k-h)] = \mathcal{Z}[\sum_{h=0}^{k} g(h)h(k-h)] = G(z)H(z)$
7. **Teorema del valore iniziale :** $f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$
8. **Prodotto di convoluzione :** $\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$

3.2 Stabilita'

- $\tilde{x}(k)$: risposta nello stato;
- $\tilde{x}_0$ stato iniziale;
- $\tilde{u}(k)$ ingresso

Se lo stato iniziale subisce una perturbazione, tale perturbazione si ripercuote anche sulla risposta nello stato: $\tilde{x}_0 + \delta x_0 \implies \tilde{x}(k) + \delta x(k)$:

- $\lim_{|\delta x_0| \to 0} \left|\delta x(k)\right| = 0, \qquad \forall k \geq 0$ **Risposta stabile** (perturbazione "trascurabile")
- $\lim_{k \to \infty} \left|\delta x(k)\right| = 0$ **Risposta asintoticamente stabile** (perturbazione recuperata)

Per determinare la stabilita' di un sistema basta studiare l'**evoluzione libera**.

3.2.1 Criterio di asintotica stabilita'

$$\big(\text{sistema asintoticamente stabile }\big) \longleftrightarrow \big(|\lambda_i| < 1\big)$$

λ_i autovalori di A.

3.3 Risposta nel dominio $\mathscr{Z}$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad x(k_0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \implies_{\mathscr{Z}} \begin{cases} zX(z) = zx(0) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

Da cui le soluzioni formali rappresentate sempre come somma di un movimento in evoluzione libera ed uno forzato:

$$\begin{cases} X(z) = z(zI - A)^{-1}x(0) + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = zC(zI - A)^{-1}x(0) + [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} X_{el}(z) = z(zI - A)^{-1}x(0) \\ X_f(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y_{el}(z) = zC(zI - A)^{-1}x(0) \\ Y_f(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) \end{cases}$$

3.4 Funzione di trasferimento

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \qquad \textbf{Funzione di trasferimento ingresso - uscita}$$

$$G_x(z) = (zI - A)^{-1}B \qquad \textbf{Funzione di trasferimento ingresso - stato}$$

$$\begin{cases} Y_f(s) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(s) = G(z)U(z) \\ X_f(s) = (zI - A)^{-1}BU(s) = G_x(z)U(z) \end{cases} \tag{16}$$

3.5 Discretizzazione

Come passare da un modello tempo continuo ad uno tempo discreto con un'approssimazione accettabile? 2 approcci possibili:

- Sistemi a dati campionati
- Discretizzazione di Eulero

3.5.1 Sistemi a dati campionati

Si tratta della rappresentazione (modello approssimato) a tempo discreto di un sistema a tempo continuo. La rappresentazione e' detta **sistema a dati campionari** e si tratta di un sistema a tempo discreto con ingresso $u(k)$ ed uscita $y(k)$, ottenuto mediante il campionamento (con tempo di campionamento T_δ) di un sistema tempo continuo. L'approssimazione e' dovuta nel considerare l'ingresso come campionato e tenuto costante a tratti.

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(k+1) = \big[e^{AT_\delta}\big]x(k) + \big[\int_{kT_\delta}^{(k+1)T_\delta} e^{A(T_\delta - \tau)}d\tau B\big]u(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

3.5.2 Discretizzazione di Eulero

Il modello tempo discreto si ottiene sostituendo al modello dinamico, la derivata temporale con il rapporto incrementale stesso:

$$\begin{cases} \frac{x(k+1)-x(k)}{T_\delta} = Ax(k) + bu(k) \\ y(k) = c^T x(k) + du(k) \end{cases}$$

L'approssimazione e' accettabile per valori di T_δ molto piccoli.

