1 Fondamenti di probabilitá assiomatica

Assiomi di Kolmogorov

$$P(A) : A \in 2^S \to [0,1]$$

- $P(A) \geq 0$
- $P(S) = 1$
- $A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilitá Condizionata

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \ P(B) > 0$$

Probabilitá dell'unione

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilitá dell'intersezione

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

formula inversa della **probabilitá condizionata**.

Eventi indipendenti

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Eventi incompatibili

$$A \cap B = \emptyset \implies P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

Teorema delle probabilitá totali

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

Teorema di Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

2 Variabili Aleatorie

Funzione (**non biunivoca**) definita sullo spazio S, che associa un numero reale ad ogni evento elementare.

$$X : s \in S \to X(s) \in \mathbb{R}$$

La variabile aleatoria Y puó anche essere definita a partire da un'altra variabile aleatoria X, effettuando una **trasformazione**. Si parla di **funzioni di variabili aleatorie**:

$$Y = g(x) : s \in S \to Y(s) = g[X(s)]$$

CDF: funzione distribuzione cumulativa

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \\ \displaystyle\sum_{x_i \leq x} p_X(x_i) \end{cases}$$

- $F_X(+\infty) = P(X \leq \infty) = P(S) = 1$
- $F_X(0) = P(X = -\infty) = 0$
- $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

PDF: funzione densitá di probabilitá

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- $f_X(x) \geq 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du = 1$

PMF: funzione massa di probabilitá

$$p_X(x) = P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i^-)$$

2.1 Caratterizzazione sintetica delle variabili aleatorie

Momento di ordine $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_X^n = E(X^n) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx \\ \displaystyle\sum_{x_i \in I} x_i^n p_X(x_i) \end{cases}$$

- $n = 1$: **Media statistica**
- $n = 2$: **Valore quadratico medio**

Momento centrale di ordine $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma_X^n = E[(X-\mu)^n] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n f_X(x)dx \\ \displaystyle\sum_{x_i \in I} (x_i-\mu)^n p_X(x_i) \end{cases}$$

- $n = 2$: **Varianza**

$$VAR(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

Valore efficace

$$X_{rms} = \sqrt{E(X^2)}$$

Deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{VAR(X)}$$

Teorema fondamentale della media Consente di calcolare la media di una **funzione di variabili aleatorie**, senza passare per la sua PDF.

$$\mu_Y = E(Y) = E[g(X)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \\ \sum_{x_i \in I} g(x_i) p_X(x_i) \end{cases}$$

Disuguaglianza di Chebishev Consente di interpretare la varianza come un **indice di dispersione** dei valori assunti dalla variabile aleatoria, attorno alla sua media; nonché stimare la probabilitá che una VA appartenga ad un centro intervallo centrato intorno alla media, conoscendo solamente la **varianza**.

$$P(|X-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\epsilon^2}$$

Q-Function A partire da una variabile aleatoria gaussiana, con CDF $F_Z(z)$, é possibile definire una particolare funzione:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \iff Q(x) = 1 - F_Z(z)$$

Che gode della seguente proprietá:

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

3 Modelli Statisici

Binomiale

$X \sim B(N,p)$: Descrive un esperimento di N prove ripetute.

$$p(x) = \binom{N}{x} p^x q^{n-x}, \ x = 0,..,N$$

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m} \binom{N}{k} p^k q^{n-k} \ , & m \leq x < m+1 \\ 1, & x \geq N \end{cases}$$

$$\mu = Np \ , \ \sigma^2 = Npq$$

Gaussiano

$X \sim N(\mu, \sigma)$: Descrive fenomeni fisici.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Geometrico

$X \sim Geo(p)$: Descrive il numero di tentativi necessari ad ottenere un risultato positivo.

