



ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL LEONEL DE MOURA BRIZOLA

REVISÃO DE GEOMETRIA PLANA

PROFESSOR: ALNEYR GOMES

CURSO:

SÉRIE: 3º ANO

NOTA: _____

ALUNO(A): _____

Nº: _____

DATA: ____/____/____

3º BIMESTRE

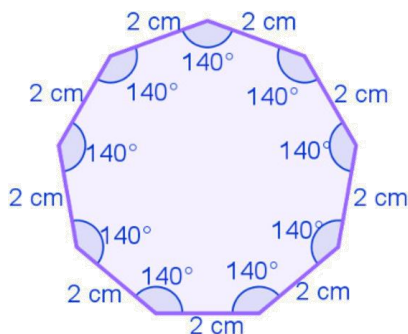
NOMECLATURA DOS POLÍGONOS

Aos polígonos que têm de três a vinte lados dá-se os nomes:

No. de lados	Polígono	No. de lados	Polígono
1	não existe	11	undecágono
2	não existe	12	dodecágono
3	triângulo	13	tridecágono
4	quadrilátero	14	tetradecágono
5	pentágono	15	pentadecágono
6	hexágono	16	hexadecágono
7	heptágono	17	heptadecágono
8	octógono	18	octadecágono
9	eneágono	19	eneadecágono
10	decágono	20	icoságono

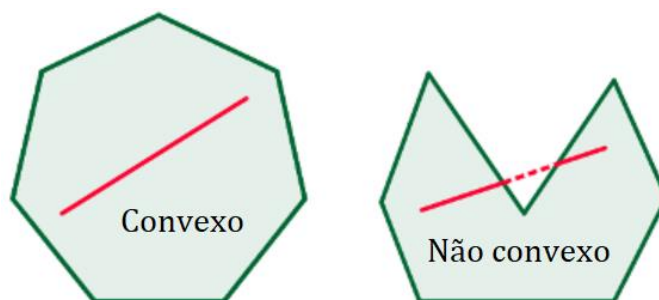
POLÍGONOS REGULARES

São polígonos que possuem lados e ângulos congruentes.



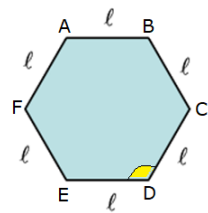
POLÍGONOS CONVEXOS

Um polígono é convexo quando ao traçarmos uma reta qualquer no interior do polígono ela fica inteiramente contida no polígono.



SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO REGULAR, CÁLCULO DO ÂNGULO

EXTERNO E NÚMERO DE DIAGONAIS



Soma dos ângulos internos de um polígono

$$S_i = 180^{\circ}(n - 2)$$

Número de diagonais de um polígono

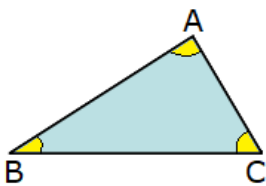
$$d = \frac{n(n - 3)}{2}$$

Ângulo interno de um polígono regular

$$A_i = \frac{S_i}{n}$$

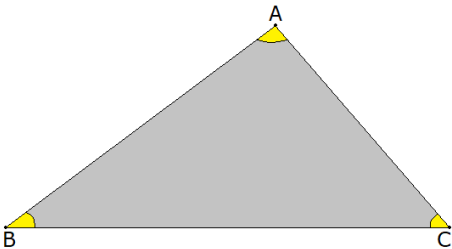
Ângulo externo de um polígono regular

$$A_e = \frac{360^{\circ}}{n}$$



TRIÂNGULOS

É um polígono de três lados e é considerado a figura fundamental da geometria.



CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

1. Quanto aos lados:

	Triângulo equilátero: tem os seus três lados com o mesmo comprimento;
	Triângulo isósceles: tem dois lados com o mesmo comprimento;
	Triângulo escaleno: tem todos os lados com comprimento desigual.

