Problema 10.1
Multicolinealidad Perfecta en el Modelo de Regresión Lineal Múltiple

Demostración de la Imposibilidad de Estimación de los Coeficientes MCO bajo Dependencia Lineal Perfecta

Estudiante: Emanuel Quintana Silva
Asignatura: Econometría
Universidad: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC)

Referencia: Gujarati & Porter, Cap. 10
Fecha: 20 de febrero de 2026

Índice

1. Enunciado Formal del Problema

Enunciado 10.1 (Gujarati & Porter)

En el modelo de regresión lineal de k variables, hay k ecuaciones normales para estimar las k incógnitas. Suponga que X_k es una combinación lineal perfecta de las variables X restantes. ¿Cómo se demostraría que en este caso es **imposible** estimar los k coeficientes de regresión?

Se dispone del siguiente conjunto de datos ($n = 11$ observaciones):

i	Y_i	X_{2i}	X_{3i}
1	-10	1	1
2	-8	2	3
3	-6	3	5
4	-4	4	7
5	-2	5	9
6	0	6	11
7	2	7	13
8	4	8	15
9	6	9	17
10	8	10	19
11	10	11	21
$\boldsymbol{\Sigma}$	**0**	**66**	**121**

2. Marco Teórico: El Estimador MCO en Forma Matricial

2.1. El Modelo de Regresión Lineal Múltiple

El modelo poblacional de regresión lineal con $k-1$ regresores (incluyendo el intercepto $X_1 \equiv 1$) es:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

En notación matricial compacta:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u} \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{Y}$ es el vector $(n\times 1)$ de observaciones, $\boldsymbol{X}$ es la **matriz de diseño** $(n\times k)$, $\boldsymbol{\beta}$ es el vector $(k\times 1)$ de parámetros desconocidos, y $\boldsymbol{u}$ es el vector $(n\times 1)$ de perturbaciones estocásticas.

Definición

Bajo los **supuestos de Gauss-Markov** ($\mathrm{E}[\boldsymbol{u}|\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{Var}[\boldsymbol{u}|\boldsymbol{X}] = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$, $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}) = k$), el estimador MCO se obtiene minimizando la Suma de Residuos al Cuadrado:

$$\mathrm{SRC}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

cuya solución única es el **Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios**:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \;=\; (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{3}$$

El supuesto $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}) = k$ (rango completo de columnas) es *indispensable* para que la inversa $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ exista.

2.2. Las k Ecuaciones Normales

La condición de primer orden $\partial\,\mathrm{SRC}/\partial\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ produce el sistema de k **ecuaciones normales**:

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\,\hat{\boldsymbol{\beta}} \;=\; \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{4}$$

Para el modelo en **desviaciones respecto a la media** ($x_{ji} = X_{ji} - \bar{X}_j$, $y_i = Y_i - \bar{Y}$), el intercepto se elimina y el sistema (4) se reduce a las $k-1$ ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{2i}x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_{2i}y_i \\ \sum x_{3i}y_i \end{pmatrix} \tag{5}$$

3. Identificación de la Combinación Lineal Perfecta

3.1. Detección Empírica

Examinando columna a columna el conjunto de datos:

i	X_{2i}	$2X_{2i} - 1$	X_{3i}
1	1	1	1
2	2	3	3
3	3	5	5
4	4	7	7
5	5	9	9
6	6	11	11
7	7	13	13
8	8	15	15
9	9	17	17
10	10	19	19
11	11	21	21

¡Resultado Crítico!

La tabla anterior demuestra que, **sin excepción en ninguna de las 11 observaciones**:

$$X_{3i} \;=\; 2X_{2i} - 1, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, 11$$

Puesto que la columna de intercepto es $X_1 \equiv 1$, la relación puede escribirse como combinación lineal de las columnas de $\boldsymbol{X}$:

$$\boxed{-1 \cdot X_{1i} \ - \ 2 \cdot X_{2i} \ + \ 1 \cdot X_{3i} \ = \ 0, \qquad \forall\, i}$$

Los coeficientes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -2, 1)$, no todos nulos, son los que atestiguan la dependencia lineal perfecta.

