Emanuele Pardini

Istituzioni di Probabilità

Dalle lezioni del corso di Istituzioni di Probabilità tenuto dai professori Dario Trevisan e Francesco Grotto all'Università di Pisa nell'anno accademico 2022/23.

Indice

Introduzione

Le seguenti dispense sono frutto della rielaborazione delle lezioni di Istituzioni di Probabilità tenute di professori Dario Trevisan e Francesco Grotto all'Università di Pisa nell'anno accademico 2022/2023. Per il 99% gli argomenti e le dimostrazioni date sono esattamente quelle fatte a lezione, alcune parti indicate sono facoltative in quanto non fatte a lezione e/o lasciate come esercizio (invito comunque alla lettura di queste parti per raggiungere la piena comprensione degli argomenti trattati). Per segnalare errori di vario tipo non esitare a contattarmi alla mail e.pardini21@studenti.unipi.it.

Buona lettura.

0

Preliminari

0.1 Funzioni a Variazione Finita e Integrale di Stieltjes

Definizione 0.1.1: Sia $A : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione. Per $t \geq 0$ sia $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, una partizione finita di $[0, t]$. Indichiamo con $|\Delta| = \max\{t_i - t_{i-1} \mid i = 1, ..., n\}$ l'*ampiezza* o *mesh* di Δ. Inoltre chiamiamo

$$V_t^\Delta(A) = \sum_{i=0}^{n-1} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|.$$

Definizione 0.1.2 (Variazione): Sia $A : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, preso $t \geq 0$ definiamo la *variazione* di A su $[0, t]$ è

$$V_t(A) = \sup\{V_t^\Delta(A) \mid \Delta \text{ partizione finita di } (0, t]\}.$$

Dunque A è detta *a variazione finita* se per ogni $t \geq 0$ A ha variazione finita su $[0, t]$. Mentre A è detta *a variazione limitata* se $\exists M > 0$ t.c. $V_t(A) \leq M \ \ \forall t \geq 0$.

Osservazione 0.1.3: Se $A : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ è continua allora è a variazione finita.

Nel seguito considereremo sempre $A : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ almeno continua a destra.

Osservazione 0.1.4: (1) Se $\Delta \subset \Delta'$ allora $V_t^\Delta(A) \geq V_t^{\Delta'}(A)$.

(2) se $t, t' \geq 0$ con $t' \geq t$ allora $S_{t'}(A) \geq V_t(A)$.

(3) Se A è crescente allora ovviamente $V_t^\Delta(A) = A_t - A_0$ per ogni Δ partizione di $(0, t]$ e quindi $V_t(A) = A_t - A - 0$.

Proposizione 0.1.5: *Se A è ha variazione finita allora $A = I - D$ dove $I, D : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sono monotone non decrescenti.*

Dimostrazione. Basta prendere

$$I_t = \frac{V_t(A) + A_t}{2} \quad \text{e} \quad D_t = \frac{V_t(A) - A_t}{2} \ \ \forall t \geq 0$$

infatti ovviamente $I - D = A$ e se $t, t' \geq 0$ sono t.c. $t \leq t'$ allora

$$I_{t'} - I_t = \frac{(V_{t'}(A) - V_t(A)) + (A_{t'} - A_t)}{2} \geq 0$$

$$D_{t'} - D_t = \frac{(V_{t'}(A) - V_t(A)) - (A_{t'} - A_t)}{2} \geq 0$$

in quanto $V_{t'}(A) - V_t(A) \geq |A_{t'} - A_t|$ e $V_{t'}(A) - V_t(A) \geq 0$. □

Ricordiamo adesso che se $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ è non decrescente e continua a destra, allora esiste un'unica misura boreliana $\mu_F : \mathcal{B}([0, \infty)) \to [0, +\infty]$ t.c.

$$\mu_F([0, t]) = F(t) \;\; \forall t \geq 0$$

tale misura è detta *misura di Lebesgue-Stieltjes* associata ad F.

Fissiamo quindi ora $A : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione finita e continua a destra, possiamo scrivere $A = I - D$ con I e D non negative e monotone non decrescenti. Per quanto appena detto, possiamo considerare le due misure di Lebesgue-Stieltjes μ_I, μ_D associate a I e D rispettivamente. Definiamo anche la misura con segno $\mu_A = \mu_I - \mu_D$.

Definizione 0.1.6 (Integrale di Stieltjes): Sia $t > 0$. Data $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ boreliana e localmente integrabile, definiamo l'*integrale di Stieltjes* rispetto ad A di f su $(0, t]$ come

$$\int_0^t f_s \,\mathrm{d}A_s = \int_{(0,t]} f_s \,\mathrm{d}\mu_I(s) - \int_{(0,t]} f_s \,\mathrm{d}\mu_D(s) = \int_{(0,t]} f_s \,\mathrm{d}\mu_A(s).$$

Nei capitoli successivi utilizzeremo anche la notazione

$$(f \cdot A)_t = \int_0^t f_s \,\mathrm{d}A_s$$

per $t > 0$ ed adotteremo la convenzione $(f \cdot A)_0 = 0$.

Osservazione 0.1.7: Osserviamo che potrebbe essere $\mu_A(\{0\}) = A_0 > 0$, ma nella nostra definizione di $(f \cdot A)_t$ questo non ha importanza.

Osservazione 0.1.8: Osserviamo che la definizione precedente è ben posta, ossia non dipende dalle I e D non negative e non decrescenti scelte.

Infatti se $A = I - D = I' - D'$ con I, D, I', D' non negative e non decrescenti, allora chiamando, con un leggero abuso di notazione, $\mu_I, \mu_{I'}, \mu_d, \mu_{D'}$ le misure di Lebesgue-Stieltjes delle rispettive funzioni a pedice, ma ristrette all'intervallo $(0, t]$, si ha che queste sono tutte misure finite. Consideriamo quindi $\nu = \mu_I + \mu_{I'}$ e $\nu' = \mu_D + \mu_{D'}$, che sono ancora misure finite su $(0, t]$. Siano quindi

$$\mathfrak{P} = \{(a, b] \;\mid 0 \leq a < b \leq t\}$$

e

$$\mathfrak{L} = \{B \in \mathcal{B}((0, t]) \mid \nu(B) = \nu'(B)\}$$

ed osserviamo che il primo è un π-sistema, mentre il secondo è un λ-sistema. Inoltre $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{L}$, infatti se $(a, b] \in \mathfrak{P}$ si ha

$$\begin{aligned}
\nu((a, b]) &= \mu_I((a, b]) + \mu_{I'}((a, b]) = (I(b) - I(a)) + (I'(b) - I'(a)) \\
&= (I(b) + I'(b)) - (I(a) + I'(a)) = (D(b) + D'(b)) - (D(a) + D'(a)) \\
&= (D(b) - D(a)) + (D'(b) - D'(a)) = \mu_D((a, b]) + \mu_{D'}((a, b]) = \nu'((a, b]).
\end{aligned}$$

quindi per il Teorema della classe monotona si ha $\sigma(\mathfrak{P}) = \mathcal{B}((0,t]) \subset \mathfrak{L}$ e quindi $\mathcal{B}((0,t]) = \mathfrak{L}$. Allora per ogni $B \in \mathcal{B}((0,t])$ si ha

$$\int_{(0,t]} \mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\mu_I + \int_{(0,t]} \mathbf{1}_B \, d\mu_{I'} = \int_{(0,t]} \mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\nu = \nu(B) = \nu'(B) = \int_{(0,t]} \mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\mu_D + \int_{(0,t]} \mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\mu_{D'}$$

da cui segue

$$\int_{(0,t]} \mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\mu_I - \int_{(0,t]} \mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\mu_D = \int_{(0,t]} \mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\mu_{I'} - \int_{(0,t]} \mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\mu_{D'}$$

quindi tale uguaglianza vale anche per f semplice al posto di $\mathbf{1}_B$ per linearità dell'integrale e per approssimazione ed il Teorema di Beppo Levi segue anche per f non negativa e poi per f integrabile su $(0,t]$. Si ha quindi quanto voluto.

Osservazione 0.1.9: Dall'Osservazione precedente segue scegliendo $I_t = \frac{V_t(A)+A_t}{2}$ e $D_t = \frac{V_t(A)-A_t}{2}$ che

$$\left|\int_0^t f_s \,\mathrm{d}A_s\right| \leq \int_0^t |f_s| \,\mathrm{d}\mu_I + \int_0^t |f_s| \,\mathrm{d}\mu_D = \int_0^t |f_s| \,\mathrm{d}V_s(A)$$

in quanto $\mu_I + \mu_D = \mu_{V.(A)}$.

Proposizione 0.1.10: *Se $A_0 = 0$ Vale la seguente uguaglianza*

$$\mu_{V.(A)} = \|\mu_A\|$$

ossia la misura di Lebesgue-Stieltjes associata alla funzione $V.(A)$ coincide con la variazione totale della misura con segno associata ad A.

Dimostrazione. Non trattata. □

Osservazione 0.1.11: Sia $t \geq 0$. Se $f \in C^0((0,t])$ allora è possibile mostrare che vale

$$\int_0^t f_s \,\mathrm{d}A_s = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})$$

tale quantità è in tal caso detta *integrale di Riemann-Stieltjes* di f rispetto ad A.

Corollario 0.1.12: *Sia $t > 0$. Se $A \in C^1([0,\infty))$ ed $f : (0,t] \to \mathbb{R}$, allora*

$$\int_0^t f_s \,\mathrm{d}A_s = \int_0^t f_s A'_s \,\mathrm{d}s$$

Dimostrazione. (Esercizio) Infatti in tal caso, grazie al Teorema di Lagrange si ha

$$\begin{aligned} \int_0^t f_s \,\mathrm{d}A_s &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) \\ &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i} A'_{s_i}(t_{i+1} - t_i) \\ &= \int_0^t f_s A'_s \,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

in cui l'ultima uguaglianza segue dal fatto che per ogni i si ha $s_i \in (t_i, t_{i+1})$ e A' è continua, quindi

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i} A'_{s_i}(t_{i+1}-t_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i} A'_{t_i}(t_{i+1}-t_i)\right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f_{t_i}||A'_{s_i} - A'_{t_i}||t_{i+1}-t_i| \\ &\leq |\Delta| \sum_{i=0}^{n-1} |f_{t_i}||A'_{s_i} - A'_{t_i}| \\ &\leq |\Delta| \|f\|_\infty V_t(A') \overset{|\Delta|\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

□

Proposizione 0.1.13 (Associatività dell'Integrale di Stieltjes): *Siano $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ funzione localmente integrabile rispetto a $t \mapsto V_t(A)$, $g \cdot A : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ t.c. $(g \cdot A)_t = \int_0^t g_s \, \mathrm{d}A_s$ per ogni $t \geq 0$ ed $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ funzione localmente integrabile rispetto a $t \mapsto V_t(g \cdot A)$. Allora vale*

$$\int_0^t f_s \, \mathrm{d}(g \cdot A)_s = \int_0^t f_s g_s \, \mathrm{d}A_s \;\; \forall t \geq 0.$$

Dimostrazione. Essendo g localmente integrabile rispetto ad A la funzione $g \cdot A$ è a variazione finita, infatti preso $t \geq 0$ e Δ partizione finita di $(0,t]$ vale

$$\begin{aligned}V_t^\Delta(g \cdot A) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_0^{t_{i+1}} g_s \, dA_s - \int_0^{t_i} g_s \, \mathrm{d}A_s \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |g_s| \, \mathrm{d}V_s(A) \leq \int_0^t |g_s| \, \mathrm{d}V_s(A) < +\infty\end{aligned}$$

da questo segue $V_t(g \cdot A) \leq \int_0^t |g_s| \, dV_s(A) < +\infty$ prendendo il $|\Delta| \to 0$. Quindi possiamo decomporre $g \cdot A = I^g - D^g$ con I^g, D^g non negative e monotone non decrescenti, l'idea è quella di scegliere I^g e D^g nel modo giusto. Osserviamo che per ogni $t \geq 0$ vale

$$\begin{aligned}(g \cdot A)_t &= \int_0^t g^+ \, \mathrm{d}\mu_I - \int_0^t g^- \, \mathrm{d}\mu_I - \int_0^t g^+ \, \mathrm{d}\mu_D + \int_0^t g^- \, \mathrm{d}\mu_D \\ &= \left(\int_0^t g^+ \, \mathrm{d}\mu_I + \int_0^t g^- \, \mathrm{d}\mu_D \right) - \left(\int_0^t g^- \, \mathrm{d}\mu_I + \int_0^t g^+ \, \mathrm{d}\mu_D \right)\end{aligned}$$

quindi prendendo $I_t^g = \int_0^t g^+ \, d\mu_I + \int_0^t g^- \, \mathrm{d}\mu_D$ e $D_t^g = \int_0^t g^- \, \mathrm{d}\mu_I + \int_0^t g^+ \, \mathrm{d}\mu_D$ e di conseguenza

$$\mu_{I^g} = g^+ \, \mathrm{d}\mu_I + g^- \, \mathrm{d}\mu_D$$

$$\mu_{D^g} = g^- \, \mathrm{d}\mu_I + g^+ \, \mathrm{d}\mu_D$$

da cui

$$\mu_{g \cdot A} = \mu_{I^g} - \mu_{D^g} = g \, \mathrm{d}\mu_I - g \, \mathrm{d}\mu_D$$

e da questo segue quanto voluto, ossia

$$\int_0^t f_s \, \mathrm{d}(g \cdot A)_s = \int_0^t f_s g_s \, \mathrm{d}A_s.$$

□

0.2 Uniforme integrabilità

Fissiamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nel seguito I e J saranno due insiemi non vuoti.

Definizione 0.2.1 (Famiglia uniformemente integrabile di v.a.): Una famiglia di v.a. $\{X_i\}_{i \in I}$ è detta *uniformemente integrabile (UI)* se vale

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > \lambda\}}] = 0.$$

Osservazione 0.2.2: Se la famiglia è composta da una sola v.a. integrabile X allora è UI, infatti

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathbb{E}[|X| \mathbf{1}_{\{|X| > \lambda\}}] = 0$$

per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Proposizione 0.2.3: *Se $\{X_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di v.a. UI allora è limitata in $L^1(\mathbf{P})$, cioè*

$$\sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i|] < +\infty.$$

Dimostrazione. Per uniforme integrabilità si ha l'esistenza di un $\lambda > 0$ t.c.

$$\sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > \lambda\}}] \leq 1$$

allora per ogni $i \in I$ vale

$$\mathbb{E}[|X_i|] \leq \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| \leq \lambda\}}] + 1 \leq \lambda + 1$$

da cui segue quanto voluto. □

Teorema 0.2.4: *Una famiglia di v.a. $\{X_i\}_{i \in I}$ è UI se e solo se*

(1) è limitata in $L^1(\mathbf{P})$;

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall A \in \mathcal{F} \ \mathbf{P}(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_A] < \varepsilon \ \forall i \in I$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\{X_i\}_{i \in I}$ sia UI. Per la Proposizione precedente si ha la limitatezza in $L^1(\mathbf{P})$. Vediamo (2). Dato $\varepsilon > 0$ esiste $\lambda > 0$ t.c.

$$\sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > \lambda\}}] \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Inoltre se $\mathbf{P}(A) < \delta$, con $\delta > 0$ da scegliere, si ha

$$\mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{|X_i| \leq \lambda\}}] + \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > \lambda\}}] < \lambda\delta + \frac{\varepsilon}{2}$$

quindi scegliendo $\delta = \frac{\varepsilon}{2\lambda}$, si ottiene

$$\mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_A] < \varepsilon.$$

Viceversa supponiamo che valgano (1) e (2). Per la Disuguaglianza di Markov si ha

$$\mathbf{P}(|X_i| > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{\lambda} \leq \frac{\sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i|]}{\lambda}.$$

Quindi dato $\varepsilon > 0$ prendiamo un $\delta > 0$ da (2) e prendendo $\lambda \geq \frac{2\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|]}{\delta}$ si ottiene $\mathbf{P}(|X_i| > \lambda) < \delta$ e quindi per scelta di $\delta > 0$ si ha

$$\mathbb{E}[|X_i|\mathbf{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}] < \varepsilon$$

e quindi $\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|\mathbf{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}] < \varepsilon$ per $\lambda \geq \frac{2\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|]}{\delta}$, da cui segue l'uniforme integrabilità voluta. □

Corollario 0.2.5: *Se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di v.a. convergente in $L^1(\mathbf{P})$ allora tale successione è UI.*

Dimostrazione. Essendo convergente in $L^1(\mathbf{P})$ è di Cauchy in $L^1(\mathbf{P})$ ed in particolare è limitata in $L^1(\mathbf{P})$. Fissiamo ora $\varepsilon > 0$. Preso $B \in \mathcal{F}$ si ha

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbf{1}_B] \leq \mathbb{E}[|X_n - X|\mathbf{1}_B] + \mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_B] \leq \mathbb{E}[|X_n - X|] + \mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_B]$$

ed essendo $\{X\}$ UI per un'Osservazione precedente, si ha l'esistenza di un $\delta > 0$ t.c. per ogni $A \in \mathcal{F}$ con $\mathbf{P}(A) < \delta$ si ha $\mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_B] < \frac{\varepsilon}{2}$. Inoltre esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n > N$ vale $\mathbb{E}[|X_n - X|] < \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi per ogni $B \in \mathcal{F}$ con $\mathbf{P}(B) < \delta$ e per ogni $n > N$ vale

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbf{1}_B] < \frac{\varepsilon}{2} + \mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_B] < \varepsilon.$$

Poi sempre per lo stesso motivo di prima per ogni $i = 0, 1, ..., N$ esiste $\delta^{(i)} > 0$ t.c. per ogni $B \in \mathcal{F}$ con $\mathbf{P}(B) < \delta^{(i)}$ vale $\mathbb{E}[|X_i|\mathbf{1}_B] < \varepsilon$. Di conseguenza prendendo $\tilde{\delta} < \min\{\delta^{(0)}, \delta^{(1)}, ..., \delta^{(N)}, \delta\}$ si ha che

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbf{1}_B] < \varepsilon$$

per ogni $B \in \mathcal{F}$ con $\mathbf{P}(B) < \tilde{\delta}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ha quindi la tesi grazie al Teorema precedente. □

Vediamo adesso un utile generalizzazione del Teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Teorema 0.2.6 (di convergenza di Vitali): *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione UI di v.a. ed X v.a. t.c. $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$. Allora $X \in L^1(\mathbf{P})$ e $X_n \longrightarrow X$ in $L^1(\mathbf{P})$, cioè*

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[|X_n - X|] = 0.$$

Dimostrazione. (Facoltativo) Osserviamo intanto che essendo $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ allora esiste una sottosuccessione $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $X_{n_k} \longrightarrow X$ $\mathbf{P}$-q.c., quindi per il Lemma di Fatou si ha

$$\mathbb{E}[|X|] \leq \liminf_{n\to+\infty}\mathbb{E}[|X_n|] \leq M$$

con $M > 0$, dato dalla condizione (1) del Teorema 0.2.4, t.c. $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}[|X_n|] \leq M$, quindi $X \in L^1(\mathbf{P})$. Fissiamo ora $\varepsilon > 0$ e prendiamo $\delta > 0$ dato dalla condizione (2) del Teorema 0.2.4. Per la convergenza in probabilità esiste un $N \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n > N$ vale

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \delta$$

e quindi per scelta di δ si ha

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] = \mathbb{E}[|X_n - X|\mathbf{1}_{\{|X_n - X|>\varepsilon\}}] + \mathbb{E}[|X_n - X|\mathbf{1}_{\{|X_n - X|\leq\varepsilon\}}] < \mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_{\{|X_n - X|>\varepsilon\}}] + 2\varepsilon$$

per $n > N$. Inoltre similmente a prima vale sempre per il Lemma di Fatou

$$\mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}] < \varepsilon$$

dunque

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] < 3\varepsilon$$

per $n > N$, da cui segue la convergenza voluta. □

Osservazione 0.2.7: Se $\{X_i\}_{i\in I}$ e $\{Y_j\}_{j\in J}$ sono due famiglie di v.a. con la seconda UI e t.c. $\forall i \in I \;\; \exists j \in J$ t.c. $|X_i| \leq |Y_j|$ allora anche $\{X_i\}_{i\in I}$ è UI. In particolare si ottiene che il Teorema di convergenza di Vitali precedente è effettivamente una generalizzazione del noto Teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Infatti dato $\lambda > 0$ si ha

$$\mathbb{E}[|X_i|\mathbf{1}_{\{|X_i| > \lambda\}}] \leq \mathbb{E}[|Y_j|\mathbf{1}_{\{|Y_j| > \lambda\}}]$$

con $i \in I$ e $j \in J$ t.c. $|X_i| \leq |Y_j|$, dunque

$$\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|\mathbf{1}_{\{|X_i| > \lambda\}}] \leq \sup_{j\in J} \mathbb{E}[|Y_j|\mathbf{1}_{\{|Y_j| > \lambda\}}]$$

da cui segue quanto voluto.

Vediamo adesso un utile caso di famiglia di v.a. uniformemente integrabili.

Proposizione 0.2.8: *Siano $X \in L^1(\mathbf{P})$ e $\{\mathcal{G}_j\}_{j\in J}$ una famiglia di σ-algebre t.c. $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}$ per ogni $j \in J$. Allora $\{\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}_j]\}_{j\in J}$ è una famiglia di v.a. UI.*

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni $j \in J$ vale

$$|\mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{G}_j\right]| \leq \mathbb{E}\left[|X| \,|\, \mathcal{G}_j\right]$$

inoltre, essendo $\{\mathbb{E}\left[|X| \,|\, \mathcal{G}_j\right] > \lambda\} \in \mathcal{G}_j$, vale

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|X| \,|\, \mathcal{G}_j\right]\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[|X|\,|\,\mathcal{G}_j] > \lambda\}}\right] = \mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[|X|\,|\,\mathcal{G}_j] > \lambda\}}]$$

ma per la Disuguaglianza di Markov

$$\mathbf{P}(\mathbb{E}\left[|X| \,|\, \mathcal{G}_j\right] > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}\left[|X| \,|\, \mathcal{G}_j\right]]}{\lambda} = \frac{\mathbb{E}[|X|]}{\lambda}$$

ed essendo $\{|X|\}$ uniformemente inttegrabile per un Osservazione precedente, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\lambda_\varepsilon > 0$ t.c. per ogni $\lambda > \lambda_\varepsilon$

$$\mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_{\mathbb{E}[|X|\,|\,\mathcal{G}_j] > \lambda}] < \varepsilon$$

quindi mettendo insieme quanto detto e prendendo il $\sup_{j\in J}$ si ottiene

$$\sup_{j\in J} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|X| \,|\, \mathcal{G}_j\right]\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[|X|\,|\,\mathcal{G}_j] > \lambda\}}\right] < \varepsilon$$

per $\lambda > \lambda_\varepsilon$, che è l'uniforme integrabilità voluta. □

1

Processi Stocastici e Moto Browniano

1.1 Processi Stocastici

Definizione 1.1.1 (Processo stocastico): Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità, $(E, \mathcal{E})$ uno spazio misurabile e T un insieme. Un *processo stocastico* definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ a valori in $(E, \mathcal{E})$ è una famiglia di v.a. $(X_t)_{t\in T}$ in cui $X_t : \Omega \to E$ per ogni $t \in T$.

Le funzioni

$$T \ni t \longmapsto X_t(\omega) \in E$$

al variare di $\omega \in \Omega$, sono dette *traiettorie* del processo stocastico $(X_t)_{t\in T}$.

Inoltre indicheremo con $\mathcal{M}_X$ la famiglia delle *probabilità marginali* del processo stocastico $(X_t)_{t\in T}$, ossia

$$\mathcal{M}_X = \left\{\mathbf{P}^X_{t_1,\dots,t_n} \mid t_1, \dots, t_n \in T,\ n \in \mathbb{N}_+\right\}$$

in cui $\mathbf{P}^X_{t_1,\dots,t_n} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})_\#\mathbf{P}$.

Osservazione 1.1.2: Nel contesto della definizione precedente T può essere interpretato come un insieme di *tempi*, $T \subset \mathbb{R}$, o come un insieme di punti di uno *spazio*.

D'ora in poi dato uno spazio topologico (E, τ) se non specificato diversamente si considererà sempre su E la σ-algebra dei boreliani di E, $\mathcal{B}(E)$, ossia la σ-algebra su E generata dalla topologia τ.

Definizione 1.1.3 (Continuità di processi stocastici): Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ spazio di probabilità e (E, τ) uno spazio topologico. Un processo stocastico $(X_t)_{t\in T}$, con T uno spazio topologico, definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ a valori in $(E, \mathcal{B}(E))$ è detto *continuo* se la traiettoria $T \ni t \mapsto X_t(\omega)$ è continua per ogni $\omega \in \Omega$, *q.c. continuo* se la traiettoria $T \ni t \mapsto X_t(\omega)$ è continua $\mathbf{P}$-q.c., *continua a destra (sinistra)* se la traiettoria $T \ni t \mapsto X_t(\omega)$ è continua a destra (sinistra) per ogni $\omega \in \Omega$.

Definizione 1.1.4 (Versioni): Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ e $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ due spazi di probabilità e $(E, \mathcal{E})$ uno spazio misurabile. Due processi stocastici $(X_t)_{t\in T}$, definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ a valori in $(E, \mathcal{B}(E))$, e $(X'_t)_{t\in T}$, definito su $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ a valori in $(E, \mathcal{B}(E))$, si dicono essere *versioni* l'uno dell'altro se $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}_{X'}$.

Definizione 1.1.5 (Modificazioni e indistinguibilità): Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità e $(E, \mathcal{E})$ uno spazio misurabile. Due processi stocastici $(X_t)_{t\in T}$, $(X'_t)_{t\in T}$ definiti su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ a valori in $(E, \mathcal{E})$ si dicono

- uno *modificazione* dell'altro se $\mathbf{P}(X_t = X'_t) = 1 \ \ \forall t \in T$;
- *indistinguibili* se $\mathbf{P}(X_t = X'_t \ \ \forall t \in T) = 1$.

Osservazione 1.1.6: Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità e $(E, \mathcal{E})$ uno spazio misurabile. Consideriamo due processi stocastici $(X_t)_{t\in T}$, $(X'_t)_{t\in T}$ definiti su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ a valori in $(E, \mathcal{E})$, allora:

(1) $(X_t)_{t\in T}$, $(X'_t)_{t\in T}$ uno modificazione dell'altro $\Rightarrow$ $(X_t)_{t\in T}$, $(X'_t)_{t\in T}$ uno versione dell'altro.

(2) Se $T \subset \mathbb{R}$ ed è connesso, $(X_t)_{t\in T}$, $(X'_t)_{t\in T}$ sono uno modificazione dell'altro e sono q.c. continui $\Rightarrow$ $(X_t)_{t\in T}$ e $(X'_t)_{t\in T}$ sono indistinguibili.

Infatti: (1) è ovvio; mostriamo (2). Sia $N' \in \mathcal{F}$ $\mathbf{P}$-nullo t.c. le traiettorie sono continue per quegli $\omega \in \Omega \setminus N'$. Essendo i due processi uno modificazione dell'altro segue che $\forall t \in T \ \exists N_t \in \mathcal{F}$ $\mathbf{P}$-nullo t.c. $X_t(\omega) = X'_t(\omega) \ \ \forall \omega \in \Omega \setminus N_t$, ma se $t \in T$ e $(q_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T \cap \mathbb{Q}$ t.c. $q_k \to t$ si ha che se $\omega \in (\Omega \setminus N') \cap N_t \Rightarrow \omega \in (\Omega \setminus N') \cap N_{q_k}$ frequentemente in $k \in \mathbb{N}$ perché per continuità $X_{q_k}(\omega) \to X_t(\omega)$, $X'_{q_k}(\omega) \to X'_t(\omega) \ \ \forall \omega \in \Omega \setminus N'$. Allora $X_t(\omega) = X'_t(\omega) \ \ \forall \Omega \setminus N$ con $N = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap T} N_q \cup N'$ che è $\mathbf{P}$-nullo.

D'ora in poi quando parleremo di processi stocastici, se non specificato, sottintenderemo sempre lo spazio di probabilità su cui è definito. Inoltre se non specificato diversamente considereremo tutti i processi stocastici a valori in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Introduciamo adesso l'importante concetto di legge di un processo stocastico. Fissiamo uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ ed un insieme T.

Osservazione 1.1.7: Prendiamo $(X_t)_{t\in T}$ un processo stocastico a valori in $(E, \mathcal{E})$. Osserviamo che un tale processo può essere visto come una funzione $\phi_X : \Omega \to E^T$.

Definizione 1.1.8: Per $t \in T$ chiameremo $Y_t : E^T \to E$ la t-esima proiezione, cioè

$$Y_t((x_s)_{s\in T}) = x_t \ \ \forall t \in T$$

e se $S \subset T$ la funzione $Y_S : E^T \to E^S$ sarà

$$Y_S((x_t)_{t\in T}) = (x_s)_{s\in S}$$

e se $S, S' \subset T$, $S \subset S'$ la funzione $Y_{S',S} : E^{S'} \to E^S$ sarà

$$Y_{S',S}((x_t)_{t\in S'}) = (x_s)_{s\in S}$$

Chiamiamo inoltre $\mathcal{E}^{\otimes T}$ la σ-algebra su E^T generata dalle proiezioni $\{Y_t\}_{t\in T}$.

Osservazione 1.1.9: Un π-sistema che genera $\mathcal{E}^{\otimes T}$ è quello degli insiemi cilindrici, ossia

$$\mathcal{C} = \left\{ \{Y_{t_1} \in A_1, ..., Y_{t_n} \in A_n\} \mid t_i \in T, \ A_i \in \mathcal{E} \ \ \forall i = 1, ..., n, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Osservazione 1.1.10: Osserviamo che dato un processo stocastico $(X_t)_{t\in T}$ a valori in $(E, \mathcal{E})$, la funzione $\phi_X : \Omega \to E^T$ è una v.a. se muniamo E^T della σ-algebra $\mathcal{E}^T$.

Definizione 1.1.11 (Legge di un processo stocastico): La *legge* di un processo stocastico $(X_t)_{t\in T}$ a valori in $(E, \mathcal{E})$ è la misura immagine indotta dalla v.a. $\phi_X : \Omega \to E^T$ sullo spazio misurabile $(E^T, \mathcal{E}^T)$, la denoteremo con $\mu_X : \mathcal{E}^{\otimes T} \to [0, 1]$.

Osservazione 1.1.12: Per quanto detto nell'Osservazione 1.1.9, dato sempre un processo stocastico $(X_t)_{t\in T}$ a valori in $(E, \mathcal{E})$, la legge $\mu_X : \mathcal{E}^{\otimes T} \to [0, 1]$ di $(X_t)_{t\in T}$ è caratterizzata dalle probabilità

$$\mathbf{P}(X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_n} \in A_n) = \mu_X(Y_{t_1} \in A_1, ..., Y_{t_n} \in A_n)$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $t_i \in T$, $A_i \in \mathcal{E}$ per ogni $i = 1, ..., n$.

Definizione 1.1.13 (Versione canonica): La versione canonica del processo stocastico $(X_t)_{t\in T}$ a valori in $(E, \mathcal{E})$ è il processo stocastico $(Y_t)_{t\in T}$ definito sullo spazio di probabilità $(E^T, \mathcal{E}^{\otimes T}, \mu_X)$ a valori in $(E, \mathcal{E})$.

Diamo adesso un'importante definizione che ci tornerà utile nel seguito.

Definizione 1.1.14: Preso $T = [0, \infty)$, definiamo l'*operatore di shift* relativo a $t \geq 0$ come quella funzione $\theta_t : E^{[0,\infty)} \to E^{[0,\infty)}$ t.c.

$$\theta_t((x_s)_{s\geq 0}) = (x_{t+s})_{s\geq 0} \ \ \forall (x_s)_{s\geq 0} \in E^{[0,\infty)}$$

Osservazione 1.1.15: Nel caso in cui E è uno spazio topologico, l'operatore di shift manda traiettorie continue in traiettorie continue.

Definizione 1.1.16 (Processo stazionario): Un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ a valori in $(E, \mathcal{E})$ è detto *stazionario* se la sua legge μ_X non cambia con l'azione di θ_t per ogni $t \geq 0$, cioè

$$\mathbf{P}(X_{s_1} \in A_1, ..., X_{s_n} \in A_n) = \mathbf{P}(X_{s_1+t} \in A_1, ..., X_{s_n+t} \in A_n)$$

per ogni $s_1, ..., s_n, t \geq 0$ ed ogni $A_1, ..., A_n \in \mathcal{E}$.

1.2 Lo Spazio $C(T, E)$ e Legge nel Caso Continuo

Per il resto della sezione sarà $T \subset \mathbb{R}$ o un intervallo compatto o $T = [0, \infty)$, inoltre E sarà uno spazio di Banach di dimensione finita con $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. Indicheremo con $C(T, E)$ lo spazio delle funzioni continue $T \to E$.

Nel caso in cui T è un intervallo compatto considereremo su $C(T, E)$ la norma uniforme e la topologia da essa indotta, se invece $T = [0, \infty)$ considereremo su $C([0, \infty), E)$ la topologia della convergenza uniforme sui compatti (ossia la topologia compatto-aperto).

Osservazione 1.2.1: Dato un processo stocastico $(X_t)_{t\in T}$ a valori in $(E, \mathcal{E})$ q.c. continuo, la funzione $\tilde{\phi}_X : \Omega \setminus D_X \to C(T, E)$, con D_X il misurabile di probabilità nulla formato da quegli $\omega \in \Omega$ corrispondenti alle traiettorie di X discontinue, è una v.a. se muniamo $C(T, E)$ della σ-algebra dei boreliani della topologia della convergenza uniforme sui compatti $\mathcal{B}(C(T, E))$, infatti $\mathcal{B}(C(T, E)) \subset \mathcal{E}^{\otimes T}$.

Proposizione 1.2.2: *Sia $T \subset \mathbb{R}$ un intervallo compatto o $T = [0,\infty)$. Lo spazio $C(T,E)$ è uno spazio polacco.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Se T è un intervallo compatto la tesi è nota, infatti la metrica indotta dalla norma uniforme è completa e lo spazio è separabile in quanto per il Teorema di Stone-Weierstrass le funzioni $T \longrightarrow E$ con componenti date da polinomi a coefficienti razionali sono dense.

Vediamo il caso di $T = [0,\infty)$. Per $f, g \in C([0,\infty), E)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo $d_n(f,g) = \left\|(f-g)_{|[0,n]}\right\|_\infty \wedge 1$ e

$$d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}_+} 2^{-n} d_n(f,g).$$

ovviamente d è una metrica (facili verifiche) che induce in modo evidente la topologia della convergenza uniforme sui compatti, dico che d è anche completa. Osserviamo che

$$C([0,n],E) \ni (u,v) \longmapsto \|u-v\|_\infty \wedge 1$$

è una metrica completa su $C([0,n],E)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $C([0,\infty),E)$ con la metrica detta sopra, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ la successione $(f_{k|[0,n]})_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $C([0,n],E)$, quindi esiste una funzione $g_n \in C([0,\infty),E)$ t.c. $d_n(f_k,g_n) \longrightarrow 0$ per $k \longrightarrow +\infty$. Ovviamente la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è t.c. $g_n(x) = g_m(x)$ per ogni $x \leq n \wedge m$, quindi possiamo facilmente definire una funzione $g \in C([0,\infty),E)$ t.c. $g(x) = g_n(x)$ per $x \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$d(f_k,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}_+} 2^{-n} d_n(f_k,g_n) \longrightarrow 0$$

per il Teorema di convergenza dominata (da 2^{-n}, ricordare che $d_n \leq 1$) per $k \longrightarrow +\infty$. Dunque d è effettivamente completa. Vediamo la separabilità. Analogamente a quanto fatto prima si ha che l'insieme delle funzioni con componenti polinomi a coefficienti razionali è denso uniformemente in ogni $C([0,n],E)$, a questo punto presa una $f \in C([0,\infty),E)$ si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'esistenza di una successione $(f_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \subset C([0,\infty),E)$ t.c. $d_n(f_k^{(n)}, f) \longrightarrow 0$ per $k \longrightarrow +\infty$. Allora, sempre usando il Teorema di convergenza dominata, si ha che $(f_k^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a f nella metrica d. □

Proposizione 1.2.3: *Sia $\mathcal{B}_T$ la σ-algebra dei boreliani dello spazio $C(T,E)$ con la topologia uniforme o compatto-aperto, la prima se T è compatto e la seconda se $T = [0,\infty)$, e sia*

$$\mathcal{E}^{\otimes T}{}_{|C(T,E)} = \{B \cap C(T,E) \mid B \in \mathcal{E}^{\otimes T}\}.$$

Valgono le uguaglianze

$$\mathcal{E}^{\otimes T}{}_{|C(T,E)} = \sigma(Y_{t|C(T,E)} \mid t \in T) = \mathcal{B}_T.$$

Dimostrazione. (Facoltativo) La prima uguaglianza vale per definizione, vediamo la seconda. Ogni proiezione $Y_{t|C(T,E)} : C(T,E) \longrightarrow E$ è continua, infatti se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C(T,E)$ e $f_k \longrightarrow f \in C(T,E)$ in $C(T,E)$ vale che $Y_t(f) = f_k(t) \longrightarrow f(t) = Y_t(f)$ per ogni $t \in T$. In particolare $Y_{t|C(T,E)}$ è misurabile $\mathcal{B}_T \longrightarrow \mathcal{E}$, dunque $\sigma(Y_{t|C(T,E)} \mid t \in T) \subset \mathcal{B}_T$.

Vediamo ora l'inclusione opposta. Dimostriamo che se A è aperto in $C(T,E)$, allora $A \in \mathcal{E}^{\otimes T}{}_{|C(T,E)}$, da cui segue la tesi. Essendo $C(T,E)$ spazio polacco esso è metrizzabile e separabile, quindi esiste una base numerabile della topologia fatta di palle rispetto ad una metrica che topologizza lo spazio. Di conseguenza ogni aperto di $C(T,E)$ è scrivibile come unione numerabile di palle rispetto alla metrica d della dimostrazione precedente. Quindi basta dimostrare che ogni palla di d appartiene a $\mathcal{E}^{\otimes T}{}_{|C(T,E)}$ e per farlo basta dimostrare che per ogni $f_0 \in C(T,E)$ la mappa $C(T,E) \ni f \mapsto d(f_0, f)$ è $\mathcal{E}^{\otimes T}{}_{|C(T,E)}$-misurabile. Osserviamo che ci basta vedere la $\mathcal{E}^{\otimes T}{}_{|C(T,E)}$-misurabilità di $C(T,E) \ni f \mapsto d_n(f_0, f)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $f_0 \in C(T,E)$. Ma la mappa

$$C(T,E) \ni f \longmapsto Z_t(f) = \|f(t) - f_0(t)| \wedge 1 = |Y_t(f) - Y_t(f_0)| \wedge 1$$

è ovviamente $\mathcal{E}^{\otimes T}{}_{|C(T,E)}$-misurabile ed essendo

$$d_n(f_0, \cdot) = \sup_{t \in T \cap [0,n] \cap \mathbb{Q}} Z_t$$

si ha la misurabilità voluta. □

Osservazione 1.2.4 (Legge nel caso continuo): Nel contesto della definizione precedente, se E è uno spazio di Banach di dimensione finita, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ e $(X_t)_{t\in T}$ è q.c. continuo per *legge* intenderemo la misura di probabilità

$$\tilde{\mu}_X : \mathcal{B}_T \to [0,1]$$

misura immagine di $\tilde{\phi}_X : \Omega \setminus D_X \to C(T,E)$ e la denoteremo sempre con μ_X (ignorando l'ambiguità che questa scelta comporta).

Osserviamo che questa definizione è consistente con quella di legge data in precedenza. Infatti anche se $C(T,E) \notin \mathcal{E}^{\otimes T}$ (dimostrazione non trattata), si ha che $\mathcal{B}_T$ coincide con la traccia su $C(T,E)$ di $\mathcal{E}^{\otimes T}$ (Proposizione precedente) e vale che l'estensione (che è unica essendo lo spazio di misura considerato di probabilità e quindi, in particolare, finito) a misura esterna di μ_X è concentrata proprio su $C(T,E)$ ed anzi, per come sono fatti questi oggetti, coincide con $\tilde{\mu}_X$ sugli insiemi di $\mathcal{B}_T$.

1.3 Teorema di estensione di Kolmogorov

Sarà $(E, \mathcal{E})$ uno spazio misurabile.

Ci poniamo adesso il seguente problema: supponiamo che T sia un insieme infinito e supponiamo inoltre di avere assegnate delle misure di probabilità

$$\mathcal{M} = \{\mu_S \mid S \subset T \text{ finito}, \mu_S \text{ su } (E^S, \mathcal{E}^{\otimes S})\},$$

esiste una misura di probabilità μ su tutto $(E^T, \mathcal{E}^{\otimes T})$ t.c. μ_S sia la legge di Y_S rispetto a μ per ogni $S \subset T$ finito?

La risposta al problema, ovviamente, dipende da come sono strutturate le probabilità assegnate.

Definizione 1.3.1 (Famiglia proiettiva): Una famiglia di probabilità

$$\mathcal{M} = \{\mu_S \mid S \subset T \text{ finito}, \mu_S \text{ su } (E^S, \mathcal{E}^{\otimes S})\}$$

è detta *proiettiva* se $\forall S', S \subset T$ finiti, con $S' \subset S$ vale che $\mu_{S'}$ coincide con la legge di $Y_{S,S'}$ rispetto a μ_S, cioè $\mu_{S'}(A) = \mu_S(Y_{S,S'} \in A)$ per ogni $A \in \mathcal{E}^{\otimes S'}$.

Definizione 1.3.2: Uno spazio topologico E è detto *spazio polacco* se è metrizzabile in modo completo e separabile.

Teorema 1.3.3 (di estensione di Kolmogorov): *Siano T un insieme, E uno spazio polacco e $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. Data $\mathcal{M} = \{\mu_S \mid S \subset T$ finito, μ_S su $(E^S, \mathcal{E}^{\otimes S})\}$ una famiglia di probabilità proiettiva, esiste un'unica misura di probabilità μ su $(E^T, \mathcal{E}^{\otimes T})$ t.c.*

$$\mu(Y_S \in A) = \mu_S(A) \;\; \forall A \in \mathcal{E}^{\otimes S} \;\; \forall S \subset T \;\; \textit{finito}.$$

Dimostrazione. Non trattata. □

1.4 Moto Browniano

Presentiamo adesso i processi stocastici per eccellenza: i *moti browniani*.

Definizione 1.4.1 (Moto Browniano Standard): In generale chiameremo *moto browniano* (MB) *standard* (std) un processo stocastico $(B_t)_{t\geq 0}$ t.c.

(1) $B_0 = 0$ $\mathbf{P}$-q.c.;

(2) per ogni $0 \leq s < t$ vale $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$;

(3) per $\mathbf{P}$-q.o. $\omega \in \Omega$ la traiettoria $[0,\infty) \ni t \mapsto B_t(\omega) \in \mathbb{R}$ è continua;

(4) gli *incrementi* $B_t - B_s$, $0 \leq s < t$, su intervalli disgiunti sono indipendenti.

Definizione 1.4.2: Dato $d \in \mathbb{N}_+$ chiamiamo *moto browniano d-dimensionale standard*, che abbrevieremo con MB^d std, un processo $(X_t)_{t\geq 0}$ a valori in $\mathbb{R}^d$ t.c. per ogni $i = 1, ..., d$ il processo $((X_t)_i)_{t\geq 0}$ è un MB std e $((X_t)_i)_{t\geq 0}$ è indipendente da $((X_t)_j)_{t\geq 0}$ per $i \neq j$.

Definizione 1.4.3: Dato $d \in \mathbb{N}_+$ e $x \in \mathbb{R}^d$ chiamiamo *moto browniano d-dimensionale che parte da x*, che abbrevieremo con MB$^d(x)$, un processo $(X_t^x)_{t\geq 0}$ t.c.

$$X_t^x = x + X_t \;\; \forall t \geq 0$$

con $(X_t)_{t\geq 0}$ un MB^d std.

In quel che segue daremo una possibile costruzione del MB std. In corso d'opera introdurremo anche la nozione molto importante di *misura gaussiana*.

Lemma 1.4.4: *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Esiste uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ed un processo stocastico $(X(h))_{h\in\mathcal{H}}$ t.c.*

(1) la traiettoria $\mathcal{H} \ni h \mapsto X(h)(\omega) \in \mathbb{R}$ è lineare $\mathbf{P}$-q.c.;

(2) $X(h) \sim \mathcal{N}(0, \|h\|^2)$ $\forall h \in \mathcal{H}$.

Dimostrazione. Fissiamo $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base hilbertiana di $\mathcal{H}$. Per il Teorema 1.3.3 di estensione di Kolmogorov esistono uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ed un processo stocastico $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definitovi sopra fatto di v.a. iid t.c. $a_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. A questo punto poniamo per ogni $h \in \mathcal{H}$

$$X(h) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (h \cdot e_n)$$

questa serie converge in $L^2(\Omega, \mathbf{P})$. Infatti, essendo indipendenti a media nulla, le v.a. a_n sono ortogonali in $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ e sono anche unitarie (perché hanno varianza 1, quindi $\|a_n\|^2_{L^2(\Omega,\mathbf{P})} =$

$\mathbb{E}[a_n^2] = \mathrm{Var}(a_n) = 1$), di conseguenza formano un sistema ortonormale e $((h \cdot e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, dunque la serie considerata converge in $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ (in particolare $X(h)$ è gaussiana in quanto limite in $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ di gaussiane è gaussiano). Quindi per l'Uguaglianza di Parseval abbiamo

$$\|X(h)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbf{P})} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(h \cdot e_n)|^2 = \|h\|^2$$

inoltre convergendo in $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ la serie converge anche in $L^1(\Omega, \mathbf{P})$ e quindi si ottiene facilmente $\mathbb{E}[X(h)] = 0$. In particolare allora $\mathrm{Var}(X(h)) = \|h\|^2$. La linearità q.c. segue dalla linearità del prodotto scalare. □

Osservazione 1.4.5: La serie considerata nella dimostrazione del teorema precedente converge anche q.c. per il Teorema delle due serie di Kolmogorov, infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathbb{E}[a_n(h \cdot e_n)] = 0$$

$$\mathrm{Var}(a_n(h \cdot e_n)) = (h \cdot e_n)^2.$$

Osservazione 1.4.6: Nel contesto del precedente Lemma lo spazio $\{X(h) \mid h \in \mathcal{H}\}$ è un sottospazio $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ linearmente isometrico a $\mathcal{H}$, in particolare $\mathbb{E}[X(h)X(h')] = (h, h')_{\mathcal{H}}$ per ogni $h, h' \in \mathcal{H}$.