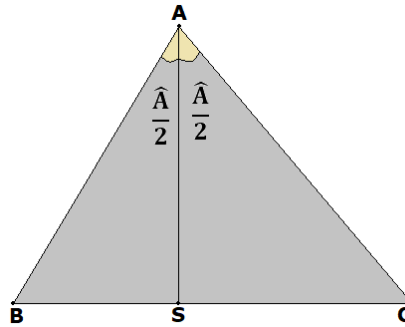
2. Quanto aos ângulos:

	Triângulo acutângulo: tem os três ângulos internos agudos;
	Triângulo retângulo: um dos três ângulos do triângulo é um ângulo reto;
	Triângulo obtusângulo: um dos três ângulos do triângulo é um ângulo obtuso.

ELEMENTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

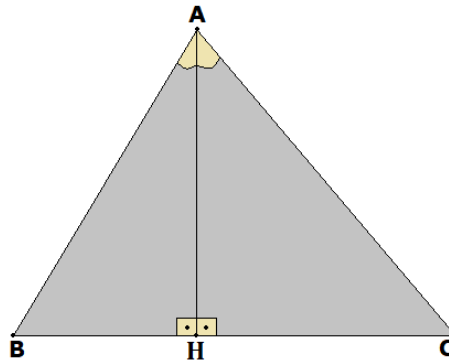
- **BISSETRIZ:** É o segmento de reta com extremidades num vértice e no lado oposto que divide o ângulo desse vértice ao meio.

$$\overline{AS} \text{ é Bissetriz} \rightarrow \widehat{BAS} \equiv \widehat{CAS}$$



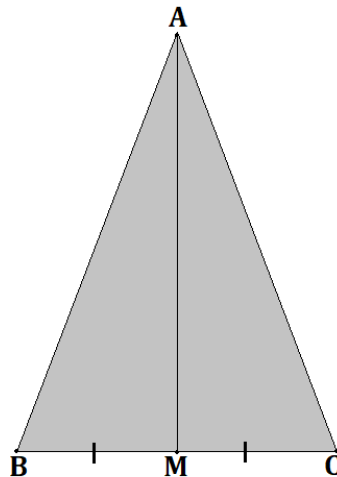
- **ALTURA:** É o segmento de reta com extremidades em um dos vértices e perpendicular ao lado oposto.

$$\overline{AH} \text{ é Altura} \rightarrow \overline{AH} \perp \overline{BC}$$



- **MEDIANA:** É o segmento de reta com extremidades em um dos vértices e no ponto médio do lado oposto.

$$\overline{AM} \text{ é Mediana} \rightarrow \overline{BM} \equiv \overline{CM}$$



PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO ISÓSCELES

Em todo triângulo isósceles ocorre:

- I) Tem dois lados congruentes $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$;
- II) Os ângulos da base, suportes dos lados congruentes, são congruentes $\hat{B} \equiv \hat{C}$;
- III) A altura, bissetriz e mediana são segmentos coincidentes.

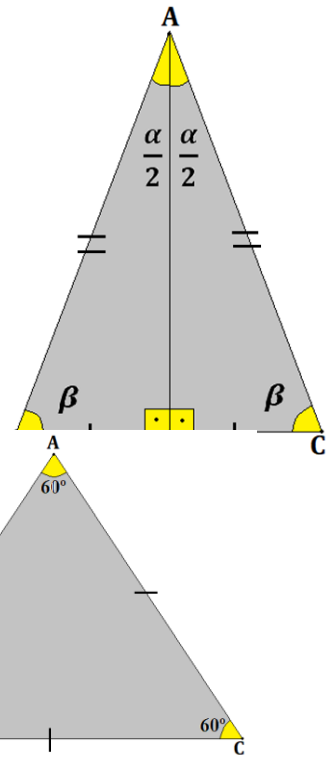
RESUMINDO

- Se \overline{AT} é *Altura*, então \overline{AT} será bissetriz e mediana;
- Se \overline{AT} é *Bissetriz*, então \overline{AT} será altura e mediana;
- Se \overline{AT} é *Mediana*, então \overline{AT} será altura e bissetriz.

PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO ISÓSCELES

Em todo triângulo equilátero tem-se que:

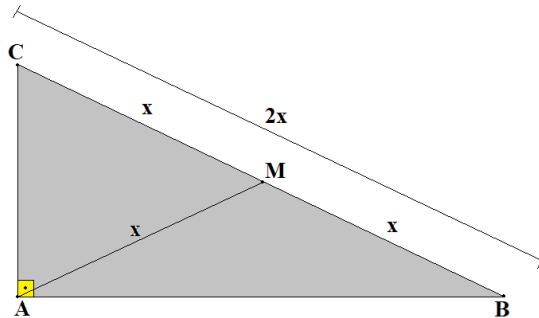
- (I) Os três lados são congruentes $\overline{AB} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{BC}$;
- (II) Os três ângulos são congruentes $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C}$;
- (III) Valem as propriedades do triângulo isósceles.



TEOREMA DA MEDIANA RELATIVA A HIPOTENUSA DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

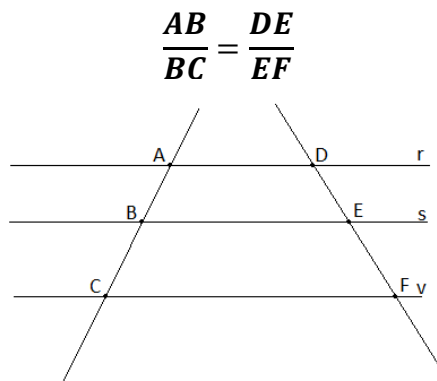
Em todo triângulo retângulo, a mediana \overline{AM} relativa a hipotenusa \overline{BC} mede metade da hipotenusa.

$$\# \overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2}$$



TEOREMA DE TALES:

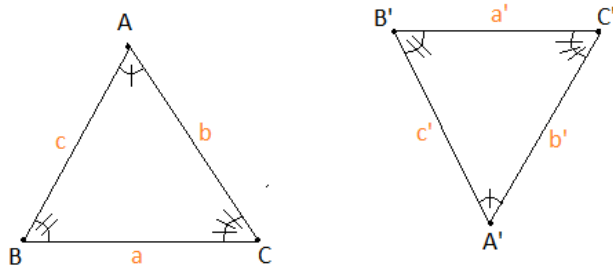
Se duas retas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma reta transversal é igual à razão dos segmentos determinados pela outra.



SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS - D49:

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \right. \longleftrightarrow \text{CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K (\text{razão de semelhança})$$



Obs.: Se dois triângulos são semelhantes, os demais elementos lineares e homólogos como alturas, perímetros e medianas também serão proporcionais.

Casos mínimos para se concluir que dois triângulos são semelhantes:

1º) CASO (AA): Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois ângulos do outro.

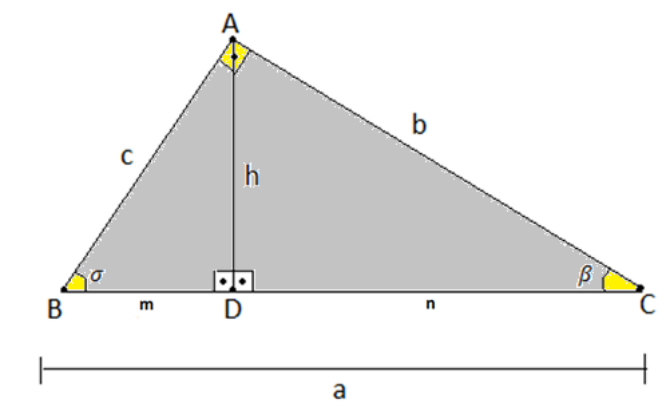
2º) CASO (LLL): Dois triângulos são semelhantes se os lados de um são proporcionais aos lados do outro.

3º) CASO (LAL): Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais.

4º) CASO (Teorema Fundamental da Semelhança): Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina outro triângulo semelhante ao primeiro.

