Cheatsheet: Análisis Estático y Equilibrio

Ecuaciones, Gráficas y Modelos Económicos

1. Conceptos Fundamentales de Equilibrio

Definición de Equilibrio

Equilibrio: Estado donde variables interrelacionadas se ajustan mutuamente sin tendencia inherente al cambio.

$$Q_d = Q_s \quad \Leftrightarrow \quad E(P) = Q_d - Q_s = 0$$

Componentes clave:

- **Variables seleccionadas:** Relevancia contextual
- **Interrelación simultánea:** Reposo compatible
- **Fuerzas internas:** Parámetros constantes (ceteris paribus)

Tipos de Equilibrio

Tipo	Naturaleza
Final	Teleológico (optimización)
Intermedio	Mecánico (impersonal)

Nota: Equilibrio $\neq$ Estado óptimo

2. Modelo de Mercado Lineal

Estructura del Modelo

Variables endógenas: Q_d, Q_s, P
Ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1)\ \text{Equilibrio:} &\quad Q_d = Q_s \\ (2)\ \text{Demanda:} &\quad Q_d = a - \beta P \quad (a, \beta > 0) \\ (3)\ \text{Oferta:} &\quad Q_s = -\gamma + \delta P \quad (\gamma, \delta > 0) \end{aligned}$$

Justificación Paramétrica

- $\beta > 0$: Demanda $\downarrow$ con P (Ley demanda)
- $\delta > 0$: Oferta $\uparrow$ con P (Ley oferta)
- $\gamma > 0$: Precio mínimo $P_{\text{mín}} = \gamma/\delta > 0$

Solución Analítica

Precio de Equilibrio:

$$P^* = \frac{a + \gamma}{\beta + \delta}$$

Cantidad de Equilibrio:

$$Q^* = \frac{a\delta - \beta\gamma}{\beta + \delta}$$

Condición de validez:

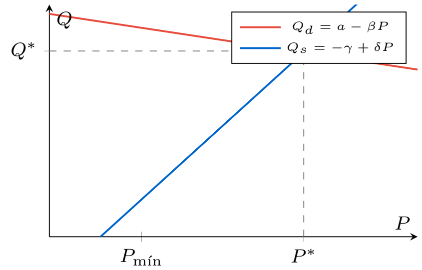
$$a\delta > \beta\gamma \quad \Leftrightarrow \quad Q^* > 0$$

Puntos Críticos

$$\begin{aligned} P_{\text{máx}} &= \frac{a}{\beta} \quad (\text{Demanda: } Q_d = 0) \\ P_{\text{mín}} &= \frac{\gamma}{\delta} \quad (\text{Oferta: } Q_s = 0) \end{aligned}$$

$$\text{Validez:} \quad P_{\text{máx}} > P_{\text{mín}}$$

Gráfico del Equilibrio



3. Función de Exceso de Demanda

Definición

$$E(P) = Q_d(P) - Q_s(P)$$

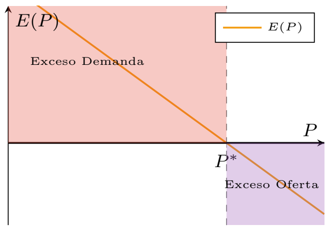
En modelo lineal:

$$\begin{aligned} E(P) &= (a - \beta P) - (-\gamma + \delta P) \\ &= (a + \gamma) - (\beta + \delta)P \end{aligned}$$

Propiedades

- $E(P^*) = 0$ en equilibrio
- $E(P) > 0$: Exceso de demanda ($P < P^*$)
- $E(P) < 0$: Exceso de oferta ($P > P^*$)
- Pendiente: $-(\beta + \delta) < 0$

Gráfico E(P)



4. Modelos No Lineales

Función vs. Ecuación Cuadrática

Función Cuadrática:

- $f(P) = aP^2 + bP + c$
- Infinitas soluciones (parábola completa)
- Representación: curva continua

Ecuación Cuadrática:

- $aP^2 + bP + c = 0$
- Finitas soluciones (raíces/ceros)
- Representación: puntos de intersección con eje P

