

Fundamentos de Economía Matemática

Modelos, Funciones y Análisis de Equilibrio

Emanuel Quintana

Economía – Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

6 de diciembre de 2025

Contacto: emanuel.quintana@uptc.edu.co
GitHub: github.com/emanuelquintana-glitch
ORCID: 0009-0006-8419-2805

¿Qué es un Modelo Económico?

Fundamentos de
Economía
Matemática

E. Quintana

Definición

Un modelo económico es un **marco analítico** o estructura simplificada que representa una abstracción de la economía real.

Características:

- Selección de factores principales
- Relaciones esenciales
- Simplificación intencional
- Enfoque en fenómenos específicos

Forma matemática:

- Conjunto de ecuaciones
- Representa la estructura
- Expresa suposiciones analíticas
- Permite predicciones

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Variables

- **Variables endógenas:** valores buscados dentro del modelo (Q_d , Q_s , P)
- **Variables exógenas:** determinadas externamente, tratadas como datos (Y , I)

Constantes Paramétricas

Símbolos (a , b , c , α , β , γ) que representan magnitudes fijas, tratadas como datos:
 $C = a + bQ$

Importancia

La distinción entre variables endógenas y exógenas es **fundamental** para la estructura del modelo.

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

1. Ecuaciones Definicionales (Identidades)

- Establecen igualdad entre expresiones equivalentes
- Notación: \equiv o $=$
- Ejemplo: $\Pi \equiv R - C$ (ganancia)

2. Ecuaciones de Comportamiento

- Especifican cómo responde una variable a cambios en otras
- Ejemplo: $C = 75 + 10Q$ vs. $C = 110 + 0.2Q^2$

3. Ecuaciones Condicionales

- Expresan requisitos que deben satisfacerse
- Equilibrio: $Q_d = Q_s$
- Optimización: $CM = IM$

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Análisis Estático

Identifica valores de equilibrio donde:

- No hay tendencia al cambio
- Balance de fuerzas internas
- Parámetros y exógenas fijos

Ejemplo: $Q_d = Q_s$ en mercado

Análisis Estático Comparativo

Compara dos estados de equilibrio resultantes de:

- Diferentes valores de parámetros
- Cambios en variables exógenas
- Efectos de políticas

Nota Importante

El análisis estático **no** considera las trayectorias temporales hacia el equilibrio.

Problemas de Optimización

Variedad especial de equilibrio donde la unidad económica busca:

- **Maximizar** o **minimizar** función objetivo
- Ejemplo: maximización de ganancia ($\max \Pi = R - C$)
- Condición necesaria: $\frac{d\Pi}{dQ} = 0$

Análisis Dinámico

Estudia las **trayectorias temporales** de las variables:

- Determina si convergen a valores de equilibrio
- Utiliza ecuaciones diferenciales o en diferencias
- Aborda la "asequibilidad" del equilibrio

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

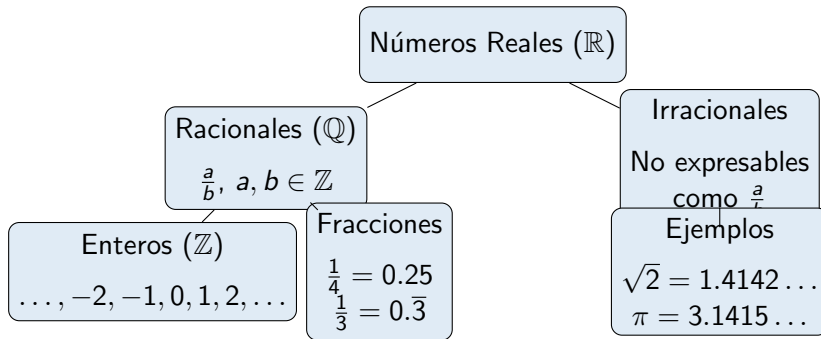
Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

El Sistema de Números Reales (\mathbb{R})



Números Racionales

Definición: Expresables como razón de dos enteros

Características:

- Decimal finito: $\frac{1}{4} = 0.25$
- Decimal periódico: $\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$

Incluyen:

- Enteros positivos: $1, 2, 3, \dots$
- Enteros negativos: $-1, -2, -3, \dots$
- Cero: 0
- Fracciones: $\frac{3}{4}, -\frac{2}{5}$

Números Irracionales

Definición: No expresables como $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$

Características:

- Decimal no periódico
- Decimal no finito

Ejemplos:

- $\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$
- $\pi = 3.14159265 \dots$
- $e = 2.71828182 \dots$

Observación

Los irracionales llenan los espacios entre racionales formando el continuo. $\mathbb{R} =$

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos distintos. Los objetos se denominan **elementos**.

