

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

ESCUELA DE ECONOMÍA

APUNTES DE ECONOMÍA MATEMÁTICA

Un enfoque sistemático desde los fundamentos

Autor:

Emanuel Quintana

Asignatura:

Economía Matemática I

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Sogamoso, Boyacá, Colombia
2025

Resumen

Este documento constituye una compilación sistemática de apuntes sobre Economía Matemática, desarrollados como parte de la formación académica en la Escuela de Economía de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Estructura del documento

El trabajo se organiza en cinco capítulos principales:

1. **Modelos Económicos:** Introducción a la estructura y componentes de los modelos económicos matemáticos.
2. **Fundamentos Matemáticos:** Sistema de números reales y teoría de conjuntos.
3. **Pares Ordenados y Relaciones:** Producto cartesiano, relaciones matemáticas y funciones.
4. **Funciones Económicas:** Clasificación y propiedades de funciones comunes en economía.
5. **Niveles de Generalidad:** Análisis de modelos en diferentes niveles de abstracción.

Palabras clave

Economía matemática, modelos económicos, optimización, equilibrio económico, funciones económicas.

Agradecimientos

Estos apuntes son el resultado de un proceso continuo de aprendizaje y sistematización del conocimiento adquirido durante mis estudios en Economía Matemática en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Agradezco especialmente:

- A los profesores de la Escuela de Economía de la UPTC.
- A mis compañeros de estudio.
- A la comunidad académica y a los autores de las obras de referencia.

Observación: Este documento es un trabajo en constante evolución. Cualquier error, omisión o sugerencia de mejora puede ser comunicada.

Índice general

Resumen	3
Agradecimientos	5
1. Modelos Económicos	9
1.1. Introducción a los Modelos Económicos	9
1.2. Elementos de un Modelo Matemático	9
1.2.1. Variables, Constantes y Parámetros	9
1.2.2. Ecuaciones e Identidades	10
1.3. Tipos de Análisis Económico	10
1.3.1. Análisis Estático	11
1.3.2. Análisis Estático Comparativo	11
1.3.3. Problemas de Optimización	11
1.3.4. Análisis Dinámico	11
1.4. Métodos Matemáticos en Economía	12
1.5. Ejercicios del Capítulo	12
2. Fundamentos Matemáticos	13
2.1. El Sistema de Números Reales	13
2.1.1. Números Racionales	13
2.1.2. Números Irracionales	14
2.2. Teoría de Conjuntos	14
2.2.1. Notación de Conjuntos	14
2.2.2. Tipos de Conjuntos	14
2.2.3. Relaciones entre Conjuntos	15
2.2.4. Operaciones con Conjuntos	15
2.3. Ejercicios del Capítulo	16
3. Pares Ordenados, Producto Cartesiano y Relaciones	17
3.1. Pares Ordenados	17
3.1.1. Representación Geométrica	17
3.2. Producto Cartesiano	18
3.2.1. Producto Cartesiano de Números Reales	18
3.3. Relaciones y Funciones	18
3.3.1. Funciones	19
3.3.2. Componentes de una Función	19
3.4. Ejercicios del Capítulo	20

4. Funciones Económicas	21
4.1. Clasificación de Funciones	21
4.2. Funciones Constantes	21
4.3. Funciones Polinomiales	21
4.3.1. Funciones Lineales (Grado 1)	22
4.3.2. Funciones Cuadráticas (Grado 2)	22
4.3.3. Funciones Cúbicas (Grado 3)	23
4.3.4. Propiedades Generales de Funciones Polinomiales	23
4.4. Funciones Racionales	23
4.4.1. Hipérbola Rectangular	24
4.5. Reglas de Exponentes	24
4.6. Funciones No Algebraicas	25
4.6.1. Funciones Exponenciales	25
4.6.2. Funciones Logarítmicas	26
4.7. Ejercicios del Capítulo	26
5. Niveles de Generalidad en Modelos Económicos	27
5.1. Introducción	27
5.2. Nivel Numérico o Específico	27
5.3. Nivel Paramétrico	28
5.4. Nivel de Función General	29
5.5. Comparación de los Tres Niveles	30
5.6. Ejemplo Integrador	30
5.7. Ejercicios del Capítulo	31
A. Ejercicios Resueltos	33
B. Ejercicios Resueltos	35
B.1. Productos Cartesianos y Conjuntos Ordenados	35
B.2. Funciones: Dominio e Imagen	36
B.3. Funciones de Costo y Producción	37
B.4. Reglas de Exponentes	39

Modelos Económicos

1.1 Introducción a los Modelos Económicos

Definición 1.1 (Modelo Económico). Un *modelo económico* es un marco analítico o una estructura simplificada intencionalmente que representa una abstracción de la economía real.

Observación: Un modelo económico matemático generalmente está compuesto por un conjunto de **ecuaciones** que describen su estructura.

1.2 Elementos de un Modelo Matemático

Los componentes fundamentales de cualquier modelo matemático aplicado a la economía son las variables, constantes y ecuaciones que lo conforman.

1.2.1 Variables, Constantes y Parámetros

Definición 1.2 (Variable). Una *variable* es una magnitud cuya medida puede cambiar. Ejemplos comunes en economía incluyen:

- Precio: P
- Costo: C
- Ingreso nacional: Y
- Cantidad: Q

Definición 1.3 (Variables Endógenas y Exógenas). ▪ Las *variables endógenas* son aquellas cuyos valores de solución se buscan dentro del modelo.

- Las *variables exógenas* se consideran determinadas por fuerzas externas al modelo y sus magnitudes se aceptan como datos.

Definición 1.4 (Parámetros). Las *constantes paramétricas* (o *parámetros*) son símbolos (a, b, c o α, β, γ) que representan magnitudes fijas que, si bien son variables en un sentido amplio, se tratan como datos en el modelo, de manera similar a las variables exógenas.

1.2.2 Ecuaciones e Identidades

Los modelos económicos matemáticos se componen de tres tipos principales de ecuaciones:

Definición 1.5 (Ecuaciones Definicionales). Las *ecuaciones definicionales* (o *identidades*) establecen una igualdad entre dos expresiones alternas que tienen el mismo significado.

- **Notación:** Se utiliza el signo de igualdad idéntica (\equiv) o el signo igual ($=$).
- **Ejemplo:** La ganancia total se define como:

$$\Pi \equiv I - C \quad (1.1)$$

Definición 1.6 (Ecuaciones de Comportamiento). Las *ecuaciones de comportamiento* especifican la manera en la cual se comporta una variable en respuesta a cambios en otras variables.

- **Propósito:** Proveen expresión matemática a las suposiciones adoptadas sobre el comportamiento humano o no humano.
- **Ejemplos:**

$$= 75 + 10Q \quad (1.2)$$

$$= 110 + 0,2Q^2 \quad (1.3)$$

Ejemplo 1.1 (Funciones de Costo). Las ecuaciones (1.2) y (1.3) demuestran cómo la especificación de la forma de estas ecuaciones expresa diferentes suposiciones:

- Costos fijos distintos: 75 frente a 110
- Variación de costo diferente a medida que la producción Q aumenta

Definición 1.7 (Ecuaciones Condicionales). Una *ecuación condicional* expresa un requisito que debe satisfacerse para lograr un estado específico dentro del modelo.

