Multicolinealidad: Teoría, Diagnóstico y Remedios

VOL. III — FEBRERO 2026 — PREPARADO POR EMANUEL

I. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

▶ DEFINICIÓN FORMAL

La multicolinealidad ocurre cuando:

$$\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{X}_j \approx \mathbf{0}$$

Consecuencia directa:

- $\det(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \approx 0$
- $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ tiene elementos grandes
- $\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \to \infty$

▶ TIPOS DE MULTICOLINEALIDAD

1. Perfecta: $|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = 0$

- Estimadores indeterminados
- $\text{se}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \infty$
- Imposible calcular MCO

2. Imperfecta: $|\mathbf{X}'\mathbf{X}| \approx 0$

- Estimadores calculables
- Varianzas muy grandes
- Alta inestabilidad

▶ CAUSAS COMUNES

1. **Series de tiempo**: Variables con tendencias comunes
2. **Micronumerosidad**: n pequeño vs. k grande
3. **Términos polinomiales**: X, X^2, X^3 correlacionados
4. **Especificación**: Variables que miden lo mismo
5. **Muestreo**: Rango limitado de regresores

▶ MATRIZ DE INFORMACIÓN

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & \sum X_2 & \sum X_3 \\ \sum X_2 & \sum X_2^2 & \sum X_2X_3 \\ \sum X_3 & \sum X_2X_3 & \sum X_3^2 \end{bmatrix}$$

Propiedades clave:

- Simétrica: $(\mathbf{X}'\mathbf{X})' = \mathbf{X}'\mathbf{X}$
- Dimensión: $(k \times k)$
- Definida positiva si no hay colinealidad

▶ ESTIMADOR MCO

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Condición de existencia:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \text{ existe } \iff \text{rango}(\mathbf{X}) = k$$

II. MATRIZ VAR-COV Y FIV

▶ VARIANZA DE LOS ESTIMADORES

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

Expansión para 3 variables:

$$\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} \text{Var}(\hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & \text{Var}(\hat{\beta}_2) & \text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_2) & \text{Var}(\hat{\beta}_3) \end{bmatrix}$$

▶ EXPLOSIÓN DE VARIANZA

Fórmula crítica:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{\sum x_j^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - R_j^2}}_{\text{FIV}_j}$$

Donde:

- R_j^2 = R^2 de regresión auxiliar de X_j sobre demás
- FIV_j = Factor de Inflación de Varianza

▶ TABLA FIV vs. R_j^2

R_j^2	FIV_j	Inflación
0.00	1.0	Ninguna
0.50	2.0	$\times 2$
0.80	5.0	$\times 5$
WarningBox 0.90	10.0	**CRÍTICO**
0.95	20.0	$\times 20$
WarningBox 0.99	100.0	**CATASTRÓFICO**
1.00	∞	Perfecta

▶ FACTOR DE TOLERANCIA

$$\text{TOL}_j = \frac{1}{\text{FIV}_j} = 1 - R_j^2$$

Interpretación:

- TOL $\to 1$: Independencia total
- TOL < 0.10: **Problema serio**
- TOL $\to 0$: Colinealidad perfecta

▶ EFECTO EN PRUEBAS t

Si $R_j^2 \to 1$:

$$\text{se}(\hat{\beta}_j) \to \infty \implies t = \frac{\hat{\beta}_j}{\text{se}(\hat{\beta}_j)} \to 0$$

Resultado: Se acepta $H_0 : \beta_j = 0$ incorrectamente.

III. DIAGNÓSTICO COMPLETO

▶ SÍNTOMAS OBSERVABLES

1. Paradoja R^2 alto - t bajos

- $R^2 > 0.90$ (modelo global significativo)
- F significativo
- t individuales NO significativos

2. Sensibilidad extrema

- Coeficientes cambian drásticamente
- Signos incorrectos económicamente
- Inestabilidad al agregar/quitar datos

3. Intervalos amplios

- IC muy anchos
- Errores estándar grandes

▶ CÁLCULO DEL FIV

Procedimiento paso a paso:

Paso 1: Para cada X_j, regresar:

$$X_j = \delta_0 + \sum_{i \neq j} \delta_i X_i + v_j$$

Paso 2: Obtener R_j^2 de esta regresión

Paso 3: Calcular:

$$\text{FIV}_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

Paso 4: Interpretar según criterios

▶ CRITERIOS DE DECISIÓN FIV

Valor	**Acción**
FIV < 5	Ninguna acción
$5 \leq$ FIV < 10	Monitorear
WarningBox FIV ≥ 10	**ACCIÓN URGENTE**
FIV > 100	Rediseñar modelo

