Modelos Lineales & Álgebra de Matrices

Fundamentos de Economía Matemática

CHIANG & WAINWRIGHT

1I. Introducción al Álgebra Matricial

EL DESAFÍO DIMENSIONAL. En economía matemática, el análisis de modelos con múltiples variables requiere metodologías que vayan más allá de las técnicas escalares tradicionales. El **álgebra de matrices** emerge como la herramienta fundamental para abordar el análisis estático o de equilibrio cuando el número de variables es grande.

Necesidad del Álgebra Matricial Cuando un modelo de mercado aumenta de uno a dos o más artículos, las fórmulas de eliminación de variables se vuelven rápidamente inmanejables. El álgebra de matrices proporciona una solución sistemática y elegante a este problema de complejidad.

1Ventajas Cruciales

El álgebra de matrices ofrece tres ventajas fundamentales para el análisis económico:

1. **Compacidad Notacional**: Proporciona una forma compacta de escribir sistemas de ecuaciones, incluso muy grandes.
2. **Teoría de Existencia**: Permite probar la existencia de soluciones mediante la evaluación de determinantes.
3. **Método Sistemático**: Suministra un procedimiento algorítmico para encontrar soluciones cuando existen.

1Linealidad y Transformaciones

Restricción de Linealidad El álgebra de matrices se aplica específicamente a **sistemas de ecuaciones lineales**. Sin embargo, esta restricción no es limitante: modelos no lineales pueden transformarse mediante cambios de variables (logaritmos, etc.) en relaciones lineales equivalentes.

Ejemplo de Transformación:

$$y = ax^b \quad \xrightarrow{\log} \quad \log y = \log a + b \log x \tag{1}$$

1II. Matrices como Arreglos Rectangulares

LA ESTRUCTURA FUNDAMENTAL. Una matriz es un **arreglo rectangular de números, parámetros o variables**, organizados en filas (renglones) y columnas. Los elementos individuales se identifican mediante subíndices dobles.

1Definición Formal

Matriz

Una matriz $\mathbf{A}$ de dimensión $m \times n$ es un arreglo rectangular de m filas y n columnas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Donde a_{ij} denota el elemento en la fila i y columna j.

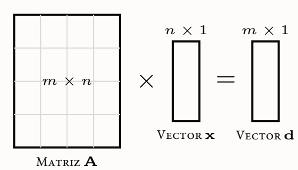
1Representación de Sistemas Lineales

Para un sistema de m ecuaciones lineales en n variables, utilizamos tres configuraciones rectangulares:

- $\mathbf{A}$: Matriz de coeficientes $(m \times n)$
- $\mathbf{x}$: Vector de variables $(n \times 1)$
- $\mathbf{d}$: Vector de términos constantes $(m \times 1)$

El sistema completo se representa como: $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$

1Visualización Matricial



1III. Vectores como Matrices Especiales

LA DUALIDAD VECTORIAL. Un vector es una matriz que posee una única columna o un único renglón, representando casos especiales de dimensiones matriciales.

1Tipos de Vectores

Clasificación Vectorial **1. Vector Columna** $(m \times 1)$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

2. Vector Renglón $(1 \times n)$:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

1Notación y Convenciones

- El apóstrofo $(')$ o superíndice T denota la **transpuesta**
- $\mathbf{x}'$ representa un vector renglón
- $\mathbf{x}$ sin notación adicional típicamente denota vector columna

1Interpretación Geométrica

Espacio Vectorial Todo vector con n componentes puede interpretarse como una n-**tupla ordenada**, equivalente a un punto en un espacio de dimensión n: $\mathbb{R}^n$.

1IV. Operaciones Fundamentales

LA ARITMÉTICA MATRICIAL. Las operaciones con matrices siguen reglas algebraicas específicas que difieren del álgebra escalar tradicional.

11. Igualdad de Matrices

Igualdad Matricial Dos matrices $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ son iguales si y solo si:

1. Poseen la misma dimensión: $m \times n$
2. Todos los elementos correspondientes son idénticos: $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j

12. Suma y Resta de Matrices

Condición de Conformabilidad: Las matrices deben tener la **misma dimensión**.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \implies c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{5}$$

Ejemplo Numérico:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \tag{6}$$

13. Multiplicación Escalar

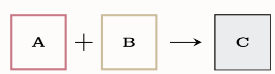
Escalamiento Matricial Multiplicar una matriz por un escalar α implica multiplicar cada elemento:

$$\alpha\mathbf{A} = [\alpha a_{ij}] \tag{7}$$

Ejemplo:

$$7\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -7 \\ 0 & 35 \end{bmatrix} \tag{8}$$

1Visualización de Operaciones



Element-wise Addition

1V. Multiplicación de Matrices

LA OPERACIÓN FUNDAMENTAL. La multiplicación de matrices es la operación más importante y compleja del álgebra matricial, fundamental para representar sistemas de ecuaciones lineales.

1Condición de Conformabilidad

Regla Dimensional El producto $\mathbf{AB}$ está definido si y solo si:

$$\mathbf{A}_{m\times n} \times \mathbf{B}_{n\times q} = \mathbf{C}_{m\times q} \tag{9}$$

El número de **columnas** de $\mathbf{A}$ debe igual al número de **filas** de $\mathbf{B}$.

1Definición del Producto

Cada elemento c_{ij} de la matriz producto se define como el **producto interior** de la fila i de $\mathbf{A}$ con la columna j de $\mathbf{B}$:

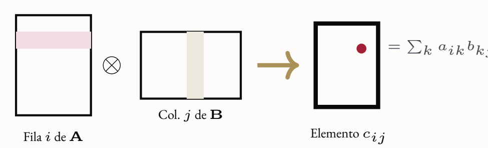
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{10}$$

1Ejemplo Detallado

Sistema de Ecuaciones Lineales:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

1Visualización del Proceso



1Propiedades Críticas

No Conmutatividad En general: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
El orden de los factores **sí altera** el producto. Esta es la diferencia más importante respecto al álgebra escalar.

