

FORECASTING

SERIES DE TIEMPO

LECCIÓN 7

Applied Mathematics and Actuary Training

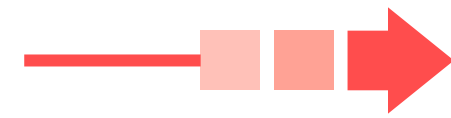


FORECASTING

Lección 7 – Modelos ARIMA

DEFINICIÓN OPERADOR DE DIFERENCIAS (∇)

HERRAMIENTA
MATEMÁTICA



DIFERENCIA
términos adyacentes de
la serie $\{x_t\}$

Se define como:

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1} = (1 - \mathbf{B})x_t$$

Y en general, obtenemos:

$$\nabla^n = (1 - \mathbf{B})^n$$

Diferenciar series puede:

- Remover tendencias
- Convertir series no estacionarias en estacionarias

Ejemplos

❑ CAMINATA ALEATORIA

$$x_t = x_{t-1} + w_t \Leftrightarrow x_t - x_{t-1} = w_t \Leftrightarrow \nabla x_t = w_t$$

\therefore Diferencia en primer orden (∇x_t) es únicamente ruido blanco (w_t), y por lo tanto es estacionaria

❑ TENDENCIA LINEAL CON ERRORES

$$x_t = a + bt + w_t \qquad \nabla x_t = x_t - x_{t-1}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \nabla x_t &= (a + bt + w_t) - (a + b(t-1) + w_{t-1}) \\ &= b + w_t - w_{t-1} \end{aligned}$$

\therefore Diferencia en primer orden (∇x_t) es una serie de Promedio Móvil, por definición es estacionaria

MODELOS ESTOCÁSTICOS

MODELOS INTEGRADOS (I)

Una serie $\{x_t\}$ es integrada de orden d si:

$$\nabla^d x_t = (1 - \mathbf{B})^d x_t = w_t$$

La serie diferenciada de orden d

Es únicamente ruido blanco

Ejemplo

□ CAMINATA ALEATORIA

$$x_t = x_{t-1} + w_t \quad \Leftrightarrow \quad x_t - x_{t-1} = w_t$$

$$\Leftrightarrow \nabla x_t = w_t$$

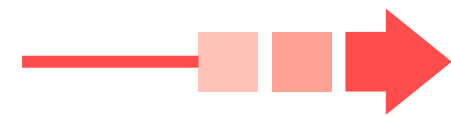
\therefore Diferencia en primer orden (∇x_t) es únicamente ruido blanco (w_t)

La caminata aleatoria es el caso especial $I(1)$

MODELOS ESTOCÁSTICOS

MODELOS ARIMA

Modelo Autorregresivo
Integrado de Promedio
Móvil de orden p, d, q :



La **diferencia de orden d**
convierte a la serie $\{x_t\}$
en un modelo **$ARMA(p, q)$**

$ARIMA(p, d, q)$

➤ Introducimos a:

$$y_t = (1 - B)^d x_t$$

➤ Si podemos expresarla como:

$$\theta_p(B)y_t = \phi_q(B)w_t$$

$\theta_p(B)$: Polinomio de grado p
 $\phi_q(B)$: Polinomio de grado q

➤ Sustituyendo, tenemos:

$$\theta_p(B)(1 - B)^d x_t = \phi_q(B)w_t$$

➤ Decimos que $\{x_t\}$ sigue un modelo $ARIMA(p, d, q)$

Ejemplos

$$\square x_t = x_{t-1} + w_t + \beta w_{t-1}$$

$$\Rightarrow x_t - x_{t-1} = w_t + \beta w_{t-1}$$

$$\Rightarrow (1 - B)x_t = (1 - \beta B)w_t$$

\therefore Se trata de un modelo $ARIMA(0,1,1)$ al que podremos llamarla únicamente como $IMA(1,1)$

$$\square x_t = \alpha x_{t-1} + x_{t-1} - \alpha x_{t-2} + w_t$$

$$\Rightarrow x_t - x_{t-1} - \alpha x_{t-1} + \alpha x_{t-2} = w_t$$

$$\Rightarrow (1 - B)x_t - \alpha(1 - B)x_{t-1} = w_t$$

$$\Rightarrow (1 - B)(x_t - \alpha x_{t-1}) = w_t$$

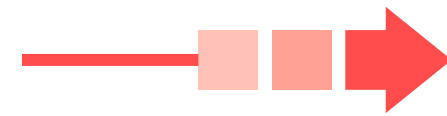
$$\Rightarrow (1 - B)(1 - \alpha B)x_t = w_t$$

