# **DEFINIZIONI E TEOREMI**

Sommario

[**DEFINIZIONI E TEOREMI** 1](#_Toc126950590)

[**CAPITOLO 1: Numeri e funzioni reali** 2](#_Toc126950591)

[**ASSIOMA DI COMPLETEZZA:** mette in mostra la continuitá della retta reale. 2](#_Toc126950592)

[**DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE** 2](#_Toc126950593)

[**PRINCIPIO DI INDUZIONE** 2](#_Toc126950594)

[**CAPITOLO 2: Complementi ai numeri reali** 2](#_Toc126950595)

[**UNICITÁ DI MASSIMO E MINIMO** 2](#_Toc126950596)

[**CAPITOLO 3: Limiti di successioni** 4](#_Toc126950597)

[**SUCCESSIONI NUMERICHE** 4](#_Toc126950598)

[**TEOREMA DELL’UNICITÁ DEL LIMITE** 4](#_Toc126950599)

[**TEOREMA SULLA CONVERGENZA DELLE LIMITATE** 5](#_Toc126950600)

[**TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO** 5](#_Toc126950601)

[**TEOREMA DEI CARABINIERI (DELLA MAGGIORANTE E DELLA MINORANTE)** 5](#_Toc126950602)

[**TEOREMA: LIMITE DEL PRODOTTO DI UNA SUCCESSIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA** 6](#_Toc126950603)

[**TEOREMA SUCCESSIONI MONOTONE** 6](#_Toc126950604)

[**TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS, SUCCESSIONI ESTRATTE** 7](#_Toc126950605)

[**CAPITOLO 4: LIMITI DI FUNZIONE. FUNZIONI CONTINUE** 8](#_Toc126950606)

[**TEOREMA PONTE: LEGAME LIMITI DI FUNZIONE E LIMITI DI SUCCESSIONE** 9](#_Toc126950607)

[**FUNZIONI CONTINUE E PUNTI DI DISCONTINUITA’** 9](#_Toc126950608)

[**TEOREMA DI CONFRONTO** 9](#_Toc126950609)

[**TEOREMA DEL LIMITE DELLE FUNZIONI MONOTONE** 9](#_Toc126950610)

[**TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO (GENERICO)** 10](#_Toc126950611)

[**TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO – FUNZIONI CONTINUE** 10](#_Toc126950612)

[**TEOREMA DEGLI ZERI (TEOREMA DI BOLZANO)** 11](#_Toc126950613)

[**PRIMO TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI** 12](#_Toc126950614)

[**TEOREMA DI WEIERSTRASS** 13](#_Toc126950615)

[**SECONDO TEOREMA DI ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI** 14](#_Toc126950616)

[**CRITERIO DI INVERTIBILITÁ** 14](#_Toc126950617)

[SERIE NUMERICHE 16](#_Toc126950618)

## 

## **CAPITOLO 1: Numeri e funzioni reali**

### **ASSIOMA DI COMPLETEZZA:** mette in mostra la continuitá della retta reale.

Considerando due numeri reali tali che , è sempre possibile individuare un numero reale tale che .

### **DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE**

**DIMOSTRAZIONE**

Per ogni numero reale vale la relazione: che, per definizione di valore assoluto, puó essere riscritta come:

Effettuando la somma membro a membro si ottiene:

### **PRINCIPIO DI INDUZIONE**

Si tratta di un metodo dimostrativo che consente di dimostrare la validità di una tesi dalla verifica di 2 condizioni: la validità del **passo zero** e la validità del **passo induttivo**. Si utilizza quando bisogna dimostrare una proprietà del tipo “dimostrare che per ogni vale …” dei numeri naturali.

Si suppone che la proprietà sia valida per (o generalmente ) e che inoltre, supposta vera per sia vera anche per . Allora la proposizione è vera per ogni

## **CAPITOLO 2: Complementi ai numeri reali**

### **UNICITÁ DI MASSIMO E MINIMO**

Si dimostra che, se esistono, i massimi e i minimi di un insieme sono unici.

**DIMOSTRAZIONE**

Consideriamo due massimi dell’insieme

Dato che ed sono elementi di , si pone :

Per la proprietà asimmetrica (assioma):

Un intervallo si dice **superiormente limitato** se ammette **maggiorante**, **inferiormente limitato** se ammette **minorante**.  **limitato:** .