Propiedad Asociativa

La multiplicación de matrices es asociativa:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC} \tag{12}$$

(sujeto a conformabilidad dimensional)

15. La División: Una Operación Indefinida

Imposibilidad de la División No es posible dividir una matriz entre otra. La expresión $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ carece de significado.
En su lugar, cuando existe la matriz inversa $\mathbf{B}^{-1}$, debemos especificar:

- $\mathbf{AB}^{-1}$ (posmultiplicación por la inversa)
- $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ (premultiplicación por la inversa)

1VI. Notación de Sumatoria ($\sum$)

LA ABREVIATURA COMPACTA. La notación sigma es indispensable para expresar sumas largas de manera concisa.

1Estructura y Significado

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{13}$$

Componentes:

- j: Índice de sumatoria (toma valores enteros)
- 1: Límite inferior
- n: Límite superior
- x_j: Sumando (función del índice)

1Aplicaciones en Álgebra Matricial

1. Funciones Polinomiales:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{14}$$

2. Multiplicación de Matrices:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{15}$$

El índice k es un **índice simulado**: solo indica qué par de elementos se multiplica en cada término de la suma.

1Propiedades de la Sumatoria

Leyes Distributivas

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{17}$$

1VII. Multiplicación de Vectores

CASOS ESPECIALES DEL PRODUCTO MATRICIAL. La multiplicación de vectores produce resultados cualitativamente diferentes según el orden y la forma de los vectores.

11. Vector Columna × Vector Renglón

Producto Exterior ($\mathbf{uv}'$): Genera una **matriz**

$$\mathbf{u}_{m\times 1} \times \mathbf{v}'_{1\times n} = \mathbf{M}_{m\times n} \tag{18}$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \tag{19}$$

12. Vector Renglón × Vector Columna

Producto Interior ($\mathbf{u}'\mathbf{v}$): Genera un **escalar**

$$\mathbf{u}'_{1\times n} \times \mathbf{v}_{n\times 1} = s_{1\times 1} \tag{20}$$

Producto Escalar

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \tag{21}$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} = 3(9) + 4(7) = 55 \tag{22}$$

1Aplicación Económica

Costo Total de Compra Si $\mathbf{Q}'$ es un vector renglón de cantidades y $\mathbf{P}$ un vector columna de precios:

$$\text{Costo Total} = \mathbf{Q}' \cdot \mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} Q_i P_i \tag{23}$$

1Caso Especial: Suma de Cuadrados

$$\mathbf{u}'\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \tag{24}$$

1Distinción Crucial

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{uv}' & & \mathbf{u}'\mathbf{v} \\ \downarrow & vs & \downarrow \\ \text{Matriz} & & \text{Escalar} \end{array}$$

1VIII. Matrices Cuadradas

DEFINICIÓN. Una matriz es cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas ($m = n$).

1Propiedades Especiales

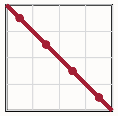
- Solo las matrices cuadradas pueden tener inversa
- El determinante solo está definido para matrices cuadradas
- Las potencias de matrices ($\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \ldots$) solo están definidas para matrices cuadradas

1Diagonal Principal

Diagonal Principal Los elementos a_{ii} donde $i = j$ forman la diagonal principal:

$$\text{diag}(\mathbf{A}) = \{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\} \tag{25}$$

Visualización:



Diagonal Principal

1IX. Matrices Diagonal y Escalar

MATRIZ DIAGONAL. Una matriz cuadrada donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \tag{26}$$

MATRIZ ESCALAR. Un caso especial de matriz diagonal donde todos los elementos diagonales son iguales:

$$k\mathbf{I} = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix} \tag{27}$$

1Propiedades de Matrices Diagonales

Facilidad Computacional

1. La suma y producto de matrices diagonales es diagonal
2. La inversa de una matriz diagonal (si existe) es diagonal
3. $(\mathbf{D}^k)_{ii} = d_i^k$ para potencias enteras

Inversa de Matriz Diagonal:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix} \quad \text{si } d_i \neq 0 \tag{28}$$

1X. Matriz Triangular

DEFINICIÓN. Una matriz triangular superior tiene ceros debajo de la diagonal principal:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Matriz Triangular Inferior tiene ceros arriba de la diagonal principal:

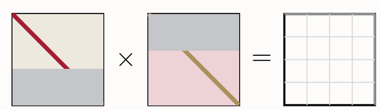
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{nn} \end{bmatrix} \tag{30}$$

1Aplicación: Factorización LU

Descomposición Triangular Cualquier matriz no singular puede factorizarse como producto de una matriz triangular inferior y una superior:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \tag{31}$$

Visualización de la Estructura:



Triangular Superior Triangular Inferior Matriz Original

1XI. Matrices Simétricas y Antisimétricas

MATRIZ SIMÉTRICA. Una matriz cuadrada es simétrica si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j \tag{32}$$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA. Una matriz cuadrada es antisimétrica si $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \text{y} \quad a_{ii} = 0 \tag{33}$$

1Descomposición Única

Teorema de Descomposición Toda matriz cuadrada puede expresarse como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \tag{34}$$

1XII. Ejemplos y Aplicaciones

EJEMPLO DE MATRIZ DIAGONAL:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Potencias:

$$\mathbf{D}^3 = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{bmatrix} \tag{36}$$

EJEMPLO DE MATRIZ SIMÉTRICA:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Note que $s_{12} = s_{21} = 4, s_{13} = s_{31} = 1, s_{23} = s_{32} = -2$.

EJEMPLO DE MATRIZ ANTISIMÉTRICA:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Note que $t_{12} = -t_{21} = 3$, y todos los elementos diagonales son cero.

