Problema 10.1
Multicolinealidad Perfecta en el Modelo de Regresión Lineal Múltiple

Demostración de la Imposibilidad de Estimación de los Coeficientes MCO bajo Dependencia Lineal Perfecta

Estudiante: Emanuel Quintana Silva
Asignatura: Econometría
Universidad: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC)

Referencia: Gujarati & Porter, Cap. 10
Fecha: 20 de febrero de 2026

Índice

1. Enunciado Formal del Problema

Enunciado 10.1 (Gujarati & Porter)

En el modelo de regresión lineal de k variables, hay k ecuaciones normales para estimar las k incógnitas. Suponga que X_k es una combinación lineal perfecta de las variables X restantes. ¿Cómo se demostraría que en este caso es **imposible** estimar los k coeficientes de regresión?

Se dispone del siguiente conjunto de datos ($n = 11$ observaciones):

i	Y_i	X_{2i}	X_{3i}
1	-10	1	1
2	-8	2	3
3	-6	3	5
4	-4	4	7
5	-2	5	9
6	0	6	11
7	2	7	13
8	4	8	15
9	6	9	17
10	8	10	19
11	10	11	21
Σ	**0**	**66**	**121**

2. Marco Teórico: El Estimador MCO en Forma Matricial

2.1. El Modelo de Regresión Lineal Múltiple

El modelo poblacional de regresión lineal con $k-1$ regresores (incluyendo el intercepto $X_1 \equiv 1$) es:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

En notación matricial compacta:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u} \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{Y}$ es el vector $(n\times 1)$ de observaciones, $\boldsymbol{X}$ es la **matriz de diseño** $(n\times k)$, $\boldsymbol{\beta}$ es el vector $(k\times 1)$ de parámetros desconocidos, y $\boldsymbol{u}$ es el vector $(n\times 1)$ de perturbaciones estocásticas.

Definición

Bajo los **supuestos de Gauss-Markov** ($\mathrm{E}[\boldsymbol{u}|\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{Var}[\boldsymbol{u}|\boldsymbol{X}] = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$, $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}) = k$), el estimador MCO se obtiene minimizando la Suma de Residuos al Cuadrado:

$$\mathrm{SRC}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

cuya solución única es el **Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios**:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{3}$$

El supuesto $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}) = k$ (rango completo de columnas) es *indispensable* para que la inversa $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ exista.

2.2. Las k Ecuaciones Normales

La condición de primer orden $\partial\,\mathrm{SRC}/\partial\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ produce el sistema de k **ecuaciones normales**:

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\,\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{4}$$

Para el modelo en **desviaciones respecto a la media** ($x_{ji} = X_{ji} - \bar{X}_j$, $y_i = Y_i - \bar{Y}$), el intercepto se elimina y el sistema (4) se reduce a las $k-1$ ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{2i}x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_{2i}y_i \\ \sum x_{3i}y_i \end{pmatrix} \tag{5}$$

3. Identificación de la Combinación Lineal Perfecta

3.1. Detección Empírica

Examinando columna a columna el conjunto de datos:

i	X_{2i}	$2X_{2i}-1$	X_{3i}
1	1	1	1
2	2	3	3
3	3	5	5
4	4	7	7
5	5	9	9
6	6	11	11
7	7	13	13
8	8	15	15
9	9	17	17
10	10	19	19
11	11	21	21

¡Resultado Crítico!

La tabla anterior demuestra que, **sin excepción en ninguna de las 11 observaciones**:

$$X_{3i} = 2X_{2i} - 1, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, 11$$

Puesto que la columna de intercepto es $X_1 \equiv 1$, la relación puede escribirse como combinación lineal de las columnas de $\boldsymbol{X}$:

$$\boxed{-1 \cdot X_{1i} \; - \; 2 \cdot X_{2i} \; + \; 1 \cdot X_{3i} \; = \; 0, \qquad \forall\, i}$$

Los coeficientes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -2, 1)$, no todos nulos, son los que atestiguan la dependencia lineal perfecta.