$$p(x) = pq^{x-1}$$

$$\mu = \frac{1}{p} \ , \ \sigma^2 = \frac{q}{p^2}$$

4 Coppie di Variabili Aleatorie

Funzione reale a variabili reali che associa ogni evento elementare alla coppia $[X(s), Y(s)]$:

$$(X,Y) : s \in S \to [X(s), Y(s)] \in \mathbb{R}^2$$

CDF congiunta

$$F_{XY}(x,y) = P(\{X \leq x \cap Y \leq y\}) = \begin{cases} \int\int_A f_{XY}(u,v) du dv \\ \sum_{i:(x_i,y_i) \in A} p_{XY}(x_i, y_i) \end{cases}$$

PMF congiunta

$$p_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

PDF congiunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

CDF marginali

$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty)$
$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$

PDF marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dx$$

PMF marginali

$$p_X(x) = \sum_{y: p_{XY}(x,y) > 0} p_{XY}(x,y)$$

$$p_Y(y) = \sum_{xA: p_{XY}(x,y) > 0} p_{XY}(x,y)$$

Indipendenza tra variabili aleatorie

$$X, Y \text{ indipendenti} \iff \left| \begin{array}{l} F_{XY}(x,y) = F_X(x) F_Y(y) \\ p_{XY}(x,y) = p_X(x) p_Y(y) \\ f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \end{array} \right.$$

4.1 Condizionamento tra due variabili aleatorie

PDF condizionata

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

PMF condizionata

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X = x|Y = y\}) = \frac{P\{X = x\} \cap \{Y = y\}]}{P(Y = y)}$$

$$\frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}, \quad p_Y(y) > 0$$

Teorema delle probabilitá totali per le coppie

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy$$

$$p_X(x) = \sum_y p_{X|Y}(x|y) p_Y(y)$$

Teorema di Bayes per le coppie

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{Y|X}(y|x) p_X(x)}{p_Y(y)}$$

4.2 Caratterizzazione sintetica delle coppie di variabili aleatorie

Momento di ordine $n = k + r$

$$\mu^{kr} = E(X^k Y^r) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^r f_{XY} dx dy \\ \sum_x \sum_y x^k y^r p_{XY} \end{cases}$$

- $k = r = 1$: **Correlazione**

Momento centrale di ordine $n = k + r$

$$\sigma^{kr} = E[(X - \mu_X)^k (Y - \mu_Y)^r] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^k (y - \mu_Y)^r f_{XY} \\ \sum_x \sum_y (x - \mu_X)^k (y - \mu_Y)^r p_{XY} \end{cases}$$

- $k = r = 1$: **Covarianza**

$$COV(X,Y) = CORR(X,Y) - E(X)E(Y)$$

Coefficiente di correlazione

$$r(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{VAR(X)VAR(Y)}}$$

Caratterizzazione della somma

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$VAR(X + Y) = VAR(X) + VAR(Y) + 2COV(X,Y)$$

Media della somma: teorema f. della media

$$E[g(X,Y)] = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x,y) f_{XY}(x,y) dx dy \\ \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y) \end{cases}$$

Indipendenza ed incorrelazione

- X, Y incorrelate $\iff COV(X,Y) = 0 \iff CORR(X,Y) = E(X)E(Y)$
- X, Y indipendenti $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} CORR(X,Y) = E(XY) = E(X)E(Y)$

Legge dei grandi numeri

X_n VA indipendenti con stessa media μ_X e stessa varianza $\sigma_X^2 < \infty$. Si puó definire la VA:

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Con la stessa media μ e varianza $\frac{\sigma^2}{n}$, e vale la relazione:

$$\lim_{n \to \infty} P(|Y - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

5 Fondamenti di Trasmissione

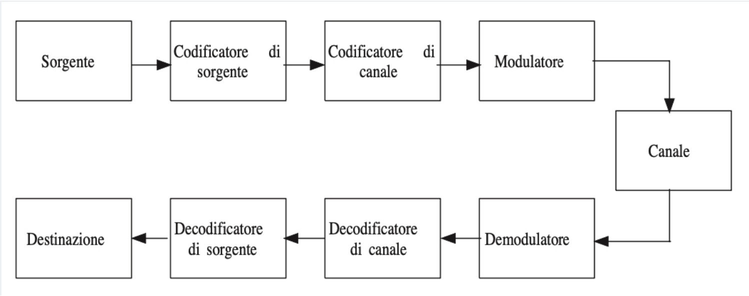

Figura 1: Schema di Shannon

- **Codificatore sorgente:** rappresenta l'informazione in un uscita dalla sorgente nella forma piú efficiente possibile, riducendo i simboli necessari;
- **Codificatore di canale:** modifica la sequenza binaria per aumentarne l'affidabilitá;
- **Modulatore:** converte la sequenza binaria in forme d'onda

