Problema 10.1
Multicolinealidad Perfecta
en el Modelo de Regresión Lineal Múltiple

Demostración de la Imposibilidad de Estimación de los Coeficientes MCO bajo Dependencia Lineal Perfecta

Estudiante: Emanuel Quintana Silva
Asignatura: Econometría
Universidad: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC)

Referencia: Gujarati & Porter, Cap. 10
Fecha: 20 de febrero de 2026

Índice

1. Enunciado Formal del Problema

Enunciado 10.1 (Gujarati & Porter)

En el modelo de regresión lineal de k variables, hay k ecuaciones normales para estimar las k incógnitas. Suponga que X_k es una combinación lineal perfecta de las variables X restantes. ¿Cómo se demostraría que en este caso es **imposible** estimar los k coeficientes de regresión?

Se dispone del siguiente conjunto de datos ($n = 11$ observaciones):

i	Y_i	X_{2i}	X_{3i}
1	-10	1	1
2	-8	2	3
3	-6	3	5
4	-4	4	7
5	-2	5	9
6	0	6	11
7	2	7	13
8	4	8	15
9	6	9	17
10	8	10	19
11	10	11	21
Σ	**0**	**66**	**121**

2. Marco Teórico: El Estimador MCO en Forma Matricial

2.1. El Modelo de Regresión Lineal Múltiple

El modelo poblacional de regresión lineal con $k-1$ regresores (incluyendo el intercepto $X_1 \equiv 1$) es:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

En notación matricial compacta:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u} \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{Y}$ es el vector $(n\times 1)$ de observaciones, $\boldsymbol{X}$ es la **matriz de diseño** $(n\times k)$, $\boldsymbol{\beta}$ es el vector $(k\times 1)$ de parámetros desconocidos, y $\boldsymbol{u}$ es el vector $(n\times 1)$ de perturbaciones estocásticas.

Definición

Bajo los **supuestos de Gauss-Markov** ($\mathrm{E}[\boldsymbol{u}|\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{Var}[\boldsymbol{u}|\boldsymbol{X}] = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$, $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}) = k$), el estimador MCO se obtiene minimizando la Suma de Residuos al Cuadrado:

$$\mathrm{SRC}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})$$

cuya solución única es el **Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios**:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{3}$$

El supuesto $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}) = k$ (rango completo de columnas) es *indispensable* para que la inversa $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ exista.

2.2. Las k Ecuaciones Normales

La condición de primer orden $\partial\,\mathrm{SRC}/\partial\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ produce el sistema de k **ecuaciones normales**:

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\,\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{4}$$

Para el modelo en **desviaciones respecto a la media** ($x_{ji} = X_{ji} - \bar{X}_j$, $y_i = Y_i - \bar{Y}$), el intercepto se elimina y el sistema (**??**) se reduce a las $k-1$ ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{2i}x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_{2i}y_i \\ \sum x_{3i}y_i \end{pmatrix} \tag{5}$$

3. Identificación de la Combinación Lineal Perfecta

3.1. Detección Empírica

Examinando columna a columna el conjunto de datos:

i	X_{2i}	$2X_{2i}-1$	X_{3i}
1	1	1	1
2	2	3	3
3	3	5	5
4	4	7	7
5	5	9	9
6	6	11	11
7	7	13	13
8	8	15	15
9	9	17	17
10	10	19	19
11	11	21	21

¡Resultado Crítico!

La tabla anterior demuestra que, **sin excepción en ninguna de las 11 observaciones**:

$$X_{3i} = 2X_{2i} - 1, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, 11$$

Puesto que la columna de intercepto es $X_1 \equiv 1$, la relación puede escribirse como combinación lineal de las columnas de $\boldsymbol{X}$:

$$\boxed{-1 \cdot X_{1i} \;-\; 2 \cdot X_{2i} \;+\; 1 \cdot X_{3i} \;=\; 0, \qquad \forall\, i}$$

Los coeficientes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -2, 1)$, no todos nulos, son los que atestiguan la dependencia lineal perfecta.