Se clasifican en dos tipos principales:

1. **Condiciones de Equilibrio:** Expresan el prerrequisito para la consecución del equilibrio.

$$Q_d = Q_s \quad (1.4)$$

2. **Condiciones de Optimización:** Expresan un requisito de maximización o minimización.

$$CM = IM \quad (1.5)$$

1.3 Tipos de Análisis Económico

Los modelos económicos se utilizan para abordar distintos tipos de análisis, cada uno con objetivos y metodologías específicas.

1.3.1 Análisis Estático

Definición 1.8 (Análisis Estático). El *análisis estático* (o *análisis de equilibrio*) busca identificar un conjunto de valores de variables interrelacionadas que se han ajustado de tal manera que no existe una tendencia inherente al cambio en el modelo.

Definición 1.9 (Equilibrio). Un *equilibrio* significa la ausencia de una tendencia a cambiar, basándose solo en el balance de las fuerzas internas del modelo, suponiendo fijos los factores externos (parámetros y variables exógenas).

Ejemplo 1.2 (Equilibrio de Mercado). Considere un mercado simple donde:

$$Q_d = 100 - 2P \quad (1.6)$$

$$Q_s = 20 + 3P \quad (1.7)$$

El equilibrio se alcanza cuando $Q_d = Q_s$:

$$100 - 2P = 20 + 3P \quad (1.8)$$

$$80 = 5P \quad (1.9)$$

$$P^* = 16 \quad (1.10)$$

Sustituyendo: $Q^* = 100 - 2(16) = 68$

1.3.2 Análisis Estático Comparativo

Definición 1.10 (Estática Comparativa). El *análisis estático comparativo* se dedica a comparar dos estados de equilibrio distintos que resultan de diferentes conjuntos de valores de parámetros o variables exógenas.

La estática comparativa permite analizar cómo cambios en los parámetros del modelo afectan las variables endógenas de equilibrio, sin preocuparse por la trayectoria temporal del ajuste.

1.3.3 Problemas de Optimización

Definición 1.11 (Problemas de Optimización). Los *problemas de optimización* son una variedad especial de análisis de equilibrio en la cual la unidad económica busca conscientemente el mejor curso de acción para maximizar (o minimizar) una función objetivo.

Ejemplo 1.3 (Maximización de Ganancia). Una empresa busca maximizar su ganancia:

$$\max_Q \quad \Pi(Q) = I(Q) - C(Q) \quad (1.11)$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{d\Pi}{dQ} = IM - CM = 0 \quad (1.12)$$

Por tanto: $IM = CM$

1.3.4 Análisis Dinámico

Definición 1.12 (Análisis Dinámico). El *análisis dinámico* rastrea y estudia las trayectorias específicas de las variables con el tiempo y determina si convergen a ciertos valores de equilibrio.

Observación: El análisis dinámico es crucial para abordar la *asequibilidad* del equilibrio que la estática ignora. No basta con encontrar un equilibrio; es necesario determinar si el sistema puede alcanzarlo desde una posición de desequilibrio.

1.4 Métodos Matemáticos en Economía

Para resolver y analizar los modelos económicos, los economistas emplean diversos métodos matemáticos:

- **Álgebra de matrices:** Para sistemas de ecuaciones lineales
 - **Cálculo diferencial e integral:** Para análisis de optimización
 - **Ecuaciones diferenciales:** Para modelos dinámicos en tiempo continuo
 - **Ecuaciones en diferencias:** Para modelos dinámicos en tiempo discreto
-

1.5 Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 1.1. *Identifique en el siguiente modelo cuáles son las variables endógenas, exógenas y los parámetros:*

$$Y = C + I + G$$

$$C = a + bY$$

$$I = I_0$$

$$G = G_0$$

donde Y es el ingreso nacional, C es el consumo, I es la inversión y G es el gasto gubernamental.

Ejercicio 1.2. *Clasifique las siguientes ecuaciones como definicionales, de comportamiento o condicionales:*

1. $I = P \times Q$

2. $Q_d = 100 - 2P$

3. $Q_d = Q_s$

4. $C = F + V$

Fundamentos Matemáticos

2.1 El Sistema de Números Reales

Definición 2.1 (Números Reales). *El **sistema de números reales** (\mathbb{R}) constituye un continuo de números esencial para el análisis económico matemático, ya que los valores que adoptan las variables económicas suelen ser numéricos.*

El conjunto de los números reales está compuesto por dos grandes categorías: los **números racionales** y los **números irracionales**.

2.1.1 Números Racionales

Definición 2.2 (Números Racionales). *Los **números racionales** (\mathbb{Q}) son aquellos que pueden expresarse como una **razón de dos enteros**:*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} \quad (2.1)$$

Este conjunto incluye:

- **Enteros positivos:** $\{1, 2, 3, \dots\}$ (utilizados para contar)
- **Enteros negativos:** $\{-1, -2, -3, \dots\}$
- **Cero:** 0 (que no es positivo ni negativo)
- **Fracciones:** Incluyen las fracciones positivas y negativas

Observación: Un entero n se considera racional porque puede verse como la razón $n/1$.

Proposición 2.1 (Caracterización de Racionales). *Un número racional puede expresarse como:*

- Un **decimal finito** (ejemplo: $1/4 = 0,25$), o
- Un **decimal periódico** (ejemplo: $1/3 = 0.\bar{3}$)

donde una cifra o una serie de cifras se repite indefinidamente.

2.1.2 Números Irracionales

Definición 2.3 (Números Irracionales). Los **números irracionales** son aquellos que **no** pueden expresarse como una razón de un par de enteros. Se expresan como **decimales no periódicos y no finitos**.

Ejemplo 2.1 (Números Irracionales Comunes).

$$\sqrt{2} = 1,4142135 \dots$$

$$\pi = 3,1415926 \dots$$

$$e = 2,7182818 \dots$$

Teorema 2.2 (Complejitud de los Reales). Los números irracionales llenan los espacios que quedan entre los números racionales, completando así el **continuo de números** que forma el conjunto de los números reales \mathbb{R} .

Cuando el conjunto \mathbb{R} se representa gráficamente, se hace referencia a la línea como la **recta real**. Cabe notar que los números reales no agotan todos los números que se usan en matemáticas, ya que también existen los números imaginarios⁽¹⁾, que se relacionan con las raíces cuadradas de números negativos.

2.2 Teoría de Conjuntos

Definición 2.4 (Conjunto). El concepto de **conjunto** en matemáticas se define simplemente como una colección de objetos distintos. Los objetos incluidos en esa colección se denominan **elementos** del conjunto.

