FORECASTING

SERIES DE TIEMPO

LECCIÓN 6

Applied Mathematics and Actuary Training

Applied Mathematics and Actuary Training

FORECASTING

Lección 6 – Modelos ARMA

AMAT

DEFINICIÓN

OPERADOR LAG (B)

HERRAMIENTA MATEMÁTICA → **RETRASA EN EL TIEMPO** *a la serie* $\{x_t\}$

Se define como:

$$\boldsymbol{B}x_t = x_{t-1}$$

Y al aplicarla repetidamente obtenemos:

$$\boldsymbol{B}^n x_t = x_{t-n}$$

Ejemplo

CAMINATA ALEATORIA

$$x_t = x_{t-1} + w_t \quad \Rightarrow \quad x_t = \boldsymbol{B}x_t + w_t$$

$$\Rightarrow (1 - \boldsymbol{B})x_t = w_t$$

MODELOS ESTOCÁSTICOS
MODELOS AUTORREGRESIVOS

Modelo Autorregresivo de orden p: $AR(p)$ → **REGRESIÓN DE** $\{x_t\}$ en p términos anteriores de la misma serie

- Se define como:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + w_t$$

- Puede expresarse en términos del operador lag:

$$\underbrace{\left(1 - \alpha_1 \boldsymbol{B} - \alpha_2 \boldsymbol{B}^2 - \cdots - \alpha_p \boldsymbol{B}^p\right)}_{\theta_p(\boldsymbol{B})} x_t = w_t$$

$\theta_p(\boldsymbol{B})$ – *Polinomio característico*

- Propiedad IMPORTANTE – Condición de estacionariedad

Si el valor absoluto de todas las raíces de $\theta_p(\boldsymbol{B}) = 0$ es mayor a 1

Tenemos un modelo AR **ESTACIONARIO**

Ejemplo

- ***CAMINATA ALEATORIA***

$x_t = x_{t-1} + w_t$ $\qquad$ $\mathrm{AR}(1)$ con $\alpha_1 = 1$

- ***SUAVIZAMIENTO EXPONENCIAL***

$$x_t = \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 x_{t-3} + \cdots$$

$\mathrm{AR(p)}$ con $p \to \infty$ y $\alpha_i = \alpha(1-\alpha)^i$

w_t: *Ruido Blanco*
α_i : *Parámetros del modelo* AR (Estimados al minimizar SSE)

$\alpha_p \neq 0$ *para* $AR(p)$

MODELOS ESTOCÁSTICOS
MODELOS DE PROMEDIO MÓVIL

Modelo Promedio Móvil de orden q:
$\boldsymbol{MA(q)}$

COMBINACIÓN LINEAL del término actual de ruido blanco y los q anteriores

- Se define como:

$$x_t = w_t + \beta_1 w_{t-1} + \beta_2 w_{t-2} + \cdots + \beta_q w_{t-q}$$

- Puede expresarse en términos del operador lag:

$$x_t = \underbrace{\left(1 + \beta_1 \boldsymbol{B} + \beta_2 \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{2}} + \cdots + \beta_q \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{q}}\right)}_{\phi_q(\boldsymbol{B})\ -\ \textit{Polinomio característico}} w_t$$

- Propiedad IMPORTANTE – Condición de estacionariedad

Los modelos MA son ESTACIONARIOS POR DEFINICIÓN

w_t: *Ruido Blanco a tiempo* t
β_i : *Parámetros del modelo MA*
(Estimados al minimizar SSE)

$\beta_q \neq 0$ *para* $MA(q)$

INVERTIBILIDAD

Modelo MA invertible puede expresarse como $\boldsymbol{AR(\infty)}$

Si el valor absoluto de todas las raíces de $\phi_q(\boldsymbol{B}) = 0$ es mayor a 1

Tenemos un modelo MA **INVERTIBLE**

MODELOS ESTOCÁSTICOS
MODELOS ARMA

Modelo Mixto ARMA de orden p y q:

$$\boldsymbol{ARMA(p,q)}$$

COMBINACIÓN LINEAL de un modelo *AR(p)* y un modelo *MA(q)*

w_t: *Ruido Blanco a tiempo t*
α_i : *Parámetros de sección AR*
β_j : *Parámetros de sección MA*
(Estimados al minimizar SSE)