3.2. Reformulación en Forma de Desviaciones

Calculamos las medias:

$$\bar{Y} = \frac{0}{11} = 0, \qquad \bar{X}_2 = \frac{66}{11} = 6, \qquad \bar{X}_3 = \frac{121}{11} = 11$$

Las variables en desviaciones son: $x_{2i} = X_{2i} - 6$ y $x_{3i} = X_{3i} - 11$.
Como $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$, restando la media de X_3:

$$x_{3i} = X_{3i} - 11 = (2X_{2i} - 1) - 11 = 2X_{2i} - 12 = 2(X_{2i} - 6) = 2x_{2i}$$

Relación de dependencia en desviaciones

$$x_{3i} \;=\; 2\, x_{2i}, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, 11$$

La constante de proporcionalidad es $\lambda = 2$. En el espacio de desviaciones, la multicolinealidad perfecta se manifiesta como **proporcionalidad exacta**.

3.3. Cálculo Explícito de los Momentos Muestrales

La tabla siguiente compila los productos cruzados que conforman la matriz $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ y el vector $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$ en desviaciones:

i	y_i	x_{2i}	x_{3i}	x_{2i}^2	x_{3i}^2	$x_{2i}x_{3i}$	$x_{2i}y_i$	$x_{3i}y_i$
1	−10	−5	−10	25	100	50	50	100
2	−8	−4	−8	16	64	32	32	64
3	−6	−3	−6	9	36	18	18	36
4	−4	−2	−4	4	16	8	8	16
5	−2	−1	−2	1	4	2	2	4
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	1	2	1	4	2	2	4
8	4	2	4	4	16	8	8	16
9	6	3	6	9	36	18	18	36
10	8	4	8	16	64	32	32	64
11	10	5	10	25	100	50	50	100
Σ	0	0	0	**110**	**440**	**220**	**220**	**440**

En consecuencia, la matriz de momentos y el vector de productos cruzados son:

$$\boldsymbol{M} \;=\; \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} \;=\; \begin{pmatrix} 110 & 220 \\ 220 & 440 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \;=\; \begin{pmatrix} 220 \\ 440 \end{pmatrix} \tag{6}$$

4. Demostración General: Imposibilidad de Estimación

4.1. Proposición Central

Proposición 4.1 (Indeterminación bajo Multicolinealidad Perfecta)**.** *Sea* $\boldsymbol{X}$ *la matriz de diseño* $(n \times k)$*. Si existe un vector no nulo* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k$ *tal que* $\boldsymbol{Xc} = \boldsymbol{0}$*, entonces el sistema de ecuaciones normales* (**??**) ***no tiene solución única*** *y el estimador MCO* $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$ ***no existe****.*

Demostración. *Procederemos demostrando que* $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ *es singular, lo que impide su inversión.*

Paso 1. De la dependencia en $\boldsymbol{X}$ ***a la singularidad de*** $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$***.***
Si $\boldsymbol{Xc} = \boldsymbol{0}$ *con* $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$*, premultiplicando por* $\boldsymbol{X}'$*:*

$$\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{Xc}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \implies (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

Por definición, $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ *es un* ***vector en el núcleo*** *de* $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$*. Una matriz tiene núcleo no trivial si y solo si es* ***singular****, es decir:*

$$\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$$

Paso 2. La inversa no existe.
La inversa de una matriz cuadrada existe si y solo si su determinante es distinto de cero. Como $\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$*, la expresión* $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ ***no está definida*** *y, por tanto,* $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$ *tampoco.*

Paso 3. El sistema tiene infinitas soluciones.
Sea $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ *cualquier solución particular del sistema* $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$*. Para todo escalar* $\alpha \in \mathbb{R}$*, el vector:*

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\boldsymbol{c}$$

también es solución, pues:

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\underbrace{(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{c}}_{=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$$

Existe una ***familia de infinitas soluciones*** *parametrizada por* α*. No hay forma algebraica de elegir una solución única: la minimización de la SRC no identifica un único* $\hat{\boldsymbol{\beta}}$*.* □

4.2. Demostración Alternativa: Rango y el Teorema de la Dimensión

Rango de $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$

Para toda matriz $\boldsymbol{X}$, se cumple $\text{rg}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = \text{rg}(\boldsymbol{X})$.

Si las columnas de $\boldsymbol{X}$ son linealmente dependientes, $\text{rg}(\boldsymbol{X}) < k$. Entonces:

$$\text{rg}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = \text{rg}(\boldsymbol{X}) < k$$

Una matriz cuadrada $k \times k$ con rango menor que k tiene determinante nulo y no es invertible.