Definizioni di base

$$s_m(t), \qquad m = 1, ...M : \quad \textbf{Segnali da trasmettere}$$

T **Intervallo di simbolo** $\iff R_s = \dfrac{1}{T}$ **Tasso di simbolo**

$R_b = kR_s$ **Bitrate**

$E_{av} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{M} E_i$ **Energia Media**

$k = \log_2(M)$ **Bit per simbolo**

$E_{bav} = \dfrac{E_{av}}{k}$ **Energia media per bit**

$\gamma_b = \dfrac{E_{bav}}{N_0}$ **SNR/bit**

$\eta = \dfrac{R_b}{W}$ **Efficienza Spettrale**

Sistema di riferimento

I segnali possono essere rappresentati in uno spazio vettoriale (**ortonormale**) sotto forma di vettori, detti **features**. L'estrazione delle features avviene combinando linearmente i segnali da inviare/ricevere $s_m(t)$, con N funzioni $\psi_N(t)$ che costituiscono una **base** per lo spazio vettoriale:

$$s_m(t) = \sum_{i=1}^{n} s_{mi}\psi_i(t), \qquad m = 1, ..., M$$

Le funzioni $\psi_i(t)$ formano una base in quanto:

$$E_{\psi_i} = ||\psi_i(t)||^2 = \int_0^T |s_m(t)|^2 dt = 1 \qquad\qquad \psi_i(t) \perp \psi_j(t), \quad i, j \in \{1, ..., N\}^2$$

Possono essere ricavate **normalizzando** i segnali di partenza:

$$\psi_m(t) = \frac{s_m(t)}{||s_m(t)||} = \frac{s_m(t)}{\sqrt{E_{s_m}}}$$

Le **componenti** del vettore delle features possono essere calcolate effettuando il **prodotto scalare** tra i segnali $s_m(t)$ e le basi $\psi_m(t)$:

$$\bar{s}_m = \int_0^T s_m(t) \cdot \psi_m(t) dt$$

Probabilitá di errore e criterio ML

Il decisore ML, massimizzando le verosomiglianze, divide i segnali ricevuti in M **regioni di decisione** $\{R_m\}_{m=1,...,M}$ composte dalle features $\bar{r}$ dei segnali trasmessi. Il **decisore ML** selaziona fra gli $s_m(t)$ segnali quello che massimizza la probabilitá del segnale ricevuto dato quello trasmesso (ossia il segnale che ha le features piú simili a quelle del segnale trasmesso):

$$\hat{s} = argmax[f(\bar{r}|\bar{s}_m)]$$

La probabilitá di errore $P(e)$ é la probabilitá che il vettore $\bar{r}$ appartenga alla **regione di decisione sbagliata**.

$$P(e) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} P(e|s_m)$$

Canale AWGN Additive White Gaussian Noise, al segnale di ingresso/uscita si somma un **rumore gaussiano** additivo:

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

$n(t)$ ha media nulla e densitá spettrale di potenza (PSD) $S_n(f) = \sigma_n^2 = \dfrac{N_0}{2}$. Dato che le verosomiglianze $f_{R|S}(\bar{r}|\bar{s}_m)$ hanno la stessa forma a campana circolare, il **decisore ML** é un decisore a **minima distanza:**

$$\hat{s} = argminD(\bar{r}, \bar{s}_m)$$

Union Bound

Anziché calcolare l'esatta probabilitá di errore, é possibile calcolarne un **limite superiore** (upper bound).