3.2. Reformulación en Forma de Desviaciones

Calculamos las medias:

$$\bar{Y} = \frac{0}{11} = 0, \qquad \bar{X}_2 = \frac{66}{11} = 6, \qquad \bar{X}_3 = \frac{121}{11} = 11$$

Las variables en desviaciones son: $x_{2i} = X_{2i} - 6$ y $x_{3i} = X_{3i} - 11$.
Como $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$, restando la media de X_3:

$$x_{3i} = X_{3i} - 11 = (2X_{2i} - 1) - 11 = 2X_{2i} - 12 = 2(X_{2i} - 6) = 2x_{2i}$$

Relación de dependencia en desviaciones

$$x_{3i} \ = \ 2\, x_{2i}, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, 11$$

La constante de proporcionalidad es $\lambda = 2$. En el espacio de desviaciones, la multicolinealidad perfecta se manifiesta como **proporcionalidad exacta**.

3.3. Cálculo Explícito de los Momentos Muestrales

La tabla siguiente compila los productos cruzados que conforman la matriz $\boldsymbol{X'X}$ y el vector $\boldsymbol{X'Y}$ en desviaciones:

i	y_i	x_{2i}	x_{3i}	x_{2i}^2	x_{3i}^2	$x_{2i}x_{3i}$	$x_{2i}y_i$	$x_{3i}y_i$
1	-10	-5	-10	25	100	50	50	100
2	-8	-4	-8	16	64	32	32	64
3	-6	-3	-6	9	36	18	18	36
4	-4	-2	-4	4	16	8	8	16
5	-2	-1	-2	1	4	2	2	4
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	1	2	1	4	2	2	4
8	4	2	4	4	16	8	8	16
9	6	3	6	9	36	18	18	36
10	8	4	8	16	64	32	32	64
11	10	5	10	25	100	50	50	100
Σ	0	0	0	**110**	**440**	**220**	**220**	**440**

En consecuencia, la matriz de momentos y el vector de productos cruzados son:

$$\boldsymbol{M} \ = \ \boldsymbol{X'X} \ = \ \begin{pmatrix} 110 & 220 \\ 220 & 440 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X'Y} \ = \ \begin{pmatrix} 220 \\ 440 \end{pmatrix} \tag{6}$$

4. Demostración General: Imposibilidad de Estimación

4.1. Proposición Central

Proposición 4.1 (Indeterminación bajo Multicolinealidad Perfecta)**.** *Sea $\boldsymbol{X}$ la matriz de diseño $(n \times k)$. Si existe un vector no nulo $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k$ tal que $\boldsymbol{X}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, entonces el sistema de ecuaciones normales (4)* ***no tiene solución única*** *y el estimador MCO $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$* ***no existe****.*

Demostración. *Procederemos demostrando que $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ es singular, lo que impide su inversión.*

Paso 1. De la dependencia en $\boldsymbol{X}$ a la singularidad de $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$.
Si $\boldsymbol{X}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ con $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$, premultiplicando por $\boldsymbol{X}'$:

$$\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \implies (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

Por definición, $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ es un ***vector en el núcleo*** *de $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$. Una matriz tiene núcleo no trivial si y solo si es* ***singular****, es decir:*

$$\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$$

Paso 2. La inversa no existe.
La inversa de una matriz cuadrada existe si y solo si su determinante es distinto de cero. Como $\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$, la expresión $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ ***no está definida*** *y, por tanto, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$ tampoco.*

Paso 3. El sistema tiene infinitas soluciones.
Sea $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ cualquier solución particular del sistema $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$. Para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, el vector:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\boldsymbol{c}$$

también es solución, pues:

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \alpha\underbrace{(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{c}}_{=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$$

Existe una ***familia de infinitas soluciones*** *parametrizada por α. No hay forma algebraica de elegir una solución única: la minimización de la SRC no identifica un único $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.* □

4.2. Demostración Alternativa: Rango y el Teorema de la Dimensión

Rango de $X'X$

Para toda matriz $\boldsymbol{X}$, se cumple $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{X})$.

Si las columnas de $\boldsymbol{X}$ son linealmente dependientes, $\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}) < k$. Entonces:

$$\mathrm{rg}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{X}) < k$$

Una matriz cuadrada $k \times k$ con rango menor que k tiene determinante nulo y no es invertible.

