
Problema 10.1

Multicolinealidad Perfecta en el Modelo de Regresión Lineal Múltiple

Demostración de la Imposibilidad de Estimación
de los Coeficientes MCO bajo Dependencia Lineal Perfecta

Estudiante: Emanuel Quintana Silva

Asignatura: Econometría

Universidad: Universidad Pedagógica y
Tecnológica de Colombia (UPTC)

Referencia: Gujarati & Porter, Cap. 10

Fecha: 20 de febrero de 2026

Índice

1. Enunciado Formal del Problema

Enunciado 10.1 (Gujarati & Porter)

En el modelo de regresión lineal de k variables, hay k ecuaciones normales para estimar las k incógnitas. Suponga que X_k es una combinación lineal perfecta de las variables X restantes. ¿Cómo se demostraría que en este caso es **imposible** estimar los k coeficientes de regresión?

Se dispone del siguiente conjunto de datos ($n = 11$ observaciones):

i	Y_i	X_{2i}	X_{3i}
1	-10	1	1
2	-8	2	3
3	-6	3	5
4	-4	4	7
5	-2	5	9
6	0	6	11
7	2	7	13
8	4	8	15
9	6	9	17
10	8	10	19
11	10	11	21
Σ	0	66	121

2. Marco Teórico: El Estimador MCO en Forma Matricial

2.1. El Modelo de Regresión Lineal Múltiple

El modelo poblacional de regresión lineal con $k - 1$ regresores (incluyendo el intercepto $X_1 \equiv 1$) es:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

En notación matricial compacta:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \quad (2)$$

donde \mathbf{Y} es el vector $(n \times 1)$ de observaciones, \mathbf{X} es la **matriz de diseño** $(n \times k)$, $\boldsymbol{\beta}$ es el vector $(k \times 1)$ de parámetros desconocidos, y \mathbf{u} es el vector $(n \times 1)$ de perturbaciones estocásticas.

Definición

Bajo los **supuestos de Gauss-Markov** ($E[\mathbf{u}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}$, $\text{Var}[\mathbf{u}|\mathbf{X}] = \sigma^2 \mathbf{I}_n$, $\text{rg}(\mathbf{X}) = k$), el estimador MCO se obtiene minimizando la Suma de Residuos al Cuadrado:

$$\text{SRC}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{u}'\mathbf{u} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

cuya solución única es el **Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios**:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (3)$$

El supuesto $\text{rg}(\mathbf{X}) = k$ (rango completo de columnas) es *indispensable* para que la inversa $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ exista.

2.2. Las k Ecuaciones Normales

La condición de primer orden $\partial \text{SRC}/\partial \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ produce el sistema de k **ecuaciones normales**:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (4)$$

Para el modelo en **desviaciones respecto a la media** ($x_{ji} = X_{ji} - \bar{X}_j$, $y_i = Y_i - \bar{Y}$), el intercepto se elimina y el sistema (??) se reduce a las $k - 1$ ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{2i}x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_{2i}y_i \\ \sum x_{3i}y_i \end{pmatrix} \quad (5)$$

3. Identificación de la Combinación Lineal Perfecta

3.1. Detección Empírica

Examinando columna a columna el conjunto de datos:

i	X_{2i}	$2X_{2i} - 1$	X_{3i}
1	1	1	1
2	2	3	3
3	3	5	5
4	4	7	7
5	5	9	9
6	6	11	11
7	7	13	13
8	8	15	15
9	9	17	17
10	10	19	19
11	11	21	21

¡Resultado Crítico!

La tabla anterior demuestra que, **sin excepción en ninguna de las 11 observaciones**:

$$X_{3i} = 2X_{2i} - 1, \quad \forall i = 1, \dots, 11$$

Puesto que la columna de intercepto es $X_1 \equiv 1$, la relación puede escribirse como

combinación lineal de las columnas de \mathbf{X} :

$$-1 \cdot X_{1i} - 2 \cdot X_{2i} + 1 \cdot X_{3i} = 0, \quad \forall i$$

Los coeficientes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -2, 1)$, no todos nulos, son los que atestiguan la dependencia lineal perfecta.