4.3. Demostración vía el Determinante: Desigualdad de Cauchy-Schwarz

El determinante de la matriz 2×2 de momentos en desviaciones es:

$$D = \det(\boldsymbol{M}) = \left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right) - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2 \tag{7}$$

La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** para sumas finitas establece:

$$\left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2 \leq \left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right)$$

con igualdad **si y solo si** existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_{3i} = \lambda\, x_{2i}$ para todo i, es decir, si y solo si hay *proporcionalidad exacta* (multicolinealidad perfecta en desviaciones).

¡Resultado Crítico!

Cuando la igualdad de Cauchy-Schwarz se alcanza:

$$D = \left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right) - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2 = 0$$

La matriz $\boldsymbol{M}$ es singular: **el sistema de ecuaciones normales no tiene solución única y los estimadores MCO son indeterminados.**

5. Verificación Numérica con los Datos del Problema 10.1

5.1. La Relación de Dependencia Lineal: Verificación Algebraica

La relación $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$ implica, en desviaciones:

$$x_{3i} = X_{3i} - \bar{X}_3 = (2X_{2i} - 1) - (2\bar{X}_2 - 1) = 2(X_{2i} - \bar{X}_2) = 2x_{2i} \tag{8}$$

Por tanto, $\lambda = 2$, y el vector de dependencia sobre $\boldsymbol{X}$ (incluyendo el intercepto) es:

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{c} = -1 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \boldsymbol{X}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{X}_3 = \mathbf{0}$$

5.2. Cálculo Explícito del Determinante

Sustituyendo los valores de la Tabla 1 en la expresión del determinante:

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{3i}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{3i}\right)^2 \tag{9}$$

$$= (110)(440) - (220)^2 \tag{10}$$

$$= 48\,400 - 48\,400 \tag{11}$$

$$= \boxed{0} \tag{12}$$

Verificación directa con $\lambda = 2$:

Dado que $x_{3i} = 2x_{2i}$, las sumas satisfacen:

$$\sum x_{3i}^2 = \sum (2x_{2i})^2 = 4\sum x_{2i}^2 = 4 \times 110 = 440\checkmark$$

$$\sum x_{2i}x_{3i} = \sum x_{2i}(2x_{2i}) = 2\sum x_{2i}^2 = 2 \times 110 = 220\checkmark$$

Entonces:

$$D = \lambda^2\left(\sum x_{2i}^2\right)^2 - \lambda^2\left(\sum x_{2i}^2\right)^2 = \lambda^2\left(\sum x_{2i}^2\right)^2(1-1) = 0\checkmark$$

5.3. Coeficiente de Correlación r_{23}

$$r_{23} = \frac{\sum x_{2i}x_{3i}}{\sqrt{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2}} = \frac{220}{\sqrt{110 \times 440}} = \frac{220}{\sqrt{48\,400}} = \frac{220}{220} = 1 \tag{13}$$

El coeficiente de correlación es exactamente 1, confirmando la **dependencia lineal perfecta positiva** entre X_2 y X_3.

5.4. Aplicación de la Regla de Cramer: La Forma 0/0

Intentemos aplicar la Regla de Cramer para obtener $\hat{\beta}_2$:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{3i}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{3i}\right)}{D} = \frac{(220)(440) - (440)(220)}{0} = \frac{96\,800 - 96\,80}{0} \tag{14}$$

Análogamente para $\hat{\beta}_3$:

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{3i}\right)}{D} = \frac{(440)(110) - (220)(220)}{0} = \frac{48\,400 - 48\,40}{0} \tag{15}$$

¡Resultado Crítico!

La expresión $\frac{0}{0}$ es una **indeterminación matemática**: no posee un valor definido. No existe ningún método aritmético que permita resolver esta operación. El estimador MCO es, por tanto, **algebraicamente imposible de obtener** con estos datos.

5.5. Infinitas Soluciones: La Familia de Estimadores Equivalentes

Para ilustrar que existen infinitas soluciones, observemos que cualquier par $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ que satisfaga la primera ecuación normal también satisface la segunda (por ser la segunda múltiplo de la primera).