4.3. Demostración vía el Determinante: Desigualdad de Cauchy-Schwarz

El determinante de la matriz 2×2 de momentos en desviaciones es:

$$D = \det(\boldsymbol{M}) = \left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right) - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2 \tag{7}$$

La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** para sumas finitas establece:

$$\left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2 \le \left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right)$$

con igualdad **si y solo si** existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_{3i} = \lambda\, x_{2i}$ para todo i, es decir, si y solo si hay *proporcionalidad exacta* (multicolinealidad perfecta en desviaciones).

¡Resultado Crítico!

Cuando la igualdad de Cauchy-Schwarz se alcanza:

$$D = \left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right) - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2 = 0$$

La matriz $\boldsymbol{M}$ es singular: **el sistema de ecuaciones normales no tiene solución única y los estimadores MCO son indeterminados.**

5. Verificación Numérica con los Datos del Problema 10.1

5.1. La Relación de Dependencia Lineal: Verificación Algebraica

La relación $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$ implica, en desviaciones:

$$x_{3i} = X_{3i} - \bar{X}_3 = (2X_{2i} - 1) - (2\bar{X}_2 - 1) = 2(X_{2i} - \bar{X}_2) = 2x_{2i} \tag{8}$$

Por tanto, $\lambda = 2$, y el vector de dependencia sobre $\boldsymbol{X}$ (incluyendo el intercepto) es:

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{c} = -1 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \boldsymbol{X}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{X}_3 = \mathbf{0}$$

5.2. Cálculo Explícito del Determinante

Sustituyendo los valores de la Tabla 1 en la expresión del determinante:

$$\begin{aligned} D &= \left(\sum_{i=1}^n x_{2i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n x_{3i}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_{2i}x_{3i}\right)^2 && (9)\\ &= (110)(440) - (220)^2 && (10)\\ &= 48\,400 - 48\,400 && (11)\\ &= \boxed{0} && (12) \end{aligned}$$

Verificación directa con $\lambda = 2$:

Dado que $x_{3i} = 2x_{2i}$, las sumas satisfacen:

$$\sum x_{3i}^2 = \sum (2x_{2i})^2 = 4\sum x_{2i}^2 = 4 \times 110 = 440\checkmark$$

$$\sum x_{2i}x_{3i} = \sum x_{2i}(2x_{2i}) = 2\sum x_{2i}^2 = 2 \times 110 = 220\checkmark$$

Entonces:

$$D = \lambda^2\left(\sum x_{2i}^2\right)^2 - \lambda^2\left(\sum x_{2i}^2\right)^2 = \lambda^2\left(\sum x_{2i}^2\right)^2(1-1) = 0\checkmark$$

5.3. Coeficiente de Correlación r_{23}

$$r_{23} = \frac{\sum x_{2i}x_{3i}}{\sqrt{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2}} = \frac{220}{\sqrt{110 \times 440}} = \frac{220}{\sqrt{48\,400}} = \frac{220}{220} = 1 \tag{13}$$

El coeficiente de correlación es exactamente 1, confirmando la **dependencia lineal perfecta positiva** entre X_2 y X_3.

5.4. Aplicación de la Regla de Cramer: La Forma $0/0$

Intentemos aplicar la Regla de Cramer para obtener $\hat{\beta}_2$:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2 &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_{2i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_{3i}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_{3i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_{2i}x_{3i}\right)}{D} \\ &= \frac{(220)(440) - (440)(220)}{0} \\ &= \frac{96\,800 - 96\,800}{0} \\ &= \frac{0}{0}\end{aligned} \tag{14}$$

Análogamente para $\hat{\beta}_3$:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_3 &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_{3i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_{2i}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_{2i}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_{2i}x_{3i}\right)}{D} \\ &= \frac{(440)(110) - (220)(220)}{0} \\ &= \frac{48\,400 - 48\,400}{0} \\ &= \frac{0}{0}\end{aligned} \tag{15}$$

¡Resultado Crítico!

La expresión $\frac{0}{0}$ es una **indeterminación matemática**: no posee un valor definido. No existe ningún método aritmético que permita resolver esta operación. El estimador MCO es, por tanto, **algebraicamente imposible**

de obtener con estos datos.