Definizione 1.4.7 (Misura gaussiana): Se $(A, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura σ-finito e $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$, preso il processo stocastico $(X(h))_{h\in\mathcal{H}}$ costruito in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del teorema precedente, la mappa $\mathcal{H} \ni h \mapsto X(h) \in L^2(\Omega, \mathbf{P})$ è detta *misura gaussiana di intensità* μ.

Se $F \in \mathcal{A}$, con $\mu(F) < +\infty$ e $h = \mathbf{1}_F$ scriveremo $X(F)$ al posto di $X(\mathbf{1}_F)$.

Osservazione 1.4.8: Nel contesto della definizione precedente, preso $(X(h))_{h\in\mathcal{H}}$ vale

$$\mathrm{Var}(X(h)) = \|h\|^2 = \|h\|^2_{L^2(A,\mu)}.$$

Quindi se $F \in \mathcal{A}$ si ha

$$\mathrm{Var}(X(F)) = \mu(F)$$

ecco perché si dice "di intensità μ". Invece se $F = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{A}$ con $\mu(F) < +\infty$, si ha $X(F) = \sum_{n\in\mathbb{N}} X(F_n)$ in $L^2(\Omega, \mathbf{P})$, ossia $\mathbf{P}$-q.c., da questo il termine "misura" anche se in realtà tale uguaglianza dipende dalla scelta degli F e $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (il quasi certamente dipende dagli insiemi scelti), quindi di solito non esiste un vero nucleo markoviano $N(\omega, \cdot)$, con $\omega \in \Omega$, t.c. $X(F)(\omega) = N(\omega, F)\ \forall F \in \mathcal{A}$.

Inoltre se $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$, con $\mu(F_1), \mu(F_2) < +\infty$, vale (per quanto detto in un Osservazione precedente)

$$\mathbb{E}[X(F_1)X(F_2)] = \mu(F_1 \cap F_2)$$

quindi se $\mu(F_1 \cap F_2) = 0$, le v.a. $X(F_1)$ e $X(F_2)$ sono scorrelate e quindi indipendenti essendo gaussiane.

Definizione 1.4.9 (White noise): Se $A = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ e $\mu = \mathcal{L}^d$, la misura gaussiana W di intensità $\mathcal{L}^d$ è detta *white noise*.

Consideriamo adesso per la costruzione del nostro moto browniano $\mathcal{H} = L^2([0, \infty), \mathcal{L}^1)$ e definiamo $\tilde{B}_t = X([0, t])\ \forall t \in [0, \infty)$. Osserviamo che:

- per ogni $t \geq 0$ vale $\tilde{B}_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ ed in particolare $\mathbf{P}(\tilde{B}_0 = 0) = 1$;
- se $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ abbiamo $\tilde{B}_{t_1} - \tilde{B}_{s_1} = X([s_1,t_1])$ e $\tilde{B}_{t_2} - \tilde{B}_{s_2} = X([s_2,t_2])$ sono indipendenti, infatti sono scorrelate essendo $\mathcal{L}^1([s_1,t_1] \cap [s_2,t_2]) = 0$ (quindi sono indipendenti per quanto detto nell'Osservazione 1.4.8);
- per ogni $s,t \geq 0$ vale $\mathbb{E}[\tilde{B}_t\tilde{B}_s] = s \wedge t$, infatti se wlog $s \leq t$ si ha

$$\mathbb{E}[\tilde{B}_t\tilde{B}_s] = \mathbb{E}[(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s + \tilde{B}_s)\tilde{B}_s] = \mathbb{E}[\tilde{B}_s^2] + \mathbb{E}[(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)(\tilde{B}_s - \tilde{B}_0)] = \mathbb{E}[\tilde{B}_s^2] = s.$$

Definizione 1.4.10 (Moto browniano standard grezzo): Un processo $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ derivante dalla costruzione sopra è chiamato *moto browniano standard grezzo*.

Adesso vogliamo dare ad un moto browniano standard grezzo $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ la continuità q.c. delle traiettorie. Enunciamo quindi un teorema di Kolmogorov che ha un importanza enorme nella nostra teoria, la dimostrazione è rimandata ad una prossima sezione.

Teorema 1.4.11 (di continuità di Kolmogorov, versione debole): *Se $(X_t)_{t\geq 0}$ è un processo che soddisfa la seguente condizione*

$$\exists \alpha, \beta, C > 0 \ \text{ t.c. } \ \mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq C|t-s|^{1+\beta}$$

allora X ammette una modificazione q.c. continua.

Si arriva quindi al teorema della sezione.

Teorema 1.4.12 (Esistenza del moto browniano standard): *Esiste un processo stocastico $(B_t)_{t\geq 0}$ q.c. continuo, a incrementi indipendenti e t.c. per ogni $t \geq 0$ la v.a. $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. In altre parole esiste un moto browniano.*

Dimostrazione. Prendiamo il nostro moto browniano grezzo $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ si ha

$$\mathbb{E}[|\tilde{B}_t - \tilde{B}_s|^4] = 3|t-s|^2$$

quindi possiamo applicare il Teorema 1.4.11 di continuità di Kolmogorov per passare ad una sua modificazione $(B_t)_{t\geq 0}$ q.c. continua. Tale modificazione è t.c. $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, |t-s|)$ per ogni $t, s \geq 0$ (perché per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vale $\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A(B_t - B_s)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)\right]$). Inoltre continua ad avere incrementi indipendenti (infatti gli incrementi come detto in precedenza rimangono gaussiani, quindi sono indipendenti se e solo se sono scorrelati e $\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)(B_{t'} - B_{s'})\right] = \mathbb{E}\left[(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)(\tilde{B}_{t'} - \tilde{B}_{s'})\right]$ per ogni $s, t, s', t' \geq 0$). □

Vediamo adesso alcune importanti trasformazioni del moto browniano.

Proposizione 1.4.13: *Sia $(B_t)_{t\geq 0}$ MB std, allora valgono le seguenti:*

(1) per ogni $s \geq 0$ il processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ dove $X_t = B_{t+s} - B_s$ è un MB std;

(2) $(-B_t)_{t\geq 0}$ è un MB std;

(3) per ogni $c > 0$ il processo $(c^{-1}B_{c^2 t})_{t\geq 0}$ è un MB std.

Dimostrazione. Semplici verifiche. □

Avendo introdotto il concetto di MB std possiamo adesso definire uno spazio notevole nell'ambito calcolo stocastico.

Definizione 1.4.14 (Spazio di Wiener): Sia $\mathcal{B}_{[0,\infty)}$ la σ-algebra dei boreliani dello spazio $C([0,\infty),\mathbb{R})$ munito della topologia compatto-aperto e $(B_t)_{t\geq 0}$ MB std. La legge di $(B_t)_{t\geq 0}$

$$W = \mu_B : \mathcal{B}_{[0,\infty)} \to [0,1]$$

è detta *misura di Wiener* e lo spazio di probabilità $\big(C([0,\infty),E),\mathcal{B}_{[0,\infty)},W\big)$ è detto *spazio di Wiener*.

1.5 Processi Gaussiani

Introduciamo l'oggetto principale della sezione.

Definizione 1.5.1 (Processo gaussiano): Un processo stocastico $(X_t)_{t\in T}$, $T \subset \mathbb{R}$ intervallo, a valori in $\mathbb{R}^d$ è detto *gaussiano* se per ogni $t_1,...,t_n \geq 0$ la v.a. $(X_{t_1},...,X_{t_n})$ è matrice gaussiana, cioè per ogni $s \in \mathbb{R}^n$ la v.a. $(s\cdot(X_{t_1},...,X_{t_n}))$ è gaussiana.

Nonostante la definizione generale appena data nel seguito della sezione tratteremo processi a valori in $\mathbb{R}$. E sarà sempre $T \subset \mathbb{R}$ un intervallo.

Osservazione 1.5.2: Un moto browniano è un processo gaussiano.

Segue dal fatto che ogni v.a. del processo è gaussiana e dall'indipendenza degli incrementi (quindi ogni vettore aleatorio costruito a partire da un moto browniano avrà componenti che si compongono come combinazione lineare di v.a. gaussiane centrate ed indipendenti, quindi forma un vettore gaussiano).

Definizione 1.5.3: Dato un processo gaussiano $(X_t)_{t\in T}$ definiamo la sua *funzione di media* come $m_X : T \to \mathbb{R}$ t.c.

$$m_X(t) = \mathbb{E}[X_t] \quad \forall t \in T$$

e definiamo la sua *funzione di covarianza* come $\Gamma_X : T^2 \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\Gamma_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s,X_t) \quad \forall s,t \in T.$$

Proposizione 1.5.4: *La funzione di covarianza di un processo gaussiano $(X_t)_{t\in T}$ è semidefinita positiva, cioè per ogni $t_1,...,t_n \in T$ la matrice $(\Gamma_X(t_i,t_j))_{i,j\in[n]}$ è simmetrice è semidefinita positiva.*

Viceversa date due funzioni $\Gamma : T^2 \to \mathbb{R}$ semidefinita positiva e $m : T \to \mathbb{R}$, esiste un processo gaussiano $(X_t)_{t\in T}$ t.c. $m = m_X$ e $\Gamma = \Gamma_X$.

Dimostrazione. Vediamo che Γ_X è semidefinita positiva. Sia $v = (v_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\begin{aligned} v^t\Gamma_X v = \sum_{i,j=1}^n v_i\Gamma_X(t_i,t_j)v_j &= \sum_{i,j=1}^n v_i \mathrm{Cov}(X_{t_i},X_{t_j})v_j \\ &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n v_iX_{t_i}, \sum_{j=1}^n v_jX_{t_j}\right) \\ &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n v_iX_{t_i}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Vediamo ora il viceversa dell'enunciato. Lavoriamo su $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes T})$. Dato $S \subset T$ finito, $S = \{t_1, ..., t_n\}$ poniamo

$$\mu_S = \mathcal{N}\left((m(t_i))_{i=1}^n, (\Gamma(t_i, t_j))_{i,j=1}^n\right)$$

misura di probabilità su $\mathbb{R}^S$. Osserviamo ora che se $S', S \subset T$ sono finiti, $S \subset S'$, allora per costruzione la legge di $Y_{S,S'}$ rispetto a $\mu_{S'}$ è proprio μ_S, dunque possiamo applicare il Teorema 1.3.3 di estensione di Kolmogorov per trovare un'unica misura di probabilità μ su $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes T})$ con distribuzioni marginali proprio $\{\mu_S \mid S \subset T, S \text{ finito}\}$. □

Proposizione 1.5.5: *La legge di un processo gaussiano è identificata dalle funzioni di media e di covarianza.*

Dimostrazione. Siano $(X_t)_{t\in T}$, $(\tilde{X}_t)_{t\in T}$ due processi gaussiani con le stesse funzioni di media e di covarianza, allora hanno anche le stesse distribuzioni marginali, quindi per ogni $t_1, ..., t_n \in T$ ed ogni $B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vale

$$\mathbf{P}(X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_n) = \mathbf{P}(\tilde{X}_{t_1} \in B_1, ..., \tilde{X}_{t_n} \in B_n)$$

ossia le due leggi coincidono sugli insiemi cilindirici di $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes T}$ che generano tutto $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes T}$, quindi la tesi segue grazie ad una semplice applicazione del Teorema delle classi monotone. □

Proposizione 1.5.6 (Inversione temporale del MB): *Se $(B_t)_{t\geq 0}$ è un MB std allora il processo $(X_t)_{t\geq 0}$ dove $X_0 = 0$ e $X_t = tB_{t^{-1}}$ per $t > 0$ è un MB std.*

Dimostrazione. Per definizione $X_0 = 0$. Non è difficile osservare che $(X_t)_{t\geq 0}$ è gaussiano e la sua legge è la stessa di un MB std, infatti la funzione di media è nulla e quella di covarianza coincide con quella nel MB std (semplice verifica), in particolare gli incrementi sono indipendenti e gaussiani come quelli di un MB std. Rimane da provare la continuità **P**-q.c. delle traiettorie. Chiaramente le traiettorie sono **P**-q.c. continue su $(0, +\infty)$, quindi basta vedere che la traiettoria è **P**-q.c. continua in 0. Essendo $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ numerabile, per quanto detto in precedenza sulla legge di $(X_t)_{t\geq 0}$ si ha

$$\mathbf{P}\left(\lim_{\substack{q\to 0^+\\ q\in\mathbb{Q}_+}} X_q = 0\right) = \mathbf{P}\left(\lim_{\substack{q\to 0^+\\ q\in\mathbb{Q}_+}} B_q = 0\right) = 1$$

quindi, essendo $(X_t)_{t\geq 0}$ continuo su $(0, +\infty)$ e $\mathbb{Q}_+ \cap (0, +\infty)$ denso in $(0, +\infty)$, si ottiene

$$\mathbf{P}\left(\lim_{t\to 0^+} X_t = 0\right) = \mathbf{P}\left(\lim_{\substack{q\to 0^+\\ q\in\mathbb{Q}_+}} X_q = 0\right) = 1.$$

□

Corollario 1.5.7 (Legge dei grandi numeri per il MB): *Se $(B_t)_{t\geq 0}$ è un MB std allora*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad \mathbf{P}\text{-}q.c..$$

Dimostrazione. Se $(X_t)_{t\geq 0}$ è il MB std definito nell'enunciato della Proposizione precedente, si ha **P**-q.c.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{B_t}{t} = \lim_{t\to+\infty} X_{\frac{1}{t}} = 0.$$

□

Esempio 1.5.8: Se $T = [0, \infty)$, $m(t) = 0 \ \forall t \geq 0$ e $\Gamma(s,t) = s \wedge t$ allora questa è semidefinita positiva, infatti

$$\Gamma(s,t) = s \wedge t = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,s]}(x)\mathbf{1}_{[0,t]}(x)\,\mathrm{d}x$$

che è il prodotto scalare in $L^2(T, , \mathcal{L}^1)$ tra due funzioni. Quindi è ben definito il processo gaussiano associato che è proprio il moto browniano grezzo $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$.

Esempio 1.5.9 (Ponte browniano): Prendiamo $T = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $m(t) = 0 \ \forall t \in [0,1]$ e $\Gamma(s,t) = s \wedge t - st \ \forall s,t \in [0,1]$, allora questa è semidefinita positiva, infatti

$$\begin{aligned}\Gamma(s,t) = s \wedge t - st &= \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,s]}(x)\mathbf{1}_{[0,t]}(x)\,\mathrm{d}x - \left[\int_0^1 \mathbf{1}_{[0,s]}\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t]}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \int_0^1 \left[\mathbf{1}_{[0,s]}(x) - \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,s]}(y)\,\mathrm{d}y\right]\left[\mathbf{1}_{[0,t]}(x) - \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t]}(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

che è il prodotto scalare in $L^2(T, \mathcal{L}^1)$ tra due funzioni. Dunque è ben definito il processo gaussiano associato $(X_t)_{t\in[0,1]}$ che è una versione del cosiddetto *ponte browniano* in $[0,1]$.

Esempio 1.5.10 (White noise gaussiano): Se $T = [0,\infty)$, $m(t) = 0 \ \forall t \geq 0$ e $\Gamma(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{se } s = t \\ 0 & \text{se } s \neq t \end{cases}$, si ha ovviamente che questa è semidefinita positiva ed il proceso gaussiano associato è detto *white noise gaussiano* (attenzione non è la misura gaussiana white noise definita nella sezione precedente).

Esempio 1.5.11: Sia $\beta > 0$, consideriamo la misura di probabilità $\mu = h\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1$ con

$$h(x) = \frac{1}{\pi\beta(1 + (\beta^{-1}x)^2)}$$

allora la sua funzione caratteristica è

$$\varphi_\mu(t) = e^{-\beta|t|} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

dunque $\Gamma(s,t) = \varphi_\mu(t-s) = e^{-\beta|t-s|}$, per $t, s \geq 0$, è semidefinita positiva perché

$$\varphi_\mu(t-s) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-isx}\,\mathrm{d}\mu(x)$$

che è non negativa, in quanto è il prodotto hermitiano di $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{L}^1; \mathbb{C})$ di una funzione per sé stessa.

Esempio 1.5.12 (Processi di Ornstein-Uhlenbeck stazionari): Cogliamo adesso l'opportunità di presentare uno speciale gruppo di processi gaussiani, utili soprattutto nell'ambito delle equazioni differenziali stocastiche.

Un processo gaussiano $(X_t)_{t\geq 0}$ t.c. $\mathbb{E}[X_t] = 0 \ \forall t \geq 0$ e $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = Ce^{-\beta|t-s|}$ è detto *di Ornstein-Uhlenbeck stazionario* di parametri $C > 0$ e $\beta > 0$.

1.6 Proprietà Fini del Moto Browniano

In questa sezione dimostreremo il Teorema di continuità di Kolmogorov e presenteremo altre proprietà "fini" del MB std.

Preso $\alpha \in (0,1)$, nel seguito useremo la seguente notazione per la seminorma C^α di una $f : [a,b) \to E$ con $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ uno spazio normato:

$$[f]_{C^\alpha} = \sup_{\substack{s,t\in[a,b)\\ s\neq t}} \frac{\|f(t)-f(s)\|}{|t-s|^\alpha}.$$

Teorema 1.6.1 (di continuità di Kolmogorov): *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra. Se $(X_t)_{t\in I}$ è un processo stocastico a valori in uno spazio di Banach $(E, \|\cdot\|)$ t.c. $\exists c, \varepsilon, \gamma > 0$ che realizzano*

$$\mathbb{E}\left[\|X_t - X_s\|^\gamma\right] \leq c|t-s|^{1+\varepsilon} \quad \forall t,s \in I$$

allora per ogni $\alpha < \frac{\varepsilon}{\gamma}$ si ha l'esistenza di una sua modificazione $(\tilde{X}_t)_{t\in I}$ con traiettorie $\mathbf{P}$-q.c. α-hölderiane su I, cosa che equivale a dire

$$\mathbb{E}\left[[\tilde{X}]^\gamma_{C^\alpha}\right] < +\infty.$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo $I = [0,1)$. Per $m \in \mathbb{N}$ poniamo

$$D_m = \{2^{-m}j \mid j = 0, 2, ..., 2^m - 1\}$$

e $D = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m$. Definiamo poi per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$\Delta_m = \{(s,t) \in D_m \times D_m \mid |s-t| = 2^{-m}\}$$

(cioè le coppie formate da due punti "adiacenti" di D_m) ed osserviamo che $|\Delta_m| \leq 22^m = 2^{m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ (ogni elemento di D_m ha al più due elementi a lui adiacenti di D_m, il precedente e il successivo). Poniamo poi per ogni $i \in \mathbb{N}$

$$K_i = \sup_{(s,t)\in\Delta_i} \|X_s - X_t\|.$$

Dalle ipotesi si ottiene

$$\mathbb{E}\left[K_i^\gamma\right] \leq \sum_{(s,t)\in\Delta_i} \mathbb{E}\left[\|X_s - X_t\|^\gamma\right] \leq 2^{i+1}c2^{-i(1+\varepsilon)} = J2^{-i\varepsilon}$$

con $J = 2c$. Prendiamo $s, t \in D$, $s < t$, t.c. $|s-t| \leq 2^{-n}$, con $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$s_m \in \operatorname{argmin}\{|u-s| \mid u \in D_m,\ \ u \geq s\}$$

$$t_m \in \operatorname{argmin}\{|u-t| \mid u \in D_m,\ \ u \leq t\}$$

osserviamo che le successioni $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ godono delle seguenti proprietà:

- $s_n = t_n$ oppure $(s_n, t_n) \in \Delta_n$ (in quanto $|s-t| \leq 2^{-n}$);
- in generale $(s_{m+1}, s_m) \in \Delta_{m+1}$ o $s_m = s_{m+1}$ e $(t_{m+1}, t_m) \in \Delta_{m+1}$ o $t_m = t_{m+1}$;
- se m è sufficientemente grande allora $s_m = s$ e $t_m = t$ (in quanto $s, t \in D$).

Quindi vale

$$
\begin{aligned}
\|X_t - X_s\| &= \left\|(X_t - X_{t_n}) + (X_{t_n} - X_{s_n}) + (X_{s_n} - X - s)\right\| \\
&= \left\| \sum_{m\geq n} (X_{t_{m+1}} - X_{t_m}) + (X_{t_n} - X_{s_n}) + \sum_{m\geq n} (X_{s_{m+1}} - X_{s_m}) \right\| \\
&\leq \sum_{m\geq n} \|X_{t_{m+1}} - X_{t_m}\| + \|X_{t_n} - X_{s_n}\| + \sum_{m\geq n} \|X_{s_{m+1}} - X_{s_m}\| \\
&\leq 2 \sum_{m>n} K_m + K_n
\end{aligned}
$$

da cui segue

$$
\begin{aligned}
\sup_{\substack{s,t\in D\\ s\neq t}} \frac{\|X_s - X_t\|}{|s-t|^\alpha} &\leq \sup_{\substack{s,t\in D\\ s\neq t\\ 2^{-n-1}<|t-s|\leq 2^{-n}}} \frac{\|X_s - X_t\|}{2^{(-n-1)\alpha}} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[2 \sum_{m>n} K_m + K_n \right] 2^{(n+1)\alpha} \\
&\leq 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\geq n} K_m 2^{(m+1)\alpha} \\
&\leq 2 \sum_{m\in\mathbb{N}} K_m 2^{(m+1)\alpha}.
\end{aligned}
$$

Dividiamo adesso due casi.

($\gamma \geq 1$). Sia $\alpha < \frac{\varepsilon}{\gamma}$, otteniamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sup_{\substack{s,t\in D\\ s\neq t}} \frac{\|X_s - X_t\|}{|s-t|^\alpha} \right)^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}} &\leq 2 \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[K_m^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}} 2^{(m+1)\alpha} \\
&\leq 2 J^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-\frac{m\varepsilon}{\gamma}} 2^{(m+1)\alpha} \\
&= 2^{\alpha+1} J^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{m\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)} < +\infty
\end{aligned}
$$

in quanto $\alpha - \frac{\varepsilon}{\gamma} < 1$.

($\gamma < 1$). Sia $\alpha < \frac{\varepsilon}{\gamma}$, usando che per $a, b > 0$ e $\gamma \in (0,1)$ vale $(a+b)^\gamma \leq a^\gamma + b^\gamma$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sup_{\substack{s,t\in D\\ s\neq t}} \frac{\|X_s - X_t\|}{|s-t|^\alpha} \right)^\gamma \right] &\leq 2 \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[K_m^\gamma\right] 2^{(m+1)\alpha\gamma} \\
&\leq 2^\gamma J \sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-m\varepsilon} 2^{(m+1)\alpha\gamma} \\
&\leq 2^{\gamma(\alpha+1)} J \sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{m(\alpha\gamma - \varepsilon)} < +\infty
\end{aligned}
$$

in quanto $\alpha\gamma - \varepsilon < 1$.

In ogni caso esiste un $N \subset \Omega$ misurabile con $\mathbf{P}(N) = 0$ e t.c. per ogni $\omega \in N^c$ la traiettoria (ristretta a D) $D \ni t \mapsto X_t(\omega)$ è uniformemente continua (in particolare α-hölderiana) ed esiste quindi un'unica estensione $\widetilde{X}_t(\omega) = \lim_{\substack{s\to t\\ s\in D}} X_s(\omega)$ a $\overline{D} = [0,1]$. Dunque definiamo per ogni $\omega \in \Omega$ ed ogni $t \in [0,1)$ il processo $(\widetilde{X}_t)_{t\in[0,1)}$ nel seguente modo

$$
\widetilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{\substack{s\to t\\ s\in D}} X_s(\omega) & \text{se } \omega \in N^c \\ 0 & \text{se } \omega \in N \end{cases}
$$

(non importa veramente cosa succede su N). Dico che $(\widetilde{X}_t)_{t\in[0,1)}$ è la modificazione cercata, infatti per ogni $t \in [0,1)$, usando la Disuguaglianza di Fatou si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|X_t - \widetilde{X}_t\|^\gamma\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{N^c}\|X_t - \lim_{\substack{s\to t\\ s\in D}} X_s\|^\gamma\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{N^c}\lim_{\substack{s\to t\\ s\in D}}\|X_t - X_s\|^\gamma\right]\\ &\le \liminf_{\substack{s\to t\\ s\in D}} \mathbb{E}\left[\|X_t - X_s\|^\gamma\right]\\ &\le \liminf_{\substack{s\to t\\ s\in D}} c|s-t|^{1+\varepsilon} = 0\end{aligned}$$

dunque $X_t = \widetilde{X}_t$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \in [0,1)$. □

Corollario 1.6.2: *Il MB grezzo $(\tilde{B}_t)_{t\ge 0}$ ammette una modificazione α-hölderiana per ogni $\alpha < \frac{1}{2}$. Di conseguenza il MB std può essere preso con traiettorie α-hölderiane per ogni $\alpha < \frac{1}{2}$.*

Dimostrazione. Presi $t, s \ge 0$ e $\gamma > 0$ vale che $\left[\frac{|\tilde{B}_t - \tilde{B}_s|}{\sqrt{|t-s|}}\right]^\gamma \sim \mathcal{N}(0,1)$, dunque

$$\mathbb{E}\left[\left[\frac{|\tilde{B}_t - \tilde{B}_s|}{\sqrt{|t-s|}}\right]^\gamma\right]|t-s|^{\frac{\gamma}{2}} = c|t-s|^{\frac{\gamma}{2}}$$

dunque con l'obbiettivo di usare il Teorema 1.6.1 di continuità di Kolmogorov poniamo $1+\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$, quindi per $\alpha < \frac{\varepsilon}{\gamma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$ si ha l'esistenza di una modificazione α-hölderiana, per concludere osserviamo che per $\gamma \to +\infty$ vale $\alpha \to \frac{1}{2}$, dunque si ha la tesi in quanto γ è un qualsiasi numero in $(0, +\infty)$. □

Osservazione 1.6.3: Sia $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, allora valgono le seguenti disuguaglianze sulla coda, se $z > 0$

$$\frac{z}{z^2+1}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \le \mathbf{P}(Z \ge z) \le \frac{1}{z}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Infatti per $y \ge z$ vale $\frac{y}{z} \ge 1$, dunque

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z \ge z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^{+\infty} \frac{y}{z}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{z}\left[-e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_z^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{z}e^{-\frac{z^2}{2}}.\end{aligned}$$

Invece definendo $f(z) = \mathbf{P}(Z \ge z) - \frac{z}{z^2+1}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ otteniamo che $f(0) = \mathbf{P}(Z \ge 0) > 0$ ed inoltre è ovviamente derivabile con derivata

$$f'(z) = -\frac{2e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}(z^2+1)^2} < 0$$

e $\lim_{z\to+\infty} f(z) = 0$, dunque $f(z) > 0$ per ogni $z > 0$.

Teorema 1.6.4 (del modulo di continuità di Lévy): *Sia* $(B_t)_{t\geq 0}$ *MB std e*

$$h(t) = \sqrt{2t\log\left(\frac{1}{t}\right)}, \quad \textit{per } t \in (0,1)$$

allora si ha

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{u\to 0^+}\left[\sup_{\substack{s,t\in[0,1)\\ 0<|s-t|<u}} \frac{|B_t - B_s|}{h(u)}\right] = 1\right) = 1.$$

Dimostrazione. Prendiamo D_n per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ e D come nella dimostrazione del Teorema 1.6.1 di continuità di Kolmogorov. Prendiamo poi $\varepsilon, \delta, \eta \in (0,1)$ e definiamo

$$\Delta_n^\delta = \left\{(s,t) \mid s,t \in D_n,\ \ 0 < |s-t| < 2^{-n(1-\delta)}\right\}$$

osserviamo che $|\Delta_n^\delta| \leq 22^n 2^{-n+n\delta} = 22^{n\delta} \leq 2^{n(1+\delta)}$. Vale ponendo $Z = \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{|s-t|}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\max_{(s,t)\in\Delta_n^\delta} \frac{|B_t - B_s|}{h(|s-t|)} \geq 1+\varepsilon\right) &\leq \sum_{(s,t)\in\Delta_n^\delta} \mathbf{P}\left(\frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{2|s-t|\log\left(\frac{1}{|s-t|}\right)}} \geq 1+\varepsilon\right) \\
&= \sum_{(s,t)\in\Delta_n^\delta} \mathbf{P}\left(|Z| \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2\log\left(\frac{1}{|s-t|}\right)}\right) \\
\text{(Oss. 1.6.3)}\ &\leq \sum_{(s,t)\in\Delta_n^\delta} \frac{1}{(1+\varepsilon)\sqrt{2\log\left(\frac{1}{|s-t|}\right)}} \frac{\exp\left(-(1+\varepsilon)^2\log\left(\frac{1}{|s-t|}\right)\right)}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

poi usando che $|s-t| < 2^{-n(1-\delta)}$ quando $(s,t) \in \Delta_n^\delta$ e ponendo

$$c(\varepsilon,\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+\varepsilon)\sqrt{2(1-\delta)\log(2)}}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\max_{(s,t)\in\Delta_n^\delta} \frac{|B_t - B_s|}{h(|s-t|)} \geq 1+\varepsilon\right) &\leq \sum_{(s,t)\in\Delta_n^\delta} \frac{1}{(1+\varepsilon)\sqrt{2\log\left(2^{n(1-\delta)}\right)}} \frac{\exp\left(-(1+\varepsilon)^2\log\left(2^{n(1-\delta)}\right)\right)}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sum_{(s,t)\in\Delta_n^\delta} \frac{c(\varepsilon,\delta)}{\sqrt{n}} 2^{-n(1+\varepsilon)^2(1-\delta)} \\
(|\Delta_n^\delta| \leq 2^{n(1+\delta)})\ &\leq \frac{c(\varepsilon,\delta)}{\sqrt{n}} 2^{n[(1+\delta)-(1+\varepsilon)^2(1-\delta)]}
\end{aligned}$$

e se scegliamo ε e δ t.c. $1+\delta < (1+\varepsilon)^2(1-\delta)$ si ottiene

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_+} \mathbf{P}\left(\max_{(s,t)\in\Delta_n^\delta} \frac{|B_t - B_s|}{h(|s-t|)} \geq 1+\varepsilon\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{c(\varepsilon,\delta)}{\sqrt{n}} 2^{n[(1+\delta)-(1+\varepsilon)^2(1-\delta)]} < +\infty$$

quindi per il Lemma di Borel-Cantelli si ha l'esistenza di un $N \subset \Omega$, misurabile con $\mathbf{P}(N) = 0$ t.c. per ogni $\omega \in N^c$ $\exists n(\omega) \in \mathbb{N}_+$ t.c.

$$\max_{(s,t)\in\Delta_n^\delta} \frac{|B_t(\omega) - B_s(\omega)|}{h(|s-t|)} < 1 + \varepsilon \quad \forall n \geq n(\omega).$$

Non è difficile provare che h è crescente in un intorno destro di 0, facciamo lo sia sull'intervallo $[0, \xi)$. Prendiamo $s, t \in D$ t.c. spg $s \leq t$ e supponiamo sia $2^{-n} < 2^{-(n+1)(1-\delta)} \leq |s-t| \leq 2^{-n(1-\delta)} < \xi$ (basta prendere n sufficientemente grande, se $n > \frac{1-\delta}{\delta}$ si ha la prima disuguaglianza stretta, poi posso ingrandirlo ancora di più per ottenere anche le altre). Poniamo per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$s_m \in \operatorname{argmin}\{|u-s| \mid u \in D_m, \;\; u \geq s\}$$

$$t_m \in \operatorname{argmin}\{|u-t| \mid u \in D_m, \;\; u \leq t\}$$

ed osserviamo che valgono le tre proprietà:

(1) $|s_n - t_n| < |s-t|$ (in quanto $|s-t| > 2^{-n}$ e $s_n, t_n \in D_n$);

(2) in generale $|s_{m+1} - s_m| = 2^{-(m+1)}$ o $s_m = s_{m+1}$ e $|t_{m+1} - t_m| = 2^{-(m+1)}$ o $t_m = t_{m+1}$;

(3) se m è sufficientemente grande allora $s_m = s$ e $t_m = t$ (in quanto $s, t \in D$).

Allora vale per ogni $\omega \in N^c$

$$\begin{aligned} B_t(\omega) - B_s(\omega) &= (B_t(\omega) - B_{t_n}(\omega)) + (B_{t_n}(\omega) - B_{s_n}(\omega)) + (B_{s_n}(\omega) - B_s(\omega)) \\ &= \sum_{m\geq n} (B_{t_{m+1}}(\omega) - B_{t_m}(\omega)) + (B_{t_n}(\omega) - B_{s_n}(\omega)) + \sum_{m\geq n} (B_{s_{m+1}}(\omega) - B_{s_m}(\omega)) \end{aligned}$$

e scegliendo, a meno di ingrandirlo ancora di più, $n \geq n(\omega)$ otteniamo (usando come è stato scelto $n(\omega)$ e le proprietà (1) e (2) sopra) le seguenti disuguaglianze

$$\begin{aligned} |B_t(\omega) - B_s(\omega)| &\leq \left[2 \sum_{m\geq n} h(|t_{m+1} - t_m|) + h(|t_n - s_n|)\right] (1+\varepsilon) \\ \text{(Propr. (1) e (2))} \;\; &\leq \left[2 \sum_{m\geq n} h(2^{-(m+1)}) + h(|s-t|)\right] (1+\varepsilon). \end{aligned}$$

Inoltre per ogni $\eta, \delta > 0$ esiste $\overline{n}(\eta, \delta) = \overline{n} \in \mathbb{N}_+$ t.c. $\forall n \geq \overline{n}$ vale

$$\sum_{m\geq n} h(2^{-(m+1)}) \leq \eta h(2^{-(n+1)(1-\delta)})$$

quindi, a meno di ingrandirlo ulteriormente, prendiamo $n \geq \max(n(\omega), \overline{n})$ per avere

$$\begin{aligned} |B_t(\omega) - B_s(\omega)| &\leq \left[2\eta h(2^{-(n+1)(1-\delta)}) + h(|s-t|)\right] (1+\varepsilon) \\ (2^{-(n+1)(1-\delta)} \leq |s-t| \leq 2^{-n(1-\delta)} < \xi) \;\; &\leq [2\eta + 1]\,(1+\varepsilon) h(|s-t|) \end{aligned}$$

che è una stima che non dipende in nessun modo da n. A questo punto, potendo essere ε, η e δ arbitrariamente piccoli, otteniamo

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{u\to 0^+} \left[\sup_{\substack{s,t\in[0,1) \\ 0<|s-t|<u}} \frac{|B_t - B_s|}{h(u)}\right] \leq 1 + \varepsilon\right) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

ma se

$$A_\varepsilon = \left\{ \limsup_{u\to 0^+} \left[\sup_{\substack{s,t\in[0,1)\\0<|s-t|<u}} \frac{|B_t - B_s|}{h(u)} \right] \le 1+\varepsilon \right\}$$

si ha $A_{\varepsilon'} \subset A_\varepsilon$ per ogni $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ e

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{2^{-n}} = \left\{ \limsup_{u\to 0^+} \left[\sup_{\substack{s,t\in[0,1)\\0<|s-t|<u}} \frac{|B_t - B_s|}{h(u)} \right] \le 1 \right\}$$

quindi si ottiene

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{u\to 0^+} \left[\sup_{\substack{s,t\in[0,1)\\0<|s-t|<u}} \frac{|B_t - B_s|}{h(u)} \right] \le 1 \right) = 1.$$

Vediamo anche al disuguaglianza opposta. Sia $\varepsilon > 0$ e consideriamo per $n \in \mathbb{N}_+$

$$\begin{aligned} L_n &= \mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le 2^n} \frac{|B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}|}{h(2^{-n})} \le 1-\varepsilon \right) \\ \text{(Incr. indip.)} & \prod_{k=1}^{2^n} \mathbf{P}\left(\frac{|B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}|}{\sqrt{2^{-n}}} \le (1-\varepsilon)\sqrt{2\log(2^n)} \right) \end{aligned}$$

ed essendo $\frac{|B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}|}{\sqrt{2^{-n}}} = Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, si ha

$$\begin{aligned} L_n &= \mathbf{P}\left(|Z| \le (1-\varepsilon)\sqrt{2\log(2^n)} \right)^{2^n} \\ &= \left[1 - 2\mathbf{P}\left(Z > (1-\varepsilon)\sqrt{2\log(2^n)} \right) \right]^{2^n} \\ \text{(Oss. 1.6.3)} &\le \left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(1-\varepsilon)\sqrt{2\log(2^n)}}{((1-\varepsilon)\sqrt{2\log(2^n)})^2 + 1} \right) 2^{-n(1-\varepsilon)^2} \right]^{2^n} \\ (n\ge 1) &\le \left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(1-\varepsilon)\sqrt{2\log(2)}\sqrt{n}}{n[(1-\varepsilon)^2 2\log(2) + 1]} \right) 2^{-n(1-\varepsilon)^2} \right]^{2^n} \\ &= \left[1 - \frac{c'(\varepsilon)}{\sqrt{n}} 2^{-n(1-\varepsilon)^2} \right]^{2^n} \\ (1-x \le e^{-x}) &\le \exp\left(-\frac{c'(\varepsilon)}{\sqrt{n}} 2^{n(1-(1-\varepsilon)^2)} \right) \end{aligned}$$

che è termine di serie convergente, dunque per il Lemma di Borel-Cantelli esiste un $N \subset \Omega$, misurabile con $\mathbf{P}(N) = 0$ t.c. per ogni $\omega \in N^c$ esiste un $n(\omega) \in \mathbb{N}_+$ t.c. per ogni $n \ge n(\omega)$ vale

$$\max_{1\le k\le 2^n} \frac{|B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}|}{h(2^{-n})} > 1-\varepsilon$$

e da questo si ottiene

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{u\to 0^+} \left[\sup_{\substack{s,t\in[0,1)\\0<|s-t|<u}} \frac{|B_t - B_s|}{h(u)} \right] > 1-\varepsilon \right) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

ma se

$$B_\varepsilon = \left\{ \limsup_{u\to 0^+} \left[\sup_{\substack{s,t\in[0,1)\\ 0<|s-t|<u}} \frac{|B_t - B_s|}{h(u)} \right] > 1-\varepsilon \right\}$$

si ha $B_{\varepsilon'} \subset B_\varepsilon$ per ogni $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ e

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{2^{-n}} = \left\{ \limsup_{u\to 0^+} \left[\sup_{\substack{s,t\in[0,1)\\ 0<|s-t|<u}} \frac{|B_t - B_s|}{h(u)} \right] \geq 1 \right\}$$

quindi si ottiene

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{u\to 0^+} \left[\sup_{\substack{s,t\in[0,1)\\ 0<|s-t|<u}} \frac{|B_t - B_s|}{h(u)} \right] \geq 1 \right) = 1.$$

□

Corollario 1.6.5: *Le traiettorie del MB std non sono $\frac{1}{2}$-hölderiane $\mathbf{P}$-q.c., cioè se $(B_t)_{t\geq 0}$ è un MB std vale*

$$\mathbf{P}\left(\left\{ t \mapsto B_t(\omega) \text{ non è } \frac{1}{2}\text{-hölderiana} \right\} \right) = 1.$$

Definizione 1.6.6: Sia dato un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$. Preso $t \in [0,\infty)$ e presa Δ una partizione dell'intervallo $[0,t]$, poniamo

$$T_t^\Delta(X) = \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^2$$

in cui i $\{t_i\}_{i=0}^n$ sono gli estremi ordinati degli intervalli della partizione Δ di $[0,t]$.

Definizione 1.6.7 (Variazione quadratica): Dato un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$, si dice che ha *variazione quadratica finita* se esiste un processo $(\langle X\rangle_t)_{t\geq 0}$, detto *variazione quadratica di X*, t.c.

(1) $\langle X\rangle_t < +\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$;

(2) vale

$$T_t^{\Delta_n}(X) \xrightarrow{\mathbf{P}} \langle X\rangle_t \ \ \forall t \geq 0$$

in cui $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di partizioni di $[0,t]$ t.c. $|\Delta_n| \to 0$.

Osservazione 1.6.8: Per un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ con variazione quadratica finita *non* è detto che

$$\sup\{T_t^\Delta(X) \mid \Delta \text{ partizione di } [0,t]\} < +\infty \ \ \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

Teorema 1.6.9: *Se $(B_t)_{t\geq 0}$ è MB std allora ha variazione quadratica finita con*

$$\langle B\rangle_t = t \ \ \forall t \geq 0.$$

Più in generale se X è una misura gaussiana di intensità μ, F è misurabile con $\mu(F) < +\infty$ e $\{F_k^n\}_{k=1}^{j_n}$ è partizione misurabile di F per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\in[j_n]} \mu(F_k^n) = 0$, allora

$$\sum_{k=1}^{j_n} X(F_k^n)^2 \xrightarrow{L^2(\mathbf{P})} \mu(F).$$

Dimostrazione. Per costruzione $B_t = X([0,t]) \in L^2(\Omega, \mathbf{P})$ per ogni $t \geq 0$, con X la misura gaussiana di intensità $\mathcal{L}^1$ (su $[0,\infty)$). Dimostriamo quindi l'enunciato generale.

Prendiamo gli oggetti dell'enunciato ed osserviamo che $\mu(F) = \sum_{k=1}^{j_n} \mu(F_k^n)$, dunque bisogna vedere che

$$\sum_{k=1}^{j_n} (|X(F_k^n)|^2 - \mu(F_k^n)) \overset{L^2(\mathbf{P})}{\longrightarrow} 0.$$

Osserviamo che $X(F_k^n) \sim \mathcal{N}(0, \mu(F_k^n))$ e che inoltre se $k \neq k'$ le v.a. $X(F_k^n)$ e $X(F_k^n)$ sono scorrelate e quindi indipendenti (sono gaussiane). Di conseguenza si ha

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{j_n} (|X(F_k^n)|^2 - \mu(F_k^n))\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{j_n} \mathbb{E}[|X(F_k^n)^2 - \mu(F_k^n)|^2].$$

Osserviamo ora che per A misurabile, essendo $Z = \frac{X(A)}{\sqrt{\mu(A)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, vale

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X(A)^2 - \mu(A)|^2] &= \mathbb{E}\left[\left|\left(\frac{X(A)}{\sqrt{\mu(A)}}\right)^2 - 1\right|^2\right] \mu(A)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}\left[Z^4\right] + 1 - 2\mathbb{E}\left[Z^2\right]\right) \mu(A)^2 \\
&= \left(3\mathbb{E}\left[Z^2\right]^2 + 1 - 2\mathbb{E}\left[Z^2\right]\right) \mu(A)^2 \\
&= 2\mu(A)^2
\end{aligned}$$

in quanto se Y è una v.a. gaussiana centrata vale $\mathbb{E}\left[Y^4\right] = 3\mathbb{E}\left[Y^2\right]^2$ (fatto che si può verificare esplicitando i valori attesi con la relativa densità ed integrando per parti). Di conseguenza, tornando al conto precedente, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{j_n} (|X(F_k^n)|^2 - \mu(F_k^n))\right)^2\right] &= 2\sum_{k=1}^{j_n} \mu(F_k^n)^2 \\
&\leq 2\left[\max_{k \in [j_n]} \mu(F_k^n)\right] \mu(F) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. □

Corollario 1.6.10: *Sia $(B_t)_{t \geq 0}$ un MB std. Valgono i seguenti fatti:*

(1) le traiettorie del MB non sono a variazione finita **P***-q.c., cioè*

$$\mathbf{P}(\{t \mapsto B_t(\omega) \text{ non è a variazione finita}\}) = 1;$$

(2) le traiettorie del MB non sono α-hölderiane per $\alpha > \frac{1}{2}$ **P***-q.c., cioè*

$$\mathbf{P}(\{t \mapsto B_t(\omega) \text{ non è } \alpha\text{-hölderiana}\}) = 1 \ \ \forall \alpha > \frac{1}{2}.$$

Dimostrazione. (1) Siano $t > 0$, e $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di partizioni finite di $[0,t]$ t.c. $|\Delta_n| \to 0$ e t.c. $T_t^{\Delta_n}(B) \longrightarrow t$ **P**-q.c. (esiste perché se una successione converge in probabilità allora ammette una sottosuccessione che converge **P**-q.c.), facciamo che lo faccia su $\Omega_0 \subset \Omega$ ($\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$). Fissiamo $\omega \in \Omega_0$ e supponiamo per assurdo che $V_t(B)(\omega) < +\infty$, con $V_t(B)$ la variazione del MB su $[0, t]$. Osserviamo che per ogni Δ partizione di $[0, t]$ vale

$$\begin{aligned}
T_t^{\Delta}(B)(\omega) &= \sum_{i=0}^{m-1} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|^2 \\
&\leq \left[\sup_{i\in[m-1]} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|\right] \sum_{i=0}^{m-1} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| \\
&= \left[\sup_{i\in[m-1]} |B_{t_{i+1}}(\omega - B_{t_i}(\omega)|\right] V_t^{\Delta}(B)(\omega).
\end{aligned}$$

Quindi si avrebbe

$$\begin{aligned}
T_t^{\Delta_n}(B)(\omega) &\leq \sup_{i\in[m_n-1]} |B_{t_{i+1}^{(n)}}(\omega) - B_{t_i^{(n)}}(\omega)| V_t^{\Delta_n}(B)(\omega) \\
&\leq \left[\sup_{i\in[m_n-1]} |B_{t_{i+1}^{(n)}}(\omega) - B_{t_i^{(n)}}(\omega)|\right] V_t(B)(\omega) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

essendo $V_t(B)(\omega) < +\infty$, mentre $T_t^{\Delta_n}(B)(\omega) \longrightarrow t$, dunque se ne deduce l'assurdo $t \leq 0$.