3.2. Reformulación en Forma de Desviaciones

Calculamos las medias:

$$\bar{Y} = \frac{0}{11} = 0, \quad \bar{X}_2 = \frac{66}{11} = 6, \quad \bar{X}_3 = \frac{121}{11} = 11$$

Las variables en desviaciones son: $x_{2i} = X_{2i} - 6$ y $x_{3i} = X_{3i} - 11$.

Como $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$, restando la media de X_3 :

$$x_{3i} = X_{3i} - 11 = (2X_{2i} - 1) - 11 = 2X_{2i} - 12 = 2(X_{2i} - 6) = 2x_{2i}$$

Relación de dependencia en desviaciones

$$x_{3i} = 2x_{2i}, \quad \forall i = 1, \dots, 11$$

La constante de proporcionalidad es $\lambda = 2$. En el espacio de desviaciones, la multicolinealidad perfecta se manifiesta como **proporcionalidad exacta**.

3.3. Cálculo Explícito de los Momentos Muestrales

La tabla siguiente compila los productos cruzados que conforman la matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ y el vector $\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ en desviaciones:

i	y_i	x_{2i}	x_{3i}	x_{2i}^2	x_{3i}^2	$x_{2i}x_{3i}$	$x_{2i}y_i$	$x_{3i}y_i$
1	-10	-5	-10	25	100	50	50	100
2	-8	-4	-8	16	64	32	32	64
3	-6	-3	-6	9	36	18	18	36
4	-4	-2	-4	4	16	8	8	16
5	-2	-1	-2	1	4	2	2	4
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	1	2	1	4	2	2	4
8	4	2	4	4	16	8	8	16
9	6	3	6	9	36	18	18	36
10	8	4	8	16	64	32	32	64
11	10	5	10	25	100	50	50	100
Σ	0	0	0	110	440	220	220	440

En consecuencia, la matriz de momentos y el vector de productos cruzados son:

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 110 & 220 \\ 220 & 440 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 220 \\ 440 \end{pmatrix} \quad (6)$$

4. Demostración General: Imposibilidad de Estimación

4.1. Proposición Central

Proposición 4.1 (Indeterminación bajo Multicolinealidad Perfecta). *Sea \mathbf{X} la matriz de diseño ($n \times k$). Si existe un vector no nulo $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ tal que $\mathbf{X}\mathbf{c} = \mathbf{0}$, entonces el sistema de ecuaciones normales (??) no tiene solución única y el estimador MCO $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ no existe.*

Demostración. Procederemos demostrando que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ es singular, lo que impide su inversión.

Paso 1. De la dependencia en \mathbf{X} a la singularidad de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$.

Si $\mathbf{X}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ con $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, premultiplicando por \mathbf{X}' :

$$\mathbf{X}'(\mathbf{X}\mathbf{c}) = \mathbf{X}'\mathbf{0} = \mathbf{0} \implies (\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

Por definición, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ es un **vector en el núcleo** de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$. Una matriz tiene núcleo no trivial si y solo si es **singular**, es decir:

$$\det(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = 0$$

Paso 2. La inversa no existe.

La inversa de una matriz cuadrada existe si y solo si su determinante es distinto de cero. Como $\det(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = 0$, la expresión $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ no está definida y, por tanto, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ tampoco.

Paso 3. El sistema tiene infinitas soluciones.

Sea $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ cualquier solución particular del sistema $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$. Para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, el vector:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\mathbf{c}$$

también es solución, pues:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\mathbf{c}) = \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\underbrace{(\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{c}}_{=0} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Existe una **familia de infinitas soluciones** parametrizada por α . No hay forma algebraica de elegir una solución única: la minimización de la SRC no identifica un único $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. \square

4.2. Demostración Alternativa: Rango y el Teorema de la Dimensión

Rango de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$

Para toda matriz \mathbf{X} , se cumple $\text{rg}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \text{rg}(\mathbf{X})$.

Si las columnas de \mathbf{X} son linealmente dependientes, $\text{rg}(\mathbf{X}) < k$. Entonces:

$$\text{rg}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \text{rg}(\mathbf{X}) < k$$

Una matriz cuadrada $k \times k$ con rango menor que k tiene determinante nulo y no es invertible.