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO – D50:

A altura relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo ABC divide-o em dois triângulos retângulos semelhantes a ele e semelhantes entre si. Podemos encontrar as seguintes relações:



RELAÇÕES

I) $c^2 = a \cdot m$

II) $a \cdot h = b \cdot c$

III) $b^2 = a \cdot n$

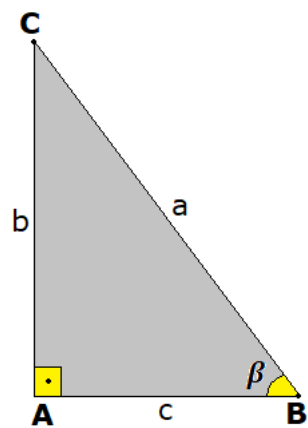
IV) $h^2 = m \cdot n$

V) $b^2 + c^2 = a^2$ (*Teorema de Pitágoras*)

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO – D53:

Dado um triângulo retângulo ABC, retângulo em \hat{A} , podemos destacar as seguintes relações trigonométricas em

relação aos ângulos agudos \hat{B} e \hat{C} :



I) Seno: É a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$\text{sen}\beta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

II) Cosseno: É a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$\text{cos}\beta = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

III) Tangente: É a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente.

$$\text{tan}\beta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

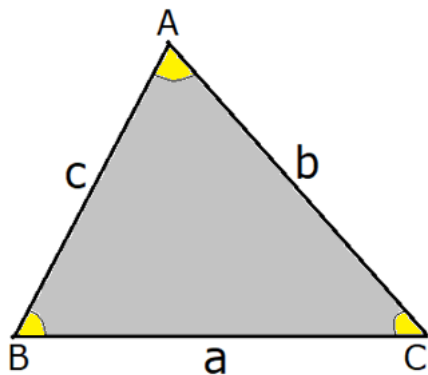
Tabela dos ângulos notáveis

Ângulo/Razão	30°	45°	60°
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NUM TRIÂNGULO QUALQUER:

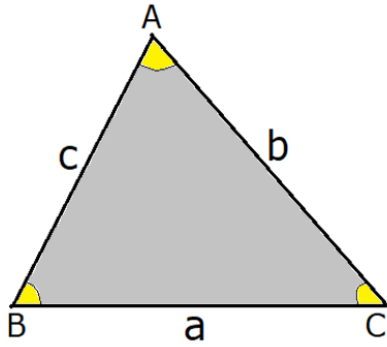
Em um triângulo qualquer pode-se utilizar das relações trigonométricas definidas pela Lei dos Senos e Lei dos Cossenos que relacionam lados e ângulos internos.

Lei dos Senos: Em qualquer triângulo, cada lado é proporcional ao seno do ângulo oposto.



$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

Lei dos Cossenos: Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



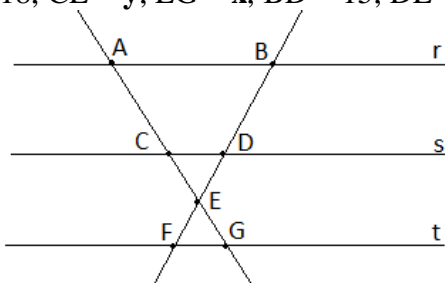
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

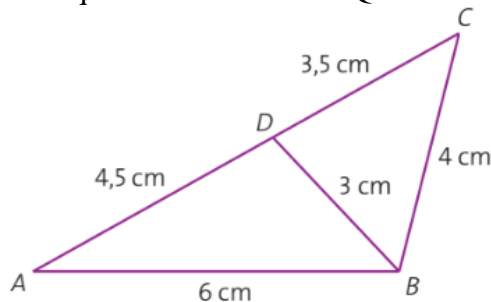
EXERCÍCIO

1ª) Na figura, $r \parallel s \parallel t$. Sabe-se que $AC = 18$, $CE = y$, $EG = x$, $BD = 15$, $DE = 2$, $EF = 3$. Qual é o valor de $x + y$?