(2) Fissiamo $\alpha > \frac{1}{2}$. Presi $\Omega_0 \subset \Omega$ e $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del punto precedente, se per assurdo esistesse un $\omega \in \Omega_0$ con traiettoria α-hölderiana si avrebbe

$$\begin{aligned}
T_t^{\Delta_n}(B)(\omega) &= \sum_{i=0}^{m_n-1} |B_{t_{i+1}^{(n)}}(\omega) - B_{t_i^{(n)}}(\omega)|^2 \\
&\leq [B(\omega)]_{C^\alpha}^2 \left[\sup_{i\in[m_n-1]} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}|^{2\alpha-1}\right] t \longrightarrow 0 \ \ \forall t > 0
\end{aligned}$$

invece $T_t^{\Delta_n}(B)(\omega) \longrightarrow t > 0$, assurdo. Osservare che abbiamo usato il fatto che essendo $\alpha > \frac{1}{2}$ si ha $2\alpha - 1 > 0$.

□

Infine enunciamo il celebre risultato di non differenziabilità del moto browniano.

Teorema 1.6.11: *Sia $(B_t)_{t\geq 0}$ MB std, allora le sue traiettoria non sono differenziabili in nessun punto* $\mathbf{P}$*-q.c., cioè*

$$\mathbf{P}\left(\{t \mapsto B_t(\omega) \textit{ non è differenziabile in ogni punto}\}\right) = 1.$$

Dimostrazione. Non trattata. □

2

TEORIA DELLE MARTINGALE

2.1 Filtrazioni e Tempi d'arresto

Fissiamo $(\Omega, \mathcal{F})$ uno spazio misurabile ed un $I \subset \mathbb{R}$.

Definizione 2.1.1 (Filtrazione): Una *filtrazione* è una famiglia di σ-algebre $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ t.c. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \ \ \forall t \in I$ e

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \ \ \forall s, t \in I, \ s \leq t$$

Definizione 2.1.2 (Processo adattato): Dato un processo stocastico $(X_t)_{t\in I}$ ed una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$, il processo si dice *adattato* se X_t è $\mathcal{F}_t$-misurabile per ogni $t \in I$.

Definizione 2.1.3 (Spazio di probabilità filtrato): Uno *spazio di probabilità filtrato* è il dato di una quaterna $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbf{P}))$ in cui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ è uno spazio di probabilità e $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ è una filtrazione.

Definizione 2.1.4 (Filtrazione naturale): Dato un processo stocastico $(X_t)_{t\in I}$, la sua *filtrazione naturale* è $(\mathcal{F}^X_t)_{t\in I}$ t.c.

$$\mathcal{F}^X_t = \sigma(X_s \mid s \in I, \ s \leq t) \ \ \forall t \in I$$

Osservazione 2.1.5: Un processo stocastico è sempre adattato rispetto alla sua filtrazione naturale.

Definizione 2.1.6: Data una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$, si definiscono per ogni $t \in I$ le σ-algebre

$$\mathcal{F}_{t^-} = \sigma(\mathcal{F}_s \mid s < t, \ s \in I)$$
$$\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap \{\mathcal{F}_s \mid s > t, \ s \in I\}.$$

Osservazione 2.1.7: Data una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$, per ogni $t \in I$ vale

$$\mathcal{F}_{t^-} \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t^+}$$

Definizione 2.1.8: Una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ è detta *continua a destra* se vale $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t \ \ \forall t \in I$.

D'ora in poi prendiamo per semplicità $I = [0, +\infty)$ e fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Definizione 2.1.9 (Tempo d'arresto): Una v.a. $T : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ è detta *tempo d'arresto* rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ (abbreviato $(\mathcal{F}_t)$-*tda* o solo *tda*), se vale

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0.$$

Nel seguito, dato un tda, talvolta, quando non ci sarà rischio di ambiguità, si sottintenderà rispetto a quale filtrazione lo è.

Osservazione 2.1.10: Dato un tda $T : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ vale

$$\{T < +\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T \leq n\} \in \mathcal{F}$$

e per ogni $t > 0$ vale

$$\{T < t\} = \bigcup_{\substack{s<t \\ s\in\mathbb{Q}}} \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_{t^-} \subset \mathcal{F}_t$$

Proposizione 2.1.11: *Se $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ è una filtrazione continua a destra. Una v.a. $T : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ è un tda se e solo se $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t \ \ \forall t > 0$.*

Dimostrazione. Se T è tda allora ovviamente $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ per ogni $t > 0$. Viceversa, preso $t \geq 0$ si ha

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{\substack{t<s<t+\varepsilon \\ s\in\mathbb{Q}}} \{T < s\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

dunque $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$. □

Proposizione 2.1.12: *Se T, S sono due tda allora lo sono anche $T \wedge S$ e $T \vee S$.*

Dimostrazione. (Esercizio) Preso $t \geq 0$ vale

$$\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

$$\{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

□

Definizione 2.1.13: Dato un tda $T : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$, si pone σ-algebra $\mathcal{F}_T$ la σ-algebra siffatta

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \ \forall t \geq 0\}.$$

Proposizione 2.1.14: *Un tda T è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_T$.*

Dimostrazione. Infatti $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_T \ \ \forall s \geq 0$, in quanto

$$\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq s \wedge t\} \in \mathcal{F}_{s\wedge t} \subset \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0.$$

□

Proposizione 2.1.15: *Se T, S sono tda t.c. $S \leq T$, allora $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

Dimostrazione. (Esercizio) Se $A \in \mathcal{F}_S$, allora per ogni $t \geq 0$ vale $A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, per definizione di $\mathcal{F}_S$. Ma quindi essendo $\{T \leq t\} \subset \{S \leq t\}$ si ha

$$A \cap \{T \leq t\} = A \cap \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

in quanto per definizione di tda $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. □

Fissiamo (E, d) spazio metrico.

Proposizione 2.1.16: *Siano $C \subset E$ chiuso, $A \subset E$ aperto e $(X_t)_{t\geq 0}$ un processo stocastico a valori in E adattato ad una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ ed a traiettorie continue. Siano*

$$\begin{aligned} T_C &= \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in C\} \\ T_A &= \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in A\}. \end{aligned}$$

Allora vale che

(1) T_C è tda rispetto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$;

(2) T_A è tda rispetto a $\{\mathcal{F}_{t^+}\}_{t\geq 0}$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione distanza $d_C : E \to [0, +\infty)$ t.c.

$$D_C(x) = \inf_{y\in C} d(x, y) \ \ \forall x \in E.$$

Allora possiamo scrivere

$$T_C = \inf\{t \geq 0 \mid d_C(X_t) = 0\}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \{T_C > t\} &= \{d_C(X_s) > 0 \ \ \forall s \in [0, t]\} \\ &= \bigcup_{\substack{\varepsilon>0 \\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}} \{d_C(X_s) > \varepsilon \ \ \forall s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

in cui la seconda uguaglianza è dovuta alla continuità delle traiettorie e nell'ultima appartenenza abbiamo usato il fatto che per ogni $s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}$ vale

$$\{d_C(X_s) > \varepsilon \ \ \forall s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}\} = \bigcap_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{d_C(X_s) > \varepsilon\} \in \mathcal{F}_t$$

essendo d_C boreliana e X_s $\mathcal{F}_s$-misurabile essendo il processo adattato (e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ per $s \leq t$).

Invece per T_A, preso $t \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned} \{T_A \leq t\} &= \{\exists (s_n)_{n\in\mathbb{N}},\ s_n \searrow t,\ \ X_{s_n} \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{\exists s \in [0, t],\ \ \exists \varepsilon > 0 \ \ X_r \in A \ \ \forall r \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)\} \\ &= \bigcup_{\substack{0<s<t+\varepsilon_0 \\ s\in\mathbb{Q}}} \{X_s \in A\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon_0} \ \ \forall \varepsilon_0 > 0 \end{aligned}$$

da cui segue $\{T_A \leq t\} \in \mathcal{F}_{t^+}$. Osserviamo che abbiamo utilizzato ancora la continuità delle traiettorie nella terza uguaglianza ed il fatto che X_s è $\mathcal{F}_s$-misurabile. □

Definizione 2.1.17 (Processo progressivamente misurabile): Un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ a valori in E è detto *progressivamente misurabile* rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ se per ogni $t \geq 0$ la funzione $\psi_X^t : \Omega \times [0,t] \to E$ t.c.

$$\psi_X^t(\omega, s) = X_s(\omega) \ \ \forall \omega \in \Omega \ \ \forall s \in [0,t]$$

è misurabile quando $\Omega \times [0,t]$ è munito della σ-algebra $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$.

Osservazione 2.1.18: Un processo progressivamente misurabile rispetto ad una data filtrazione è anche adattato rispetto ad essa. La prossima proposizione ci dà anche delle condizioni grazie alle quali riusciamo ad ottenere il viceversa.

Lemma 2.1.19: *Sia $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Sia $f_n : \mathcal{X} \to E$ misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$ e sia $f_n : \mathcal{X} \to E$ t.c. $f_n \to f$ puntualmente ad f. Allora f è misurabile.*

Dimostrazione. (Esercizio) Se A è un aperto di E, presa d_{A^c} la funzione distanza da A^c, vale

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} \bigcap_{k\geq n} \{x \in \mathcal{X} \mid d_{A^c}(f_k(x)) > n^{-1}\}$$

dunque è misurabile essendo le f_k misurabili e d_{A^c} boreliana. □

Proposizione 2.1.20: *Fissiamo una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ a valori in E adattato e con traiettorie continue a destra è progressivamente misurabile.*

Dimostrazione. (Esercizio) Fissiamo $t \geq 0$. Dobbiamo dire che $\psi_X^t : \Omega \times [0,t] \to E$ è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$. Usiamo il Lemma precedente. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ la funzione $f_n : \Omega \times [0,t] \to E$ t.c.

$$f_n(\omega, x) = \psi_X^t\left(\omega, \frac{k+1}{n}t\right) \ \ \forall x \in \left[\frac{k}{n}t, \frac{k+1}{n}t\right) \ \ \forall k = 1, ..., n \ \ \forall \omega \in \Omega$$

Queste funzioni sono misurabili, in quanto costanti a tratti in una variabile e misurabili nell'altra. Inoltre usando la continuità a destra di $[0,t] \ni x \mapsto \psi_X^t(\omega, x)$ si ottiene che $f_n \to \psi_X^t$ puntualmente. □

Proposizione 2.1.21: *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Siano $(X_t)_{t\geq 0}$ un processo stocastico progressivamente misurabile e T un tda. Allora X_T è una v.a. $\mathcal{F}_T$-misurabile su $\{T < +\infty\}$.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Osserviamo innanzitutto che $\{T < +\infty\} \in \mathcal{F}_T$. Per dimostrare la tesi bisogna vedere che $X_T \mathbf{1}_{\{T\leq t\}}$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile per ogni $t \geq 0$. Osserviamo però che la funzione

$$T_{|\{T\leq t\}} : (\{T \leq t\}, \mathcal{F}_t \cap \{T \leq t\}) \longrightarrow ([0,t], \mathcal{B}([0,t])$$

è misurabile per ogni $t \geq 0$. Infatti T è è un tda, quindi la mappa $\omega \mapsto (\omega, T(\omega)\mathbf{1}_{\{T\leq t\}}(\omega))$ da $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ in $(\Omega \times [0,t], \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t]))$ è misurabile e $X_T \mathbf{1}_{\{T\leq t\}}$ è la composizione tra questa mappa e $\Omega \times [0,t] \ni (\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$, quindi segue la tesi. □

Definizione 2.1.22 (Processo arrestato): Se $(X_t)_{t\geq 0}$ è un processo stocastico e T è un tda, rispetto alla stessa filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, definiamo il *processo arrestato* a T il processo stocastico $(X_t^T)_{t\geq 0}$ t.c.

$$X_t^T(\omega) = X_{T(\omega)\wedge t}(\omega)$$

Osservazione 2.1.23: Se T è un tda e $t \geq 0$ allora anche $T \wedge t$ è un tda.

Infatti preso $s \geq 0$ vale

$$\{T \wedge t \leq s\} = \{T \leq s\} \cup \{t \leq s\} \in \mathcal{F}_s.$$

Un utile risultato tecnico è il seguente.

Proposizione 2.1.24: *Ogni tda T può essere approssimato dall'alto in modo monotono, da una successione $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di v.a. semplici che sono anche tda (dette* tda semplici*) e t.c. T_k ha immagine in $Q_k = \{q2^{-k} \mid q \in \mathbb{N}_+\}$. Se inoltre T è limitato dall'alto da una costante $C \in \mathbb{N}_+$ posso prendere la successione approssimante in modo che sia anch'essa uniformemente limitata da C.*

Dimostrazione. Per la prima parte prendere per ogni $k \in \mathbb{N}$ la v.a. semplice

$$T_k(\omega) = q2^{-k} \text{ se } 2^{-k}(q-1) \leq T(\omega) < 2^{-k}q, \quad q \in \mathbb{N}_+$$

infatti si vede subito che queste sono tda e che convergono decrescendo a T puntualmente. Nel caso in cui $T \leq C$, osserviamo che $C = (C2^k)2^{-k} \in Q_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (perché $C \in \mathbb{N}_+$), quindi si può prendere per ogni $k \in \mathbb{N}$ la v.a. semplice $T_k \wedge C$ che è ancora a valori in Q_k. □

Diamo adesso due definizioni che ci saranno utili in seguito. Osserviamo che quanto fatto fino ad ora nella sezione dipende solamente dai misurabili, nessuna misura di probabilità è stata utilizzata. Solo adesso prendiamo una probabilità. Fissiamo uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$.

Definizione 2.1.25 (Filtrazione completa): Sia $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$ l'insieme dei misurabili $\mathbf{P}$-nulli. La filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ è detta $\mathbf{P}$-*completa* (o solo *completa*) se $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

Definizione 2.1.26 (Completamento di una filtrazione): Sia $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$ l'insieme dei misurabili $\mathbf{P}$-nulli. Allora la famiglia di σ-algebre $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}})_{t\geq 0}$, con $\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}} = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N})$ per ogni $t \geq 0$, sono una filtrazione (facile verifica) detta $\mathbf{P}$-*completamento* di $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Osservazione 2.1.27: Si verifica facilmente che il completamento di una filtrazione è una filtrazione completa.

Definizione 2.1.28 (Ipotesi abituali): Diciamo che la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ soddisfa le *ipotesi abituali* se è $\mathbf{P}$-completa e continua a destra.

Osservazione 2.1.29 (Allargamento abituale): L'*allargamento abituale* di $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ è la filtrazione $(\mathcal{F}_{t^+}^{\mathbf{P}})_{t\geq 0}$ che soddisfa le ipotesi abituali.

L'allargamento abituale è utile quando abbiamo bisogno di regolarizzare, trovandone una modificazione, dei processi stocastici adattati facendoli rimanere adattati.

2.2 Martingale

Uno scommettitore gioca una sequenza di giochi d'azzardo puntando, ad esempio, 1$ in ogni partita e registra l'andamento del suo portafoglio

$$M_{t_0} \to M_{t_1} \to \ldots \to M_{t_d} \text{ con } t_1, \ldots, t_d \text{ i tempi di registrazione del portafoglio}$$

se i giochi sono onesti (fair) ci si aspetta che sapendo l'accaduto fino al tempo t_i, in cui lui si trova, la migliore predizione che può fare di quello che accadrà nel futuro al suo portafoglio al tempo t_{i+1} è proprio M_{t_i}. Questo semplice concetto è l'essenza dell'idea di *martingala*.

Fissiamo per tutto il resto della sezione uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Definizione 2.2.1 (Martingala): Data una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, T intervallo di $\mathbb{N}$ o $[0, +\infty)$, un processo stocastico $(M_t)_{t\in T}$ è detto $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P})$-*martingala* (o solo *martingala* quando non c'è rischio di ambiguità) se

(1) è integrabile: $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty \ \ \forall t \in T$;

(2) è adattato;

(3) $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $s, t \in T$ con $s \leq t$

Osservazione 2.2.2: Nel seguito chiameremo la proprietà (3) della definizione precedente *proprietà di martingala*.

Definizione 2.2.3 (Submartingala): Data una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, T intervallo di $\mathbb{N}$ o $[0, +\infty)$, un processo stocastico $(M_t)_{t\in T}$ è detto $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P})$-*submartingala* (o solo *submartingala* quando non c'è rischio di ambiguità) se

(1) è integrabile: $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty \ \ \forall t \in T$;

(2) è adattato;

(3) $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \geq M_s$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $s, t \in T$ con $s \leq t$

Definizione 2.2.4 (Supermartingala): Data una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, T intervallo di $\mathbb{N}$ o $[0, +\infty)$, un processo stocastico $(M_t)_{t\in T}$ è detto $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P})$-*supermartingala* (o solo *supermartingala* quando non c'è rischio di ambiguità) se

(1) è integrabile: $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty \ \ \forall t \in T$;

(2) è adattato;

(3) $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \leq M_s$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $s, t \in T$ con $s \leq t$

Osservazione 2.2.5: Un martingala è sia una submartingala che una supermartingala.

Osservazione 2.2.6: Se $(M_t)_{t\in T}$ e $(N_t)_{t\in T}$ sono submartingale rispetto alla stessa filtrazione allora $(\alpha M_t + \beta N_t)_{t\in T}$ è una submartingala rispetto alla stessa filtrazione (facile verifica), ossia le submartingale su una data filtrazione sono un cono.

Invece le martingale su una data filtrazione sono uno spazio vettoriale (facile verifica).

Proposizione 2.2.7: *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è convessa e $(M_t)_{t\in T}$ è una martingala a valori in I. Se $\varphi(M_t)$ è integrabile per ogni $t \in T$ allora $(\varphi(M_t))_{t\in T}$ è una submartingala.*

Dimostrazione. Usiamo la Disuguaglianza di Jensen condizionale per trovare

$$\mathbb{E}[\varphi(M_t) \mid \mathcal{F}_s] \geq \varphi\left(\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s]\right) = \varphi(M_s).$$

□

Proposizione 2.2.8: *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è convessa crescente e $(M_t)_{t\in T}$ è una submartingala a valori in I. Se $\varphi(M_t)$ è integrabile per ogni $t \in T$ allora $(\varphi(M_t))_{t\in T}$ è una submartingala.*

Dimostrazione. Usiamo la Disuguaglianza di Jensen condizionale per trovare

$$\mathbb{E}[\varphi(M_t) \mid \mathcal{F}_s] \geq \varphi\left(\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s]\right) \geq \varphi(M_s).$$

□

Proposizione 2.2.9: *Sia $(B_t)_{t\geq 0}$ MB std e consideriamo la sua filtrazione naturale $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$. Allora*

(1) $(B_t)_{t\geq 0}$ *è una martingala;*

(2) $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ *è una martingala;*

(3) $\left(\exp\left(\alpha B_t - \alpha^2 \frac{t}{2}\right)\right)_{t\geq 0}$ *è una martingala per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Tutti i processi considerati sono ovviamente integrabili e adattati. Vediamo la proprietà di martingala:

(1) usando l'indipendenza degli incrementi si ha

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s^0] = \mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s^0] + \mathbb{E}[B_s \mid \mathcal{F}_s^0] = \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = B_s;$$

(2) usando ancora l'indipendenza degli incrementi si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s^0] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s^0] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] + B_s^2 + 2\mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s \mid \mathcal{F}_s^0] \\ &= (t-s) + B_s^2 + 2B_s\mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s^0] = B_s^2 + t - s\end{aligned}$$

da cui segue quanto voluto;

(3) ancora una volta, usando l'indipendenza degli incrementi ed il fatto che la funzione generatrice dei momenti di una $Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ è $\psi_Z(\alpha) = \exp\left(\alpha m + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(\alpha B_t) \mid \mathcal{F}_s^0] &= \mathbb{E}[[\exp(\alpha(B_t - B_s + B_s) \mid \mathcal{F}_s^0] \\ &= \exp(\alpha B_s)\mathbb{E}\left[\exp(\alpha(B_t - B_s)\right] = \exp\left(\frac{\alpha^2(t-s)}{2}\right)\exp(\alpha B_s)\end{aligned}$$

da cui segue quanto voluto.

□

Per concludere la sezione investighiamo la struttura delle submartingale (e quindi anche delle supermartingale) almeno nel caso a tempo discreto.

Definizione 2.2.10 (Processo prevedibile a tempo discreto): Sia $T = \{0, 1, \ldots, N\}$ con $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Un processo stocastico $(X_n)_{n\in T}$ è detto *prevedibile* rispetto ad una data filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in T}$ se X_n è $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile per ogni $n \in T$, $n \geq 1$.

Teorema 2.2.11 (Decomposizione di Doob): *Consideriamo $T = \{0, 1, ..., N\}$ con $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ e $(\mathcal{F}_n)_{n\in T}$ una filtrazione. Sia $(M_n)_{n\in T}$ una submartingala, allora esiste unico, a meno di indistiguibilità, un processo $(A_n)_{n\in T}$ t.c.*

(1) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è prevedibile;

(2) $A_0 = 0$ $\mathbf{P}$-q.c.;

(3) $A_n \geq A_{n-1}$ per ogni $n \in T$, $n \geq 1$;

(4) se per ogni $n \in T$ definiamo $N_n = M_n - A_n$, allora $(N_n)_{n\in T}$ è una martingala.

Quindi

$$M_n = N_n + A_n \quad \forall n \in T.$$

Questa decomposizione in una martingala ed un processo prevedibile crescente è detta decomposizione di Doob *di $(M_n)_{n\in T}$.*

Dimostrazione. (Esistenza). Definiamo A_n per ricorsione su $n \in T$. Poniamo $A_0 = 0$ e supponiamo di aver già definito A_{n-1} con $n \in T$, $n \geq 1$, e definiamo

$$A_n = \mathbb{E}\left[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] - M_{n-1} + A_{n-1}.$$

Questo va bene in quanto:

- per ogni $n \in T$, $n \geq 1$, A_n è somma di v.a. $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabili, quindi è $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile;
- $A_0 = 0$;
- $A_n \geq A_{n-1}$ per ogni $n \in T$, $n \geq 1$ grazie alla proprietà di submartingala di $(M_n)_{n\in T}$;
- per ogni $n \in T$ vale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[M_n \mid \mathcal{F}_n\right] - \mathbb{E}\left[A_n \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= M_n - A_n.\end{aligned}$$

(Unicità). Prendiamo due decomposizioni come da tesi $M_n = N_n + A_n = N'_n + A'_n$ per ogni $n \in T$. Allora $N_n - N'_n = A'_n - A_n$ per ogni $n \in T$. Dimostriamo per induzione su $n \in T$ che $A_n = A'_n$ e $N_n = N'_n$. Ovviamente $A_0 = 0 = A'_0$ e quindi anche $N_0 = N'_0 = M_0$. Ora sia $n \in T$, $n \geq 1$ e supponiamo che $A_n = A'_n$ e $N_n = N'_n$, allora

$$0 = N_n - N'_n = \mathbb{E}\left[N_{n+1} - N'_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[A'_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = A'_{n+1} - A_{n+1}$$

quindi $A'_{n+1} = A_{n+1}$ e di conseguenza $N'_{n+1} = N_{n+1}$. □

2.3 Teorema d'Arresto Opzionale a Tempo Discreto

Consideriamo una martingala a tempo discreto $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rispetto ad una filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Al tempo $n-1$ possiamo decidere di puntare H_n\$ (il processo $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ è una *strategia di gioco*) e supponiamo di ottenere $H_n(M_n - M_{n-1})$\$. Il mio portafoglio si descriverà quindi nel seguente modo

$$\begin{cases} Y_0 = M_0 \\ Y_n = Y_{n-1} + H_n(M_n - M_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

Supponiamo che H_n sia $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, e che $H_n \le C_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}_+$ $\mathbf{P}$-q.c., con $C_n \in [0,+\infty)$, per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ (che modellizza l'impossibilità di puntare infinito denaro). Si ha quindi, grazie alla Proposizione successiva, che il processo del mio portafoglio $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala.

Proposizione 2.3.1 (Integrale stocastico discreto): *Fissiamo $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtrazione. Siano $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala o submartingala o supermartingala e $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ un processo non negativo, prevedibile e t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $C_n \ge 0$ per il quale $|H_n| \le C_n$. Si ha che il processo $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definito da*

$$\begin{cases} Y_0 = M_0 \\ Y_n = Y_{n-1} + H_n(M_n - M_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

*è una martingala o una submartingala o una supermartingala a seconda di cosa è $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è il processo costruito sopra, definiamo l'*integrale stocastico (discreto) *di H rispetto ad M come il processo $H \cdot M$ definito come segue*

$$(H \cdot M)_n = Y_n - M_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Per induzione si vede facilmente che il processo è integrabile, infatti $Y_0 \in L^1(\mathbf{P})$ e per $n \in \mathbb{N}_+$ si ha $Y_n = Y_{n-1} + H_n(M_n - M_{n-1})$ con $H_n \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Sempre con una semplice induzione si prova che il processo è adattato infatti $Y_0 = M_0$ che è $\mathcal{F}_0$-misurabile e per $n \in \mathbb{N}_+$ vale $Y_n = Y_{n-1} + H_n(M_n - M_{n-1})$ con $H_n(M_n - M_{n-1})$ che è $\mathcal{F}_n$-misurabile.

Vediamo ora la proprietà di martingala. Essendo $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtrazione, in particolare è crescente per inclusione, dunque è facile osservare che basta vedere che valga

$$\mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = Y_{n-1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}_+$$

e questo vale perché

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[H_n(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= H_n \mathbb{E}[M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = H_n \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Il caso di submartingala o supermartingala sono analoghi. □

Osservazione 2.3.2: Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una submartingala e consideriamo $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \subset [0,+\infty]$ un tda. Poniamo per $n \in \mathbb{N}_+$

$$H_n = \mathbf{1}_{\{T>n-1\}} = \mathbf{1}_{\{T\ge n\}} = \mathbf{1}_{[0,T]}(n)$$

allora $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ è prevedibile e costruendo $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come sopra abbiamo in realtà

$$Y_n = M_n^T = M_{n\wedge T} \ \ \forall n \in \mathbb{N}_+$$

infatti

$$Y_n = Y_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1}) = M_0 + \sum_{k=1}^{n\wedge T}(M_k - M_{k-1}) = M_0 + (M_{k\wedge T} - M_0) = M_{n\wedge T}.$$

Quindi usando la proprietà di submartingala si ottiene

$$\mathbb{E}[M_{n\wedge T} \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{F}_0] \ge Y_0 = M_0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui per ogni tda T si ha
$$\mathbb{E}[M_{n\wedge T}] \geq \mathbb{E}[M_0] \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Analogamente nel caso in cui $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala si ottiene
$$\mathbb{E}[M_{n\wedge T}] \leq \mathbb{E}[M_0] \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Infine se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala
$$\mathbb{E}[M_{n\wedge T}] \leq \mathbb{E}[M_0] \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$
in quanto si applicano entrambi i casi di submartingala e supermartingala.

In quel che segue una tda $T : \Omega \to [0, +\infty]$ sarà detto *limitato* se esiste una costante $C > 0$ t.c. $T \leq C$ su Ω.

Teorema 2.3.3 (d'arresto opzionale a tempo discreto): *Fissiamo $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtrazione. Sia $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processo stocastico adattato e integrabile. Allora:*

(1) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala se e solo se per ogni $T, S : \Omega \to \mathbb{N} \subset [0, +\infty)$ tda limitati t.c. $S \leq T$ vale che $M_S, M_T \in L^1(\mathbf{P})$ e
$$\mathbb{E}[M_S] = \mathbb{E}[M_T];$$

(2) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala se e solo se per ogni $T, S : \Omega \to \mathbb{N} \subset [0, +\infty)$ tda limitati t.c. $S \leq T$ vale che $M_S, M_T \in L^1(\mathbf{P})$ e
$$\mathbb{E}[M_S] \leq \mathbb{E}[M_T];$$

(3) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala se e solo se per ogni $T, S : \Omega \to \mathbb{N} \subset [0, +\infty)$ tda limitati t.c. $S \leq T$ vale che $M_S, M_T \in L^1(\mathbf{P})$ e
$$\mathbb{E}[M_S] \geq \mathbb{E}[M_T].$$

In particolare:

(1) se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala e $T, S : \Omega \to \mathbb{N} \subset [0, +\infty)$, $S \leq T$, sono tda limitati vale
$$M_S = \mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S];$$

(2) se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala e $T, S : \Omega \to \mathbb{N} \subset [0, +\infty)$, $S \leq T$, sono tda limitati vale
$$M_S \leq \mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S];$$

(3) se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala e $T, S : \Omega \to \mathbb{N} \subset [0, +\infty)$, $S \leq T$, sono tda limitati vale
$$M_S \geq \mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S].$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che basta provare il risultato per il caso delle submartingale. Infatti per la prima parte il caso delle supermartingale segue da quello delle submartingale considerando il processo $(-M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e per quello per martingale si ragiona nel seguente modo: un processo è martingala se e solo se è sia submartingala che supermartingala che, a questo punto, equivale a quanto voluto con i tda (si applicano entrambi i risultati per submartingale e supermartingale). Per la seconda parte il ragionamento è analogo, il caso delle supermartingale segue da quello delle submartingale considerando il processo $(-M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e quello per martingale segue a questo punto applicando entrambi i risultati provati per submartingale e supermartingale.

Dimostriamo quindi il caso delle submartingale. Supponiamo che $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una submartingala e wlog poniamo $M_0 = 0$ (tanto anche $(M_n - M_0)_{n\in\mathbb{N}}$ è submartingala). Poniamo:

$$H_n = \mathbf{1}_{\{T\geq n\}} - \mathbf{1}_{\{S\geq n\}} = \mathbf{1}_{\{S\leq n-1<T\}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

che è $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}_+$. Poniamo poi

$$\begin{cases} Y_0 = 0 \\ Y_n = Y_{n-1} + H_n(M_n - M_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

che è una submartingala per la Proposizione 2.3.1 ed osserviamo quindi che vale:

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{E}[Y_0] &\leq \mathbb{E}[Y_C] \\ &= \mathbb{E}\left[(\mathbf{1}_{\{T\geq\cdot\}} \cdot M)_C - (\mathbf{1}_{\{S\geq\cdot\}} \cdot M)_C\right] \\ &= \mathbb{E}[M_{C\wedge T} - M_{C\wedge S}] = \mathbb{E}[M_T - M_S] \end{aligned}$$

in cui la penultima uguaglianza segue dall'Osservazione precedente e l'ultima segue invece dal fatto che $S \leq T \leq C$.

Vediamo ora il viceversa. Sia $B \in \mathcal{F}_S$, definiamo

$$S_B(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & \text{se } \omega \in B \\ T(\omega) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è difficile vedere che S_B continua ad essere tda. Vale sempre $S_B \leq T \leq C$, quindi per le ipotesi si ha

$$\mathbb{E}[(M_T - M_S)\mathbf{1}_B] \geq 0.$$

Dall'arbitrarietà di $B \in \mathcal{F}_S$ segue quindi

$$\mathbb{E}[M_T - M_S \mid \mathcal{F}_S] \geq 0$$

ma essendo M_S $\mathcal{F}_S$-misurabile segue $\mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S] \geq M_S$ che in particolare per tempi deterministici $S = m$ e $T = n$, $m \leq n$ ci dice che $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala.

La seconda parte dell'enunciato l'abbiamo già dimostrata, infatti se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala allora vale la parte destra del se e solo se della prima parte dell'enunciato e abbiamo appena dimostrato che se vale quello allora $\mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S] \geq M_S$ per ogni $S \leq T$ tda limitati. □

Corollario 2.3.4: *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e T un tda:*

(1) se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala allora anche $(M_n^T)_{n\in\mathbb{N}} = (M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala;

(2) se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala anche $(M_n^T)_{n\in\mathbb{N}} = (M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala;

(3) se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala anche $(M_n^T)_{n\in\mathbb{N}} = (M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala.

Dimostrazione. Basta provare il risultato per $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ submartingala. Siano S_1, S_2 tda limitati, $S_1 \le S_2$, allora anche $S_1 \wedge T, S_2 \wedge T$ sono tda limitati e $S_1 \wedge T \le S_2 \wedge T$, quindi per il Teorema precedente

$$\mathbb{E}\left[M_{S_1\wedge T}\right] \le \mathbb{E}\left[M_{S_2\wedge T}\right]$$

ossia

$$\mathbb{E}\left[M_{S_1}^T\right] \le \mathbb{E}\left[M_{S_2}^T\right]$$

da cui segue la tesi sempre per il Teorema precedente. □

2.4 Disuguaglianze Massimali di Doob

Proposizione 2.4.1: *Fissiamo $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ una filtrazione, $N \in \mathbb{N}$. Sia $(M_n)_{n=0}^N$ una submartingala e $\lambda > 0$, allora*

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\le n\le N} M_n > \lambda\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[M_N \cdot \mathbf{1}_{\{\max_{0\le n\le N} M_n > \lambda\}}\right]}{\lambda}$$

Dimostrazione. Sia $S : \Omega \to \{0, 1, ..., N\} \cup \{+\infty\}$ t.c.

$$S = \inf\{n \in \{0, ..., N\} \mid M_n \ge \lambda\}$$

ed osserviamo che è tda, infatti se $k \in \mathbb{N}$ vale

$$\{S > k\} = \bigcap_{n=0}^{k} \{M_n < \lambda\} \in \mathcal{F}_k.$$

Sia inoltre $T = N$ costante, anch'esso è banalmente tda. Osserviamo preliminarmente che, per il Teorema 2.3.3 d'arresto opzionale a tempo discreto, vale $\mathbb{E}[M_{S\wedge N}] \le \mathbb{E}[M_N]$ (per la Proposizione 2.1.12 $S \wedge N$ è tda). Vale

$$A = \{\max_{0\le n\le N} M_n \ge \lambda\} = \{S < +\infty\} = \{0 \le S \le N\}$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_N] &\ge \mathbb{E}[M_{S\wedge N}] \\
&= \mathbb{E}\left[M_{S\wedge N}\mathbf{1}_A + M_{S\wedge N}\mathbf{1}_{A^c}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_S\mathbf{1}_A + M_n\mathbf{1}_{A^c}\right] \\
&\ge \lambda\mathbf{P}(A) + \mathbb{E}[M_N\mathbf{1}_{A^c}]
\end{aligned}$$

ma $\mathbb{E}[M_N] = \mathbb{E}[M_N\mathbf{1}_A] + \mathbb{E}[M_N\mathbf{1}_{A^c}]$, dunque si ha

$$\lambda\mathbf{P}(A) \le \mathbb{E}[M_N\mathbf{1}_A]$$

che equivale alla tesi. □

Corollario 2.4.2 (Disuguaglianze massimali di Doob a tempi finiti): *Fissiamo $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ una filtrazione, $N \in \mathbb{N}$. Sia $(M_n)_{n=0}^N$ una submartingala positiva o una martingala e $\lambda > 0$. Allora*

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\le n\le N} |M_n| > \lambda\right) \le \frac{\mathbb{E}[|M_N|^p]}{\lambda^p} \quad \forall p \in [1, +\infty)$$

e anche

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\le n\le N} |M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|M_N|^p]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p \in (1, +\infty).$$

Dimostrazione. Osserviamo che se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala allora $(|M_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala positiva. Inoltre se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala positiva e $\mathbb{E}[M_N^p] < +\infty$ allora $\mathbb{E}[M_n^p] < +\infty$ per ogni $n = 0, ..., N$. Infatti usando la Disuguaglianza di Jensen condizionale con $\varphi(x) = x^p$, $x \in [0, +\infty)$, perché $M_n : \Omega \to [0, +\infty)$ $\forall n = 0, ..., N$ e quindi

$$M_n^p \leq \mathbb{E}[M_N \mid \mathcal{F}_n]^p \leq \mathbb{E}[M_n^p \mid \mathcal{F}_n]$$

e quindi prendendo i valor medi otteniamo

$$\mathbb{E}[M_n^p] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_N^p \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[M_N^p] < +\infty.$$

Quindi se $M_N \in L^p(\mathbf{P})$ allora $(|M_n|^p)_{n=0}^N$ è submartingala ed applicando la Proposizione 2.4.1 si ottiene

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leq n\leq N} |M_n|^p \geq \lambda^p\right) \leq \lambda^{-p}\mathbb{E}[|M_N|^p]$$

che equivale alla prima disuguaglianza. Se invece $M_N \notin L^p(\mathbf{P})$ allora la prima disuguaglianza è ovvia.

Vediamo la seconda disuguaglianza. Sia $p > 1$. Applicando la Proposizione 2.4.1 si ottiene

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leq n\leq N} |M_n| \geq \lambda\right) \leq \lambda^{-1}\mathbb{E}\left[|M_N|\mathbf{1}_{\{\max_{0\leq n\leq N}|M_n|\geq\lambda\}}\right].$$

Quindi, se $M^* = \max_{0\leq n\leq N} |M_n|$, vale

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M^*)^P] &= \int_0^{+\infty} \mathbf{P}((M^*)^p > r)\,\mathrm{d}r \\
(r = \lambda^p) \quad &= \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(M^* > \lambda)p\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[|M_N|\mathbf{1}_{\{M^*\geq\lambda\}}\right] p\frac{\lambda^{p-1}}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \\
(\text{Tonelli}) \quad &= \mathbb{E}\left[|M_N|p\int_0^{M^*} \lambda^{p-2}\,\mathrm{d}\lambda\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|M_N|\frac{p}{p-1}(M^*)^{p-1}\right] \\
(\text{Hölder}) \quad &\leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|M_N|^p]^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}[(M^*)^p]^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

da cui segue la tesi dividendo per $\mathbb{E}[(M^*)^p]^{1-\frac{1}{p}}$ quando $\mathbb{E}[(M^*)^p] \in (0, +\infty)$. Se invece è $\mathbb{E}[(M^*)^p] = 0$ la tesi è banale. Invece per assicurarci che $\mathbb{E}[(M^*)^p] < +\infty$ si ripete il ragionamento partendo da $M^* \wedge k$ con $k \in \mathbb{N}_+$, ottenendo

$$\mathbb{E}[(M^* \wedge k)^p]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|M_N|^p]^{\frac{1}{p}}$$

che ci dà la finitezza voluta passando al limite per $k \to +\infty$ ed usando il Teorema di Beppo Levi. □

Teorema 2.4.3 (Disuguaglianze massimali di Doob): *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$. Se $(M_t)_{t\in I}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, è una martingala continua a destra, allora posto $M^* = \sup_{t\in I} |M_t|$ e preso $\lambda > 0$ vale*

$$\mathbf{P}(M^* > \lambda) \leq \frac{\sup_{t\in I}\mathbb{E}[|M_t|^p]}{\lambda^p} \quad \forall p \in [1, +\infty)$$

e anche

$$\mathbb{E}[(M^*)^p]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t\in I} \mathbb{E}[|M_t|^p]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p \in (1,+\infty)$$

Dimostrazione. Per $F \subset I$ poniamo $M^*_F = \max_{f\in F} |M_t|$. Sia $D = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}_+} \subset I$ denso numerabile, poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ l'insieme $F_n = \{t_i\}_{i=1}^n$. Per le Disuguaglianze massimali di Doob nel caso a tempi finiti (Corollario precedente) si ottiene per ogni $n \in \mathbb{N}_+$

$$\mathbf{P}\left(M^*_{F_n} > \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_{t_n}|^p]}{\lambda} \leq \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}[|M_t|^p]}{\lambda^p} \quad \forall p \in [1,+\infty)$$

$$\mathbb{E}\left[\left(M^*_{F_n}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|M_{t_n}|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t\in I} \mathbb{E}[|M_t|^p]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p \in (1,+\infty)$$

dunque prendendo il limite per $n \to +\infty$ si ottengono grazie al Teorema di Beppo Levi le disuguaglianze per M^*_D, ma per continuità a destra vale $M^*_D = M^*$, dunque segue la tesi. □

Esempio 2.4.4: Sia $(B_t)_{t\geq 0}$ MB std. Poniamo $S_t = \max_{0\leq s\leq t} B_s$, allora

$$\mathbf{P}(S_t > at) \leq \exp\left(-\frac{a^2 t}{2}\right).$$

Infatti osserviamo che la martingala $(M^\alpha_t)_{t\geq 0}$ con

$$M^\alpha_t = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$$

in cui $\alpha > 0$, è t.c.

$$\max_{0\leq s\leq t} M^\alpha_s \geq \exp\left(\alpha S_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right).$$

Dunque nell'evento $\{S_t > \alpha t\}$ si ottiene

$$\max_{0\leq s\leq t} M^\alpha_s \geq \exp\left(\alpha a t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$$

e quindi usando una delle Disuguaglianze massimali di Doob si ottiene

$$\mathbf{P}(S_t > at) \leq \mathbf{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} M^\alpha_s \geq \exp\left(\alpha a t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)\right) \leq \mathbb{E}[M^\alpha_t] \exp\left(-\alpha a t + \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$$

dunque per $\alpha = a$ si ottiene quanto voluto.

2.5 Teorema degli Attraversamenti di Doob a Tempo Discreto

Definizione 2.5.1: Consideriamo un insieme di tempi $F = \{t_i\}_{i=1}^d$ con $t_0 < t_1 < \ldots < t_d$ ed un processo stocastico $(M_t)_{t\in F}$. Consideriamo per $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, i seguenti tempi d'arresto (facili verifiche)

$$S_1(a,b) = \inf\{t \in F \mid M_t \leq a\}$$

$$S_2(a,b) = \inf\{f \in F \mid t \geq S_1(a,b),\ M_t \geq b\}$$

e, ricorsivamente, per ogni $k \in \mathbb{N}_+$

$$S_{2k+1}(a,b) = \inf\{t \in F \mid t \geq S_{2k}(a,b),\ M_t \leq a\}$$

$$S_{2k+2}(a,b) = \inf\{t \in F \mid t \geq S_{2k+1}(a,b),\ M_t \geq b\}.$$

Osserviamo che essendo $|F| = d$ vale $S_n(a,b) = +\infty$ per ogni $n > d$.

Quindi definiamo gli *up-crossings* di $(M_t)_{t\in F}$ di $[a,b]$ come la v.a.

$$U((M_t)_{t\in F}, [a,b]) = \sum_{k\in\mathbb{N}_+} \mathbf{1}_{\{S_{2k-1}<S_{2k}<+\infty\}}$$

ed i *down-crossings* di $(M_t)_{t\in F}$ di $[a,b]$ come la v.a.

$$D((M_t)_{t\in F}, [a,b]) = U((-M_t)_{t\in F}, F, [-b,-a]).$$

Poi se I è infinito e $(M_t)_{t\in I}$ è un processo stocastico definiamo gli *up-crossings* ed i *down-crossings* di $(M_t)_{t\in I}$ di $[a,b]$ rispettivamente come

$$U((M_t)_{t\in I}, [a,b]) = \sup_{\substack{F\subset I\\ F \text{ finito}}} U((M_t)_{t\in F}, [a,b])$$

$$D((M_t)_{t\in I}, [a,b]) = \sup_{\substack{F\subset I\\ F \text{ finito}}} D((M_t)_{t\in F}, [a,b]).$$

Osservazione 2.5.2: In sostanza, nel contesto della Definizione precedente, gli up-crossings contano quante volte si attraversa la fascia tra a e b dal basso verso l'alto, invece i down-crossings contano quante volte la si attraversa dall'alto verso il basso.

Osserviamo inoltre che se I è numerabile sia gli up-crossings che i down-crossings sono v.a..

