Vértices fortemente cospectrais em árvores

Introdução: A teoria dos grafos é uma das áreas da matemática com maior relevância nos dias de hoje, dela, surgem outros ramos, como a teoria espectral de grafos que utiliza ferramentas algébricas para estudar essas estruturas. Nesse sentido, existe uma vasta aplicação de suas descobertas em outras áreas, em especial, a teoria espectral está intrinsecamente relacionada à computação quântica: ao escrevermos circuitos quânticos, modelamos a interação de seus componentes como um grafo. Sendo assim, com o objetivo de minimizar o número de interações, o ideal seria modelar um circuito quântico como uma árvore. Dessa forma, resultados sobre o espectro de árvores é de interesse da comunidade cientifica.

Objetivos: O objetivo dessa pesquisa é descobrir múltiplos vértices fortemente cospectrais em árvores, seja encontrando um exemplo que comprove sua existência, ou provando que esse fenômeno é impossível de acontecer

Método: Para entender corretamente o problema, vamos definir as estruturas que usaremos:

Um grafo pode ser representado por um conjunto de pontos, chamados de vértices, conectados entre si, essas conexões são representadas por "retas", chamadas de arestas. Uma árvore é um grafo que não possui um ciclo.

Outra representação de grafo vem da matriz de adjacência, uma matriz cujas linhas e colunas são indexadas pelos vértices, a entrada (a, b) (linha a, coluna b) dessa matriz é igual a 1 se os vértices a e b estiverem conectados e 0 caso contrário.

Como toda matriz, a matriz de adjacência de um grafo pode ser decomposta, no caso, escrita como a soma de outras matrizes. Aqui, usamos ferramentas da álgebra linear e fazemos a decomposição espectral da nossa matriz, o que consiste em escrevê-la como a soma de outras matrizes, chamadas de idempotentes, multiplicadas por constantes, chamadas de autovalores. Essas matrizes carregam propriedades muito importantes para nosso problema, uma delas será discutida a seguir.

Assim, vamos definir quando vértices são fortemente cospectrais: dois vértices a e b são cospectrais se, para cada idempotente, a entrada (a, a) é igual à entrada (b, b); a e b são paralelos se, para cada idempotente, a coluna a for paralela à coluna b e, por fim, a e b são fortemente cospectrais se forem, ao mesmo tempo, cospectrais e paralelos.

Sendo assim, o nosso problema é descobrir se existe alguma árvore com mais de dois vértices fortemente cospectrais e para isso podemos tanto gerar um programa que encontra um exemplo, ou provar formalmente que ela não existe.

Resultados: Nós demonstramos que não existe árvore com mais de dois vértices fortemente cospectrais. Esse resultado é o primeiro a explicitar uma disparidade: apesar de haverem grafos com conjuntos arbitrários de vértices par a par fortemente cospectrais, tais conjuntos não podem existir em árvores. Sendo assim, reforçamos o fato de que o espectro de árvores parece se comportar de modo diferente de outros grafos.

Conclusão: Mesmo sendo uma iniciação científica, a pesquisa foi capaz de gerar resultados relevantes para o meio acadêmico. O artigo contendo a demonstração do resultado foi submetido para o jornal Algebraic Combinatorics, que engloba trabalhos relacionando problemas combinatórios com teoria algébrica.