$\alpha_p \neq 0 \ y \ \beta_q \neq 0 \ para \ ARMA(p,q)$

- Se define como:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + w_t + \beta_1 w_{t-1} + \cdots + \beta_q w_{t-q}$$

- Puede expresarse en términos del operador lag:

$$\underbrace{\left(1 - \alpha_1 \boldsymbol{B} - \cdots - \alpha_p \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{p}}\right)}_{\theta_p(\boldsymbol{B})} x_t = \underbrace{\left(1 + \beta_1 \boldsymbol{B} + \cdots + \beta_q \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{q}}\right)}_{\phi_q(\boldsymbol{B})} w_t$$

- Propiedades IMPORTANTES

Valor absoluto de raíces de $\theta_p(\boldsymbol{B}) = 0$ mayor a 1 $\Rightarrow$ *Proceso Estacionario*

Valor absoluto de raíces de $\phi_q(\boldsymbol{B}) = 0$ mayor a 1 $\Rightarrow$ *Proceso Invertible*

NOTAS

$AR(p)$ caso especial $ARMA(p,0)$

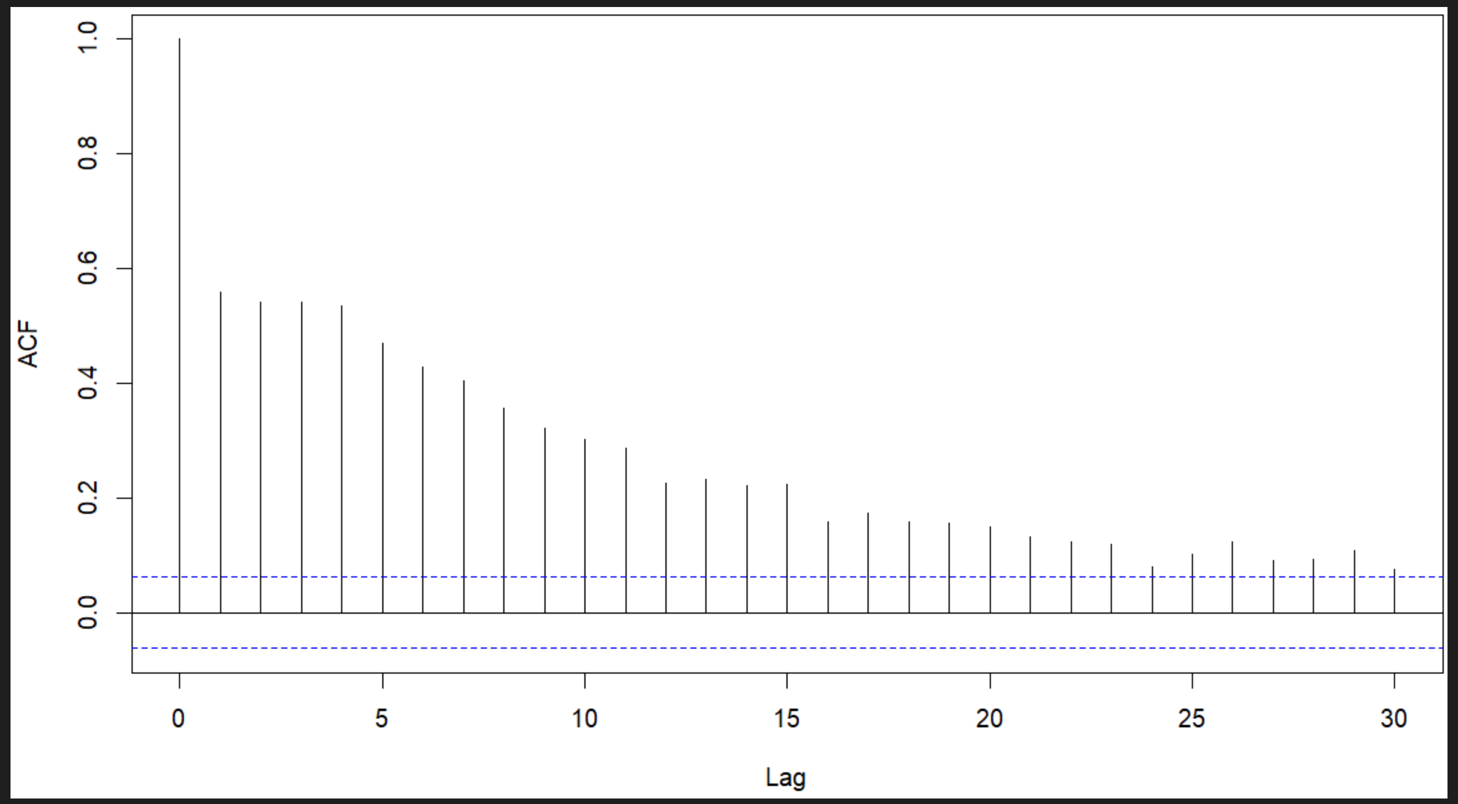
$MA(q)$ caso especial $ARMA(0,q)$

Más eficientes $ARMA$ que AR o MA

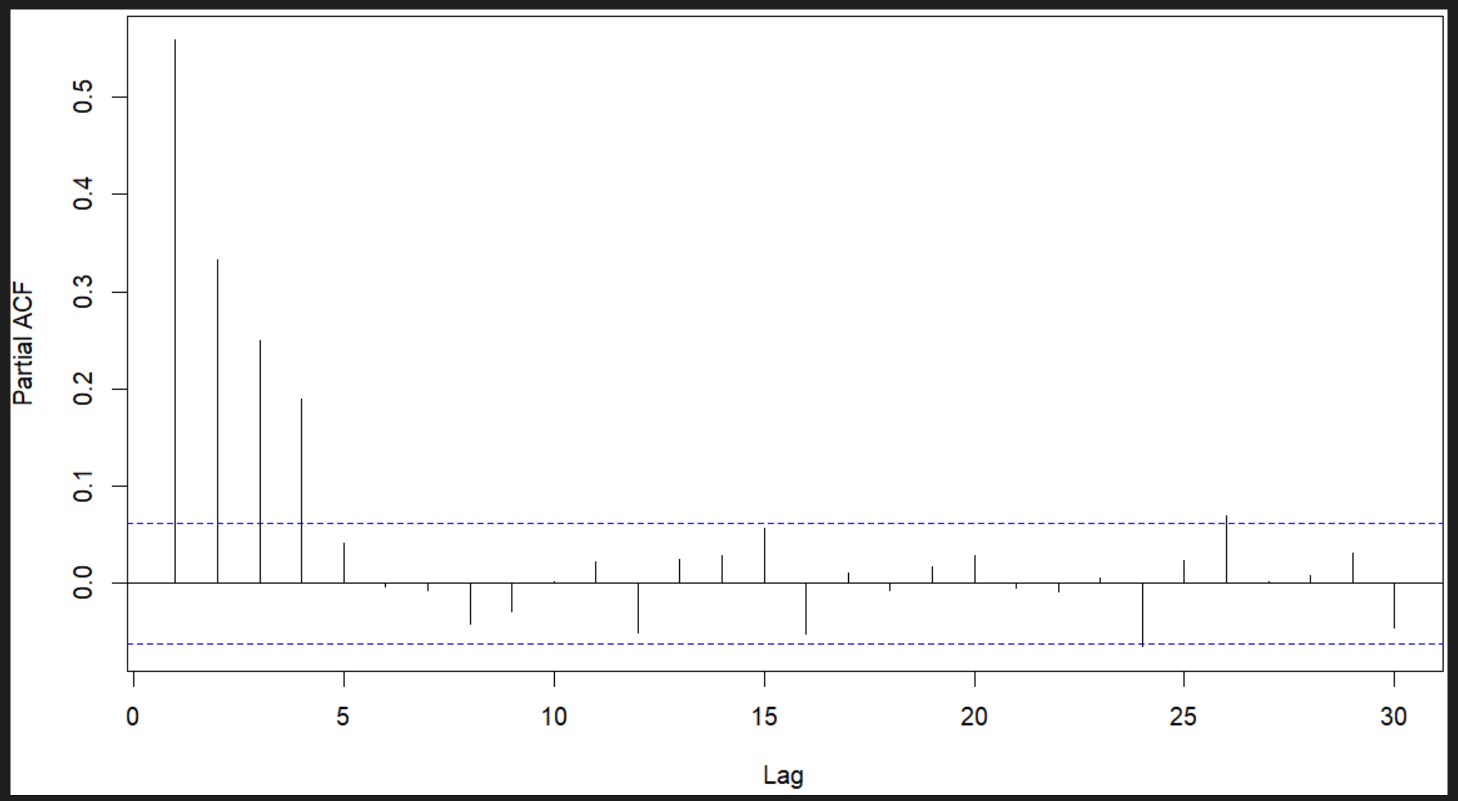
TIPS ACF Y PACF ARMA

$AR(p)$

