

CAPÍTULO 2: REVISIÓN DE ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Fórmulas y Conceptos Fundamentales

SISTEMA DE NÚMEROS REALES

Definición:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Números Racionales:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Propiedades:

- Decimales finitos o periódicos
- $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$

Números Irracionales:

- $\sqrt{2} = 1.41421 \dots$
- $\pi = 3.14159 \dots$
- $e = 2.71828 \dots$

TEORÍA DE CONJUNTOS

Notación básica:

- $x \in A$: x pertenece a A
- $x \notin A$: x no pertenece a A
- $A \subseteq B$: A subconjunto de B
- $A \subset B$: A subconjunto propio de B
- $|A|$: cardinalidad de A
- \emptyset : conjunto vacío

Igualdad:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Subconjunto:

$$A \subseteq B \iff (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Unión:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Intersección:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Complemento:

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Diferencia:

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

Diferencia simétrica:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

LEYES ALGEBRAICAS

Conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Distributivas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Identidad:

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

Dominación:

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Complemento:

$$A \cup A^c = U$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$(A^c)^c = A$$

NÚMERO DE SUBCONJUNTOS

Si $|A| = n$, entonces:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

Ejemplo: $A = \{a, b, c\}$
 $\mathcal{P}(A)$ tiene $2^3 = 8$ elementos:

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

RELACIONES

Definición:
Una relación R de X en Y es:

$$R \subseteq X \times Y$$

Notación: $(x, y) \in R$ o xRy

Características:

- Puede asociar múltiples y a un x
- Puede no asociar ningún y a ciertos x

FUNCIÓN CONSTANTE

$$f(x) = k \quad \forall x \in X$$

Gráfica: Línea horizontal
Imagen: $\{k\}$

Aplicación: $I = I_0$ (inversión autónoma)

PARES ORDENADOS

Definición:

$$(a, b) = (c, d) \iff (a = c) \wedge (b = d)$$

Propiedad fundamental:

$$(a, b) \neq (b, a) \text{ a menos que } a = b$$

FUNCIONES

Definición:
 $f : X \rightarrow Y$ es una función si:

$$(\forall x \in X)(\exists! y \in Y)[(x, y) \in f]$$

Notación: $y = f(x)$

Componentes:

- Dominio: $\text{Dom}(f) = X$
- Imagen: $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y$
- Codominio: Y
- Variable independiente: x
- Variable dependiente: y

Principio fundamental:

Cada x mapea a exactamente un y

FUNCIÓN LINEAL

$$f(x) = a_0 + a_1x$$

Parámetros:

- a_0 : ordenada al origen
- a_1 : pendiente = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Comportamiento:

- $a_1 > 0$: creciente
- $a_1 < 0$: decreciente
- $a_1 = 0$: constante

Aplicaciones:

- Demanda: $Q_d = a - bP$
- Consumo: $C = C_0 + cY_d$
- Costo: $C = CF + cv \cdot Q$

PRODUCTO CARTESIANO

Definición:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

Cardinalidad:

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

No conmutatividad:

$$X \times Y \neq Y \times X \text{ (en general)}$$

Plano cartesiano:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Espacio n-dimensional:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}}$$

TIPOS DE FUNCIONES

Inyectiva (uno a uno):

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Sobreyectiva (onto):

$$\text{Im}(f) = Y$$

Biyectiva:

Inyectiva y sobreyectiva simultáneamente

FUNCIÓN CUADRÁTICA

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (a_2 \neq 0)$$

Forma canónica:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Vértice:

$$x_v = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad y_v = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$$

Concavidad:

- $a_2 > 0$: cóncava hacia arriba (U)
- $a_2 < 0$: cóncava hacia abajo (∩)

Aplicación: Funciones de costo, beneficio

FUNCIÓN CÚBICA

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Características:

- Hasta 2 extremos locales
- Un punto de inflexión
- Cambio de concavidad

FUNCIÓN POLINOMIAL

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

Grado: n (mayor exponente con $a_n \neq 0$)

Propiedades:

- Continua en \mathbb{R}
- Infinitamente diferenciable
- Hasta $n - 1$ extremos locales

FUNCIÓN RACIONAL

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j}$$

Dominio:

$$\text{Dom}(R) = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$$

Caso especial - Hipérbola rectangular:

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{o} \quad xy = a$$

Propiedades:

- Asíntota vertical: $x = 0$
- Asíntota horizontal: $y = 0$
- Si $a > 0$: cuadrantes I y III
- Si $a < 0$: cuadrantes II y IV