Teorema 2.5.3 (degli attraversamenti di Doob): *Sia $I \subset \mathbb{R}$ numerabile. Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ e consideriamo un processo stocastico $(M_t)_{t\in I}$ e due numeri $a,b \in \mathbb{R}$ t.c. $a < b$. Se $(M_t)_{t\in I}$ è una supermartingala, allora vale*

$$\mathbb{E}\left[U((M_t)_{t\in I}, [a,b])\right] \leq \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[(M_t - a)^-\right]}{b-a} \leq \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}[|M_t|] + |a|}{b-a}.$$

Se invece $(M_t)_{t\in I}$ è una submartingala allora vale

$$\mathbb{E}\left[D((M_t)_{t\in I}, [a,b])\right] \leq \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[(M_t - b)^+\right]}{b-a} \leq \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}[|M_t|] + |b|}{b-a}.$$

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che basta dimostrare l'enunciato per le supermartingale, infatti se questo valesse, presa $(M_t)_{t\in I}$ una submartingala, $(-M_t)_{t\in I}$ è una supermartingala e quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[D((M_t)_{t\in I}, [a,b])\right] &= \mathbb{E}\left[U((-M_t)_{t\in I}, [-b,-a])\right]\\ &\leq \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[(-M_t + b)^-\right]}{b-a}\\ &= \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[(-(M_t - b))^-\right]}{b-a}\\ &= \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[(M_t - b)^+\right]}{b-a}.\end{aligned}$$

Dimostriamo quindi l'enunciato per le supermartingale. Supponiamo che la tesi valga per I finito. Allora se $I = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, preso per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $F_n = \{t_i\}_{i=0}^n$ si ha

$$\mathbb{E}[U((M_t)_{t\in F_n}, [a,b])] \leq \frac{\sup_{t\in F_n} \mathbb{E}\left[(M_t - a)^-\right]}{b-a} \leq \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[(M_t - a)^-\right]}{b-a}$$

e quindi passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene utilizzando il Teorema di Beppo Levi

$$\mathbb{E}[U((M_t)_{t\in I}, [a,b])] \le \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[(M_t - a)^-\right]}{b-a}.$$

Osserviamo inoltre che la seconda disuguaglianza segue banalmente dalla prima, infatti

$$\begin{aligned}\frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[(M_t - a)^-\right]}{b-a} &\le \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[|M_t - a|\right]}{b-a}\\ &\le \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[|M_t| + |a|\right]}{b-a}\\ &= \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}[|M_t|] + |a|}{b-a}.\end{aligned}$$

Quindi dimostriamo la tesi per $I = F = \{t_i\}_{i=0}^d$ con $t_0 < t_1 < ... < t_d$. Per ogni $k = 0, 1, ..., d$ scriviamo il Teorema 2.3.3 d'arresto opzionale a tempi discreti con i tda $S_{2k+1} \wedge t_d \le S_{2k+2} \wedge t_d$ ottenendo

$$\mathbb{E}\left[M_{S_{2k+1}\wedge t_d}\right] \ge \mathbb{E}\left[M_{S_{2k+2}\wedge t_d}\right] \quad \forall k = 0, ..., d$$

dunque

$$\begin{aligned}0 &\ge \mathbb{E}\left[M_{S_{2k+2}\wedge t_d} - M_{S_{2k+1}\wedge t_d}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[(M_{S_{2k+2}\wedge t_d} - M_{S_{2k+1}})\mathbf{1}_{\{S_{2k+2}<+\infty\}} + (M_{S_{2k+2}\wedge t_d} - M_{S_{2k+1}})\mathbf{1}_{\{S_{2k+2}=+\infty\}}\right]\\ &\ge (b-a)\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{S_{2k+2}=+\infty\}}\right] + \mathbb{E}\left[(M_{t_d} - M_{S_{2k+1}})\mathbf{1}_{\{S_{2k+1}<S_{2k+2}=+\infty\}}\right]\\ &\ge (b-a)\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{S_{2k+2}=+\infty\}}\right] - \mathbb{E}\left[(M_{t_d} - a)^-\mathbf{1}_{\{S_{2k+1}<S_{2k+2}=+\infty\}}\right]\end{aligned}$$

(in cui per l'ultima minorazione abbiamo usato che se $S_{2k+1} < +\infty$ si ha $M_{t_d} - M_{S_{2k+1}} \ge M_{t_d} - a \ge -(M_{t_d} - a)^-$) e sommando su $k = 0, 1, ..., d$ otteniamo

$$0 \ge (b-a)\mathbb{E}\left[U((M_t)_{t\in F}, [a,b])\right] - \mathbb{E}\left[(M_{t_d} - a)^- \sum_{k=0}^{d} \mathbf{1}_{A_k}\right]$$

con $A_k = \{S_{2k+1} < S_{2k+2} = +\infty\}$ per ogni $k = 0, ..., d$. Ma $A_k \cap A_{k'} = \emptyset$ se $k < k'$, infatti $S_{2k+2} \le S_{2k'+1}$, quindi se $\omega \in A_k$ vale $S_{2k+2}(\omega) = +\infty$ che implica $S_{2k'+1}(\omega) = +\infty$ e quindi $\omega \notin A_{k'}$. Di conseguenza abbiamo

$$\mathbb{E}\left[(M_{t_d} - a)^- \sum_{k=0}^{d} \mathbf{1}_{A_k}\right] \le \mathbb{E}\left[(M_{t_d} - a)^-\right] \le \sup_{t\in F} \mathbb{E}\left[(M_t - a)^-\right]$$

da cui segue la tesi. □

2.6 Teoremi di Convergenza per Submartingale a Tempo Discreto

Teorema 2.6.1 (di convergenza per submartingale a tempo discreto): *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una submartingala limitata in $L^1(\mathbf{P})$, cioè t.c.*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|] < +\infty,$$

allora $\exists \lim_{n\to+\infty} M_n$ $\mathbf{P}$-q.c. e tale limite risulta essere integrabile.

Dimostrazione. Sappiamo dal Teorema 2.5.3 che presi comunque $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ vale

$$\mathbb{E}\left[D((M_n)_{n\in\mathbb{N}}, [a,b])\right] \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|] + |b|}{b-a} < +\infty$$

dunque $D((M_n)_{n\in\mathbb{N}}, [a,b]) < +\infty$ **P**-q.c. ed in particolare $D((M_n)_{n\in\mathbb{N}}, [a,b]) < +\infty$ **P**-q.c. per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. Dunque vale

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} M_n = \limsup_{n\in\mathbb{N}} M_n \quad \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

infatti se fosse $\liminf_{n\in\mathbb{N}} M_n < \limsup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ su un insieme $A \subset \Omega$ con $\mathbf{P}(A) > 0$, si avrebbe l'esistenza di due numeri $a, b \in \mathbb{Q}$ t.c.

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} M_n < a < b < \limsup_{n\in\mathbb{N}} M_n \quad \text{su } A$$

cosa che implicherebbe $D((M_n)_{n\in\mathbb{N}}, [a,b]) = +\infty$ su A (fare un disegno per convincersene), che è un assurdo con quanto detto in precedenza. Dunque il limite $\lim_{n\to+\infty} M_n$ esiste in $\overline{\mathbb{R}}$ **P**-q.c. e quindi il limite $\lim_{n\to+\infty} |M_n|$ esiste in $[0,+\infty]$ **P**-q.c. e per il Lemma di Fatou si ha

$$\mathbb{E}\left[\lim_{n\to+\infty} |M_n|\right] \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|] < +\infty$$

cosa che ci dice che il limite è integrabile. □

Osservazione 2.6.2: Nel contesto del Teorema precedente, possiamo concludere che il limite trovato è anche limite della successione $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbf{P})$? La risposta è NO, nemmeno se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala e quel che segue è un esempio di questo fenomeno.

Prendiamo $(B_t)_{t\geq 0}$ MB std e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sia $(B_t^\alpha)_{t\geq 0}$ il processo siffatto

$$B_t^\alpha = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right).$$

Ricordiamo che $(B_t^\alpha)_{t\geq 0}$ è una martingala positiva rispetto alla filtrazione naturale del MB $(\mathcal{F}_t^B)_{n\in\mathbb{N}}$ (Proposizione 2.2.9). In particolare è una martingala $(B_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n^B)_{n\in\mathbb{N}}$. Inoltre $\mathbb{E}\left[B_0^\alpha\right] = 1$, mentre $B_n^\alpha \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, infatti se $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\exp\left(\alpha B_n - \frac{\alpha^2 n}{2}\right) > \varepsilon\right) &= \mathbf{P}\left(\alpha B_n > \log(\varepsilon) - \frac{\alpha^2 n}{2}\right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\alpha^2 B_n^2 > \left(\log(\varepsilon) - \frac{\alpha^2 n}{2}\right)^2\right) \\
&\leq \left(\log(\varepsilon) - \frac{\alpha^2 n}{2}\right)^{-2} \alpha^2 \mathbb{E}\left[B_n^2\right] \\
&= \left(\log(\varepsilon) - \frac{\alpha^2 n}{2}\right)^{-2} \alpha^2 n \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

per $n \to +\infty$, dunque il limite **P**-q.c. è necessariamente 0 e se $(B_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ convergesse in $L^1(\mathbf{P})$ si dovrebbe avere $1 = \mathbb{E}\left[B_n^\alpha\right] \to 0$ per $n \to +\infty$ che non può avvenire.

Teorema 2.6.3: *Fissiamo una filtrazione* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Sia* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una martingala, sono equivalenti:*

(1) $\lim_{n\to+\infty} M_n$ *esiste in* $L^1(\mathbf{P})$*;*

(2) $\exists M_\infty \in L^1(\mathbf{P})$ *t.c.* $\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ $\mathbf{P}$*-q.c. per ogni* $n \in \mathbb{N}$*;*

(3) la famiglia di v.a. $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è UI.*

Dimostrazione. Supponiamo che valega (1), ovvero esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} M_n = M_\infty$ in $L^1(\mathbf{P})$, allora tale limite sarà t.c. $M_\infty \in L^1(\mathbf{P})$ e misurabile rispetto a $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$. Per la proprietà di martingala, fissato $n \in \mathbb{N}$ per ogni $m \geq n$ si ha

$$\mathbb{E}[M_m \mid \mathcal{F}_n] = M_n$$

e quindi essendo la speranza condizionale un operatore lineare continuo $L^1(\mathbf{P}) \to L^1(\mathbf{P})$ si ottiene

$$M_n = \mathbb{E}[M_m \mid \mathcal{F}_n] \xrightarrow{L^1(\mathbf{P})} \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n]$$

per $m \to +\infty$, da cui segue (2).

Adesso supponiamo che valga (2), allora $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\infty\ \sigma\text{-algebra}\}$ e questa famiglia è UI, dunque anche $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo è, ossia vale (3).

Se invece vale (3), allora $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|] < +\infty$ e quindi esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} M_n = M_\infty$ come limite $\mathbf{P}$-q.c. integrabile per il Teorema 2.6.1. Quindi possiamo applicarre il Teorema di convergenza di Vitali per ottenere

$$\mathbb{E}[|M_n - M_\infty|] \longrightarrow 0$$

ovvero la convergenza anche in $L^1(\mathbf{P})$. □

Osservazione 2.6.4: Nel contesto del Teorema precedente, si ha che se vale una (e quindi tutte) tra (1),(2),(3) allora $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|] < +\infty$ e $M_\infty = \lim_{n\to+\infty} M_n$ $\mathbf{P}$-q.c. grazie al Teorema 2.6.1.

Corollario 2.6.5: *Fissiamo una filtrazione* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Sia* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una martingala. Se* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è limitata in* $L^p(\mathbf{P})$ *con* $p \in (1, +\infty)$*, ossia*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|^p] < +\infty$$

allora valgono (1),(2) e (3) del Teorema precedente. In particolare $M_\infty \in L^p(\mathbf{P})$ *e* $M_n \to M_\infty$ *in* $L^p(\mathbf{P})$*.*

Dimostrazione. La condizione (1) vale se $\exists p > 1$ t.c. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|^p] < +\infty$. Infatti per la Disuguaglianza di Hölder $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^1(\mathbf{P})$, quindi $M_n \to M_\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. (per il Teorema 2.6.1) per una qualche v.a. M_∞. Inoltre la successione $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è dominata da $\sup_{n\in\mathbb{N}} |M_n| \in L^p$ e quindi $M_n \to M_\infty$ in $L^p(\mathbf{P})$ e $M_\infty \in L^p(\mathbf{P})$. Infatti per una delle Disuguaglianze massimali di Doob (Teorema 2.4.3) vale

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} |M_n|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|^p] < +\infty$$

e $|M_n|^p \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |M_n|^p$ dunque si applica il Teorema di convergenza dominata per ottenere sia che $M_\infty \in L^p(\mathbf{P})$ sia che $M_n \to M_\infty$ in $L^p(\mathbf{P})$ (ed in particolare anche in $L^1(\mathbf{P})$). □

Teorema 2.6.6 (di convergenza per submartingale a tempo discreto negativo): *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in-\mathbb{N}}$. Sia $(M_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ una submartingala, allora esiste il limite $\lim_{n\to-\infty} M_n$ $\mathbf{P}$-q.c. ed in $L^1(\mathbf{P})$ (in particolare $(M_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ è UI), inoltre chiamando tale limite $M_{-\infty}$ vale*

$$M_{-\infty} \leq \mathbb{E}[M_0 \,|\mathcal{F}_{-\infty}] \;\; \mathbf{P}-q.c.$$

in cui $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\in-\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, con l'uguaglianza se $(M_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ è una martingala.

Dimostrazione. Per la proprietà di submartingala, vale $M_n \leq \mathbb{E}[M_0 \mid \mathcal{F}_n]$ per ogni $n \in -\mathbb{N}$, dunque

$$\mathbb{E}[|M_n|] \leq \mathbb{E}[|\mathbb{E}[M_0 \mid \mathcal{F}_n]|] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|M_0| \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[|M_0|]$$

ossia $\{M_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ è limitata in $L^1(\mathbf{P})$, dunque esiste il limite $\mathbf{P}$-q.c. per il Teorema 2.6.1. Chiamiamo tale limite $M_{-\infty}$. Per il Teorema di convergenza di Vitali tale limite è anche in $L^1(\mathbf{P})$. Se $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$ e $k, n \in -\mathbb{N}$, con $k \leq n$, vale $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$, quindi usando la proprietà di submartingala

$$\mathbb{E}[M_k \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_A]$$

e $\mathbb{E}[M_k \mathbf{1}_A] \to \mathbb{E}[M_{-\infty}\mathbf{1}_A]$, dunque (in particolare) quando $n = 0$, si ottiene

$$\mathbb{E}[M_{-\infty}\mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[M_0 \mathbf{1}_A]$$

e dall'arbitrarietà di $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$ si ottiene $M_{-\infty} \leq \mathbb{E}[M_0 \mid \mathcal{F}_{-\infty}]$.

Se invece $(M_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ è una martingala si usa la proprietà di martingala e si ottiene allo stesso modo l'uguaglianza invece che della disuguaglianza. □

Corollario 2.6.7 (Convergenza dominata condizionale con filtrazione): *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processo stocastico dominato da una v.a. $Y \in L^1(\mathbf{P})$ e X v.a. t.c. $X_n \to X$ $\mathbf{P}$-q.c. Allora*

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] \longrightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty] \;\; \mathbf{P}\text{-}q.c.$$

in cui $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Dimostrazione. (Facoltativo) Sia $\varepsilon > 0$ e siano

$$U_m = \inf_{n\geq m} X_n \;\text{ e }\; V_m = \sup_{n\geq m} X_n$$

dove $m \in \mathbb{N}$ è t.c. $\mathbb{E}[V_m - U_m] < \varepsilon$. Ma allora per ogni $n \geq m$ si ha

$$\mathbb{E}[U_m \mid \mathcal{F}_n] \leq \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] \leq \mathbb{E}[V_m \mid \mathcal{F}_n]$$

e $(E[U_m \mid \mathcal{F}_n])_{n\geq m}$ e $(E[V_m \mid \mathcal{F}_n])_{n\geq m}$ sono martingale limitate in $L^1(\mathbf{P})$ (da $\|Y\|_{L^1(\mathbf{P})}$), quindi soddisfano le ipotesi del Teorema 2.6.1 e prendendo i limiti inferiori e superiori otteniamo

$$\mathbb{E}[U_m \mid \mathcal{F}_\infty] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] \leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] \leq \mathbb{E}[V_m \mid \mathcal{F}_\infty].$$

inoltre ovviamente vale In particolare si ha

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] - \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] \leq \mathbb{E}[V_m \mid \mathcal{F}_\infty] - \mathbb{E}[U_m \mid \mathcal{F}_\infty]$$

e quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] - \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n]\right] &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[V_m \mid \mathcal{F}_\infty] - \mathbb{E}[U_m \mid \mathcal{F}_\infty]\right] \\ &= \mathbb{E}[V_m - U_m] < \varepsilon.\end{aligned}$$

che per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ diventa

$$\mathbb{E}\left[\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] - \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n]\right] = 0.$$

ma l'integranda è non negativa quindi

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] = \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] \quad \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

ossia il limite $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n]$ esiste **P**-q.c. e deve essere $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty]$. □

2.7 Teorema d'Arresto Opzionale a Tempo Continuo

Passiamo adesso alla dimostrazione del teorema d'arresto opzionale a tempi continui.

Teorema 2.7.1 (d'arresto opzionale): *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sia $(M_t)_{t\geq 0}$ un processo stocastico adattato, integrabile e* **P***-q.c. continuo a destra. Allora:*

(1) $(M_t)_{t\geq 0}$ è una martingala se e solo se per ogni $T, S : \Omega \to [0, +\infty)$ tda limitati t.c. $S \leq T$ vale che $M_S, M_T \in L^1(\mathbf{P})$ e

$$\mathbb{E}[M_S] = \mathbb{E}[M_T];$$

(2) $(M_t)_{t\geq 0}$ è una submartingala se e solo se per ogni $T, S : \Omega \to [0, +\infty)$ tda limitati t.c. $S \leq T$ vale che $M_S, M_T \in L^1(\mathbf{P})$ e

$$\mathbb{E}[M_S] \leq \mathbb{E}[M_T];$$

(3) $(M_t)_{t\geq 0}$ è una supermartingala se e solo se per ogni $T, S : \Omega \to [0, +\infty)$ tda limitati t.c. $S \leq T$ vale che $M_S, M_T \in L^1(\mathbf{P})$ e

$$\mathbb{E}[M_S] \geq \mathbb{E}[M_T].$$

In particolare:

(1) se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una martingala e $S \leq T$ sono tda limitati vale

$$M_S = \mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S];$$

(2) se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una submartingala e $S \leq T$ sono tda limitati vale

$$M_S \leq \mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S];$$

(3) se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una supermartingala e $S \leq T$ sono tda limitati vale

$$M_S \geq \mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S].$$

Dimostrazione. (Facoltativo) Osserviamo innanzitutto che basta provare il risultato per il caso delle submartingale. Infatti per la prima parte il caso delle supermartingale segue da quello delle submartingale considerando il processo $(-M_t)_{t\geq 0}$ e per quello per martingale si ragiona nel seguente modo: un processo è martingala se e solo se è sia submartingala che supermartingala che, a questo punto, equivale a quanto voluto con i tda (si applicano entrambi i risultati per submartingale e supermartingale). Per la seconda parte il ragionamento è analogo, il caso delle supermartingale segue da quello delle submartingale considerando il processo $(-M_t)_{t\geq 0}$ e quello per martingale segue a questo punto applicando entrambi i risultati provati per submartingale e supermartingale.

Dimostriamo quindi il caso delle submartingale. Sia $C \in \mathbb{N}_+$ t.c. $S \leq T \leq C$. Approssimiamo dall'alto i due tda S, T con due successioni monotone decrescenti di tda semplici $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (posso farlo per la Proposizione 2.1.24) t.c. $S_n \leq T_n \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e t.c. T_n, S_n hanno valori in $\{q2^{-n} \mid q \in \mathbb{N}_+\}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$, per il Teorema 2.3.3 d'arresto opzionale a tempo discreto applicato col processo $(M_{q2^{-n}})_{q\in\mathbb{N}_+}$ ed i tda $S_n \leq T_n$, si ha

$$\mathbb{E}[M_{S_n}] \leq \mathbb{E}[M_{T_n}].$$

A questo punto se dimostrassimo che $(M_{S_n})_{n\in\mathbb{N}}, (M_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sono UI, si avrebbe l'integrabilità dei loro limiti M_S, M_T e per il Teorema di Vitali (grazie alla continuità a destra di $(M_t)_{t\geq 0}$) si avrebbe

$$\mathbb{E}[M_S] \leq \mathbb{E}[M_T]$$

e da questo segue anche la seconda parte, infatti preso $A \in \mathcal{F}_S$, sostituendo S con il tda

$$S_A(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & \text{se } \omega \in A \\ T(\omega) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ottiene grazie a quanto appena mostrato

$$\mathbb{E}[(M_T - M_S)\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[M_T - M_{S_A}] \geq 0$$

in quanto $S' \leq T$, e da questo segue

$$M_S \leq \mathbb{E}[M_T \,|\mathcal{F}_S].$$

Infine per il viceversa della prima parte consideriamo $s, t \geq 0$, $s \leq t$, e prendiamo $A \in \mathcal{F}_s$, allora preso il tda

$$s_A(\omega) = \begin{cases} s & \text{se } \omega \in A \\ t & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[M_t - M_{s_A}] \geq 0$$

da cui segue

$$M_s \leq \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s]$$

che è la proprietà di submartingala.

Per concludere la dimostrazione manca solo l'uniforme integrabilità dei processi $(M_{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(M_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamolo. Osserviamo che Preso $A \in \mathcal{F}_{S_n}$ ed $m \geq n$, consideriamo il tda

$$S_{n,m}(\omega) = \begin{cases} S_n(\omega) & \text{se } \omega \in A \\ S_m(\omega) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ottiene, applicando il Teorema 2.3.3 d'arresto opzionale a tempo discreto alla submartingala $(M_i)_{i\in S_{n,m}(\Omega)}$ (in cui si deve pensare $S_{n,m}(\Omega)$ ordinato) ed ai tda $S_{n,m} \geq S_m$, quanto segue

$$\mathbb{E}[(M_{S_n} - M_{S_m})\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[M_{S_{n,m}} - M_{S_m}] \geq 0$$

e quindi

$$\mathbb{E}[M_{S_m}] \leq \mathbb{E}[M_{S_n} \mid \mathcal{F}_{S_m}]$$

di conseguenza se per ogni $n \in \mathbb{N}$ chiamo $Y_{-n} = M_{S_n}$, si ha che $(Y_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ è una submartingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{G}_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ con $\mathcal{G}_{-n} = \mathcal{F}_{S_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Analogamente se per ogni $n \in \mathbb{N}$ chiamiamo $Z_{-n} = M_{T_n}$, il processo $(Z_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ è una submartingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{G}'_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ con $\mathcal{G}'_{-n} = \mathcal{F}_{T_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque si ha quanto voluto grazie al Teorema 2.6.6. □

Corollario 2.7.2: *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ e T un tda:*

(1) se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una martingala allora anche $(M_t^T)_{t\geq 0} = (M_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ è una martingala;

(2) se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una submartingala anche $(M_t^T)_{t\geq 0} = (M_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ è una submartingala;

(3) se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una supermartingala anche $(M_t^T)_{t\geq 0} = (M_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ è una supermartingala.

Dimostrazione. (Facoltativo) Basta provare il risultato per $(M_t)_{t\geq 0}$ submartingala. Siano S_1, S_2 tda limitati, $S_1 \leq S_2$, allora anche $S_1 \wedge T, S_2 \wedge T$ sono tda limitati e $S_1 \wedge T \leq S_2 \wedge T$, quindi per il Teorema precedente

$$\mathbb{E}\left[M_{S_1\wedge T}\right] \leq \mathbb{E}\left[M_{S_2\wedge T}\right]$$

ossia

$$\mathbb{E}\left[M_{S_1}^T\right] \leq \mathbb{E}\left[M_{S_2}^T\right]$$

da cui segue la tesi sempre per il Teorema precedente. □

Inoltre vale il seguente utile fatto.

Proposizione 2.7.3: *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sia $(M_t)_{t\geq 0}$ una martingala continua a destra UI, allora per ogni S, T, $S \leq T$, tda $\mathbf{P}$-q.c. finiti vale*

$$M_S = \mathbb{E}\left[M_T \mid \mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{F}_S\right]$$

in cui $M_\infty \in L^1(\mathbf{P})$ è il limite di $(M_t)_{t\geq 0}$.

Dimostrazione. Sappiamo che se S e T sono limitati per il Teorema precedente si ha quanto voluto. Inoltre se $\mathscr{F} \subset L^1(\mathbf{P})$ è una famiglia UI la sua chiusura in $L^1(\mathbf{P})$, $\overline{\mathscr{F}}$ è sempre UI (semplice verifica). Prendiamo $\mathscr{F} = \{\mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{G}\right] \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ è una σ-algebra$\}$, essendo ogni $\mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{F}_S\right]$ limite in $L^1(\mathbf{P})$ di $(\mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{F}_{S_n}\right])_{n\in\mathbb{N}}$ con S_n tda semplice t.c. $S_n \searrow S$. ... (Theorem 3.2 Revuz-Yor). □

2.8 Convergenza di Submartingale a Tempo Continuo

Vediamo adesso il Teorema di convergenza per submartingale a tempo continuo.

Teorema 2.8.1 (di convergenza per submartingale a tempo continuo): *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sia $(M_t)_{t\geq 0}$ una submartingala $\mathbf{P}$-q.c. continua a destra e limitata in $L^1(\mathbf{P})$, cioè t.c.*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|] < +\infty,$$

allora $\exists \lim_{t\to+\infty} M_t$ $\mathbf{P}$-q.c. e tale limite risulta essere integrabile.

Dimostrazione. (Facoltativo) Per quanto riguarda l'esistenza del limite ci basta dimostrare che $\lim_{t\to+\infty} M_t = M_\infty$ **P**-q.c. se e solo se

$$\lim_{\substack{q\to+\infty\\ q\in\mathbb{Q}_+}} M_q = M_\infty \ \ \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

in quanto detto questo possiamo ricalcare il ragionamento quanto fatto per il Teorema 2.6.1 utilizzando il Teorema 2.5.3 degli attraversamenti di Doob. Un implicazione è ovvia, vediamo quella non banale. Supponiamo $\lim_{\substack{q\to+\infty\\ q\in\mathbb{Q}_+}} M_q = M_\infty$ **P**-q.c. e fissiamo $\omega \in \Omega$ t.c. la realtiva traiettoria sia continua a destra e

$$\lim_{\substack{q\to+\infty\\ q\in\mathbb{Q}_+}} M_q(\omega) = M_\infty(\omega)$$

e fissiamo anche $\varepsilon > 0$. Per convergenza esiste $Q_{\varepsilon,\omega} \in \mathbb{Q}_+$ t.c. per $q \geq Q_{\varepsilon,\omega}$ vale

$$|M_q(\omega) - M_\infty(\omega)| \leq \varepsilon$$

inoltre per continuità a destra, preso $t \geq Q_{\varepsilon,\omega}$, esiste anche un $q_{\varepsilon,\omega,t} \in \mathbb{Q}_+$, $q_{\varepsilon,\omega,t} \geq t$, t.c.

$$|M_{q_{\varepsilon,\omega,t}}(\omega) - M_t(\omega)| \leq \varepsilon$$

quindi si ottiene

$$|M_q(\omega) - M_\infty(\omega)| \leq |M_q(\omega) - M_{q_{\varepsilon,\omega,t}}(\omega)| + |M_{q_{\varepsilon,\omega,t}}(\omega) - M_\infty(\omega)| \leq 2\varepsilon$$

da cui segue quanto voluto.

Per quanto riguarda l'integrabilità basta usare il Lemma di Fatou ad una successione $(M_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} M_{t_n} = \lim_{t\to+\infty} M_t = M_\infty$ **P**-q.c. per ottenere

$$\mathbb{E}[|M_\infty|] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_{t_n}|] \leq \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|] < +\infty.$$

□

Teorema 2.8.2: *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sia $(M_t)_{t\geq 0}$ una martingala* **P**-*q.c. continua a destra, sono equivalenti:*

(1) $\lim_{t\to+\infty} M_t$ *esiste in* $L^1(\mathbf{P})$*;*

(2) $\exists M_\infty \in L^1(\mathbf{P})$ *t.c.* $\mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathcal{F}_t] = M_t$ **P**-*q.c. per ogni* $t \geq 0$*;*

(3) la famiglia di v.a. $\{M_t\}_{t\geq 0}$ *è UI.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Che (2) implichi (3) è noto, infatti (2) implica $\{M_t\}_{t\geq 0} \subset \{\mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathcal{G}] \,|\, \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\infty\ \sigma\text{-algebra}\}$ e quest'ultima è UI.

Se vale (3) allora la martingala considerata è limitata in $L^1(\mathbf{P})$ e possiamo usare il Teorema 2.8.1 per ottenere il limite puntuale **P**-q.c. per $t \to +\infty$, poi possiamo usare il Teorema di Vitali per ottenere la convergenza in $L^1(\mathbf{P})$ ossia (1).

Infine se vale (1) con limite $M_\infty \in L^1(\mathbf{P})$ allora fissato $t \geq 0$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ t.c. $h_n \nearrow +\infty$, allora per la proprietà di martingala ed essendo la speranza condizionale un operatore continuo $L^1(\mathbf{P}) \to L^1(\mathbf{P})$, si ottiene

$$M_t = \mathbb{E}[M_{t+h_n} \mid \mathcal{F}_t] \xrightarrow{L^1(\mathbf{P})} \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_t]$$

per $n \to +\infty$, da cui segue (2). □

Osservazione 2.8.3: Nel contesto del Teorema precedente, si ha che se vale una (e quindi tutte) tra (1),(2),(3) allora $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$ e $M_\infty = \lim_{t\to+\infty} M_t$ $\mathbf{P}$-q.c. grazie al Teorema 2.8.1.

Corollario 2.8.4: *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sia $(M_t)_{t\geq 0}$ una martingala. Se $(M_t)_{t\geq 0}$ è limitata in $L^p(\mathbf{P})$ con $p \in (1, +\infty)$, ossia*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|^p] < +\infty$$

allora valgono (1),(2) e (3) del Teorema precedente. In particolare $M_\infty \in L^p(\mathbf{P})$ e $M_t \to M_\infty$ in $L^p(\mathbf{P})$ per $t \to +\infty$.

Dimostrazione. (Facoltativo) La condizione (1) vale se $\exists p > 1$ t.c. $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|^p] < +\infty$. Infatti per la Disuguaglianza di Hölder $(M_t)_{t\geq 0}$ è limitata in $L^1(\mathbf{P})$, quindi $M_t \to M_\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. (per il Teorema 2.8.1) per una qualche v.a. M_∞. Inoltre la famiglia $(M_t)_{t\geq 0}$ è dominata da $\sup_{t\geq 0} |M_t| \in L^p(\mathbf{P})$, quindi $M_t \to M_\infty$ in $L^p(\mathbf{P})$ e $M_\infty \in L^p(\mathbf{P})$. Infatti per una delle Disuguaglianze massimali di Doob (Teorema 2.4.3) vale

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |M_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|^p] < +\infty$$

e $|M_t|^p \leq \sup_{t\geq 0} |M_t|^p$ dunque si applica il Teorema di convergenza dominata per ottenere sia $M_\infty \in L^p(\mathbf{P})$ che la convergenza $M_t \to M_\infty$ in $L^p(\mathbf{P})$ (e quindi anche in $L^1(\mathbf{P})$). □

Osservazione 2.8.5: Nel seguito quando $(M_t)_{t\geq 0}$ sarà una submartingala o una supermartingala indicheremo sempre con M_∞ il suo limite $\mathbf{P}$-q.c. se esiste.

2.9 Regolarizzazione di Submartingale a Tempo Continuo

Vediamo adesso i fondamentali teoremi di regolarizzazione di submartingale a tempo continuo. Osserviamo che poter lavorare con una modificazione continua destra (o anche solo $\mathbf{P}$-q.c. continua a destra) di una martingala è molto vantaggioso, in quanto è possibile applicare tutti i teoremi di convergenza a tempo continuo dimostrati nella sezione precedente.

Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ed un processo stocastico $(M_t)_{t\geq 0}$, chiamiamo $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t \mid t \geq 0)$. Poniamo

$$M_{t^-} = \limsup_{\substack{s\to t^- \\ s\in\mathbb{Q}}} M_s \quad \text{per } t > 0$$

$$M_{t^+} = \limsup_{\substack{s\to t^+ \\ s\in\mathbb{Q}}} M_s \quad \text{per } t \geq 0.$$

Teorema 2.9.1: *Se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una submartingala, allora esistono $\mathbf{P}$-q.c. i limiti $\lim_{\substack{s\to t^- \\ s\in\mathbb{Q}}} M_s$ per $t > 0$ e $\lim_{\substack{s\to t^+ \\ s\in\mathbb{Q}}} M_s$ per $t \geq 0$. E quando esistono coincidono chiaramente con M_{t^-} e M_{t^+} rispettivamente.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sarà $I_n = [n, n+1)$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, usando la proprietà di submartingala ($M_s \leq \mathbb{E}[M_{n+1} \,|\mathcal{F}_s]$ per ogni $s \leq t$) si ottiene (prendendo i valori assoluti, maggiorando $|\mathbb{E}[M_{n+1} \,|\mathcal{F}_s]|$ con $\mathbb{E}[|M_{n+1}| \,|\mathcal{F}_s]$ e integrando)

$$\mathbb{E}[|M_s|] \leq \mathbb{E}[|M_{n+1}|] \ \ \forall s \in I_n$$

da cui

$$\sup_{s \in I_n} \mathbb{E}[|M_s|] \leq \mathbb{E}[|M_{n+1}|]$$

ne segue, usando il Teorema 2.5.3 degli attraversamenti di Doob (ed il fatto che $D((M_t)_{t \in I_n \cap \mathbb{Q}}, [a,b]) \geq 0$), che per ogni paio di razionali $a < b$

$$D((M_t)_{t \in I_n \cap \mathbb{Q}}, [a,b]) < +\infty \ \ \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

La tesi quindi segue usando per entrambi i limiti della tesi l'argomento usato per la conclusione della dimostrazione del Teorema 2.6.1. Poi si ha anche il **P**-q.c. globale in quanto si è trovato un **P**-nullo per ogni I_n, quindi basta unirli trovando un N **P**-nullo t.c. per ogni $\omega \in \Omega \setminus N$ esistono i limiti $M_{t^+}(\omega)$ per ogni $t \geq 0$ e $M_{t^-}(\omega)$ per ogni $t > 0$. □

Osservazione 2.9.2: Nel contesto della dimostrazione precedente, osserviamo che possiamo prendere $N \in \mathcal{F}_\infty$. Infatti $(M_t)_{t\geq 0}$ è adattato, dunque possiamo restringerci a lavorare nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P}_{|\mathcal{F}_\infty})$, con questo accorgimento otteniamo che tutti i **P**-q.c. della dimostrazione precedente sono in $\mathcal{F}_\infty$ e quindi anche N risulterà appartenere a $\mathcal{F}_\infty$.

Lemma 2.9.3: *Supponiamo che $(M_t)_{t\geq 0}$ sia integrabile. Allora $(M_{t^+})_{t\geq 0}$ è integrabile e*

$$M_t \leq \mathbb{E}[M_{t^+} \mid \mathcal{F}_t] \ \ \forall t \geq 0 \ \ \mathbf{P}\text{-}q.c.$$

inoltre questa disuguglianza è un uguaglianza nel caso in cui la funzione $t \mapsto \mathbb{E}[M_t]$ è continnua a destra, in particolare se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una martingala. Infine il processo $(M_{t^+})_{t\geq 0}$ è una submartingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$ ed è una martingala se lo è $(M_t)_{t\geq 0}$.

Dimostrazione. (Facoltativo) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sarà $I_n = [n, n+1)$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in I_n$. Consideriamo una successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I_n \cap \mathbb{Q}$ t.c. $t_n \searrow t$ allora, chiamando $Y_{-n} = M_{t_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $(Y_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ è una submartingala che converge **P**-q.c. a M_{t^+}, dunque per il Teorema 2.6.6 $M_{t_n} \to M_{t^+}$ in $L^1(\mathbf{P})$. Inoltre per la proprietà di submartingala si ha

$$M_t \leq \mathbb{E}[M_{t_n} \mid \mathcal{F}_t]$$

che grazie alla convergenza in $L^1(\mathbf{P})$, passando al limite $n \to +\infty$, diventa

$$M_t \leq \mathbb{E}[M_{t^+} \mid \mathcal{F}_t].$$

Inoltre per la convergenza in $L^1(\mathbf{P})$ si ha anche $\mathbb{E}[M_{t_n}] \to \mathbb{E}[M_{t^+}]$, dunque se $t \mapsto \mathbb{E}[M_t]$ è continua a destra si ha anche

$$\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_{t^+}]$$

che implica

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{t^+}|\mathcal{F}_t] - M_t] = \mathbb{E}[M_{t^+}] - \mathbb{E}[M_t] = 0$$

da cui (essendo l'integranda non negativa) $\mathbb{E}[M_{t^+} \mid \mathcal{F}_t] = M_t$ **P**-q.c.. A questo punto abbiamo ottenuto per ogni $n \in \mathbb{N}$ un **P**-nullo al di fuori del quale vale la disuguaglianza voluta per ogni $t \in I_n$, quindi prendendo l'unione di essi si ottiene un **P**-nullo al di fuori del quale vale la disuguaglianza voluta per ogni $t \geq 0$.

Infine prendiamo $0 \leq s < t$ e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,t] \cap \mathbb{Q}$ t.c. $s_n \searrow s$. Per quanto appena provato si ha

$$\begin{aligned} M_{s_n} &\leq \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_{s_n}] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{t^+} \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_{s_n}] = \mathbb{E}[M_{t^+} \mid \mathcal{F}_{s_n}] \end{aligned}$$

in quanto $\mathcal{F}_{s_n} \subset \mathcal{F}_t$, passando al limite per $n \to +\infty$, usando il Teorema 2.6.6 e il Corollario 2.6.7 (dominazione data da $|X_{t^+}|$), si ottiene

$$M_{s^+} \leq \mathbb{E}[M_{t^+} | \mathcal{F}_{s^+}]$$

che è la proprietà di submartingala di $(M_{t^+})_{t\geq 0}$ rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$. Nel caso in cui $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala non è difficile constatare che si avrebbe l'uguaglianza, in quanto le disuguaglianze sarebbero in tal caso uguaglianze. □

Definizione 2.9.4: Un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ è detto *cadlag* (*continue à droite, limite à gauche* che tradotto dal francese è *continua a destra, con limite a sinistra*) se per ogni $\omega \in \Omega$ esistono, uguali a quanto segue, i limiti

$$\lim_{s\to t^+} X_s(\omega) = X_t(\omega) \;\; \forall t \geq 0$$

$$\lim_{s\to t^-} X_s(\omega) \in \mathbb{R} \;\; \forall t > 0.$$

Invece diremo che il processo è **P**-*q.c. cadlag* se valgono le due condizioni sopra scritte solamente per **P**-q.o. $\omega \in \Omega$.

Teorema 2.9.5 (Modificazione P-q.c. cadlag di martingale e submartingale): *Supponiamo che la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sia continua a destra, allora valgono i seguenti fatti:*

(1) se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una submartingala con $[0,+\infty) \ni t \mapsto \mathbb{E}[M_t]$ continua a destra, allora $(M_t)_{t\geq 0}$ ammette una modificazione **P**-*q.c. cadlag che continua ad essere una submartingala;*

(2) se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una martingala, allora $(M_t)_{t\geq 0}$ ammette una modificazione **P**-*q.c. cadlag che continua ad essere una martingala.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Infatti per il Lemma 2.9.1 $(M_{t^+})_{t\geq 0}$ è una submartingala o una martingala rispetto a $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, rispettivamente se valgono le ipotesi (1) e (2), e vale

$$M_t = \mathbb{E}\left[M_{t^+} \,|\, \mathcal{F}_t\right] = M_{t^+} \quad \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

quindi $(M_{t^+})_{t\geq 0}$ è una modificazione di $(M_t)_{t\geq 0}$ ed è **P**-q.c. cadlag grazie al Teorema 2.9.1. □

Col prossimo teorema si raggiungerà un risultato ancor più fine: la regolarità cadlag delle traiettorie ovunque, a patto però di richiedere la completezza della filtrazione.

Teorema 2.9.6 (Modificazione cadlag di martingale e submartingale): *Supponiamo che la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ soddisfi le ipotesi abituali, allora valgono i seguenti fatti:*

(1) se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una submartingala con $[0,+\infty) \ni t \mapsto \mathbb{E}[M_t]$ continua a destra, allora $(M_t)_{t\geq 0}$ ammette una modificazione cadlag che continua ad essere una submartingala;

(2) se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una martingala, allora $(M_t)_{t\geq 0}$ ammette una modificazione cadlag che continua ad essere una martingala.

Dimostrazione. (Facoltativo) Dimostriamo (1) e (2) insieme. Prendiamo $\Omega_0 \subset \Omega$ con $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$, dato dal Teorema 2.9.1, t.c. per ogni $\omega \in \Omega_0$ esistono i limiti $M_{t^+}(\omega)$ per ogni $t \geq 0$ e $M_{t^-}(\omega)$

per ogni $t > 0$. Osserviamo che possiamo prendere $\Omega_0 \in \mathcal{F}_\infty$ (Osservazione 2.9.2). Per $t \geq 0$ definiamo

$$\tilde{M}_t(\omega) = \begin{cases} M_{t^+}(\omega) & \text{se } \omega \in \Omega_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Per il Lemma 2.9.3 il processo $(\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ è una modificazione continua a destra di $(M_t)_{t\geq 0}$ adattata a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, in quanto tale filtrazione soddisfa le ipotesi abituali (continua a destra e **P**-completa) e Ω_0^c è **P**-nullo ed in $\mathcal{F}_\infty$. Infatti preso $t \geq 0$, per il Lemma 2.9.3 M_{t^+} è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$, quindi preso $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vale

$$\tilde{M}_t^{-1}(B) = (\tilde{M}_t^{-1}(B) \cap \Omega_0) \cup (\tilde{M}_t^{-1}(B) \cap \Omega_0^c) = \begin{cases} (M_{t^+}^{-1}(B) \cap \Omega_0) \cup \Omega_0^c & \text{se } 0 \in B \\ M_{t^+}^{-1}(B) \cap \Omega_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che in entrambi i casi appartiene a $\mathcal{F}_t$ per quanto detto.

Inoltre sempre per il Lemma 2.9.3 il processo $(\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ è una submartingala o una martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$: se siamo nelle ipotesi di (1) è una submartingala, se invece siamo nelle ipotesi di (2) è una martingala. Infine per la scelta di Ω_0 le traiettorie di $(\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ ammettono limiti a sinistra finiti per $t > 0$. □

3

Calcolo Stocastico di Itô

D'ora in poi, visto che useremo sempre processi a tempo $[0, \infty)$, per alleggerire la notazione al posto della scrittura completa $(X_t)_{t\geq 0}$ per indicare tale processo stocastico utilizzeremo solo X. Inoltre quando scriveremo $X = Y$ con X ed Y processi stocastici intenderemo che questi sono uguali a meno di indistinguibilità e quando diremo che un processo è l'unico che gode di una determinata proprietà intenderemo sempre a meno di indistinguibilità.

Fissiamo anche uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ con filtrazione $\mathbf{P}$-completa (se non specificato diversamente). Con tale assunzione:

- se $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di processi adattati (progressivamente misurabili) t.c. $H^{(n)} \to H$ allora anche H è adattato (progressivamente misurabile);

- presi due processi X e Y indistinguibili, cioè $X = Y$, se X adattato allora anche Y lo è.

Per motivare la precedente assunzione, oltre alle due utilissime proprietà già menzionate, osserviamo anche che senza nessuna ipotesi sulla filtrazione considerata, se X e Y sono due processi stocastici, X è adattato e $X = Y$ (cioè sono indistinguibili), non è detto che Y sia adattato.

Nel seguito faremo alcune osservazioni (molto importanti) per trattare anche il caso in cui la filtrazione considerata non è $\mathbf{P}$-completa, tali osservazioni saranno contrassegnate con la sigla (NC).

3.1 Semimartingale Continue, Variazioni Quadratiche e Spazi $\mathbb{H}^2$

Definizione 3.1.1 (Processo Crescente): Un processo stocastico A è *crescente* se è adattato e $\mathbf{P}$-q.c. la traiettoria $t \mapsto A_t$ è continua a destra e crescente.

Definizione 3.1.2 (Processo a Variazione Finita): Un processo stocastico A è *a variazione finita* se è adattato e $\mathbf{P}$-q.c. la traiettoria $t \mapsto A_t$ è continua a destra e a variazione finita. Inoltre chiameremo il processo $(V_t(A))_{t\geq 0} = V_\cdot(A)$ *processo variazione* di A.

Osservazione 3.1.3: Se X è un processo continuo a destra e a variazione quadratica finita allora $\langle X\rangle$ è un processo a variazione finita, infatti è adattato, continuo a destra e crescente.

Osservazione 3.1.4: Abbiamo in precedenza definito la quantità $T_t^{\Delta}(X)$ con X processo stocastico, $t \geq 0$ e Δ una partizione finita dell'intervallo $[0, t]$. Estendiamo ora tale notazione a $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots\}$ partizione di $[0, \infty)$ t.c. $\#(\Delta \cap [0, t]) < +\infty$ per ogni $t \geq 0$, nel seguente modo:

$$T_t^{\Delta}(X) = \sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_i+1} - X_{t_i})^2 + (X_t - X_{t_k})$$

in cui $t_k = \max(\Delta \cap [0, t])$. Osserviamo inoltre che con tale notazione vale che X è a variazione quadratica finita se

$$T_t^{\Delta}(X) \xrightarrow{\mathbf{P}} \langle X \rangle_t \ \ \forall t \geq 0$$

per $|\Delta \cap [0, t]| \to 0$.

Iniziamo con un importante lemma.