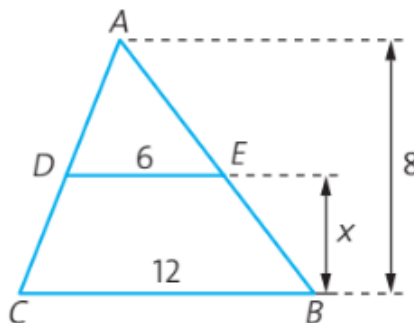


2ª) (Fuvest-SP) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. Qual a altura do poste?

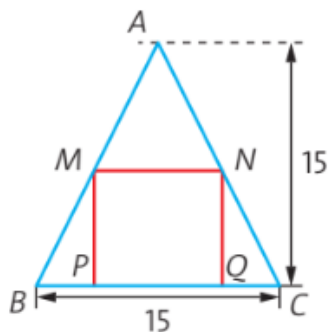
3ª) Dos três triângulos desta figura, há dois que são semelhantes. Quais são eles:



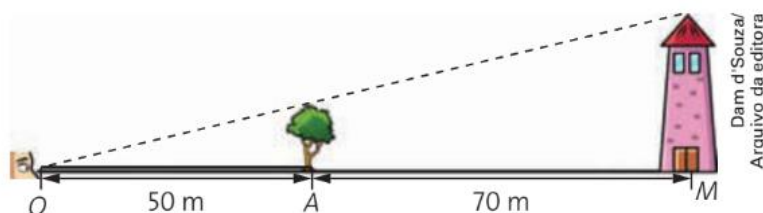
4ª) Determine o valor de x na figura abaixo:



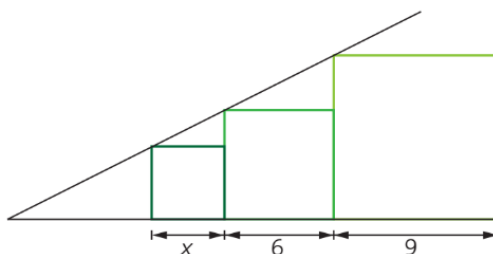
5ª) Determine o valor do maior lado do retângulo MNPQ abaixo, sabendo que a base do retângulo mede o dobro da sua altura.



6ª) Na figura abaixo considere que a medida da altura da árvore é de 10 m, a distância da árvore ao ponto M é de 70 m. Considerando que o olho do observador, o topo da árvore e o topo da torre estão alinhados, qual é, aproximadamente, a medida da altura da torre?

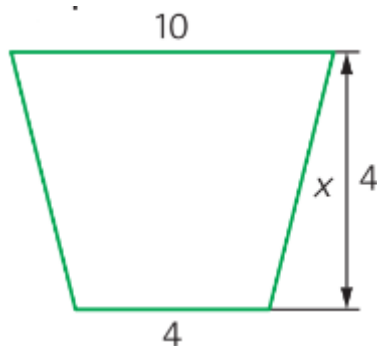


7ª) Sabendo que na figura abaixo temos três quadrados, calcule o valor de x :

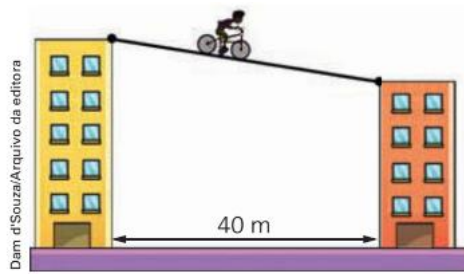


8ª) Uma torre de televisão de 40 m de altura vai ser sustentada por três cabos de mesmo comprimento. Os cabos serão presos na torre a 25 m de altura, e os três ganchos, no solo para prender os cabos estarão a 6 m da base da torre. Quantos metros de cabo, aproximadamente, serão necessários para a sustentação da torre?