1Aplicación Económica: Matriz de Varianza-Covarianza

Portafolios de Inversión En finanzas, la matriz de varianza-covarianza $\mathbf{\Sigma}$ de un conjunto de activos es simétrica. El elemento σ_{ij} representa la covarianza entre los activos i y j, con $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.
La varianza del portafolio con pesos $\mathbf{w}$ es:

$$\text{Var}(\text{Portafolio}) = \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} \tag{39}$$

EJEMPLO NUMÉRICO:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.015 & 0.01 \\ 0.015 & 0.09 & 0.02 \\ 0.01 & 0.02 & 0.16 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Propiedades:

- Simétrica: $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0.015$
- Diagonal: varianzas individuales $(0.04, 0.09, 0.16)$
- Fuera de diagonal: covarianzas entre activos

1XIII. Representación Matricial de Sistemas

FORMA GENERAL. Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= d_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= d_m \end{aligned} \tag{41}$$

Forma Matricial Compacta:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{42}$$

donde:

- $\mathbf{A}_{m\times n}$: matriz de coeficientes
- $\mathbf{x}_{n\times 1}$: vector de incógnitas
- $\mathbf{d}_{m\times 1}$: vector de términos constantes

1Interpretación Geométrica

Interpretación en $\mathbb{R}^n$ Cada ecuación representa un hiperplano en $\mathbb{R}^n$. La solución del sistema corresponde a la intersección de todos estos hiperplanos.

CASOS EN $\mathbb{R}^2$:

- **Solución única:** Dos rectas que se intersecan en un punto
- **Infinitas soluciones:** Dos rectas coincidentes
- **Sin solución:** Dos rectas paralelas

1XIV. Tipos de Sistemas

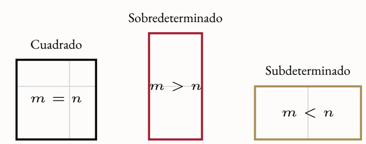
CLASIFICACIÓN POR NÚMERO DE ECUACIONES:

Sistemas Cuadrados Cuando $m = n$ (mismo número de ecuaciones que de incógnitas). Este es el caso más común en modelos económicos de equilibrio.

Sistemas Sobredeterminados Cuando $m > n$ (más ecuaciones que incógnitas). Puede no tener solución o tener solución exacta si hay dependencias lineales.

Sistemas Subdeterminados Cuando $m < n$ (menos ecuaciones que incógnitas). Generalmente tiene infinitas soluciones.

1Visualización de Casos



1XV. Métodos de Solución

1. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

El método tradicional para sistemas pequeños. Se despeja una variable y se sustituye en las demás ecuaciones.

EJEMPLO: Sistema 2×2

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ x - y &= 1 \end{aligned} \tag{43}$$

Solución: De la segunda: $x = y + 1$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} 2(y+1) + y &= 8 \\ 2y + 2 + y &= 8 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2, \quad x = 3 \end{aligned}$$

2. MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Transformación del sistema a forma escalonada mediante operaciones elementales de fila.

Operaciones Elementales

1. Intercambiar dos ecuaciones (filas)
2. Multiplicar una ecuación por escalar no nulo
3. Sumar un múltiplo de una ecuación a otra

EJEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{44}$$

3. MÉTODO DE LA INVERSA (para sistemas cuadrados)

Si $\mathbf{A}$ es no singular ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$):

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} \tag{45}$$

ıXVI. Sistemas Homogéneos

DEFINICIÓN. Un sistema es homogéneo si $\mathbf{d} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{46}$$

PROPIEDADES:

Teorema Fundamental

1. Todo sistema homogéneo tiene al menos la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. Si $\mathbf{A}$ es no singular, solo tiene la solución trivial
3. Si $\mathbf{A}$ es singular, tiene infinitas soluciones no triviales

EJEMPLO: Sistema Homogéneo 2×2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

La segunda ecuación es múltiplo de la primera: $4x + 2y = 2(2x + y)$. El sistema es singular y tiene infinitas soluciones: $y = -2x$.

ıXVII. Aplicaciones Económicas

1. MODELO DE MERCADO DE n BIENES

Para n bienes interdependientes:

$$\begin{aligned} Q_{d1} &= a_1 + b_{11}P_1 + b_{12}P_2 + \cdots + b_{1n}P_n \\ Q_{d2} &= a_2 + b_{21}P_1 + b_{22}P_2 + \cdots + b_{2n}P_n \\ &\vdots \\ Q_{dn} &= a_n + b_{n1}P_1 + b_{n2}P_2 + \cdots + b_{nn}P_n \end{aligned} \tag{48}$$

$$Q_{si} = c_i + d_{i1}P_1 + d_{i2}P_2 + \cdots + d_{in}P_n \quad (i = 1, \dots, n) \tag{49}$$

Condición de equilibrio: $Q_{di} = Q_{si}$ para todo i.

$$\mathbf{Q}_d = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{P}, \quad \mathbf{Q}_s = \mathbf{c} + \mathbf{D}\mathbf{P} \tag{50}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{c} + \mathbf{D}\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{B} - \mathbf{D})\mathbf{P} = \mathbf{c} - \mathbf{a} \tag{51}$$

2. MODELO DE INSUMO-PRODUCTO (Leontief)

Para una economía con n sectores:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{d} \tag{52}$$

donde:

- $\mathbf{x}$: vector de producción total
- $\mathbf{A}$: matriz de coeficientes técnicos
- $\mathbf{d}$: vector de demanda final

Solución:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d} \tag{53}$$

ıCondición de Existencia

Teorema de Hawkins-Simon Para que exista solución no negativa en el modelo de Leontief, es necesario y suficiente que:

1. $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) > 0$
2. Todos los menores principales de $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ sean positivos

EJEMPLO: Economía de 2 Sectores

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} \tag{54}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{55}$$

ıXVIII. Definición y Propiedades

DEFINICIÓN. El determinante es una función escalar que asigna a cada matriz cuadrada $\mathbf{A}$ un número real, denotado $|\mathbf{A}|$ o $\det(\mathbf{A})$.