Notación:

- Por enumeración: $\{2, 3, 4\}$
- Por descripción: $\{x \mid x \in \mathbb{Z}^+\}$
- Pertenencia: $3 \in \{2, 3, 4\}$

Tipos:

- Finito: $\{1, 2, 3\}$
- Infinito numerable: \mathbb{N}
- Infinito no numerable: \mathbb{R}
- Vacío: \emptyset o $\{\}$

Importante

$\{0\} \neq \emptyset$ porque $\{0\}$ contiene al elemento cero.

Relaciones entre Conjuntos

Fundamentos de
Economía
Matemática

E. Quintana

Igualdad

$A = B$ si y solo si contienen elementos idénticos (orden no importa)

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Subconjunto

$T \subset S$ (o $S \supset T$) si todo elemento de T está en S

- **Subconjunto propio:** no contiene todos los elementos de S
- **Propiedad:** $\emptyset \subset A$ para cualquier conjunto A

Conjuntos Disjuntos

Dos conjuntos sin elementos en común

Teorema

Para un conjunto con n elementos, el número de subconjuntos es 2^n

Definiciones:

- **Unión** ($A \cup B$): elementos en A o en B
- **Intersección** ($A \cap B$): elementos en A y en B
- **Complemento** (\bar{A}): elementos de U que **no** están en A

Leyes:

- **Conmutativa:**

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- **Asociativa:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

- **Distributiva:**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Definición

Un **par ordenado** (a, b) es diferente de un conjunto $\{a, b\}$ porque el orden importa.

Propiedad Fundamental

$(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$

Por tanto: $(a, b) \neq (b, a)$ a menos que $a = b$

Aplicaciones:

- Coordenadas en el plano: (x, y)
- Datos relacionados: $(edad, peso) = (19, 127)$
- Producto Cartesiano: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

Plano Cartesiano

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ representa todos los puntos del plano

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Producto Cartesiano: Ejemplo

Dados: $S_1 = \{3, 6, 9\}$, $S_2 = \{a, b\}$, $S_3 = \{m, n\}$

$$S_1 \times S_2$$

$\{(3, a), (3, b), (6, a), (6, b), (9, a), (9, b)\}$ (6 elementos)

$$S_2 \times S_3$$

$\{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n)\}$ (4 elementos)

No Conmutatividad

En general, $S_1 \times S_2 \neq S_2 \times S_1$

Excepción: son iguales si $S_1 = S_2$ o si $S_1 = \emptyset$ o $S_2 = \emptyset$

Relación

Cualquier colección de pares ordenados (subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Asocia uno o más valores de y con cada valor de x

Función

Relación especial donde **para cada x existe solo un y**

Notación: $y = f(x)$ (“ y es igual a efe de x ”)

Componentes:

- Variable independiente: x
- Variable dependiente: y
- Dominio: valores de x
- Imagen: valores de y

Propiedades:

- Toda función es una relación
- No toda relación es función
- Varios x pueden dar mismo y
- También: mapeo o transformación

Función de Costo

$C = 150 + 7Q$ con restricción $Q \leq 100$

Dominio: $\{Q \mid 0 \leq Q \leq 100\}$

Imagen:

- Costo mínimo: $C(0) = 150$
- Costo máximo: $C(100) = 150 + 700 = 850$
- Imagen: $\{C \mid 150 \leq C \leq 850\}$

Aplicación Económica

Las ecuaciones de comportamiento en economía se expresan típicamente como funciones

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Función Constante

$y = f(x) = k$ donde k es constante

Gráfica: línea horizontal

Ejemplo económico: $I = I_0$ (inversión exógena)

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Función Polinomial

Forma general: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

Grado: mayor potencia de x (denotado n)

Grado	Tipo	Forma	Gráfica
0	Constante	$y = a_0$	Línea horizontal
1	Lineal	$y = a_0 + a_1x$	Línea recta
2	Cuadrática	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$	Parábola
3	Cúbica	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$	Dos ondulaciones

Forma General

$$y = a_0 + a_1x$$

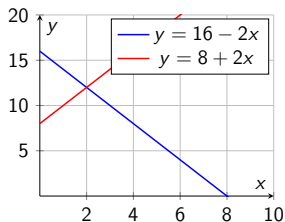
- a_0 : ordenada al origen (y-intercepto)
- a_1 : pendiente (incremento en y por unidad de x)