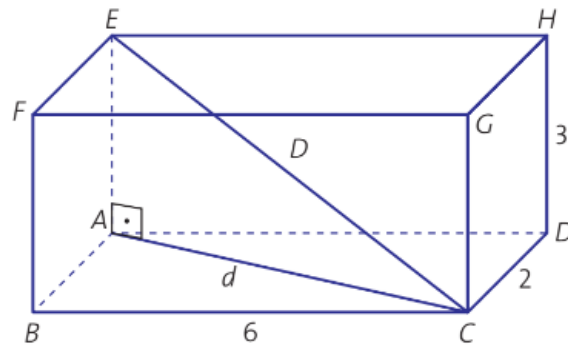
9ª) Determine o valor de x na figura:



10ª) Um ciclista acrobático vai atravessar de um prédio a outro com a sua bicicleta especial. A altura de um dos prédios é 25 m e do outro é 15 m. A distância entre eles é de 40 m. Qual é a medida mínima do comprimento do cabo no qual a bicicleta se apoia?

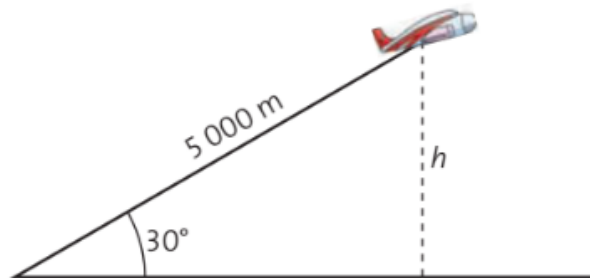


11ª) O bloco retangular é um sólido formado por 6 regiões retangulares. Considere o bloco retangular da figura e determine:

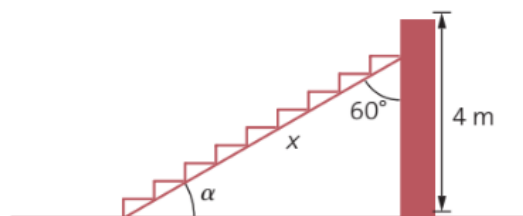


- A medida **d** da diagonal AC do retângulo ABCD;
- A medida **D** da diagonal EC do bloco retangular.

12ª) Na figura a seguir, qual a altura do avião em relação ao chão?

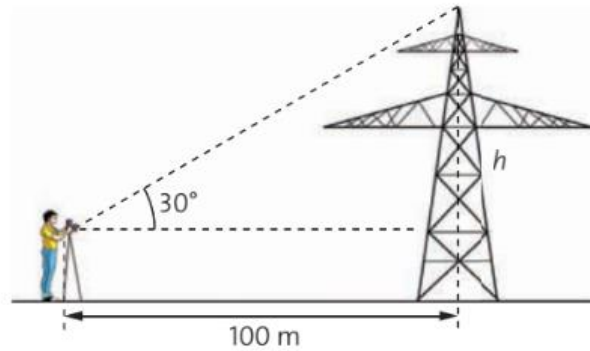


13ª) Observe a figura a seguir e responda:

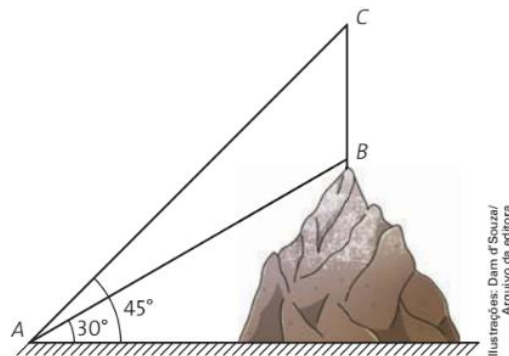


- Qual o comprimento da escada?
- Qual o ângulo formado pela escada e o chão?

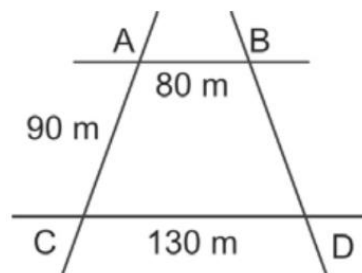
14ª) Para determinar a altura de uma torre, um topógrafo coloca o teodolito a 100 m da base e obtém um ângulo de 30° , conforme mostra a figura. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,70 m do solo, qual é aproximadamente a altura da torre?