Lemma 3.1.5: *Una martingala continua M è a variazione finita se e solo se $M = M_0$.*

Dimostrazione. Possiamo assumere senza perdità di generalità $M_0 = 0$. Proviamo l'implicazione non ovvia, cioè che se M è a variazione finita allora è costante $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$. Sia $V_{\cdot}(M)$ il processo variazione di M. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ il tda

$$T_n = \inf\{s \geq 0 \mid V_s(M) \geq n\}$$

ed osserviamo che $T_n \nearrow +\infty$ per $n \longrightarrow +\infty$ (in quanto M è continua). Inoltre osserviamo anche che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $V_t(M^{T_n}) \leq n$ per ogni $t \geq 0$ e che in particolare $|M_t^{T_n}| \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $t \geq 0$. Consideriamo adesso una qualsiasi partizione finita $\Delta_t = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t\}$ di $[0, t]$ per $t \geq 0$, allora vale

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(M_t^{T_n})^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}(M_{t_i}^{T_n} - M_{t_{i-1}}^{T_n})\right)^2\right] \\
\text{(Propr. di martingala)} &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k}(M_{t_i}^{T_n} - M_{t_{i-1}}^{T_n})^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{1 \leq i \leq k} |(M_{t_i}^{T_n} - M_{t_{i-1}}^{T_n}|\right) \sum_{i=1}^{k} |M_{t_i}^{T_n} - M_{t_{i-1}}^{T_n}|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{1 \leq i \leq k} |M_{t_i}^{T_n} - M_{t_{i-1}}^{T_n}|\right) V_t(M^{T_n})\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{1 \leq i \leq k} |(M_{t_i}^{T_n} - M_{t_{i-1}}^{T_n}|\right) n\right]
\end{aligned}$$

ma $\sup_{1 \leq i \leq k} |(M_{t_i}^{T_n} - M_{t_{i-1}}^{T_n}| \longrightarrow 0$ per $|\Delta_t| \to 0$ e $\sup_{1 \leq i \leq k} |(M_{t_i}^{T_n} - M_{t_{i-1}}^{T_n}| \leq 2n$, dunque per il Teorema di convergenza dominata si ottiene

$$\mathbb{E}\left[(M_t^{T_n})^2\right] = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

che implica $M_t^{T_n} = 0$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $t \geq 0$, ma $T_n \nearrow +\infty$, quindi per continuità $M_t^{T_n} = M_{t \wedge T_n} \longrightarrow M_t$ da cui segue $M_t = 0$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$. Quindi M è modificazione del processo costante 0 ed essendo tali processi continui segue che sono indistinguibili (Osservazione 1.1.6). $\square$

Definizione 3.1.6 (Processo limitato): Una processo X sarà detto *limitato* se esiste $C > 0$ t.c. $|X_t(\omega)| \leq C$ per ogni $t \geq 0$ ed ogni $\omega \in \Omega$.

Teorema 3.1.7: *Sia M una martingala continua e limitata, allora*

(1) M è a variazione quadratica finita;

(2) $\langle M \rangle$ è l'unico processo adattato, continuo, crescente e nullo in 0 (e quindi in particolare non negativo) t.c. $M^2 - \langle M \rangle$ è una martingala continua.

Dimostrazione. Vediamo prima l'unicità nel punto (2). Se $N = M^2 - A$ e $N' = M^2 - A'$ sono due martingale continue con A, A' processi adattati, continui, crescenti e nulli in 0, quindi in particolare a variazione finita, vale

$$A' - A = N - N'$$

quindi $A' - A$ è una martingala continua e a variazione finita, quindi per il Lemma 3.1.5 è indistinguibile da $A'_0 - A_0$. Ma $A'_0 - A_0 = 0$, dunque $A' - A = 0$, ossia $A' = A$.

Passiamo adesso a dimostrare il punto (1). Per il resto della dimostrazione sarà $T_t^\Delta = T_t^\Delta(M)$. Dividiamo la dimostrazione in passi.

Passo 1. *Dimostriamo che $M - T^\Delta$ è una martingala per ogni $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m\} \subset [0, \infty)$.*

Prendiamo $s, t \in [0, \infty)$, $s < t$ e fissiamo Δ come sopra. Supponiamo intanto che $s < t < t_m$, allora esistono $t_l, t_k \in \Delta$ t.c. $t_l \leq s < t_{l+1}$ e $t_k \leq t < t_{k+1}$. Vale quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(M_t - M_s + M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + M_s^2 + 2M_s \mathbb{E}\left[M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\
\text{(Propr. di martingala)} \quad &= \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + M_s^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left((M_{t_{l+1}} - M_s) + \sum_{i=l+2}^{k} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) + (M_t - M_{t_k})\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + M_s^2 \\
\text{(Propr. di martingala)} \quad &= \mathbb{E}\left[(M_{t_{l+1}} - M_s)^2 + \sum_{i=l+2}^{k} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_t - M_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + M_s^2
\end{aligned}$$

e vale anche

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[T_t^\Delta \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_t - M_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(M_{t_{l+1}} - M_{t_l})^2 + \sum_{i=l+2}^{k} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_t - M_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + \sum_{i=1}^{l} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \\
&= \mathbb{E}\left[(M_{t_{l+1}} - M_{t_l})^2 + \sum_{i=l+2}^{k} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_t - M_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + T_s^\Delta - (M_s - M_{t_l})^2
\end{aligned}$$

dunque sottraendo la seconda alla prima si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_t^2 - T_t^\Delta \mid \mathcal{F}_s\right] &= M_s^2 + \mathbb{E}\left[(M_{t_{l+1}} - M_s)^2 - (M_{t_{l+1}} - M_{t_l})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - T_s^\Delta + (M_s - M_{t_l})^2 \\
\text{(Propr. di martingala)} \quad &= M_s^2 - \mathbb{E}\left[(M_s - M_{t_l})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - T_s^\Delta + (M_s - M_{t_l})^2 \\
&= M_s^2 - T_s^\Delta.
\end{aligned}$$

che è quanto voluto. Se invece $s < t_m \leq t$ si fanno esattamente gli stessi conti con m al posto di k (non esiste t_{k+1}, ma non ci importa). Infine se $t_m \leq s < t$ i conti sono addirittura più semplici infatti in tal caso

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + M_s^2$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[T_t^\Delta \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_t - M_{t_m})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + M_s^2 \\
\text{(Propr. di martingala)} &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_t - M_s)^2 + (M_s - M_{t_m})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + M_s^2 \\
&= T_s^\Delta + \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

da cui sottraendo la seconda alla prima segue

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - T_t^\Delta \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s^2 - T_s^\Delta.$$

Passo 2. *Fissiamo $a > 0$ e prendiamo Δ, Δ' partizioni finite di $[0, a]$ (con punto finale a per entrambe), vogliamo stimare* $\mathbb{E}\left[\left(T_a^\Delta - T_a^{\Delta'}\right)^2\right]$.

Nel seguito sarà $X_a = T_a^\Delta - T_a^{\Delta'}$. Poniamo inoltre $\Delta\Delta' = \{0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = a\}$ l'unione di Δ e Δ'. Usando il Passo precedente si ottiene che X è martingala continua, dunque sempre per il Passo precedente $X^2 - T^{\Delta\Delta'}(X)$ è martingala continua nulla in 0, dunque usando la nota disuguaglianza $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_a^2\right] &= \mathbb{E}\left[T_a^{\Delta\Delta'}(X)\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta)\right] + 2\mathbb{E}\left[T_a^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta'})\right].
\end{aligned}$$

Passo 3. *Vediamo che* $\mathbb{E}\left[T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta)\right], \mathbb{E}\left[T_a^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta'})\right] \longrightarrow 0$ *per* $|\Delta| \vee |\Delta'| \to 0$.

Supponiamo che $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m\}$. Sia $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ e sia $t_l = \max\{t_j \mid t_j \leq s_k\}$ in modo che $t_l \leq s_k < s_{k+1} \leq t_{l+1}$, allora

$$\begin{aligned}
T_{s_{k+1}}^\Delta - T_{s_k}^\Delta &= (M_{s_{k+1}} - M_{t_l})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 \\
&= (M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l})(M_{s_{k+1}} - M_{s_k}).
\end{aligned}$$

Dunque se per ogni $j = 0, \ldots, m - 1$ chiamiamo $t_{l(j)} = \max\{t_i \mid t_i \leq s_j\}$ allora si ha

$$T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta) = \sum_{j=0}^{m-1} (M_{s_{j+1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}})^2 (M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta)\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{1 \leq j \leq m-1} |M_{s_{j-1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}}|^2\right) \sum_{j=0}^{m-1} (M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sup_{1 \leq j \leq m-1} |M_{s_{j-1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}}|^2\right) T_a^{\Delta\Delta'}\right] \\
\text{(Cauchy-Schwarz)} &\leq \mathbb{E}\left[\sup_{1 \leq j \leq m-1} |M_{s_{j-1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}}|^4\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[(T_a^{\Delta\Delta'})^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ma se $|\Delta| \wedge |\Delta'| \to 0$ si ha $\sup_{1\le j\le m-1} |M_{s_{j-1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}}|^4 \longrightarrow 0$ e se $C > 0$ limita M vale

$$\sup_{1\le j\le m-1} |M_{s_{j-1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}}|^4 \le (4C)^4$$

dunque per il Teorema di convergenza dominata si ha $\mathbb{E}\left[T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta)\right] \to 0$ per $|\Delta| \vee |\Delta'| \to 0$, purché $\mathbb{E}\left[(T_a^{\Delta\Delta'})^2\right] = O(1)$ per $|\Delta| \vee |\Delta'| \to 0$. Vediamolo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(T_a^{\Delta\Delta'})^2\right] &= \mathbb{E}\left[(T_a^{\Delta\Delta'} - M_a^2 + M_a^2)^2\right] \\
&\le 2\mathbb{E}\left[(T_a^{\Delta\Delta'} - M_a^2)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[M_a^4\right] \\
&\le 2\mathbb{E}\left[(T_a^{\Delta\Delta'} - M_a^2)^2\right] + 2C^4
\end{aligned}$$

studiamo il primo integrando

$$M_a^2 = \left(\sum_{i=1}^k (M_{s_i} - M_{s_{i-1}})\right)^2 = 2\sum_{i,j=1}^k (M_{s_i} - M_{s_{i-1}})(M_{s_j} - M_{s_{j-1}})$$

dunque

$$\begin{aligned}
M_a^2 - T_a^{\Delta\Delta'} &= 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^k (M_{s_i} - M_{s_{i-1}})(M_{s_j} - M_{s_{j-1}}) \\
&= 2\sum_{j=1}^k (M_{s_j} - M_{s_{j-1}})\left(\sum_{i=1}^{j-1} (M_{s_i} - M_{s_{i-1}})\right) \\
&= 2\sum_{j=1}^k (M_{s_j} - M_{s_{j-1}})(M_{s_{j-1}} - M_0)
\end{aligned}$$

che chiamando $H_{s_{j-1}} = M_{s_{j-1}} - M_0$ ci dà

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(T_a^{\Delta\Delta'} - M_a^2)^2\right] &= 2\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^k (M_{s_j} - M_{s_{j-1}})H_{s_{j-1}}\right)^2\right] \\
\text{(Propr. di martingala)} &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^k (M_{s_j} - M_{s_{j-1}})^2 H_{s_{j-1}}^2\right] \\
&\le 8C^2\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^k (M_{s_j} - M_{s_{j-1}})^2\right] \\
&= 8C^2\mathbb{E}\left[(M_a - M_0)^2\right] \le 32C^4.
\end{aligned}$$

Passo 4. *Dimostriamo che per ogni $a \ge 0$ la successione $(T_a^{\Delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $L^2(\mathbf{P})$ se $|\Delta_n| \to 0$. Dunque come conseguenza si ha per ogni $a \ge 0$ l'esistenza di una v.a. $Z_a \in L^2(\mathbf{P})$ t.c. $T_a^{\Delta_n} \longrightarrow Z_a$ in $L^2(\mathbf{P})$. In particolare, grazie alla completezza della filtrazione il processo $(Z_t)_{t\ge0}$ è adattato.*

Grazie ai passi precedenti, se $n \le p < q$, vale $\mathbb{E}\left[|T_a^{\Delta_q} - T_a^{\Delta_p}|^2\right] = o(1)$ per $n \to +\infty$, dunque si ha quanto voluto.

Passo 5. *Scegliamo per ogni $t \ge 0$ una v.a. nella classe di Z_t in modo da ottenere la continuità.*

Grazie alla Disuguaglianza massimale di Doob in $L^2(\mathbf{P})$ (Teorema 2.4.3) si ottiene

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\le t\le a}|T_t^{\Delta_n}-T_t^{\Delta_m}|\right)^2\right]\le 4\mathbb{E}\left[|T_a^{\Delta_n}-T_a^{\Delta_m}|^2\right]\quad \forall n,m\in\mathbb{N}$$

quindi usando il Passo precedente si ottiene che per $n,m\in\mathbb{N}$ con $n,m\ge N$ vale

$$\lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\le t\le a}|T_t^{\Delta_n}-T_t^{\Delta_m}|\right)^2\right]=0$$

da cui segue l'esistenza di una successione $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ con $n_k\nearrow+\infty$ t.c.

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{N}_+}\sup_{0\le t\le a}|T_t^{\Delta_{n_k}}-T_t^{\Delta_{n_{k-1}}}|\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\le\sum_{k\in\mathbb{N}_+}\left\|\sup_{0\le t\le a}|T_t^{\Delta_{n_k}}-T_t^{\Delta_{n_{k-1}}}|\right\|_{L^2(\mathbf{P})}\le 1$$

che implica

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^+}\sup_{o\le t\le a}|T_t^{\Delta_{n_k}}-T_t^{\Delta_{n_{k-1}}}|<+\infty\quad \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

ma $C([0,a])$ è completo, dunque per il criterio di completezza per serie per spazi normati si ha che $\mathbf{P}$-q.c. la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_+}\left(T_\cdot^{\Delta_{n_k}}-T_\cdot^{\Delta_{n_{k-1}}}\right)$$

converge in $C([0,a])$, ma

$$\sum_{k=1}^m\left(T_\cdot^{\Delta_{n_k}}-T_\cdot^{\Delta_{n_{k-1}}}\right)=T_\cdot^{\Delta_{n_m}}-T_\cdot^{\Delta_{n_0}}\quad\forall m\in\mathbb{N}_+$$

dunque $\mathbf{P}$-q.c. la successione $(T_\cdot^{\Delta_{n_m}})_{m\in\mathbb{N}_+}$ converge in $C([0,a])$ ad una funzione

$$[0,a]\ni t\longmapsto\widetilde{Z}_t^{(a)}$$

continua. Quindi abbiamo definito, a meno di un insieme $\mathbf{P}$-nullo (in cui può fare quello che vuole, basta che sia sempre continuo, ad esempio su tali eventi potremmo porlo costantemente 0), un processo continuo $(Z_t^{(a)})_{t\ge0}$ t.c. $\mathbf{P}$-q.c. $T_\cdot^{\Delta_{n_m}}\longrightarrow Z_\cdot^{(a)}$ in $C([0,a])$. Inoltre se $0\le a<a'$ vale per costruzione che $\widetilde{Z}_t^{(a)}=\widetilde{Z}_t^{(a')}$ per ogni $t\in[0,a]$, quindi si incollano bene e questo ci permette di definire un processo continuo $(\widetilde{Z}_t)_{t\ge0}$ t.c. $T_t^{\Delta_{n_m}}\to\widetilde{Z}_t$ $\mathbf{P}$-q.c.. Dico adesso che $\widetilde{Z}_t=Z_t$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t\ge0$, da cui in particolare seguirebbe $T_t^{\Delta_n}\to\widetilde{Z}_t$ in $L^2(\mathbf{P})$ e quindi in probabilità per ogni $t\ge0$ (in quanto questo vale per Z_t). Fissiamo $t\ge0$, essendo $T_t^{\Delta_n}\to Z_t$ in $L^2(\mathbf{P})$ si ha che anche $T_t^{\Delta_{n_m}}\to Z_t$ in $L^2(\mathbf{P})$, quindi possiamo prenderne una sottosuccessione che vi converge puntualmente $\mathbf{P}$-q.c., ma già convergeva $\mathbf{P}$-q.c. a $\widetilde{Z}_t$, quindi $\widetilde{Z}_t=Z_t$ $\mathbf{P}$-q.c..

Passo 6. *Concludiamo la dimostrazione.*

Fissata Δ, se $s,t\in\Delta$, $s\le t$ allora $T_s^\Delta\le T_t^\Delta$ e $\tilde{Z}$ è limite puntuale $\mathbf{P}$-q.c. di una successione $(T^{\Delta_k}=_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $|\Delta_k|\to0$, $\Delta_k\subset\Delta_{k+1}$ per ogni $k\in\mathbb{N}$ e t.c. $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Delta_k$ è denso in $[0,\infty)$, quindi $\mathbf{P}$-q.c. $\tilde{Z}$ è crescente su $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Delta_k$ e per continuità è quindi crescente su tutto $[0,\infty)$ (abbiamo fatto questo ragionamento perché i T^{Δ_k} non sono crescenti). Inoltre a meno di porlo uguale a 0 (ad esempio) dove non è crescente possiamo considerarlo crescente ovunque (osserviamo che rimane adattato in quanto $\mathcal{F}_0$ è $\mathbf{P}$-completa). Inoltre essendo $M^2-T^{\Delta_n}$ martingala per ogni $n\in\mathbb{N}$ (per un Passo precedente), per il Teorema di convergenza dominata condizionale si ha che anche $M^2-\widetilde{Z}$ è martingala (usiamo l'ipotesi di $\mathbf{P}$-completezza della filtrazione per dire che $M^2-\widetilde{Z}$ è adattato), dunque si ha la tesi con $\langle M\rangle=\widetilde{Z}$. □

Proposizione 3.1.8: *Sia M martingala continua limitata e T tda, allora*

$$\langle M\rangle^T = \langle M^T\rangle.$$

Dimostrazione. Sia $N_t = M_t^2 - \langle M\rangle_t$ per ogni $t \geq 0$, N è una martingala, dunque lo è anche

$$N^T = M_{t\wedge T}^2 - \langle M\rangle_{t\wedge T} = (M_t^T)^2 - \langle M\rangle_t^T$$

ed $\langle M\rangle^T$ è un processo continuo, crescente, adattato e nullo in 0, dunque per l'unicità del Teorema precedente si ha la tesi. □

Definizione 3.1.9 (Martingala locale): Un processo X adattato e continuo a destra è detto $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P})$-*martingala locale* se esistono dei tda $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitati t.c.

(1) $T_n \nearrow +\infty$ **P**-q.c.;

(2) $X^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ è una martingala UI per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Talvolta chiameremo una tale successione di tda *tda associati ad* X.

Osservazione 3.1.10:

- Ovviamente la Definizione precedente ha perfettamente senso anche quando $\mathcal{F}_0$ non è **P**-completa.
- Nel seguito, quando la filtrazione e la probabilità rispetto alle quali un processo X è una martingala locale sono chiare, chiameremo X solamente *martingala locale*.
- Una martingala UI è una martingala locale.
- Possiamo prendere i tda t.c. $T_n \nearrow +\infty$ ovunque.
- Se X è continuo (2) è equivalente a:

  (2') $X^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ è una martingala limitata per ogni $n \in \mathbb{N}$.

  Infatti se vale (2') allora vale (2) in modo ovvio, se invece vale (2), rimpiazzando T_n con $T_n \wedge S_n$ in cui $S_n = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t| \geq n\}$ si ottiene la limitatezza voluta in (2') grazie alla continuità.
- Se $X_0 = 0$ allora $X^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}} = X^{T_n}$.
- Anche $X - X_0$ è una martingala locale con gli stessi tda di X.

Proposizione 3.1.11: *Se X è una martingala locale limitata allora X è una martingala limitata.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $X_0 = 0$. Siano $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tda associati ad X, allora la tesi segue passando al limite nella proprietà di martingala di X^{T_n} usando il Teorema di convergenza dominata condizionale. □

Esempio 3.1.12: Il MB std B è una martingala locale con tda deterministici $T_n = n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Infatti B^n è una martingala limitata in $L^2(\mathbf{P})$ (da n) per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 3.1.13: *Se X è una martingala locale positiva allora X è una supermartingala positiva.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $X_0 = 0$. Siano $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tda associati ad X, allora la tesi segue utilizzando il Lemma di Fatou nella proprietà di martingala di X^{T_n}. □

Teorema 3.1.14: *Se M è una martingala locale continua, allora esiste un unico processo $\langle M\rangle$ adattato, continuo, crescente e nullo in 0 t.c. $M^2 - \langle M\rangle$ è una martingala locale continua. Inoltre per ogni $t \geq 0$, presa una successione $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di partizioni finite di $[0,t]$ si ha*

$$\sup_{0\leq s\leq t} |T_s^{\Delta_n}(M) - \langle M\rangle_s| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$$

per $|\Delta_n| \to 0$. Il processo $\langle M\rangle$ è detto variazione quadratica *di M.*

Dimostrazione. L'unicità segue dal Lemma 3.1.5, infatti se $X_A = M^2 - A$ e $X_{A'} = M^2 - A'$ fossero due martingale locali continue con A e A' due processi come da tesi, allora potremmo trovare una successione di tda $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $S_n \nearrow +\infty$ e per i quali $X_A^{S_n}\mathbf{1}_{\{S_n>0\}}$ e $X_{A'}^{S_n}\mathbf{1}_{\{S_n>0\}}$ sono martingale continue limitate per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora abbiamo che

$$X_A^{S_n}\mathbf{1}_{\{S_n>0\}} - X_{A'}^{S_n}\mathbf{1}_{\{S_n>0\}} = (A - A')^{S_n}\mathbf{1}_{\{S_n>0\}}$$

è una martingala continua a variazione finita e nulla in 0, dunque per il Lemma prima citato $(A - A')^{S_n}\mathbf{1}_{\{S_n>0\}} = 0$ da cui segue $A = A'$ su $[0, S_n]$. Valendo questo per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed essendo $S_n \nearrow +\infty$ si ottiene $A = A'$.

Vediamo adesso l'esistenza e la convergenza della tesi. Siano $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tda associati a M, cioè $X_n = M^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ è martingala continua limitata per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $T_n \nearrow +\infty$. Per il Teorema precedente esiste $\langle X_n\rangle$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre si ha che $\left(X_{n+1}^2 - \langle X_{n+1}\rangle\right)^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ è una martingala e

$$\left(X_{n+1}^2 - \langle X_{n+1}\rangle\right)^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}} = X_n^2 - \langle X_{n+1}\rangle^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$$

e quindi dall'unicità del Teorema precedente segue $\langle X_{n+1}\rangle^{T_n} = \langle X_n\rangle$ su $\{T_n > 0\}$, ma su $\{T_n = 0\}$ entrambi i processi sono nulli, quindi in realtà $\langle X_{n+1}\rangle^{T_n} = \langle X_n\rangle$ ovunque. Di conseguenza $\mathbf{P}$-q.c. è ben definito il limite

$$\langle M\rangle_t = \lim_{n\to+\infty}\langle X_n\rangle_t \quad \forall t \geq 0$$

dunque a meno di un insieme $\mathbf{P}$-nullo abbiamo definito un processo continuo $\langle M\rangle$ che risulta essere adattato grazie alla $\mathbf{P}$-completezza della filtrazione. Inoltre per costruzione $\langle M\rangle_0 = 0$, è crescente e

$$\langle M\rangle^{T_n} = \langle X_n\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi $(M^{T_n})^2\mathbf{1}_{\{T_n>0\}} - \langle M\rangle^{T_n}$ (che è indistinguibile da $X_n^2 - \langle X_n\rangle$) è una martingala continua limitata per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $(M^{T_n})^2\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ limitata e se per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo il tda

$$S_n = \inf\{t \geq 0 \mid \langle M\rangle_t \geq n\}$$

vale che $(M^{T_n\wedge S_n})^2\mathbf{1}_{\{T_n>0\}} - \langle M\rangle^{T_n\wedge S_n}$ è martingala continua limitata per ogni $n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza $M^2 - \langle M\rangle$ è martingala locale continua.

Dimostriamo adesso la convergenza della tesi. Fissiamo $\varepsilon, \delta > 0$ e anche $t > 0$, essendo M una martingala locale continua esiste un tda S t.c. $M^S\mathbf{1}_{\{S>0\}}$ è martingala continua limitata e $\mathbf{P}(S \leq t) \leq \delta$. Inoltre osserviamo che $T^\Delta(M)$ e $\langle M\rangle$ coincidono con $T^\Delta(M^S\mathbf{1}_{\{S>0\}})$ e $\langle M^S\mathbf{1}_{\{S>0\}}\rangle$ rispettivamente su $[0, S]$ quando $S > 0$. Dunque chiamando

$$A_{\Delta,\varepsilon} = \left\{\sup_{0\leq s\leq t} |T_s^\Delta(M) - \langle M\rangle_s| > \varepsilon\right\}$$

si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{\Delta,\varepsilon}) &= \mathbf{P}(A_{\Delta,\varepsilon} \cap \{S \leq t\}) + \mathbf{P}(A_{\Delta,\varepsilon} \cap \{S > t\}) \\ &\leq \delta + \mathbf{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |T_s^\Delta(M^S\mathbf{1}_{\{S>0\}}) - \langle M^S\mathbf{1}_{\{S>0\}}\rangle_s| > \varepsilon\right) = \delta + o(1)\end{aligned}$$

per $|\Delta| \to 0$. Si ha quindi quanto voluto grazie all'arbitrarietà di $\delta, \varepsilon > 0$. □

Proposizione 3.1.15: *Sia M una martingala locale continua nulla in* 0*, allora per ogni $t \geq 0$ vale la disuguaglianza*

$$\mathbb{E}\left[M_t^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t\right].$$

Dimostrazione. Siano $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tda associati a $M^2 - \langle M\rangle$ che è martingala locale continua nulla in 0, dunque per il Lemma di Fatou si ha

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - \langle M\rangle_t\right] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[M_{t\wedge T_n}^2 - \langle M\rangle_{t\wedge T_n}\right] = 0.$$

□

Teorema 3.1.16: *Date M e N due martingale locali continue, esiste un unico processo $\langle M, N\rangle$ adattato, continuo, nullo in* 0 *e a variazione finita t.c. $MN - \langle M, N\rangle$ è una martingala locale continua. Inoltre per ogni $t \geq 0$, presa una successione $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\Delta_n = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k(n)}^{(n)} = t\}$, di partizioni finite di $[0, t]$ si ha*

$$\sum_{i=1}^{k(n)} (M_{t_i^{(n)}} - M_{t_{i-1}^{(n)}})(N_{t_i^{(n)}} - N_{t_{i-1}^{(n)}}) \xrightarrow{\mathbf{P}} \langle M, N\rangle_t$$

per $|\Delta_n| \to 0$. Il processo $\langle M, N\rangle$ è detto covariazione quadratica *di M ed N.*

Dimostrazione. L'unicità segue in modo analogo a quanto fatto nel Teorema preedente. Vediamo l'esistenza. Definiamo osservando che somma di martingale locali continue è martingala locale continua

$$\langle M, N\rangle = \frac{\langle M+N\rangle - \langle M\rangle - \langle N\rangle}{2}$$

e vediamo subito che $\langle M, N\rangle$ così definito è adattato, continuo e nullo in 0. Inoltre è a variazione finita perché è differenza di $\frac{\langle M+N\rangle}{2}$ e $\frac{\langle M\rangle+\langle N\rangle}{2}$ che sono non decrescenti. Infine essendo

$$MN = \frac{(M+N)^2 - M^2 - N^2}{2}$$

si ha

$$MN - \langle M, N\rangle = \frac{(M+N)^2 - \langle M+N\rangle}{2} - \frac{M^2 - \langle M\rangle}{2} - \frac{N^2 - \langle N\rangle}{2}$$

ossia $MN - \langle M, N\rangle$ è somma di martingale locali continue e quindi è martingala locale continua. □

Osservazione 3.1.17:

- Se M, N sono due martingale locali continue, dalla precedente dimostrazione si evince che vale l'uguaglianza

  $$\langle M, N\rangle = \frac{\langle M+N\rangle - \langle M\rangle - \langle N\rangle}{2}$$

  che è una sorta di *identità di polarizzazione*.

- Se M è una martingala locale continua si ha $\langle M, M\rangle = \langle M\rangle$.
- Se $N = N_0$ è costante nel tempo allora $\langle M, N\rangle = 0$.

Proposizione 3.1.18: *Sia M una martingala locale continua. Allora $\langle M\rangle = 0$ se e solo se $M = M_0$.*

Dimostrazione. Dimostriamo la freccia non ovvia. Supponiamo $\langle M\rangle = 0$. Osserviamo che possiamo assumere senza perdita di generalità $M_0 = 0$ e che a meno di stoppare adeguatamente (e poi passare al limite) possiamo assumere M martingala continua limitata (infatti se $\langle M\rangle = 0$ allora banalmente $\langle M^S\rangle = 0$ per ogni tda S). Allora $M^2 - \langle M\rangle = M^2$ è una martingala continua, da cui segue

$$\mathbb{E}\left[M_t^2\right] = \mathbb{E}\left[M_0^2\right] = 0 \quad \forall t \geq 0$$

e di conseguenza $M_t = 0$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$, ossia M è una modificazione del processo costante 0, ma entrambi sono continui, quindi sono indistinguibili. □

Lemma 3.1.19: *Se M, N sono due martingale locali continue indipendenti allora MN è una martingala locale continua.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità posso supporre $M_0 = N_0 = 0$. Siano $(T_n^M)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$ tda associati a M ed n rispettivamente e poniamo $T_n = T_n^M \wedge T_n^N$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono tda t.c. $T_n \nearrow +\infty$ e M^{T_n}, N^{T_n} sono martingale continue limitate per ogni $n \in \mathbb{N}$. Prendiamo $s, t \geq 0$ con $s \leq t$, vale

$$\mathbb{E}\left[M_t^{T_n} N_t^{T_n} \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^{T_n} \mid \mathcal{F}_s\right] \mathbb{E}\left[N_t^{T_n} \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s^{T_n} N_s^{T_n}$$

ed inoltre $M^{T_n}N^{T_n}$ è processo limitato, dunque $M^{T_n}N^{T_n}$ è martingala continua limitata per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Proposizione 3.1.20: *Se M, N sono due martingale locali continue indipendenti allora $\langle M+N\rangle = \langle M\rangle + \langle N\rangle$.*

Dimostrazione. Banale è osservare che $\langle M\rangle + \langle N\rangle$ è continuo, adattato, crescente e nullo in 0. Ora

$$(M + N)^2 - \langle M\rangle - \langle N\rangle = (M^2 - \langle M\rangle) + (N^2 - \langle N\rangle) + 2NM$$

che per il Lemma precedente è somma di martingale locali conitnue e quindi è martingala locale continua. □

Corollario 3.1.21: *Se M, N sono due martingale locali continue indipendenti allora $\langle M, N\rangle = 0$.*

Dimostrazione. Abbiamo già notato che $\langle M, N\rangle = \frac{\langle M+N\rangle - \langle M\rangle - \langle N\rangle}{2}$, quindi la tesi segue dalla Proposizione precedente. □

Osservazione 3.1.22: Se $B = (B^i)_{i=1,\dots,d}$ è un MB^d std, per il Corollario precedente si ottiene che

$$\langle B^i, B^j\rangle_t = \delta_{i,j} t \quad \forall t \geq 0.$$

Lemma 3.1.23: *Se N è una martingala locale continua, T è un tda e ξ è una v.a. $\mathcal{F}_T$-misurabile allora $\xi(N - N^T)$ è una martingale locale continua.*

Dimostrazione. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$T_n = \begin{cases} T & \text{se } |\xi| > n \\ \inf\{t \geq T \mid |N_t - N_T| > n\} & \text{se } |\xi| \leq n \end{cases}$$

ed osserviamo subito che $T_n \nearrow +\infty$. Inoltre T_n è un tda in quanto se $t \geq 0$ vale

$$\{T_n \leq t\} = (\{T \leq t\} \cap \{|\xi| > n\}) \cup \left(\bigcup_{q \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \{|N_q - N_T| > n\} \cap \{|\xi| \leq n\} \right) \in \mathcal{F}_t.$$

Notiamo che $(N - N^T)^{T_n}$ è una martingala locale continue limitata, quindi è una martingala continua limitata (Proposizione 3.1.11). Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$(\xi(N - N^T)^{T_n} = (\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}})(N - N^T)^{T_n}$$

è una martingala continua limitata, infatti $\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}}$ è una v.a. limitata e $\mathcal{F}_T$-misurabile ed effettivamente per ogni $t \geq 0$ vale

$$(\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}})(N_t - N_t^T)^{T_n} = (\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}})(N_t - N_t^T)^{T_n} \mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$$

e $(\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}})\mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile (facile verifica) per ogni $t \geq 0$. Quindi presi $s, t \geq 0$, $s \leq t$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}})(N_t - N_t^T)^{T_n} \mathbf{1}_{\{T \leq s\}} \mid \mathcal{F}_s\right] &= (\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}})\mathbf{1}_{\{T \leq s\}} \mathbb{E}\left[(N_t - N_t^T)^{T_n} \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= (\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}})\mathbf{1}_{\{T \leq s\}}(N_s - N_s^T)^{T_n} \\ &= (\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}})(N_s - N_s^T)^{T_n} \end{aligned}$$

e invece quando $T > s$ si ha $\mathcal{F}_T \cap \{T > s\} \supset \mathcal{F}_s \cap \{T > s\}$, quindi usando la proprietà della torre della speranza condizionale ed il Teorema 2.7.1 d'arresto opzionale si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}})(N_t - N_t^T)^{T_n} \mathbf{1}_{\{T > s\}} \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}})\mathbf{1}_{\{T > s\}} \mathbb{E}\left[(N_t - N_t^T)^{T_n} \mid \mathcal{F}_T\right] \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(\xi \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}})\mathbf{1}_{\{T > s\}}(N_T - N_T^T)^{T_n} \mid \mathcal{F}_s\right] = 0 \end{aligned}$$

dunque mettendo insieme si ottiene

$$\mathbb{E}\left[(\xi(N_t - N_t^T)^{T_n} \mid \mathcal{F}_s\right] = (\xi(N_s - N_s^T)^{T_n}$$

che è la proprietà di martingala voluta. □

Proposizione 3.1.24: *Se T è un tda e M, N sono due martingale locali continue, allora*

$$\langle M, N \rangle^T = \langle M, N^T \rangle = \langle M^T, N^T \rangle.$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che a meno di restringerci nell'insieme $\{T < +\infty\}$, possiamo considerare T limitato, in quanto dove $T = +\infty$ i processi della tesi sono banalmente uguali.

Partiamo sempre da $\langle M, N \rangle = \frac{\langle M+N \rangle - \langle M \rangle - \langle N \rangle}{2}$, allora

$$\langle M, N \rangle^T = \frac{\langle M + N \rangle^T - \langle M \rangle^T - \langle N \rangle^T}{2} = \frac{\langle (M + N)^T \rangle - \langle M^T \rangle - \langle N^T \rangle}{2} = \langle M^T, N^T \rangle.$$

Inoltre, in particolare $M^T N^T - \langle M, N \rangle^T$ è martingala locale continua e grazie al Lemma precedente, lo è anche $M^T(N - N^T) = M_T(N - N^T)$ (per $t \in [0, T]$ si ha $N_t - N_t^T = 0$) osservando che per la Proposizione 2.1.21 M_T è $\mathcal{F}_T$-misurabile, dunque

$$MN^T - \langle M, N \rangle^T = (M^T N^T - \langle M, N \rangle^T) - M^T(N - N^T)$$

è somma di martingale locali continue e quindi è martingale locale continua. □

Corollario 3.1.25: *Se M, N sono martingale locali continue e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono tda t.c. $S_n \nearrow +\infty$ allora*

$$\langle M, N\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle M, N^{S_n}\rangle.$$

Dimostrazione. Infatti grazie alla Proposizione precedente si ha

$$\langle M, N\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle M, N\rangle^{S_n} = \lim_{n\to+\infty} \langle M, N^{S_n}\rangle.$$

□

Definizione 3.1.26 (Semimartingala continua): Una $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P})$-*semimartingala continua* è un processo continuo X t.c. $X = M + A$ con M una $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P})$-martingala locale continua e A un processo continuo a variazione finita rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Osservazione 3.1.27:

- Ovviamente la Definizione precedente ha perfettamente senso anche quando $\mathcal{F}_0$ non è $\mathbf{P}$-completa.
- Nel seguito, quando la filtrazione e la probabilità rispetto alle quali un processo X è una semimartingala continua sono chiare, chiameremo X solamente *semimartingala continua*.

Osservazione 3.1.28: La decomposizione $X = M + A$ di una semimartingala continua X è unica a meno di una funzione $\mathcal{F}_0$-misurabile.

Infatti se $X = M + A = M' + A'$, allora $M - M' = A' - A$ e per il Lemma 3.1.5 segue (arrestando opportunamente) che $M - M' = M_0 - M_0'$.

Proposizione 3.1.29: *Una semimartingala continua $X = M + A$ è a variazione quadratica finita con variazione quadratica $\langle X\rangle = \langle M\rangle$.*

Dimostrazione. Sia $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$ una partizione finita di $[0, t]$ con $t \geq 0$. Vale

$$\begin{aligned} T_t^\Delta(X) &= \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + \sum_{i=1}^n (A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 + 2\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}) \end{aligned}$$

e si ha

$$\left|\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})\right| \leq \left(\sup_{1\leq i\leq n} |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|\right) V_t(A) \overset{|\Delta|\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\sum_{i=1}^n (A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 \leq \left(\sup_{1\leq i\leq n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|\right) V_t(A) \overset{|\Delta|\to 0}{\longrightarrow} 0$$

quindi si ha quanto voluto (dalla convergenza puntuale a 0 si passa a quella in probabilità usando la Disuguaglianza di Markov e successivamente il Teorema di convergenza dominata, in cui si usano le ipotesi di continuità e di finita variazione per trovare le dominazioni in entrambi i casi). □

Osservazione 3.1.30: Nella precedente dimostrazione abbiamo provato, in particolare, che *un processo continuo a variazione finita è sempre a variazione quadratica finita e con variazione quadratica nulla.*

Definizione 3.1.31: Se $X = M + A$ e $Y = N + B$ sono due semimartingale continue, definiamo la loro *covariazione quadratica* come

$$\langle X, Y \rangle = \langle M, N \rangle.$$

Osservazione 3.1.32: Se $X = M + A$ è una semimartingala continua e $Y = B$ è continuo ed a variazione finita, per definizione

$$\langle X, Y \rangle = \langle M, 0 \rangle = 0.$$

Osservazione 3.1.33 (NC): Osserviamo che data una $(\mathcal{F}_t)$-semimartingala continua X, essendo limite in probabilità dei T_t^Δ, la sua variazione quadratica non cambia se sostituiamo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ con un'altra filtrazione rispetto alla quale X è sempre semimartingala locale continua. E non cambia nemmeno se sostituiamo $\mathbf{P}$ con un'altra probabilità assolutamente continua rispetto a $\mathbf{P}$.

Questo ci dice che l'oggetto "variazione quadratica" e di conseguenza anche l'oggetto "covariazione quadratica" hanno senso anche in caso ad esempio la filtrazione considerata non è completa (in quanto è possibile rifarsi al completamento).

In generale però non è detto che si riesca ad avere l'adattabilità rispetto alla seconda filtrazione.

Osservazione 3.1.34 (NC): Sia $(\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$ una filtrazione continua a destra (non necessariamente completa) e sia $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}})_{t\geq 0}$ il suo completamento rispetto a $\mathbf{P}$. Presa $X = M + A$ una $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}})$-semimartingala continua, è possibile dimostrare (noi non lo faremo) che esistono processi M', A', B' $(\mathcal{F}_t^0)$-adattati t.c.

- M' è una $(\mathcal{F}_t^0)$-martingala locale continua;
- A', B' sono continui, A' è a variazione finita e B' è crescente;
- X è indistinguibile da $X' = M' + A'$, che è una $(\mathcal{F}_t^0)$-semimartingala continua;
- B' è indistinguibile da $\langle X \rangle$ (variazione quadratica costruita usando la completezza di $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}})_{t\geq 0}$) e $(M')^2 - B'$ è una $(\mathcal{F}_t^0)$-martingala locale continua;
- B' è la variazione quadratica di X'.

In particolare quando la filtrazione non è completa ma è continua a destra la variazione quadratica di una data semimartingala continua può essere presa all'interno della sua classe di indistinguibilità in modo che non solo sia adattata al completamento della filtrazione considerata, ma lo sia esattamente rispetto alla filtrazione considerata.

Passiamo adesso a presentare alcuni fondamentali spazi di martingale.

Definizione 3.1.35 (Gli spazi $\mathbb{H}^2$, H^2 e H_0^2): Denotiamo con $\mathbb{H}^2$ lo spazio delle martingale limitate in $L^2(\mathbf{P})$ a meno della relazione d'equivalenza $\sim$ data dall'indistinguibilità tra processi, cioè

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ M \mid M \text{ martingala e } \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[M_t^2\right] < +\infty \right\} /\sim .$$

Inoltre definiamo gli spazi

$$\mathrm{H}^2 = \left\{ M \in \mathbb{H}^2 \mid \text{M ha un rappresentante continuo} \right\}$$
$$\mathrm{H}_0^2 = \left\{ M \in \mathbb{H}^2 \mid \text{M ha un rappresentante continuo e nullo in } 0 \right\}$$

Osservazione 3.1.36: Nel seguito confonderemo senza preoccuparcene troppo gli elementi di $\mathbb{H}^2$ con dei loro rappresentanti. Inoltre quando prenderemo $M \in \mathrm{H}^2$ ($M \in \mathrm{H}^2_0$) considereremo sempre il rappresentante continuo (e nullo in 0).

Osservazione 3.1.37:

- Il MB std B non è in $\mathbb{H}^2$ ma lo diventa se viene arrestato adeguatamente, ad esempio con un tda deterministico (vedi Esempio 3.1.12).
- Le martingale limitate sono in $\mathbb{H}^2$.

Lemma 3.1.38: *Presa $M \in \mathbb{H}^2$ ed M_∞ il rispettivo limite puntuale $\mathbf{P}$-q.c. vale che $M_\infty \in L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbf{P}) \subset L^2(\mathbf{P})$ ed M converge a M_∞ in $L^2(\mathbf{P})$. Inoltre la mappa*

$$\Phi : \mathbb{H}^2 \longrightarrow L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$$

t.c. $\Phi(M) = M_\infty$ per ogni $M \in \mathbb{H}^2$ è un isomorfismo lineare tra $\mathbb{H}^2$ e $L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$.

Dimostrazione. Per una delle Disuguaglianze massimali di Doob (Teorema 2.4.3), la v.a. $M^* = \sup_{t\geq 0} M_t$ è in $L^2(\mathbf{P})$ se $M \in \mathbb{H}^2$ e quindi per il Corollario 2.8.4 M è UI e $M_t = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_t]$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$, con M_∞ il limite di M per $t \to +\infty$, inoltre sappiamo anche che $M_\infty \in L^2(\mathbf{P})$ e che $M_t \to M_\infty$ in $L^2(\mathbf{P})$. Ma anzi analizzando bene la misurabilità di M_∞, essendo M adattato, si ha che $M_\infty \in L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$. Quindi è ben definita la mappa lineare

$$\Phi : \mathbb{H}^2 \longrightarrow L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$$

t.c. $\Phi(M) = M_\infty$ per ogni $M \in \mathbb{H}^2$. Costruire la mappa inversa è banale, infatti basta far corrispondere ad ogni v.a. $X \in L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$ la martingala $(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t])_{t\geq 0}$. □

Teorema 3.1.39: *Lo spazio $\mathbb{H}^2$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare*

$$(M, N)_{\mathbb{H}^2} = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[M_t N_t] \quad \forall M, N \in \mathbb{H}^2$$

che induce la norma

$$\|M\|_{\mathbb{H}^2} = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[M_t^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mathbb{E}\left[M_\infty^2\right]^{\frac{1}{2}} = \|M_\infty\|_{L^2(\mathbf{P})}.$$

Inoltre H^2 è sottospazio lineare chiuso in $(\mathbb{H}^2, \|\cdot\|_{\mathbb{H}^2})$.

Dimostrazione. Osserviamo che il prodotto scalare dell'enunciato è fatto apposta per rendere la corrispondenza del Lemma precedente un'isometria lineare, quindi la completezza voluta discende direttamente da quella di $L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$.

Vediamo che H^2 è chiuso. Sia $(M^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{H}^2$ successione convergente in $\mathbb{H}^2$ ad una $M \in \mathbb{H}^2$, vediamo che $M \in \mathrm{H}^2$. Da una delle Disuguaglianza massimali di Doob (Teorema 2.4.3) si ottiene

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\geq 0} |M_t^{(n)} - M_t|\right)^2\right] \leq 4\|M^{(n)} - M\|^2_{\mathbb{H}^2} \longrightarrow 0$$

per $n \to +\infty$, dunque esiste una sottosuccessione $(M^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$\sup_{t\geq 0} |M_t^{(n_k)} - M_t| \longrightarrow 0 \quad \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

per $n \to +\infty$, ovvero $M^{(n_k)} \longrightarrow M$ uniformemente $\mathbf{P}$-q.c., dunque $\mathbf{P}$-q.c. la traiettoria di M è continua. Di conseguenza a meno di modificare M in un insieme $\mathbf{P}$-nullo si ottiene la continuità di M (a meno di indistinguibilità). □

Proposizione 3.1.40: *Una martingala locale continua M è in* H^2 *se e solo se*

(1) $M_0 \in L^2(\mathbf{P})$*;*

(2) $\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right] < +\infty$.

In particolare, in tal caso, M è martingala continua, $\langle M\rangle$ è $\mathbf{P}$*-q.c. limitato, $M^2 - \langle M\rangle$ è martingala continua UI e vale*

$$\|M\|^2_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E}\left[M_0^2\right] + \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right].$$

Dimostrazione. Siano $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tda associati ad M. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ il processo $((M^{T_n})^2 - \langle M^{T_n}\rangle)\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ è una martingala continua e $\{T_n > 0\} \in \mathcal{F}_0$, quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(M_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}})^2\right] &= \mathbb{E}\left[((M_t^{T_n})^2 - \langle M^{T_n}\rangle_t)\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}\right] + \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(M_t^{T_n})^2 - \langle M^{T_n}\rangle_t \,|\, \mathcal{F}_0\right]\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}\right] + \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[((M_0^{T_n})^2 - \langle M^{T_n}\rangle_0)\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}\right] + \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_0^2\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}\right] + \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}\right]
\end{aligned}$$

ossia

$$\mathbb{E}\left[(M_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}})^2\right] - \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}\right] = \mathbb{E}\left[M_0^2\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}\right]. \tag{3.1}$$

Ora se $M \in \mathrm{H}^2$ allora (1) vale banalmente ed essendo M UI possiamo passare al limite nell'eq. (3.1) per ottenere

$$\mathbb{E}\left[M_\infty^2\right] - \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right] = \mathbb{E}\left[M_0^2\right]$$

che prova (2) e la formula per la norma.

