Vértices Fortemente Cospectrais em Árvores

Emanuel Juliano Morais Silva, Gabriel de Morais Coutinho (Orientador)
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Departamento de Ciência da Computação (DCC), Belo Horizonte, MG, Brasil
E-mail autor: emanuelsilva@dcc.ufmg.br
E-mail orientador: gabriel@dcc.ufmg.br

Introdução

A teoria dos grafos é uma das áreas da matemática com maior relevância nos dias de hoje, dela, surgem outros ramos, como a teoria espectral de grafos que utiliza ferramentas algébricas para estudar essas estruturas. Nesse sentido, existe uma vasta aplicação de suas descobertas em outras áreas, em especial, a teoria espectral está intrinsecamente relacionada à computação quântica: ao escrevermos circuitos quânticos, modelamos a interação de seus componentes como um grafo. Sendo assim, com o objetivo de minimizar o número de interações, o ideal seria modelar um circuito quântico como uma árvore. Dessa forma, resultados sobre o espectro de árvores é de interesse da comunidade cientifica.

Objetivos

O enfoque do estudo consiste em entender melhor a teoria espectral de grafos e resolver problemas em aberto como:

- Encontrar vértices fortemente cospectrais em árvores.
- Provar formalmente que esses vértices não existem.

Metodologia

Para entender corretamente o problema, vamos definir as estruturas que usaremos:

Um grafo **G** pode ser representado por um conjunto de pontos, chamados vértices **V(G)**, conectados entre si, essas conexões são representadas por “retas”, chamadas de arestas **E(G)**. Uma árvore é um grafo que não possui ciclo.

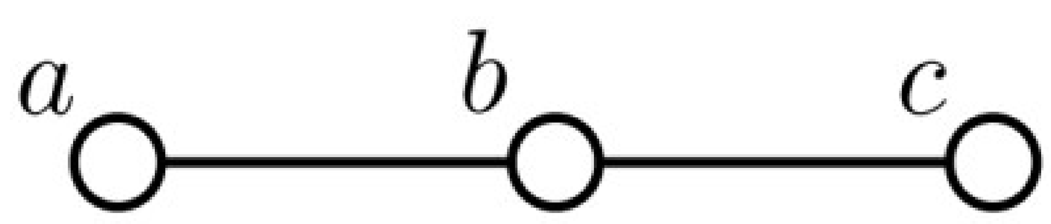

Figura 1: Grafo **P3**, um grafo sem ciclos com 3 vértices e duas arestas.

Outra representação de grafo vem da matriz de adjacência, uma matriz **A(G)** cujas linhas e colunas são indexadas pelos vértices, a entrada **(a, b)** (linha a, coluna b) dessa matriz é igual a **1** se os vértices a e b estiverem conectados e **0** caso contrário.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2: Matriz de adjacência de **P3**, **A(P3).**

Como toda matriz, a matriz de adjacência de um grafo pode ser decomposta, no caso, escrita como a soma de outras matrizes. Aqui, usamos ferramentas da álgebra linear e fazemos a **decomposição espectral** da nossa matriz, o que consiste em escrevê-la como a soma de outras matrizes, chamadas de idempotentes, multiplicadas por constantes, chamadas de autovalores.

$$\sqrt{2}\,\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} + 0\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \sqrt{2}\,\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 3: Decomposição espectral de **A(P3)**.

Assim, vamos definir quando vértices são fortemente cospectrais: dois vértices a e b são **cospectrais** se, para cada idempotente, a entrada (a, a) é igual à entrada (b, b); a e b são **paralelos** se, para cada idempotente, a coluna a for paralela à coluna b e, por fim, a e b são **fortemente cospectrais** se forem, ao mesmo tempo, cospectrais e paralelos.

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 4: Vértices **a** e **c** são fortemente cospectrais.

Resultados

Nós demonstramos que não existe árvore com mais de dois vértices fortemente cospectrais. Esse resultado é o primeiro a explicitar uma disparidade: apesar de haverem grafos com conjuntos arbitrários de vértices par a par fortemente cospectrais, tais conjuntos não podem existir em árvores. Sendo assim, reforçamos o fato de que o espectro de árvores parece se comportar de modo diferente de outros grafos.

Conclusão

Mesmo sendo uma iniciação científica, a pesquisa foi capaz de gerar resultados relevantes para o meio acadêmico. O artigo contendo a demonstração do resultado foi submetido para o jornal Algebraic Combinatorics, que engloba trabalhos relacionando problemas combinatórios com teoria algébrica.

Agradecimentos

DCC UFMG FAPEMIG

Referências

[1] Gabriel Coutinho, Emanuel Juliano, and Thomás Jung Spier. Strong cospectrality in trees. arXiv preprint arXiv:2206.02995, 2022.

[2] Gabriel Coutinho, Chris Godsil, Emanuel Juliano, and Christopher M van Bommel. Quantum walks do not like bridges. arXiv preprint arXiv:2112.03374, 2021.

Semana do Conhecimento Ufmg 2022
UFMG, 95; Brasil, 200: interseções