5.5. Infinitas Soluciones: La Familia de Estimadores Equivalentes

Para ilustrar que existen infinitas soluciones, observemos que cualquier par $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ que satisfaga la primera ecuación normal también satisface la segunda (por ser la segunda múltiplo de la primera).

La Ecuación A del sistema (5) es:

$$110\,\hat{\beta}_2 + 220\,\hat{\beta}_3 = 220 \implies \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 = 2$$

Esta es una sola ecuación con dos incógnitas; su solución general es:

$$\hat{\beta}_2 = 2 - 2\alpha, \qquad \hat{\beta}_3 = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{16}$$

Ejemplos particulares:

α	$\hat{\beta}_2 = 2 - 2\alpha$	$\hat{\beta}_3 = \alpha$
0	2	0
1	0	1
1/2	1	1/2
-1	4	-1
5	-8	5

Corolario

Todos los pares $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = (2 - 2\alpha, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ producen **exactamente el mismo valor ajustado**:

$$\hat{y}_i = (2 - 2\alpha)x_{2i} + \alpha x_{3i} = (2 - 2\alpha)x_{2i} + \alpha(2x_{2i}) = 2x_{2i}$$

La función de regresión estimada es única ($\hat{y}_i = 2x_{2i}$), pero los **coeficientes individuales son completamente indeterminados**: no hay base estadística para elegir un par $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ sobre otro.

6. Consecuencias Estadísticas Formales

6.1. Varianzas de los Estimadores y el Caso Límite

Bajo el modelo clásico, la varianza del estimador $\hat{\beta}_2$ en el modelo bivariado en desviaciones es:

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2 \sum x_{3i}^2}{D} = \frac{\sigma^2 \sum x_{3i}^2}{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2} \tag{17}$$

Expresando el denominador en función del coeficiente de correlación r_{23} (usando la identidad $D = \sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 \cdot (1 - r_{23}^2)$):

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2 (1 - r_{23}^2)} \tag{18}$$

Cuando $r_{23} \to 1$:

$$1 - r_{23}^2 \ \to \ 0 \ \Longrightarrow \ \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) \ = \ \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2 \cdot 0} \ \longrightarrow \ +\infty$$

Para $r_{23} = 1$ exactamente (nuestro caso):

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{110 \times (1 - 1)} = \frac{\sigma^2}{0} \to +\infty \tag{19}$$

¡Resultado Crítico!

Con los datos del Problema 10.1: $r_{23} = 1$, $D = 0$, luego $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) \to +\infty$ y $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_3) \to +\infty$. Los errores estándar son infinitos, los estadísticos t colapsan a $0/\infty$, y las pruebas de hipótesis carecen de todo sentido estadístico.

6.2. Análisis Espectral de la Matriz M

Los valores propios (eigenvalores) de $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ determinan su invertibilidad. Para nuestra matriz:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 110 & 220 \\ 220 & 440 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica $\det(\boldsymbol{M} - \mu \boldsymbol{I}) = 0$:

$$(110 - \mu)(440 - \mu) - 220^2 = 0 \tag{20}$$
$$\mu^2 - 550\mu + (48\,400 - 48\,400) = 0 \tag{21}$$
$$\mu^2 - 550\mu = 0 \tag{22}$$
$$\mu(\mu - 550) = 0 \tag{23}$$

Los eigenvalores son $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 550$.

Interpretación espectral

La presencia del eigenvalor $\mu_1 = 0$ confirma que $\boldsymbol{M}$ es **semidefinida positiva y singular**: su determinante es $\det(\boldsymbol{M}) = \mu_1 \cdot \mu_2 = 0 \times 550 = 0$, y su rango es $\mathrm{rg}(\boldsymbol{M}) = 1 < 2 = k - 1$. El **número de condición** $\kappa = \mu_{\max}/\mu_{\min} = 550/0 = +\infty$ es la señal numérica definitiva de la singularidad.

6.3. Resumen de las Tres Consecuencias Formales

1. **Indeterminación de los estimadores.** La operación $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ no está definida. La Regla de Cramer conduce a la forma indeterminada $0/0$. Existen infinitas soluciones al sistema normal, todas produciendo el mismo $\hat{\boldsymbol{Y}}$ pero coeficientes arbitrariamente distintos.