2.2.1 Notación de Conjuntos

La forma estándar para expresar un conjunto es utilizando un par de **llaves** $\{ \}$. Existen dos métodos principales para definir los elementos:

1. **Por Enumeración:** Se listan explícitamente los elementos del conjunto.

$$S = \{2, 3, 4\} \tag{2.2}$$

2. **Por Descripción:** Se describe la propiedad que deben poseer los elementos.

$$S = \{x \mid x \text{ es un entero positivo}\} \tag{2.3}$$

Definición 2.5 (Pertenencia). La **pertenencia** de un elemento x a un conjunto A se indica con el símbolo \in :

$$x \in A \quad \text{se lee: "x es un elemento de A"} \tag{2.4}$$

2.2.2 Tipos de Conjuntos

Definición 2.6 (Clasificación de Conjuntos). Los conjuntos se clasifican según la cantidad y naturaleza de sus elementos:

- **Conjunto Finito:** Contiene una cantidad finita de elementos y siempre es **contable** (numerable).

- **Conjunto Infinito:** Contiene una cantidad infinita de elementos. Puede ser:
 - Numerable (contable): como \mathbb{N} o \mathbb{Z}
 - No numerable (no contable): como \mathbb{R}
- **Conjunto Nulo o Vacío:** Es el conjunto que no contiene absolutamente ningún elemento, denotado por \emptyset o $\{\}$.

Observación: Es importante destacar que el conjunto $\{0\}$ **no** es nulo, ya que contiene al número cero como elemento.

2.2.3 Relaciones entre Conjuntos

Definición 2.7 (Igualdad de Conjuntos). Dos conjuntos A y B son **iguales** si y sólo si contienen elementos idénticos:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \quad (2.5)$$

El orden en que aparecen los elementos es irrelevante.

Definición 2.8 (Subconjunto). El conjunto T es un **subconjunto** de S (denotado $T \subset S$ o $S \supset T$) si y sólo si todo elemento de T es también un elemento de S :

$$T \subset S \Leftrightarrow (\forall x)(x \in T \Rightarrow x \in S) \quad (2.6)$$

Definición 2.9 (Subconjunto Propio). Un **subconjunto propio** es cualquier subconjunto que no contiene a todos los elementos del conjunto original. Es decir, T es subconjunto propio de S si:

$$T \subset S \quad \text{y} \quad T \neq S \quad (2.7)$$

Definición 2.10 (Conjuntos Disjuntos). Dos conjuntos son **disjuntos** si no tienen elementos en común:

$$A \cap B = \emptyset \quad (2.8)$$

Teorema 2.3 (Propiedades de Subconjuntos). 1. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto: $\emptyset \subset A$ para todo conjunto A .

2. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo: $A \subset A$.

3. Si un conjunto tiene n elementos, el número total de subconjuntos que se pueden formar es 2^n .

2.2.4 Operaciones con Conjuntos

Definición 2.11 (Unión). La **unión** de dos conjuntos A y B (denotada $A \cup B$) es el conjunto que contiene todos los elementos que pertenecen a A o a B , o a ambos:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\} \quad (2.9)$$

Definición 2.12 (Intersección). La **intersección** de dos conjuntos A y B (denotada $A \cap B$) es el conjunto que contiene solo los elementos que pertenecen **tanto** a A **como** a B :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\} \quad (2.10)$$

Definición 2.13 (Complemento). Dado un **conjunto universal** U , el **complemento** de un conjunto A (denotado \bar{A} o A^c) es el conjunto que contiene los elementos del conjunto universal U que **no** están en A :

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\} \quad (2.11)$$

Teorema 2.4 (Leyes de las Operaciones con Conjuntos). Para cualesquiera conjuntos A , B y C :

1. **Ley Conmutativa:**

$$A \cup B = B \cup A \quad (2.12)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (2.13)$$

2. **Ley Asociativa:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (2.14)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (2.15)$$

3. **Ley Distributiva:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (2.16)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (2.17)$$

2.3 Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 2.1. Determine si los siguientes números son racionales o irracionales:

1. 0,75
2. $\sqrt{5}$
3. $0.\overline{142857}$
4. $\pi/2$

Ejercicio 2.2. Dado $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. \bar{A}
4. $(A \cup B) \cap \bar{A}$

Pares Ordenados, Producto Cartesiano y Relaciones

3.1 Pares Ordenados

Definición 3.1 (Par Ordenado). Un **par ordenado** (a, b) se diferencia de un conjunto simple $\{a, b\}$ en que el **orden de los elementos es importante**. Mientras que en un conjunto $\{a, b\} = \{b, a\}$, en un par ordenado:

$$(a, b) \neq (b, a) \quad \text{a menos que } a = b \quad (3.1)$$

Observación: Los pares ordenados se encierran entre **paréntesis**, a diferencia de los conjuntos que se encierran entre llaves.

Definición 3.2 (Conjuntos Ordenados). Los pares ordenados, junto con las ternas ordenadas (a, b, c) , cuádruplas ordenadas (a, b, c, d) , etc., se conocen colectivamente como **conjuntos ordenados**.

Ejemplo 3.1 (Aplicación Económica). Para representar magnitudes relacionadas como la edad y el peso de un estudiante (a, w) , el par $(19, 127)$ es conceptualmente diferente de $(127, 19)$. El primer elemento representa la edad (19 años) y el segundo el peso (127 libras).

3.1.1 Representación Geométrica

Definición 3.3 (Plano Cartesiano). En el plano coordenado rectangular (o **plano cartesiano**), cada punto en el espacio bidimensional representa un par ordenado (x, y) , donde:

- x es la **abscisa** (coordenada horizontal)
- y es la **ordenada** (coordenada vertical)

Observación: El punto $(4, 2)$ es distinto del punto $(2, 4)$ en el plano cartesiano, ilustrando la importancia del orden en los pares ordenados.

3.2 Producto Cartesiano

Definición 3.4 (Producto Cartesiano). El **producto cartesiano** de dos conjuntos X y Y (denotado $X \times Y$) es el conjunto de todos los pares ordenados posibles formados tomando el primer elemento de X y el segundo de Y :

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ y } y \in Y\} \quad (3.2)$$

Ejemplo 3.2 (Cálculo de Producto Cartesiano). Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Entonces:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\} \quad (3.3)$$

Teorema 3.1 (Cardinalidad del Producto Cartesiano). Si $|X|$ denota el número de elementos del conjunto X , entonces:

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| \quad (3.4)$$

Proposición 3.2 (No Conmutatividad). En general, el producto cartesiano **no es conmutativo**:

$$X \times Y \neq Y \times X \quad (\text{en general}) \quad (3.5)$$

Condiciones de igualdad: $X \times Y = Y \times X$ si y solo si:

1. $X = Y$, o
2. Al menos uno de los conjuntos es el conjunto vacío: $X = \emptyset$ o $Y = \emptyset$

Supongamos que $X \times Y = Y \times X$.

Si $X \neq Y$, entonces existe al menos un elemento $x \in X$ tal que $x \notin Y$ (o viceversa).

Para que $(x, y) \in X \times Y$, necesitamos $x \in X$ y $y \in Y$.