Viceversa se valgono (1) e (2), la stessa uguaglianza (3.1) prova

$$\mathbb{E}\left[(M_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}})^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right] + \mathbb{E}\left[M_0^2\right] = K < +\infty$$

e grazie al Lemma di Fatou si ottiene

$$\mathbb{E}\left[M_t^2\right] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[(M_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}})^2\right] \leq K$$

che prova la limitatezza in $L^2(\mathbf{P})$ di M. Manca da vedere solamente che M è martingala. Grazie all'ultima disuguaglianza scritta si ottiene anche che $((M_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}})^2)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^2(\mathbf{P})$ per ogni $t \geq 0$, dunque passando al limite in

$$\mathbb{E}\left[M_t^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}} \,|\, \mathcal{F}_s\right] = M_s^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$$

usando il Teorema di Vitali, si ottiene che $\mathbb{E}\left[M_t \,|\, \mathcal{F}_s\right] = M_s$ per ogni $s, t \geq 0$, $s \leq t$, che è la proprietà di martingala voluta.

Infine per vedere che $M^2 - \langle M\rangle$ è UI osserviamo che

$$\sup_{t\geq 0}(M_t^2 - \langle M\rangle_t) \leq \sup_{t\geq 0} M_t^2 + \langle M\rangle_\infty$$

che è una v.a. integrabile grazie alle ipotesi ed al fatto (visto in precedenza nella dimostrazione) che M è limitata in $L^2(\mathbf{P})$. □

In particolare il precedente risultato ci permette di dimostrare il seguente importante fatto.

Proposizione 3.1.41: *Sia M una martingala locale continua, allora esiste una v.a. M_∞ t.c. $M_t \longrightarrow M_\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. su $\{\langle M\rangle_\infty < +\infty\}$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo assumere $M_0 = 0$. Se per $n \in \mathbb{N}$ consideriamo

$$T_n = \inf\{t \geq 0 \mid \langle M\rangle_t \geq n\}$$

la martingala locale continua M^{T_n} ha variazione quadratica $\langle M^{T_n}\rangle = \langle M\rangle^{T_n}$ che è limitata uniformemente, dunque per la Proposizione precedente $M^{T_n} \in \mathbb{H}^2$ ed in particolare è limitata in $L^2(\mathbf{P})$, dunque esiste $\mathbf{P}$-q.c. il limite $\lim_{t\to+\infty} M_t^{T_n}$, ma su $\{\langle M\rangle_\infty < +\infty\}$ la successione di tda $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente finita per $n \to +\infty$, dunque si ottiene la tesi. □

3.2 L'integrale Stocastico di Itô

Sappiamo che se A è un processo a variazione finita, per $\mathbf{P}$-q.o. $\omega \in \Omega$, possiamo associare alla traiettoria $t \mapsto A_t(\omega)$ una misura con segno di Radon $\mu_{A(\omega)}$, quindi preso H processo progressivamente misurabile e limitato su ogni compatto, possiamo definire $\mathbf{P}$-q.c. l'integrale

$$(H \cdot A)_t = \int_0^t H_s \,\mathrm{d}A_s = \int_0^t H_s \,\mathrm{d}\mu_A(s) \quad \forall t \geq 0.$$

che sarà a sua volta progressivamente misurabile. Lo scopo di quanto segue è definire una nozione di integrale rispetto ad un processo che però non è a variazione finita.

3.2.1 Integrale di Itô rispetto a martingale in H^2

Definizione 3.2.1 (Processo misurabile): Un processo stocastico H è detto *misurabile* se la mappa $\Omega \times [0,\infty) \longmapsto H_t(\omega)$ è $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}([0,\infty)$-misurabile.

Definizione 3.2.2 (Processi elementari): Nel seguito diremo che un processo K è un *processo elementare* se è della forma

$$K = K_{-1}\mathbf{1}_{\{0\}} + K_0\mathbf{1}_{(0,t_1]} + \ldots + K_{n-1}\mathbf{1}_{(t_{n-1},t_n]}$$

in cui $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < +\infty$, K_{-1} è v.a. $\mathcal{F}_0$-misurabile limitata e K_i è v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-misurabile limitata per ogni $i = 0, \ldots, n-1$. Denoteremo con $\mathcal{E}$ lo spazio di tali processi elementari.

Osservazione 3.2.3: Un processo elementare è progressivamente misurabile e limitato.

Lemma 3.2.4: *Siano A un processo a variazione finita, $p \geq 1$, H un processo misurabile e t.c. $H(\omega) \in L^p([0,\infty), dA(\omega))$ $\mathbf{P}$-q.c. (ad esempio se H è limitato) e $t \geq 0$. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ i processi elementari*

$$H^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} H_i^{(n)} \mathbf{1}_{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})}$$

in cui $\{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots t_n^{(n)} = t\}$ sono i punti in $[0,t]$ t.c. $t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} = \frac{t}{n}$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$ e

$$H_i^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ \frac{1}{A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}}} \int_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} H_s \,\mathrm{d}A_s = ⨍_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} H_s \,\mathrm{d}A_s & \text{se } i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Allora per ogni $p \in [1, +\infty)$ ed ogni $t \geq 0$ vale

$$\int_0^t |H_s^{(n)} - H_s|^p \, \mathrm{d}A_s \longrightarrow 0 \quad \mathbf{P}\text{-}q.c.$$

per $n \longrightarrow +\infty$.

Dimostrazione. (Facoltativo) Fissiamo $p \in [1, +\infty)$. Sia Ω' l'insieme misurabile e con $\mathbf{P}(\Omega') = 1$ in cui le traiettorie di A sono a variazione finita e le traiettorie di H sono in $L^p([0, \infty), dA)$. Fissiamo anche $\omega \in \Omega'$. Essendo la funzione $s \mapsto H_s(\omega)$ in $L^p([0, t], \mathrm{d}A(\omega))$, possiamo approssimarla, sempre in $L^p([0, t], \mathrm{d}A(\omega))$, con funzioni continue (per un noto risultato di densità). Di conseguenza basta dimostrare che se $s \mapsto h(s)$ è continua ed in $L^p([0, t], \mathrm{d}A(\omega))$, prese $h^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{(n)} \mathbf{1}_{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})}$, con

$$h_i^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ \fint_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} h(s) \, \mathrm{d}A_s(\omega) & \text{se } i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

vale che

$$\int_0^t |h^{(n)}(s) - h(s)|^p \, \mathrm{d}A_s(\omega) \longrightarrow 0$$

per $n \longrightarrow +\infty$.

Osserviamo che h è uniformemente continua su $[0, t]$, quindi preso $\varepsilon > 0$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ t.c. se $|x - y| \leq \frac{2t}{n}$ allora $|h(x) - h(y)| \leq \varepsilon$ ed a meno di ingrandire n possiamo anche supporre $\int_0^{t_1^{(n)}} |h(s)|^p \, \mathrm{d}A_s(\omega) < \varepsilon^p$.

Prendiamo quindi $i \in \{1, \dots, n\}$ e $r \in [t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})$, notiamo che se $u \in [t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)})$ allora $|r - u| \leq \frac{2t}{n}$ e di conseguenza $|h(r) - h(u)| \leq \varepsilon$ ed essendo $h^{(n)}(r) = \fint_{t_{i-1}}^{t_i} h(s) \, \mathrm{d}A_s(\omega)$ anche $|h^{(n)}(r) - h(r)| \leq \varepsilon$, dunque

$$\begin{aligned} \int_0^t |h^{(n)}(s) - h(s)|^p \, \mathrm{d}A_s(\omega) &= \int_0^{t_1^{(n)}} |h(s)|^p \, \mathrm{d}A_s(\omega) + \int_{t_1^{(n)}}^t |h^{(n)}(s) - h(s)|^p \, \mathrm{d}A_s(\omega) \\ &\leq \varepsilon^p (1 + t - t_1^{(n)}) \leq \varepsilon^p (1 + t) \end{aligned}$$

da cui segue quanto voluto per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. □

Proposizione 3.2.5: *Siano M, N due martingale locali continue e H, K due processi misurabili, allora per ogni $t \in [0, +\infty]$ vale $\mathbf{P}$-q.c. la disuguaglianza*

$$\int_0^t |H_s||K_s| \, \mathrm{d}V_s(\langle M, N \rangle) \leq \left[\int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_s \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t K_s^2 \, \mathrm{d}\langle N \rangle_s \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che possiamo dimostrare l'asserto per H, K limitati, in quanto poi il caso generale segue troncando ad un $n \in \mathbb{N}$ e passando al limite nella disuguaglianza usando il Teorema di Beppo Levi. Per il Lemma precedente possiamo ridurci a considerare H e K della forma

$$\begin{aligned} H &= H_{-1} \mathbf{1}_{\{0\}} + H_0 \mathbf{1}_{(0, t_1]} + \dots + H_{n-1} \mathbf{1}_{(t_{n-1}, t_n]} \\ K &= K_{-1} \mathbf{1}_{\{0\}} + K_0 \mathbf{1}_{(0, t_1]} + \dots + K_{n-1} \mathbf{1}_{(t_{n-1}, t_n]}. \end{aligned}$$

con $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ partizione finita di $[0, t]$, H_{-1}, K_{-1} v.a. $\mathcal{F}_0$-misurabili limitate e H_i, K_i v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-misurabili limitate per ogni $i = 0, 1, \dots, n-1$. Ricordiamo inoltre che se $\mu_{\langle M, N \rangle}$ è la misura (con segno) associata a $\langle M,N\rangle$, si ha che $\mu_{V.(\langle M,N\rangle)} = \|\mu_{\langle M,N\rangle}\|$, in particolare, dalla teoria delle misure con segno, vale $\mu_{\langle M,N\rangle} \ll \|\mu_{\langle M,N\rangle}\| = \mu_{V.(\langle M,N\rangle)}$ e possiamo prendere la densità J (che dipende da $\omega \in \Omega$) in modo che J sia a valori in $\{-1,1\}$. Notiamo quindi che vale

$$\int_0^t |H_s||K_s| \, \mathrm{d}V_s(\langle M,N\rangle) = \left| \int_0^t H_s J_s \operatorname{sgn}(H_s K_s) K_s \, \mathrm{d}\langle M,N\rangle \right|$$

possiamo di conseguenza provare la disuguaglianza

$$\left| \int_0^t H_s K_s \, \mathrm{d}\langle M,N\rangle \right| \leq \left[\int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t K_s^2 \, \mathrm{d}\langle N\rangle_s \right]^{\frac{1}{2}}$$

per ottenere la tesi.

Per comodità chiamiamo per $s,t \geq 0$. $s < t$

$$\langle M,N\rangle_s^t = \langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s$$

quindi vale

$$|\langle M,N\rangle_s^t| \leq \left(\langle M\rangle_s^t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle N\rangle_s^t\right)^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

Infatti $\mathbf{P}$-q.c. la quantità $\langle M\rangle_s^t + 2r\langle M,N\rangle_s^t + r^2\langle N\rangle_s^t = \langle M+tN, M+rN\rangle_s^t$ è non negativa per ogni $r \in \mathbb{R}$, dunque imponendo il discriminante di tale equazione di secondo grado ≤ 0 otteniamo quanto voluto. Di conseguenza si ha

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t H_s K_s \, \mathrm{d}\langle M,N\rangle \right| &\leq \sum_{i=1}^n |H_i K_i| |\langle M,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |H_i K_i| \left(\langle M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\text{(Cauchy-Schwarz)} \quad &\leq \left(\sum_{i=1}^n H_i^2 \langle M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n K_i^2 \langle N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t K_s^2 \, \mathrm{d}\langle N\rangle_s \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

che è quanto voluto. □

Corollario 3.2.6 (Disuguaglianza di Kunita-Watanabe): *Siano M,N due martingale locali continue e H,K due processi misurabili, allora vale la disuguaglianza*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |H_s||K_s| \, \mathrm{d}V_s(\langle M,N\rangle) \right] \leq \left\| \left[\int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbf{P})} \left\| \left[\int_0^t K_s^2 \, \mathrm{d}\langle N\rangle_s \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q(\mathbf{P})}$$

con $p,q \geq 1$ due esponenti coniugati e $t \in [0,+\infty]$.

Dimostrazione. Basta prendere il valore atteso nella disuguaglianza della Proposizione precedente ed usare poi la Disuguaglianza di Hölder. □

Definizione 3.2.7: Sia $M \in \mathrm{H}^2$, poniamo $\mathscr{L}^2(M)$ lo spazio dei processi K t.c.

(1) K è progressivamente misurabile;

(2) $\mathbb{E}\left[\int_0^t K_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] < +\infty$ per ogni $t \geq 0$.

Inoltre poniamo $L^2(M) = \mathscr{L}^2(M)/\sim$ con $\sim$ la relazione d'equivalenza data dall'indistinguibilità tra processi.

Osservazione 3.2.8: Nel contesto della definizione precedente si ha $K \sim K'$ se e solo se

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (K_s - K'_s)^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] = 0.$$

Osservazione 3.2.9: Nel contesto della definizione precedente si ha $\mathscr{E} \subset L^2(M)$.

Osservazione 3.2.10: Vale che $\mathscr{L}^2(M)$ è linearmente isomorfo a $\mathscr{L}^2_{\mathrm{prog}}(\Omega\times[0,\infty), \mathcal{F}_\infty\otimes\mathcal{B}([0,\infty)), P_M)$ spazio delle funzioni misurabili di quadrato integrabile rispetto alla misura

$$P_M(A) = \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_A(\omega, s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}([0,\infty))$$

tramite la mappa $K \longmapsto \psi_K$ con $\psi_K(\omega, s) = K_s(\omega)$. Osserviamo inoltre che $\mathscr{L}^2_{\mathrm{prog}}(\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}([0,\infty)), P_M)/\sim$ è chiuso in $L^2(\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}([0,\infty)), P_M)$.

Corollario 3.2.11: *Data $M \in \mathbb{H}^2$, lo spazio $L^2(M)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare*

$$(K, H)_{L^2(M)} = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s H_s\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] \quad \forall K, H \in L^2(M)$$

che induce la norma

$$\|K\|_{L^2(M)} = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall K \in L^2(M).$$

Dimostrazione. Infatti $\|K\|_{L^2(M)} = \|\psi_K\|_{L^2(P_M)}$, quindi l'isomorfismo dell'Osservazione precedente è un'isometria lineare ed essendo $L^2(\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}([0,\infty)), P_M)$ completo e $L^2_{\mathrm{prog}}(\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}([0,\infty)), P_M)$ chiuso in $L^2(\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}([0,\infty)), P_M)$ si ha la completezza voluta. □

Osservazione 3.2.12: Nel seguito dato un processo a variazione finita A chiameremo

$$(K \cdot A)_t = \int_0^t K_s\,\mathrm{d}A_s$$

con K processo per cui l'integrale abbia senso.

Siamo pronti per il Teorema principale della sezione.

Teorema 3.2.13 (Esistenza ed Unicità dell'integrale stocastico (di Itô) rispetto a martingale in H^2): *Sia $M \in \mathrm{H}^2$, per ogni $K \in L^2(M)$ esiste un unico elemento di H^2_0, denotato con $K \cdot M$, t.c.*

$$\langle K \cdot M, N\rangle = K \cdot \langle M, N\rangle \quad \forall N \in \mathrm{H}^2.$$

Dimostrazione. Vediamo prima l'unicità. Siano $K \cdot M, \widetilde{K \cdot M} \in \mathrm{H}^2_0$ come da tesi, allora per ogni $N \in \mathrm{H}^2$ si ha

$$\begin{aligned}\langle K \cdot M - \widetilde{K \cdot M}, N\rangle &= \langle K \cdot M, N\rangle - \langle \widetilde{K \cdot M}, N\rangle \\ &= K \cdot \langle M, N\rangle - K \cdot \langle M, N\rangle = 0\end{aligned}$$

e se prendiamo $N = K \cdot M - \widetilde{K \cdot M}$ otteniamo $\langle K \cdot M - \widetilde{K \cdot M} \rangle = 0$ e quindi dalla Proposizione 3.1.18 si ottiene $K \cdot M - \widetilde{K \cdot M} = (K \cdot M)_0 - (\widetilde{K \cdot M})_0 = 0$.

Passiamo adesso all'esistenza. Fissati $M \in \mathrm{H}^2$ e $K \in L^2(M)$, consideriamo $L : \mathrm{H}_0^2 \to \mathbb{R}$ t.c.

$$L(N) = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s \, \mathrm{d}\langle M, N\rangle_s\right] = \mathbb{E}\left[(K \cdot \langle M, N\rangle)_\infty\right] \quad \forall N \in \mathrm{H}_0^2$$

che è continua perché per ogni $N \in \mathrm{H}_0^2$, usando la Disuguaglianza di Kunita-Watanabe (Corollario 3.2.6), si ha

$$\begin{aligned}
|L(N)| &\le \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} |K_s| \, \mathrm{d}V_s(\langle M, N\rangle)\right] \\
&\le \left(\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right]\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} 1 \, \mathrm{d}\langle N\rangle_s\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right]\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left[\langle N\rangle_\infty\right]\right)^{\frac{1}{2}} = \|K\|_{L^2(M)} \|N\|_{\mathbb{H}^2} < +\infty.
\end{aligned}$$

Quindi dal il Teorema di Riesz per il duale topologico di uno spazio di Hilbert si ha che esiste unico un $K \cdot M \in \mathrm{H}_0^2$ t.c.

$$L(N) = (N, K \cdot M)_{\mathbb{H}^2} \quad \forall N \in \mathrm{H}_0^2.$$

Vediamo adesso l'ultima proprietà della tesi. Osserviamo preliminarmente che vale l'uguaglianza

$$\mathbb{E}\left[(K \cdot \langle M, N\rangle)_\infty\right] = \mathbb{E}\left[N_\infty (K \cdot M)_\infty\right] \quad \forall N \in \mathrm{H}_0^2, \tag{3.2}$$

infatti si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(K \cdot \langle M, N\rangle)_\infty\right] &= L(N) = (N, K \cdot M)_{\mathbb{H}^2} \\
&= \mathbb{E}\left[N_\infty (K \cdot M)_\infty\right].
\end{aligned}$$

Fissiamo ora $N \in \mathrm{H}_0^2$ e vediamo che $\langle K \cdot M, N\rangle = K \cdot \langle M, N\rangle$, ossia che $(K \cdot M)N - K \cdot \langle M, N\rangle$ è una martingala. Per farlo, usando il Teorema 2.7.1 d'arresto opzionale, basta prendere un tda limitato T e verificare che

$$\mathbb{E}\left[(K \cdot M)_T N_T - (K \cdot \langle M, N\rangle)_T\right] = 0.$$

Osserviamo che se $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono tda limitati t.c $\tau_n \ge T$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\tau_n \nearrow +\infty$, dal Teorema 2.7.1 d'arresto opzionale segue

$$(K \cdot M)_T = \mathbb{E}\left[(K \cdot M)_{\tau_n} \,|\, \mathcal{F}_T\right] \quad \mathbf{P}\text{-q.c. per ogni } n \in \mathbb{N}$$

ma $K \cdot M \in H_0^2$, dunque in particolare $(K \cdot M)_{\tau_n} \longrightarrow (K \cdot M)_\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. e $|(K \cdot M)_{\tau_n}| \le \sup_{t\ge 0} |(K \cdot M)_t| \in L^2(\mathbf{P})$, quindi usando il Teorema di convergenza dominata condizionale si ottiene

$$(K \cdot M)_T = \mathbb{E}\left[(K \cdot M)_\infty \,|\, \mathcal{F}_T\right] \quad \mathbf{P}\text{-q.c.} \tag{3.3}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(K\cdot M)_T N_T\right] &= \mathbb{E}\left[N_T \mathbb{E}\left[(K\cdot M)_\infty \mid \mathcal{F}_T\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[N_T (K\cdot M)_\infty \mid \mathcal{F}_T\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[N_T (K\cdot M)_\infty\right] \\
&= \mathbb{E}\left[N_\infty^T (K\cdot M)_\infty\right] \\
\text{(Eq. (3.2))} \quad &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty K_s \, \mathrm{d}\langle M, N^T\rangle_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty K_s \, \mathrm{d}\langle M, N\rangle_s^T\right] \\
\text{(Se } A \text{ a var. fin. vale } \mathrm{d}A^T = \mathbf{1}_{[0,T]}\,\mathrm{d}A) \quad &= \mathbb{E}\left[\int_0^T K_s \, \mathrm{d}\langle M, N\rangle_s\right] = \mathbb{E}\left[(K\cdot\langle M, N\rangle)_T\right]
\end{aligned}$$

che è quanto voluto. □

Definizione 3.2.14: Data $M \in \mathrm{H}^2$ e dato $K \in L^2(M)$, definiamo l'*integrale stocastico (di Itô* di K rispetto ad M il processo $K \cdot M$ dato dal Teorema precedente. Useremo anche la seguente notazione "integrale"

$$(K\cdot M)_t = \int_0^t K_s \, \mathrm{d}M_s \quad \forall t \in [0, +\infty].$$

Osservazione 3.2.15: Nel contesto della Definizione e del Teorema precedente, per l'unicità si ha in particolare che $K \cdot M = K \cdot (M - M_0)$.

Teorema 3.2.16 (Isometria di Itô): *Sia* $M \in \mathrm{H}^2$. *L'applicazione*

$$L^2(M) \ni K \longmapsto K \cdot M \in \mathrm{H}_0^2$$

è isometrica e verrà chiamata isometria di Itô*, in particolare per ogni* $t \in [0, +\infty]$ *vale*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t K_s \, \mathrm{d}M_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t K_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right].$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\langle K\cdot M\rangle = \langle K\cdot M, K\cdot M\rangle = K\cdot(K\cdot\langle M\rangle)$$

quindi usando l'associatività dell'integrale di Stieltjes si ottiene

$$\langle K\cdot M\rangle = K^2 \cdot \langle M\rangle$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
\|K\cdot M\|_{\mathbb{H}^2}^2 &= \mathbb{E}\left[\langle K\cdot M\rangle_\infty\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] = \|K\|_{L^2(M)}^2.
\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza della tesi segue quindi anche per ogni $t \in [0, \infty)$ sostituendo K con $K\mathbf{1}_{[0,t]}$. □

Corollario 3.2.17: *Siano $M \in \mathrm{H}^2$, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(M)$ e $K \in L^2(M)$. Se $K_n \longrightarrow K$ in $L^2(M)$ allora $K_n \cdot M \longrightarrow K \cdot M$ in H^2_0.*

Proposizione 3.2.18: *Siano $M \in \mathrm{H}^2$, $K \in L^2(M)$ e $H \in L^2(K \cdot M)$, allora $HK \in L^2(M)$ e vale*

$$(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M).$$

Dimostrazione. Come visto nella dimostrazione precedente vale $\langle K \cdot M\rangle = K^2 \cdot \langle M\rangle$, dunque

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 K_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] &= \mathbb{E}\left[((H^2K^2)\cdot\langle M\rangle)_\infty\right]\\ \text{(Ass. int. di Stieltjes)} &= \mathbb{E}\left[(H^2\cdot(K^2\cdot\langle M\rangle))_\infty\right]\\ &= \mathbb{E}\left[(H^2\cdot\langle K\cdot M\rangle)_\infty\right] = \|H\|_{L^2(K\cdot M)} < +\infty\end{aligned}$$

dunque $HK \in L^2(M)$. Ora prendiamo $N \in \mathrm{H}^2$, allora

$$\begin{aligned}\langle H\cdot(K\cdot M), N\rangle &= H\cdot(K\cdot M, N)\\ &= H\cdot(K\cdot\langle M,N\rangle)\\ \text{(Ass. int. di Stieltjes)} &= (HK)\cdot\langle M,N\rangle\end{aligned}$$

da cui segue per unicità dell'integrale stocastico che $(HK)\cdot M = H\cdot(K\cdot M)$. □

Proposizione 3.2.19: *Sia $M \in \mathrm{H}^2$ e T tda, allora $\mathbf{1}_{[0,T]} \in L^2(M)$ e vale*

$$M^T = \mathbf{1}_{[0,T]}\cdot M = \mathbf{1}_{[0,T)}\cdot M.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}_{[0,T]}\|_{L^2(M)} &= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbf{1}^2_{[0,T]}(s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,T]}(s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right]\\ &\le \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right] = \|M\|_{\mathbb{H}^2} - \mathbb{E}\left[M_0^2\right] < +\infty\end{aligned}$$

ossia $\mathbf{1}_{[0,T]} \in L^2(M)$ e quindi anche $\mathbf{1}_{[0,T)} \in L^2(M)$. Sia ora $N \in \mathrm{H}^2$, abbiamo

$$\begin{aligned}\langle M^T, N\rangle_s &= \langle M,N\rangle_s^T\\ &= \int_0^{s\wedge T} \mathrm{d}\langle M,N\rangle_r\\ &= \int_0^s \mathbf{1}_{[0,T]}(r)\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_r = (\mathbf{1}_{[0,T]}\cdot\langle M,N\rangle)_s.\end{aligned}$$

E lo stesso conto si può fare anche con $\mathbf{1}_{[0,t)}$ in quanto la misura $d\langle M,N\rangle(\omega)$ non ha atomi per ogni $\omega \in \Omega$. □

Corollario 3.2.20: *Siano $M \in \mathrm{H}^2$, T tda e $K \in L^2(M)$. Allora*

$$(K\cdot M)^T = (K\mathbf{1}_{[0,T]}\cdot M) = K\cdot M^T = K^T\cdot M^T$$

ossia per ogni $s \ge 0$

$$\int_0^{s\wedge T} K_r\,\mathrm{d}M_r = \int_0^s K_r\mathbf{1}_{[0,T]}(r)\,\mathrm{d}M_r = \int_0^s K_r\,\mathrm{d}M_r^T = \int_0^s K_r^T\,\mathrm{d}M_r^T.$$

Dimostrazione. Sia $N \in \mathrm{H}^2$, allora usando la Proposizione precedente si ottiene

$$\begin{aligned} \langle K \cdot M^T, N\rangle &= K \cdot \langle M^T, N\rangle \\ &= K \cdot \langle \mathbf{1}_{[0,T]} \cdot M, N\rangle \\ &= K \cdot (\mathbf{1}_{[0,T]} \cdot \langle M, N\rangle) \\ \text{(Ass. int. di Stieltjes)} \quad &= (K\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot \langle M, N\rangle \end{aligned}$$

da cui segue che $(K\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot M = K \cdot M^T$. Inoltre

$$\begin{aligned} \langle (K \cdot M)^T, N\rangle &= \langle K \cdot M, N\rangle^T \\ &= \langle K \cdot M, N^T\rangle \\ &= K \cdot \langle M, N^T\rangle \\ &= K \cdot \langle M^T, N\rangle \\ \text{(Come sopra)} \quad &= (K\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot \langle M, N\rangle \end{aligned}$$

ossia $(K\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot M = (K \cdot M)^T$. □

3.2.2 Integrale di Itô rispetto a martingale locali continue

Osserviamo che un processo in H^2 è una martingala continua UI e quindi è in particolare una martingala locale continua. Viene quindi naturale provare ad estendere l'integrale stocastico ammettendo come integratore una qualsiasi martingala locale continua.

Definizione 3.2.21 (Gli spazi $\mathscr{L}^2_{\mathbf{loc}}(M)$ e $L^2_{\mathbf{loc}}(M)$): Se M è una martingala locale continua, chiameremo $\mathscr{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)$ la famiglia dei processi K t.c.

(1) K è progressivamente misurabile;

(2) esistono tda $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $T_n \nearrow +\infty$ e t.c. $K^{T_n} \in \mathscr{L}^2(M)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T_n} K_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre sarà $L^2_{\mathrm{loc}}(M) = \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)/\sim$.

Osservazione 3.2.22: La condizione (2) della Definizione precedente, grazie alla continuità assunta, è equivalente a

2') $\int_0^t K_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s < +\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$.

Teorema 3.2.23 (Esistenza ed Unicità dell'integrale stocastico (di Itô) rispetto a martingale locali continue): *Se M è una martingala locale continua e $K \in L^2_{loc}(M)$, allora esiste unica una martingala locale continua $K \cdot M$ nulla in* 0 *e t.c. per ogni N martingala locale continua*

$$\langle K \cdot M, N\rangle = K \cdot \langle M, N\rangle.$$

Dimostrazione. Vediamo prima l'unicità. Siano $K \cdot M, \widetilde{K \cdot M}$ martingale locali continue come da tesi, allora per ogni N martingala locale continua vale

$$\begin{aligned} \langle K \cdot M - \widetilde{K \cdot M}, N\rangle &= \langle K \cdot M, N\rangle - \langle \widetilde{K \cdot M}, N\rangle \\ &= K \cdot \langle M, N\rangle - K \cdot \langle M, N\rangle = 0 \end{aligned}$$

e se prendiamo $N = K \cdot M - \widetilde{K \cdot M}$ otteniamo $\langle K \cdot M - \widetilde{K \cdot M} \rangle = 0$ e quindi dalla Proposizione 3.1.18 si ottiene $K \cdot M - \widetilde{K \cdot M} = (K \cdot M)_0 - (\widetilde{K \cdot M})_0 = 0$.

Passiamo quindi all'esistenza. Possiamo supporre senza perdita di generalità $M_0 = 0$, in quanto $K \in L^2_{\text{loc}}(M)$ se e solo se $K \in L^2_{\text{loc}}(M - M_0)$ e se esistesse $K \cdot (M - M_0)$ come da tesi allora potremmo porre $K \cdot M = K \cdot (M - M_0)$ per ottenere la tesi, infatti se N è una martingala locale continua vale $\langle M_0, N \rangle = 0$, quindi

$$\langle K \cdot (M - M_0), N \rangle = K \cdot \langle M - M_0, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle.$$

Grazie alle ipotesi di possono trovare tda $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $T_n \nearrow +\infty$ t.c. M^{T_n} è martingala limitata e $K^{T_n} \in L^2(M)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare $M^{T_n} \in \mathrm{H}^2$ e $K^{T_n} \in L^2(M^{T_n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza è ben definito $K^{T_n} \cdot M^{T_n} \in \mathrm{H}^2_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo adesso che preso $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(K^{T_{n+1}} \cdot M^{T_{n+1}})^{T_n} = (K^{T_n}) \cdot M^{T_n}$$

ossia sono indistinguibili, quindi $\mathbf{P}$-q.c. è ben definito il limite

$$(K \cdot M)_t = \lim_{n \to +\infty} (K^{T_n} \cdot M^{T_n})_t$$

quindi a meno di un insieme di misura $\mathbf{P}$-nulla abbiamo definito un processo $K \cdot M$ che risulta essere adattato grazie alla $\mathbf{P}$-completezza della filtrazione (non importa cosa fa sull'insieme $\mathbf{P}$-nullo dove il limite non esiste). Inoltre per costruzione il processo così definito è t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$(K \cdot M)^{T_n} = K^{T_n} \cdot M^{T_n}$$

dunque è una martingala locale continua. Rimane da provare che per ogni N martingala locale continua vale

$$\langle K \cdot M, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle$$

e per farlo osserviamo che basta mostrarlo per N martingala limitata, in quanto l'uguaglianza in questione passa al limite (infatti vale quanto detto nel Corollario 3.1.25). Sia quindi N martingala continua limitata, in particolare $N \in \mathrm{H}^2$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned}
\langle K \cdot M, N \rangle^{T_m} &= \langle (K \cdot M)^{T_m}, N \rangle \\
&= \langle K^{T_m} \cdot M^{T_m}, N \rangle \\
&= K^{T_m} \cdot \langle M^{T_m}, N \rangle \\
&= K^{T_m} \cdot \langle M, N \rangle^{T_m} = (K \cdot \langle M, N \rangle)^{T_m}
\end{aligned}$$

da cui segue quanto voluto per $m \to +\infty$. □

Proposizione 3.2.24: *Sia M una martingala locale continua e sia $K \in \mathcal{E}$, $K = K_{-1}\mathbf{1}_{\{0\}} + K_0\mathbf{1}_{(0,t_1]} + ... + K_{n-1}\mathbf{1}_{(t_{n-1},t_n]}$. Allora per ogni $t \geq 0$, preso $t_{n_t} = \sup\{t_i \mid i = 0, 1, ..., n-1,\ t_i \leq t\}$, vale*

$$(K \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{n_t - 1} K_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + K_{n_t}(M_t - M_{t_{n_t}})$$

Dimostrazione. Non è difficile osservare che se $L_t = \sum_{i=0}^{n_t-1} K_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + K_{n_t}(M_t - M_{t_{n_t}})$ per ogni $t \geq 0$ allora L è una martingala locale nulla in 0 e che presa N una martingala locale continua e prese delle Δ partizioni finite di $[0, \infty)$ che contengono $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n$ allora usando la definizione di $\langle L, N \rangle$ è possibile provare che vale $\langle L, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle$. Quindi $L = K \cdot M$. □

Proposizione 3.2.25: *Se M è una martingala locale continua e $K \in L^2_{loc}(M)$ allora per ogni $t \in [0, +\infty]$ vale*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t K_s \, \mathrm{d}M_s\right)^2\right] \le \mathbb{E}\left[\int_0^t K_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right].$$

Dimostrazione. Grazie al Lemma di Fatou ed al Teorema di Beppo Levi basta dimostrare la disuguaglianza per $t < +\infty$. A questo punto la tesi segue facilmente dalla Proposizione 3.1.15 notando che $\langle K \cdot M\rangle = K^2 \cdot \langle M\rangle$. □

Proposizione 3.2.26 (Associatività dell'integrale stocastico): *Siano M martingala locale continua, $K \in L^2_{loc}(M)$ e $H \in L^2_{loc}(K \cdot M)$, allora $HK \in L^2_{loc}(M)$ e vale*

$$(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M).$$

Dimostrazione. Vale sempre, usando l'associatività dell'integrale di Stieltjes che $\langle K \cdot M\rangle = K^2 \cdot \langle M\rangle$, quindi preso $t \ge 0$ vale

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 K_s^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] &= \mathbb{E}\left[((H^2K^2) \cdot \langle M\rangle)_t\right] \\
\text{(Ass. int. di Stieltjes)} \quad &= \mathbb{E}\left[(H^2 \cdot (K^2 \cdot \langle M\rangle))_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(H^2 \cdot \langle K \cdot M\rangle)_t\right] < +\infty
\end{aligned}$$

dunque $HK \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$. Ora prendiamo N una martingala locale continua, allora

$$\begin{aligned}
\langle H \cdot (K \cdot M), N\rangle &= H \cdot (K \cdot M, N) \\
&= H \cdot (K \cdot \langle M, N\rangle) \\
\text{(Ass. int. di Stieltjes)} \quad &= (HK) \cdot \langle M, N\rangle
\end{aligned}$$

da cui segue per unicità dell'integrale stocastico che $(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M)$. □

Proposizione 3.2.27: *Sia M una martingala locale continua e T tda, allora $\mathbf{1}_{[0,T]} \in L^2_{loc}(M)$ e vale*

$$M^T = \mathbf{1}_{[0,T]} \cdot M = \mathbf{1}_{[0,T)} \cdot M.$$

Dimostrazione. Per ogni $t \ge 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbf{1}^2_{[0,T]}(s) \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbf{1}_{[0,T]}(s) \, \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_{t \wedge T}\right] < +\infty
\end{aligned}$$

ossia $\mathbf{1}_{[0,T]} \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ e quindi anche $\mathbf{1}_{[0,T)} \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$. Sia ora N una martingala locale continua, abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle M^T, N\rangle_s &= \langle M, N\rangle_s^T \\
&= \int_0^{s \wedge T} \mathrm{d}\langle M, N\rangle_r \\
&= \int_0^s \mathbf{1}_{[0,T]}(r) \, \mathrm{d}\langle M, N\rangle_r = (\mathbf{1}_{[0,T]} \cdot \langle M, N\rangle)_s.
\end{aligned}$$

E lo stesso conto si può fare anche con $\mathbf{1}_{[0,t)}$ in quanto la misura $d\langle M, N\rangle(\omega)$ non ha atomi per ogni $\omega \in \Omega$. □

Corollario 3.2.28: *Siano M una martingala locale continua, T tda e $K \in L^2_{loc}(M)$. Allora*

$$(K \cdot M)^T = (K\mathbf{1}_{[0,T]} \cdot M) = K \cdot M^T$$

ossia per ogni $s \geq 0$

$$\int_0^{s\wedge T} K_r \, \mathrm{d}M_r = \int_0^s K_r \mathbf{1}_{[0,T]}(r) \, \mathrm{d}M_r = \int_0^s K_r \, \mathrm{d}M_r^T.$$

Dimostrazione. Sia N una martingala locale continua, allora usando la Proposizione precedente si ottiene

$$\begin{aligned}
\langle K \cdot M^T, N\rangle &= K \cdot \langle M^T, N\rangle \\
&= K \cdot \langle \mathbf{1}_{[0,T]} \cdot M, N\rangle \\
&= K \cdot (\mathbf{1}_{[0,T]} \cdot \langle M, N\rangle) \\
\text{(Ass. int. di Stieltjes)} \quad &= (K\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot \langle M, N\rangle
\end{aligned}$$

da cui segue che $(K\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot M = K \cdot M^T$. Inoltre

$$\begin{aligned}
\langle (K \cdot M)^T, N\rangle &= \langle K \cdot M, N\rangle^T \\
&= \langle K \cdot M, N^T\rangle \\
&= K \cdot \langle M, N^T\rangle \\
&= K \cdot \langle M^T, N\rangle \\
\text{(Come sopra)} \quad &= (K\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot \langle M, N\rangle
\end{aligned}$$

ossia $(K\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot M = (K \cdot M)^T$. □

3.2.3 Il caso del MB come integratore

Facciamo adesso un piccolo focus sul caso dell'integrazione rispetto ad un MB. Diamo innanzitutto la seguente fondamentale definizione.

Definizione 3.2.29: Sia $x \in \mathbb{R}^d$. Un processo B è detto $(\mathcal{F}_t)$-*MB^d che parte da x (std, se $x = 0$)* se

(1) B è un MB^d che parte da x;

(2) B è adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;

(3) per ogni $s \geq 0$ il processo $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$.

Osservazione 3.2.30: Ovviamente la Definizione precedente ha perfettamente senso anche quando $\mathcal{F}_0$ non è $\mathbf{P}$-completa. E un $(\mathcal{F}^B_t)$-MB che parte da x è semplicemente un MB che parte da x.

Osservazione 3.2.31: Se B è un $(\mathcal{F}_t)$-MB std, allora B è una martingala locale continua (per ottenere la proprietà di martingala si usa la proprietà (3) della Definizione precedente e si usano i tda deterministici $T_n = n$ per ottenere la limitatezza in $L^2(\mathbf{P})$) e se $K \in L^2_{\mathrm{loc}}(B)$, ossia

(1) K è progressivamente misurabile;

(2) $\int_0^t K_s^2 \, \mathrm{d}B_s < +\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$;

allora è ben definito per ogni $t \geq 0$ l'integrale (stocastico)

$$\int_0^t K_s \, \mathrm{d}B_s = (K \cdot B)_t .$$

Proposizione 3.2.32: *Se B è un $(\mathcal{F}_t)$-MB std, allora:*

(1) se $K \in L^2_{loc}(B)$ allora $K \cdot B$ è una martingala;

(2) se K è progressivamente misurabile e con

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s^2 \, \mathrm{d}s\right] < +\infty$$

allora $K \cdot B \in \mathrm{H}^2_0$.

Dimostrazione. Prendiamo $t, s \geq 0$ con $s \leq t$ e sia $n \in \mathbb{N}$, allora B^n è una martingala in H^2 e $K \in L^2(B^n)$, infatti

$$\int_0^{+\infty} K_s^2 \, \mathrm{d}B_s^n = \int_0^n K_s^2 \, \mathrm{d}B_s < +\infty \quad \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

dunque $K \cdot B^n = (K \cdot B)^n \in \mathrm{H}^2_0$, ossia è una martingala continua nulla in 0 (questo ci dà anche l'integrabilità in quanto per $t \leq n$ si ha $(K \cdot B)_t = (K \cdot B)_t^n = (K \cdot B^n)_t$ che è integrabile). Di conseguenza per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\mathbb{E}\left[(K \cdot B)_t^n \mid \mathcal{F}_s\right] = (K \cdot B)_s^n$$

ma per $n \in \mathbb{N}$ t.c. $s \leq t \leq n$ si ottiene

$$\mathbb{E}\left[(K \cdot B)_t \mid \mathcal{F}_s\right] = (K \cdot B)_s$$

che è la proprietà di martingala voluta.

L'ultima affermazione segue dalla Proposizione 3.1.40, osservando che $\langle K \cdot B \rangle = \int_0^{\cdot} K_s^2 \, \mathrm{d}s$. □

Lemma 3.2.33: *Sia B un $(\mathcal{F}_t)$-MB std e $K \in L^2_{loc}(B)$, allora per ogni $t \geq 0$ vale*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t K_s \, \mathrm{d}B_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t K_s^2 \, \mathrm{d}s\right].$$

Dimostrazione. Per ogni $t \geq 0$ il processo B^t è una martingala in H^2 e $K \in L^2(B^t)$. Inoltre $\langle B^t \rangle_s = \langle B \rangle_s^t = s \wedge t$, quindi per l'Isometria di Itô si ha

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t K_s \, \mathrm{d}B_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} K_s \, \mathrm{d}B_s^t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t K_s^2 \, \mathrm{d}s\right].$$

□

Proposizione 3.2.34 (Integrale di Wiener): *Se $f \in L^2([0,\infty), \mathcal{L}^1)$ e B è un $(\mathcal{F}_t)$-MB std allora*

$$\int_0^{+\infty} f(s) \, \mathrm{d}B_s \sim \mathcal{N}(0, \|f\|^2_{L^2([0,\infty),\mathcal{L}^1)}).$$

Dimostrazione. Per il Lemma precedente ed il fatto che $f \in L^2([0,\infty),\mathcal{L}^1)$ si ha che l'integrale nell'LHS della tesi è ben definito e finito $\mathbf{P}$-q.c.. La tesi è banale per f una funzione semplice, ma le funzioni semplici sono dense in $L^2([0,\infty),\mathcal{L}^1)$ e se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2([0,\infty),\mathcal{L}^1)$ è t.c. $f_n \longrightarrow f$ in $L^2([0,\infty),\mathcal{L}^1)$ allora usando il Lemma precedente

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{+\infty} (f_n(s) - f(s))\,\mathrm{d}B_s\right|^2\right] \leq \|f_n - f\|^2_{L^2([0,\infty),\mathcal{L}^1)} \longrightarrow 0$$

dunque $\int_0^{+\infty} f_n(s)\,\mathrm{d}B_s \longrightarrow \int_0^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}B_s$ in $L^2(\mathbf{P})$ e la tesi segue per quanto noto sulla convergenza di v.a. gaussiane. □

Corollario 3.2.35: *Sia $f \in L^2_{loc}(B)$ deterministica, allora $f \cdot B$ è una martingala UI se e solo se $f \in L^2([0,\infty),\mathcal{L}^1)$. In particolare se $f \in L^2([0,\infty),\mathcal{L}^1)$ allora $f \cdot B \in \mathrm{H}^2_0$.*

Dimostrazione. Se $f \in L^2([0,\infty),\mathcal{L}^1)$ allora per la Proposizione precedente $f \cdot B \in \mathrm{H}^2_0$ ed in particolare è martingala UI.

Viceversa se $f \cdot B$ è martingala UI allora converge $\mathbf{P}$-q.c. ed in $L^1(\mathbf{P})$ ad $(f\cdot B)_\infty \in L^1(\mathbf{P})$, ma ogni $(f \cdot B)_t$ è gaussiana di legge $\mathcal{N}\left(0, \int_0^t f(s)^2\,\mathrm{d}s\right)$, dunque per quanto noto sulla convergenza di v.a. gaussiane si ha che la successione delle varianze converge per $t \to +\infty$ ad un numero reale che sarà uguale a $\int_0^{+\infty} f(s)^2\,\mathrm{d}s$, cosa che conclude la dimostrazione. □

3.2.4 Integrale di Itô rispetto a semimartingale continue

A questo punto facciamo l'ultimo passo e definiamo l'integrale stocastico rispetto a semimartingale continue.

Definizione 3.2.36 (Processo localmente limitato): Un processo K è detto *localmente limitato* se esistono tda $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $T_n \nearrow +\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $C_n > 0$ per il quale

$$|K^{T_n}| \leq C_n \quad \mathbf{P}\text{-q.c. per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Osservazione 3.2.37: Ad esempio ogni processo continuo è localmente limitato.

Definizione 3.2.38 (Integrale stocastico (di Itô) rispetto a semimartingale continue): Se $X = M + A$ è una semimartingala continua e K è un processo stocastico progressivamente misurabile e localmente limitato, poniamo

$$K \cdot X = K \cdot M + K \cdot A.$$

Osservazione 3.2.39: Notare che la Definizione precedente è ben posta, infatti grazie alle ipotesi su K sono ben definiti entrambi gli integrali $K \cdot M$ (perché vale $K \in L^2_{\text{loc}}(M)$) e $K \cdot A$ (grazie alla locale limitatezza).

Proposizione 3.2.40: *Siano K, H due processi progressivamente misurabili e localmente limitati, $X = M^X + A^X$ e $Y = M^Y + A^Y$ due semimartingale continue. Allora valgono:*

(1) $K \cdot (X + Y) = K \cdot X + K \cdot Y$;

(2) $(K + H) \cdot X = K \cdot X + H \cdot X$;

(3) $(KH) \cdot X = K \cdot (H \cdot X)$;

(4) se α è una v.a. $\mathcal{F}_0$-misurabile e limitata allora $(\alpha K) \cdot X = \alpha(K \cdot X)$;

(5) $(K \cdot X)^T = (K\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot X = K \cdot X^T$ con T tda;

(6) $K \cdot X$ è semimartingala continua con decomposizione $K \cdot X = K \cdot M + K \cdot A$;

(7) $\langle K \cdot X, H \cdot Y \rangle = \langle K \cdot M^X, H \cdot M^Y \rangle = (KH) \cdot \langle M^X, M^Y \rangle = (HK) \cdot \langle X, Y \rangle$.

