Optimización

FAMAF, UNC - 2020

Guía de Ejercicios 1: problemas de minimización y condiciones de optimalidad

1. Analizar, con ejemplos, que ocurre cuando se eliminan de las hipótesis de continuidad o compacidad en el teorema de Bolzano-Weierstrass.

2. Encontrar un ejemplo donde todos los puntos de Ω sean minimizadores locales pero $f(x) \neq f(y)$ para $x \neq y$.

3. Probar que si f es continua en $\mathbb{R}^n$ y $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$, entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

4. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Probar que minimizar f es equivalente a minimizar $g(f(x))$.

5. Dados los números reales $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n$. Hallar la solución de los siguientes problemas.

   a) Minimizar $\sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$;

   b) Minimizar Máximo $\{|x - a_i|, i = 1, \ldots, n\}$;

   c) Minimizar $\sum_{i=1}^{n} |x - a_i|^2$;

   d) Maximizar $\Pi_{i=1}^{n} |x - a_i|$.

6. Graficar la función $f(x) = (x+1)x(x-2)(x-5) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x$. Graficar esta función y localizar (aproximadamente) los minimizadores/maximizadores locales y globales.

7. Encontrar los puntos estacionarios de $f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$. Cuáles de tales puntos son minimizadores, maximizadores, locales o globales?

8. Calcular los puntos críticos y sus Hessianas correspondientes de las siguientes funciones $f(x, y) = xe^{-y^2} + x^2$, $g(x, y) = x^2 + y^4$, $h(x, y) = x^4 + y^4$, $w(x, y) = xy$. Son maximizadores, minimizadores, puntos de silla?

9. Sea f 2 veces continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^n$ tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. Su matriz Hessiana es necesariamente definida positiva o negativa?

10. Dar ejemplos de funciones que satisfagan las siguientes propiedades:

    a) x_* es un minimizador local de f en Ω pero $\nabla f(x_*) \neq 0$;

    b) x_* es un minimizador local de f en Ω pero $\nabla^2 f(x_*)$ no es semidefinida positiva;

    c) $x_* \in \Omega, \Omega$ abierto, $\nabla f(x_*) = 0$ pero x_* no es un minimizador local de f;

    d) $x_* \in \Omega, \Omega$ abierto, $\nabla f(x_*) = 0, \nabla^2 f(x_*) \geq 0$ pero x_* no es un minimizador local;

    e) $x_* \in \Omega, \Omega$ abierto, x_* minimizador local estricto, pero $\nabla^2 f(x_*)$ no es definida positiva.

11. Sea $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$. Verificar que $\hat{x} = (0, 0)$ es un minimizador local de $\phi(\lambda) = f(\hat{x} + \lambda d)$ para todo $d \in \mathbb{R}^2$ pero $\hat{x}$ no es un minimizador local de f.

12. Considere el sistema no lineal

$$f_i(x) = 0, \quad f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\, i = 1, \ldots, m.$$

Cómo resolvería el sistema con técnicas de minimización irrestricta?

13. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con derivadas continuas. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|F(x)\|_2^2$. Sea x_* un minimizador local de f tal que $J_F(x_*)$ es no singular. Probar que x_* es solución del sistema $F(x) = 0$.

14. Considerar la función $f(x) = (x_1 - 1)^2 x_2$ y puntos de la forma $\hat{x} = (1, x_2)$.

    a) Analizar las condiciones de optimalidad de primer y segundo orden para esos puntos;

    b) qué se puede afirmar sobre $\hat{x}$ utilizando tales condiciones?;

    c) usar la expresión de la función para obtener afirmaciones más concluyentes sobre los puntos $\hat{x}$.

15. Considerar el problema

$$\begin{array}{cl} \text{Minimize} & f(x) = x_1 \\ \text{s. a} & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1^2 \geq 1. \end{array}$$

Graficar el conjunto factible. Usar el grÃ¡fico para encontrar todos los minimizadores locales. Determinar si también son minimizadores globales.

16. En $\mathbb{R}^2$ considere las siguientes restricciones: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_2 - (x_1 - 1)^2 \leq 0$. Probar que $(1, 0)$ es un punto factible pero no es un punto regular.

17. Considere el problema

$$\begin{array}{cl} \text{Maximizar} & x_2^3 \\ \text{s. a} & (x_1 - x_2)^3 \geq 0 \\ & (x_1 + x_2 - 2)^3 \leq 0. \end{array}$$

Resuelva y analice las condiciones de optimalidad.

18. Encuentre todas las soluciones globales del problema de maximizar x_1 sujeta a las restricciones:

$$\begin{array}{rcl} x_2 - \text{sen} x_1 & = & 0 \\ x_2^2 - 1 & = & 0 \\ -10 \leq x_1 & \leq & 10. \end{array}$$

19. Considere el problema

$$\begin{array}{cl} \text{Minimizar} & x_1 \\ \text{s. a} & x_2 \geq 0 \\ & x_2 \leq x_1^3. \end{array}$$

Cual es la solución? Se verifican las condiciones KKT? Por qué?

20. Resolver el problema

$$\begin{array}{cl} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{s. a} & \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ & \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1. \end{array}$$

21. Considerar el problema

$$\begin{array}{cl} \text{Maximizar} & f(x) = c^T x \\ \text{s. a} & x^T Q x \leq 1, \end{array}$$

donde Q es una matriz simétrica y definida positiva.

a) Resolver el problema y determinar cual es el valor objetivo óptimo.

b) Resolver el problema cambiando maximizar por minimizar.

22. Determinar los minimizadores/maximizadores de los siguientes problemas usando las condiciones KKT. Ayuda: graficar los respectivos conjuntos factibles.

    a) $f(x_1, x_2) = x_2$, sujeto a $x_1^2 + x_2^2 \leq 1, -x_1 + x_2^2 \leq 0, x_1 + x_2 \geq 0$.

    b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$, sujeto a $x_1^3 + x_2^3 \leq 1, x_1^2 + x_2^2 \geq 1$.

23. Resuelva los siguientes problemas usando las condiciones KKT:

    a) Minimizar $\sum_{i=1}^{n}(1/x_i)$ s. a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$, $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$;

    b) Maximizar $\Pi_{i=1}^{n} x_i$ s. a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$.