4 Controllo

4.1 Problema e scopo del controllo

Dei sistemi distinguiamo le seguenti grandezze:

- Ingressi (causa): azione esercitata dal sistema fisico sull'ambiente
- Uscite (effetto): azione esercitata dall'ambiente sul sistema fisico
- Stato

Le quali possono essere:

- Manipolabili: si puo' fissare l'andamento
- Disturbi: non si puo' fissare l'andamento

Scopo: determinare le grandezze manipolabili in modo che le grandezze di interesse assumano un andamento il piu' vicino possibile ad un andamento di riferimento. Si cerca sostanzialmente di imporre un "funzionamento desiderato" al sistema, facendo assumere determinati valori alle variabili manipolabili.
Piu' precisamente, con **controllo**, si intende la determinazione di un determinato ingresso $u(t)$, al fine da produrre un'uscita $y_d(t)$ assegnata: si determina l'ingresso $u(t)$ capace di far tendere l'uscita verso l'andamento desiderato $y(t) \to y_d(t)$.
Lo scopo di determinare l'ingresso corretto e' affidato al **controllore**. Sulla base del riferimento e della legge di controllo utilizzata, il controllore genera un'uscita presa in ingresso dal processo che si vuole controllare.
Problemi:

- Andamento dei disturbi difficilmente misurabile
- Il modello (sistema) comprende sempre intrinsecamente un certo grado di incertezza

4.2 Controllo in retroazione (controllo a ciclo chiuso)

Il controllo viene effettuato in **retroazione**: il controllore deve essere informato del valore assunto dall'uscita del sistema controllato. L'uscita del sistema e' riportata indietro per influenzare l'ingresso, in questo modo il controllore opera conoscendo sia **l'uscita desiderata** che l'**uscita effettiva**.
Il funzionamento e' basato sul calcolo dell'**errore** e, ossia quanto dista l'uscita effettiva da quella desiderata... sulla base dell'errore, il controllore calcola l'uscita. Si definiscono le seguenti funzioni di trasferimento:

- catena di andata: $G(s) = C(s)P(s)$
- anello: $F(s) = C(s)P(s)H(s) = G(s)H(s)$
- ciclo chiuso: $W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1+F(s)}$
- rispetto a disturbo d: $W_d(s) = \frac{P(s)}{1+F(s)} = \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)H(S)}$
- rispetto al rumore n: $W_n(s) = -\frac{G(s)}{1+F(s)} = -W(s)$

4.2.1 Specifiche di un sistema di controllo

Le **specifiche di controllo** sono le condizioni che il sistema di controllo deve soddisfare e solitamente sono legate all'asintotica stabilita' e all'errore sull'uscita.

Errore a regime

Poli in $G(s)$	0	1	2	3
$1(t)$	$\frac{Rk_d^2}{K_g+K_d}$	0	0	0
$t1(t)$	∞	$\frac{RK_d^2}{K_g}$	0	0
$t^2 1(t)$	∞	∞	$\frac{RK_d^2}{K_g}$	0

Errore a disturbo

Poli in $C(s)$	0	1	2
$1(t)$	$-\frac{D}{K_c}$	0	0
$t1(t)$	∞	$\frac{-DK_d}{K_c}$	0

Considerando:

- $H = \frac{1}{K_d}$
- $K_g = K_c * K_p$
- $K_d = \frac{|y(t)|}{|r(t)|}$

4.2.2 Stabilita' a ciclo chiuso

Il controllore deve sempre garantire che il sistema a ciclo chiuso sia **asintoticamente stabile**.

4.2.2.1 Criteri di stabilita'

- **Criterio di Nyquist**
  1. Tracciare il diagramma polare della $F(j\omega)$ da $-\infty$ a $+\infty$
  2. Contare quanti giri completi attorno al punto $(-1, 0)$, il diagramma compie (+ in senso antiorario) per w da $-\infty$ a $+\infty$.
  3. $W(s)$ e' stabile se il numero dei giri e' uguale al numero dei poli a parte reale positiva della $F(s)$. Se si passa per il punto critico $(-1, 0)$, il sistema e' instabile.
- **Criterio di Bode**
  - $F(s)$ priva di poli a parte reale +;
  - $K_B > 0$ (guadagno positivo);
  - il diagramma dei moduli interseca l'ascissa 1 sola volta

  $W(s)$ asintoticamente stabile $\Longleftrightarrow$ per $|F(j\omega)| = 1$ $(0dB)$, $\angle F(j\omega) > -\pi$

Oltre a determinare la stabilita' a ciclo chiuso, i criteri di Nyquist e Bode indicano come procedere per la progettazione del controllore.