2. **Varianzas infinitas.** $\text{Var}(\hat{\beta}_j) \to +\infty$ para $j = 2, 3$ cuando $r_{23} = 1$. Los errores estándar no están definidos y los intervalos de confianza son $(-\infty, +\infty)$: ningún dato puede descartar ningún valor para β_j.

3. **Fallo de identificación.** El modelo *no está identificado*: la distribución conjunta de los datos es consistente con infinitos vectores $\boldsymbol{\beta}$, lo que hace imposible determinar cuánto de la variación de Y se atribuye a X_2 y cuánto a X_3 de forma separada.

7. Generalización al Modelo de k Variables

7.1. El Argumento General

El resultado demostrado con $k = 3$ variables se generaliza de forma directa a cualquier modelo con k variables explicativas.

Proposición 7.1 (Caso General). *En el modelo $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$ con k columnas en $\boldsymbol{X}$, si existe $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ tal que $X_k = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_{k-1} X_{k-1}$ (al menos uno de los λ_j no nulo), entonces:*

(a) *Las k columnas de $\boldsymbol{X}$ son linealmente dependientes.*

(b) $\text{rg}(\boldsymbol{X}) < k$ *y* $\text{rg}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) < k$.

(c) $\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$ *y* $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ *no existe.*

(d) *El sistema de k ecuaciones normales tiene* infinitas soluciones*; ninguna puede elegirse como el estimador MCO.*

(e) $\text{Var}(\hat{\beta}_j) \to +\infty$ *para todo j afectado por la dependencia.*

Demostración (Esquema general). *Las partes (a)–(d) se demuestran exactamente como en la Sección 4. Para (e), basta observar que la fórmula general de la varianza de $\hat{\beta}_j$ involucra el (j, j)-ésimo elemento diagonal de $\sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$. Cuando* $\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$*, los elementos de la* adjunta *divididos por el determinante divergen a $\pm\infty$.* □

7.2. Las k Ecuaciones Normales en Notación General

El apéndice C de Gujarati & Porter presenta el sistema de ecuaciones normales en desviaciones para $k - 1$ regresores como:

$$\begin{pmatrix} \sum x_2^2 & \sum x_2 x_3 & \cdots & \sum x_2 x_k \\ \sum x_2 x_3 & \sum x_3^2 & \cdots & \sum x_3 x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_2 x_k & \sum x_3 x_k & \cdots & \sum x_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_2 y \\ \sum x_3 y \\ \vdots \\ \sum x_k y \end{pmatrix} \tag{24}$$

Si $X_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j X_j$, la última fila de la matriz de coeficientes es una combinación lineal de las demás filas, haciendo que el sistema sea **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) en lugar de **compatible determinado** (solución única), que es el caso requerido para MCO.

8. Conclusión

Conclusión Final

El conjunto de datos del Problema 10.1 satisface la relación de dependencia lineal perfecta:

$$X_{3i} \;=\; 2X_{2i} - 1 \;\equiv\; -1 \cdot X_{1i} + 2 \cdot X_{2i}$$

Como consecuencia directa:

- El determinante de la matriz de momentos es $D = 0$ (verificado numéricamente: $48\,400 - 48\,400 = 0$).
- El coeficiente de correlación entre los regresores es $r_{23} = 1$.
- Los eigenvalores de $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ son $\{0, 550\}$; la presencia de $\mu = 0$ confirma la singularidad.
- Los estimadores MCO resultan en formas indeterminadas $0/0$:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{0}{0}, \qquad \hat{\beta}_3 = \frac{0}{0}$$

- Las varianzas de los estimadores son $+\infty$.
- Existen **infinitas** combinaciones $(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ que ajustan igualmente bien los datos; el modelo **no está identificado**.

Queda así demostrado, tanto de forma **general** (por álgebra matricial y la desigualdad de Cauchy-Schwarz) como de forma **particular** (cálculo numérico explícito con los 11 datos), que la multicolinealidad perfecta hace **algebraica y estadísticamente imposible** la estimación de los k coeficientes de regresión mediante MCO.