Para que $(x, y) \in Y \times X$, necesitaríamos $x \in Y$, lo cual contradice nuestra suposición.

Por tanto, si $X \times Y = Y \times X$ y ambos son no vacíos, debe cumplirse que $X = Y$.

3.2.1 Producto Cartesiano de Números Reales

Definición 3.5 (\mathbb{R}^2). Si X y Y consisten en números reales (\mathbb{R}), el producto cartesiano resultante es:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad (3.6)$$

Este conjunto tiene una correspondencia uno a uno con los puntos del plano cartesiano.

Definición 3.6 (Producto Cartesiano de n Conjuntos). El producto cartesiano de n conjuntos X_1, X_2, \dots, X_n es:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i\} \quad (3.7)$$

3.3 Relaciones y Funciones

Definición 3.7 (Relación). Una **relación** es cualquier colección de pares ordenados. Formalmente, una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{R} \subseteq X \times Y \quad (3.8)$$

Observación: Una relación tiene el propósito de asociar un valor y con un valor x . Una característica distintiva es que puede especificar **uno o más valores de y** para un valor dado de x .

3.3.1 Funciones

Definición 3.8 (Función). Una **función** es un tipo específico de relación en la que **para cada valor de x , existe solo un valor correspondiente de y** :

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{tal que} \quad \forall x \in X, \exists! y \in Y : y = f(x) \quad (3.9)$$

Teorema 3.3 (Relación entre Funciones y Relaciones). Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

Observación: Aunque la definición requiere una y única para cada x , sí se permite que más de un valor de x se asocie al mismo valor de y . Es decir, una función puede ser **muchos a uno**, pero nunca **uno a muchos**.

Definición 3.9 (Terminología de Funciones). Una función también puede ser referida como:

- Un **mapeo**: $f : X \rightarrow Y$
- Una **transformación**: que transforma elementos de X en elementos de Y

3.3.2 Componentes de una Función

Definición 3.10 (Elementos de una Función). En la notación $y = f(x)$, identificamos:

- **Variable independiente (Argumento):** Es el valor de entrada x
- **Variable dependiente (Valor):** Es el valor de salida y
- **Dominio:** El conjunto de todos los valores permitidos de x :

$$(f) = \{x \mid \exists y : y = f(x)\} \quad (3.10)$$

- **Imagen (Codominio o Rango):** El conjunto de valores de y :

$$(f) = \{y \mid \exists x \in (f) : y = f(x)\} \quad (3.11)$$

Ejemplo 3.3 (Dominio e Imagen de una Función). Si la función de costo total es:

$$C = 150 + 7Q \quad \text{con} \quad 0 \leq Q \leq 100 \quad (3.12)$$

Entonces:

- **Dominio:** $(C) = \{Q \mid 0 \leq Q \leq 100\}$
- **Imagen:**

$$\begin{aligned} C_{\min} &= 150 + 7(0) = 150 \\ C_{\max} &= 150 + 7(100) = 850 \\ (C) &= \{C \mid 150 \leq C \leq 850\} \end{aligned}$$

Observación: En el análisis económico, las ecuaciones de comportamiento se expresan normalmente como funciones. Dado que las variables económicas a menudo se restringen a números reales no negativos, el dominio y la imagen se limitan de forma similar.

3.4 Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 3.1. *Dados los conjuntos $S_1 = \{3, 6, 9\}$, $S_2 = \{a, b\}$ y $S_3 = \{m, n\}$, determine:*

1. $S_1 \times S_2$
2. $S_2 \times S_3$
3. $S_3 \times S_1$
4. $S_1 \times S_2 \times S_3$

Ejercicio 3.2. *¿Alguna de las siguientes representaciones en un plano cartesiano representa una función?*

1. *Un círculo*
2. *Un triángulo*
3. *Una recta con pendiente descendente*
4. *Una parábola horizontal*

Ejercicio 3.3. *Si el dominio de la función $y = 5 + 3x$ es el conjunto $\{x \mid 1 < x < 9\}$, determine la imagen de la función.*

Ejercicio 3.4. *Para la función $y = -x^2$, si el dominio es el conjunto de los números reales no negativos, ¿cuál es la imagen?*

Funciones Económicas

4.1 Clasificación de Funciones

Las funciones se clasifican según su estructura matemática, partiendo de la expresión general $y = f(x)$ para detallar la regla específica de mapeo o relación que define cada tipo.

4.2 Funciones Constantes

Definición 4.1 (Función Constante). Una *función constante* es aquella cuya imagen consiste en un solo elemento:

$$y = f(x) = k \quad (4.1)$$

donde k es una constante, y el valor de y no cambia sin importar el valor de x .

Observación: En un plano coordenado, una función constante se representa como una **línea horizontal** a la altura $y = k$.

Ejemplo 4.1 (Inversión Exógena). En los modelos de ingreso nacional, una función de inversión exógena puede ser una función constante:

$$I = I_0 = 50 \quad (4.2)$$

donde la inversión es independiente del nivel de ingreso.

4.3 Funciones Polinomiales

Definición 4.2 (Función Polinomial). Una *función polinomial* de una sola variable x tiene la forma general:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (4.3)$$

donde:

- a_i son los *coeficientes*

- i es la **potencia** (o exponente)
- n es el **grado** de la función (la mayor potencia de x)

Observación: El término "polinomio" significa "varios términos". La función constante es considerada un caso "degenerado" de función polinomial con $n = 0$.

4.3.1 Funciones Lineales (Grado 1)

Definición 4.3 (Función Lineal). Una **función lineal** es un polinomio de primer grado:

$$y = a_0 + a_1x \quad (4.4)$$

donde:

- a_0 es la **ordenada al origen** (y -intercepto)
- a_1 es la **pendiente** (tasa de cambio de y respecto a x)

Proposición 4.1 (Interpretación de la Pendiente). La pendiente a_1 representa el incremento resultante en y debido a un incremento unitario en x :

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4.5)$$

Si $a_1 > 0$: la función es **creciente** (pendiente ascendente)
Si $a_1 < 0$: la función es **decreciente** (pendiente descendente)
Si $a_1 = 0$: la función es **constante** (línea horizontal)

Ejemplo 4.2 (Función de Consumo Lineal). En macroeconomía, la función de consumo keynesiana se expresa como:

$$C = C_0 + cY \quad (4.6)$$

donde:

- C es el consumo agregado
- C_0 es el consumo autónomo (ordenada al origen)
- c es la propensión marginal a consumir (pendiente), con $0 < c < 1$
- Y es el ingreso nacional

4.3.2 Funciones Cuadráticas (Grado 2)

Definición 4.4 (Función Cuadrática). Una **función cuadrática** es un polinomio de segundo grado:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (a_2 \neq 0) \quad (4.7)$$

Teorema 4.2 (Forma de la Parábola). La gráfica de una función cuadrática es una **parábola**:

- Si $a_2 > 0$: la parábola tiene forma de **valle** (cóncava hacia arriba, \cup)
- Si $a_2 < 0$: la parábola tiene forma de **colina** (cóncava hacia abajo, \cap)

Ejemplo 4.3 (Función de Costo Total Cuadrática). *Una función de costo total con rendimientos decrecientes puede tener la forma:*

$$C(Q) = 100 + 5Q + 0,1Q^2 \quad (4.8)$$

donde:

- 100 es el costo fijo
- $5Q$ representa el costo variable lineal
- $0,1Q^2$ captura los costos crecientes marginales

Proposición 4.3 (Vértice de la Parábola). *Para la función $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, el vértice (máximo o mínimo) ocurre en:*

$$x^* = -\frac{a_1}{2a_2} \quad (4.9)$$

4.3.3 Funciones Cúbicas (Grado 3)

Definición 4.5 (Función Cúbica). *Una **función cúbica** es un polinomio de tercer grado:*

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (a_3 \neq 0) \quad (4.10)$$

Observación: La gráfica de una función cúbica típicamente muestra **dos ondulaciones**, permitiendo representar relaciones más complejas como funciones de costo con múltiples etapas de rendimientos.