La Ecuación A del sistema (??) es:

$$110\,\hat{\beta}_2 + 220\,\hat{\beta}_3 = 220 \implies \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 = 2$$

Esta es una sola ecuación con dos incógnitas; su solución general es:

$$\hat{\beta}_2 = 2 - 2\alpha, \qquad \hat{\beta}_3 = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{16}$$

Ejemplos particulares:

α	$\hat{\beta}_2 = 2 - 2\alpha$	$\hat{\beta}_3 = \alpha$
0	2	0
1	0	1
1/2	1	1/2
−1	4	−1
5	−8	5

Corolario

Todos los pares $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = (2 - 2\alpha,\, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ producen **exactamente el mismo valor ajustado**:

$$\hat{y}_i = (2 - 2\alpha)x_{2i} + \alpha x_{3i} = (2 - 2\alpha)x_{2i} + \alpha(2x_{2i}) = 2x_{2i}$$

La función de regresión estimada es única ($\hat{y}_i = 2x_{2i}$), pero los **coeficientes individuales son completamente indeterminados**: no hay base estadística para elegir un par $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ sobre otro.

6. Consecuencias Estadísticas Formales

6.1. Varianzas de los Estimadores y el Caso Límite

Bajo el modelo clásico, la varianza del estimador $\hat{\beta}_2$ en el modelo bivariado en desviaciones es:

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2 \sum x_{3i}^2}{D} = \frac{\sigma^2 \sum x_{3i}^2}{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2} \tag{17}$$

Expresando el denominador en función del coeficiente de correlación r_{23} (usando la identidad $D = \sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 \cdot (1 - r_{23}^2)$):

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2\,(1 - r_{23}^2)} \tag{18}$$

Cuando $r_{23} \to 1$:

$$1 - r_{23}^2 \;\to\; 0 \implies \operatorname{Var}(\hat{\beta}_2) \;=\; \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2 \cdot 0} \;\longrightarrow\; +\infty$$

Para $r_{23} = 1$ exactamente (nuestro caso):

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{110 \times (1-1)} = \frac{\sigma^2}{0} \to +\infty \tag{19}$$

¡Resultado Crítico!

Con los datos del Problema 10.1: $r_{23} = 1$, $D = 0$, luego $\text{Var}(\hat{\beta}_2) \to +\infty$ y $\text{Var}(\hat{\beta}_3) \to +\infty$. Los errores estándar son infinitos, los estadísticos t colapsan a $0/\infty$, y las pruebas de hipótesis carecen de todo sentido estadístico.

6.2. Análisis Espectral de la Matriz M

Los valores propios (eigenvalores) de $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ determinan su invertibilidad. Para nuestra matriz:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 110 & 220 \\ 220 & 440 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica $\det(\boldsymbol{M} - \mu\boldsymbol{I}) = 0$:

$$(110-\mu)(440-\mu) - 220^2 = 0 \tag{20}$$
$$\mu^2 - 550\mu + (48\,400 - 48\,400) = 0 \tag{21}$$
$$\mu^2 - 550\mu = 0 \tag{22}$$
$$\mu(\mu - 550) = 0 \tag{23}$$

Los eigenvalores son $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 550$.

Interpretación espectral

La presencia del eigenvalor $\mu_1 = 0$ confirma que $\boldsymbol{M}$ es **semidefinida positiva y singular**: su determinante es $\det(\boldsymbol{M}) = \mu_1 \cdot \mu_2 = 0 \times 550 = 0$, y su rango es $\text{rg}(\boldsymbol{M}) = 1 < 2 = k - 1$. El **número de condición** $\kappa = \mu_{\max}/\mu_{\min} = 550/0 = +\infty$ es la señal numérica definitiva de la singularidad.

6.3. Resumen de las Tres Consecuencias Formales

1. **Indeterminación de los estimadores.** La operación $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ no está definida. La Regla de Cramer conduce a la forma indeterminada $0/0$. Existen infinitas soluciones al sistema normal, todas produciendo el mismo $\hat{\boldsymbol{Y}}$ pero coeficientes arbitrariamente distintos.