Fórmula Cuadrática

Para $aX^2 + bX + c = 0$ con $a \neq 0$:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$: 2 raíces reales distintas
- $\Delta = 0$: 1 raíz repetida ($X_1 = X_2$)
- $\Delta < 0$: Sin solución real

Ejemplo: Modelo No Lineal

Sistema:

$$\begin{aligned} Q_d &= 4 - P^2 \\ Q_s &= 4P - 1 \end{aligned}$$

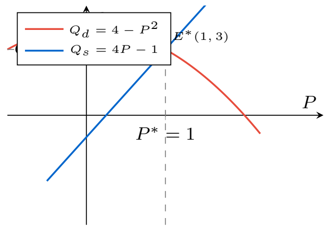
Equilibrio: $4 - P^2 = 4P - 1$

$$\begin{aligned} P^2 + 4P - 5 &= 0 \\ (P + 5)(P - 1) &= 0 \\ P_1 = -5, &\quad P_2 = 1 \end{aligned}$$

Solución económica: $P^* = 1$ (positivo)

$$Q^* = 4(1) - 1 = 3$$

Gráfico Modelo No Lineal



5. Ecuaciones Polinomiales Superiores

Ecuación Cúbica

Forma general: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
Método: Factorización

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$$

Teoremas para Raíces Racionales

Teorema I (Raíces Enteras):
Para $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ con coeficientes enteros:
$\Rightarrow$ Raíz entera es divisor de a_0

Teorema II (Raíces Racionales):
Para $a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$, si r/s es raíz racional:

- r divide a a_0 (término constante)
- s divide a a_n (coeficiente principal)

Teorema III (Raíz $x = 1$):
Si $\sum$ coeficientes $= 0 \Rightarrow x = 1$ es raíz

Ejemplo Cúbico

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
Divisores de 6: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$
Verificación:

$$
\begin{aligned}
x = -1: &\quad (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = 0\checkmark \\
x = 2: &\quad 8 - 16 + 2 + 6 = 0\checkmark \\
x = 3: &\quad 27 - 36 + 3 + 6 = 0\checkmark
\end{aligned}
$$

Raíces: $-1, 2, 3$

6. Equilibrio General: Dos Artículos

Estructura del Modelo

Variables endógenas: $Q_{d1}, Q_{s1}, Q_{d2}, Q_{s2}, P_1, P_2$
Funciones (forma general):

$$
\begin{aligned}
Q_{d1} &= \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 \\
Q_{s1} &= \beta_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 \\
Q_{d2} &= a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 \\
Q_{s2} &= b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2
\end{aligned}
$$

Condiciones de equilibrio:

$$\boxed{E_1 = Q_{d1} - Q_{s1} = 0}$$

$$\boxed{E_2 = Q_{d2} - Q_{s2} = 0}$$

Forma Reducida

Definiendo $c_i = \alpha_i - \beta_i$ y $\gamma_i = a_i - b_i$:

$$
\begin{aligned}
c_1 P_1 + c_2 P_2 &= -c_0 \\
\gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 &= -\gamma_0
\end{aligned}
$$

Solución de Precios

$$\boxed{P_1^* = \frac{c_2\gamma_0 - c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}}$$

$$\boxed{P_2^* = \frac{c_0\gamma_1 - c_1\gamma_0}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}}$$

Condición: $c_1\gamma_2 \neq c_2\gamma_1$ (solución única)

Ejemplo Numérico

$$
\begin{aligned}
Q_{d1} = 18 - 3P_1 + P_2, &\quad Q_{s1} = -2 + 4P_1 \\
Q_{d2} = 12 + 2P_1 - P_2, &\quad Q_{s2} = 2 + 3P_2
\end{aligned}
$$

Sistema reducido:

$$
\begin{aligned}
7P_1 - P_2 &= 20 \\
2P_1 - 4P_2 &= -10
\end{aligned}
$$

Solución:

$$\boxed{P_1^* = \frac{45}{13}, \quad P_2^* = \frac{55}{13}}$$

$$\boxed{Q_1^* = \frac{154}{13}, \quad Q_2^* = \frac{191}{13}}$$

7. Modelo Keynesiano de Ingreso Nacional

Modelo Simple

Variables endógenas: Y, C
Variables exógenas: I_0, G_0
Ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
Y &= C + I_0 + G_0 \quad \text{(Equilibrio)} \\
C &= a + bY \quad (0 < b < 1) \quad \text{(Consumo)}
\end{aligned}
$$