Ejemplo $p = 4$



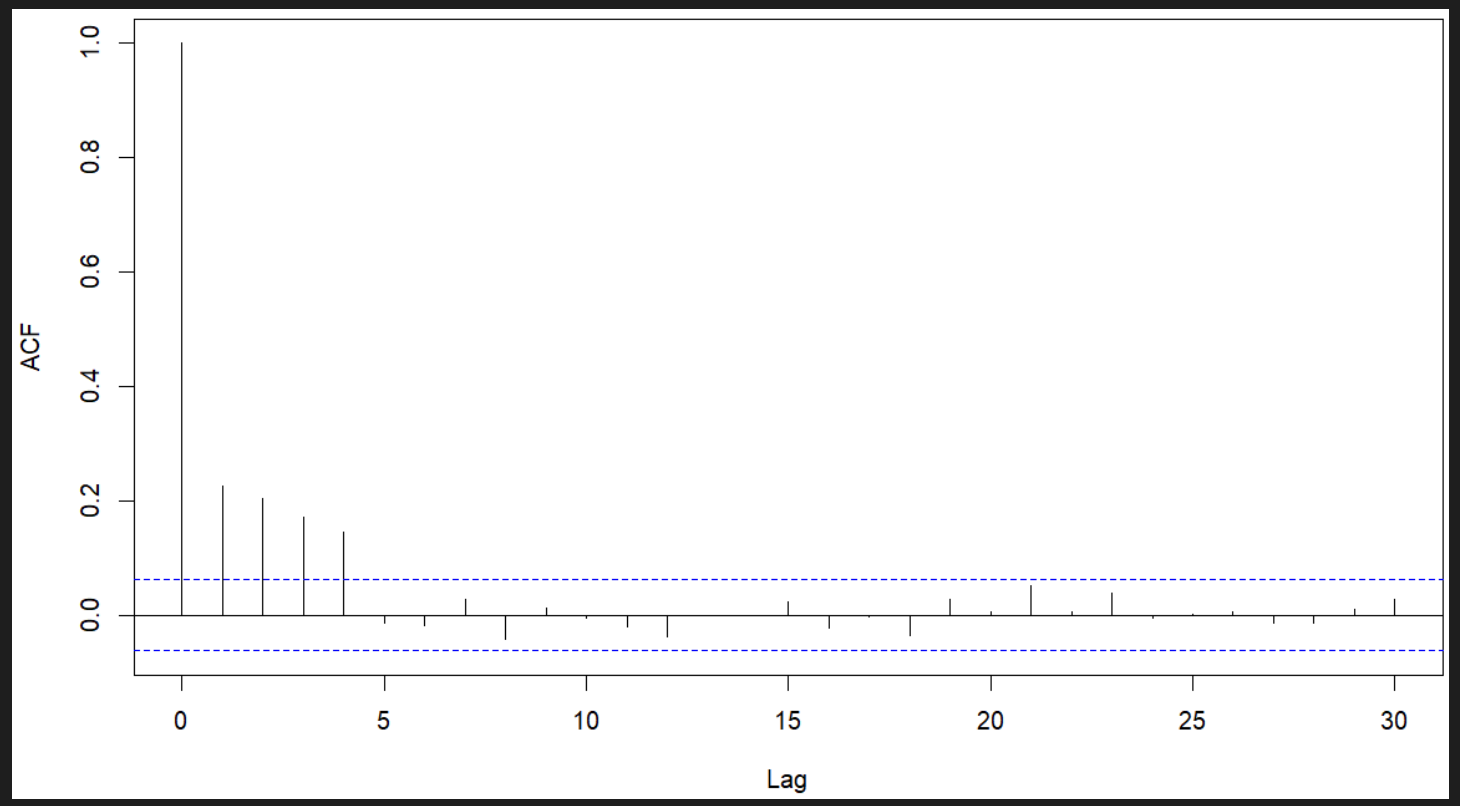
ACF decae gradualmente



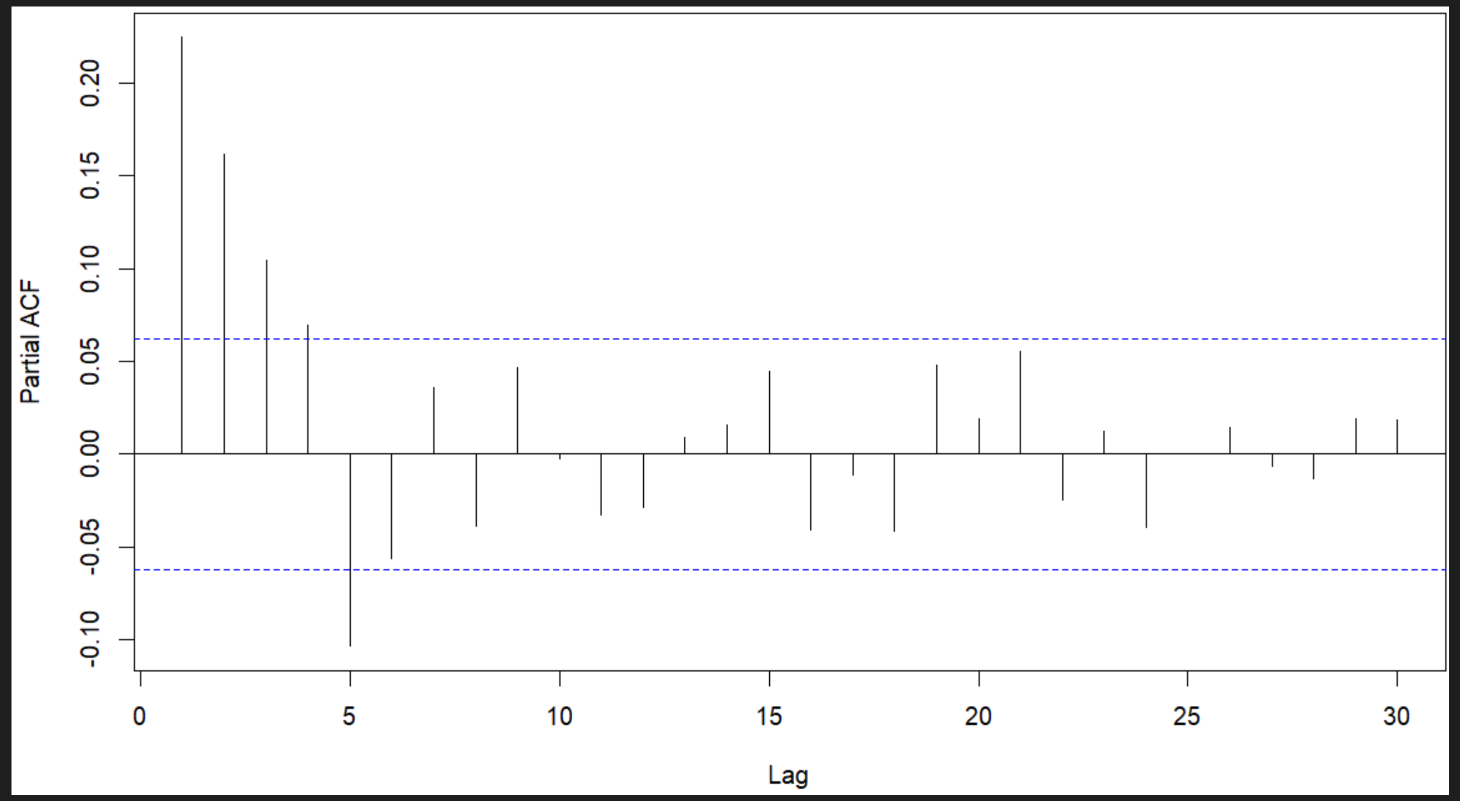
PACF cae de forma abrupta tras lag p

$MA(q)$

Ejemplo $q = 4$



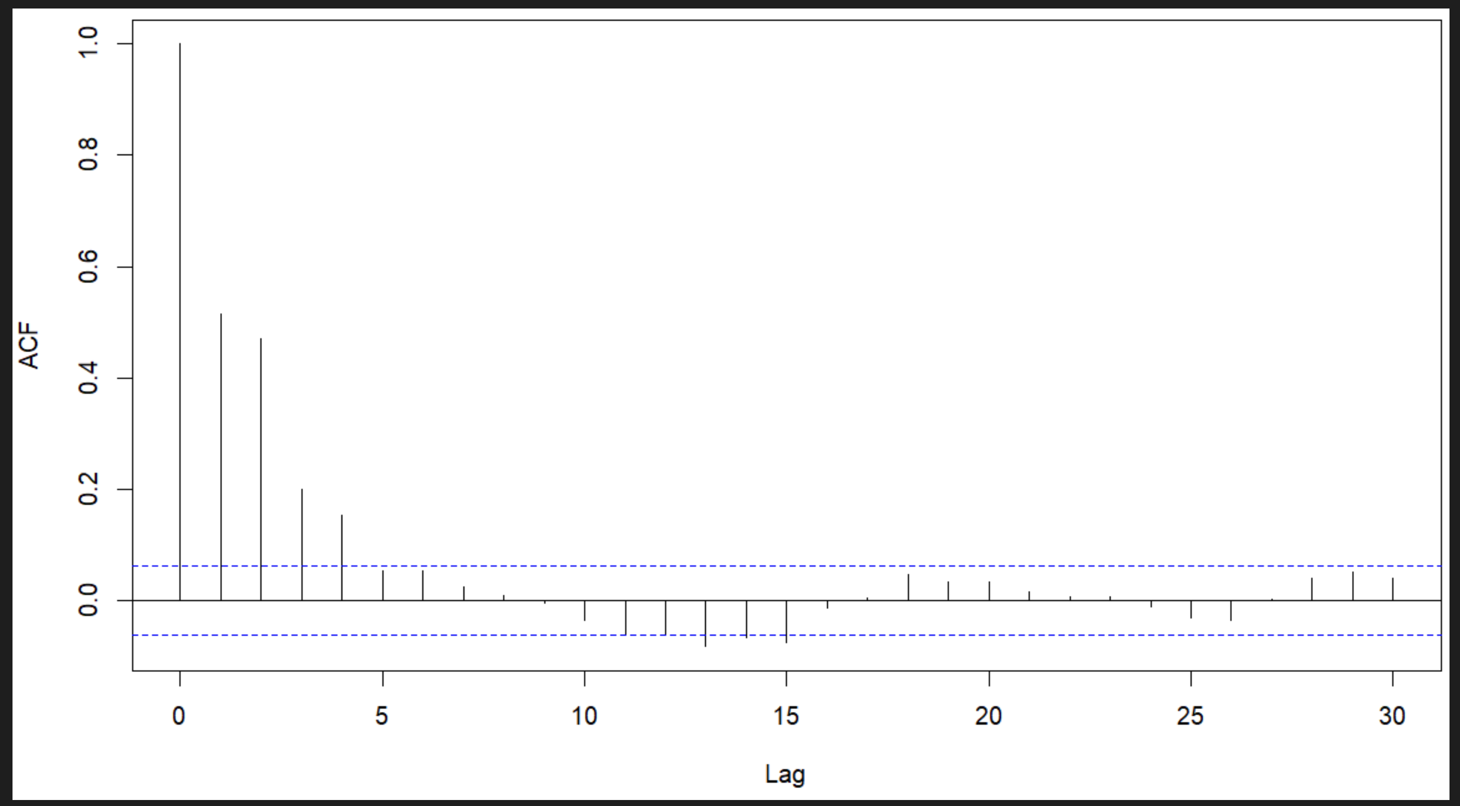
ACF cae de forma abrupta tras lag q