9. Problema 10.2: Funciones Estimables bajo Multicolinealidad Perfecta

Enunciado 10.2 (Gujarati & Porter)

Considere el mismo conjunto de datos hipotéticos de la Tabla 10.11 (los 11 pares (Y, X_2, X_3) estudiados en el Problema 10.1). Se desea ajustar el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

(a) ¿Puede estimar las tres incógnitas $\beta_1, \beta_2, \beta_3$? ¿Por qué?

(b) Si no se puede, ¿qué *funciones lineales* de estos parámetros (funciones estimables) sí pueden estimarse? Muestre los cálculos necesarios.

9.1. Parte (a): Imposibilidad de Estimación Individual

9.1.1. Argumento: La Dependencia Lineal Perfecta

Del análisis del Problema 10.1 sabemos que los datos satisfacen:

$$X_{3i} = 2X_{2i} - 1 = 2X_{2i} - 1 \cdot X_{1i}, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, 11 \tag{25}$$

donde $X_{1i} \equiv 1$ es la columna del intercepto. Esto puede reescribirse como una dependencia lineal entre las **tres** columnas de la matriz de diseño $\boldsymbol{X}_{(11\times 3)}$:

$$\boxed{-1 \cdot \boldsymbol{X}_1 - 2 \cdot \boldsymbol{X}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{0}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{X}_3 = 2\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1 \tag{26}$$

¡Resultado Crítico!

Respuesta directa: No, **no es posible** estimar de forma individual y única los tres coeficientes $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

La razón es que la matriz $\boldsymbol{X}_{(11\times 3)}$ tiene rango 2 (en lugar de 3), lo que hace que $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ sea singular ($\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$) y, por tanto, $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ no exista. Las ecuaciones normales tienen infinitas soluciones, ninguna de las cuales puede identificarse como la estimación MCO.

9.1.2. Consecuencia Geométrica

Desde el punto de vista del **espacio columna**, el vector $\boldsymbol{X}_3$ ya está contenido en el espacio generado por $\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\}$:

$$\text{col}(\boldsymbol{X}) = \text{span}\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3\} = \text{span}\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\}$$

El modelo tiene tres parámetros pero solo **dos grados de libertad paramétricos** efectivos. No hay forma de proyectar $\boldsymbol{Y}$ sobre tres dimensiones independientes cuando el espacio de regresión es bidimensional.

9.2. Parte (b): Derivación de las Funciones Estimables

9.2.1. Marco Teórico: ¿Qué es una Función Estimable?

Definición

Una combinación lineal $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3$ es **estimable** si existe un vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{Y}$ es un estimador lineal insesgado de $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\beta}$. Equivalentemente, $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\beta}$ es estimable si y solo si $\boldsymbol{\lambda}' \in \text{row}(\boldsymbol{X})$, es decir, si $\boldsymbol{\lambda}$ es una combinación lineal de las filas de $\boldsymbol{X}$.

En términos prácticos: cuando existe multicolinealidad perfecta, aunque no podemos estimar β_1, β_2, β_3 por separado, sí podemos estimar **aquellas combinaciones lineales que el modelo puede "observar"** a través de los datos.

9.2.2. Derivación Algebraica por Sustitución

El método más directo consiste en sustituir la relación de dependencia $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$ directamente en el modelo original.

Paso 1. Modelo original:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \tag{27}$$

Paso 2. Sustitución de $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$:

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3(2X_{2i} - 1) + u_i \\ &= \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + 2\beta_3 X_{2i} - \beta_3 + u_i \end{aligned} \tag{28}$$

Paso 3. Reagrupación de términos:

$$Y_i = \underbrace{(\beta_1 - \beta_3)}_{\alpha_1} + \underbrace{(\beta_2 + 2\beta_3)}_{\alpha_2} X_{2i} + u_i \tag{29}$$

Funciones Estimables Identificadas

El modelo reducido (29) es una **regresión simple bien definida** de Y_i sobre X_{2i}, donde los únicos parámetros estimables son:

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_3 \qquad \text{(nuevo intercepto)} \tag{30}$$
$$\alpha_2 = \beta_2 + 2\beta_3 \qquad \text{(nueva pendiente)} \tag{31}$$

Estas dos combinaciones lineales de $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ son exactamente las funciones estimables del modelo. **No existen otras combinaciones lineales estimables independientes de estas dos.**

9.2.3. Verificación vía el Espacio Fila de X

El vector de coeficientes de $\alpha_1 = \beta_1 - \beta_3$ es $\boldsymbol{\lambda}_1 = (1, 0, -1)'$ y el de $\alpha_2 = \beta_2 + 2\beta_3$ es $\boldsymbol{\lambda}_2 = (0, 1, 2)'$.