ıDeterminante 2×2

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{56}$$

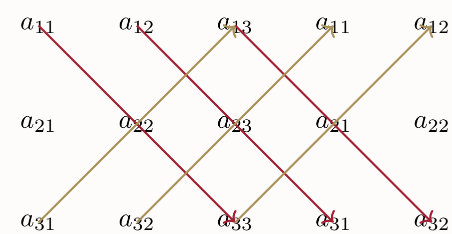
EJEMPLO:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10 \tag{57}$$

ıDeterminante 3×3 (Regla de Sarrus)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned} \tag{58}$$

Visualización Gráfica:



Positivas (MITCrimson) / Negativas (GoldLeaf)

ıPropiedades Fundamentales

Propiedades del Determinante

1. $|\mathbf{I}| = 1$
2. $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$
3. Si dos filas (o columnas) son iguales, $|\mathbf{A}| = 0$
4. Si una fila es múltiplo de otra, $|\mathbf{A}| = 0$
5. $|\mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$
6. $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$ si $\mathbf{A}$ es no singular

1XIX. Expansión por Cofactores

DEFINICIÓN. Para una matriz $n \times n$:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \quad \text{(expansión por la fila } i\text{)} \tag{59}$$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \quad \text{(expansión por la columna } j\text{)} \tag{60}$$

donde $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ es el cofactor.

1Menor y Cofactor

Menor M_{ij} El menor M_{ij} es el determinante de la submatriz obtenida al eliminar la fila i y columna j de $\mathbf{A}$.

Cofactor C_{ij} El cofactor es el menor con signo: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

EJEMPLO: Matriz 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \tag{61}$$

Cálculo de C_{11}:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = 45 - 48 = -3$$
$$C_{11} = (-1)^{1+1}(-3) = -3$$

Cálculo de C_{23}:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 7 = 8 - 14 = -6$$
$$C_{23} = (-1)^{2+3}(-6) = (-1)^5(-6) = 6$$

1XX. Matriz Adjunta y Regla de Cramer

MATRIZ ADJUNTA. La matriz adjunta de $\mathbf{A}$ es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = [C_{ji}] \quad \text{(¡cuidado con los índices!)} \tag{62}$$

FÓRMULA DE LA INVERSA:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\text{adj}(\mathbf{A}) \quad \text{si } |\mathbf{A}| \neq 0 \tag{63}$$

REGLA DE CRAMER. Para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$:

$$x_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{64}$$

donde $\mathbf{A}_j$ es la matriz obtenida al reemplazar la columna j de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{d}$.

EJEMPLO DE REGLA DE CRAMER:

Sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{65}$$

Cálculos:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 1(1) = -2 - 1 = -3$$
$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4(-1) - 1(1) = -4 - 1 = -5$$
$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - 4(1) = 2 - 4 = -2$$

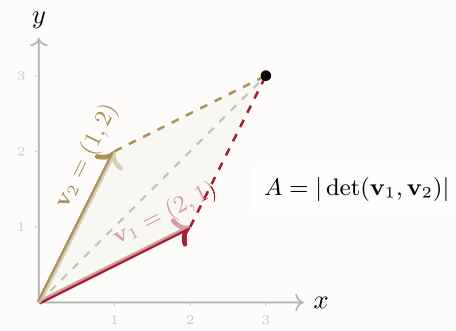
Solución:

$$x = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$
$$y = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

1XXI. Interpretación Geométrica

EN $\mathbb{R}^2$: El valor absoluto del determinante 2×2 representa el área del paralelogramo formado por los vectores columna.

Visualización:



$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 1$$
$$= 4 - 1 = 3$$
$$A = |3| = 3$$

EN $\mathbb{R}^3$: El valor absoluto del determinante 3×3 representa el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores columna.

1Interpretación en Transformaciones Lineales

Factor de Expansión/Contracción Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal con matriz $\mathbf{A}$, entonces $|\det(\mathbf{A})|$ representa el factor por el cual se escala el volumen (área en $\mathbb{R}^2$) bajo T.

1XXII. Definición Fundamental

PROBLEMA DE VALOR PROPIO. Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}_{n \times n}$, encontrar escalares λ (valores propios) y vectores no nulos $\mathbf{v}$ (vectores propios) tales que:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{66}$$

Interpretación: $\mathbf{v}$ es un vector que bajo la transformación $\mathbf{A}$ solo se escala (no cambia dirección).

ıFormulación Alternativa

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{67}$$

Esta es un sistema homogéneo. Para tener soluciones no triviales ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$):

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \tag{68}$$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA:

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{69}$$

ıXXIII. Cálculo de Valores Propios

PASO 1: Formar $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$
PASO 2: Calcular el determinante
PASO 3: Resolver la ecuación polinomial $P(\lambda) = 0$
EJEMPLO: Matriz 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{70}$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2\cdot 1 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \\ &= (\lambda-2)(\lambda-5) = 0 \end{aligned}$$

Valores propios: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$

ıEjemplo 3×3

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(3-\lambda)(9-\lambda) - 16] \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 11) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-11) = 0 \end{aligned}$$

Valores propios: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 11$

ıXXIV. Cálculo de Vectores Propios

PARA CADA VALOR PROPIO λ_i:
Resolver el sistema homogéneo $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$
EJEMPLO (continuación): Para $\lambda_1 = 2$ en el ejemplo anterior:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{72}$$

Esto da: $2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$
Elegimos $v_1 = 1$, entonces $v_2 = -2$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{73}$$

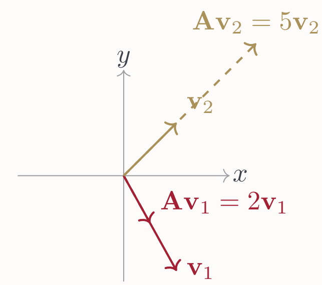
Para $\lambda_2 = 5$:

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{74}$$

Esto da: $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$
Elegimos $v_1 = 1$, entonces $v_2 = 1$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{75}$$

ıVisualización Geométrica



Direcciones invariantes bajo $\mathbf{A}$

ıXXV. Propiedades Importantes

1. TRAZA Y DETERMINANTE:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i, \quad \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{76}$$

2. MATRICES SIMÉTRICAS: Los valores propios son reales y los vectores propios son ortogonales.
3. MATRICES DIAGONALES: Los valores propios son los elementos diagonales.
4. POTENCIAS DE MATRICES: Si $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{A}^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$.
5. INVERSA: Si $\mathbf{A}$ es no singular y $\lambda \neq 0$ es valor propio de $\mathbf{A}$, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de $\mathbf{A}^{-1}$ con el mismo vector propio.