3.2. Reformulación en Forma de Desviaciones

Calculamos las medias:

$$\bar{Y} = \frac{0}{11} = 0, \qquad \bar{X}_2 = \frac{66}{11} = 6, \qquad \bar{X}_3 = \frac{121}{11} = 11$$

Las variables en desviaciones son: $x_{2i} = X_{2i} - 6$ y $x_{3i} = X_{3i} - 11$.
Como $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$, restando la media de X_3:

$$x_{3i} = X_{3i} - 11 = (2X_{2i} - 1) - 11 = 2X_{2i} - 12 = 2(X_{2i} - 6) = 2x_{2i}$$

Relación de dependencia en desviaciones

$$x_{3i} \; = \; 2\, x_{2i}, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, 11$$

La constante de proporcionalidad es $\lambda = 2$. En el espacio de desviaciones, la multicolinealidad perfecta se manifiesta como **proporcionalidad exacta**.

3.3. Cálculo Explícito de los Momentos Muestrales

La tabla siguiente compila los productos cruzados que conforman la matriz $\boldsymbol{X'X}$ y el vector $\boldsymbol{X'Y}$ en desviaciones:

i	y_i	x_{2i}	x_{3i}	x_{2i}^2	x_{3i}^2	$x_{2i}x_{3i}$	$x_{2i}y_i$	$x_{3i}y_i$
1	−10	−5	−10	25	100	50	50	100
2	−8	−4	−8	16	64	32	32	64
3	−6	−3	−6	9	36	18	18	36
4	−4	−2	−4	4	16	8	8	16
5	−2	−1	−2	1	4	2	2	4
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	1	2	1	4	2	2	4
8	4	2	4	4	16	8	8	16
9	6	3	6	9	36	18	18	36
10	8	4	8	16	64	32	32	64
11	10	5	10	25	100	50	50	100
Σ	0	0	0	**110**	**440**	**220**	**220**	**440**

En consecuencia, la matriz de momentos y el vector de productos cruzados son:

$$\boldsymbol{M} \; = \; \boldsymbol{X'X} \; = \; \begin{pmatrix} 110 & 220 \\ 220 & 440 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X'Y} \; = \; \begin{pmatrix} 220 \\ 440 \end{pmatrix} \tag{6}$$

4. Demostración General: Imposibilidad de Estimación

4.1. Proposición Central

Proposición 4.1 (Indeterminación bajo Multicolinealidad Perfecta)**.** *Sea $\boldsymbol{X}$ la matriz de diseño $(n \times k)$. Si existe un vector no nulo $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k$ tal que $\boldsymbol{Xc} = \boldsymbol{0}$, entonces el sistema de ecuaciones normales (4)* ***no tiene solución única*** *y el estimador MCO $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$* ***no existe****.*

Demostración. *Procederemos demostrando que $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ es singular, lo que impide su inversión.*

Paso 1. De la dependencia en $\boldsymbol{X}$ a la singularidad de $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$.
Si $\boldsymbol{Xc} = \boldsymbol{0}$ con $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$, premultiplicando por $\boldsymbol{X}'$:

$$\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{Xc}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \implies (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

Por definición, $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ es un ***vector en el núcleo*** de $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$*. Una matriz tiene núcleo no trivial si y solo si es* ***singular****, es decir:*

$$\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$$

Paso 2. La inversa no existe.
La inversa de una matriz cuadrada existe si y solo si su determinante es distinto de cero. Como $\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$, la expresión $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ ***no está definida*** *y, por tanto, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$ tampoco.*

Paso 3. El sistema tiene infinitas soluciones.
Sea $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ cualquier solución particular del sistema $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$. Para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, el vector:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\boldsymbol{c}$$

también es solución, pues:

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\underbrace{(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{c}}_{=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$$

Existe una ***familia de infinitas soluciones*** *parametrizada por α. No hay forma algebraica de elegir una solución única: la minimización de la SRC no identifica un único $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.* □

4.2. Demostración Alternativa: Rango y el Teorema de la Dimensión

Rango de $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$

Para toda matriz $\boldsymbol{X}$, se cumple $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{X})$.