$$R^c_{m,k} = R_{k,m} \implies R^c_m = \bigcup_{k=1\neq m}^{M} R^c_{m,k}$$

$$P(e|\bar{s}_m) = \left(\bigcup_{k=1\neq m}^{M} \{\bar{r} \in R^c_{m,k} | \bar{s}_m \right) \leq \sum_{k=1\neq m} Q\left(\sqrt{\frac{d^2_{m,k}}{2N_0}}\right)$$

$$P(e) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} P(e|\bar{s}_m) \leq \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1\neq m}^{M} Q\left(\sqrt{\frac{d^2_{m,k}}{2N_0}}\right)$$

PAM - Pulse Amplitude Modulation

Modulazione in cui l'informazione é associata esclusivamente all'**ampiezza** delle forme d'onda trasmesse. É presente pertanto 1 funzione di base $\psi(t)$.

$$s_m(t) = A_m g_T(t)$$
$$\bar{s}_m = [A_m \sqrt{E_g}]$$

Per un M-PAM si ha:

- $P(e|s_e) = Q\left(\sqrt{\frac{2Eg}{N_0}}\right)$ **Punti Esterni**
- $P(e|s_i) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$ **Punti Interni**
- $P(e) = 2\frac{M-1}{M}Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$
- $W_{PAM} = \frac{1}{2T} \implies \eta_{PAM} = \frac{R_b}{W_{PAM}} = 2k$

QAM - Quadrature Amplitude Modulation

Modulazione in cui l'informazione é associata all'**ampiezza** e alla **fase** delle forme d'onda trasmesse. Sono presenti pertanto 2 funzioni di base: $\psi_1(t), \psi_2(t)$.

$$\bar{s}_m = \left[\sqrt{E_s}A_{mc}, \sqrt{E_s}A_{ms}\right], \quad m = 0, ..., M-1$$

$$\begin{cases} A_{mc} = (2m - 1\sqrt{M}), & m = 1, ..., \sqrt{M} \\ A_{ms} = (2n - 1\sqrt{M}), & n = 1, ..., \sqrt{M} \end{cases}$$

Modulazioni multidimensionali ortogonali

$$\psi_m(t) = \frac{s_m(t)}{||s_m(t)||} \implies s_m(t) = \sqrt{E_{s_m}}\psi_m(t)$$

I **coefficienti** valgono:

$$s_{mk} = \begin{cases} \sqrt{E_{s_m}}, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$

$$s_1 = [\sqrt{E_{s_1}}, 0, ..., 0] \quad , \quad s_2 = [0, \sqrt{E_{s_2}}, ..., 0] \quad , \quad ... \quad , \quad s_M = [0, ..., 0, \sqrt{E_{s_M}}]$$

PPM - Pulse Position Modulation

Codifica l'informazione variando la posizione temporale degli impulsi all'interno di un intervallo fisso, mentre ampiezza e durata restano costanti.

$$s_m(t) = A_{g_T}\left(t - (m-1)\frac{T}{M}\right), \quad m = 1, ..., M$$

$$E_s = A^2 E_g$$

I **coefficienti** valgono:

$$s_1 = [\sqrt{E_s}, 0, ..., 0] \quad , \quad s_2 = [0, \sqrt{E_s}, ..., 0] \quad , \quad ... \quad , \quad s_M = [0, ..., 0, \sqrt{E_s}]$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \gamma_b > 2\ln 2 \implies \mathbb{P}(e) = 0$$

- $P(e) \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)$
- $\gamma_b > 2\ln 2 \implies P(e) \to 0$
- $W_{PPM} = \frac{M}{2T} \implies \eta_{PPM} = \frac{R_b}{W_{PPM}} = \frac{2k}{M}$

Confronto tra modulazioni

- Efficiente in **potenza**: $\mathbb{P}(e) \downarrow, \gamma_b \downarrow$ quando $M \uparrow$. Eg: **PPM** (in genere le ortogonali)
- Efficiente in **banda**: efficienza $\uparrow, \gamma_b \uparrow$ quando $M \uparrow$. Eg: **PAM, QAM**, PSK (in genere quelle dove la dimensionalitá non cresce con M).