ıXXVI. Diagonalización

TEOREMA DE DIAGONALIZACIÓN. Si $\mathbf{A}_{n\times n}$ tiene n vectores propios linealmente independientes, entonces:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \tag{77}$$

donde:

- $\mathbf{D}$: matriz diagonal con los valores propios
- $\mathbf{P}$: matriz cuyas columnas son los vectores propios

EJEMPLO:
Del ejemplo anterior:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$\mathbf{PDP}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \tag{78}$$

ıAplicación: Cálculo de Potencias

Potencia de Matriz Diagonalizable

Si $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, entonces:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1} \tag{79}$$

Y como $\mathbf{D}^k$ es fácil de calcular, esta fórmula simplifica enormemente el cálculo de $\mathbf{A}^k$.

EJEMPLO:

$$\mathbf{A}^{10} = \mathbf{PD}^{10}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{80}$$

ıXXVII. Aplicaciones Económicas

1. MODELOS DE CRECIMIENTO
En modelos dinámicos lineales $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t$, el crecimiento a largo plazo está determinado por el valor propio dominante (el de mayor módulo).
2. ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES
En estadística multivariada, los valores y vectores propios de la matriz de covarianza permiten reducir la dimensionalidad de los datos.
3. MODELOS INPUT-OUTPUT
Los valores propios de la matriz de Leontief $\mathbf{A}$ determinan la estabilidad del sistema productivo.

ıEjemplo: Modelo de Crecimiento de Población

$$\begin{bmatrix} P_{t+1} \\ Q_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_t \\ Q_t \end{bmatrix} \tag{81}$$

Valores propios: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.7$
Interpretación: $\lambda_1 = 1$ indica un estado estacionario, $\lambda_2 = 0.7$ indica convergencia.

ıXXVIII. Definición y Representación

DEFINICIÓN. Una forma cuadrática en n variables es una función homogénea de grado 2:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{82}$$

FORMA MATRICIAL:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{83}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica (puede siempre simetrizarse sin cambiar Q).

ıEjemplo en 2 Variables

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{84}$$

EJEMPLO NUMÉRICO:

$$Q(x, y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{85}$$

ıXXIX. Clasificación de Formas Cuadráticas

DEFINICIÓN (Signo): Para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$:

- **Definida Positiva:** $Q(\mathbf{x}) > 0$
- **Semidefinida Positiva:** $Q(\mathbf{x}) \geq 0$
- **Definida Negativa:** $Q(\mathbf{x}) < 0$
- **Semidefinida Negativa:** $Q(\mathbf{x}) \leq 0$
- **Indefinida:** $Q(\mathbf{x})$ toma valores positivos y negativos

ıCriterio de los Valores Propios

Caracterización por Valores Propios

Sea $\mathbf{A}$ simétrica con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

- Def. positiva $\Leftrightarrow \lambda_i > 0\,\forall i$
- Semidef. positiva $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0\,\forall i$
- Def. negativa $\Leftrightarrow \lambda_i < 0\,\forall i$
- Semidef. negativa $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0\,\forall i$
- Indefinida $\Leftrightarrow \lambda_i$ de signos mezclados

EJEMPLO: Para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$:
Valores propios: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ (ambos positivos) $\Rightarrow$ definida positiva.

ıXXX. Criterio de los Menores Principales

DEFINICIÓN. Los menores principales de $\mathbf{A}$ son los determinantes de las submatrices obtenidas tomando las primeras k filas y columnas.
TEOREMA (Sylvester): Para $\mathbf{A}$ simétrica:

- **Definida positiva** $\Leftrightarrow$ Todos los menores principales son > 0
- **Definida negativa** $\Leftrightarrow$ Los menores principales alternan signo: $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$, etc.

EJEMPLO: Para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$:

$$D_1 = |3| = 3 > 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 > 0$$

$\Rightarrow$ definida positiva.

1Ejemplo 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{86}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= |2| = 2 > 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ definida positiva.

1XXXI. Diagonalización de Formas Cuadráticas

MÉTODO. Dada $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ con $\mathbf{A}$ simétrica, existe una transformación ortogonal $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ tal que:

$$Q(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{87}$$

donde λ_i son los valores propios y $\mathbf{P}$ tiene los vectores propios ortonormales como columnas.

EJEMPLO: $Q(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4 \tag{88}$$

Vectores propios ortonormales: $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Transformación: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

Entonces:

$$Q(u, v) = 2u^2 + 4v^2 \tag{89}$$

1XXXII. Aplicaciones en Economía

1. OPTIMIZACIÓN: Condiciones de Segundo Orden

Para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ es la matriz de segundas derivadas. En un punto crítico $\mathbf{x}^*$:

- Mínimo local $\Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ definida positiva
- Máximo local $\Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ definida negativa

EJEMPLO: Función de utilidad $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta & \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2} \end{bmatrix} \tag{90}$$

2. ANÁLISIS DE RIESGO EN PORTAFOLIOS

La varianza de un portafolio con pesos $\mathbf{w}$ y matriz de covarianza $\mathbf{\Sigma}$:

$$\text{Var(Portafolio)} = \mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} \tag{91}$$

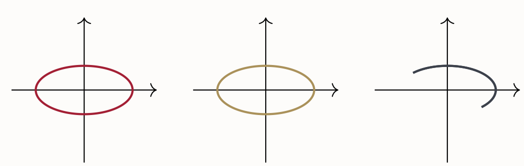
Esta es una forma cuadrática. La condición de que $\mathbf{\Sigma}$ sea semidefinida positiva garantiza varianzas no negativas.

3. FUNCIONES DE PRODUCCIÓN CUADRÁTICAS

$$Q(K, L) = aK^2 + 2bKL + cL^2 \tag{92}$$

La concavidad/convexidad depende de la definición de la forma cuadrática asociada.

