Sistemas de Ecuaciones & Análisis de Equilibrio

DETERMINANTES, INVERSIÓN Y APLICACIONES ECONÓMICAS

CHIANG & WAINWRIGHT + LEONTIEF

I. Notación Matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$

LA REPRESENTACIÓN FUNDAMENTAL. Un sistema de m ecuaciones lineales en n variables se expresa de manera compacta como:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d} \tag{1}$$

Componentes del Sistema

Matriz de Coeficientes (A)

Arreglo rectangular $m \times n$ que contiene los coeficientes a_{ij}:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \tag{2}$$

Vector de Variables (x)

Vector columna $n \times 1$ de las incógnitas:

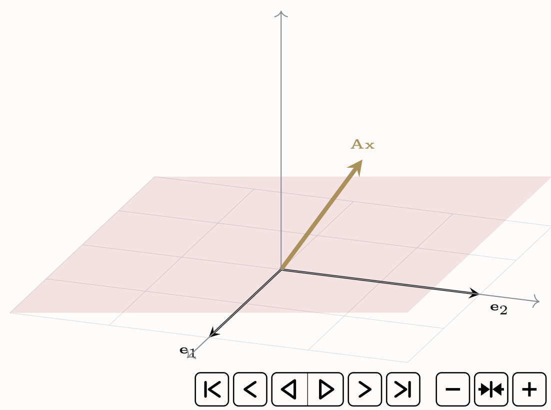
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \tag{3}$$

Vector de Constantes (d)

Vector columna $m \times 1$ de términos independientes:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \tag{4}$$

Visualización 3D Animada: Transformación Lineal



Interpretación Geométrica: La animación muestra cómo una transformación lineal $\mathbf{A}$ distorsiona el espacio vectorial, preservando el origen.

II. Determinantes y No Singularidad

EL ESCALAR CARACTERÍSTICO. El determinante $|\mathbf{A}|$ es un número que determina la invertibilidad de una matriz cuadrada.

Definición Formal

$\det(\mathbf{A}) = 0.7$

Determinante

Para una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \tag{5}$$

donde S_n son todas las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y $\operatorname{sgn}(\sigma)$ es el signo de la permutación.

Expansión de Laplace

MÉTODO PRÁCTICO. El determinante se calcula por cofactores:

Expansión por Cofactores

Por el i-ésimo renglón:

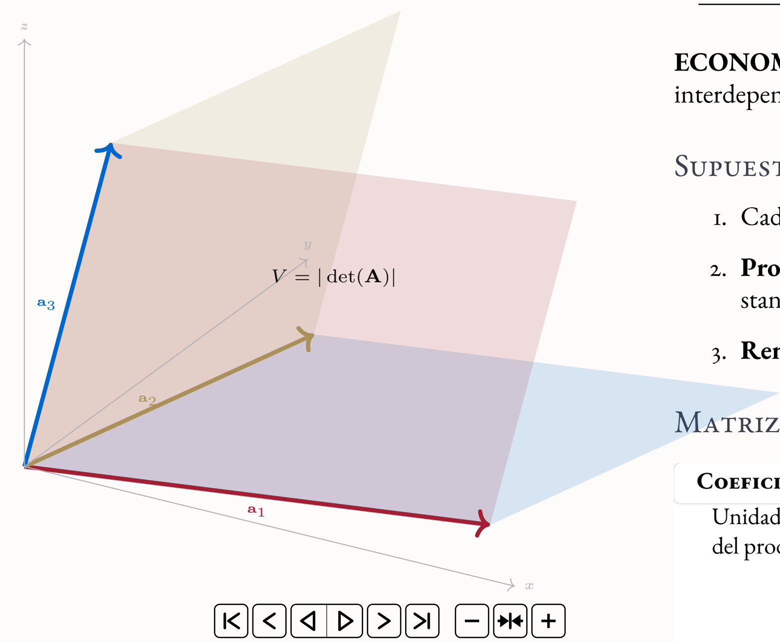
$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|C_{ij}| \tag{6}$$

Por la j-ésima columna:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}|C_{ij}| \tag{7}$$

donde $|C_{ij}| = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ es el cofactor.

