

# CAPÍTULO 2: REVISIÓN DE ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

## Fórmulas y Conceptos Fundamentales

### SISTEMA DE NÚMEROS REALES

#### Definición:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

#### Números Racionales:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

#### Propiedades:

- Decimales finitos o periódicos
- $\frac{1}{4} = 0.25, \frac{1}{3} = 0.\overline{3}$

#### Números Irracionales:

- $\sqrt{2} = 1.41421\dots$
- $\pi = 3.14159\dots$
- $e = 2.71828\dots$

### TEORÍA DE CONJUNTOS

#### Notación básica:

- $x \in A$ :  $x$  pertenece a  $A$
- $x \notin A$ :  $x$  no pertenece a  $A$
- $A \subseteq B$ :  $A$  subconjunto de  $B$
- $A \subset B$ :  $A$  subconjunto propio de  $B$
- $|A|$ : cardinalidad de  $A$
- $\emptyset$ : conjunto vacío

#### Igualdad:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

#### Subconjunto:

$$A \subseteq B \iff (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

### OPERACIONES CON CONJUNTOS

#### Unión:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

#### Intersección:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

#### Complemento:

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

#### Diferencia:

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

#### Diferencia simétrica:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

### LEYES ALGEBRAICAS

#### Comutativas:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

#### Asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

#### Distributivas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

#### De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

#### Identidad:

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

#### Dominación:

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

#### Complemento:

$$A \cup A^c = U$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$(A^c)^c = A$$

## NÚMERO DE SUBCONJUNTOS

Si  $|A| = n$ , entonces:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

Ejemplo:  $A = \{a, b, c\}$

$\mathcal{P}(A)$  tiene  $2^3 = 8$  elementos:

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

## RELACIONES

### Definición:

Una relación  $R$  de  $X$  en  $Y$  es:

$$R \subseteq X \times Y$$

Notación:  $(x, y) \in R$  o  $xRy$

### Características:

- Puede asociar múltiples  $y$  a un  $x$
- Puede no asociar ningún  $y$  a ciertos  $x$

## PARES ORDENADOS

### Definición:

$$(a, b) = (c, d) \iff (a = c) \wedge (b = d)$$

### Propiedad fundamental:

$$(a, b) \neq (b, a) \text{ a menos que } a = b$$

## PRODUCTO CARTESIANO

### Definición:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

### Cardinalidad:

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

### No commutatividad:

$$X \times Y \neq Y \times X \text{ (en general)}$$

### Plano cartesiano:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

### Espacio n-dimensional:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}}$$

## FUNCIONES

### Definición:

$f : X \rightarrow Y$  es una función si:

$$(\forall x \in X)(\exists!y \in Y)[(x, y) \in f]$$

Notación:  $y = f(x)$

### Componentes:

- **Dominio:**  $\text{Dom}(f) = X$
- **Imagen:**  $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y$
- **Codominio:**  $Y$
- **Variable independiente:**  $x$
- **Variable dependiente:**  $y$

### Principio fundamental:

Cada  $x$  mapea a exactamente un  $y$

## TIPOS DE FUNCIONES

### Inyectiva (uno a uno):

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

### Sobreyectiva (onto):

$$\text{Im}(f) = Y$$

### Biyectiva:

Inyectiva y sobreyectiva simultáneamente

## FUNCIÓN CONSTANTE

$$f(x) = k \quad \forall x \in X$$

**Gráfica:** Línea horizontal

**Imagen:**  $\{k\}$

**Aplicación:**  $I = I_0$  (inversión autónoma)

## FUNCIÓN LINEAL

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

### Parámetros:

- $a_0$ : ordenada al origen
- $a_1$ : pendiente =  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

### Comportamiento:

- $a_1 > 0$ : creciente
- $a_1 < 0$ : decreciente
- $a_1 = 0$ : constante

### Aplicaciones:

- Demanda:  $Q_d = a - bP$
- Consumo:  $C = C_0 + cY_d$
- Costo:  $C = CF + cv \cdot Q$

## FUNCIÓN CUADRÁTICA

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (a_2 \neq 0)$$

### Forma canónica:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

### Vértice:

$$x_v = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad y_v = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$$

### Concavidad:

- $a_2 > 0$ : cóncava hacia arriba ( $U$ )
- $a_2 < 0$ : cóncava hacia abajo ( $\cap$ )