Para que $\boldsymbol{\lambda}_j'\boldsymbol{\beta}$ sea estimable, $\boldsymbol{\lambda}_j$ debe pertenecer al espacio fila de $\boldsymbol{X}$, que equivale al espacio columna de $\boldsymbol{X}'$. Una fila genérica de $\boldsymbol{X}$ es $(1, X_{2i}, X_{3i}) = (1, X_{2i}, 2X_{2i} - 1)$.

Verificamos que $\boldsymbol{\lambda}_1 = (1, 0, -1)'$ es fila de $\boldsymbol{X}$:

$$c_1(1, X_{2i}, 2X_{2i} - 1) = (1, 0, -1) \;\Rightarrow\; c_1 = 1,\; c_1 X_{2i} = 0,\; c_1(2X_{2i} - 1) = -1$$

La segunda ecuación requiere $c_1 X_{2i} = 0$ para todo X_{2i}, lo que falla.

En cambio, $\boldsymbol{\lambda}_1$ y $\boldsymbol{\lambda}_2$ pertenecen al espacio fila de $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$, que es el criterio correcto para estimabilidad (Seber & Lee, 2003): dado que $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{c} = (1, 0, -1)'$ tiene solución, α_1 es estimable. Ambas funciones se verifican como estimables por construcción del modelo reducido.

9.3. Cálculo Numérico de los Estimadores

9.3.1. Reducción al Modelo de Regresión Simple

El modelo reducido (29) es:

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + u_i$$

Este es un modelo de regresión simple perfectamente identificado. Calculamos los estimadores MCO de α_1 y α_2.

9.3.2. Cálculo de las Medias

$$\bar{Y} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} Y_i = \frac{0}{11} = 0 \tag{32}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} X_{2i} = \frac{1 + 2 + \cdots + 11}{11} = \frac{66}{11} = 6 \tag{33}$$

9.3.3. Tabla de Cálculo en Desviaciones

Definimos $y_i = Y_i - \bar{Y} = Y_i$ y $x_{2i} = X_{2i} - \bar{X}_2 = X_{2i} - 6$:

i	Y_i	X_{2i}	$y_i = Y_i$	$x_{2i} = X_{2i} - 6$	x_{2i}^2	$x_{2i}y_i$
1	-10	1	-10	-5	25	50
2	-8	2	-8	-4	16	32
3	-6	3	-6	-3	9	18
4	-4	4	-4	-2	4	8
5	-2	5	-2	-1	1	2
6	0	6	0	0	0	0
7	2	7	2	1	1	2
8	4	8	4	2	4	8
9	6	9	6	3	9	18
10	8	10	8	4	16	32
11	10	11	10	5	25	50
Σ	**0**	**66**	**0**	**0**	**110**	**220**

9.3.4. Estimador de la Pendiente $\hat{\alpha}_2$

Aplicando la fórmula MCO para regresión simple:

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_{2i}\, y_i}{\sum_{i=1}^{11} x_{2i}^2} = \frac{50+32+18+8+2+0+2+8+18+32+50}{25+16+9+4+1+0+1+4+9+16+25}$$
$$= \frac{220}{110} = \boxed{2} \tag{34}$$

9.3.5. Estimador del Intercepto $\hat{\alpha}_1$

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{Y} - \hat{\alpha}_2\, \bar{X}_2 = 0 - 2 \times 6 = \boxed{-12} \tag{35}$$

9.3.6. Ecuación de Regresión Estimada

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2\, X_{2i} = -12 + 2X_{2i} \tag{36}$$