Visualización Animada: Determinante como Volumen



Fórmula Explícita 2×2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{8}$$

Propiedades Críticas

Propiedades del Determinante

1. $|\mathbf{I}| = 1$ (matriz identidad)
2. $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$ (transpuesta)
3. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ (producto)
4. $|\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n|\mathbf{A}|$ (escalar, matriz $n \times n$)
5. $|\mathbf{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$ (inversa)
6. Si dos filas/columnas son iguales: $|\mathbf{A}| = 0$
7. Intercambiar filas/columnas: $|\mathbf{A}'| = -|\mathbf{A}|$

VI. Modelo Input-Output de Leontief

ECONOMÍA INTERRELACIONADA. Modelo que captura interdependencias productivas.

Supuestos Fundamentales

1. Cada industria produce un producto **homogéneo**
2. **Proporciones de insumo fijas** (coeficientes técnicos constantes)
3. **Rendimientos constantes a escala**

Matriz de Coeficientes Técnicos

Coeficiente a_{ij}

Unidades del producto i necesarias para producir una unidad del producto j:

$$a_{ij} = \frac{\text{Insumo de } i \text{ usado por } j}{\text{Producción total de } j} \tag{9}$$

Restricción: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ (viabilidad económica)

Ecuación de Balance

La producción total satisface:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{d} \tag{10}$$

donde:

- $\mathbf{x}$: vector de producción total
- $\mathbf{A}\mathbf{x}$: consumo intermedio (insumos)
- $\mathbf{d}$: demanda final (exógena)

Solución del Modelo

Fórmula de Leontief

Si $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es no singular:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d} \tag{11}$$

La matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ es la **matriz de Leontief** o **multiplicador**.

Interpretación de Multiplicadores

Multiplicador de Leontief

El elemento (i, j) de la matriz inversa representa:

$$[(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial d_j} \tag{12}$$

Indica cuánto debe aumentar la producción del sector i cuando la demanda final del sector j aumenta en una unidad.

Ejemplo: Economía 2 Sectores

Matriz tecnológica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Cálculo:

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$|(\mathbf{I} - \mathbf{A})| = 0.40 \tag{15}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.25 & 1.75 \end{bmatrix} \tag{16}$$

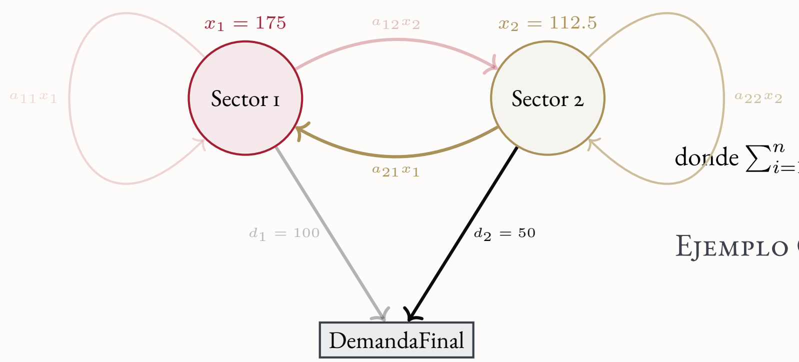
Producción necesaria:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.25 & 1.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175 \\ 112.5 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Interpretación:

- Si $d_1 \uparrow 1$: $x_1 \uparrow 1.5$, $x_2 \uparrow 0.25$
- Si $d_2 \uparrow 1$: $x_1 \uparrow 0.5$, $x_2 \uparrow 1.75$

Visualización Animada: Flujo Circular Económico



Condiciones de Hawkins-Simon

Viabilidad Económica

Para que el modelo sea productivo (solución $\mathbf{x} > 0$):
Condición suficiente: Todos los menores principales de $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ son positivos.
Para 2×2:

$$1 - a_{11} > 0 \tag{18}$$

$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0 \tag{19}$$

IV. Regla de Cramer

SOLUCIÓN ANALÍTICA. Método para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ cuando $\mathbf{A}$ es cuadrada y no singular.