4.3. Demostración vía el Determinante: Desigualdad de Cauchy-Schwarz

El determinante de la matriz 2×2 de momentos en desviaciones es:

$$D = \det(\mathbf{M}) = \left(\sum x_{2i}^2 \right) \left(\sum x_{3i}^2 \right) - \left(\sum x_{2i}x_{3i} \right)^2 \quad (7)$$

La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** para sumas finitas establece:

$$\left(\sum x_{2i}x_{3i} \right)^2 \leq \left(\sum x_{2i}^2 \right) \left(\sum x_{3i}^2 \right)$$

con igualdad **si y solo si** existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_{3i} = \lambda x_{2i}$ para todo i , es decir, si y solo si hay *proporcionalidad exacta* (multicolinealidad perfecta en desviaciones).

¡Resultado Crítico!

Cuando la igualdad de Cauchy-Schwarz se alcanza:

$$D = \left(\sum x_{2i}^2 \right) \left(\sum x_{3i}^2 \right) - \left(\sum x_{2i}x_{3i} \right)^2 = 0$$

La matriz \mathbf{M} es singular: **el sistema de ecuaciones normales no tiene solución única y los estimadores MCO son indeterminados.**

5. Verificación Numérica con los Datos del Problema 10.1

5.1. La Relación de Dependencia Lineal: Verificación Algebraica

La relación $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$ implica, en desviaciones:

$$x_{3i} = X_{3i} - \bar{X}_3 = (2X_{2i} - 1) - (2\bar{X}_2 - 1) = 2(X_{2i} - \bar{X}_2) = 2x_{2i} \quad (8)$$

Por tanto, $\lambda = 2$, y el vector de dependencia sobre \mathbf{X} (incluyendo el intercepto) es:

$$\mathbf{X}\mathbf{c} = -1 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{X}_2 + 1 \cdot \mathbf{X}_3 = \mathbf{0}$$

5.2. Cálculo Explícito del Determinante

Sustituyendo los valores de la Tabla 1 en la expresión del determinante:

$$D = \left(\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_{3i}^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_{2i}x_{3i} \right)^2 \quad (9)$$

$$= (110)(440) - (220)^2 \quad (10)$$

$$= 48\,400 - 48\,400 \quad (11)$$

$$= \boxed{0} \quad (12)$$

Verificación directa con $\lambda = 2$:

Dado que $x_{3i} = 2x_{2i}$, las sumas satisfacen:

$$\sum x_{3i}^2 = \sum (2x_{2i})^2 = 4 \sum x_{2i}^2 = 4 \times 110 = 440 \checkmark$$

$$\sum x_{2i}x_{3i} = \sum x_{2i}(2x_{2i}) = 2 \sum x_{2i}^2 = 2 \times 110 = 220 \checkmark$$

Entonces:

$$D = \lambda^2 \left(\sum x_{2i}^2 \right)^2 - \lambda^2 \left(\sum x_{2i}^2 \right)^2 = \lambda^2 \left(\sum x_{2i}^2 \right)^2 (1 - 1) = 0 \checkmark$$

5.3. Coeficiente de Correlación r_{23}

$$r_{23} = \frac{\sum x_{2i}x_{3i}}{\sqrt{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2}} = \frac{220}{\sqrt{110 \times 440}} = \frac{220}{\sqrt{48400}} = \frac{220}{220} = 1 \quad (13)$$

El coeficiente de correlación es exactamente 1, confirmando la **dependencia lineal perfecta positiva** entre X_2 y X_3 .

5.4. Aplicación de la Regla de Cramer: La Forma 0/0

Intentemos aplicar la Regla de Cramer para obtener $\hat{\beta}_2$:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_{2i}y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_{3i}^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_{3i}y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_{2i}x_{3i} \right)}{D} = \frac{(220)(440) - (440)(220)}{0} = \frac{96800 - 96800}{0} \quad (14)$$

Análogamente para $\hat{\beta}_3$:

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_{3i}y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_{2i}y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_{2i}x_{3i} \right)}{D} = \frac{(440)(110) - (220)(220)}{0} = \frac{48400 - 48400}{0} \quad (15)$$

¡Resultado Crítico!