**L’ESTREMO SUPERIORE**  è il **piú piccolo** fra i **maggioranti**:

**L’ESTREMO INFERIORE** è il **piú grande** dei **minoranti**:

I Numeri complessi consentono di risolvere tutte quelle operazioni che non hanno soluzioni in , è pertanto un’estensione di

**FORMA TRIGONOMETRICA:** ;

**FORMA ESPONENZIALE:**

**FORMULA DI DE MOIVRE:**

**RADICI N-ESIME:**

## **CAPITOLO 3: Limiti di successioni**

### **SUCCESSIONI NUMERICHE**

Una **successione** è una legge che ad ogni numero naturale fa corrispondere uno e un solo numero reale . Si tratta di particolari funzioni da

La variabile quindi può assumere solamente valori NATURALI.

|  |  |
| --- | --- |
| LIMITE | DEFINIZIONE |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Una successione si dice **regolare** se ammette limite; irregolare o **indeterminata** se il limite non esiste. Una successione che converge a si dice **infinitesima**, una successione che diverge si dice **infinita**.

Una successione si dice **limitata** se esiste un numero reale tale che . Esistono successioni limitate non regolari come .

**TEOREMA**: Ogni successione **convergente** è **limitata**.

### **TEOREMA DELL’UNICITÁ DEL LIMITE**

*Il limite di una successione, se esiste è unico.*

**DIMOSTRAZIONE**

La dimostrazione si effettua per assurdo, ricercando quindi una contraddizione con la tesi. Supponiamo per assurdo che la successione ammetta 2 limiti diversi, e con

Sia e il piú grande fra i valori e , le relazioni di sopra valgono simultaneamente.

Sfruttando la disuguaglianza triangolare, le definizioni di limite di successione e ricordando che :

Si ottiene quindi:

che è assurdo in quanto il valore non puó essere strettamente minore di se stesso.

### **TEOREMA SULLA CONVERGENZA DELLE LIMITATE**

*Ogni successione convergente è limitata.*

### **TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO**

*Se la successione tende ad un valore positivo, allora la successione è definitivamente positiva.*

**DIMOSTRAZIONE**

Si parte dalla definizione di limite di successione:

Consideriamo e applichiamo la definizione:

Per cui

Considerando solamente la prima disequazione:

**NON VALE L’OPPOSTO!**

### **TEOREMA DEI CARABINIERI (DELLA MAGGIORANTE E DELLA MINORANTE)**

*Se si hanno 3 successioni, la prima maggiore delle altre due (detta per questa maggiorante) e la terza minore delle altre 2 (detta per questo minorante), allora se sia la prima che la terza tendono ad un valore finito , allora anche la successione centrale tende allo stesso valore.*

**DIMOSTRAZIONE**

Si parte dalla definizione di limite di successione:

Specializzando per le due successioni

Le condizioni che ci interessano sono le seguenti:

Supponendo che e combinando le condizioni precedenti si ottiene la seguente catena di disequazioni:

Da cui si ricava:

Che per definizione coincide con il limite:

### **TEOREMA: LIMITE DEL PRODOTTO DI UNA SUCCESSIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA**

*Se limitata e (infinitesima), allora*

### **TEOREMA SUCCESSIONI MONOTONE**

*Ogni successione monotona è regolare (ammette limite) e convergente (il limite è finito). Il teorema è utile per definire il numero di Nepero .*

**DIMOSTRAZIONE**

Sia una successione crescente e limitata e l’estremo superiore della successione. Per definizione di limite di successione:

**SUCCESSIONI ESTRATTE:** Sia una successione di numeri reali e sia una successione strettamente crescente di numeri naturali. La successione (di indice si chiama **SUCCESSIONE ESTRATTA** di .

### **TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS, SUCCESSIONI ESTRATTE**

*Se una successione è limitata allora esiste almeno un’estratta convergente.*

*Sia una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.*

Proposizione: Se converge ad allora ogni estratta converge ad .

.

**ESEMPIO:**

Se CONVERGE allora è LIMITATA

Se è LIMITATA non è detto che CONVERGE

## **CAPITOLO 4: LIMITI DI FUNZIONE. FUNZIONI CONTINUE**

**Intorno**: intervallo aperto contenente .

**Punto di accumulazione**: un numero è un **punto di accumulazione** per l’insieme se, in ogni intorno completo di cade almeno un punto di distinto da .

**DEFINIZIONE (1) DI LIMITE DI FUNZIONE:** ha limite uguale ad per che tende ad se, qualunque sua la successione , con e per ogni risulta

**DEFINIZIONE (2) DI LIMITE DI FUNZIONE:** se e soltanto se, per qualunque , esiste un numero tale che , per ogni tale che .

|  |  |
| --- | --- |
| **LIMITE** | **DEFINIZIONE** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Definizione rigorosa

Definizione per successione (teorema ponte)

Definizione per intorni

### **TEOREMA PONTE: LEGAME LIMITI DI FUNZIONE E LIMITI DI SUCCESSIONE**

Consente di estendere alle funzioni di variabile reale, tutti i teoremi applicabili alle successioni.