Regla de Cramer

Para un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ con $|\mathbf{A}| \neq 0$, la solución es:

$$x_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|} \tag{20}$$

donde $|\mathbf{A}_j|$ es el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la columna j de $\mathbf{A}$ por el vector $\mathbf{d}$.

Derivación mediante Inversión

La solución $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$ se expande usando $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^{\#}$:

$$x_j = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{i=1}^{n} d_i|C_{ij}| = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|} \tag{21}$$

donde $\sum_{i=1}^{n} d_i|C_{ij}|$ es la expansión de Laplace de $|\mathbf{A}_j|$.

Ejemplo Completo: Sistema 2×2

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases} \tag{22}$$

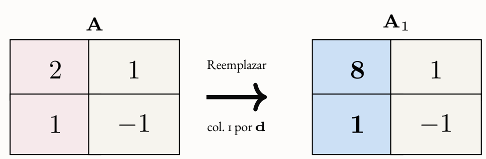
Solución:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \tag{23}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3 \tag{24}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2 \tag{25}$$

Visualización: Reemplazo de Columnas



V. Equilibrio de Mercado (2 Bienes)

MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL. Análisis de mercados interdependientes.

Condición de Equilibrio

Equilibrio de Mercado

El equilibrio se alcanza cuando:

$$q_{d_i} = q_{s_i} \quad \forall i \tag{26}$$

Para cada bien i, la cantidad demandada iguala la cantidad ofrecida.

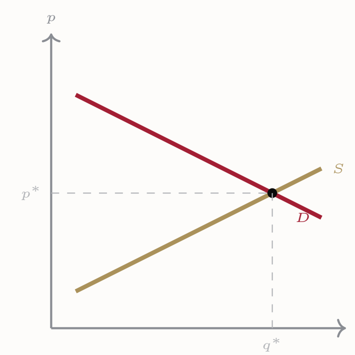
Clasificación de Bienes

Criterio de Efectos Cruzados

Sean dos bienes con funciones de demanda que incluyen precios cruzados:

- **Sustitutos:** Si $\frac{\partial q_{d_i}}{\partial p_j} > 0$
  ($\uparrow$ precio del bien $j \Rightarrow \uparrow$ demanda del bien i)
- **Complementos:** Si $\frac{\partial q_{d_i}}{\partial p_j} < 0$
  ($\uparrow$ precio del bien $j \Rightarrow \downarrow$ demanda del bien i)

Visualización Animada: Curvas de Oferta y Demanda



Equilibrio Dinámico

Ejemplo: Sistema 2×2

Funciones:

$$q_{d_1} = 53 - 2p_1 - 3p_2, \quad q_{s_1} = -4 + 3p_1 \tag{27}$$
$$q_{d_2} = 64 - 3p_1 - 4p_2, \quad q_{s_2} = -8 + 2p_2 \tag{28}$$

Sistema en equilibrio:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 72 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Solución:

$$|\mathbf{A}| = 21 \tag{30}$$
$$p_1^* = 6, \quad p_2^* = 9 \tag{31}$$
$$q_1^* = 14, \quad q_2^* = 10 \tag{32}$$

Relación: Bienes **complementos** ($\partial q_{d_1}/\partial p_2 = -3 < 0$)

VII. Modelo Simple de Renta Nacional

MODELO KEYNESIANO. Determinación del ingreso de equilibrio.