4.2.2.2 Criteri di stabilita' robusta

L'asintotica stabilita' deve essere garantita anche in presenza di variazioni del processo da controllare. Si introducono:

- **Margine di ampiezza**
  $m_a = \frac{1}{|F(j\omega_\pi)|} = -|F(j\omega_\pi)|_{dB}$
  ω_π: puls. per cui $\angle F(j\omega) = -\pi$
  Sul diagramma di Bode rappresenta la distanza del modulo $|F(j\omega_\pi)|$ da $0dB$
- **Margine di fase**
  $m_\phi = \pi + \angle F(j\omega_c)$
  ω_c : puls. (crossover) per cui $|F(j\omega)| = 1 = 0dB$
  Sul diagramma di Bode rappresenta la distanza della fase $\angle F(j\omega_c)$ da $-\pi$.

Per l'asintotica stabilita' il **margine di fase** e quello di **ampiezza** devono essere positivi.

4.3 Controllo digitale

Un controllore realizzato tramite un calcolatore elettronico e' detto **controllore digitale**. Lavora a **tempo discreto**, mentre il processo da controllare (fisico) e' un sistema a **tempo continuo**... e' pertanto necessario un meccanismo di conversione.
Per la sua **progettazione** si realizza prima il controllore analogico, e successivamente si converte la $C(s)$ nella corrispettiva funzione di trasferimento a tempo discreto $C(z)$, tenendo conto degli effetti delle **interfacce**. In condizioni ottimali, tale effetto e' riconducibile alla presenza nell'anello di un ritardo pari alla meta' del tempo di campionamento:

$$P(s)e^{-s\frac{T_\delta}{2}}$$

Dove, per il **teorema del campionamento**, l'intervallo di campionamento T_δ (e quindi la **pulsazione di campionamento** $\omega_\delta = 2\pi f_\delta = 2\pi \frac{1}{T_\delta}$) deve rispettare la condizione:

$$\omega_\delta > 2\omega_c$$

4.3.1 Controllori equivalenti, conversione analogico-digitale della $C(s)$

Relazione Laplace-Zeta, non applicabile in quanto produrrebbe $C(z)$ non razionali fratte:

$$z = e^s T_\delta \implies s = \frac{\ln z}{T_\delta}$$

Si cercano delle trasformazioni approssimate: Eulero, Tustin, Mappatura poli-zeri.

4.3.1.1 Trasformazioni di Eulero

$$s = \frac{z-1}{T_\delta}$$

Corrispondente alla **discretizzazione di Eulero** con la sostituzione della derivata con il **rapporto incrementale in avanti**.

$$s = \frac{z-1}{zT_\delta} = \frac{1}{T_\delta}(1 - z^{-1})$$

Corrispondente alla **discretizzazione di Eulero** con la sostituzione della derivata con il **rapporto incrementale all'indietro**.
In entrambi i casi devono valere le condizioni:

$$\begin{cases} \omega_\delta > 20\omega_c \\ \omega_c T_\delta << 1 \end{cases}$$

4.3.1.2 Trasformazione bilineare di Tustin

$$s = \frac{2}{T_\delta}\frac{z-1}{z+1}$$

Deve valere la condizione: $\omega_\delta > 8\omega_c$

4.3.1.3 Mappatura poli-zeri

- $C(s)$ ha un polo in $p_i \implies$ si introduce un polo in $e^{p_i T_\delta}$ in $C(z)$
- $C(s)$ ha uno zero in $z_i \implies$ si introduce uno zero in $e^{z_i T_\delta}$ in $C(z)$
- si introducono altri zeri in -1 in modo che $C(z)$ abbia tanti zeri quanti sono i poli
- Il guadagno di $C(z)$ deve essere uguale a quello di $C(s)$ moltiplicato per T_δ^g (g numero dei poli nell'origine di $C(s)$): $\lim_{z\to 1}(z-1)^g C(z) = T_\delta^g \lim_{s\to 0} s^g C(s)$