\therefore Se trata de un modelo $ARIMA(1,1,0)$ al que podremos llamar únicamente como $ARI(1,1)$

MODELOS ESTOCÁSTICOS

MODELOS SARIMA

Modelo ARIMA
Estacional



Diferencia de orden D
en un lag igual al número
de estaciones (s)

$ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$

- Incluye autorregresivos y promedio móvil en lag (s):

$$\Theta_P(\mathbf{B}^s)\theta_p(\mathbf{B})(1 - \mathbf{B}^s)^D(1 - \mathbf{B})^d x_t = \Phi_Q(\mathbf{B}^s)\phi_q(\mathbf{B})w_t$$

$\theta_p(\mathbf{B})$: Polinomio de grado p para \mathbf{B}

$\phi_q(\mathbf{B})$: Polinomio de grado q para \mathbf{B}

$\Theta_P(\mathbf{B})$: Polinomio de grado P para \mathbf{B}^s

$\Phi_Q(\mathbf{B})$: Polinomio de grado Q para \mathbf{B}^s

- Son modelos usualmente no estacionarios.
- Decimos que $\{x_t\}$ sigue un modelo $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$

Ejemplos

$$\square x_t = \alpha_1 x_{t-12} + \alpha_2 x_{t-24} + w_t$$

$$\Rightarrow x_t - \alpha_1 x_{t-12} - \alpha_2 x_{t-24} = w_t$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha_1 \mathbf{B}^{12} - \alpha_2 (\mathbf{B}^{12})^2) x_t = w_t$$

$$\Rightarrow \Theta_2(\mathbf{B}^{12}) x_t = w_t \quad \therefore \mathbf{ARIMA}(0, 0, 0)(2, 0, 0)_{12}$$

$$\square x_t = x_{t-1} + \alpha x_{t-4} - \alpha x_{t-5} + w_t$$

$$\Rightarrow x_t - x_{t-1} - \alpha x_{t-4} + \alpha x_{t-5} = w_t$$

$$\Rightarrow (1 - \mathbf{B}) x_t - \alpha (1 - \mathbf{B}) x_{t-4} = w_t$$

$$\Rightarrow (1 - \mathbf{B}) x_t - \alpha (1 - \mathbf{B}) \mathbf{B}^4 x_t = w_t$$

$$\Rightarrow (1 - \mathbf{B})(x_t - \alpha \mathbf{B}^4 x_t) = w_t$$

$$\Rightarrow (1 - \mathbf{B})(1 - \alpha \mathbf{B}^4) x_t = w_t$$

$$\therefore \mathbf{ARIMA}(0, 1, 0)(1, 0, 0)_4$$

PRECISIÓN DE PRONÓSTICOS

ME

(Mean Error)

Promedio de los errores de pronósticos

- Positivo: Sobreestima
- Negativo: Subestima

MAE

(Mean Absolute Error)

Promedio de los valores absolutos de errores de pronósticos. Mide magnitud sin importar dirección.

RMSE

(Root Mean Squared Error)

Raíz cuadrada del promedio de cuadrados de errores de pronósticos. Sensible a errores grandes.

MSE

(Mean Squared Error)

Promedio de los cuadrados de errores de pronósticos. Más énfasis a errores grandes que los anteriores.

MASE

(Mean Absolute Scaled Error)

Compara el MAE del pronóstico con el MAE obtenido con un pronóstico Naive.

- Independiente de la escala
- Útil para comparar diferentes series

RMSSE

(Root Mean Squared Scaled Error)

Compara el RMSE del pronóstico con el RMSE obtenido con un pronóstico Naive.

- Independiente de la escala
- Útil para comparar diferentes series

MPE

(Mean Percentage Error)

Promedio del porcentaje de error.
Engañoso si hay valores cero o muy pequeños en los datos reales

MAPE

(Mean Absolute Percentage Error)

Promedio de los errores porcentuales absolutos.
Engañoso si hay valores cero o muy pequeños en los datos reales

$$e_t = x_t - \hat{x}_t$$

e_t : Error observado en la serie a tiempo t

x_t : Valor observado en la serie a tiempo t

\hat{x}_t : Valor pronosticado en la serie a tiempo t

FORECASTING

SERIES DE TIEMPO

Modelos ARIMA | Lección 7