Si las columnas de $\boldsymbol{X}$ son linealmente dependientes, $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}) < k$. Entonces:

$$\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{X}) < k$$

Una matriz cuadrada $k \times k$ con rango menor que k tiene determinante nulo y no es invertible.

4.3. Demostración vía el Determinante: Desigualdad de Cauchy-Schwarz

El determinante de la matriz 2×2 de momentos en desviaciones es:

$$D = \det(\boldsymbol{M}) = \left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right) - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2 \tag{7}$$

La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** para sumas finitas establece:

$$\left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2 \leq \left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right)$$

con igualdad **si y solo si** existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_{3i} = \lambda\, x_{2i}$ para todo i, es decir, si y solo si hay *proporcionalidad exacta* (multicolinealidad perfecta en desviaciones).

¡Resultado Crítico!

Cuando la igualdad de Cauchy-Schwarz se alcanza:

$$D = \left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right) - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2 = 0$$

La matriz $\boldsymbol{M}$ es singular: **el sistema de ecuaciones normales no tiene solución única y los estimadores MCO son indeterminados.**

5. Verificación Numérica con los Datos del Problema 10.1

5.1. La Relación de Dependencia Lineal: Verificación Algebraica

La relación $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$ implica, en desviaciones:

$$x_{3i} = X_{3i} - \bar{X}_3 = (2X_{2i} - 1) - (2\bar{X}_2 - 1) = 2(X_{2i} - \bar{X}_2) = 2x_{2i} \tag{8}$$

Por tanto, $\lambda = 2$, y el vector de dependencia sobre $\boldsymbol{X}$ (incluyendo el intercepto) es:

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{c} = -1 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \boldsymbol{X}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{X}_3 = \mathbf{0}$$

5.2. Cálculo Explícito del Determinante

Sustituyendo los valores de la Tabla 1 en la expresión del determinante:

$$\begin{aligned} D &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{3i}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{3i}\right)^2 && (9)\\ &= (110)(440) - (220)^2 && (10)\\ &= 48\,400 - 48\,400 && (11)\\ &= \boxed{0} && (12) \end{aligned}$$

Verificación directa con $\lambda = 2$:

Dado que $x_{3i} = 2x_{2i}$, las sumas satisfacen:

$$\sum x_{3i}^2 = \sum (2x_{2i})^2 = 4\sum x_{2i}^2 = 4 \times 110 = 440\checkmark$$

$$\sum x_{2i}x_{3i} = \sum x_{2i}(2x_{2i}) = 2\sum x_{2i}^2 = 2 \times 110 = 220\checkmark$$

Entonces:

$$D = \lambda^2\left(\sum x_{2i}^2\right)^2 - \lambda^2\left(\sum x_{2i}^2\right)^2 = \lambda^2\left(\sum x_{2i}^2\right)^2(1-1) = 0\checkmark$$

5.3. Coeficiente de Correlación r_{23}

$$r_{23} = \frac{\sum x_{2i}x_{3i}}{\sqrt{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2}} = \frac{220}{\sqrt{110 \times 440}} = \frac{220}{\sqrt{48\,400}} = \frac{220}{220} = 1 \tag{13}$$

El coeficiente de correlación es exactamente 1, confirmando la **dependencia lineal perfecta positiva** entre X_2 y X_3.

5.4. Aplicación de la Regla de Cramer: La Forma 0/0

Intentemos aplicar la Regla de Cramer para obtener $\hat{\beta}_2$:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{3i}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{3i}\right)}{D} = \frac{(220)(440) - (440)(220)}{0} = \frac{96\,800 - 96\,80}{0} \tag{14}$$

Análogamente para $\hat{\beta}_3$:

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{3i}\right)}{D} = \frac{(440)(110) - (220)(220)}{0} = \frac{48\,400 - 48\,40}{0} \tag{15}$$

¡Resultado Crítico!

La expresión $\frac{0}{0}$ es una **indeterminación matemática**: no posee un valor definido. No existe ningún método aritmético que permita resolver esta operación. El estimador MCO es, por tanto, **algebraicamente imposible de obtener** con estos datos.

