# Vértices Fortemente Cospectrais em Árvores

**Emanuel Juliano Morais Silva, Gabriel de Morais Coutinho** (Orientador)
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Departamento de Ciência da Computação (DCC), Belo Horizonte, MG, Brasil
**E-mail autor: emanuelsilva@dcc.ufmg.br**
**E-mail orientador: gabriel@dcc.ufmg.br**

## Introdução

A **Teoria dos Grafos** e a **Algebra Linear** pode ser utilizada para modelar diversos fenômenos da realidade.

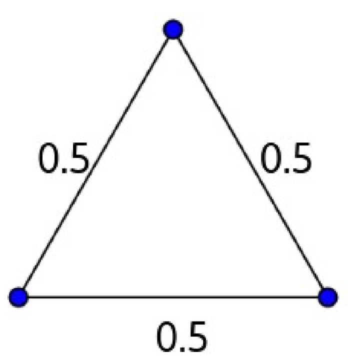


Figura 1: Exemplo de grafo com pesos nas arestas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = ?$$

Figura 2: Para onde evolui esse sistema quando k cresce?

A **Teoria Espectral** encontra-se justamente na **interseção** das duas áreas de pesquisa.

$$1^k \begin{pmatrix} 0.33 & 0.33 & 0.33 \\ 0.33 & 0.33 & 0.33 \\ 0.33 & 0.33 & 0.33 \end{pmatrix} + (\frac{-1}{2})^k \begin{pmatrix} 0.67 & -0.33 & -0.33 \\ -0.33 & 0.67 & -0.33 \\ -0.33 & -0.33 & 0.67 \end{pmatrix}$$

Figura 3: Decomposição espectral da matriz de adjacência do grafo.

## Objetivos

O enfoque do estudo consiste em utilizar a teoria espectral para resolver problemas em aberto:

- Encontrar 3 vértices fortemente cospectrais em árvores.
- Demonstrar formalmente que esses vértices não existem.

## Motivação

Na **Computação Quântica** circuitos são modelados utilizando grafos.

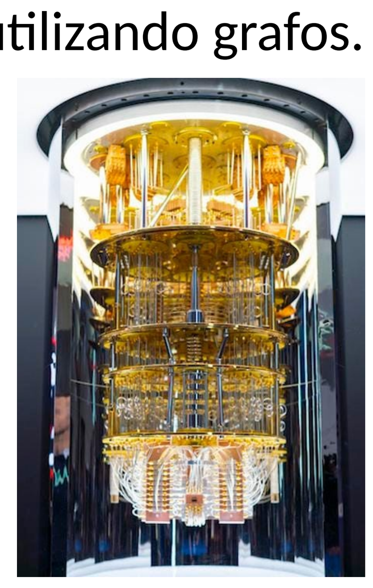

Figura 4: Computador Quântico da IBM.

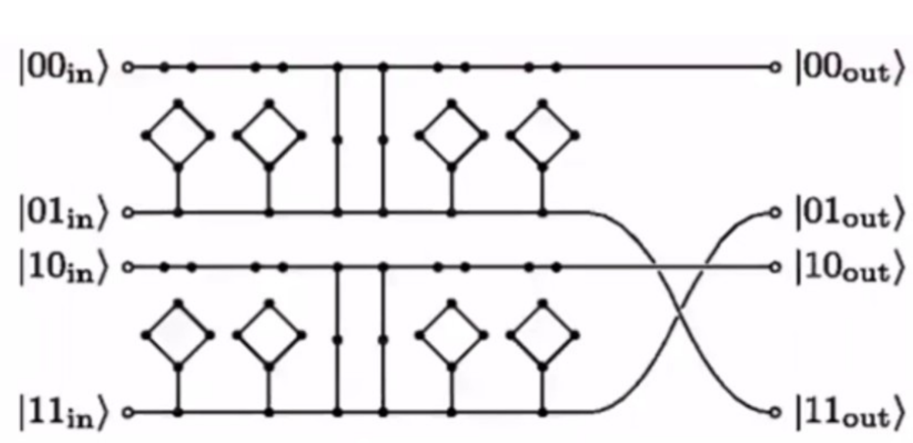


Figura 5: Circuito quântico para realizar CNOT.

Para transferir informação entre duas pontas de um circuito quântico, precisamos que os vértices sejam **fortemente cospectrais**.

Dois grandes problemas da computação quantica são:

- Escrever circuitos com **poucos qubits**.
- Escrever circuitos com **baixo erro** (poucas interações).

## Metodologia

Em teoria dos grafos, uma **árvore** é um grafo sem ciclos.

Árvores são os grafos conexos com menor quantidade de arestas.

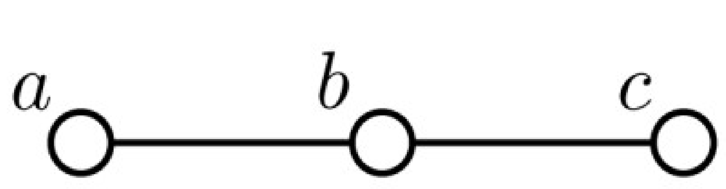


Figura 6: Grafo P_3 é árvore.