Variables y Ecuaciones

Estructura del Modelo

Variables Endógenas: Y (Renta Nacional), C (Consumo)
Variables Exógenas: I_0 (Inversión), G_0 (Gasto Público)
Ecuaciones:

$$Y = C + I_0 + G_0 \quad \text{(Identidad contable)} \tag{33}$$
$$C = \alpha + \beta Y \quad \text{(Función de consumo)} \tag{34}$$

Parámetros:

- $\alpha > 0$: Consumo autónomo
- $\beta \in (0, 1)$: Propensión marginal a consumir (PMC)
- $s = 1 - \beta$: Propensión marginal a ahorrar

Solución Matricial

Forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ \alpha \end{bmatrix} \tag{35}$$

Determinante:

$$|\mathbf{A}| = 1 - \beta = s > 0 \tag{36}$$

Forma Reducida

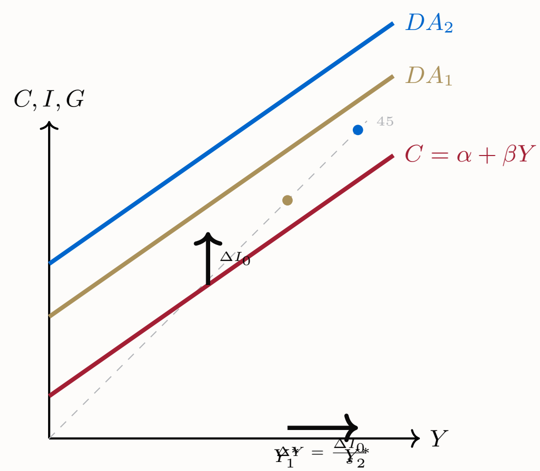
Equilibrio de Renta Nacional

$$Y^* = \frac{I_0 + G_0 + \alpha}{1 - \beta} = \frac{I_0 + G_0 + \alpha}{s} \tag{37}$$
$$C^* = \frac{\alpha + \beta(I_0 + G_0)}{1 - \beta} \tag{38}$$

Multiplicador keynesiano:

$$\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{s} \tag{39}$$

Visualización: Efecto Multiplicador



Interpretación: Un incremento en inversión ΔI_0 genera un aumento amplificado en la renta $\Delta Y = \frac{\Delta I_0}{s}$ debido al efecto multiplicador.

Referencia Rápida

Sistema: $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$
Solución: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$ (si $|\mathbf{A}| \neq 0$)
Inversa: $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^{\#}$
Cramer: $x_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|}$
Leontief: $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d}$
Det 2×2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
Equilibrio: $q_d = q_s$ para cada mercado
Multiplicador: $\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{1}{1-\beta}$

X. Casos Especiales y Aplicaciones

Modelo	Característica	Condición Clave
Equilibrio Parcial	Un mercado aislado	$q_d = q_s$
Equilibrio General	n mercados interdep.	Sistema $n \times n$
Leontief Abierto	Sector externo	$(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ no singular
Leontief Cerrado	Sin sector externo	Infinitas soluciones
Renta Nacional	Modelo keynesiano	$|\mathbf{A}| = 1 - \beta = s$
Bienes Sustitutos	$\partial q_i/\partial p_j > 0$	Efecto cruzado +
Bienes Complementos	$\partial q_i/\partial p_j < 0$	Efecto cruzado −

Agradecimientos

Este material educativo está dedicado a estudiantes y profesionales de economía matemática que buscan dominar el álgebra matricial aplicada.

Agradecemos especialmente a:

- Los profesores del Departamento de Matemáticas de la **Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC)** por su invaluable guía académica en el desarrollo de este compendio
- La comunidad open-source de LaTeX, TikZ y PGFPlots por proporcionar herramientas excepcionales para la divulgación científica
- Los autores Chiang, Wainwright y Leontief, cuyos trabajos fundamentales inspiraron esta síntesis

«El álgebra es generosa: a menudo da más de lo que se le pide.»
«In mathematics you don't understand things. You just get used to them.»

— Jean le Rond d'Alembert & John von Neumann

Información del Autor

Email: emanuel.quintana@uptc.edu.co

GitHub: @emanuelquintana-glitch

ORCID: 0009-0006-8419-2805

Repositorio: Apuntes_Economia_Matematica

Institución: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC)

Programa: Economía Matemática

Este documento fue compilado con LaTeX, TikZ, PGFPlots y la librería animate para visualizaciones dinámicas. El código fuente está disponible en el repositorio de GitHub bajo licencia Creative Commons.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.