La expresión $\frac{0}{0}$ es una **indeterminación matemática**: no posee un valor definido. No existe ningún método aritmético que permita resolver esta operación. El estimador MCO es, por tanto, **algebraicamente imposible de obtener** con estos datos.

5.5. Infinitas Soluciones: La Familia de Estimadores Equivalentes

Para ilustrar que existen infinitas soluciones, observemos que cualquier par $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ que satisfaga la primera ecuación normal también satisface la segunda (por ser la segunda múltiplo de la primera).

La Ecuación A del sistema (??) es:

$$110\hat{\beta}_2 + 220\hat{\beta}_3 = 220 \implies \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 = 2$$

Esta es una sola ecuación con dos incógnitas; su solución general es:

$$\hat{\beta}_2 = 2 - 2\alpha, \quad \hat{\beta}_3 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (16)$$

Ejemplos particulares:

α	$\hat{\beta}_2 = 2 - 2\alpha$	$\hat{\beta}_3 = \alpha$
0	2	0
1	0	1
1/2	1	1/2
-1	4	-1
5	-8	5

Corolario

Todos los pares $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = (2 - 2\alpha, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ producen **exactamente el mismo valor ajustado**:

$$\hat{y}_i = (2 - 2\alpha)x_{2i} + \alpha x_{3i} = (2 - 2\alpha)x_{2i} + \alpha(2x_{2i}) = 2x_{2i}$$

La función de regresión estimada es única ($\hat{y}_i = 2x_{2i}$), pero los **coeficientes individuales son completamente indeterminados**: no hay base estadística para elegir un par $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ sobre otro.

6. Consecuencias Estadísticas Formales

6.1. Varianzas de los Estimadores y el Caso Límite

Bajo el modelo clásico, la varianza del estimador $\hat{\beta}_2$ en el modelo bivariado en desviaciones es:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2 \sum x_{3i}^2}{D} = \frac{\sigma^2 \sum x_{3i}^2}{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2} \quad (17)$$

Expresando el denominador en función del coeficiente de correlación r_{23} (usando la identidad $D = \sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 \cdot (1 - r_{23}^2)$):

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2 (1 - r_{23}^2)} \quad (18)$$

Cuando $r_{23} \rightarrow 1$:

$$1 - r_{23}^2 \rightarrow 0 \implies \text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2 \cdot 0} \rightarrow +\infty$$

Para $r_{23} = 1$ exactamente (nuestro caso):

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{110 \times (1 - 1)} = \frac{\sigma^2}{0} \rightarrow +\infty \quad (19)$$

¡Resultado Crítico!

Con los datos del Problema 10.1: $r_{23} = 1$, $D = 0$, luego $\text{Var}(\hat{\beta}_2) \rightarrow +\infty$ y $\text{Var}(\hat{\beta}_3) \rightarrow +\infty$. Los errores estándar son infinitos, los estadísticos t colapsan a $0/\infty$, y las pruebas de hipótesis carecen de todo sentido estadístico.

6.2. Análisis Espectral de la Matriz M

Los valores propios (eigenvalores) de $M = \mathbf{X}'\mathbf{X}$ determinan su invertibilidad. Para nuestra matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 110 & 220 \\ 220 & 440 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica $\det(M - \mu I) = 0$:

$$(110 - \mu)(440 - \mu) - 220^2 = 0 \quad (20)$$

$$\mu^2 - 550\mu + (48\,400 - 48\,400) = 0 \quad (21)$$

$$\mu^2 - 550\mu = 0 \quad (22)$$

$$\mu(\mu - 550) = 0 \quad (23)$$

Los eigenvalores son $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 550$.

Interpretación espectral

La presencia del eigenvalor $\mu_1 = 0$ confirma que M es **semidefinida positiva y singular**: su determinante es $\det(M) = \mu_1 \cdot \mu_2 = 0 \times 550 = 0$, y su rango es $\text{rg}(M) = 1 < 2 = k - 1$. El **número de condición** $\kappa = \mu_{\max}/\mu_{\min} = 550/0 = +\infty$ es la señal numérica definitiva de la singularidad.