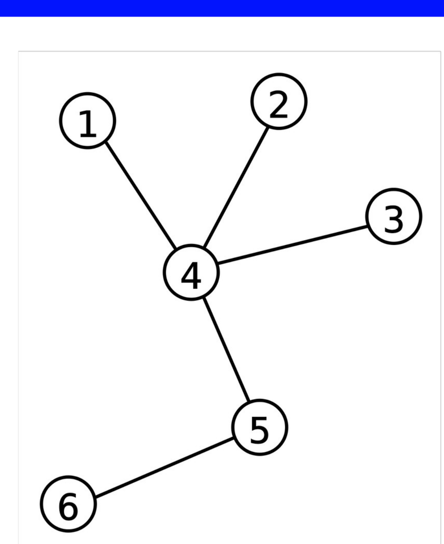


Figura 7: Exemplo de Árvore.

Para dois vértices **a** e **c** serem fortemente cospectrais, precisamos que, em cada idempotente, as entradas **(a, a)** sejam iguais às entradas **(c, c)** e que as colunas **a** sejam paralelas às colunas **c**.

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 8: Vértices **a** e **c** são fortemente cospectrais no P_3.

## Resultados

Nós demonstramos que não existe árvore com mais de dois vértices fortemente cospectrais.

Esse resultado explicita que o espectro de árvores parece se comportar de modo diferente de outros grafos.

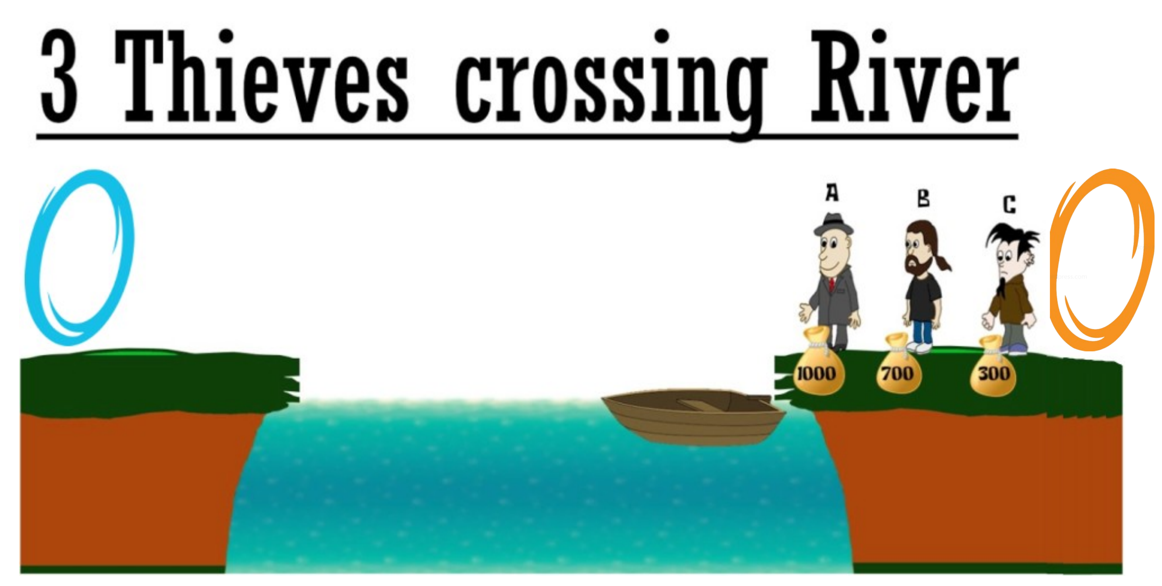


Figura 9: Analogia com o argumento final da demonstração.

Fazemos uma analogia entre o argumento final e a situação:

- Três pessoas querem cruzar um rio e ao fim do rio existe um portal.
- Se uma pessoa cruzar o rio, as outras duas precisam estar de mãos dadas
- É possível que os três comecem em uma margem e cruzem para a outra?

## Conclusão

O artigo contendo a demonstração do resultado foi submetido para o jornal Algebraic Combinatorics.

Nosso próximo passo é tentar demonstrar que não existe tranferência de estado quântico para nenhuma árvore fora P_2 e P_3.

## Agradecimentos

## Referências

[1] Gabriel Coutinho, Emanuel Juliano, and Thomás Jung Spier. Strong cospectrality in trees. arXiv preprint arXiv:2206.02995, 2022.

[2] Gabriel Coutinho, Chris Godsil, Emanuel Juliano, and Christopher M van Bommel. Quantum walks do not like bridges. arXiv preprint arXiv:2112.03374, 2021.

**Semana do Conhecimento Ufmg 2022**

**UFMG, 95; Brasil, 200: interseções**