Ejemplo 4.4 (Función de Producción Cúbica). *Una función de producción a corto plazo puede tener la forma:*

$$Q(L) = -0,1L^3 + 3L^2 + 10L \quad (4.11)$$

mostrando inicialmente rendimientos crecientes, luego decrecientes, y finalmente negativos.

4.3.4 Propiedades Generales de Funciones Polinomiales

Teorema 4.4 (Continuidad de Polinomios). *Las funciones polinomiales son **continuas** en todo su dominio \mathbb{R} . Además, poseen derivadas continuas y suaves de todos los órdenes.*

Observación: Esta propiedad hace que las funciones polinomiales sean frecuentemente utilizadas en modelos económicos, ya que facilitan el análisis mediante cálculo diferencial.

4.4 Funciones Racionales

Definición 4.6 (Función Racional). *Una **función racional** es aquella en la cual y se expresa como una **razón de dos polinomios**:*

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m} \quad (4.12)$$

donde $Q(x) \neq 0$.

Observación: Cualquier función polinomial es también una función racional, ya que puede expresarse como:

$$y = \frac{P(x)}{1} \quad (4.13)$$

4.4.1 Hipérbola Rectangular

Definición 4.7 (Hipérbola Rectangular). *Un caso especial importante de función racional es la **hipérbola rectangular**:*

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{o equivalentemente} \quad xy = a \quad (4.14)$$

Teorema 4.5 (Propiedades de la Hipérbola Rectangular). *La hipérbola rectangular tiene las siguientes propiedades:*

1. *Nunca toca sus ejes*
2. *Se aproxima a los ejes **asintóticamente***
3. *Los ejes son las **asíntotas** de la función*
4. *Está definida para todo $x \neq 0$*

Ejemplo 4.5 (Curva de Demanda con Elasticidad Unitaria). *Una curva de demanda de la forma:*

$$PQ = 1000 \quad (4.15)$$

o equivalentemente:

$$P = \frac{1000}{Q} \quad (4.16)$$

*representa una demanda con **elasticidad unitaria** en todos sus puntos. El gasto total PQ es constante e igual a 1000.*

Ejemplo 4.6 (Costo Fijo Promedio). *El costo fijo promedio se puede expresar como:*

$$CFP(Q) = \frac{CF}{Q} \quad (4.17)$$

Esta es una hipérbola rectangular que decrece a medida que Q aumenta, reflejando la distribución del costo fijo sobre más unidades.

4.5 Reglas de Exponentes

Antes de estudiar funciones exponenciales, es esencial revisar las reglas fundamentales de los exponentes.

Definición 4.8 (Exponente). *El **exponente** es el indicador de la potencia a la que se eleva una variable o número. La expresión x^n significa que x se multiplica por sí misma n veces.*

Teorema 4.6 (Reglas de los Exponentes). *Para $x, y \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{R}$:*

1. **Producto:** $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
2. **Cociente:** $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
3. **Exponente Negativo:** $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
4. **Exponente Cero:** $x^0 = 1$ (siempre que $x \neq 0$)
5. **Exponente Fraccionario:** $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

6. **Potencia de Potencia:** $(x^m)^n = x^{mn}$

7. **Potencia de Producto:** $(xy)^m = x^m y^m$

Ejemplo 4.7 (Aplicación de Reglas de Exponentes). *Simplifique:* $(x^2 y^3)^2 \cdot x^{-1}$

$$(x^2 y^3)^2 \cdot x^{-1} = x^4 y^6 \cdot x^{-1} \quad (4.18)$$

$$= x^{4-1} y^6 \quad (4.19)$$

$$= x^3 y^6 \quad (4.20)$$

4.6 Funciones No Algebraicas

Definición 4.9 (Función Algebraica vs No Algebraica). Una función es **algebraica** si se puede expresar en términos de polinomios o raíces de polinomios. Las funciones que no cumplen esta condición son **no algebraicas**, también conocidas como **funciones trascendentes**.

4.6.1 Funciones Exponenciales

Definición 4.10 (Función Exponencial). Una **función exponencial** tiene la forma:

$$y = b^x \quad (b > 0, b \neq 1) \quad (4.21)$$

donde la variable independiente x aparece en el **exponente**, y b se denomina la **base**.

Teorema 4.7 (Propiedades de Funciones Exponenciales). Para $y = b^x$:

1. Si $b > 1$: la función es **estrictamente creciente**
2. Si $0 < b < 1$: la función es **estrictamente decreciente**
3. $(f) = \mathbb{R}$ y $(f) = (0, +\infty)$
4. La función es siempre positiva: $b^x > 0$ para todo x
5. $b^0 = 1$ para cualquier base b

Definición 4.11 (Número e). El número e es una constante matemática fundamental, base del logaritmo natural:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828... \quad (4.22)$$

Ejemplo 4.8 (Crecimiento Exponencial). Un capital inicial P_0 que crece a una tasa continua r durante t períodos se expresa como:

$$P(t) = P_0 e^{rt} \quad (4.23)$$

4.6.2 Funciones Logarítmicas

Definición 4.12 (Función Logarítmica). Una *función logarítmica* tiene la forma:

$$y = \log_b x \quad (b > 0, b \neq 1) \quad (4.24)$$

Esta función es la *inversa* de la función exponencial.

Teorema 4.8 (Relación entre Exponenciales y Logaritmos).

$$y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x \quad (4.25)$$

Definición 4.13 (Logaritmo Natural). El *logaritmo natural* (o *logaritmo neperiano*) es el logaritmo en base e :

$$\ln x = \log_e x \quad (4.26)$$

Teorema 4.9 (Propiedades de Logaritmos). Para $x, y > 0$ y $a \in \mathbb{R}$:

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
 2. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
 3. $\log_b(x^a) = a \log_b x$
 4. $\log_b b = 1$
 5. $\log_b 1 = 0$
-

4.7 Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 4.1. Grafique las siguientes funciones asumiendo dominio de números reales no negativos:

1. $y = 16 - 2x$
2. $y = 8 + 2x$
3. $y = 2x^2$

Identifique las diferencias principales entre ellas.