**Aplicación:** Funciones de costo, beneficio

## FUNCIÓN CÚBICA

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

### Características:

- Hasta 2 extremos locales
- Un punto de inflexión
- Cambio de concavidad

## FUNCIÓN RACIONAL

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j}$$

### Dominio:

$$\text{Dom}(R) = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$$

### Caso especial - Hipérbola rectangular:

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{o} \quad xy = a$$

### Propiedades:

- Asíntota vertical:  $x = 0$
- Asíntota horizontal:  $y = 0$
- Si  $a > 0$ : cuadrantes I y III
- Si  $a < 0$ : cuadrantes II y IV

### Aplicaciones económicas:

- Demanda elasticidad unitaria:  $PQ = k$
- Costo fijo promedio:  $\text{CFP} = \frac{CF}{Q}$
- Productividad media:  $\text{PM}_L = \frac{Q}{L}$

## FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$$y = \log_b x \iff b^y = x$$

### Propiedades:

- $\text{Dom}(f) = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$
- $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- Si  $b > 1$ : estrictamente creciente

### Logaritmo natural:

$$\ln x = \log_e x$$

### Propiedades operacionales:

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b(x^r) = r \log_b x$$

### Cambio de base:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

### Aplicaciones:

- Elasticidades:  $\epsilon = \frac{d \ln Q}{d \ln P}$
- Modelos log-lineales
- Tasas de crecimiento continuas

## FUNCIÓN POLINOMIAL

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

**Grado:**  $n$  (mayor exponente con  $a_n \neq 0$ )

### Propiedades:

- Continua en  $\mathbb{R}$
- Infinitamente diferenciable
- Hasta  $n - 1$  extremos locales

## FUNCIÓN EXPONENCIAL

$$f(x) = b^x \quad (b > 0, b \neq 1)$$

### Propiedades:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(f) = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$
- $f(0) = 1$
- Si  $b > 1$ : estrictamente creciente
- Si  $0 < b < 1$ : estrictamente decreciente

### Función exponencial natural:

$$f(x) = e^x \quad (e = 2.71828\dots)$$

### Aplicaciones:

- Crecimiento:  $Q(t) = Q_0 e^{rt}$
- Descuento:  $V_P = V_F e^{-rt}$
- Utilidad:  $U(x) = 1 - e^{-\alpha x}$

## REGLAS DE EXPONENTES

### I. Producto (misma base):

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

### II. Cociente (misma base):

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (x \neq 0)$$

### III. Exponente negativo:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0)$$

### IV. Exponente cero:

$$x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$$

## V. Exponente fraccionario:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

## VI. Potencia de potencia:

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

## VII. Potencia de producto:

$$(xy)^m = x^m y^m$$

## VIII. Potencia de cociente:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} \quad (y \neq 0)$$

## NIVELES DE GENERALIDAD

### 1. NIVEL NUMÉRICO (Específico)

*Características:*

- Coeficientes numéricos específicos
- Curva única y determinada
- Resultados: valores numéricos
- Generalidad: baja

*Ejemplos:*

- $y = 5$
- $y = 3 + 2x$
- $y = x^2 - 4x + 7$
- $C = 100 + 50Q$

### 2. NIVEL PARAMÉTRICO

*Características:*

- Coeficientes son parámetros
- Familia completa de curvas
- Resultados: expresiones con parámetros

- Generalidad: intermedia

*Ejemplos:*

- $y = a$
- $y = a + bx$
- $y = a + bx + cx^2$
- $C = a + bQ$

### 3. NIVEL GENERAL (Funcional)

*Características:*

- Notación funcional general
- No especifica forma algebraica
- Resultados: relaciones cualitativas
- Generalidad: máxima

*Ejemplos:*

- $y = f(x)$
- $z = g(x, y)$
- $C = C(Q)$
- $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$

## RESTRICCIONES CUALITATIVAS

En funciones económicas generales:

Función de demanda:

$$\frac{dQ_d}{dP} < 0 \quad (\text{pendiente negativa})$$

Función de consumo:

$$0 < \frac{dC}{dY} < 1 \quad (\text{PMC})$$

Función de producción:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$$

Función de utilidad:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} < 0$$

Maximización de beneficios:

$$\text{CPO: } \frac{d\pi}{dQ} = 0 \implies IM = CM$$

$$\text{CSO: } \frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0$$

## TABLA COMPARATIVA

Aspecto	Num.	Param.	Gen.
Especificidad	Alta	Media	Baja
Generalidad	Baja	Media	Alta
Resultado	Números	Parámetros	Cualitativo
Aplicabilidad	Un caso	Familia	Todos
Re-análisis	Sí	Parcial	No

**Nota:** Este material es un compendio de fórmulas y conceptos fundamentales. Para demostraciones completas y aplicaciones detalladas, consultar el capítulo completo.