5.5. Infinitas Soluciones: La Familia de Estimadores Equivalentes

Para ilustrar que existen infinitas soluciones, observemos que cualquier par $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ que satisfaga la primera ecuación normal también satisface la segunda (por ser la segunda múltiplo de la primera).

La Ecuación A del sistema (5) es:

$$110\,\hat{\beta}_2 + 220\,\hat{\beta}_3 = 220 \implies \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 = 2$$

Esta es una sola ecuación con dos incógnitas; su solución general es:

$$\hat{\beta}_2 = 2 - 2\alpha, \qquad \hat{\beta}_3 = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{16}$$

Ejemplos particulares:

α	$\hat{\beta}_2 = 2 - 2\alpha$	$\hat{\beta}_3 = \alpha$
0	2	0
1	0	1
1/2	1	1/2
-1	4	-1
5	-8	5

Corolario

Todos los pares $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = (2 - 2\alpha,\, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ producen **exactamente el mismo valor ajustado**:

$$\hat{y}_i = (2 - 2\alpha)x_{2i} + \alpha x_{3i} = (2 - 2\alpha)x_{2i} + \alpha(2x_{2i}) = 2x_{2i}$$

La función de regresión estimada es única ($\hat{y}_i = 2x_{2i}$), pero los **coeficientes individuales son completamente indeterminados**: no hay base estadística para elegir un par $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ sobre otro.

6. Consecuencias Estadísticas Formales

6.1. Varianzas de los Estimadores y el Caso Límite

Bajo el modelo clásico, la varianza del estimador $\hat{\beta}_2$ en el modelo bivariado en desviaciones es:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2 \sum x_{3i}^2}{D} = \frac{\sigma^2 \sum x_{3i}^2}{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2} \tag{17}$$

Expresando el denominador en función del coeficiente de correlación r_{23} (usando la identidad $D = \sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 \cdot (1 - r_{23}^2)$):

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2\,(1 - r_{23}^2)} \tag{18}$$

Cuando $r_{23} \to 1$:

$$1 - r_{23}^2 \;\to\; 0 \implies \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) \;=\; \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2 \cdot 0} \;\longrightarrow\; +\infty$$

Para $r_{23} = 1$ exactamente (nuestro caso):

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{110 \times (1-1)} = \frac{\sigma^2}{0} \to +\infty \tag{19}$$

¡Resultado Crítico!

Con los datos del Problema 10.1: $r_{23} = 1$, $D = 0$, luego $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) \to +\infty$ y $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_3) \to +\infty$. Los errores estándar son infinitos, los estadísticos t colapsan a $0/\infty$, y las pruebas de hipótesis carecen de todo sentido estadístico.

6.2. Análisis Espectral de la Matriz M

Los valores propios (eigenvalores) de $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ determinan su invertibilidad. Para nuestra matriz:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 110 & 220 \\ 220 & 440 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica $\det(\boldsymbol{M} - \mu \boldsymbol{I}) = 0$:

$$(110-\mu)(440-\mu) - 220^2 = 0 \tag{20}$$
$$\mu^2 - 550\mu + (48\,400 - 48\,400) = 0 \tag{21}$$
$$\mu^2 - 550\mu = 0 \tag{22}$$
$$\mu(\mu - 550) = 0 \tag{23}$$

Los eigenvalores son $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 550$.

Interpretación espectral

La presencia del eigenvalor $\mu_1 = 0$ confirma que $\boldsymbol{M}$ es **semidefinida positiva y singular**: su determinante es $\det(\boldsymbol{M}) = \mu_1 \cdot \mu_2 = 0 \times 550 = 0$, y su rango es $\mathrm{rg}(\boldsymbol{M}) = 1 < 2 = k - 1$. El **número de condición** $\kappa = \mu_{\max}/\mu_{\min} = 550/0 = +\infty$ es la señal numérica definitiva de la singularidad.

6.3. Resumen de las Tres Consecuencias Formales

1. **Indeterminación de los estimadores.** La operación $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ no está definida. La Regla de Cramer conduce a la forma indeterminada $0/0$. Existen infinitas soluciones al sistema normal, todas produciendo el mismo $\hat{\boldsymbol{Y}}$ pero coeficientes arbitrariamente distintos.