6.3. Resumen de las Tres Consecuencias Formales

- Indeterminación de los estimadores.** La operación $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ no está definida. La Regla de Cramer conduce a la forma indeterminada $0/0$. Existen infinitas soluciones al sistema normal, todas produciendo el mismo $\hat{\mathbf{Y}}$ pero coeficientes arbitrariamente distintos.
- Varianzas infinitas.** $\text{Var}(\hat{\beta}_j) \rightarrow +\infty$ para $j = 2, 3$ cuando $r_{23} = 1$. Los errores estándar no están definidos y los intervalos de confianza son $(-\infty, +\infty)$: ningún dato puede descartar ninguno valor para β_j .
- Fallo de identificación.** El modelo *no está identificado*: la distribución conjunta de los datos es consistente con infinitos vectores $\boldsymbol{\beta}$, lo que hace imposible determinar cuánto de la variación de Y se atribuye a X_2 y cuánto a X_3 de forma separada.

7. Generalización al Modelo de k Variables

7.1. El Argumento General

El resultado demostrado con $k = 3$ variables se generaliza de forma directa a cualquier modelo con k variables explicativas.

Proposición 7.1 (Caso General). *En el modelo $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$ con k columnas en \mathbf{X} , si existe $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ tal que $X_k = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_{k-1} X_{k-1}$ (al menos uno de los λ_j no nulo), entonces:*

- (a) *Las k columnas de \mathbf{X} son linealmente dependientes.*
- (b) $\text{rg}(\mathbf{X}) < k$ y $\text{rg}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) < k$.
- (c) $\det(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = 0$ y $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ no existe.
- (d) *El sistema de k ecuaciones normales tiene infinitas soluciones; ninguna puede elegirse como el estimador MCO.*
- (e) $\text{Var}(\hat{\beta}_j) \rightarrow +\infty$ para todo j afectado por la dependencia.

Demostración (Esquema general). *Las partes (a)–(d) se demuestran exactamente como en la Sección 4. Para (e), basta observar que la fórmula general de la varianza de $\hat{\beta}_j$ involucra el (j, j) -ésimo elemento diagonal de $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$. Cuando $\det(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = 0$, los elementos de la adjunta divididos por el determinante divergen a $\pm\infty$. \square*

7.2. Las k Ecuaciones Normales en Notación General

El apéndice C de Gujarati & Porter presenta el sistema de ecuaciones normales en desviaciones para $k - 1$ regresores como:

$$\begin{pmatrix} \sum x_2^2 & \sum x_2 x_3 & \cdots & \sum x_2 x_k \\ \sum x_2 x_3 & \sum x_3^2 & \cdots & \sum x_3 x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_2 x_k & \sum x_3 x_k & \cdots & \sum x_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_2 y \\ \sum x_3 y \\ \vdots \\ \sum x_k y \end{pmatrix} \quad (24)$$

Si $X_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j X_j$, la última fila de la matriz de coeficientes es una combinación lineal de las demás filas, haciendo que el sistema sea **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) en lugar de **compatible determinado** (solución única), que es el caso requerido para MCO.

8. Conclusión

Conclusión Final

El conjunto de datos del Problema 10.1 satisface la relación de dependencia lineal perfecta:

$$X_{3i} = 2X_{2i} - 1 \equiv -1 \cdot X_{1i} + 2 \cdot X_{2i}$$

Como consecuencia directa:

- El determinante de la matriz de momentos es $D = 0$ (verificado)

numéricamente: $48\,400 - 48\,400 = 0$).

- El coeficiente de correlación entre los regresores es $r_{23} = 1$.
- Los eigenvalores de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ son $\{0, 550\}$; la presencia de $\mu = 0$ confirma la singularidad.
- Los estimadores MCO resultan en formas indeterminadas 0/0:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{0}{0}, \quad \hat{\beta}_3 = \frac{0}{0}$$

- Las varianzas de los estimadores son $+\infty$.
- Existen **infinitas** combinaciones $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ que ajustan igualmente bien los datos; el modelo **no está identificado**.

Queda así demostrado, tanto de forma **general** (por álgebra matricial y la desigualdad de Cauchy-Schwarz) como de forma **particular** (cálculo numérico explícito con los 11 datos), que la multicolinealidad perfecta hace **algebraica y estadísticamente imposible** la estimación de los k coeficientes de regresión mediante MCO.