Ejemplo 1: $y = 16 - 2x$

- Ordenada: 16
- Pendiente: -2 (descendente)
- Cruza eje x en $x = 8$

Ejemplo 2: $y = 8 + 2x$

- Ordenada: 8
- Pendiente: $+2$ (ascendente)



Forma General

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

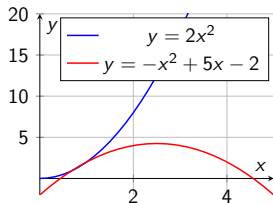
Gráfica: **parábola**

Signo de a_2 :

- $a_2 > 0$: valle (U)
- $a_2 < 0$: colina (U invertida)

Ejemplos:

- $y = 2x^2$: valle
- $y = -x^2 + 5x - 2$: colina



Propiedad

Las funciones cuadráticas tienen exactamente una cúspide (máximo o mínimo)

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Definición

Una función racional expresa y como **razón de dos polinomios**: $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$
donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios

Hipérbola Rectangular

Caso especial: $y = \frac{a}{x}$ o $xy = a$

Aplicaciones económicas:

- Curva de demanda con elasticidad unitaria ($PQ = \text{constante}$)
- Curva de costo fijo promedio ($CFP = \frac{CF}{Q}$)

Propiedad Asintótica

La hipérbola rectangular nunca toca los ejes; se aproxima a ellos
asintóticamente

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Ejemplo: Hipérbola Rectangular

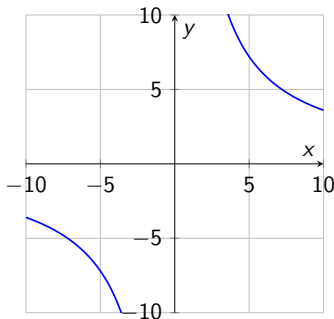
Función: $y = \frac{36}{x}$ o $xy = 36$

Cuadrantes:

- $x > 0, y > 0$: Cuadrante I
- $x < 0, y < 0$: Cuadrante III

Asíntotas:

- Eje x (horizontal)
- Eje y (vertical)



Definición

Funciones que **no** pueden expresarse mediante polinomios o raíces de polinomios

1. Funciones Exponenciales

- Forma: $y = b^x$
- Variable en el exponente
- Ejemplo: $y = 2^x$, $y = e^x$

2. Funciones Logarítmicas

- Forma: $y = \log_b x$
- Inversas de exponenciales
- Ejemplo: $y = \ln x$

3. Funciones Trigonométricas

- $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$
- Aplicaciones en ciclos económicos

Aplicación

Las funciones exponenciales y logarítmicas son fundamentales en:

- Crecimiento económico
- Tasas de interés
- Depreciación

Reglas Fundamentales de Exponentes

Fundamentos de
Economía
Matemática

E. Quintana

Regla I: Producto

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Regla II: Cociente

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (x \neq 0, m > n)$$

Regla III: Exponente Negativo

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0)$$

Regla IV: Exponente Cero

$$x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$$

Reglas Adicionales y Ejemplos

Fundamentos de
Economía
Matemática

E. Quintana

Regla V: Exponente Fraccionario

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Modelos
Económicos y su
Estructura

Regla VI: Potencia de una Potencia

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Regla VII: Potencia de un Producto

$$(xy)^m = x^m y^m$$

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Ejemplos de aplicación:

1. $x^4 \times x^{15} = x^{19}$ (Regla I)

2. $\frac{x^3}{x^{-3}} = x^{3-(-3)} = x^6$ (Regla II)

3. $(x^{1/2} \times x^{1/3})/x^{2/3} = x^{5/6}/x^{2/3} = x^{1/6}$ (Reglas I y II)

4. $x^3 \times y^3 \times z^3 = (xyz)^3$ (Regla VII)

Demostración: Exponentes Fraccionarios

Teorema

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

Demostración (Parte 1): $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$

$$\begin{aligned} x^{m/n} &= x^{m \cdot (1/n)} && \text{(Reescribir exponente)} \\ &= (x^m)^{1/n} && \text{(Regla VI)} \\ &= \sqrt[n]{x^m} && \text{(Regla V)} \end{aligned}$$

Demostración (Parte 2): $x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m$

$$\begin{aligned} x^{m/n} &= x^{(1/n) \cdot m} && \text{(Reescribir exponente)} \\ &= (x^{1/n})^m && \text{(Regla VI)} \\ &= (\sqrt[n]{x})^m && \text{(Regla V)} \end{aligned}$$

1. Nivel Numérico (Específico)

- Coeficientes numéricos concretos
- Ejemplo: $y = 6x + 4$
- Resultado: valores numéricos específicos
- Desventaja: poca generalidad