2. **Varianzas infinitas.** $\text{Var}(\hat{\beta}_j) \to +\infty$ para $j = 2, 3$ cuando $r_{23} = 1$. Los errores estándar no están definidos y los intervalos de confianza son $(-\infty, +\infty)$: ningún dato puede descartar ningún valor para β_j.

3. **Fallo de identificación.** El modelo *no está identificado*: la distribución conjunta de los datos es consistente con infinitos vectores $\boldsymbol{\beta}$, lo que hace imposible determinar cuánto de la variación de Y se atribuye a X_2 y cuánto a X_3 de forma separada.

7. Generalización al Modelo de k Variables

7.1. El Argumento General

El resultado demostrado con $k = 3$ variables se generaliza de forma directa a cualquier modelo con k variables explicativas.

Proposición 7.1 (Caso General)**.** *En el modelo* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$ *con* k *columnas en* $\boldsymbol{X}$*, si existe* $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ *tal que* $X_k = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_{k-1} X_{k-1}$ *(al menos uno de los* λ_j *no nulo), entonces:*

(a) Las k *columnas de* $\boldsymbol{X}$ *son linealmente dependientes.*

(b) $\operatorname{rg}(\boldsymbol{X}) < k$ *y* $\operatorname{rg}(\boldsymbol{X'X}) < k$*.*

(c) $\det(\boldsymbol{X'X}) = 0$ *y* $(\boldsymbol{X'X})^{-1}$ *no existe.*

(d) El sistema de k *ecuaciones normales tiene* infinitas soluciones*; ninguna puede elegirse como el estimador MCO.*

(e) $\operatorname{Var}(\hat{\beta}_j) \to +\infty$ *para todo* j *afectado por la dependencia.*

Demostración (Esquema general)**.** *Las partes (a)–(d) se demuestran exactamente como en la Sección 4. Para (e), basta observar que la fórmula general de la varianza de* $\hat{\beta}_j$ *involucra el* (j, j)*-ésimo elemento diagonal de* $\sigma^2(\boldsymbol{X'X})^{-1}$*. Cuando* $\det(\boldsymbol{X'X}) = 0$*, los elementos de la* adjunta *divididos por el determinante divergen a* $\pm\infty$*.* □

7.2. Las k Ecuaciones Normales en Notación General

El apéndice C de Gujarati & Porter presenta el sistema de ecuaciones normales en desviaciones para $k - 1$ regresores como:

$$\begin{pmatrix} \sum x_2^2 & \sum x_2 x_3 & \cdots & \sum x_2 x_k \\ \sum x_2 x_3 & \sum x_3^2 & \cdots & \sum x_3 x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_2 x_k & \sum x_3 x_k & \cdots & \sum x_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_2 y \\ \sum x_3 y \\ \vdots \\ \sum x_k y \end{pmatrix} \tag{24}$$

Si $X_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j X_j$, la última fila de la matriz de coeficientes es una combinación lineal de las demás filas, haciendo que el sistema sea **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) en lugar de **compatible determinado** (solución única), que es el caso requerido para MCO.

8. Conclusión

Conclusión Final

El conjunto de datos del Problema 10.1 satisface la relación de dependencia lineal perfecta:

$$X_{3i} = 2X_{2i} - 1 \equiv -1 \cdot X_{1i} + 2 \cdot X_{2i}$$

Como consecuencia directa:

- El determinante de la matriz de momentos es $D = 0$ (verificado numéricamente: $48\,400 - 48\,400 = 0$).

- El coeficiente de correlación entre los regresores es $r_{23} = 1$.
- Los eigenvalores de $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ son $\{0,\, 550\}$; la presencia de $\mu = 0$ confirma la singularidad.
- Los estimadores MCO resultan en formas indeterminadas $0/0$:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{0}{0}, \qquad \hat{\beta}_3 = \frac{0}{0}$$

- Las varianzas de los estimadores son $+\infty$.
- Existen **infinitas** combinaciones $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ que ajustan igualmente bien los datos; el modelo **no está identificado**.

Queda así demostrado, tanto de forma **general** (por álgebra matricial y la desigualdad de Cauchy-Schwarz) como de forma **particular** (cálculo numérico explícito con los 11 datos), que la multicolinealidad perfecta hace **algebraica y estadísticamente imposible** la estimación de los k coeficientes de regresión mediante MCO.