9.3.7. Verificación: Ajuste Perfecto

i	Y_i	X_{2i}	$\hat{Y}_i = -12 + 2X_{2i}$	$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$
1	-10	1	$-12 + 2(1) = -10$	0
2	-8	2	$-12 + 2(2) = -8$	0
3	-6	3	$-12 + 2(3) = -6$	0
4	-4	4	$-12 + 2(4) = -4$	0
5	-2	5	$-12 + 2(5) = -2$	0
6	0	6	$-12 + 2(6) = 0$	0
7	2	7	$-12 + 2(7) = 2$	0
8	4	8	$-12 + 2(8) = 4$	0
9	6	9	$-12 + 2(9) = 6$	0
10	8	10	$-12 + 2(10) = 8$	0
11	10	11	$-12 + 2(11) = 10$	0
Σ	**0**	**66**	**0**	**0**

Corolario

Todos los residuos son exactamente cero: $\hat{u}_i = 0$, $\forall\, i$. Esto implica SRC $= 0$, STC $= 440$ y $R^2 = 1$. El modelo reducido produce un **ajuste perfecto** porque los datos siguen exactamente la relación lineal $Y_i = -12 + 2X_{2i}$. Este ajuste perfecto es consecuencia directa de la multicolinealidad perfecta: los datos yacen en un subespacio de dimensión menor y el modelo lo captura sin error.

9.4. Interpretación de las Funciones Estimables

9.4.1. Lo que Sí Podemos Saber

A partir de los estimadores obtenidos, podemos afirmar con certeza:

$$\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_3 = \hat{\alpha}_1 = -12 \tag{37}$$

$$\hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 = \hat{\alpha}_2 = 2 \tag{38}$$

Estas son restricciones **exactas y únicas** que los datos imponen sobre los parámetros.

9.4.2. Lo que No Podemos Saber

Las ecuaciones (37) y (38) conforman un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Su solución general es:

$$\begin{cases} \beta_1 = -12 + t \\ \beta_2 = 2 - 2t \\ \beta_3 = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \text{ (parámetro libre)} \tag{39}$$

La tabla siguiente muestra algunos miembros de esta familia infinita, todos ellos produciendo exactamente el mismo $\hat{Y}_i = -12 + 2X_{2i}$:

t	$\beta_1 = -12 + t$	$\beta_2 = 2 - 2t$	$\beta_3 = t$	$\beta_1 - \beta_3$	$\beta_2 + 2\beta_3$
0	-12	2	0	-12	2
1	-11	0	1	-12	2
1/2	-11.5	1	0.5	-12	2
-1	-13	4	-1	-12	2
3	-9	-4	3	-12	2

¡Resultado Crítico!

Independientemente del valor de $t \in \mathbb{R}$, las combinaciones lineales $\beta_1 - \beta_3$ y $\beta_2 + 2\beta_3$ son **siempre iguales a** -12 **y** 2, respectivamente. Esto confirma que son **invariantes** al parámetro libre t: son las únicas funciones que los datos pueden identificar.

9.4.3. Geometría de la Solución

Las dos restricciones (37)–(38) definen un **subespacio afín** (recta) en $\mathbb{R}^3$. La solución particular con $t = 0$, es decir, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-12, 2, 0)$, es la que se obtendría si impusiéramos la restricción adicional $\beta_3 = 0$ (es decir, si excluyéramos X_3 del modelo). Cualquier punto de la recta (39) es igualmente válido desde el punto de vista estadístico.

9.5. Resumen del Problema 10.2

Conclusión Integral del Problema 10.2

(a) ¿Puede estimar $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ individualmente?
No. La relación $X_{3i} = 2X_{2i} - 1$ introduce multicolinealidad perfecta. $\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = 0$, la inversa no existe y las ecuaciones normales tienen infinitas soluciones.

(b) ¿Qué funciones estimables pueden obtenerse?
Dos y solamente dos combinaciones lineales independientes son estimables:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_3 = \mathbf{-12} \\ \hat{\alpha}_2 &= \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 = \mathbf{2}\end{aligned}$$

Estas se obtienen estimando la regresión simple reducida $Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + u_i$, que produce:

$$\hat{Y}_i = -12 + 2X_{2i}, \qquad R^2 = 1, \qquad \mathrm{SRC} = 0$$

El modelo reducido ajusta perfectamente los 11 datos. Los parámetros estructurales $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ individuales **no pueden ser recuperados** sin imponer una restricción adicional (como $\beta_3 = 0$ o conocer el valor verdadero de uno de ellos).