1Visualización en $\mathbb{R}^2$



Def. Positiva (elipse) — Def. Negativa (elipse) — Indefinida (hipérbola)

1XXXIII. Formulación General

PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL (PL). Encontrar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{93}$$

Componentes:

- $\mathbf{x}$: vector de variables de decisión
- $\mathbf{c}$: vector de coeficientes de la función objetivo
- $\mathbf{A}$: matriz de coeficientes tecnológicos
- $\mathbf{b}$: vector de recursos disponibles

1Formas Equivalentes

Transformaciones Estándar

1. **Minimización a maximización:** $\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} = -\max(-\mathbf{c}^T\mathbf{x})$
2. **Restricciones $\geq$ a $\leq$:** $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \Leftrightarrow -\mathbf{A}\mathbf{x} \leq -\mathbf{b}$
3. **Restricciones de igualdad:** $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ y $-\mathbf{A}\mathbf{x} \leq -\mathbf{b}$

1XXXIV. Formulación Matricial

EJEMPLO: Problema de Producción

Una fábrica produce 2 productos usando 3 recursos:

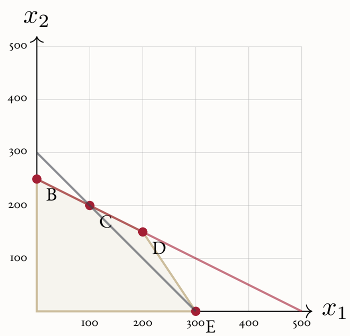
$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 40x_1 + 60x_2 \\ \text{s.a. } 2x_1 + 4x_2 &\leq 1000 \quad \text{(horas mano de obra)} \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 900 \quad \text{(horas máquina)} \\ x_1 + x_2 &\leq 300 \quad \text{(materia prima)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma Matricial:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 900 \\ 300 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{94}$$

1Representación Gráfica (para 2 variables)

Región Factible de Programación Lineal



Nota: Las escalas representan cientos de unidades.

1XXXV. Conceptos Fundamentales

DEFINICIONES:

Solución Factible
Un vector $\mathbf{x}$ que satisface todas las restricciones: $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Región Factible
El conjunto de todas las soluciones factibles. En PL es un **poliedro convexo**.

Solución Óptima
Una solución factible que maximiza (o minimiza) la función objetivo.

Punto Extremo (Vértice)
Un punto de la región factible que no puede expresarse como combinación convexa de otros dos puntos distintos del conjunto.

1Teorema Fundamental de PL

Existencia de Solución Óptima
Si un problema de PL tiene solución óptima, entonces al menos un punto extremo de la región factible es solución óptima.

COROLARIO: Para encontrar el óptimo, basta examinar los puntos extremos.

1XXXVI. Método Simplex (Conceptual)

IDEA FUNDAMENTAL: Moverse de un punto extremo a otro adyacente mejorando la función objetivo, hasta alcanzar el óptimo.

1Forma Estándar

Agregando variables de holgura $s_i \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 40x_1 + 60x_2 \\ \text{s.a. } 2x_1 + 4x_2 + s_1 &= 1000 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_2 &= 900 \\ x_1 + x_2 + s_3 &= 300 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{95}$$

Forma Matricial Ampliada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 900 \\ 300 \end{bmatrix} \tag{96}$$

1Tabla Simplex Inicial

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
s_1	2	4	1	0	0	1000
s_2	3	2	0	1	0	900
s_3	1	1	0	0	1	300
z	-40	-60	0	0	0	0

1XXXVII. Análisis de Sensibilidad

PREGUNTAS CLAVE:

1. ¿Cómo cambia la solución si cambian los coeficientes $\mathbf{c}$?
2. ¿Cómo cambia la solución si cambian los recursos $\mathbf{b}$?
3. ¿Qué pasa si se agrega una nueva actividad (variable)?

11. Cambios en c (Coeficientes de la FO)

Rango de Optimalidad
Para cada variable no básica x_j, existe un intervalo $[c_j^-, c_j^+]$ tal que si c_j permanece en ese intervalo, la base óptima no cambia.

EJEMPLO: Para x_2 con $c_2 = 60$ en el problema anterior, podría encontrarse que el rango de optimalidad es $[40, 80]$.

12. Cambios en b (Recursos)

Rango de Factibilidad
Para cada recurso b_i, existe un intervalo $[b_i^-, b_i^+]$ tal que si b_i permanece en ese intervalo, las variables básicas óptimas no cambian (aunque sus valores sí).

EJEMPLO: Para el primer recurso (1000 horas), podría encontrarse que el rango es $[800, 1200]$.

13. Precios Sombra

Precio Sombra (Dual)
El precio sombra y_i del recurso i es la tasa de cambio del valor óptimo z^* con respecto a b_i:

$$y_i = \frac{\partial z^*}{\partial b_i} \tag{97}$$

Interpretación económica: Valor marginal del recurso i.
EJEMPLO: Si $y_1 = 15$, significa que por cada hora adicional de mano de obra (recurso 1), la ganancia aumenta en $15.

iXXXVIII. Dualidad en PL

PROBLEMA DUAL. Asociado a cada problema de PL (primal) existe un problema dual:

Primal (Maximización)	Dual (Minimización)
$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^T\mathbf{y}$
$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

TEOREMA DE DUALIDAD DÉBIL: Para cualquier $\mathbf{x}$ factible primal y $\mathbf{y}$ factible dual:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y} \tag{98}$$

TEOREMA DE DUALIDAD FUERTE: Si el primal tiene solución óptima $\mathbf{x}^*$, entonces el dual tiene solución óptima $\mathbf{y}^*$ y:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^* \tag{99}$$

iXXXIX. Modelo de Leontief Generalizado

FORMULACIÓN DINÁMICA. Extensión del modelo input-output a múltiples periodos:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t) + \mathbf{d}_t \tag{100}$$

donde:

- $\mathbf{A}$: matriz de coeficientes de insumos corrientes
- $\mathbf{B}$: matriz de coeficientes de capital
- $\mathbf{d}_t$: demanda final en periodo t