▶ TEST DE FARRAR-GLAUBER

Etapa 1: Test χ^2 (Global)

$$\chi^2_{calc} = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k+5)\right] \ln |R_{XX}|$$

Distribución: $\chi^2_{calc} \sim \chi^2_{[k(k-1)/2]}$
Decisión: Rechazar H_0 si $\chi^2_{calc} > \chi^2_{\alpha,gl}$
Etapa 2: Test F (Localización)
Para cada variable:

$$F_j = \frac{R_j^2/(k-2)}{(1-R_j^2)/(n-k+1)} \sim F_{(k-2,n-k+1)}$$

Etapa 3: Test t (Pares)

$$t_{ij} = r_{ij\cdot resto}\sqrt{\frac{n-k}{1-r^2_{ij\cdot resto}}}$$

▶ ÍNDICE DE CONDICIÓN

Número de condición:

$$\kappa = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Índice de condición:

$$CI = \sqrt{\kappa} = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}$$

Criterios (Belsley, Kuh, Welsch):
- $CI < 10$: Sin problema
- $10 \leq CI < 30$: Moderada a fuerte
- $CI \geq 30$: **Severa**

▶ REGLA DE KLEIN

Multicolinealidad problemática si:

$$R_j^2 > R^2_{modelo}$$

▶ CORRELACIONES SIMPLES

Regla práctica:

$$|r_{ij}| > 0.80 \implies \text{Bandera roja}$$

ADVERTENCIA: Correlaciones bajas NO garantizan ausencia de multicolinealidad múltiple.

IV. REMEDIOS Y SOLUCIONES

▶ FILOSOFÍA: ¿ACTUAR?

Objetivo	¿Importa?	Acción
Predicción	NO	No hacer nada
Inferencia	SÍ	Remedios
Interpretación	SÍ	Remedios

RECORDAR: Multicolinealidad NO sesga, solo aumenta varianza.

▶ 1. INFORMACIÓN A PRIORI

Ejemplo: Cobb-Douglas
Si teoría dice $\beta_2 + \beta_3 = 1$:

$$\ln(Q/L) = \beta_1 + \beta_2 \ln(K/L) + u$$

Ventaja: Elimina completamente el problema.

▶ 2. PRIMERAS DIFERENCIAS

Para series de tiempo:

$$\Delta Y_t = \beta_2 \Delta X_{2t} + \beta_3 \Delta X_{3t} + \Delta u_t$$

Elimina: Tendencias comunes
Costo: Pérdida de info de niveles

▶ 3. RAZONES/COCIENTES

En lugar de $Q = \beta_2 K + \beta_3 L$:

$$\frac{Q}{L} = \beta_2 \frac{K}{L} + \beta_3$$

▶ 4. ELIMINAR VARIABLES

Criterio: Identificar variable con FIV$_{max}$ y eliminar

RIESGO: Sesgo de especificación si variable es relevante

▶ 5. MÁS DATOS

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) \propto \frac{1}{n}$$

Para reducir se a la mitad: $n_{nuevo} = 4n_{original}$

▶ 6. REGRESIÓN RIDGE

Estimador Ridge:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda I)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Trade-off:
- Introduce sesgo
- Reduce varianza
- $\lambda > 0$ controla balance

▶ 7. LASSO

Minimiza:

$$\sum (Y_i - \mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta})^2 + \lambda \sum |\beta_j|$$

Ventaja: Selección automática de variables (coefs = 0)

▶ 8. PCA

Componentes principales:

$$PC_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} X_i$$

Ventaja: Ortogonalidad perfecta
Desventaja: Pérdida de interpretabilidad

V. APLICACIONES

▶ MODELO INFLACIÓN MONETARISTA

$$\dot{P}_t = \alpha + \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{M}_{t-i} + u_t$$

Problema: Corr$(\dot{M}_t, \dot{M}_{t-1}) \approx 0.85$
Solución: Rezagos de Almon

$$m_i = \gamma_0 + \gamma_1 i + \gamma_2 i^2$$

Resultado empírico: $\sum m_i \approx 1.03$ (neutralidad)

▶ FUNCIÓN COBB-DOUGLAS

Original:

$$\ln Q = \beta_1 + \beta_2 \ln K + \beta_3 \ln L + u$$

Problema: Corr$(\ln K, \ln L) > 0.90$
Remedios:
1. Restricción: $\ln(Q/L) = \beta_1 + \beta_2 \ln(K/L) + u$
2. Diferencias: $\Delta \ln Q_t = \beta_2 \Delta \ln K_t + \beta_3 \Delta \ln L_t$

