AMAT

FORECASTING

SERIES DE TIEMPO

LECCIÓN 7

Applied Mathematics and Actuary Training

Applied Mathematics and Actuary Training

FORECASTING

Lección 7 – Modelos ARIMA

DEFINICIÓN

OPERADOR DE DIFERENCIAS (∇)

HERRAMIENTA MATEMÁTICA → **DIFERENCIA** términos adyacentes de la serie $\{x_t\}$

Se define como:

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1} = (1-\boldsymbol{B})x_t$$

Y en general, obtenemos:

$$\nabla^n = (1-\boldsymbol{B})^n$$

Diferenciar series puede:

- Remover tendencias
- Convertir series no estacionarias en estacionarias

Ejemplos

- ***CAMINATA ALEATORIA***

$$x_t = x_{t-1} + w_t \iff x_t - x_{t-1} = w_t \iff \nabla x_t = w_t$$

∴ Diferencia en primer orden (∇x_t) es únicamente ruido blanco (w_t), y por lo tanto es estacionaria

- ***TENDENCIA LINEAL CON ERRORES***

$$x_t = a + bt + w_t \qquad \nabla x_t = x_t - x_{t-1}$$

$$\iff \nabla x_t = (a + bt + w_t) - (a + b(t-1) + w_{t-1})$$

$$= b + w_t - w_{t-1}$$

∴ Diferencia en primer orden (∇x_t) es una serie de Promedio Móvil, por definición es estacionaria

MODELOS ESTOCÁSTICOS

MODELOS INTEGRADOS (I)

Una serie $\{x_t\}$ es integrada de orden d si:

$$\nabla^d x_t = (1 - \boldsymbol{B})^d x_t = w_t$$

La serie diferenciada de orden d

Es únicamente ruido blanco

Ejemplo

- ***CAMINATA ALEATORIA***

$$x_t = x_{t-1} + w_t \quad \Leftrightarrow \quad x_t - x_{t-1} = w_t$$

$$\Leftrightarrow \nabla x_t = w_t$$

$\therefore$ Diferencia en primer orden (∇x_t) es únicamente ruido blanco (w_t)

La caminata aleatoria es el caso especial $I(1)$

AMAT

MODELOS ESTOCÁSTICOS
MODELOS ARIMA

Modelo Autorregresivo Integrado de Promedio Móvil de orden p, d, q:

$\boldsymbol{ARIMA(p, d, q)}$

La **diferencia de orden *d* convierte** a la serie $\{x_t\}$ en un modelo $\boldsymbol{ARMA(p, q)}$

- Introducimos a:

$$y_t = (1 - \boldsymbol{B})^d x_t$$

- Si podemos expresarla como:

$$\theta_p(\boldsymbol{B}) y_t = \phi_q(\boldsymbol{B}) w_t$$

$\theta_p(\boldsymbol{B})$: *Polinomio de grado p*
$\phi_q(\boldsymbol{B})$: *Polinomio de grado q*

- Sustituyendo, tenemos:

$$\theta_p(\boldsymbol{B})(1 - \boldsymbol{B})^d x_t = \phi_q(\boldsymbol{B}) w_t$$

- Decimos que $\{x_t\}$ sigue un modelo $ARIMA(p, d, q)$

Ejemplos

- ❑ $x_t = x_{t-1} + w_t + \beta w_{t-1}$

$$\Rightarrow x_t - x_{t-1} = w_t + \beta w_{t-1}$$
$$\Rightarrow (1 - \boldsymbol{B}) x_t = (1 - \beta \boldsymbol{B}) w_t$$

∴ Se trata de un modelo *ARIMA(0,1,1)* al que podremos llamara únicamente como *IMA(1,1)*

- ❑ $x_t = \alpha x_{t-1} + x_{t-1} - \alpha x_{t-2} + w_t$

$$\Rightarrow x_t - x_{t-1} - \alpha x_{t-1} + \alpha x_{t-2} = w_t$$
$$\Rightarrow (1 - \boldsymbol{B}) x_t - \alpha(1 - \boldsymbol{B}) x_{t-1} = w_t$$
$$\Rightarrow (1 - \boldsymbol{B})\,(x_t - \alpha x_{t-1}) = w_t$$
$$\Rightarrow (1 - \boldsymbol{B})\,(1 - \alpha \boldsymbol{B})\, x_t = w_t$$

∴ Se trata de un modelo *ARIMA(1,1,0)* al que podremos llamar únicamente como *ARI(1,1)*