9. Problema 10.2: Funciones Estimables bajo Multicolinealidad Perfecta

Enunciado 10.2 (Gujarati & Porter)

Considere el mismo conjunto de datos hipotéticos de la Tabla 10.11 (los 11 pares (Y, X_2, X_3) estudiados en el Problema 10.1). Se desea ajustar el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

(a) ¿Puede estimar las tres incógnitas $\beta_1, \beta_2, \beta_3$? ¿Por qué?

(b) Si no se puede, ¿qué *funciones lineales* de estos parámetros (funciones estimables) sí pueden estimarse? Muestre los cálculos necesarios.

9.1. Parte (a): Imposibilidad de Estimación Individual

9.1.1. Argumento: La Dependencia Lineal Perfecta

Del análisis del Problema 10.1 sabemos que los datos satisfacen:

$$X_{3i} = 2X_{2i} - 1 = 2X_{2i} - 1 \cdot X_{1i}, \qquad \forall\, i = 1, \dots, 11 \tag{25}$$

donde $X_{1i} \equiv 1$ es la columna del intercepto. Esto puede reescribirse como una dependencia lineal entre las **tres** columnas de la matriz de diseño $\boldsymbol{X}_{(11\times 3)}$:

$$\boxed{-1 \cdot \boldsymbol{X}_1 - 2 \cdot \boldsymbol{X}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{0}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{X}_3 = 2\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1 \tag{26}$$

¡Resultado Crítico!

Respuesta directa: No, **no es posible** estimar de forma individual y única los tres coeficientes $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

La razón es que la matriz $\boldsymbol{X}_{(11\times 3)}$ tiene rango 2 (en lugar de 3), lo que hace que $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ sea singular ($\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$) y, por tanto, $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ no exista. Las ecuaciones normales tienen infinitas soluciones, ninguna de las cuales puede identificarse como la estimación MCO.

9.1.2. Consecuencia Geométrica

Desde el punto de vista del **espacio columna**, el vector $\boldsymbol{X}_3$ ya está contenido en el espacio generado por $\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\}$:

$$\mathrm{col}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\}$$

El modelo tiene tres parámetros pero solo **dos grados de libertad paramétricos** efectivos. No hay forma de proyectar $\boldsymbol{Y}$ sobre tres dimensiones independientes cuando el espacio de regresión es bidimensional.

9.2. Parte (b): Derivación de las Funciones Estimables

9.2.1. Marco Teórico: ¿Qué es una Función Estimable?

Definición

Una combinación lineal $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3$ es **estimable** si existe un vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{Y}$ es un estimador lineal insesgado de $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\beta}$. Equivalentemente, $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\beta}$ es estimable si y solo si $\boldsymbol{\lambda}' \in \operatorname{row}(\boldsymbol{X})$, es decir, si $\boldsymbol{\lambda}$ es una combinación lineal de las filas de $\boldsymbol{X}$.

En términos prácticos: cuando existe multicolinealidad perfecta, aunque no podemos estimar β_1, β_2, β_3 por separado, sí podemos estimar **aquellas combinaciones lineales que el modelo puede "observar"** a través de los datos.

9.2.2. Derivación Algebraica por Sustitución

El método más directo consiste en sustituir la relación de dependencia $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$ directamente en el modelo original.

Paso 1. Modelo original:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \tag{27}$$

Paso 2. Sustitución de $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$:

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3(2X_{2i} - 1) + u_i \\ &= \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + 2\beta_3 X_{2i} - \beta_3 + u_i \end{aligned} \tag{28}$$

Paso 3. Reagrupación de términos:

$$Y_i = \underbrace{(\beta_1 - \beta_3)}_{\alpha_1} + \underbrace{(\beta_2 + 2\beta_3)}_{\alpha_2} X_{2i} + u_i \tag{29}$$

Funciones Estimables Identificadas

El modelo reducido (**??**) es una **regresión simple bien definida** de Y_i sobre X_{2i}, donde los únicos parámetros estimables son:

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_3 \qquad \text{(nuevo intercepto)} \tag{30}$$
$$\alpha_2 = \beta_2 + 2\beta_3 \qquad \text{(nueva pendiente)} \tag{31}$$

Estas dos combinaciones lineales de $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ son exactamente las funciones estimables del modelo. **No existen otras combinaciones lineales estimables independientes de estas dos.**

9.2.3. Verificación vía el Espacio Fila de X

El vector de coeficientes de $\alpha_1 = \beta_1 - \beta_3$ es $\boldsymbol{\lambda}_1 = (1, 0, -1)'$ y el de $\alpha_2 = \beta_2 + 2\beta_3$ es $\boldsymbol{\lambda}_2 = (0, 1, 2)'$.