15ª) (PUC-RS) De um ponto A no solo, visam-se a base B e o topo C de um bastão colocado verticalmente no alto de uma colina, sob ângulos de 30° e 45° , respectivamente. Se o bastão mede 4 m de comprimento, a altura da colina, em metros, é aproximadamente?



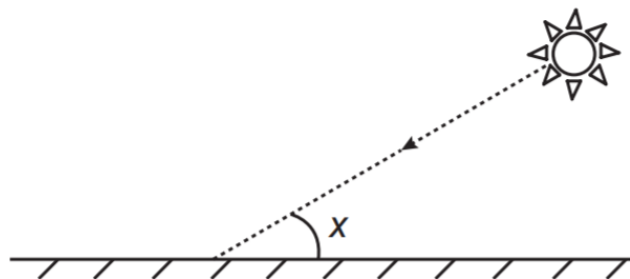
16ª) (SAS/ENEM-2012) A figura abaixo representa o cruzamento de quatro retas sendo as ruas AB e CD paralelas. Os amigos Koltron e Moltron sempre caminham por estas ruas e combinaram que um caminharia pela rua AC e outro pela rua BD até se encontrarem num ponto E, no cruzamento destas ruas.



A que distância da esquina A se deu o encontro dos amigos, em metros?

- a) 55,38
- b) 110
- c) 144
- d) 146,25
- e) 150

17ª) (ENEM 2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo X com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \sin(x)$, sendo k uma constante, e supondo-se que X está entre 0° e 90° .

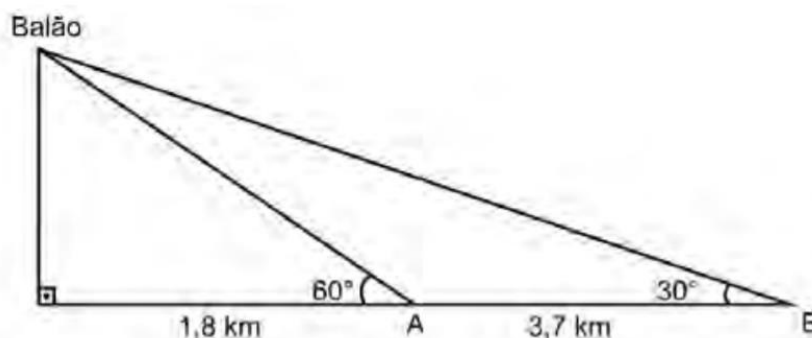


Quando $x = 30^\circ$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

- a) 33% b) 50% c) 57% d) 70% e) 86%

18ª) (ENEM 2010) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

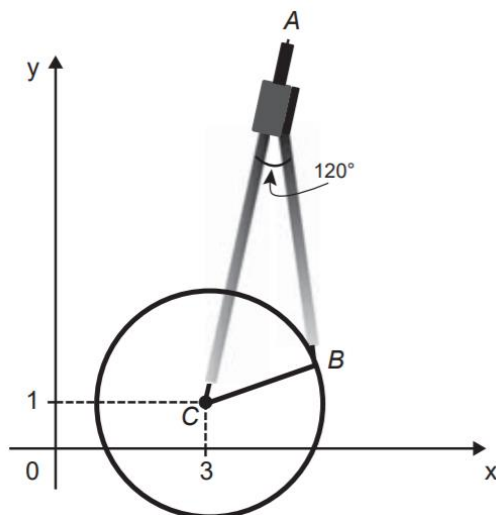
Disponível em: <http://www.correiodobrasil.com.br>. Acesso em: 02 maio 2010.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60° ; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30° . Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

- a) 1,8 km
b) 1,9 km
c) 3,1 km
d) 3,7 km
e) 5,5 km

19ª) (ENEM 2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120° . A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

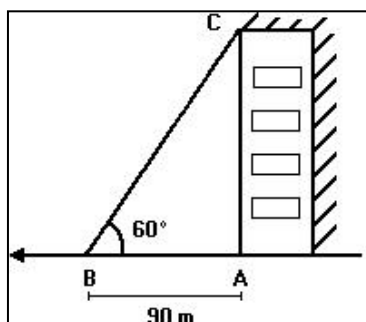
- a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

20ª) (VUNESP) Uma pessoa, no nível do solo, observa o ponto mais alto de uma torre vertical, à sua frente, sob o ângulo de 30° . Aproximando-se 40 metros da torre, ela passa a ver esse ponto sob o ângulo de 45° . A altura aproximada da torre, em metros, é

- a) 44,7. b) 48,8. c) 54,6. d) 60,0. e) 65,3.