### **FUNZIONI CONTINUE E PUNTI DI DISCONTINUITA’**

*Una funzione è continua se il limite della funzione, calcolato in un punto , coincide proprio con la valutazione della funzione in quel punto:*

Quando questa condizione non è soddisfatta si creano delle discontinuità.I punti di discontinuità si classificano in:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| TIPOLOGIA | DEFINIZIONE | NOTE |
|  |  |  |
| PRIMA SPECIE (SALTO) |  |  |
|  |  |  |
| SECONDA SPECIE |  |  |
|  |  |  |
| TERZA SPECIE (ELIMINABILE) |  | Funzioni definite a tratti. **Prolungamento per continuità** |

### **TEOREMA DI CONFRONTO**

Se intorno a , e in diverge positivamente, anche diverge positivamente.

### **TEOREMA DEL LIMITE DELLE FUNZIONI MONOTONE**

Sia una funzione monotona in , allora esistono finiti i limiti:

### **TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO (GENERICO)**

Se una funzione in un punto converge positivamente (o negativamente), allora la funzione è definitivamente positiva (o negativa) intorno al punto.

**DIMOSTRAZIONE**

**CASO 1:**

Si parte dalla definizione di limite di funzione:

Consideriamo e applichiamo la definizione:

Per cui

Considerando solamente la prima disequazione:

che coincide proprio con la tesi.

**CASO 2:**

Se diverge, fissato un esiste un intorno di quindi è positiva.

**NON VALE L’OPPOSTO!**

### **TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO – FUNZIONI CONTINUE**

Se una funzione in un punto converge positivamente (o negativamente), allora la funzione è definitivamente positiva (o negativa) intorno al punto.

Sia una funzione definita in un intorno di e sia continua in tale punto. Se

esiste un numero tale che

**DIMOSTRAZIONE**

Sia .

Si parte dalla definizione di continuità e di limite di funzione:

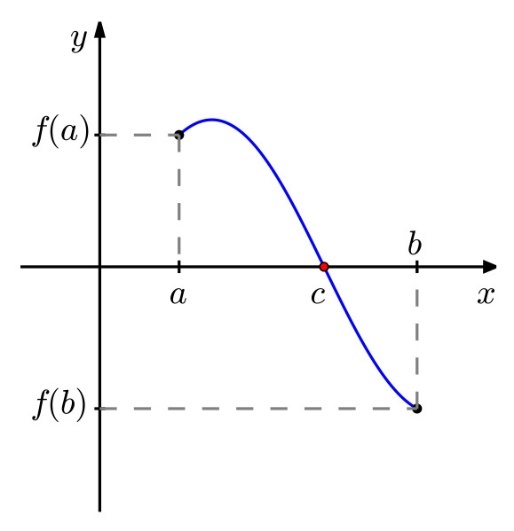
* Definizione limite
* **Definizione limite per intorni**

E si applica la definizione di **continuità** ricordando che*:*

Otteniamo:

Considerando solamente la prima disequazione:

### **TEOREMA DEGLI ZERI (TEOREMA DI BOLZANO)**



Sia una funzione continua in un intervallo . Se hanno segno discorde , allora esiste un punto tale che .

Sostanzialmente se gli estremi dell’intervallo all’interno del quale la funzione è definita hanno segni discordi, la funzione passa per .

**DIMOSTRAZIONE (bisezione)**

Supponiamo che ed e consideriamo il punto medio dell’intervallo . Si valuta la funzione nel punto

**STEP 1:**

* Se il teorema è gia dimostrato
* Se
* Se

**STEP 2:**

Dato ,

* Se il teorema è gia dimostrato
* Se
* Se

Il procedimento si ripete finché non si trova I questo modo si trovano 3 successioni che, per

Per cui si ricerca nuovamente il centro: **.**

Risulta che e .

Ad ogni iterazione l’ampiezza dell’intervallo dato in partenza si dimezza per cui, dopo iterazioni l’ampiezza diventa: .

La successione è limitata in quanto è definita nell’intervallo ed è crescente in quanto:

Essendo quindi **crescente e limitata**, per il **TEOREMA DEL LIMITE DELLE SUCCESSIONI MONOTONE** (ogni successione monotona è regolare e convergente), ammette limite finito

A questo punto si ricava la successione dalla formula dell’ampiezza:

Per cui il valore della funzione nel punto è approssimabile al limite delle successioni:

Entrambe le successioni tendono ad . Ricordando che:

Per la proprietà asimmetrica, .

È bene osservare che la successione rappresenta un’approssimazione per **DIFETTO** di mentre la successione è un’approssimazione per **ECCESSO**.

### **PRIMO TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI**

*Una funzione continua in un intervallo assume tutti i valori compresi fra ed*

Supponiamo che , allora secondo il teorema dovrebbe esistere almeno un valore per cui .