Para que $\boldsymbol{\lambda}_j'\boldsymbol{\beta}$ sea estimable, $\boldsymbol{\lambda}_j$ debe pertenecer al espacio fila de $\boldsymbol{X}$, que equivale al espacio columna de $\boldsymbol{X}'$. Una fila genérica de $\boldsymbol{X}$ es $(1, X_{2i}, X_{3i}) = (1, X_{2i}, 2X_{2i} - 1)$.

Verificamos que $\boldsymbol{\lambda}_1 = (1, 0, -1)'$ es fila de $\boldsymbol{X}$:

$$c_1(1, X_{2i}, 2X_{2i} - 1) = (1, 0, -1) \;\Rightarrow\; c_1 = 1,\; c_1 X_{2i} = 0,\; c_1(2X_{2i} - 1) = -1$$

La segunda ecuación requiere $c_1 X_{2i} = 0$ para todo X_{2i}, lo que falla.

En cambio, $\boldsymbol{\lambda}_1$ y $\boldsymbol{\lambda}_2$ pertenecen al espacio fila de $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$, que es el criterio correcto para estimabilidad (Seber & Lee, 2003): dado que $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{c} = (1, 0, -1)'$ tiene solución, α_1 es estimable. Ambas funciones se verifican como estimables por construcción del modelo reducido.

9.3. Cálculo Numérico de los Estimadores

9.3.1. Reducción al Modelo de Regresión Simple

El modelo reducido (**??**) es:

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + u_i$$

Este es un modelo de regresión simple perfectamente identificado. Calculamos los estimadores MCO de α_1 y α_2.

9.3.2. Cálculo de las Medias

$$\bar{Y} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} Y_i = \frac{0}{11} = 0 \tag{32}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} X_{2i} = \frac{1 + 2 + \cdots + 11}{11} = \frac{66}{11} = 6 \tag{33}$$

9.3.3. Tabla de Cálculo en Desviaciones

Definimos $y_i = Y_i - \bar{Y} = Y_i$ y $x_{2i} = X_{2i} - \bar{X}_2 = X_{2i} - 6$:

i	Y_i	X_{2i}	$y_i = Y_i$	$x_{2i} = X_{2i} - 6$	x_{2i}^2	$x_{2i}y_i$
1	-10	1	-10	-5	25	50
2	-8	2	-8	-4	16	32
3	-6	3	-6	-3	9	18
4	-4	4	-4	-2	4	8
5	-2	5	-2	-1	1	2
6	0	6	0	0	0	0
7	2	7	2	1	1	2
8	4	8	4	2	4	8
9	6	9	6	3	9	18
10	8	10	8	4	16	32
11	10	11	10	5	25	50
Σ	**0**	**66**	**0**	**0**	**110**	**220**

9.3.4. Estimador de la Pendiente $\hat{\alpha}_2$

Aplicando la fórmula MCO para regresión simple:

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_{2i}\, y_i}{\sum_{i=1}^{11} x_{2i}^2} = \frac{50+32+18+8+2+0+2+8+18+32+50}{25+16+9+4+1+0+1+4+9+16+25}$$

$$= \frac{220}{110} = \boxed{2} \tag{34}$$

9.3.5. Estimador del Intercepto $\hat{\alpha}_1$

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{Y} - \hat{\alpha}_2\, \bar{X}_2 = 0 - 2 \times 6 = \boxed{-12} \tag{35}$$

9.3.6. Ecuación de Regresión Estimada

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2\, X_{2i} = -12 + 2X_{2i} \tag{36}$$