Ejercicio 4.2. Grafique las funciones cuadráticas y determine si tienen forma de colina o valle:

1. $y = -x^2 + 5x - 2$
2. $y = x^2 + 5x - 2$

Ejercicio 4.3. Simplifique las siguientes expresiones:

1. $x^4 \times x^{15}$
2. $x^a \times x^b \times x^c$
3. $x^3 \times y^3 \times z^3$
4. $\frac{x^3}{x^{-3}}$

Niveles de Generalidad en Modelos Económicos

5.1 Introducción

Observación: Los modelos económicos pueden expresarse con distintos **niveles de generalidad**. La elección del nivel de generalidad afecta directamente la aplicabilidad de los resultados analíticos obtenidos.

Existen principalmente tres niveles de generalidad para la formulación de funciones en modelos económicos, cada uno con ventajas y limitaciones específicas.

5.2 Nivel Numérico o Específico

Definición 5.1 (Formulación Numérica). *En el **nivel numérico** o **específico**, las funciones se expresan con **coeficientes numéricos específicos**, lo que define de manera precisa el tipo de función (constante, lineal, cuadrática, etc.).*

Ejemplo 5.1 (Funciones Específicas). *Ejemplos de formulación numérica:*

$$y = 1 \quad (\text{función constante específica}) \quad (5.1)$$

$$y = 6x + 4 \quad (\text{función lineal específica}) \quad (5.2)$$

$$y = x^2 - 3x + 1 \quad (\text{función cuadrática específica}) \quad (5.3)$$

Proposición 5.1 (Características del Nivel Numérico). 1. Cada función de este tipo corresponde a una **curva única** y bien definida.

2. Las soluciones analíticas emergen como **valores numéricos**.

3. Los resultados tienen **muy poca generalidad**.

Observación: Desventaja principal: Si se desea saber cómo cambiaría la conclusión analítica al modificar un coeficiente (por ejemplo, la pendiente de una función lineal), es necesario examinar de nuevo todo el proceso de razonamiento con los nuevos valores.

Ejemplo 5.2 (Modelo de Equilibrio de Mercado Específico). *Considere el siguiente modelo de mercado:*

$$Q_d = 100 - 2P \quad (5.4)$$

$$Q_s = 20 + 3P \quad (5.5)$$

Equilibrio cuando $Q_d = Q_s$:

$$100 - 2P = 20 + 3P \quad (5.6)$$

$$80 = 5P \quad (5.7)$$

$$P^* = 16 \quad (5.8)$$

$$Q^* = 68 \quad (5.9)$$

Si queremos analizar un mercado con demanda $Q_d = 120 - 3P$, debemos resolver el sistema completamente de nuevo.

5.3 Nivel Paramétrico

Definición 5.2 (Formulación Paramétrica). *En el **nivel paramétrico**, los coeficientes numéricos son reemplazados por **parámetros** (constantes paramétricas), representados típicamente por letras como a, b, c o símbolos griegos α, β, γ .*

Ejemplo 5.3 (Funciones Paramétricas). *Ejemplos de formulación paramétrica:*

$$y = a \quad (\text{familia de funciones constantes}) \quad (5.10)$$

$$y = a + bx \quad (\text{familia de funciones lineales}) \quad (5.11)$$

$$y = a + bx + cx^2 \quad (\text{familia de funciones cuadráticas}) \quad (5.12)$$

Definición 5.3 (Parámetro). *Un **parámetro** es un símbolo que representa una constante dada. Aunque puede tomar casi cualquier valor, se trata como un dato en el modelo (similar a una variable exógena), pero sin asignarle aún un número específico.*

Proposición 5.2 (Características del Nivel Paramétrico). 1. *Cada función con parámetros representa no solo una curva, sino una **familia completa de curvas**.*

2. *El resultado de las operaciones matemáticas se expresa en **términos de parámetros**.*

3. *Los resultados son más generales: al asignar diversos valores a los parámetros, se obtiene una familia completa de respuestas específicas **sin repetir el proceso de razonamiento**.*

Ejemplo 5.4 (Modelo de Equilibrio Paramétrico). *Considere el modelo general:*

$$Q_d = \alpha - \beta P \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (5.13)$$

$$Q_s = \gamma + \delta P \quad (\gamma \geq 0, \delta > 0) \quad (5.14)$$

Equilibrio cuando $Q_d = Q_s$:

$$\alpha - \beta P = \gamma + \delta P \quad (5.15)$$

$$\alpha - \gamma = (\beta + \delta)P \quad (5.16)$$

$$P^* = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta} \quad (5.17)$$

$$Q^* = \alpha - \beta \left(\frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta} \right) = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta + \delta} \quad (5.18)$$

Ventaja: Esta solución es aplicable a cualquier mercado con funciones de oferta y demanda lineales. Basta con sustituir los valores específicos de los parámetros.

Proposición 5.3 (Análisis de Estática Comparativa). *El nivel paramétrico facilita el análisis de estática comparativa. Podemos determinar cómo cambios en los parámetros afectan las variables de equilibrio mediante derivadas parciales:*

$$\frac{\partial P^*}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta + \delta} > 0 \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial \beta} = -\frac{\alpha - \gamma}{(\beta + \delta)^2} < 0 \quad (\text{si } \alpha > \gamma) \quad (5.20)$$

5.4 Nivel de Función General

Definición 5.4 (Formulación General). *En el nivel de función general, las funciones se expresan mediante notación funcional general, sin especificar su forma algebraica particular.*

Ejemplo 5.5 (Funciones Generales). *Ejemplos de formulación general:*

$$y = f(x) \quad (\text{función de una variable}) \quad (5.21)$$

$$z = g(x, y) \quad (\text{función de dos variables}) \quad (5.22)$$

$$u = h(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{función de } n \text{ variables}) \quad (5.23)$$

Proposición 5.4 (Características del Nivel General). 1. La función **no está restringida** a ser lineal, cuadrática, exponencial o trigonométrica.

2. El resultado analítico posee la **aplicabilidad más general**.

3. Se obtienen resultados cualitativos en lugar de cuantitativos.

Definición 5.5 (Restricciones Cualitativas). *Para que los resultados tengan significado económico, es necesario imponer restricciones cualitativas a las funciones generales, como:*

- Una función de demanda tiene pendiente negativa: $\frac{dQ_d}{dP} < 0$
- Una función de producción tiene rendimientos marginales decrecientes: $QL2 < 0$
- Una función de consumo tiene propensión marginal positiva menor que uno: $0 < \frac{dC}{dY} < 1$

Ejemplo 5.6 (Teoría del Consumidor General). *La teoría del consumidor puede formularse como:*

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.24)$$

$$\text{sujeto a } \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M \quad (5.25)$$

Con restricciones cualitativas:

- Utilidad marginal positiva: $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ para todo i
- Utilidad marginal decreciente: $u_{x_i x_i} < 0$ para todo i

Los resultados (condiciones de primer orden, interpretación del multiplicador de Lagrange, etc.) son válidos para cualquier función de utilidad que satisfaga estas restricciones.