Dimostrazione. Facili verifiche, usando anche quanto dimostrato per l'integrale stocastico rispetto a martingale locali continue. □

Osservazione 3.2.41 (NC): Data una $(\mathcal{F}_t)$-semimartingala continua X, tenendo a mente quanto detto nell'Osservazione 3.1.33, si osserva che l'integrale stocastico di un processo $(\mathcal{F}_t)$-progressivamente misurabile non cambia se sostituiamo la filtrazione con un'altra per la quale X è sempre semimartingala continua e K è sempre progressivamente misurabile. Quindi l'oggetto "integrale stocastico" ha senso anche in caso, ad esempio, la filtrazione considerata $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ non è completa (in quanto è possibile rifarsi al completamento). In generale però l'integrale stocastico è adattato sì al completamento di $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ma non è detto che lo sia rispetto anche a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Osservazione 3.2.42 (NC): Usando quanto detto nell'Osservazione 3.1.34, osserviamo che quando la filtrazione $(\mathcal{F}^0_t)_{t\geq 0}$ considerata non è completa ma è continua a destra, l'integrale stocastico di un processo $(\mathcal{F}^0_t)$-progressivamente misurabile e localmente limitato rispetto ad una $(\mathcal{F}^0_t)$-semimartingala continua può essere preso all'interno della sua classe di indistinguibilità in modo che non solo sia adattato al completamento della filtrazione considerata, ma lo sia rispetto alla filtrazione considerata $(\mathcal{F}^0_t)_{t\geq 0}$. In particolare con questa scelta l'integrale stocastico in questione risulta essere una $(\mathcal{F}^0_t)$-semimartingala continua.

Presentiamo adesso il fondamentale teorema di convergenza dominata stocastico.

Teorema 3.2.43 (di convergenza dominata stocastico): *Sia X una semimartingala continua, $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di processi progressivamente misurabili e K^∞ processo progressivamente misurabile t.c. esistono tda $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ t.c. $T_m \nearrow +\infty$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $C_m > 0$ t.c.*

$$|(K^n)^{T_m}| \leq C_m \quad \mathbf{P}\text{-q.c. per ogni } m, n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre supponiamo che $K^n \longrightarrow K^\infty$ puntualmente. Allora $K^n \cdot X \longrightarrow K^\infty \cdot X$ uniformemente su ogni intervallo limitato in probabilità, cioè per ogni $t \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |(K^n \cdot X)_s - (K^\infty \cdot X)_s| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

per $n \to +\infty$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione. A meno di includere M_0 in A possiamo supporre $M_0 = 0$. Inoltre possiamo assumere senza perdita di generalità $K^\infty = 0$ (a meno di sostituire K^n con $K^n - K^\infty$). Fissiamo $\delta, \varepsilon > 0$ e $t \geq 0$, per le ipotesi esiste un tda T ed una costante $C > 0$ t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|(K^n)^T| \leq C,$$

M^T sia una martingala continua limitata e $\mathbf{P}(T \leq t) \leq \delta$. Osserviamo che su $[0, T]$ il processo $(K^n)^T$ coincide con K^n per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo quindi che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |((K^n)^T \cdot A)_s| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|((K^n)^T\cdot M)_s|>\varepsilon\right)\longrightarrow 0$$

per $n\to+\infty$.

Dimostriamo prima la convergenza voluta per $K^n\cdot A$. Chiamando $A_{n,\varepsilon}=\{\sup_{0\le s\le t}|(K^n\cdot A)_s|>\varepsilon\}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|(K^n\cdot A)_s|>\varepsilon\right)&=\mathbf{P}(A_{n,\varepsilon}\cap\{T\le t\})+\mathbf{P}(A_{n,\varepsilon}\cap\{T>t\})\\&\le\delta+\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|((K^n)^T\cdot A^T)_s|>\varepsilon\right)\\&=\delta+o(1)\quad\text{per } n\to+\infty\end{aligned}$$

infatti $\sup_{0\le s\le t}|((K^n)^T\cdot A^T)_s|\longrightarrow 0$ puntualmente per $n\to+\infty$ perché

$$\sup_{0\le s\le t}|((K^n)^T\cdot A^T)_s|\le\int_0^t|K^n_{t\wedge T}|\,\mathrm{d}V_r(A^T)\longrightarrow 0$$

in cui, per l'ultima convergenza, abbiamo usato il Teorema di convergenza dominata (in quanto $|K^n_{r\wedge T}|\le C$).

Dimostriamo adesso la convergenza voluta per $K^n\cdot M$. In modo molto simile a quanto fatto prima si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|(K^n\cdot M)_s|>\varepsilon\right)&\le\delta+\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|((K^n)^T\cdot M)^T_s|>\varepsilon\right)\\&=\delta+\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|((K^n)^T\cdot M^T)_s|>\varepsilon\right)\end{aligned}$$

quindi dobbiamo dimostrare

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|((K^n)^T\cdot M^T)_s|>\varepsilon\right)=o(1)\quad\text{per } n\to+\infty$$

e per farlo omettiamo T ad apice supponendo direttamente $|K^n|\le C$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e M martingala continua limitata. Per dimostrare la convergenza in probabilità voluta proveremo il seguente fatto ancor più forte

$$\sup_{s\ge 0}(K_n\cdot M)_s\longrightarrow 0\quad\text{in } L^2(\mathbf{P}).$$

Notiamo che $K^n\in L^2(M)$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, infatti

$$\|K^n\|_{L^2(M)}=\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty}(K^n_s)^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right]\le C^2\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right]=C^2\|M\|_{\mathbb{H}^2}<+\infty$$

ed anzi $K^n\longrightarrow 0$ in $L^2(M)$, infatti $K^n_s(\omega)\longrightarrow 0$ per ogni $s\ge 0$ ed ogni $\omega\in\Omega$, dunque per il Teorema di convergenza dominata $\int_0^{+\infty}(K^n_s)^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\longrightarrow 0$ (in quanto per la Proposizione 3.1.40 $\langle M\rangle$ è $\mathbf{P}$-q.c. limitata, cosa che implica la finitezza $\mathbf{P}$-q.c. della misura $d\langle M\rangle$), inoltre

$$\int_0^{+\infty}(K^n_s)^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\le C^2\langle M\rangle_\infty\in L^1(\mathbf{P})$$

quindi ancora una volta usando il Teorema di convergenza dominata si ottiene

$$\|K^n\|_{L^2(M)}=\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty}(K^n_s)^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right]\longrightarrow 0.$$

Ma allora per l'Isometria di Itô si ha anche che $\|K^n \cdot M\|_{\mathbb{H}^2} = \|K^n\|_{L^2(M)} \longrightarrow 0$, quindi usando una delle Disuguaglianze massimali di Doob (Teorema 2.4.3) si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{s\geq 0}|(K^n \cdot M)_s|^2\right]^{\frac{1}{2}} &\leq 2\sup_{s\geq 0}\mathbb{E}\left[(K^n \cdot M)_s^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\|K^n \cdot M\|_{\mathbb{H}^2} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty\end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

Osservazione 3.2.44: Le ipotesi del Teorema precedente sono verificate se ad esempio la successione $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è t.c. esiste un processo H non negativo e localmente limitato t.c. $|K^n| \leq H$ uniformemente per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Corollario 3.2.45: *Siano K un processo continuo, progressivamente misurabile e localmente limitato, X una semimartingala continua e $t \geq 0$. Sia inoltre $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di partizioni finite di $[0,t]$ t.c. $|\Delta_n| \to 0$. Allora, se per ogni $n \in \mathbb{N}$ è $\Delta_n = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)}\}$, vale*

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} K_{t_i^{(n)}}(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}}) \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_0^t K_s \,\mathrm{d}X_s = (K \cdot X)_t$$

per $n \longrightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ il processo

$$K^n = \sum_{i=0}^{k_n-1} K_{t_i^{(n)}} \mathbf{1}_{(t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]}$$

ed osserviamo che

$$(K^n \cdot X)_t = \sum_{i=0}^{k_n-1} K_{t_i^{(n)}}(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}})$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per continuità si ha $K^n \longrightarrow K$ puntalmente. Supponiamo K limitato, allora usando il Teorema precedente si ottiene

$$(K^n \cdot X)_t \xrightarrow{\mathbf{P}} (K \cdot X)_t$$

che equivale alla tesi. Se invece K non è limitato possiamo trovare una successione di tda $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ t.c. K^{S_m} è limitato per ogni $m \in \mathbb{N}$, allora anche ogni $(K^n)^{S_m}$ è limitato e quindi per il caso precedente si ha

$$(K^n \cdot X)^{S_m} = (K^n)^{S_m} \cdot X^{S_m} \xrightarrow{\mathbf{P}} K^{S_m} \cdot X^{S_m} = (K \cdot X)^{S_m}$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$ mandando $n \to +\infty$. A questo punto la tesi nel caso generale si ottiene mandando anche $m \to +\infty$. □

Osservazione 3.2.46: Osserviamo che nel Corollario precedente l'ipotesi di continuità di K ci è servita solo per assicurarci la convergenza puntuale delle K^n a K, quindi il risultato rimane vero anche per K non continuo a patto di aver già trovato e scelto una successione di partizioni che ci garantiscano la suddetta convergenza.

3.3 Formula di Itô ed Alcune Conseguenze

Data una semimartingala continua X è possibile decomporla in $X = X_0 + M + A$ con $M_0 = A_0 = 0$. Inoltre se K è un processo progressivamente misurabile e localmente limitato le seguenti scritture avranno lo stesso significato:

$$K_t \,\mathrm{d}X_t = (K \cdot X)_t = \int_0^t K_s \,\mathrm{d}X_s \quad \forall t \geq 0.$$

In particolare $dX_t = X_t - X_0$. Inoltre se Y è un'altra semimartingala continua sarà per convenzione $dX_t \,\mathrm{d}Y_t = d\langle X, Y\rangle_t$. Le formule scritte con la scrittura più a sinistra si diranno scritte in *forma differenziale*.

Osservazione 3.3.1: Osserviamo che grazie all'associatività dell'integrale stocastico provata nella sezione precedente si ha

$$d\left(\int_0^t K_s \,\mathrm{d}X_s\right) = K_t \,\mathrm{d}X_t.$$

Proposizione 3.3.2 (Integrazione per parti stocastica): *Siano X e Y due semimartingale continue, allora vale per ogni $t \geq 0$*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \,\mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \,\mathrm{d}X_s + \langle X, Y\rangle_t$$

che in forma differenziale diventa

$$dX_t Y_t = X_t \,\mathrm{d}Y_t + Y_t \,\mathrm{d}X_t + \,\mathrm{d}\langle X, Y\rangle_t.$$

Dimostrazione. Essendo $XY = \frac{(X+Y)^2 - X^2 - Y^2}{2}$ basta fare il caso $X = Y$, cioè dimostrare che

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s \,\mathrm{d}X_s + \langle X\rangle_t \quad \forall t \geq 0.$$

Sia $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$ con $t \geq 0$ una generica partizione finita di $[0, t]$, allora

$$\sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \langle X\rangle_t = \langle M\rangle_t$$

per $|\Delta| \to 0$, con $X = X_0 + M + A$. Ma

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 &= \sum_{i=1}^n [(X_{t_i}^2 - X_{t_{i-1}}^2) - 2X_{t_{i-1}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})] \\ &= X_t^2 - X_0^2 - 2\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})\end{aligned}$$

quindi considerando il processo

$$H^\Delta = \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}$$

vale per continuità di X che $H_s^\Delta \longrightarrow X_s$ puntualmente $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $s \geq 0$ per $|\Delta| \to 0$, di conseguenza il Teorema 3.2.43 di convergenza dominata stocastico ci assicura che

$$\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) = \int_0^t H_s^\Delta \,\mathrm{d}X_s \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_0^t X_s \,\mathrm{d}X_s.$$

Mettendo insieme quanto detto si ottiene la tesi. □

Osservazione 3.3.3: Se $X = Y$, usando la Proposizione precedente, si ottiene

$$X_t^2 - \langle X \rangle_t = 2 \int_0^t X_s \, \mathrm{d}X_s$$

ossia

$$\int_0^t X_s \, \mathrm{d}X_s = \frac{X_t^2 - \langle X \rangle_t}{2}$$

quindi il calcolo integrale di Itô differisce (formalmente) da quello ”classico” di Riemann per mantenere la proprietà di martingala locale (o di martingala nel caso del MB).

Definizione 3.3.4: Un processo $(X_t^i)_{t\geq 0}^{i=1,\dots,d} = (X^i)^{i=1,\dots,d}$ è detto

- *martingala locale vettoriale continua* se per ogni $i = 1, \dots, d$ il processo X^i è una martingala locale continua;
- *semimartingala vettoriale continua* se per ogni $i = 1, \dots, d$ il processo X^i è una semimartingala continua.

Osservazione 3.3.5: Il caso $d = 2$ ci permette anche di parlare del caso complesso, cioè ci permette di definire semimartingale continue complesse e martingale locali continue complesse.

In quel che segue useremo la seguente notazione per $a, b \in \mathbb{R}^d$

$$ab = \sum_{i=1}^{d} a_i b_i$$

$$a \otimes b = (a_i b_j)_{i,j=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

e per $A, B \in \mathbb{R}^{d\times k}$

$$A : B = \sum_{i=1}^{d} \sum_{i=1}^{k} [A]_{i,j} [B]_{i,j}.$$

Teorema 3.3.6 (Formula di Itô): *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, $X = (X^i)^{i=1,\dots,d}$ una semimartingala vettoriale continua a valori in Ω e $F \in C^2(\Omega)$. Allora $F(X) = (F(X_t))_{t\geq 0}$ è una semimartingala continua e per ogni $t \geq 0$ vale*

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \partial_{x_i} F(X_s) \, \mathrm{d}X_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i} \partial_{x_j} F(X_s) \, \mathrm{d}\langle X^i, X^j \rangle_s$$

che in forma differenziale è

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(X_t) &= \nabla F(X_t) \, \mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} H_F(X_t) : (dX_t \otimes dX_t) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} F(X_t) \, \mathrm{d}X_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i} \partial_{x_j} F(X_t) \, \mathrm{d}\langle X^i, X^j \rangle_t. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'enunciato nel caso di $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Passo 1. La formula vale per $F(x) = x_i$ per ogni $i = 1, \dots, d$ e se vale per F e G allora vale anche per $F + G$.

Passo 2. *Se $F, G \in C^2(\mathbb{R}^d)$ e vale la formula sia per F che per F allora vale anche per FG.*

Vale

$$\mathrm{d}F(X_t) = \nabla F(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}H_F(X_t) : (\mathrm{d}X_t \otimes \mathrm{d}X_t) = \mathrm{d}M_t^F + \mathrm{d}A_t^F$$
$$\mathrm{d}G(X_t) = \nabla G(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}H_G(X_t) : (\mathrm{d}X_t \otimes \mathrm{d}X_t) = \mathrm{d}M_t^G + \mathrm{d}A_t^G$$

con

$$\mathrm{d}M_t^F = \nabla F(X_t)\,\mathrm{d}M_t$$
$$\mathrm{d}A_t^F = \nabla F(X_t)\,\mathrm{d}A_t + \frac{1}{2}H_F(X_t) : (\mathrm{d}X_t \otimes \mathrm{d}X_t)$$

ed analogamente per G in cui $X = M + A$ con M martingala locale vettoriale continua e A processo vettoriale continuo con componenti a variazione finita. Quindi vale

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\langle F \circ X, F \circ Y\rangle_t &= d\langle M^F, M^G\rangle_t\\ &= \nabla F(X_t)\nabla G(X_t)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_t\\ &= \nabla F(X_t)\nabla G(X_t)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t\end{aligned}$$

e ricordando le identità

$$\nabla(FG) = F\nabla G + G\nabla F$$
$$H_{FG} = FH_G + GH_F + \nabla F \otimes \nabla G + \nabla G \otimes \nabla F$$

ed usando la Proposizione precedente, si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(F(X_t)(G(X_t)) &= F(X_t)\,\mathrm{d}G(X_t) + G(X_t)\,\mathrm{d}F(X_t) + \mathrm{d}\langle F \circ X, G \circ X\rangle_t\\ &= [F(X_t)\nabla G(X_t) + G(X_t)\nabla F(X_t)]\,\mathrm{d}X_t\\ &\quad + \frac{1}{2}[F(X_t)H_G(X_t) + G(X_t)H_F(X_t) + 2(\nabla F(X_t) \otimes \nabla G(X_t)) : (\mathrm{d}X_t \otimes \mathrm{d}X_t)]\\ &= \nabla(FG)(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}H_{FG}(X_t) : (\mathrm{d}X_t \otimes \mathrm{d}X_t)\end{aligned}$$

che è quanto voluto.

Passo 3. *Concludiamo con un argomento di approssimazione.*

Se $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^2(\Omega)$ sono t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$ per F_n vale la tesi e $F_n \longrightarrow F$ localmente (sui compatti) uniformemente assieme anche alle derivate fino al secondo ordine, allora per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue e per il Teorema 3.2.43 di convergenza dominata stocastico, la tesi vale anche per F. Inoltre come è noto possiamo approssimare ogni funzione in $C^2(\Omega)$, assieme alle sue derivate fino al secondo ordine, con una successione di funzioni polinomiali su Ω, per le quali la tesi vale per i punti precedenti.

Passo 4. *Concludiamo la dimostrazione.*

Ora consideriamo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto qualsiasi. L'argomento di approssimazione usato nel punto precedente non funziona con un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto qualsiasi ma possiamo utilizzare il caso precedente per concludere anche il caso generale. Sia per ogni $n \in \mathbb{N}_+$

$$\Omega_n = \left\{x \in \Omega \mid d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\right\}$$

allora $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} \Omega_n$ e $\Omega_n \subset \overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$. Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ possiamo trovare $\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a valori in $[0,1]$ t.c. $\varphi = 1$ su Ω_n e $\varphi_n = 0$ su Ω_{n+1}^c. Inoltre sia $\widetilde{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ t.c. $\widetilde{F} = F$ su Ω e $\widetilde{F} = 0$ su Ω^c. Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ definiamo

$$F_n = \widetilde{F}\varphi_n + (1 - \varphi_n)(\widetilde{F} * \varphi_n) = F\varphi_n + (1 - \varphi_n)(\widetilde{F} * \varphi_n)$$

in cui $*$ indica il prodotto di convoluzione e definiamo anche i tda

$$T_n = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \Omega_n^c\}.$$

Allora $F_n = F$ su Ω_n e per le note proprietà del prodotto di convoluzione $F_n \in C^2(\mathbb{R}^d)$. In particolare possiamo applicare la tesi ad F_n ed il processo X^{T_n} per ottenere

$$F(X_{t\wedge T_n}) = F(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \partial_{x_i} F(X_{s\wedge T_n})\, \mathrm{d}X_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\partial_{x_j} F(X_{s\wedge T_n})\, \mathrm{d}\langle X^i, X^j\rangle_s$$

ma $X^{T_n} \longrightarrow X$ puntualmente per $n \to +\infty$, quindi grazie al Teorema 3.2.43 di convergenza dominata stocastico si ottiene facilmente la tesi. □

Osservazione 3.3.7:

- Osserviamo anche che la Formula di Itô vale anche per funzioni meno regolari sotto certe ipotesi. Per esempio se alcune componenti di X sono a variazione finita, i processi di covariazione quadratica che li riguardano sono nulli, quindi i rispettivi integrali di Stieltjes sono nulli e di conseguenza non ci importa delle derivate seconde corrispondenti, ossia possiamo richiedere che in tali componenti (in cui X è a variazione finita) la funzione sia solo C^1.
- Chiaramente è banale estendere il risultato anche nel caso di F a valori vettoriali (ad esempio in $\mathbb{C}$) applicando la Formula di Itô componente per componente.

Definizione 3.3.8 (Esponenziale stocastico di Doléans-Dade): Data una martingala locale continua M, definiamo il suo *esponenziale stocastico di Doléans-Dade* il processo $\mathcal{E}(M)$ t.c. per ogni $t \geq 0$

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right).$$

Corollario 3.3.9: *Sia $F : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ t.c. $\partial_x F, \partial_y F, \partial_x^2 F$ esistono continue e sia M una martingala locale continua. Allora il processo $F(M, \langle M\rangle)$ è una martingala locale continua complessa qualora $\partial_y F + \frac{1}{2}\partial_x^2 F = 0$. In particolare per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ il processo*

$$\mathcal{E}^\lambda(M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t\right)$$

è una martingala locale continua complessa.

Dimostrazione. Consideriamo la semimartingala vettoriale continua $X = (M, \langle M\rangle)$, essendo $\langle M\rangle$ a variazione finita per l'Osservazione precedente possiamo usatre la Formula di Itô per scrivere

$$dF(M_t, \langle M\rangle_t) = \partial_x F(X_t)\, \mathrm{d}M_t + \partial_y F(X_t)\, \mathrm{d}\langle M\rangle_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 F(X_t)\, \mathrm{d}\langle M\rangle_t$$

che, se vale $\partial_y F + \frac{1}{2}\partial_x^2 F = 0$, diventa

$$\mathrm{d}F(X_t) = \partial_x F(X_t)\, \mathrm{d}M_t$$

che è una martingala locale continua.

Il caso $F(x, y) = \exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} y\right)$ ci dà anche l'ultima affermazione dell'enunciato. □

Osservazione 3.3.10: Nel contesto del Corollario precedente il caso $\lambda = 1$ ci dice che $\mathcal{E}(M)$ è una martingala locale continua.

Osservazione 3.3.11: Nella precedente dimostrazione abbiamo dimostrato, in particolare, che

$$\mathrm{d}\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(M)_t \,\mathrm{d}M_t$$

che è un primo esempio di "equazione differenziale stocastica". In realtà $\mathcal{E}(M)$ è l'unica (a meno di indistinguibilità) soluzione di tale equazione che al tempo $t = 0$ sia uguale a $\exp(M_0)$. Infatti sia X un secondo processo con $X_0 = \exp(M_0)$ e che soddisfa $\mathrm{d}X_t = X_t \,\mathrm{d}M_t$, allora X è continuo (è un integrale stocastico) ed applicando la Formula di Itô a $\frac{X_t}{\mathcal{E}(M)_t} = X_t\mathcal{E}(-M)_t \exp(\langle M\rangle_t)$ $(F(x, y, z) = xyz)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\frac{X_t}{\mathcal{E}(M)_t}\right) &= X_t\mathcal{E}(-M)_t \,\mathrm{d}\left(\exp(\langle M\rangle_t)\right) + X_t \exp(\langle M\rangle_t) \,\mathrm{d}\left(\mathcal{E}(-M)_t\right) + \\
&\quad + \mathcal{E}(-M)_t \exp(\langle M\rangle_t \,\mathrm{d}X_t + \exp(\langle M\rangle_t) \,\mathrm{d}\,\langle X, \mathcal{E}(-M)\rangle_t \\
&= X_t\mathcal{E}(-M)_t \exp(\langle M\rangle_t)(d\langle M\rangle_t - d\langle M\rangle_t + d\langle M\rangle_t - d\langle M\rangle_t) = 0
\end{aligned}$$

da cui segue $\frac{X_t}{\mathcal{E}(M)_t} = 1$ **P**-q.c. per ogni $t \geq 0$ ossia X e $\mathcal{E}(M)$ sono uno modificazione dell'altro, ma sono anche continui, quindi sono indistinguibili.

Corollario 3.3.12: *Sia $f \in L^2([0, \infty), \mathscr{L}^1)$, B un $(\mathcal{F}_t)$-MB std e per ogni $t \geq 0$ sia $M_t = \int_0^t f(s) \,\mathrm{d}B_s$. Allora*

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp\left(\int_0^t f(s) \,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2 \,\mathrm{d}s\right) \quad \forall t \geq 0$$

è una martingala in H^2.

Dimostrazione. Vale $d\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(M)_t f(t) \,\mathrm{d}B_t$, quindi

$$d\langle\mathcal{E}(M)\rangle_t = \mathcal{E}(M)_t^2 f(s)^2 \,\mathrm{d}\langle B\rangle_t = \mathcal{E}(M)_t^2 f(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\langle\mathcal{E}(M)\rangle_t\right] &= \int_0^t \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(M)_s^2 f(s)^2\right] \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(M)_s^2\right] f(s)^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \mathbb{E}\left[\exp\left(2\int_0^s f(r) \,\mathrm{d}B_r - \int_0^s f(r)^2 \,\mathrm{d}r\right)\right] f(s)^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \mathbb{E}\left[\exp\left(2\int_0^s f(r) \,\mathrm{d}B_r\right)\right] \exp\left(-\int_0^s f(r)^2 \,\mathrm{d}r\right) f(s)^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \exp\left(\int_0^s f(r)^2 \,\mathrm{d}r\right) f(s)^2 \,\mathrm{d}s \\
&\leq \exp\left(\int_0^{+\infty} f(r)^2 \,\mathrm{d}r\right) \int_0^{+\infty} f(s)^2 \,\mathrm{d}s < +\infty
\end{aligned}$$

quindi $\langle\mathcal{E}(M)\rangle$ è UI, $\mathcal{E}(M)_0 = 1 \in L^2(\mathbf{P})$ **P**-q.c. e $\mathcal{E}(M)$ è una martingala locale continua, dunque (per quanto provato nella Proposizione 3.1.40) si ha la tesi. □

Corollario 3.3.13: *Siano $B = (B^i)^{i=1,\dots,d}$ un $(\mathcal{F}_t)$-MB^d std e $f \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$, allora vale*

$$f(B_t,t) = f(0,0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_{x_i} f(B_s,s)\,\mathrm{d}B_s^i + \int_0^t \left(\partial_t f(B_s,s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 f(B_s,s)\right)\mathrm{d}s$$

da cui segue in particolare che se per ogni $t \geq 0$

$$M_t^f = f(B_t,t) - \int_0^t \left(\partial_t f(B_s,s) + \frac{1}{2}\Delta f(B_s,s)\right)\mathrm{d}s$$

il processo M^f è una martingala locale continua.

Dimostrazione. Segue dalla Formula di Itô notando che $d\langle B^i, B^j\rangle = \delta_{i,j}\,\mathrm{d}t$. □

Corollario 3.3.14: *Siano $B = (B^i)^{i=1,\dots,d}$ un $(\mathcal{F}_t)$-MB^d std e $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ armonica, allora $f(B)$ è una martingala locale continua.*

Dimostrazione. Segue banalmente dal Corollario precedente. □

Lemma 3.3.15: *Sia Y v.a. a valori in $\mathbb{R}^d$ e $\mathcal{E}$ una σ-algebra. Se per ogni $A \in \mathcal{E}$ vale*

$$\mathbb{E}\left[\exp(i\lambda Y)\mathbf{1}_A\right] = \mathbf{P}(A)\mathbb{E}\left[\exp(i\lambda Y)\right] \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^d$$

allora Y è indipendente da $\mathcal{E}$.

Dimostrazione. Le ipotesi ci dicono che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^d$ la v.a. $\exp(i\lambda Y)$ è indipendente da $\mathcal{E}$ e da questo segue la tesi. Infatti span $\left(t \mapsto \exp(i\lambda Y) \mid \lambda \in \mathbb{R}^d\right)$ è denso uniformemente in $C_c(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, quindi $\phi(Y)$ è indipendente da $\mathcal{E}$ per ogni $\phi \in C_c(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, infine ogni funzione indicatrice di aperti di $\mathbb{R}^d$ è limite monotono di funzioni in $C_c(\mathbb{R}^d)$, si ha quindi che $\mathbf{1}_A(Y)$ è indipendente da $\mathcal{E}$ per ogni A aperto di $\mathbb{R}^d$, a questo punto usando il Teorema delle classi monotone è possibile dire che $\mathbf{1}_B(Y)$ è indipendente da $\mathcal{E}$ per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, che equivale alla tesi. □

Teorema 3.3.16 (Caratterizzazione del MB di Lèvy): *Sia $x \in \mathbb{R}^d$ e sia X un processo adattato a valori in $\mathbb{R}^d$ t.c. $\mathbf{P}$-q.c. $X_0 = x$. Sono equivalenti:*

(1) X è un $(\mathcal{F}_t)$-MB^d che parte da x;

(2) X è una martingala locale vettoriale continua e $\langle X^i, X^j\rangle = \delta_{i,j}t$ per ogni $t \geq 0$ ed ogni $i,j = 1,\dots,d$;

(3) X è una semimartingala vettoriale continua e per ogni $f_1,\dots,f_d \in L^2([0,\infty),\mathcal{L}^1)$, se $f = (f_1,\dots,f_d)$, il processo

$$\mathcal{E}_t^{if} = \exp\left(i\sum_{j=1}^d \int_0^t f_j(s)\,\mathrm{d}X_s^j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \int_0^t f_j(s)^2\,\mathrm{d}s\right) \quad \forall t \geq 0$$

è una martingala continua e limitata a valori in $\mathbb{C}$ (nel senso che parte reale e immaginaria sono martingale continue e limitate).

Dimostrazione. (1) ⇒ (2). Lo abbiamo già visto.

(2) ⇒ (3). Se $F : \mathbb{R}^d \times [0,\infty)^d \to \mathbb{C}$ t.c.

$$F((x_j)_{j=1}^d,(y_j)_{j=1}^d) = \exp\left(i\sum_{j=1}^d x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d y_j\right)$$

allora

$$\mathcal{E}_t^{if} = F\left(\left(\int_0^t f_j(s)\,\mathrm{d}X_s^j\right)_{j=1}^d, \left(\int_0^t f_j(s)^2\,\mathrm{d}s\right)_{j=1}^d\right)$$

e quindi, per una semplice generalizzazione del Corollario 3.3.9, il processo $\mathcal{E}^{if}$ è una martingala locale continua complessa. Inoltre

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}_t^{if}| &= \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j=1}^d f_j(s)^2\,\mathrm{d}s\right)\\ &\leq \exp\left(\int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^d f_j(s)^2\,\mathrm{d}s\right) < +\infty\end{aligned}$$

dunque è anche limitata.

(3) $\Rightarrow$ (1). Siano $s, t \geq 0$, $s < t$, dobbiamo dimostrare che $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)Id_d)$ e che è indipendente da $\mathcal{F}_s$. Prendendo $v \in \mathbb{R}^d$ e $f_j(r) = v_j \mathbf{1}_{(s,t]}(r)$ per $j = 1, ..., d$, quindi, usando che $\mathcal{E}^{if}$ è una martingala e che $\mathcal{E}_s^{if} = 1$ $\mathbf{P}$-q.c., si ottiene

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t^{if}\mathbf{1}_A\right] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbf{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_s$$

e quindi per ogni $A \in \mathcal{F}_s$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) = \mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t^{if}\mathbf{1}_A\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{i=1}^d v_j(X_t^j - X_s^j) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d v_j^2(t-s)\right)\mathbf{1}_A\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\exp(iv(X_t - X_S))\mathbf{1}_A\right]\exp\left(\frac{1}{2}\|v\|^2(t-s)\right)\end{aligned}$$

da cui segue che per ogni $A \in \mathcal{F}_s$

$$\mathbb{E}\left[\exp(iv(X_t - X_S))\mathbf{1}_A\right] = \mathbf{P}(A)\exp\left(-\frac{1}{2}\|v\|^2(t-s)\right)$$

quindi scegliendo $A = \Omega$ si ottiene

$$\varphi_{X_t - X_s}(v) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|v\|^2(t-s)\right)$$

con $\varphi_{X_t - X_s}$ la funzione caratteristica di $X_t - X_s$, quindi si ha la legge voluta e dal Lemma precedente si ha anche l'indipendenza cercata. □

Corollario 3.3.17: *Un processo X è una martingala locale continua nulla in 0 con $\langle X\rangle_t = t$ per ogni $t \geq 0$ se e solo se X è un $(\mathcal{F}_t)$-MB std.*

3.4 Disuguaglianze di Burkhölder-Davis-Gundy

Iniziamo enunciando il teorema della sezione.

Teorema 3.4.1 (Disuguaglianze di Burkhölder-Davis-Gundy (BDG)): *Per ogni $p \in (0, +\infty)$ esistono due costanti $c_p, C_p > 0$ t.c. per ogni martingala locale continua M nulla in 0*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|M_t|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Corollario 3.4.2: *Per ogni $p \in (0,+\infty)$ esistono due costanti $c_p, C_p > 0$ t.c. per ogni martingala locale continua M nulla in 0 e per ogni tda T*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|M_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Non dimostreremo completamente il teorema, mostreremo solamente la maggiorazione per $p \geq 2$ (che è la disuguaglianza che viene maggiormente usata) e da questa seguirà anche la minorazione per $p \geq 4$.

Dimostrazione della maggiorazione per $p \geq 2$. A meno di stoppare adeguatamente M, basta mostrare il risultato per M martingala continua limitata. La funzione $x \mapsto |x|^p$ è in $C^2(\mathbb{R})$, dunque possiamo usare la Formula di Itô per ottenere

$$|M_\infty|^p = \int_0^{+\infty} p|M_s|^{p-1}\mathrm{sgn}(M_s)\,\mathrm{d}M_s + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} p(p-1)|M_s|^{p-2}\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s.$$

Di conseguenza, usando che il primo integrale è una martingala, si arriva a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|M_\infty^p\right] &= \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty}|M_t|^{p-2}\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\geq 0}|M_t|^{p-2}\right)\langle M\rangle_\infty\right] \\
\text{(Cauchy-Schwarz)} &\leq \frac{p(p-1)}{2}\left\|\sup_{t\geq 0}|M_t|^{p-2}\right\|_{L^{p/(p-2)}(\mathbf{P})}\|\langle M\rangle_\infty\|_{L^{p/2}}
\end{aligned}$$

dunque la disuguaglianza voluta segue da una delle Disuguaglianze massimali di Doob (Teorema 2.4.3). □

Dimostrazione della minorazione per $p \geq 4$. Ancora una volta a meno di stoppare adeguatamente basta dimostrare il fatto per $\langle M\rangle$ martingala continua limitata. Dalla nota disuguaglianza $|a+b|^p \leq a_p(|x|^p+|y|^p)$ e dall'uguaglianza

$$\langle M\rangle_t = M_t^2 - 2\int_0^t M_s\,\mathrm{d}M_s \quad \forall t \geq 0$$

segue che

$$\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq a'_{p/2}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|M_t|^p\right] + \mathbb{E}\left[\left|\int_0^{+\infty} M_s\,\mathrm{d}M_s\right|^{\frac{p}{2}}\right]\right)$$

ed applicando la maggiorazione provata nella precedente dimostrazione alla martingala locale $M \cdot M$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] &\leq a'_{p/2}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|M_t|^p\right] + \mathbb{E}\left[\left|\int_0^{+\infty} M_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right|^{\frac{p}{4}}\right]\right) \\
&\leq a'_{p/2}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|M_t|^p\right] + \mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\geq 0}|M_s|^{\frac{p}{2}}\right)\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{4}}\right]\right) \\
\text{(Cauchy-Schwarz)} &\leq a'_{p/2}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|M_t|^p\right] + \left(\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|M_s|^p\right]\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

e se poniamo $x = \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$ e $y = \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|M_s|^p\right]^{\frac{1}{2}}$ la disuguaglianza sopra si legge

$$x^2 - a'_{p/2}xy - a'_{p/2}y^2 \leq 0$$

ma $x^2 - a'_{p/2}xy - a'_{p/2}y^2 = 0$ è, in x, l'equazione di una parabola con coefficiente di testa positivo e con radici

$$x_\pm = \frac{a'_{p/2}y \pm \sqrt{(a'_{p/2})^2y^2 + 4a'_{p/2}y^2}}{2} = \frac{a'_{p/2} \pm \sqrt{(a'_{p/2})^2 + 4a'_{p/2}}}{2}y$$

che sono una positiva ed una negativa, quindi per renderla negativa x deve essere necessariamente minore o uguale della radice positiva che è $b_p y$, con $b_p = \frac{a'_{p/2}+\sqrt{(a'_{p/2})^2+4a'_{p/2}}}{2}$, dunque la tesi segue con $c_p = b_p^{-1}$- □

4

Introduzione ai Processi di Markov

4.1 Processi di Markov

Nel seguito se $(E, \mathscr{E})$ è uno spazio misurabile chiameremo $\mathscr{E}_+$ la famiglia delle funzioni reali $\mathscr{E}$-misurabili non negative. Inoltre per indicare un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ useremo ancora la notazione abbreviata X.

Definizione 4.1.1: Un *nucleo di transizione* N sullo spazio misurabile $(E, \mathscr{E})$ è una funzione $N : E \times \mathscr{E} \to [0, +\infty]$ t.c.

(1) per ogni $x \in E$ la mappa $\mathscr{E} \ni A \mapsto N(x, A)$ è una misura;

(2) per ogni $A \in \mathscr{E}$ la mappa $E \ni x \mapsto N(x, A)$ è $\mathscr{E}$-misurabile.

Se inoltre $N(x, E) = 1$ per ogni $x \in E$ N è detto *nucleo markoviano*, se invece $N(x, E) \leq 1$ per ogni $x \in E$ è detto *nucleo submarkoviano*.

Osservazione 4.1.2: Ogni probabilità condizionale regolare su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ è un nucleo markoviano.

Osservazione 4.1.3: Dato un nucleo di transizione N sullo spazio misurabile $(E, \mathscr{E})$ ed $x \in E$, se $f \in \mathscr{E}_+$ sarà

$$N f(x) = \int_E f(y)\, \mathrm{d}N(x; y)$$

in cui $dN(x; y)$ sta (e starà) a significare che l'integrale è fatto rispetto alla misura $N(x, \cdot)$ con y come variabile d'integrazione. Allora anche $N f \in \mathscr{E}_+$ e quindi il nucleo N definisce un operatore lineare $N : \mathscr{E}_+ \to \mathscr{E}_+$. In particolare se $f = \mathbf{1}_A$ con $A \in \mathscr{E}_+$ allora $N f(x) = N(x, A)$.

Inoltre se M è un secondo nucleo su $(E, \mathscr{E}_+)$ possiamo comporli ottenendo un operatore lineare $MN : \mathscr{E}_+ \to \mathscr{E}_+$ t.c. per ogni $f \in \mathscr{E}_+$

$$MN f(x) = \int_E \int_E f(z)\, \mathrm{d}N(y; z)\, \mathrm{d}M(x; y).$$

Definizione 4.1.4 (Funzione di transizione): Una famiglia $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ di nuclei (sub)markoviani di transizione su $(E,\mathscr{E})$ è detta *funzione di transizione (sub)markoviana* (o anche solo *funzione di transizione* quando è markoviana) se vale la *condizione di Chapman-Kolmogorov*

$$P_{s,t}(x,A) = \int_E P_{s,r}(y,A)\,\mathrm{d}P_{r,t}(x;y) \quad \forall s,r,t\in I,\ s\le r\le t\ \ \forall A\in\mathscr{E}$$

che in forma operatoriale diventa $P_{s,t} = P_{r,t}P_{s,r}$.

Se inoltre per ogni $s,t\in I$, $s\le t$ vale $P_{s,t} = P_{0,t-s}$ allora $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ è detta funzione di transizione (sub)markoviana *omogenea* ed in tal caso scriveremo P_t al posto di $P_{0,t}$.

Osservazione 4.1.5: Nel contesto della definizione precedente, data $(P_t)_{t\ge 0}$ funzione di transizione submarkoviana omogenea, la condizione di Chapman-Kolmogorov si legge

$$P_{t+s} = P_tP_s \quad \forall s,t\ge 0$$

Definizione 4.1.6 (Processo di Markov): Siano $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P},(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0})$ uno spazio di probabilità filtrato, $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ una funzione di transizione su $(E,\mathscr{E})$, X un processo adattato a valori in $(E,\mathscr{E})$ e ν una misura su $(E,\mathscr{E})$. Se per ogni $f\in\mathscr{E}_+$ ed ogni $s,t\in I$, $s\le t$ vale

$$\mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}_s\right] = P_{s,t}F(X_s)$$

e $(X_0)_\#\mathbf{P} = \nu$, diremo che X è *processo di Markov* rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ con funzione di transizione $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ e distribuzione iniziale ν.

Proposizione 4.1.7: *Siano $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ uno spazio di probabilità, X un processo a valori in $(E,\mathscr{E})$. Allora X è di Markov rispetto alla sua filtrazione naturale se e solo se per ogni $f\in\mathscr{E}_+$ ed ogni $s,t\ge 0$, $s\le t$ vale*

$$\mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}^X_s\right] = \mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,X_s\right].$$

Inoltre in tal caso la funzione di transizione è $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ t.c.

$$P_{s,t}f(x) = \mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,X_s = x\right] \quad \forall x\in E$$

in cui nel RHS si intende quella funzione $\sigma(X_s)$-misurabile $\varphi^f_{s,t} : E\to\mathbb{R}$ t.c. $\mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,X_s\right] = \varphi^f_{s,t}(X_s)$.

Dimostrazione. Semplici verifiche. □

Osservazione 4.1.8 (Processi gaussiani centrati di Markov): Siano $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ uno spazio di probabilità, X un processo a valori in $\mathbb{R}$ gaussiano centrato e $\Gamma : [0,\infty)^2\to\mathbb{R}$ la sua funzione di covarianza. Supponiamo $\Gamma(s,s)\ne 0$ per ogni $s\ge 0$. Vale che X è di Markov rispetto alla sua filtrazione naturale se e solo se per ogni $u,s,t\ge 0$, $u<s<t$, vale

$$\Gamma(u,t) = \frac{\Gamma(u,s)\Gamma(s,t)}{\Gamma(s,s)}.$$

Supponiamo che valga la proprietà dell'enunciato sulla funzione di covarianza e dimostriamo che X è di Markov rispetto alla sua filtrazione naturale. Grazie alla Proposizione 4.1.7 basta provare che per ogni $0\le s\le t$ ed ogni $f\in\mathcal{B}(\mathbb{R})_+$ vale $\mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}^X_s\right] = \mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,X_s\right]$. Sia $\delta = \delta(s,t) = \frac{\Gamma(s,t)}{\Gamma(s,s)}\in\mathbb{R}$ allora $X_t-\delta X_s$ è indipendente da $\mathcal{F}^X_s$, quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}^X_s\right] &= \mathbb{E}\left[f(X_t-\delta X_s+\delta X_s)\,|\,\mathcal{F}^X_s\right]\\ &= \mathbb{E}\left[f(X_s-\delta X_s+\delta x)\right]_{|x=X_s} = \mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,X_s\right].\end{aligned}$$

Rimane soltanto da dimostrare (usando la nostra ipotesi) che effettivamente $X_t - \delta X_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$. Sia $0 \le u \le s$, vale

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(X_t - \delta X_s)X_u\right] &= \Gamma(u,t) - \delta\Gamma(u,s) \\ \text{(Ipotesi)} \;&= \frac{\Gamma(u,s)\Gamma(s,t)}{\Gamma(s,s)} - \delta\Gamma(u,s) = 0 \end{aligned}$$

da cui l'indipendenza voluta.

Viceversa supponiamo X di Markov, allora necessariamente $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_u^X\right] = \mathbb{E}\left[X_t \mid X_u\right]$, inoltre $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_u^X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s^X\right] \mid \mathcal{F}_u^X\right]$ per la Proprietà della torre della speranza condizionale, quindi

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid X_u\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_t \mid X_s\right] \mid \mathcal{F}_u^X\right]. \tag{4.1}$$

Ma per ogni $r \le t$ vale

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid X_r\right] = \mathbb{E}\left[X_t - \delta X_r + \delta X_r \mid X_r\right] = \delta X_r$$

per $\delta = \frac{\Gamma(r,t)}{\Gamma(r,r)}$ t.c. $X_t - \delta X_r$ è indipendente da X_r. Dunque applicando quanto ottenuto a (4.1) si ottiene

$$\frac{\Gamma(u,t)}{\Gamma(u,u)}X_u = \frac{\Gamma(s,t)\Gamma(u,s)}{\Gamma(s,s)\Gamma(u,u)}X_u$$

da cui segue quanto voluto.

Proposizione 4.1.9: *Un processo X a valori nello spazio misurabile $(E,\mathcal{E})$ è di Markov rispetto alla sua filtrazione naturale $(\mathcal{F}_t^X)_{t\ge 0}$ con funzione di transizione $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ e distribuzione iniziale ν se e solo se per ogni $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ ed ogni $f_0, f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{E}_+$ vale*

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k} f_i(X_{t_i})\right] = \int_E f_0(x_0)\int_E f_1(x_1)\ldots\int_E f_k(x_k)\,\mathrm{d}P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1};x_k)\ldots\mathrm{d}P_{0,t_1}(x_0;x_1)\,\mathrm{d}\nu(x_0)$$

Dimostrazione. Sia X di Markov, dimostriamo quanto voluto per induzione su k. Per $k = 0$ il risultato è banale, vediamo il passo induttivo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k} f_i(X_{t_i})\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k} f_i(X_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}^X}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i})\mathbb{E}\left[f_k(X_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}^X}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-2} f_i(X_{t_i})\left(f_{t_{k-1}}(X_{t_{k-1}})P_{t_{k-1},t_k}f_k(X_{t_{k-1}})\right)\right] \end{aligned}$$

da cui segue quanto voluto usando l'ipotesi induttiva.