9.3.7. Verificación: Ajuste Perfecto

i	Y_i	X_{2i}	$\hat{Y}_i = -12 + 2X_{2i}$	$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$
1	-10	1	$-12 + 2(1) = -10$	0
2	-8	2	$-12 + 2(2) = -8$	0
3	-6	3	$-12 + 2(3) = -6$	0
4	-4	4	$-12 + 2(4) = -4$	0
5	-2	5	$-12 + 2(5) = -2$	0
6	0	6	$-12 + 2(6) = 0$	0
7	2	7	$-12 + 2(7) = 2$	0
8	4	8	$-12 + 2(8) = 4$	0
9	6	9	$-12 + 2(9) = 6$	0
10	8	10	$-12 + 2(10) = 8$	0
11	10	11	$-12 + 2(11) = 10$	0
Σ	**0**	**66**	**0**	**0**

Corolario

Todos los residuos son exactamente cero: $\hat{u}_i = 0$, $\forall\, i$. Esto implica SRC $= 0$, STC $= 440$ y $R^2 = 1$. El modelo reducido produce un **ajuste perfecto** porque los datos siguen exactamente la relación lineal $Y_i = -12 + 2X_{2i}$. Este ajuste perfecto es consecuencia directa de la multicolinealidad perfecta: los datos yacen en un subespacio de dimensión menor y el modelo lo captura sin error.

9.4. Interpretación de las Funciones Estimables

9.4.1. Lo que Sí Podemos Saber

A partir de los estimadores obtenidos, podemos afirmar con certeza:

$$\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_3 = \hat{\alpha}_1 = -12 \tag{37}$$

$$\hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 = \hat{\alpha}_2 = 2 \tag{38}$$

Estas son restricciones **exactas y únicas** que los datos imponen sobre los parámetros.

9.4.2. Lo que No Podemos Saber

Las ecuaciones (**??**) y (**??**) conforman un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Su solución general es:

$$\begin{cases} \beta_1 = -12 + t \\ \beta_2 = 2 - 2t \\ \beta_3 = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \text{ (parámetro libre)} \tag{39}$$

La tabla siguiente muestra algunos miembros de esta familia infinita, todos ellos produciendo exactamente el mismo $\hat{Y}_i = -12 + 2X_{2i}$:

t	$\beta_1 = -12 + t$	$\beta_2 = 2 - 2t$	$\beta_3 = t$	$\beta_1 - \beta_3$	$\beta_2 + 2\beta_3$
0	-12	2	0	-12	2
1	-11	0	1	-12	2
1/2	-11.5	1	0.5	-12	2
-1	-13	4	-1	-12	2
3	-9	-4	3	-12	2

¡Resultado Crítico!

Independientemente del valor de $t \in \mathbb{R}$, las combinaciones lineales $\beta_1 - \beta_3$ y $\beta_2 + 2\beta_3$ son **siempre iguales a** -12 **y** 2, respectivamente. Esto confirma que son **invariantes** al parámetro libre t: son las únicas funciones que los datos pueden identificar.

9.4.3. Geometría de la Solución

Las dos restricciones (**??**)–(**??**) definen un **subespacio afín** (recta) en $\mathbb{R}^3$. La solución particular con $t = 0$, es decir, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-12, 2, 0)$, es la que se obtendría si impusiéramos la restricción adicional $\beta_3 = 0$ (es decir, si excluyéramos X_3 del modelo). Cualquier punto de la recta (**??**) es igualmente válido desde el punto de vista estadístico.

9.5. Resumen del Problema 10.2

Conclusión Integral del Problema 10.2

(a) ¿Puede estimar $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ individualmente?
No. La relación $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$ introduce multicolinealidad perfecta. $\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$, la inversa no existe y las ecuaciones normales tienen infinitas soluciones.

(b) ¿Qué funciones estimables pueden obtenerse?
Dos y solamente dos combinaciones lineales independientes son estimables:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_3 = \mathbf{-12} \\ \hat{\alpha}_2 &= \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 = \mathbf{2} \end{aligned}$$

Estas se obtienen estimando la regresión simple reducida $Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + u_i$, que produce:

$$\hat{Y}_i = -12 + 2X_{2i}, \qquad R^2 = 1, \qquad \text{SRC} = 0$$

El modelo reducido ajusta perfectamente los 11 datos. Los parámetros estructurales $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ individuales **no pueden ser recuperados** sin imponer una restricción adicional (como $\beta_3 = 0$ o conocer el valor verdadero de uno de ellos).