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{x}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{d}_t) \tag{101}$$

iCondición de Productividad

Teorema de Hawkins-Simon Dinámico

Para que exista una trayectoria de producción no negativa que satisfaga demandas finales no negativas, es necesario y suficiente que:

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{A} + \rho\mathbf{B}) > 0 \quad \forall\rho \in [0, 1] \tag{102}$$

iXL. Modelos de Equilibrio General

ECONOMÍA DE n BIENES Y m CONSUMIDORES. Cada consumidor i tiene:

- Dotación inicial: $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^n$
- Función de utilidad: $u_i(\mathbf{x}_i)$
- Demanda: $\mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ que maximiza utilidad sujeto a $\mathbf{p}^T\mathbf{x}_i \leq \mathbf{p}^T\mathbf{w}_i$

CONDICIONES DE EQUILIBRIO:

1. **Maximización:** $\mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ maximiza $u_i(\mathbf{x}_i)$ sujeto a restricción presupuestaria
2. **Factibilidad:** $\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) \leq \sum_{i=1}^m \mathbf{w}_i$
3. **Ley de Walras:** $\mathbf{p}^T\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^m \mathbf{w}_i\right) = 0$

iSistema de Ecuaciones

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^m \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \tag{103}$$

Dado que solo se determinan precios relativos, se normaliza $\sum_{j=1}^n p_j = 1$.

iXLI. Análisis de Estabilidad

SISTEMA DINÁMICO DE PRECIOS. Modelo de ajuste walrasiano:

$$\frac{dp_j}{dt} = k_j\left(\sum_{i=1}^m x_{ij}(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^m w_{ij}\right), \quad j = 1, \ldots, n \tag{104}$$

LINEALIZACIÓN EN EL EQUILIBRIO $\mathbf{p}^*$:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{p}^*)(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*) \tag{105}$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{p}^*)$ es la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{p}^*$.

iCondición de Estabilidad

Estabilidad de Lyapunov

El equilibrio $\mathbf{p}^*$ es localmente estable si todos los valores propios de $\mathbf{J}(\mathbf{p}^*)$ tienen parte real negativa.

PROPIEDADES DE J:

1. Homogeneidad de grado 0 en precios $\Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{p} = \mathbf{0}$
2. Ley de Walras $\Rightarrow$ suma de filas = 0
3. En competencia perfecta con preferencias regulares, $\mathbf{J}$ tiene $n-1$ valores propios con parte real negativa

iXLII. Modelos de Optimización Dinámica

PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO. Encontrar $\mathbf{u}(t)$ que:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt \\ &\text{sujeto a} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ &\qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(T) \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{106}$$

iCondiciones de Pontryagin

Definimos el hamiltoniano:

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \lambda^T\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{107}$$

Condiciones necesarias:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{108}$$
$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{109}$$
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{110}$$

1XLIII. Aplicación: Modelo de Crecimiento Óptimo

PROBLEMA DE RAMSEY-CASS-KOOPMANS.

$$\begin{aligned} &\max \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t)) dt \\ &\text{sujeto a} \quad \frac{dk}{dt} = f(k(t)) - c(t) - \delta k(t) \\ &\qquad\qquad k(0) = k_0 \end{aligned} \tag{111}$$

HAMILTONIANO:

$$H = e^{-\rho t} u(c) + \lambda [f(k) - c - \delta k] \tag{112}$$

CONDICIONES:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\rho t} u'(c) - \lambda = 0 \tag{113}$$
$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -\lambda [f'(k) - \delta] \tag{114}$$
$$\frac{dk}{dt} = f(k) - c - \delta k \tag{115}$$

1Estado Estacionario

En estado estacionario $\frac{dk}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0$:

$$f'(k^*) = \rho + \delta, \quad c^* = f(k^*) - \delta k^* \tag{116}$$

1XLIV. Econometría Matricial

MODELO DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \tag{117}$$

donde:

- $\mathbf{y}_{n\times 1}$: vector de observaciones de la variable dependiente
- $\mathbf{X}_{n\times k}$: matriz de variables independientes
- $\beta_{k\times 1}$: vector de parámetros
- $\varepsilon_{n\times 1}$: vector de errores

ESTIMADOR MCO:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \tag{118}$$

1Propiedades

1. Insesgamiento: $E[\hat{\beta}] = \beta$ si $E[\varepsilon] = \mathbf{0}$
2. Matriz de varianzas-covarianzas: $\text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$
3. Teorema de Gauss-Markov: Bajo condiciones estándar, $\hat{\beta}$ es BLUE (Best Linear Unbiased Estimator)

COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN:

$$R^2 = 1 - \frac{\mathbf{e}^T\mathbf{e}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y} - n\bar{y}^2} \tag{119}$$

donde $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}$ son los residuos.

1XLV. Resumen de Conceptos Clave

1. ÁLGEBRA MATRICIAL BÁSICA

- **Matrices:** Arreglos rectangulares para sistemas de ecuaciones
- **Operaciones:** Suma, multiplicación escalar, multiplicación matricial (no conmutativa)
- **Transpuesta:** $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
- **Inversa:** $\mathbf{A}^{-1}$ existe si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES

- **Forma matricial:** $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$
- **Solución:** $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$ si $\mathbf{A}$ es no singular
- **Regla de Cramer:** $x_j = |\mathbf{A}_j|/|\mathbf{A}|$
- **Rango:** Número de ecuaciones independientes

3. DETERMINANTES

- **Interpretación:** Volumen, criterio de invertibilidad
- **Propiedades:** Multiplicativo, dependencia lineal
- **Expansión:** Por cofactores

4. VALORES Y VECTORES PROPIOS

- **Ecuación:** $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$
- **Diagonalización:** $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$
- **Aplicaciones:** Sistemas dinámicos, análisis de estabilidad

5. FORMAS CUADRÁTICAS

- **Forma:** $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$, $\mathbf{A}$ simétrica
- **Clasificación:** Def. positiva, negativa, indefinida
- **Criterios:** Valores propios, menores principales

6. PROGRAMACIÓN LINEAL

- **Formulación:** $\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ s.a. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$
- **Solución:** Método simplex, puntos extremos
- **Dualidad:** Problema dual, precios sombra

IXLVI. Referencias Bibliográficas

TEXTOS FUNDAMENTALES:

1. **Chiang, A. C. & Wainwright, K.** (2005). *Mathematical Economics*. McGraw-Hill.
2. **Simon, C. P. & Blume, L.** (1994). *Mathematics for Economists*. Norton.
3. **Sydsæter, K., Hammond, P., Seierstad, A., & Strøm, A.** (2008). *Further Mathematics for Economic Analysis*. Pearson.
4. **Intriligator, M. D.** (2002). *Mathematical Optimization and Economic Theory*. SIAM.