5.5 Comparación de los Tres Niveles

Cuadro 5.1: Comparación de Niveles de Generalidad

Característica	Numérico	Paramétrico	General
Especificidad	Alta	Media	Baja
Generalidad	Baja	Media	Alta
Tipo de resultado	Valores numéricos	Expresiones algebraicas	Relaciones cualitativas
Reutilización	Ninguna	Alta	Total
Aplicabilidad	Un caso	Familia de casos	Todos los casos
Ejemplo	$y = 2x + 3$	$y = a + bx$	$y = f(x)$

Observación: La elección del nivel de generalidad depende del objetivo del análisis:

- **Numérico:** Para aplicaciones prácticas específicas y calibración
- **Paramétrico:** Para análisis de estática comparativa y sensibilidad
- **General:** Para desarrollo teórico y resultados universales

5.6 Ejemplo Integrador

Ejemplo 5.7 (Función de Producción en Tres Niveles). *Nivel Numérico:*

$$Q = 10L^{0,5}K^{0,5} \quad (5.26)$$

Resultado: Si $L = 16$ y $K = 25$, entonces $Q = 10(4)(5) = 200$.

Nivel Paramétrico:

$$Q = AL^\alpha K^\beta \quad (5.27)$$

donde $A > 0$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Resultado: La elasticidad del producto respecto al trabajo es:

$$\varepsilon_{Q,L} = \frac{\partial \ln Q}{\partial \ln L} = \alpha \quad (5.28)$$

Nivel General:

$$Q = f(L, K) \quad (5.29)$$

con restricciones:

- $\frac{\partial Q}{\partial L} > 0$ (producto marginal del trabajo positivo)
- $\frac{\partial Q}{\partial K} > 0$ (producto marginal del capital positivo)
- $QL^2 < 0$ (rendimientos marginales decrecientes)

Resultado: Bajo competencia perfecta, la condición de optimización es:

$$w = p \cdot \frac{\partial Q}{\partial L} \quad (5.30)$$

válida para cualquier función de producción que satisfaga las restricciones.

5.7 Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 5.1. *Resuelva el siguiente modelo de equilibrio en los tres niveles de generalidad:*

Nivel Numérico: $Q_d = 80 - 4P$, $Q_s = 20 + 2P$

Nivel Paramétrico: $Q_d = a - bP$, $Q_s = c + dP$

Nivel General: $Q_d = D(P)$, $Q_s = S(P)$ con $D'(P) < 0$, $S'(P) > 0$

Ejercicio 5.2. *Para la función de costo $C = a + bQ + cQ^2$:*

- 1. Derive expresiones para el costo marginal y el costo promedio*
- 2. Determine cuándo el costo marginal es creciente*
- 3. Encuentre el punto donde el costo marginal iguala al costo promedio*

A

Ejercicios Resueltos

B

Ejercicios Resueltos

Este apéndice contiene soluciones detalladas de ejercicios selectos basados en el contenido del documento.

B.1 Productos Cartesianos y Conjuntos Ordenados

Ejercicio 1: Productos Cartesianos

Ejercicio B.1. *Dados los conjuntos $S_1 = \{3, 6, 9\}$, $S_2 = \{a, b\}$ y $S_3 = \{m, n\}$, determine:*

1. $S_1 \times S_2$
2. $S_2 \times S_3$
3. $S_3 \times S_1$
4. $S_1 \times S_2 \times S_3$

Solución:

El producto cartesiano $X \times Y$ es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) donde $x \in X$ e $y \in Y$.

(a) $S_1 \times S_2$:

Para cada elemento de S_1 , formamos pares con cada elemento de S_2 :

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Respuesta (a)]

$$S_1 \times S_2 = \{(3, a), (3, b), (6, a), (6, b), (9, a), (9, b)\}$$

(b) $S_2 \times S_3$:

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Respuesta (b)]

$$S_2 \times S_3 = \{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n)\}$$

(c) $S_3 \times S_1$:

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Respuesta (c)]

$$S_3 \times S_1 = \{(m, 3), (m, 6), (m, 9), (n, 3), (n, 6), (n, 9)\}$$

(d) $S_1 \times S_2 \times S_3$ (ternas ordenadas):

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Respuesta (d)]

$$S_1 \times S_2 \times S_3 = \{(3, a, m), (3, a, n), (3, b, m), (3, b, n), \\ (6, a, m), (6, a, n), (6, b, m), (6, b, n), \\ (9, a, m), (9, a, n), (9, b, m), (9, b, n)\}$$

Observación: Note que $|S_1 \times S_2 \times S_3| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot |S_3| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ elementos.

Ejercicio 2: Conmutatividad del Producto Cartesiano

Ejercicio B.2. ¿Se cumple que $S_1 \times S_2 = S_2 \times S_1$ en general? ¿Bajo qué condiciones estos productos son iguales?

Solución:

[colback=white,colframe=goettingenlightblue,title=Respuesta Principal] **No**, en general $S_1 \times S_2 \neq S_2 \times S_1$.

Justificación:

El producto cartesiano no es conmutativo porque la definición de par ordenado indica que el orden es importante. Para que $(a, b) = (b, a)$, se requiere que $a = b$.

Ejemplo concreto:

De los ejercicios anteriores:

- $(3, a) \in S_1 \times S_2$
- $(a, 3) \in S_2 \times S_1$
- Pero $(3, a) \neq (a, 3)$ porque son elementos de distinta naturaleza

Condiciones de igualdad:

$S_1 \times S_2 = S_2 \times S_1$ si y solo si:

1. **Los conjuntos son idénticos:** $S_1 = S_2$

En este caso, $S_1 \times S_1 = S_1 \times S_1$ trivialmente.

2. **Al menos uno es vacío:** $S_1 = \emptyset$ o $S_2 = \emptyset$

Porque $S_1 \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times S_1$

B.2 Funciones: Dominio e Imagen

Ejercicio 3: Dominio e Imagen

Ejercicio B.3. Si el dominio de la función $y = 5 + 3x$ es el conjunto $\{x \mid 1 < x < 9\}$, determine la imagen de la función.

Solución:

La función $y = 5 + 3x$ es lineal con pendiente positiva ($3 > 0$), por lo que es estrictamente creciente.

Paso 1: Determinar los valores extremos del dominio.

- Límite inferior: $x \rightarrow 1^+$
- Límite superior: $x \rightarrow 9^-$

Paso 2: Calcular los valores correspondientes de y .

Cuando x se acerca a 1:

$$y = 5 + 3(1) = 8 \quad (\text{B.1})$$

Cuando x se acerca a 9:

$$y = 5 + 3(9) = 5 + 27 = 32 \quad (\text{B.2})$$

Paso 3: Dado que el dominio es un intervalo abierto, la imagen también debe ser abierta.

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Respuesta] La imagen de la función es:

$$(f) = \{y \mid 8 < y < 32\} \quad (\text{B.3})$$

Si el dominio hubiera sido cerrado $[1, 9]$, la imagen sería $[8, 32]$.