2. **Varianzas infinitas.** $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_j) \to +\infty$ para $j = 2, 3$ cuando $r_{23} = 1$. Los errores estándar no están definidos y los intervalos de confianza son $(-\infty, +\infty)$: ningún dato puede descartar ningún valor para β_j.

3. **Fallo de identificación.** El modelo *no está identificado*: la distribución conjunta de los datos es consistente con infinitos vectores $\boldsymbol{\beta}$, lo que hace imposible determinar cuánto de la variación de Y se atribuye a X_2 y cuánto a X_3 de forma separada.

7. Generalización al Modelo de k Variables

7.1. El Argumento General

El resultado demostrado con $k = 3$ variables se generaliza de forma directa a cualquier modelo con k variables explicativas.

Proposición 7.1 (Caso General)**.** *En el modelo* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$ *con* k *columnas en* $\boldsymbol{X}$*, si existe* $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ *tal que* $X_k = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_{k-1} X_{k-1}$ *(al menos uno de los* λ_j *no nulo), entonces:*

(a) Las k *columnas de* $\boldsymbol{X}$ *son linealmente dependientes.*

(b) $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}) < k$ *y* $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) < k$.

(c) $\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$ *y* $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ *no existe.*

(d) El sistema de k *ecuaciones normales tiene* infinitas soluciones*; ninguna puede elegirse como el estimador MCO.*

(e) $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_j) \to +\infty$ *para todo* j *afectado por la dependencia.*

Demostración (Esquema general)**.** *Las partes (a)–(d) se demuestran exactamente como en la Sección 4. Para (e), basta observar que la fórmula general de la varianza de* $\hat{\beta}_j$ *involucra el* (j, j)*-ésimo elemento diagonal de* $\sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$*. Cuando* $\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$*, los elementos de la* adjunta *divididos por el determinante divergen a* $\pm\infty$*.* □

7.2. Las k Ecuaciones Normales en Notación General

El apéndice C de Gujarati & Porter presenta el sistema de ecuaciones normales en desviaciones para $k - 1$ regresores como:

$$\begin{pmatrix} \sum x_2^2 & \sum x_2x_3 & \cdots & \sum x_2x_k \\ \sum x_2x_3 & \sum x_3^2 & \cdots & \sum x_3x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_2x_k & \sum x_3x_k & \cdots & \sum x_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_2y \\ \sum x_3y \\ \vdots \\ \sum x_ky \end{pmatrix} \tag{24}$$

Si $X_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j X_j$, la última fila de la matriz de coeficientes es una combinación lineal de las demás filas, haciendo que el sistema sea **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) en lugar de **compatible determinado** (solución única), que es el caso requerido para MCO.

8. Conclusión

Conclusión Final

El conjunto de datos del Problema 10.1 satisface la relación de dependencia lineal perfecta:

$$X_{3i} \;=\; 2X_{2i} - 1 \;\equiv\; -1 \cdot X_{1i} + 2 \cdot X_{2i}$$

Como consecuencia directa:

- El determinante de la matriz de momentos es $D = 0$ (verificado numéricamente: $48\,400 - 48\,400 = 0$).

- El coeficiente de correlación entre los regresores es $r_{23} = 1$.
- Los eigenvalores de $\boldsymbol{X'X}$ son $\{0,\, 550\}$; la presencia de $\mu = 0$ confirma la singularidad.
- Los estimadores MCO resultan en formas indeterminadas $0/0$:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{0}{0}, \qquad \hat{\beta}_3 = \frac{0}{0}$$

- Las varianzas de los estimadores son $+\infty$.
- Existen **infinitas** combinaciones $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ que ajustan igualmente bien los datos; el modelo **no está identificado**.

Queda así demostrado, tanto de forma **general** (por álgebra matricial y la desigualdad de Cauchy-Schwarz) como de forma **particular** (cálculo numérico explícito con los 11 datos), que la multicolinealidad perfecta hace **algebraica y estadísticamente imposible** la estimación de los k coeficientes de regresión mediante MCO.