TEXTOS AVANZADOS:

1. **Luenberger, D. G.** (1995). *Microeconomic Theory*. McGraw-Hill.
2. **Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R.** (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.
3. **Takayama, A.** (1985). *Mathematical Economics*. Cambridge University Press.

ÁLGEBRA LINEAL:

1. **Strang, G.** (2016). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press.
2. **Lax, P. D.** (2007). *Linear Algebra and Its Applications*. Wiley.
3. **Meyer, C. D.** (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM.

IXLVII. Problemas Representativos

PROBLEMA 1: Sistema de Mercado

Dado el modelo de mercado:

$$\begin{aligned} Q_d &= 100 - 2P + 0.1Y \\ Q_s &= -20 + 3P \\ Y &= 500 \end{aligned}$$

Encontrar el equilibrio (P^*, Q^*) usando álgebra matricial.

SOLUCIÓN:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ -20 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82 \\ 34 \end{bmatrix} \tag{120}$$

PROBLEMA 2: Determinante y Rango

Determinar el rango de:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \tag{121}$$

SOLUCIÓN: Todas las filas son proporcionales, $\det(\mathbf{A}) = 0$, $\text{rango}(\mathbf{A}) = 1$.

PROBLEMA 3: Valores Propios

Encontrar valores y vectores propios de:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{122}$$

SOLUCIÓN: $\lambda_1 = 2, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \lambda_2 = 5, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

PROBLEMA 4: Forma Cuadrática

Clasificar $Q(x, y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 2 > 0, \quad D_2 = 10 - 4 = 6 > 0 \tag{123}$$

$\Rightarrow$ definida positiva.

IXLVIII. Software y Herramientas

PAQUETES DE SOFTWARE:

- **MATLAB:** Estándar industrial para álgebra matricial
- **Python:** NumPy, SciPy, pandas para análisis económico
- **R:** Especializado en estadística y econometría
- **Julia:** Alto desempeño para computación científica
- **Mathematica:** Cálculo simbólico y numérico

LIBRERÍAS ESPECÍFICAS:

- **Optimización:** CVXOPT (Python), Optim (Julia)
- **Econometría:** statsmodels (Python), econometrics (R)
- **Álgebra lineal:** LAPACK, BLAS (subrutinas fundamentales)

ıXLIX. Glosario de Términos

Término	Definición
Matriz no singular	$\det(\mathbf{A}) \neq 0$, tiene inversa
Matriz singular	$\det(\mathbf{A}) = 0$, no tiene inversa
Rango	Número máximo de filas/-columnas independientes
Traza	Suma de elementos diagonales: $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum a_{ii}$
Determinante	Escalar que indica invertibilidad y volumen
Valor propio	λ tal que $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$
Vector propio	$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$
Diagonalización	$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ con $\mathbf{D}$ diagonal
Forma cuadrática	$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$, $\mathbf{A}$ simétrica
Definida positiva	$Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
Programación lineal	Optimización lineal con restricciones lineales
Región factible	Conjunto de puntos que satisfacen todas las restricciones
Punto extremo	Vértice de la región factible poliedral
Método simplex	Algoritmo para resolver problemas de PL
Problema dual	Problema de PL asociado al primal
Precio sombra	Tasa de cambio del valor óptimo respecto a un recurso
Modelo de Leontief	$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{d}$, economía input-output
Equilibrio general	Sistema de precios que vacía todos los mercados

ıL. Consejos de Estudio

ESTRATEGIAS EFECTIVAS:

1. **Practicar con ejemplos pequeños:** Dominar casos 2×2 y 3×3 antes de generalizar
2. **Visualizar:** Usar interpretaciones geométricas siempre que sea posible
3. **Conectar conceptos:** Relacionar álgebra matricial con aplicaciones económicas
4. **Verificar propiedades:** Comprobar teoremas con ejemplos numéricos
5. **Usar software:** Implementar algoritmos para comprenderlos mejor

ERRORES COMUNES:

- Asumir conmutatividad en multiplicación de matrices
- Confundir $\mathbf{AB}$ con $\mathbf{BA}$
- Olvidar verificar condiciones para invertir matrices
- No considerar restricciones de dimensionalidad
- Ignorar interpretaciones económicas de resultados matemáticos

ıMensaje Final

La Elegancia del Álgebra Matricial

El álgebra de matrices no es solo una herramienta computacional; es un lenguaje que revela la estructura profunda de los modelos económicos. Su poder reside en la capacidad de tratar sistemas complejos de manera unificada, transformando problemas aparentemente intratables en formulaciones elegantes y resolubles.

Contacto & Referencias

Emanuel Quintana Silva

Economista en formación · UPTC · he/him

Economista en formación con gran pasión por la Econometría Computacional y la aplicación de R y Python en la Estadística y las Ciencias Sociales.

Email:
emanuel.quintana@uptc.edu.co

ORCID:
https://orcid.org/0009-0006-8419-28050009-0006-8419-2805

GitHub:
https://github.com/emanuelquintana-glitch
emanuelquintana-glitch

Repositorio:
https://github.com/emanuelquintana-glitch/-Apuntes$_Economia_Matematica.git$

users **3** seguidores · user-friends **78** siguiendo · database Repositorio activo