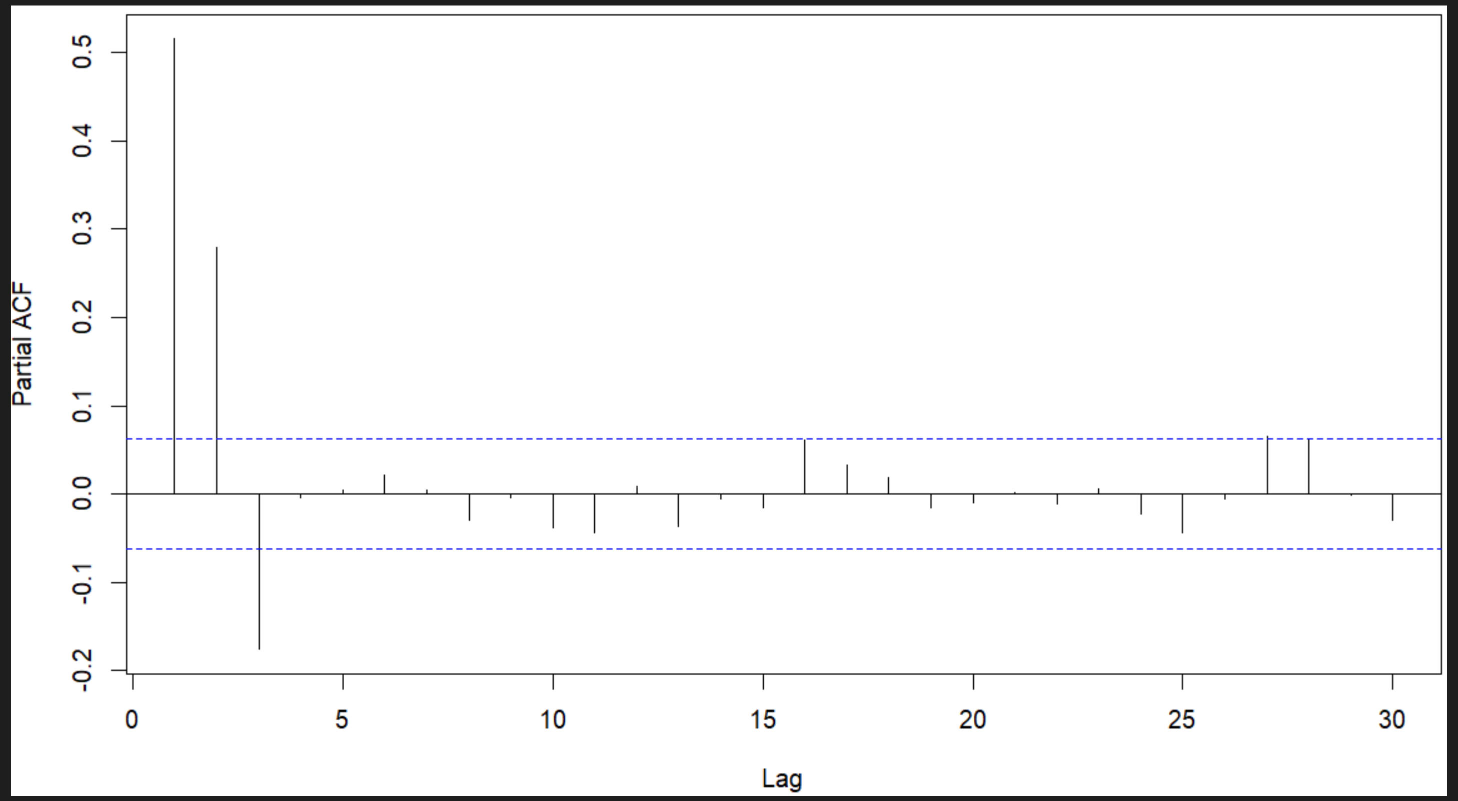
PACF decae oscilando hacia 0

$ARMA(p, q)$

Ejemplo $p = 2$; $q = 2$



¡ESCENARIO INTERMEDIO!



FORECASTING

SERIES DE TIEMPO

Modelos ARMA| Lección 6

LECCIÓN 6

Applied Mathematics and Actuary Training