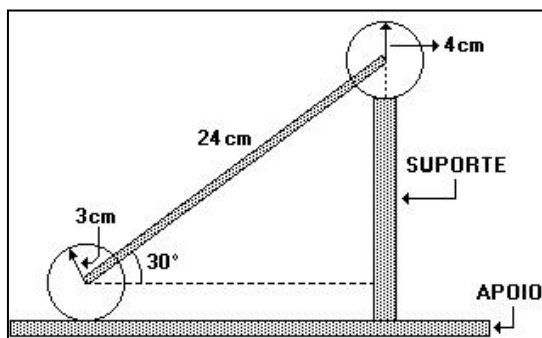
21ª) (PUCCAMP) Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura adiante. Se ela caminhar 90 metros em linha reta, chegará a um ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio, sob um ângulo de 60° . Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30° ?

- a) 150.
b) 180.
c) 270.
d) 300.
e) 310.



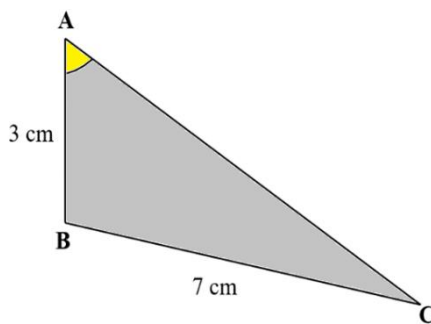
22ª) (PUCCAMP) A figura a seguir é um corte vertical de uma peça usada em certo tipo de máquina. No corte aparecem dois círculos, com raios de 3cm e 4cm, um suporte vertical e um apoio horizontal. A partir das medidas indicadas na figura, conclui-se que a altura do suporte é

- a) 7cm.
- b) 11cm.
- c) 12cm.
- d) 14cm.
- e) 16 cm.



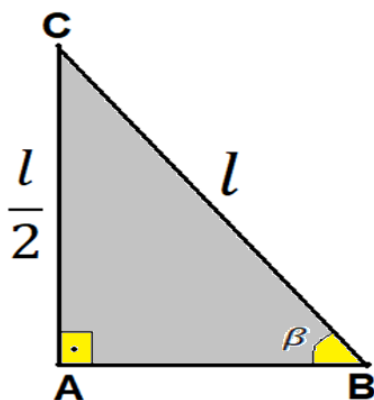
23ª) Num triângulo ABC, o ângulo \hat{A} mede 60° e o lado oposto mede 7 cm. Se um dos lados adjacentes ao ângulo \hat{A} mede 3 cm, qual a medida do outro lado do triângulo?

- a) 8cm
- b) 8,5cm
- c) 9cm
- d) 9,5cm
- e) 10cm



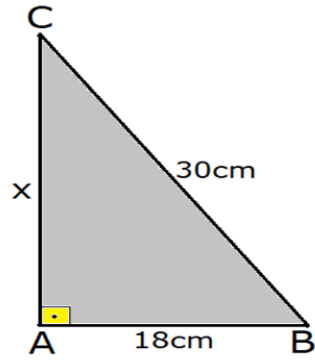
24ª) A medida β do ângulo \hat{B} abaixo é

- a) 30° .
- b) 45° .
- c) 60° .
- d) 70° .
- e) 80° .



25ª) A medida x indicada na figura abaixo é

- a) 20cm.
- b) 22cm.
- c) 24cm.
- d) 25cm.
- e) 28cm.



Bons estudos!