Solución

Ingreso de equilibrio:

$$\boxed{Y^* = \frac{a + I_0 + G_0}{1 - b}}$$

Consumo de equilibrio:

$$\boxed{C^* = \frac{a + b(I_0 + G_0)}{1 - b}}$$

Multiplicador keynesiano:

$$\boxed{k = \frac{1}{1 - b} = \frac{\Delta Y}{\Delta I_0}}$$

Modelo con Impuestos

Variables endógenas: Y, C, T
Ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
Y &= C + I_0 + G_0 \\
C &= a + b(Y - T) \quad (0 < b < 1) \\
T &= d + tY \quad (0 < t < 1)
\end{aligned}
$$

Soluciones:

$$\boxed{Y^* = \frac{a - bd + I_0 + G_0}{1 - b(1 - t)}}$$

$$\boxed{T^* = d + t \cdot Y^*}$$

$$\boxed{C^* = \frac{(a - bd) + b(1 - t)(I_0 + G_0)}{1 - b(1 - t)}}$$

Propensiones

- **PMgC:** $b = \frac{\Delta C}{\Delta Y_d}$ (marginal consumir)
- **PMgS:** $1 - b = \frac{\Delta S}{\Delta Y_d}$ (marginal ahorrar)
- **PMgT:** $t = \frac{\Delta T}{\Delta Y}$ (marginal impuestos)

8. Caso General: n Artículos

Sistema de Equilibrio

Para n artículos interdependientes:

$$\boxed{E_i = Q_{di}(P_1, \ldots, P_n) - Q_{si}(P_1, \ldots, P_n) = 0}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, n$

Total: $3n$ ecuaciones $\to$ n ecuaciones en n precios

Requisitos para Solución Única

1. Número de ecuaciones = Número de incógnitas
2. Ecuaciones **consistentes** (no contradictorias)
3. Ecuaciones **independientes** (no redundantes)

Método: Álgebra matricial indispensable para n grande

9. Fórmulas y Resultados Clave

Equilibrio Mercado Lineal

$$
\begin{aligned}
P^* &= \frac{a + \gamma}{\beta + \delta} \\
Q^* &= \frac{a\delta - \beta\gamma}{\beta + \delta} \\
\text{Validez:} &\quad a\delta > \beta\gamma
\end{aligned}
$$

Ecuación Cuadrática

$$
\begin{aligned}
aX^2 + bX + c = 0 \\
X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\Delta = b^2 - 4ac
\end{aligned}
$$

Ingreso Nacional Keynesiano

$$
\begin{aligned}
Y^* &= \frac{a + I_0 + G_0}{1 - b} \\
k &= \frac{1}{1 - b} \quad \text{(multiplicador)}
\end{aligned}
$$

Equilibrio Dos Artículos

$$P_1^* = \frac{c_2\gamma_0 - c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}$$
$$P_2^* = \frac{c_0\gamma_1 - c_1\gamma_0}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}$$

10. Tips y Verificaciones

Checklist de Solución

1. Identificar variables endógenas y exógenas
2. Contar ecuaciones vs. incógnitas
3. Aplicar condición de equilibrio
4. Eliminar variables (sustitución)
5. Resolver para variables de equilibrio
6. **Verificar validez económica** ($P^* > 0, Q^* > 0$)
7. Sustituir en ecuaciones originales (verificación)

Errores Comunes

- No verificar positividad de soluciones
- Confundir función con ecuación cuadrática
- Olvidar restricciones paramétricas
- División por cero (denominador $= 0$)
- No considerar todas las raíces (cuadráticas)

Notación Estándar

*	Valor de equilibrio
$E(\cdot)$	Función de exceso de demanda
Δ	Discriminante o cambio
k	Multiplicador
b	Propensión marginal al consumo
β, δ	Pendientes demanda/oferta