Ejercicio 4: Imagen con Dominio Restringido

Ejercicio B.4. Para la función $y = -x^2$, si el dominio es el conjunto de los números reales no negativos, ¿cuál es la imagen?

Solución:

Paso 1: Identificar el dominio.

$$(f) = \{x \mid x \geq 0\} = [0, +\infty) \quad (\text{B.4})$$

Paso 2: Analizar el comportamiento de la función.

- Como $x \geq 0$, entonces $x^2 \geq 0$
- Por tanto, $y = -x^2 \leq 0$ (siempre no positivo)

Paso 3: Encontrar los valores extremos.

- Valor máximo: Cuando $x = 0$, $y = -(0)^2 = 0$
- Valor mínimo: Cuando $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -\infty$

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Respuesta] La imagen de la función es:

$$(f) = \{y \mid y \leq 0\} = (-\infty, 0] \quad (\text{B.5})$$

Es decir, el conjunto de todos los números reales no positivos.

B.3 Funciones de Costo y Producción

Ejercicio 5: Unicidad en Funciones de Costo

Ejercicio B.5. En la teoría de la empresa, los economistas consideran el costo total C como una función del nivel de producción Q : $C = f(Q)$.

- (a) ¿Se debe relacionar cada cifra de costo con un nivel de producción único?
- (b) ¿Cada nivel de producción debe determinar una cifra de costo única?

Solución:

(a) ¿Costo único para cada producción?

[colback=white,colframe=accentblue,title=Respuesta (a)] **No.** Una cifra de costo C no necesita estar relacionada con un nivel de producción Q único.

Justificación:

La definición de función $C = f(Q)$ estipula que:

- Para cada Q existe **solo un** C correspondiente
- Pero se permite que **más de un valor de** Q se asocie al **mismo valor de** C

Ejemplo:

Considere $C = (Q - 5)^2 + 100$:

- Cuando $Q = 3$: $C = (3 - 5)^2 + 100 = 4 + 100 = 104$
- Cuando $Q = 7$: $C = (7 - 5)^2 + 100 = 4 + 100 = 104$
- El mismo costo ($C = 104$) corresponde a dos niveles diferentes de producción

(b) ¿Producción única para cada costo?

[colback=white,colframe=accentblue,title=Respuesta (b)] **Sí.** Cada nivel de producción Q debe determinar una cifra de costo C única.

Justificación:

Esta es precisamente la definición de función. Si un valor de Q pudiera determinar múltiples cifras de costo, la relación dejaría de ser una función y sería simplemente una relación.

Observación: En términos económicos, esto significa que para cada nivel de producción, existe un costo determinado (aunque ese costo pueda ser alcanzado por otros niveles de producción también).

Ejercicio 6: Justificación de $C = f(Q)$

Ejercicio B.6. Si un nivel de producción Q_i se puede producir a un costo de C_i , también debe ser posible (por ser menos eficiente) producir Q_i a un costo mayor. ¿Cómo se justifica entonces el uso de la función $C = f(Q)$?

Solución:

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Justificación Económica] La función $C = f(Q)$ representa el **costo mínimo** o **costo óptimo** de producir el nivel Q , asumiendo comportamiento eficiente de la empresa.

Argumentos:

1. Optimización como Principio Económico:

- La economía se centra en la **optimización**
- Las empresas buscan **maximizar ganancias**: $\max \Pi = R - C$
- Implícitamente, esto requiere **minimizar costos** para cualquier nivel de producción

2. Unicidad del Óptimo:

- Para cada Q_i , existe un **único** costo mínimo C_i alcanzable mediante producción eficiente

- Los costos más altos ($C_i + \varepsilon$) son ineficientes y se descartan del análisis
- La función $f(Q)$ solo considera la trayectoria de comportamiento óptimo

3. Respeto a la Definición Matemática:

- Dado que $f(Q)$ representa el costo **mínimo** para cada Q
- Para cada nivel de producción Q , existe un **único** costo mínimo C
- Por tanto, se satisface la definición de función

Representación gráfica:

Imaginemos todos los puntos (Q, C) posibles:

- Los puntos *sobre* la frontera de eficiencia forman la función $C = f(Q)$
 - Los puntos *arriba* de la frontera representan ineficiencia (se descartan)
 - Los puntos *debajo* son tecnológicamente imposibles
-

B.4 Reglas de Exponentes

Ejercicio 7: Simplificación de Expresiones

Ejercicio B.7. Condense las siguientes expresiones:

(a) $x^4 \times x^{15}$

(b) $x^a \times x^b \times x^c$

(c) $x^3 \times y^3 \times z^3$

Solución:

(a) $x^4 \times x^{15}$

Aplicamos la Regla I: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Respuesta (a)]

$$x^4 \times x^{15} = x^{4+15} = x^{19} \quad (\text{B.6})$$

(b) $x^a \times x^b \times x^c$

Aplicamos la Regla I repetidamente:

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Respuesta (b)]

$$x^a \times x^b \times x^c = x^{a+b+c} \quad (\text{B.7})$$

(c) $x^3 \times y^3 \times z^3$

Las bases son diferentes pero el exponente es el mismo. Aplicamos la Regla VII:

$$(xy)^m = x^m y^m$$

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Respuesta (c)]

$$x^3 \times y^3 \times z^3 = (xyz)^3 \quad (\text{B.8})$$

Ejercicio 8: Evaluación de Expresiones

Ejercicio B.8. *Determine el valor de:*

$$(a) \frac{x^3}{x^{-3}}$$

$$(b) \frac{x^{1/2} \times x^{1/3}}{x^{2/3}}$$

Solución:

$$(a) \frac{x^3}{x^{-3}}$$

Aplicamos la Regla II: $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$$\frac{x^3}{x^{-3}} = x^{3-(-3)} \tag{B.9}$$

$$= x^{3+3} \tag{B.10}$$

$$= x^6 \tag{B.11}$$

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Respuesta (a)]

$$\frac{x^3}{x^{-3}} = x^6 \tag{B.12}$$

$$(b) \frac{x^{1/2} \times x^{1/3}}{x^{2/3}}$$

Paso 1: Simplificar el numerador usando Regla I:

$$x^{1/2} \times x^{1/3} = x^{1/2+1/3} = x^{3/6+2/6} = x^{5/6} \tag{B.13}$$

Paso 2: Aplicar Regla II para la división:

$$\frac{x^{5/6}}{x^{2/3}} = x^{5/6-2/3} = x^{5/6-4/6} = x^{1/6} \tag{B.14}$$

[colback=theoremblue,colframe=goettingenblue,title=Respuesta (b)]

$$\frac{x^{1/2} \times x^{1/3}}{x^{2/3}} = x^{1/6} \tag{B.15}$$

Bibliografía

- [1] Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2005). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. McGraw-Hill.
- [2] Simon, C. P., & Blume, L. (2013). *Mathematics for Economists*. W. W. Norton & Company.