AMAT

MODELOS ESTOCÁSTICOS
MODELOS SARIMA

Modelo ARIMA Estacional

$ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$

Diferencia de orden *D* en un lag igual al número de estaciones (s)

- Incluye autorregresivos y promedio móvil en lag (s):

$$\Theta_P(\boldsymbol{B}^s)\theta_p(\boldsymbol{B})(1-\boldsymbol{B}^s)^D(1-\boldsymbol{B})^d x_t = \Phi_Q(\boldsymbol{B}^s)\phi_q(\boldsymbol{B})w_t$$

$\theta_p(\boldsymbol{B})$: *Polinomio de grado* $\boldsymbol{p}$ *para* $\boldsymbol{B}$
$\phi_q(\boldsymbol{B})$: *Polinomio de grado* $\boldsymbol{q}$ *para* $\boldsymbol{B}$
$\Theta_P(\boldsymbol{B})$: *Polinomio de grado* $\boldsymbol{P}$ *para* $\boldsymbol{B}^s$
$\Phi_Q(\boldsymbol{B})$: *Polinomio de grado* $\boldsymbol{Q}$ *para* $\boldsymbol{B}^s$

- Son modelos usualmente no estacionarios.

- Decimos que $\{x_t\}$ sigue un modelo $ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$

Ejemplos

- $x_t = \alpha_1 x_{t-12} + \alpha_2 x_{t-24} + w_t$

$$\Rightarrow x_t - \alpha_1 x_{t-12} - \alpha_2 x_{t-24} = w_t$$
$$\Rightarrow (1-\alpha_1\boldsymbol{B}^{12} - \alpha_2(\boldsymbol{B}^{12})^2)x_t = w_t$$
$$\Rightarrow \Theta_2(\boldsymbol{B}^{12})x_t = w_t$$

$\therefore \boldsymbol{ARIMA(0,0,0)(2,0,0)_{12}}$

- $x_t = x_{t-1} + \alpha x_{t-4} - \alpha x_{t-5} + w_t$

$$\Rightarrow x_t - x_{t-1} - \alpha x_{t-4} + \alpha x_{t-5} = w_t$$
$$\Rightarrow (1-\boldsymbol{B})x_t - \alpha(1-\boldsymbol{B})x_{t-4} = w_t$$
$$\Rightarrow (1-\boldsymbol{B})x_t - \alpha(1-\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^4 x_t = w_t$$
$$\Rightarrow (1-\boldsymbol{B})(x_t - \alpha\boldsymbol{B}^4 x_t) = w_t$$
$$\Rightarrow (1-\boldsymbol{B})(1-\alpha\boldsymbol{B}^4)x_t = w_t$$

$\therefore \boldsymbol{ARIMA(0,1,0)(1,0,0)_4}$

PRECISIÓN DE PRONÓSTICOS

ME
(Mean Error)

Promedio de los errores de pronósticos
- *Positivo: Sobreestima*
- *Negativo: Subestima*

MAE
(Mean Absolute Error)

Promedio de los valores absolutos de errores de pronósticos. Mide magnitud sin importar dirección.

RMSE
(Root Mean Squared Error)

Raíz cuadrada del promedio de cuadrados de errores de pronósticos. Sensible a errores grandes.

MSE
(Mean Squared Error)

Promedio de los cuadrados de errores de pronósticos. Más énfasis a errores grandes que los anteriores.

MASE
(Mean Absolute Scaled Error)

Compara el MAE del pronóstico con el MAE obtenido con un pronóstico Naive.
- *Independiente de la escala*
- *Útil para comparar diferentes series*

RMSSE
(Root Mean Squared Scaled Error)

Compara el RMSE del pronóstico con el RMSE obtenido con un pronóstico Naive.
- *Independiente de la escala*
- *Útil para comparar diferentes series*

MPE
(Mean Percentage Error)

Promedio del porcentaje de error.
Engañoso si hay valores cero o muy pequeños en los datos reales

MAPE
(Mean Absolute Percentage Error)

Promedio de los errores porcentuales absolutos.
Engañoso si hay valores cero o muy pequeños en los datos reales

$$e_t = x_t - \hat{x}_t$$

e_t: *Error observado en la serie a tiempo t*

x_t: *Valor observado en la serie a tiempo t*

$\hat{x}_t$: *Valor pronosticado en la serie a tiempo t*

FORECASTING

SERIES DE TIEMPO

Modelos ARIMA | Lección 7

LECCIÓN 7

Applied Mathematics and Actuary Training