VI. CÓDIGO PRÁCTICO

▶ R (TIDYVERSE)

```
Calcular FIV:
library(car)
vif(modelo)
Tolerancia:
1/vif(modelo)
Ridge:
library(glmnet)
ridge <- glmnet(x, y, alpha=0)
LASSO:
lasso <- glmnet(x, y, alpha=1)
```

▶ PYTHON (STATSMODELS)

```
FIV:
from statsmodels.stats
.outliers_influence import
variance_inflation_factor

vif = [variance_inflation_factor
(X.values, i) for i in range(X.shape[1])]

Ridge/LASSO:
from sklearn.linear_model
import Ridge, Lasso
```

▶ STATA

```
VIF:
estat vif

Restricciones:
constraint define 1 beta2+beta3=1
cnsreg y x1 x2, constraints(1)
```

VII. REFERENCIA RÁPIDA

▶ FÓRMULAS ESENCIALES

Concepto	Fórmula
MCO	$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$
Var-Cov	$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$
FIV	$\text{FIV}_j = 1/(1 - R_j^2)$
TOL	$\text{TOL}_j = 1 - R_j^2$
F-G	$\chi^2 = -[n - 1 - \frac{1}{6}(2k+5)] \ln \lvert R_{XX} \rvert$
CI	$CI = \sqrt{\lambda_{max}/\lambda_{min}}$
Ridge	$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda I)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$

▶ CHECKLIST DIAGNÓSTICO

- ☐ Calcular matriz correlación
- ☐ Verificar $|r_{ij}| > 0.80$
- ☐ Calcular FIV para cada variable
- ☐ Identificar FIV > 10
- ☐ Test Farrar-Glauber (si necesario)
- ☐ Análisis de valores propios (CI)
- ☐ Regresiones auxiliares
- ☐ Decidir remedio apropiado

▶ DECISIONES CLAVE

Si FIV > 10:

1. ¿Objetivo predicción? → No hacer nada
2. ¿Teoría sugiere restricción? → Info a priori
3. ¿Series de tiempo? → Diferenciación
4. ¿Variable redundante? → Eliminar
5. ¿Ninguno aplica? → Ridge/LASSO

VIII. CASOS ESPECIALES

▶ TRAMPA VARIABLE DUMMY

Error común:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 D_1 + \beta_2 D_2 + u$$

donde $D_1 + D_2 = 1$ (intercepto)
Solución: Omitir una categoría

▶ TÉRMINOS POLINOMIALES

Para $Y = \beta_1 + \beta_2 X + \beta_3 X^2 + u$:
Centrar: $x^* = X - \bar{X}$

$$Y = \beta_1^* + \beta_2^* x^* + \beta_3^* (x^*)^2 + u$$

▶ VARIABLES DE ESCALA

Si $X_2 = c \cdot X_3$ (ej: kg vs. libras):
Colinealidad perfecta → Usar solo una

IX. INTERPRETACIÓN

▶ NATURALEZA DEL PROBLEMA

La multicolinealidad es problema de:
- **GRADO** (no existencia)
- **MUESTRA** (no población)
- **PRECISIÓN** (no sesgo)

▶ NO AFECTA

- Insesgadez: $\mathbb{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$
- Consistencia
- Propiedad BLUE
- Predicción (si estructura persiste)
- R^2 global

▶ SÍ AFECTA

- Varianzas individuales ↑
- Errores estándar ↑
- Intervalos de confianza ↑
- Poder de pruebas t ↓
- Estabilidad numérica ↓

▶ CONTEXTO ECONÓMICO

Pregunta clave: ¿Qué necesito?

Si necesito...	Entonces...
Predicción $\hat{Y}$	Tolerar colinealidad
Inferencia sobre β_j	Aplicar remedios
Interpretación causal	Remedios + teoría
Elasticidades precisas	Remedios esenciales

X. NOTAS FINALES

▶ MITOS COMUNES

1. FALSO: "Alta correlación simple = multicolinealidad"
   VERDAD: Puede haber multicolinealidad con r_{ij} bajos
2. FALSO: "Multicolinealidad sesga estimadores"
   VERDAD: Solo aumenta varianza, no sesgo
3. FALSO: "Siempre hay que corregirla"
   VERDAD: Depende del objetivo

▶ BIBLIOGRAFÍA ESENCIAL

- **Gujarati & Porter** (2009): Cap. 10
- **Wooldridge** (2015): Cap. 3-4
- **Greene** (2018): Sec. 4.6
- **Belsley et al.** (1980): Texto completo

▶ VALORES CRÍTICOS

χ^2 (Farrar-Glauber, $\alpha = 0.05$):

gl=3: 7.815	gl=6: 12.592
gl=10: 18.307	gl=15: 24.996

—

UPTC Tunja — Econometría Avanzada
Emanuel — Febrero 2026
github.com/uptc-econometrics