4.3.2 Algoritmo di controllo

Una volta ottenuta la $C(z)$ e' necessario implementarla in forma di algoritmo eseguibile da un processore.

$$C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}$$

L'algoritmo da implementare e':

$$u(k) = -a_{n-1}u(k-1) - ... - a_1 u(k-n+1) - a_0 u(k-n) + b_m e(k+m-n) + b_{m-1}e(k+m-n-1) + ... + b_1 e(k-n+1) + b_0 e(k-n)$$

Per la sua implementazione, sapendo che $C(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$, e' necessario calcolarsi $U(z) = C(z)E(z)$, antitrasformare ed eventualmente traslare di n campioni.

4.4 Regolatori standard

Servono sostanzialmente a semplificare il progetto del controllore dal momento che non e' necessario conoscere il modello del processo da controllare bensi' solamente alcune informazioni su di esso. La funzione di trasferimento di un **regolatore** e':

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s$$

- $K_P > 0$: guadagno **proporzionale**
- $K_I > 0$: guadagno **integrale**
- $K_I > 0$: guadagno **derivativo**

Oppure in alternativa:

$$C(s) = k_P\big(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\big)$$

- $K_P > 0$: guadagno **proporzionale**
- $T_I = \frac{K_P}{K_I}$: costante di tempo **integrale**
- $T_D = \frac{K_D}{K_P}$: costante di tempo **derivativa**

4.4.1 Tipologie di regolatori

- **Regolatore P**

$$C(s) = K_P$$

Aumenta il guadagno di anello migliorando il comportamento a regime e la reiezione dei disturbi ma induce instabilita'. Utilizzabile solamente per il controllo di processi con ritardo di fase minore di π.

- **Regolatore I**

$$C(s) = \frac{K_I}{s}$$

Migliora prestazioni a regime rispetto a $d(t)$ e $r(t)$. Il ritardo di fase pari a $\frac{\pi}{2}$ induce instabilita' e si e' pertanto costretti a scegliere un guadagno integrale K_I molto basso. Riduce banda passante.

- **Regolatore D**

$$C(s) = K_D s$$

Lo zero nell'origine provoca prestazioni a regime insoddisfacente. Non va mai usato.

- **Regolatore PI**

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

Stessi vantaggi del **regolatore I** ma, lo zero con pulsazione di rottura $\frac{K_I}{K_P} = T_I^{-1}$ consente di non dover ridurre il guadagno per assicurare stabilita' a ciclo chiuso.

- **Regolatore PD**

$$C(s) = K_P + K_D s$$

Lo zero con $\omega = \frac{K_P}{K_D} = T_D^{-1}$ garantisce buone prestazioni a regime e ampliamento della banda passante, senza compromettere la stabilita'.

- **Regolatore ID**

$$C(s) = \frac{K_I}{s}\Big(1 + \frac{K_D}{K_I}s^2\Big)$$

Il doppio zero immaginario puro introduce antirisonanza infinita e pertanto non viene mai usato.

- **Regolatore PID**

$$C(s) = \frac{K_I}{s}\Big(1+\frac{K_P}{K_I}s+\frac{K_D}{K_I}s^2\Big) = \frac{K_P}{T_I s}(1+T_I s+T_I T_D s^2)$$

Stessi vantaggi del **regolatore I** ma consente di aumentare molto la fase. Considerando $T_I = 4T_D$, i due zeri sono reali e coincidenti in $\frac{-1}{2T_D}$ e la funzione di trasferimento diventa:

$$C(s) = \frac{K_P}{T_I s}(1 + 2T_D s^2 = \frac{K_I}{s}(1 + 2\frac{K_D}{K_P}s^2$$