2. Nivel Paramétrico (Intermedio)

- Coeficientes como parámetros
- Ejemplo: $y = a + bx$
- Resultado: expresiones en términos de parámetros
- Ventaja: familia de soluciones sin repetir razonamiento

3. Nivel de Función General (Alta Generalidad)

- Notación funcional general
- Ejemplo: $y = f(x)$
- Resultado: aplicabilidad más general
- Requisito: restricciones cualitativas para significado económico

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Comparación de Niveles de Generalidad

Fundamentos de
Economía
Matemática

E. Quintana

Nivel	Ejemplo	Representación	Aplicabilidad
Numérico	$y = 1$ $y = 6x + 4$	Una curva única	Muy limitada
Paramétrico	$y = a$ $y = a + bx$	Familia de curvas	Intermedia
General	$y = f(x)$ $z = g(x, y)$	Sin restricción de forma	Muy amplia

Modelos

Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Principio

Mayor generalidad \Rightarrow resultados más amplios pero requieren restricciones cualitativas

Problema

Si $y = 5 + 3x$ con dominio $\{x \mid 1 < x < 9\}$, determine la imagen.

Solución:

La función es lineal con pendiente positiva ($3 > 0$), por tanto es estrictamente creciente.

- Valor mínimo (cuando $x \rightarrow 1^+$): $y_{\min} = 5 + 3(1) = 8$
- Valor máximo (cuando $x \rightarrow 9^-$): $y_{\max} = 5 + 3(9) = 32$

Como el dominio es abierto ($1 < x < 9$), la imagen también es abierta:

Respuesta

Imagen = $\{y \mid 8 < y < 32\}$

Problema

Para $y = -x^2$ con dominio $\{x \mid x \geq 0\}$, ¿cuál es la imagen?

Análisis:

1. Como $x \geq 0$, entonces $x^2 \geq 0$
2. Por tanto, $-x^2 \leq 0$, es decir, $y \leq 0$
3. Valor máximo: cuando $x = 0$, $y = -(0)^2 = 0$
4. A medida que $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow -\infty$

Respuesta

Imagen = $\{y \mid y \leq 0\}$ (números reales no positivos)

Contexto Económico

En la teoría de la empresa: $C = f(Q)$

Preguntas:

1. ¿Cada costo debe relacionarse con un nivel de producción único?

Respuesta: No. La definición de función permite que varios valores de Q se asocien al mismo C .

2. ¿Cada nivel de producción debe determinar un costo único?

Respuesta: Sí. Para ser función, cada Q debe tener exactamente un C asociado.

Justificación Económica

$C = f(Q)$ representa el **costo mínimo** (óptimo) de producir Q , asumiendo comportamiento eficiente de la empresa.

Hemos cubierto:

1. **Modelos económicos:** estructura, variables y ecuaciones
2. **Tipos de análisis:** estático, comparativo, optimización y dinámico
3. **Fundamentos matemáticos:** números reales, conjuntos y operaciones
4. **Relaciones y funciones:** definiciones, componentes y propiedades
5. **Clasificación de funciones:** polinomiales, racionales y trascendentes
6. **Reglas de exponentes:** propiedades fundamentales
7. **Niveles de generalidad:** numérico, paramétrico y general

Modelos
Económicos y su
Estructura

Tipos de Análisis
Económico

Fundamentos
Matemáticos

Conjuntos y
Relaciones

Relaciones y
Funciones

Clasificación de
Funciones

Reglas de
Exponentes

Niveles de
Generalidad en
Modelos

Ejercicios y
Aplicaciones

Conclusiones

Importancia




Estos fundamentos son **esenciales** para el análisis económico riguroso y la construcción de modelos formales.



Chiang, A. C. y Wainwright, K. (2005). *Fundamentos de Economía Matemática*. 4ª ed. McGraw-Hill. ISBN: 978-970-10-5597-3.



Simon, C. P. y Blume, L. (1994). *Mathematics for Economists*. W. W. Norton & Company. ISBN: 978-0-393-95733-4.

-  Sydsæter, K. y Hammond, P. (2008). *Essential Mathematics for Economic Analysis*. 3ª ed. Pearson Education. ISBN: 978-0-273-71324-8.
-  Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis*. 3ª ed. W. W. Norton & Company. ISBN: 978-0-393-95735-8.
-  Debreu, G. (1959). *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Yale University Press. Cowles Foundation Monograph 17.

¡Gracias!

Preguntas y Discusión

Contacto: emanuel.quintana@uptc.edu.co

GitHub: github.com/emanuelquintana-glitch

ORCID: 0009-0006-8419-2805