**DIMOSTRAZIONE**

Bisogna provare che **.**

* Se
* Se
* Se si considera , per cui:

Dal momento che assume valori di segno discorde agli estremi, per il, **TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI**,

esiste un numero tale che , cioè:

### **TEOREMA DI WEIERSTRASS**

*Sia una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato allora assume massimo e minimo in*

*Dove:*

**DIMOSTRAZIONE**

Sia l’estremo superiore della funzione e dimostriamo l’esistenza di un punto

**1 STEP:**

**Esiste una successione**

* Se allora

Per cui

* Se allora:

Quindi per il teorema del confronto.

**2 STEP:**

Per il **TEOREMA BOLZANO – WEIERSTRASS** esiste una successione estratta convergente a un valore .

Dal momento che è continua:

Ricordando che

Abbiamo quindi dimostrato che:

### **SECONDO TEOREMA DI ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI**

*Una funzione continua in un intervallo assume tutti i valori compresi il minimo e il massimo.*

**DIMOSTRAZIONE**

Si assumono basandosi sul **TEOREMA DI WEIERSTRASS**. Bisogna provare che:

Consideriamo il punto di minimo ed il punto di massimo:

Si considera ora la funzione

Dato che si ottiene:

Per il **TEOREMA DELL’ ESISTENZA DEGLI ZERI**, esiste un numero tale che:

### **CRITERIO DI INVERTIBILITÁ**

Una funzione continua strettamente monotona in un intervallo è invertibile in tale intervallo.

## **CAPITOLO 5: DERIVATE**

### **TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE**

*Se è una funzione derivabile in e è una funzione derivabile in , allora la funzione ‘e derivabile in . In particolare:*

### **TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERSE**

*Se una funzione continua e strettamente crescente (o strettamente decrescente) in un intervallo . Se é derivabile in un punto e , allora anche è derivabile in*

**ESEMPIO**

La funzione inversa è

Dato che è derivabile con derivata , per il teorema anche è derivabile per e la derivata vale:

**DIMOSTRAZIONE**

**RELAZIONE CONTINUITÁ - DERIVABILITÁ**

Se è derivabile in , allora è sicuramente continua.

Se è continua in , non è detto che sia anche derivabile. ne è un esempio.

### **TEOREMA DI FERMAT**

*Sia una funzione definita in e sia un punto di massimo o minimo relativo della funzione. Se la funzione è derivabile nell’intervallo allora*

*Il teorema sostanzialmente afferma che i punti stazionari (dove ) sono candidati ad essere punti di massimo o di minimo.*

**DIMOSTRAZIONE**

### **TEOREMA DI ROLLE**

*Sia una funzione continua in e derivabile in Se allora esiste un punto*

**DIMOSTRAZIONE**

### **TEOREMA DI LAGRANGE**

Si tratta di una generalizzazione del teorema di Rolle.

*Sia una funzione continua in e derivabile in Allora esiste un punto tale che:*

**DIMOSTRAZIONE**

Per la dimostrazione occorre costruire una funzione ausiliaria:

è continua in e derivabile in in quanto differenza di 2 funzioni continue, per cui soddisfa le condizioni del **TEOREMA DI ROLLE**.

Per il **TEOREMA DI ROLLE** tale che:

*Se*

### **TEOREMA DI DE L’HOSPITAL**

*Siano due funzioni derivabili in un intorno di tali che:*

Se in un intorno di risulta

### **TEOREMA DI CAUCHY**

*Siano due funzioni continue in e derivabili in Se ,*

*esiste un punto tale che:*

**CRITERIO DI MONOTONIA**

*Siano una funzione continua in e derivabile in allora:*

**DIMOSTRAZIONE**

Se

Per il **TEOREMA DI LAGRANGE:**

# SERIE NUMERICHE

**Cosa sono:** somma degli infiniti termini che compongono una successione numerica

**DEFINIZIONI**

|  |  |
| --- | --- |
|  | La serie **converge** e ha per somma |
|  | La serie **diverge** |
|  | La serie é **indeterminata** o irregolare |

**CRITERI DI CONVERGENZA**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Criterio** | **Condizioni** | **Convergenza** |
| **Confronto** (Gauss) | Devono esistere 2 successioni e tali che: |  |
| **Infinitesimi** | Deve esistere il limite: |  |
| **Rapporto** | Deve esistere il limite |  |
| **Radice** | Deve esistere il limite |  |
| **Leibnitz** | deve essere crescente ed infinitesima:    * Decrescente |  |

**TIPOLOGIE DI SERIE**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Tipologia** | **Forma** | **Convergenza** |
| Geometrica |  |  |
| Armonica Generalizzata |  |  |
| Alternata |  | Criterio di Leibnitz |
| Telescopica |  |  |

**CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE DI CONVERGENZA**

|  |  |
| --- | --- |
|  | La serie **PUÓ** convergere. Si applicano i criteri |
|  | La serie é **divergente** |