# Optimización

FAMAF, UNC – 2020

## Guía de ejercicios 2: convexidad y minimización de cuadráticas

1. Probar que la intersecciń de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

2. Probar que $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq c, c > 0\}$ es un conjunto convexo, donde $\|\cdot\|$ es una norma cualquiera en $\mathbb{R}^n$.

3. Verificar que las siguientes funciones son convexas:

   *a)* $f(x) = \max\{g(x), h(x)\}$, donde $g$ y $h$ son funciones convexas;

   *b)* $s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$;

4. Sea $g$ una función monótona no decreciente de una variable (es decir, $x_1 > x_2$ implica que $g(x_1) \geq g(x_2)$), que ademÃ¡s es convexa y sea $f$ una función convexa definida en un conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Mostrar que la función $(g \circ f)$ es convexa en $\Omega$.

5. Considere la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Sea $x_*$ un minimizador local de $f$. Probar que $x_*$ es un minimizador global.

6. A través de un gráfico mostrar que si $d$ es una dirección tal que $\nabla^T f(x)d = 0$ entonces $d$ puede ser de descenso, ascenso o ninguna de las dos cosas.

7. Supongamos que se utiliza un método de direcciones de descenso con búsqueda lineal exacta para minimizar una función cuadrática $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Mostrar que el paso óptimo está dado por

   $$\lambda = -\frac{d^T \nabla q(x)}{d^T \nabla^2 q(x) d},$$

   donde $d$ es la dirección de descenso usada a partir del punto $x$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^1$. Para $k = 0, 1, 2, ...$ definimos $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$ donde $\lambda_k \geq \bar{\lambda} > 0$. Supongamos que $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ converge a $x^*$. Probar que $\nabla f(x^*) = 0$.

9. Probar que en el método del gradiente con búsqueda lineal exacta se cumple que
   $\nabla^T f(x^k)\nabla f(x^{k+1}) = 0$.

10. Dibujar las curvas de nivel de la función $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2$. Encontrar el punto $x^*$ que minimiza $f$. Probar que el método del gradiente, aplicado a partir de $x^0 = (0, 0)$ no puede converger a $x^*$ en un número finito de pasos, si usamos búsqueda lineal exacta. Â¿Existe algún punto $x^0$ para el cual el método converge en un número finito de pasos?

11. Aplicar el método del máximo descenso con búsqueda lineal exacta para minimizar la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$ con

    $$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

    Donde $\gamma$ es un parámetro (usar, por ejemplo, $\gamma = 1, 10, 100, 1000$). Analizar la convergencia de la sucesión generada por el método iterativo, realizando por lo menos 4 iteraciones, o varias más en una computadora.

12. Considerar el problema de minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$.

    *a*) si se utiliza el método del máximo descenso con búsqueda lineal exacta, comenzando con $x^0 = (2, 1)$, la sucesión generada por el algoritmo se puede escribir como

    $$x^k = (\frac{1}{3})^k \begin{pmatrix} 2 \\ (-1)^k \end{pmatrix}.$$

    *b*) Mostrar que $f(x^{k+1}) = f(x^k)/9$.

    *c*) Analizar la convergencia en este caso.

13. Considerar el problema de minimizar $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$, donde $Q$ es una matriz simétrica y definida positiva. Sea $x^*$ el minimizador de esta función. Sea $v$ un autovector de $Q$ y $\lambda$ un autovalor asociado. Supongamos que se inicia el método del máximo descenso con $x^0 = x^* + v$.

    *a*) Mostrar que $\nabla f(x^0) = \lambda v$.

    *b*) Mostrar que si realiza un paso del método del máximo descenso $\alpha_0 = 1/\lambda$.

    *c*) Probar que el método del máximo descenso con búsqueda lineal exacta converge al mínimo de $f$ en sólo una iteración.

    *d*) Confirmar este resultado considerando la función $f(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 6x_2$. Realizar una iteración del método del máximo descenso usando $x^0 = (1, 2)$ y verificar que el punto obtenido es la única solución $x^*$. Verificar también que $x^0 - x^*$ es un autovector de la matriz Hessiana.

14. Aplicar el método de gradientes conjugados al problema $Ax = b$, donde

    $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

    Verificar que los vectores $p_i$ son $A$-conjugados y los vectores son $r_i$ son ortogonales.

15. Probar que el método de gradientes conjugados converge en una iteración si $A = kI$, donde $k$ es una constante positiva.

16. Dada $A$ una matriz simétrica y definida positiva, probar que si los vectores $v_i$ son $A$-conjugados entonces son linealmente independientes.

17. Implementar el método del máximo descenso y el método de gradientes conjugados para minimizar una cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, donde $A$ es simétrica y definida positiva. Usar el vector nulo como vector inicial para ambas implementaciones. Comparar ambas implementaciones usando

    $$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{y } b = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 16 \\ 1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$