Aplicaciones económicas:

- Demanda elasticidad unitaria: $PQ = k$
- Costo fijo promedio: $\text{CFP} = \frac{CF}{Q}$
- Productividad media: $\text{PM}_L = \frac{Q}{L}$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

$$f(x) = b^x \quad (b > 0, b \neq 1)$$

Propiedades:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(f) = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$
- $f(0) = 1$
- Si $b > 1$: estrictamente creciente
- Si $0 < b < 1$: estrictamente decreciente

Función exponencial natural:

$$f(x) = e^x \quad (e = 2.71828\dots)$$

Aplicaciones:

- Crecimiento: $Q(t) = Q_0 e^{rt}$
- Descuento: $V_P = V_F e^{-rt}$
- Utilidad: $U(x) = 1 - e^{-\alpha x}$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$$y = \log_b x \iff b^y = x$$

Propiedades:

- $\text{Dom}(f) = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$
- $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- Si $b > 1$: estrictamente creciente

Logaritmo natural:

$$\ln x = \log_e x$$

Propiedades operacionales:

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b(x^r) = r \log_b x$$

Cambio de base:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Aplicaciones:

- Elasticidades: $\epsilon = \frac{d \ln Q}{d \ln P}$
- Modelos log-lineales
- Tasas de crecimiento continuas

REGLAS DE EXPONENTES

I. Producto (misma base):

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

II. Cociente (misma base):

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (x \neq 0)$$

III. Exponente negativo:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0)$$

IV. Exponente cero:

$$x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$$

V. Exponente fraccionario:

x^{1/n} = \sqrt[n]{x}

x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m

VI. Potencia de potencia:

(x^m)^n = x^{mn}

VII. Potencia de producto:

(xy)^m = x^m y^m

VIII. Potencia de cociente:

(\frac{x}{y})^m = \frac{x^m}{y^m} \quad (y \neq 0)

EJEMPLOS DE SIMPLIFICACIÓN

- 1. x^4 \cdot x^{15} = x^{19}
- 2. \frac{x^3}{x^{-3}} = x^{3-(-3)} = x^6
- 3. \frac{x^{1/2} \cdot x^{1/3}}{x^{2/3}} = x^{1/6}
- 4. (x^3 y^2)^4 = x^{12} y^8
- 5. \frac{(x^2)^3}{x^5} = \frac{x^6}{x^5} = x

NIVELES DE GENERALIDAD

1. NIVEL NUMÉRICO (Específico)

Características:

- Coeficientes numéricos específicos
- Curva única y determinada
- Resultados: valores numéricos
- Generalidad: baja

Ejemplos:

- y = 5
- y = 3 + 2x
- y = x^2 - 4x + 7
- C = 100 + 50Q

2. NIVEL PARAMÉTRICO

Características:

- Coeficientes son parámetros
- Familia completa de curvas
- Resultados: expresiones con parámetros

- Generalidad: intermedia

Ejemplos:

- y = a
- y = a + bx
- y = a + bx + cx^2
- C = a + bQ

3. NIVEL GENERAL (Funcional)

Características:

- Notación funcional general
- No especifica forma algebraica
- Resultados: relaciones cualitativas
- Generalidad: máxima

Ejemplos:

- y = f(x)
- z = g(x, y)
- C = C(Q)
- U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)

RESTRICCIONES CUALITATIVAS

En funciones económicas generales:

Función de demanda:

\frac{dQ_d}{dP} < 0 \quad (\text{pendiente negativa})

Función de consumo:

0 < \frac{dC}{dY} < 1 \quad (\text{PMC})

Función de producción:

\frac{\partial Q}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0

Función de utilidad:

\frac{\partial U}{\partial x_i} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} < 0

Maximización de beneficios:

\text{CPO: } \frac{d\pi}{dQ} = 0 \implies IM = CM

\text{CSO: } \frac{d^2 \pi}{dQ^2} < 0

TABLA COMPARATIVA

Aspecto	Num.	Param.	Gen.
Especificidad	Alta	Media	Baja
Generalidad	Baja	Media	Alta
Resultado	Números	Parámetros	Cualitativo
Aplicabilidad	Un caso	Familia	Todos
Re-análisis	Sí	Parcial	No

Nota: Este material es un compendio de fórmulas y conceptos fundamentales. Para demostraciones completas y aplicaciones detalladas, consultar el capítulo completo.