Vediamo ora il viceversa. Siano $g \in \mathcal{E}_+$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = s < t$ e $B_0, B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{E}$, vale

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{B_i}(X_{t_i})g(X_{t_k})\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{B_i}(X_{t_i})P_{s,t}g(X_s)\right]$$

infatti per le ipotesi si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k}\mathbf{1}_{B_i}(X_{t_i})g(X_{t_k})\right] &= \int_{B_0}\int_{B_1}\dots\int_{B_k}\int_E g(x)\,\mathrm{d}P_{s,t}(x_k;x)\,\mathrm{d}P_{t_{k-1},s}(x_{k-1};x_k)\dots\mathrm{d}P_{0,t_1}(x_0;x_1)\,\mathrm{d}\nu(x_0)\\ &= \int_{B_0}\int_{B_1}\dots\int_{B_k} P_{s,t}g(x_k)\,\mathrm{d}P_{t_{k-1},s}(x_{k-1};x_k)\dots\mathrm{d}P_{0,t_1}(x_0;x_1)\,\mathrm{d}\nu(x_0)\\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k}\mathbf{1}_{B_i}(X_{t_i})P_{s,t}g(X_s)\right].\end{aligned}$$

Dunque se

$$\mathscr{F} = \left\{B\in\mathscr{E} \mid \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B g(X_t)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B P_{s,t}g(X_s)\right]\right\}$$

questo è chiaramente un λ-sistema (facile verifica usando il Teorema di Beppo Levi) e per quanto provato contiene il π-sistema

$$\left\{\bigcap_{i=0}^{k}\{X_{t_i}\in B_i\} \mid k\in\mathbb{N},\ 0=t_0<t_1<\dots<t_k=s,\ B_i\in\mathscr{E}\ \forall i=0,\dots,k\right\}$$

che genera $\mathcal{F}_s^X$, dunque per il Teorema delle classi monotone $\mathscr{F}\supset\mathcal{F}_s^X$, da cui segue $\mathbb{E}\left[g(X_t)\mid\mathcal{F}_s^X\right] = P_{s,t}g(X_s)$. □

Nel seguito indicheremo con $M_1(E,\mathscr{E})$ la famiglia delle misure di probabilità sullo spazio misurabile $(E,\mathscr{E})$.

Definizione 4.1.10 (Realizzazione di una funzione di transizione): Sia $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ funzione di transizione sullo spazio misurabile $(E,\mathscr{E})$ e sia $\mathcal{M}\subset M_1(E,\mathscr{E})$. Il dato di

$$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\ge0},X,(P_{s,t})_{0\le s\le t},(\mathbf{P}_\nu)_{\nu\in\mathcal{M}})$$

con $(\Omega,\mathcal{F})$ spazio misurabile, $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ filtrazione, X processo stocastico $(\mathcal{F}_t)$-adattato e $\mathbf{P}_\nu$ probabilità su $(\Omega,\mathcal{F})$ che rende X processo di Markov con funzione di transizione $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ e distribuzione iniziale ν è detto $\mathcal{M}$*-realizzazione* di $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ su $(\Omega,\mathcal{F})$. Useremo la notazione $\mathbb{E}_\nu$ per indicare il valore atteso rispetto a $\mathbf{P}_\nu$ e $\mathbb{E}_x$ quando $\nu=\delta_x$ per un $x\in E$.

In quel che segue nella sezione $(E,\mathscr{E})$ sarà uno spazio polacco con $E=\mathcal{B}(E)$.

Teorema 4.1.11 (Esistenza della realizzazione canonica): *Siano $\Omega=E^{[0,\infty)}$, $\mathcal{F}=\mathscr{E}^{\otimes[0,\infty)}$ e X il processo delle coordinate/valutazioni. Siano inoltre $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ una funzione di transizione su $(E,\mathscr{E})$ e $\nu\in M_1(E,\mathscr{E})$. Allora esiste un'unica probabilità $\mathbf{P}_\nu$ su $(\Omega,\mathcal{F})$ che rende X un processo di Markov rispetto alla sua filtrazione naturale con funzione di transizione $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ e distribuzione iniziale ν.*

*In particolare se $\mathcal{M}\subset M_1(E,\mathscr{E})$ l'oggetto $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t^X)_{t\ge0},X,(P_{s,t})_{0\le s\le t},(\mathbf{P}_\nu)_{\nu\in\mathcal{M}})$ è una $\mathcal{M}$-realizzazione di $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$ su $(\Omega,\mathcal{F})$ detta $\mathcal{M}$-*realizzazione canonica *di $(P_{s,t})_{0\le s\le t}$.*

Dimostrazione. Definiamo la famiglia proiettiva di probabilità $\{\mathbf{P}_\nu^{t_0,t_1,\dots,t_n} \mid n\in\mathbb{N},\ t_0,t_1,\dots,t_n\in I\}$ definita da

$$\mathbf{P}_\nu^{t_0,t_1,\dots,t_n}(A_0\times A_1\times\dots\times A_n) = \int_{A_0}\int_{A_1}\dots\int_{A_n}\mathrm{d}P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1};x_n)\dots\mathrm{d}P_{0,t_1}(x_0;x_1)\,\mathrm{d}\nu(x_0)$$

(facili verifiche), quindi si applica il Teorema 1.3.3 di estensione di Kolmogorov per ottenere una probabilità $\mathbf{P}_\nu$ che per la Proposizione precedente rende X processo di Markov con funzione di transizione quella data e distribuzione iniziale ν. □

D'ora in poi considereremo solamente funzioni di transizione omogenee $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ ed $\mathcal{M}$ sarà sempre un insieme $\mathcal{M} \subset M_1(E, \mathcal{E})$, ad esempio $\mathcal{M} = \{\nu\}, \{\delta_x\}_{x\in E}, M_1(E, \mathcal{E})$.

Sia $\Omega = E^{[0,\infty)}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\otimes[0,\infty)}$. Per $t \geq 0$ sarà θ_t l'operatore di traslazione di t, cioè

$$(Z \circ \theta_t)((\omega_s)_{s\geq 0}) = Z((\omega_{s+t})_{s\geq 0}).$$

Teorema 4.1.12 (Proprietà di Markov canonica): *Supponiamo $\{\delta_x\}_{x\in E} \subset \mathcal{M}$. Prendiamo la $\mathcal{M}$-realizzazione canonica di $(P_t)_{t\geq 0}$, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}, X, (P_t)_{t\geq 0}, (\mathbf{P}_\nu)_{\nu\in\mathcal{M}})$. Siano $Z \in \mathcal{F}_+$, $t \geq 0$ e $\nu \in \mathcal{M}$, si ha*

$$\mathbb{E}_\nu\left[Z \circ \theta_t \mid \mathcal{F}_t^X\right] = \mathbb{E}_{X_t}[Z] \quad \mathbf{P}_\nu\text{-}q.c.$$

dove il RHS è la composizione delle funzioni misurabili $(\omega_s)_{s\geq 0} \mapsto X_t((\omega_s)_{s\geq 0})$ e $x \mapsto \mathbb{E}_x[Z]$.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che per ogni $\Gamma \in \mathcal{F}_t^X$ vale

$$\mathbb{E}_\nu[(Z \circ \theta_t)\mathbf{1}_\Gamma] = \mathbb{E}_\nu\left[\mathbb{E}_{X_t}[Z]\,\mathbf{1}_\Gamma\right].$$

Usiamo come al solito il Teorema delle classi monotone. Supponiamo intanto $Z = \mathbf{1}_B$ con $B = \bigcap_{i=1}^n \{X_{t_i} \in A_i\}$ con $A_i \in \mathcal{E}$ per ogni $i = 1, ..., n$. Quanto voluto per $\Gamma = \bigcap_{j=1}^k \{X_{t_i'} \in A_i'\}$ con $A_j' \in \mathcal{E}$ per ogni $j = 1, ..., k$ e $t_j' \leq t$ per ogni $j = 1, ..., k$, segue dalla Proposizione 4.1.9. Ma la famiglia

$$\mathscr{F}_B = \{\Gamma \in \mathcal{F} \mid \mathbb{E}_\nu[(\mathbf{1}_B \circ \theta_t)\mathbf{1}_\Gamma] = \mathbb{E}_\nu\left[\mathbb{E}_{X_t}[\mathbf{1}_B]\,\mathbf{1}_\Gamma\right]\}$$

è un λ-sistema, che per quanto detto e per il Teorema delle classi monotone contiene tutto $\mathcal{F}_t^X$. Dunque la tesi vale per $Z = \mathbf{1}_B$ con B della forma $B = \bigcap_{i=1}^n \{X_{t_i} \in A_i\}$ descritta sopra. Adesso consideriamo la famiglia

$$\mathscr{F}^t = \{B \in \mathcal{F} \mid \mathbb{E}_\nu\left[\mathbf{1}_B \circ \theta_t \mid \mathcal{F}_t^X\right] = \mathbb{E}_{X_t}[\mathbf{1}_B]\}$$

che è sempre un λ-sistema e contiene i B della forma detta sopra per quanto detto fino ad ora, dunque ancora per il Teorema delle classi monotone $\mathscr{F}^t \supset \mathcal{F}$ e quindi la tesi vale per le funzioni semplici $\mathcal{F}$-misurabili e per approssimazione anche per ogni funzione in $\mathcal{F}_+$. □

4.2 Processi di Feller e processi a incrementi indipendenti e stazionari

Nel seguito dato uno spazio topologico E sarà

$$C_0(E) = \left\{ f \in C(E) \mid \forall\varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon \subset E \ \text{ compatto t.c. } \sup_{x\in K_\varepsilon^c} |f(x)| < \varepsilon \right\}$$

e lo muniremo dell'usuale norma uniforme $\|.\|_\infty$.

Fissiamo E uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff a base numerabile e denotiamo $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$.

4.2.1 Processi di Feller

Definizione 4.2.1 (Semigruppo di Feller): Un semigruppo di Feller su $C_0(E)$ è una famiglia $(T_t)_{t\geq 0}$ di operatori lineari continui positivi (cioè che se $f \geq 0$ su E allora $T_t f \geq 0$ su E) t.c.

(1) $T_0 = \mathrm{Id}$ e $\|T\|_{\mathrm{op}} \leq 1$ per ogni $t \geq 0$;

(2) $T_{s+t} = T_s T_t$ per ogni $s, t \geq 0$;

(3) $\lim_{t\searrow 0} \|T_t f - f\|_\infty = 0$ per ogni $f \in C_0(E)$.

Proposizione 4.2.2: *Se $(T_t)_{t\geq 0}$ è un semigruppo di Feller ed $f \in C_0(E)$, la mappa*

$$[0,\infty) \ni t \mapsto T_t f \in C_0(E)$$

è continua.

Dimostrazione. Siano $s, t \geq 0$, allora

$$\begin{aligned}\|T_t f - T_s f\|_\infty &= \|T_s(T_{t-s} f - f)\|_\infty \\ &\leq \|T_s\|_{\text{op}} \|T_{t-s} f - f\|_\infty \longrightarrow 0\end{aligned}$$

per $s \nearrow t$ ed anche

$$\begin{aligned}\|T_t f - T_s f\|_\infty &= \|T_t(T_{s-t} f - f)\|_\infty \\ &\leq \|T_t\|_{\text{op}} \|T_{s-t} f - f\|_\infty \longrightarrow 0\end{aligned}$$

per $s \searrow t$. □

Proposizione 4.2.3: *Ad ogni semigruppo di Feller $(T_t)_{t\geq 0}$ possiamo associare un'unica funzione di transizione submarkoviana $(P_t)_{t\geq 0}$ t.c. per ogni $f \in C_0(E)$, ogni $t \geq 0$ ed ogni $x \in E$*

$$T_t f(x) = P_t f(x).$$

Dimostrazione. Segue dal Teorema di rappresentazione di Riesz-Markov, infatti per ogni $x \in E$ ed ogni $t \geq 0$ la mappa $C_0(E) \ni f \mapsto T_t f(x)$ è un funzionale lineare continuo e positivo, dunque esiste un'unica misura (positiva) finita $P_t(x, \cdot)$ t.c. per ogni $f \in C_0(E)$

$$T_t f(x) = \int_E f(y)\, \mathrm{d}P_t(x; y)$$

e vale

$$P_t(x, E) = \|T_t[\cdot](x)\|_{\text{op}} \leq \|T_t\|_{\text{op}} \leq 1.$$

Vediamo che $x \mapsto P_t(x, A)$ è boreliana per ogni $t \geq 0$ ed ogni $A \in \mathscr{E}$, infatti per ogni $f \in C_0(E)$ la funzione $x \mapsto T_t f(x) = \int_E f(y)\, \mathrm{d}P_t(x; y)$ è in $C_0(E)$, dunque in particolare è boreliana, dunque usando il teorema della classi monotone (e le proprietà topologiche di E per approssimare dal basso le funzioni indicatrici di aperti usando funzioni continue a supporto compatto) si dimostra facilmente quanto voluto.

Manca solamente la condizione di Chapman-Kolmogorov. Dobbiamo vedere che per ogni $x \in E$, ogni $A \in \mathscr{E}$ ed ogni $s, t \geq 0$ vale

$$P_{t+s}(x, A) = \int_E P_t(y, A)\, \mathrm{d}P_s(x; y)$$

e questo vale perché per ogni $f \in C_0(E)$

$$P_{t+s} f(x) = T_{t+s} f(x) = T_t T_s f(x)$$

quindi usando ancora il Teorema delle classi monotone si conclude la dimostrazione. □

Definizione 4.2.4 (Funzione di transizione di Feller): Una funzione di transizione submarkoviana su E è detta *di Feller* se è associata ad un semigruppo di Feller su $C_0(E)$.

Definizione 4.2.5 (Risolvente di un semigruppo di Feller): Dato un semigruppo di Feller $(T_t)_{t\geq 0}$ su $C_0(E)$, il suo *risolvente* per $p > 0$ è quell'operatore $U_p : C_0(E) \to C_0(E)$ t.c. per ogni $f \in C_0(E)$ ed ogni $x \in E$

$$U_p f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} T_t f(x)\, \mathrm{d}t$$

Osservazione 4.2.6: Nel contesto della definizione precedente vediamo che $U_p f$ è ben definito per ogni $f \in C_0(E)$, infatti

$$\lim_{s\searrow 0} T_{s+t} f(x) = \lim_{s\searrow 0} T_s T_t f(x) = T_t f(x)$$

per ogni $x \in E$, dunque $t \mapsto T_t f(x)$ è continua a destra (e quindi misurabile) per ogni $x \in E$.

Osservazione 4.2.7: Sia $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigruppo di Feller su $C_0(E)$. Allora per ogni $f \in C_0(E)$ vale che $pU_p f$ converge uniformemente ad f per $p \to +\infty$.

Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\left\|pU_p f - f\right\|_\infty &= \sup_{x\in E} |pU_p f(x) - f(x)| \\
&\leq \sup_{x\in E} \int_0^{+\infty} pe^{-pt} |T_t f(x) - f(x)|\, \mathrm{d}t \\
&\overset{\tau=pt}{=} \sup_{x\in E} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} |T_{\frac{\tau}{p}} f(x) - f(x)|\, \mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \left\|T_{\frac{\tau}{p}} f - f\right\|_\infty \mathrm{d}\tau \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

per $p \to +\infty$ per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Proposizione 4.2.8: *Una funzione di transizione submarkoviana $(P_t)_{t\geq 0}$ su E è di Feller se e solo se*

(1) $P_t f \in C_0(E)$ per ogni $f \in C_0(E)$;

(2) $\lim_{t\searrow 0} P_t f(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$ ed ogni $f \in C_0(E)$.

Dimostrazione. (Facoltativo) Ovviamente se la funzione di transizione submarkoviana è di Feller allora valgono (1) e (2).

Vediamo il viceversa. Per (2) si ha $P_0 = \mathrm{Id}$. Poi se $f \in C_0(E)$ con $\|f\|_\infty \leq 1$ vale

$$\|P_t f\|_\infty = \sup_{x\in E} \left| \int_E f(y) dP_t(x; y) \right| \leq \|f\|_\infty \sup_{x\in E} P_t(x, E) \leq 1$$

dunque $\|P_t\|_{\mathrm{op}} \leq 1$. Se $s, t \geq 0$ vale $P_{t+s} = P_t \circ P_s$ per la condizione di Chapman-Kolmogorov. Manca solo da far vedere che per ogni $f \in C_0(E)$ vale $\|P_t f - f\|_\infty \to 0$ per $t \to 0$. Sia

$$\mathcal{A} = \{f \in C_0(E) \mid \|P_t f - f\|_\infty \to 0 \text{ per } t \to 0\}$$

dico che $\mathcal{A}$ è chiuso per convergenza uniforme, infatti se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ e $f_n \to f$ uniformemente allora

$$\|P_t f - f\|_\infty \leq \|P_t(f - f_n)\|_\infty + \|P_t f_n - f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \leq \|P_t f_n - f_n\|_\infty + 2\|f_n - f_n\|_\infty$$

che per $t \to 0$ permette di scrivere

$$\|P_t f - f\|_\infty \leq 2\|f_n - f_n\|_\infty$$

che tende a 0 per $n \to \infty$. Dunque $f \in \mathcal{A}$. Adesso per ogni $f \in C_0(E)$ troviamo una successione in $\mathcal{A}$ che vi converge uniformemente. Sia $f \in C_0(E)$, per $p > 0$ consideriamo $pU_p f \in C_0(E)$ (la funzione $U_p f \in C_0(E)$ è ben definita per (1) e (2) anche se, ad ora, non stiamo lavorando necessariamente con un semigruppo di Feller) ed osserviamo che $pU_p f \in \mathcal{A}$, infatti (osservando che $e^{-pt} P_t U_p f = U_p f - \int_0^t e^{-ps} P_s f(\cdot)\,\mathrm{d}s$)

$$P_t U_p f(x) - U_p f(x) = (e^{pt} - 1) U_p f(x) - \int_0^t e^{p(t-s)} P_s f(x)\,\mathrm{d}s$$

dunque (essendo $\|pU_p f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

$$\begin{aligned}\|P_t[pU_p f] - pU_p f\|_\infty &= p\|P_t[U_p f] - U_p f\|_\infty \\ &\leq (e^{pt} - 1)\|pU_p f\|_\infty + p\int_0^t e^{p(t-s)}\|f\|_\infty\,\mathrm{d}s \\ &= (e^{pt} - 1)\|pU_p f\|_\infty + (e^{-pt} - 1)\|f\|_\infty \\ &\leq 2(e^{pt} - 1)\|f\|_\infty \to 0\end{aligned}$$

per $t \to 0$. Dunque $pU_p f \in \mathcal{A}$ per ogni $p > 0$ e per qualsiasi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ t.c. $p_n \nearrow +\infty$, per l'Osservazione precedente, si ha che $p_n U_{p_n} f \to f$ uniformemente per $n \to +\infty$, dunque $f \in \mathcal{A}$. □

Definizione 4.2.9 (Processo di Feller): Un processo di Markov con funzione di transizione di Feller è detto *processo di Feller*.

Considerando $\mathcal{M} \subset M_1(E, \mathscr{E})$ e $(P_t)_{t\geq 0}$ una funzione di transizione di Feller, presa una $\mathcal{M}$-realizzazione mediante un processo X è sempre possibile considerare X cadlag.

Teorema 4.2.10: *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, X, (P_t)_{t\geq 0}, (\mathbf{P}_\nu)_{\nu\in\mathcal{M}})$ una $\mathcal{M}$-realizzazione della funzione di transizione di Feller $(P_t)_{t\geq 0}$ su E. Allora il processo X ammette una modificazione $\mathcal{M}$-universale cadlag, cioè esiste un processo $\widetilde{X}$ su $(\Omega, \mathcal{F})$ t.c. $X_t = \widetilde{X}_t$ $\mathbf{P}_\nu$-q.c. per ogni $\nu \in \mathcal{M}$ per ogni $t \geq 0$.*

Dimostrazione. Non trattata. □

Corollario 4.2.11: *Ogni processo di Feller a valori in E ammette una modificazione cadlag.*

Definizione 4.2.12: Sia $(P_t)_{t\geq 0}$ una funzione di transizione di Feller. Una $\mathcal{M}$-realizzazione di $(P_t)_{t\geq 0}$ mediante un processo X sarà detta *$\mathcal{M}$-realizzazione cadlag* se X è cadlag.

In particolare se E è spazio polacco localmente compatto ed $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, X, (P_t)_{t\geq 0}, (\mathbf{P}_\nu)_{\nu\in\mathcal{M}})$ è la $\mathcal{M}$-realizzazione canonica di $(P_t)_{t\geq 0}$ chiameremo *$\mathcal{M}$-realizzazione canonica cadlag di $(P_t)_{t\geq 0}$* il dato di $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \widetilde{X}, (P_t)_{t\geq 0}, (\mathbf{P}_\nu)_{\nu\in\mathcal{M}})$ con $\widetilde{X}$ una qualsiasi modificazione $\mathcal{M}$-universale cadlag del processo delle coordinate.

In tutto quel che segue sarà fissato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Passiamo adesso a dimostrare un'importante legge 0-1.

Lemma 4.2.13: *Sia X un processo di Feller rispetto alla sua filtrazione naturale a valori in E cadlag con funzione di transizione $(P_t)_{t\geq 0}$. Allora denotata con $(\mathcal{F}_t^{X,\mathbf{P}})_{t\geq 0}$ la filtrazione naturale di X completata rispetto a $\mathbf{P}$, vale che $(\mathcal{F}_t^{X,\mathbf{P}})_{t\geq 0}$ è continua a destra.*

Dimostrazione. (Facoltativo) Basta dimostrare che $\mathbb{E}\left[Z \mid \mathcal{F}_t^{X,\mathbf{P}}\right] = \mathbb{E}\left[Z \mid \mathcal{F}_{t^+}^{X,\mathbf{P}}\right]$ per ogni $Z \in \mathscr{E}_+$ per ogni $t \geq 0$. Usando come al solito il Teorema delle classi monotone ed il fatto che un aperto di E ammette un esaustione (crescente) in compatti (ed il Lemma di Urysohn) basta dimostrare quanto voluto per $Z = \prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})$ con $\{f_i\}_{i=1}^n \subset C_0(E)$ e $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Osserviamo che essendo $\mathcal{F}_t^{X,\mathbf{P}} = \sigma(\mathcal{F}_t^X \cup \mathcal{N}_{\mathbf{P}})$ con $\mathcal{N}_{\mathbf{P}} = \{N \in \mathcal{F} \mid \mathbf{P}(N) = 0\}$ vale

$$\mathbb{E}\left[Z \mid \mathcal{F}_t^{X,\mathbf{P}}\right] = \mathbb{E}\left[Z \mid \mathcal{F}_t^X\right] \quad \mathbf{P}\text{-q.c.} \tag{4.2}$$

dunque fissato $t \geq 0$, preso $\tau < t$ in $[0, \infty)$ e fissata $f \in C_0(E)$, usando il fatto che X è cadlag e di Markov (e la Proposizione 2.6.7), considerando una successione $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ t.c. $t_m \searrow t$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(X_\tau) \mid \mathcal{F}_{t^+}^{X,\mathbf{P}}\right] &\overset{(4.2)}{=} \lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}\left[f(X_\tau) \mid \mathcal{F}_{t_m}^{X,\mathbf{P}}\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} P_{\tau-t_m} f(X_{t_m}) \\
\text{(Conv. Dom.) } &= P_{\tau-t} f(X_t) \overset{(4.2)}{=} \mathbb{E}\left[f(X_\tau) \mid \mathcal{F}_t^{X,\mathbf{P}}\right]
\end{aligned}$$

che è quanto voluto con $n = 1$ (se $\tau \leq t$ l'uguaglianza è banale in quanto in tal caso $f(X_\tau)$ è $\mathcal{F}_t^{X,\mathbf{P}}$-misurabile). Adesso dimostriamo il caso di $n \in \mathbb{N}_+$ qualsiasi per induzione. Manteniamo le notazioni introdotte all'inizio della dimostrazione. Se $t \geq t_n$ allora Z è $\mathcal{F}_t^{X,\mathbf{P}}$-misurabile e l'uguaglianza voluta è banale. Supponiamo invece $t < t_n$, allora esiste $k \in \{2, \dots, n\}$ t.c. $t_{k-1} \leq t < t_k$, quindi ponendo $Z' = \prod_{i=1}^{k-1} f_i(X_{t_i})$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z \mid \mathcal{F}_{t^+}^{X,\mathbf{P}}\right] &= Z'\mathbb{E}\left[\prod_{i=k}^n f_i(X_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t^+}^{X,\mathbf{P}}\right] \\
\text{(Ip. induttiva) } &= Z'\mathbb{E}\left[\prod_{i=k}^n f_i(X_{t_i}) \mid \mathcal{F}_t^{X,\mathbf{P}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Z \mid \mathcal{F}_t^{X,\mathbf{P}}\right]
\end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Teorema 4.2.14 (Legge 0-1 di Blumenthal): *Sia X un processo di Feller rispetto alla sua filtrazione naturale a valori in E cadlag con distribuzione iniziale δ_x per un qualche $x \in E$. Allora per ogni $A \in \mathcal{F}_{0^+}^X$ vale $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$.*

Dimostrazione. Essendo $\mathbf{P}(X_0 = x) = 1$ la σ-algebra $\mathcal{F}_0^X = \sigma(X_0)$ contiene solamente eventi di probabilità 0 o 1. Prendiamo $\mathcal{F}_0^{X,\mathbf{P}}$, allora per il Lemma precedente $\mathcal{F}_{0^+}^X \subset \mathcal{F}_{0^+}^{X,\mathbf{P}} = \mathcal{F}_0^{X,\mathbf{P}}$, ma $\mathcal{F}_0^{X,\mathbf{P}} = \sigma(\mathcal{F}_0^X \cup \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbf{P}(A) = 0\})$ quindi segue facilmente quanto voluto. □

Adesso passiamo allo studio del generatore infinitesimale di un semigruppo di Feller, la cui definizione è la seguente.

Definizione 4.2.15 (Generatore infinitesimale): Dato un semigruppo di Feller $(T_t)_{t\geq 0}$ su $C_0(E)$, diciamo che una $f \in C_0(E)$ appartiene al *dominio del generatore infinitesimale* di $(T_t)_{t\geq 0}$ se esiste una funzione $Af \in C_0(E)$ t.c.

$$\frac{T_t f - f}{t} \longrightarrow Af \quad \text{uniformemente per } t \searrow 0$$

chiamiamo tale dominio $\mathcal{D}_A$. L'operatore lineare $A : \mathcal{D}_A \to C_0(E)$ così definito è detto *generatore infinitesimale* di $(T_t)_{t\geq 0}$.

Osservazione 4.2.16: Nel seguito per generatore infinitesimale di un processo di Feller intenderemo ovviamente il generatore infinitesimale del semigruppo di Feller ad esso associato.

Nella Proposizione 4.2.2 si è provato che la mappa $[0,\infty) \ni t \mapsto T_t f \in C_0(E)$ è continua, adesso con la nozione di generatore infinitesimale possiamo spingerci ancora oltre dimostrando che è in realtà differenziabile nel senso di Frechét.

Teorema 4.2.17: *Sia $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigruppo di Feller e $f \in \mathcal{D}_A$. Allora $[0,\infty) \ni t \mapsto T_t f \in C_0(E)$ è differenziabile nel senso di Frechét (rispetto alla topologia della norma uniforme) con derivata di Frechét*

$$\frac{d}{dt} T_t f = AT_t f = T_t Af. \tag{4.3}$$

Le equazioni in (4.4) *sono chiamate* equazioni di Kolmogorov.

In particolare per ogni $x \in E$ la mappa $[0,\infty) \ni t \mapsto T_t f(x) \in \mathbb{R}$ è derivabile con derivata

$$\frac{d}{dt} T_t f(x) = AT_t f(x) = T_t Af(x). \tag{4.4}$$

Dimostrazione. Per tutta la dimostrazione sarà $h > 0$. Per definizione si ha

$$\left\| \frac{T_h f - f}{h} - Af \right\|_\infty \longrightarrow 0$$

per $h \searrow 0$ e quindi

$$\left\| \frac{T_{t+h} f - T_t f}{h} - T_t Af \right\|_\infty \leq \|T_t\|_{\mathrm{op}} \left\| \frac{T_h f - f}{h} - Af \right\|_\infty \longrightarrow 0$$

ed inoltre l'equazione sopra ci dice anche che $AT_t f = T_t Af$. Quindi $t \mapsto T_t f$ ammette derivata di Frechét da destra uguale a $T_t Af = AT_t f$. Vediamo che la funzione considerata ammette derivata anche da sinistra uguale a quella destra appena trovata

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T_t f - T_{t-h} f}{h} - T_t Af \right\|_\infty &\leq \left\| \frac{T_t f - T_{t-h} f}{h} - T_{t-h} Af \right\|_\infty + \|T_{t-h} Af - T_t f\|_\infty \\ &\leq \|T_{t-h}\|_{\mathrm{op}} \left\| \frac{T_h f - f}{h} - Af \right\|_\infty + \|T_{t-h} Af - T_t f\|_\infty \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

per $h \searrow 0$, in cui si è usata la Proposizione 4.2.2 (ed il fatto che $\|T_{t-h}\|_{\mathrm{op}} \leq 1$).

L'ultima affermazione segue dal fatto che $[0,\infty) \ni t \mapsto T_t f(x) \in \mathbb{R}$ è la composizione di $[0,\infty) \ni t \mapsto T_t f \in C_0(E)$ e della valutazione in x val_x, ossia $T_t f(x) = (\mathrm{val}_x \circ T_. f)(t)$ che per quanto noto sul calcolo differenziale (di Frechét) ha derivata $\left(\mathrm{val}_x \circ \frac{d}{dt} T_. f\right)(t) = \frac{d}{dt} T_t f(x)$. □

Corollario 4.2.18: *Sia $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigruppo di Feller e $f \in \mathcal{D}_A$. Allora per ogni $x \in E$ vale*

$$P_t f(x) = f(x) + \int_0^t AT_s f(x)\,\mathrm{d}s = f(x) + \int_0^t T_s Af(x)\,\mathrm{d}s. \tag{4.5}$$

Inoltre se $D \subset \mathcal{D}_A$ è un sottospazio lineare e $B : D \to C_0(E)$ è un operatore lineare che soddisfa (4.5) *per ogni $f \in D$ allora necessariamente $B = A$ su D.*

Dimostrazione. La prima affermazione è conseguenza immediata del Teorema precedente.

Vediamo il secondo fatto di unicità. Sia $f \in D \subset \mathcal{D}_A$, allora

$$\begin{aligned}\left\| \frac{T_t f - f}{t} - Bf \right\|_\infty &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (T_s Bf - Bf)\, \mathrm{d}s \right\|_\infty \\ &\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \|(T_s Bf - Bf)\|_\infty \longrightarrow 0\end{aligned}$$

per $t \searrow 0$, in cui nell'ultima convergenza si è usato che $(T_t)_{t\geq 0}$ è un semigruppo di Feller. Quindi $Bf = Af$ per ogni $f \in D$. □

Teorema 4.2.19: *Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sia X un processo di Feller a valori in E, cadlag, con funzione di transizione $(P_t)_{t\geq 0}$ e generatore infinitesimale A. Allora per ogni $f \in \mathcal{D}_A$ il processo M^f definito da*

$$M_t^f = f(X_t) - \int_0^t Af(X_s)\, \mathrm{d}s$$

è una martingala.

Dimostrazione. Chiaramente è adattato ed è semplice verificare che è integrabile (f e Af sono limitate), dunque dimostriamo la proprietà di martingala. Consideriamo $s, t \geq 0$, $s < t$, allora per ogni $\Gamma \in \mathcal{F}_s$ vale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma(M_t - M_s)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma(f(X_t) - f(X_s))\right] - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \int_s^t Af(X_r)\, \mathrm{d}r\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma(f(X_t) - f(X_s))\right] - \int_s^t \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma Af(X_r)\right]\, \mathrm{d}r \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \mathbb{E}\left[f(X_t) - f(X_s) \mid \mathcal{F}_s\right]\right] - \int_s^t \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \mathbb{E}\left[Af(X_r) \mid \mathcal{F}_s\right]\right]\, \mathrm{d}r \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma(P_{t-s}f(X_s) - f(X_s))\right] - \int_s^t \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma P_{r-s}Af(X_s)\, \mathrm{d}r\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma(P_{t-s}f(X_s) - f(X_s))\right] - \int_0^{t-s} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma P_u Af(X_s)\, \mathrm{d}u\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \left(P_{t-s}f(X_s) - f(X_s) - \int_0^{t-s} \frac{d}{du} P_u f(X_s)\, \mathrm{d}s\right)\right] = 0\end{aligned}$$

da cui segue la proprietà di martingala per definizione di speranza condizionale. □

4.2.2 Processi Fortemente di Markov

In tutta la sezione E sarà uno spazio localmente compatto di Hausdorff a base numerabile e $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$.

Definizione 4.2.20 (Processo fortemente di Markov): Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità filtrato. Diremo che un processo X a valori in E è *fortemente di Markov* con funzione di transizione $(P_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ e distribuzione iniziale ν se per ogni T tda $\mathbf{P}$-q.c. finito ed ogni $f \in \mathcal{E}_+$ vale

$$\mathbb{E}\left[f(X_{T+t}) \mid \mathcal{F}_{T+s}\right] = P_{s,t} f(X_{T+s}) \quad \forall 0 \leq s \leq t$$

e $(X_0)_\# \mathbf{P} = \nu$.

Lemma 4.2.21: *Fissiamo uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ e X processo stocastico a valori in E. Vale che X è fortemente di Markov con funzione di transizione $(P_t)_{t\geq 0}$ e distribuzione iniziale ν se e solo se per ogni $f \in \mathscr{E}_+$, ogni $t \geq 0$ ed ogni T tda limitato vale*

$$\mathbb{E}\left[f(X_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T\right] = P_t f(X_T) \tag{4.6}$$

e $(X_0)_\#\mathbf{P} = \nu$.

Dimostrazione. (Facoltativo) Dimostriamo l'implicazione non ovvia. Supponiamo che valga (4.6) per ogni $f \in \mathscr{E}_+$, ogni T tda limitato ed ogni $t \geq 0$ e prendiamo S tda finito. Prendiamo $s, t \geq 0$, $s \leq t$ e consideriamo per ogni $C > 0$ il tda limitato

$$\sigma_C = C \wedge S + s$$

allora, presa $f \in \mathscr{E}_+$, per le ipotesi vale

$$\mathbb{E}\left[f(X_{\sigma_C+t-s}) \mid \mathcal{F}_{\sigma_C}\right] = P_{t-s} f(X_{\sigma_C})$$

ma su $\{S \leq C\}$ vale

$$\mathbb{E}\left[f(X_{S+t}) \mid \mathcal{F}_{S+s}\right] = \mathbb{E}\left[f(X_{\sigma_C+t-s}) \mid \mathcal{F}_{\sigma_C}\right]$$

(sono entrambi una versione di $\mathbb{E}\left[f(X_{S+t}) \mid \mathcal{F}_S \cap \{S \leq C\}\right]$), dunque

$$\mathbf{1}_{\{S\leq C\}}\mathbb{E}\left[f(X_{S+t}) \mid \mathcal{F}_{S+s}\right] = \mathbf{1}_{\{S\leq C\}}\mathbb{E}\left[f(X_{\sigma_C+t-s}) \mid \mathcal{F}_{\sigma_C}\right] = \mathbf{1}_{\{S\leq C\}} P_t(X_{\sigma_C})$$

quindi prendendo $C = n$ e passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene la tesi. □

Teorema 4.2.22: *Un processo di Feller cadlag è fortemente di Markov.*

Dimostrazione. Non trattata □

Teorema 4.2.23 (Proprietà di Markov forte canonica): *Supponiamo E spazio polacco localmente compatto. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}, \widetilde{X}, (P_t)_{t\geq 0}, (\mathbf{P}_\nu)_{\nu\in\mathcal{M}})$ una $\mathcal{M}$-realizzazione canonica cadlag della funzione di transizione di Feller $(P_t)_{t\geq 0}$. Allora se $Z \in \mathcal{F}_+$, T è $(\mathcal{F}_t^X)$-tda finito e $\nu \in \mathcal{M}$ vale*

$$\mathbb{E}_\nu\left[Z \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T^X\right] = \mathbb{E}_{\widetilde{X}_t}\left[Z\right] \quad \mathbf{P}_\nu\text{-q.c.}$$

in cui il RHS è la solita composizione di X_T e $x \mapsto \mathbb{E}_x[Z]$.

Dimostrazione. Fissiamo $\nu \in \mathcal{M}$. Sia T $(\mathcal{F}_t^X)$-tda finito, se T assume solo numerabili valori $S \subset [0, \infty)$, la tesi segue facilmente, infatti per ogni $Z \in \mathcal{F}_+$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu\left[Z \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T^X\right] &= \sum_{s\in S} \mathbb{E}_\nu\left[Z \circ \theta_s \mathbf{1}_{\{T=s\}} \mid \mathcal{F}_s^X\right] \\
&= \sum_{s\in S} \mathbb{E}_\nu\left[Z \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s^X\right] \mathbf{1}_{\{T=s\}} \\
&= \sum_{s\in S} \mathbb{E}_{X_s}\left[Z\right] \mathbf{1}_{\{T=s\}} = \mathbb{E}_{X_T}\left[Z\right].
\end{aligned}$$

Mostriamo ora la tesi per $Z = \prod_{i=1}^n f(X_{t_i})$ con $f_1, ..., f_n \in C_0(E)$ e $0 \leq t_1 < ... < t_n$. Osserviamo che da questo segue la tesi generale, infatti per le proprietà topologiche di E ed il Lemma di Urysohn ogni indicatrice di aperti di E si approssima in modo monotono dal crescente da funzioni in $C_c(E) \subset C_0(E)$, quindi usando il Teorema di Beppo Levi condizionale si ottiene la tesi per

Z della forma $Z = \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(X_{t_i}) = \mathbf{1}_{\bigcap_{i=1}^n \{X_{t_i} \in A_i\}}$ con $A_1, ..., A_n$ aperti di E, poi con il Teorema delle classi monotone si arriva a dimostrare la tesi per $Z = \mathbf{1}_B$ con $B \in \mathcal{F}$ qualsiasi, quindi per Z v.a. semplice e per approssimazione, usando ancora il Teorema di Beppo Levi condizionale, per $Z \in \mathcal{F}_+$. Sia quindi $Z = \prod_{i=1}^n f(X_{t_i})$ con $f_1, ..., f_n \in C_0(E)$ e $0 \le t_1 < ... < t_n$, approssimando T dall'alto in modo monotono con $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di $(\mathcal{F}_t^X)$-tda semplici si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu \left[Z \circ \theta_{T_k} \mid \mathcal{F}_{T_k} \right] &= \mathbb{E}_{X_{T_k}} \left[\prod_{i=1}^n f(X_{t_i}) \right] \\
&= \int_E \int_E ... \int_E f_n(x_n)\, \mathrm{d}P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}; x_n) ... f_2(x_2)\, \mathrm{d}P_{t_2 - t_1}(x_2; x_1) f_1(x_1)\, \mathrm{d}P_{t_1}(X_{T_k}; x_1) \\
&= F_{\substack{t_1,...,t_n \\ f_1,...,f_n}}(X_{T_k})
\end{aligned}$$

con $F_{\substack{t_1,...,t_n \\ f_1,...,f_n}} \in C_0(E)$ perché $(P_t)_{t\ge0}$ è di Feller, quindi per $k \to +\infty$ si ha

$$F_{\substack{t_1,...,t_n \\ f_1,...,f_n}}(X_{T_k}) \longrightarrow F_{\substack{t_1,...,t_n \\ f_1,...,f_n}}(X_T)$$

mentre il LHS converge a $\mathbb{E}_\nu \left[Z \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T \right]$ per il Teorema di convergenza dominata condizionale con filtrazione (Teorema 2.6.7). □

4.2.3 Processi a Incrementi Indipendenti e Stazionari

Proposizione 4.2.24: *Fissiamo uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}, \mathbf{P})$ e sia X un processo a valori in $\mathbb{R}^d$, $(\mathcal{F}_t)$-adattato, a incrementi indipendenti e stazionari. Allora, per ogni T tda finito, il processo $X_{\cdot+T} - X_T$ è $(\mathcal{F}_{T+t})$-adattato, indipendente da $\mathcal{F}_T$ ed ha la stessa legge di $X - X_0$.*

In particolare X è fortemente di Markov con funzione di transizione $(P_t)_{t\ge0}$ data da

$$P_t(x, A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x + y)\, \mathrm{d}\nu_t(y),$$

in cui ν_t è la legge di $X_t - X_0$, per ogni $t \ge 0$, ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ed ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Sia T tda finito e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tda semplici t.c. $T_n \searrow T$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ denotiamo con D_n l'immagine di T_n. Sarà $X_t^* = X_{t+T} - X_t$ per ogni $t \ge 0$. Siano $0 \le t_1 < ... < t_m$ con $m \in \mathbb{N}_+$, allora per ogni $A \in \mathcal{F}_T$ ed ogni $\varphi : (\mathbb{R}^d)^m \to \mathbb{R}$ continua e limitata vale

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi(X_{t_1}^*, ... X_{t_m}^*) \mathbf{1}_A \right] &= \mathbb{E}\left[\varphi(X_{T+t_1} - X_T, ... X_{T+t_m} - X_T) \mathbf{1}_A \right] \\
&= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to+\infty} \varphi(X_{T_n+t_1} - X_{T_n}, ... X_{T_n+t_m} - X_{T_n}) \mathbf{1}_A \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\varphi(X_{k+t_1} - X_k, ... X_{k+t_m} - X_k) \mathbf{1}_{A\cap\{T_n = k\}} \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi(X_{k+t_1} - X_k, ... X_{k+t_m} - X_k) \mid \mathcal{F}_k \right] \mathbf{1}_{A\cap\{T_n = k\}} \right] \\
\text{(incr. indip.)} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\varphi(X_{k+t_1} - X_k, ... X_{k+t_m} - X_k) \right] \mathbf{P}(A \cap \{T_n = k\}) \\
\text{(incr. staz.)} &= \mathbb{E}\left[\varphi(X_{t_1} - X_0, ... X_{t_m} - X_0) \right] \mathbf{P}(A)
\end{aligned}$$

dunque per $A = \Omega$ si ottiene che la legge di X^* è la stessa di $X - X_0$. Inoltre per $A \in \mathcal{F}_T$ qualsiasi si ottiene l'indipendenza voluta.

Vediamo ora l'ultima parte dell'enunciato. Sia $t \geq 0$ ed $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_+$, vale

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[f(X_T + t) \mid \mathcal{F}_T\right] &= \mathbb{E}\left[f(X_{T+t} - X_t + X_T) \mid \mathcal{F}_T\right] \\ \text{(incr. indip.)} &= \mathbb{E}\left[f(X_{T+t} - X_t + x)\right]_{|x=X_T} \\ \text{(per quanto detto sopra)} &= \mathbb{E}\left[f(X_t - X_0 + x)\right]_{|x=X_T} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y + X_T)\, \mathrm{d}\nu_t(y) = P_t f(X_T) \end{aligned}$$

che è la proprietà di Markov forte voluta. □

Definizione 4.2.25 (Semigruppo di convoluzione): Una famiglia $(\mu_t)_{t\geq 0}$ di misure di probabilità su $\mathbb{R}^d$ è detta *semigruppo di convoluzione* se

(1) $\mu_0 = \delta_0$;

(2) $\mu_t \longrightarrow \delta_0$ vagamente per $t \searrow 0$;

(3) $\mu_t * \mu_s = \mu_{s+t}$ per ogni $s, t \geq 0$.

Proposizione 4.2.26: *Sia $(\mu_t)_{t\geq 0}$ su $\mathbb{R}^d$ un semigruppo di convoluzione, definendo per ogni $t \geq 0$, ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ed ogni $x \in \mathbb{R}^d$*

$$P_t(x, A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x + y)\, \mathrm{d}\mu_t(y) = \mu_t(A - x)$$

si ha che $(P_t)_{t\geq 0}$ forma una funzione di transizione di Feller su $\mathbb{R}^d$ con semigruppo di Feller dato da

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x + y)\, \mathrm{d}\mu_t(y)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ed ogni $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Che ogni P_t sia un nucleo markoviano è una facile verifica. Vediamo la condizione di Chapman-Kolmogorov. Siano $s, t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ e $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, per definizione

$$P_{s+t}(x, A) = \mu_{s+t}(A - x)$$

ma $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$, dunque

$$P_{s+t}(x, A) = (\mu_s * \mu_t)(A - x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_t(A_x - y)\, \mathrm{d}\mu_s(y) = (P_s P_t)(x, A).$$

Dunque $(P_t)_{t\geq 0}$ è una funzione di transizione, vediamo che è di Feller usando la Proposizione 4.2.8:

(1) se $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ allora è limitata e, preso $t \geq 0$, il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue ci permette di concludere sia che $P_t f \in C(\mathbb{R}^d)$, sia che $|P_t f(x)| \to 0$ per $\|x\| \to 0$, ossia che $P_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$;

(2) se $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ed $x \in \mathbb{R}^d$ allora $P_t f(x) \to f(x)$ per $t \nearrow 0$ in quanto $\mu_t \longrightarrow \delta_0$ vagamente.

□

Vediamo adesso un'importantissima classe di processi ad incrementi indipendenti e stazionari che risultano essere anche processi di Feller.

Definizione 4.2.27 (Processo di Lèvy): Un *processo di Lèvy* è un processo X a valori in $\mathbb{R}^d$

(1) a incrementi indipendenti e stazionari;

(2) continuo a destra in probabilità, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ e $t \geq 0$ vale

$$\mathbf{P}\left(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

per $h \searrow 0$.

Teorema 4.2.28: *Fissiamo uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$. Un processo di Lèvy adattato X è di Feller con funzione di transizione $(P_t)_{t\geq 0}$ data da*

$$P_t(x, A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x + y)\, \mathrm{d}\mu_t(y),$$

in cui μ_t è la legge di $X_t - X_0$, per ogni $t \geq 0$, ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ed ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. (Facoltativo) Sappiamo che X è di Markov con funzione di transizione quella data per la Proposizione 4.2.24. Osserviamo che $(\mu_t)_{t\geq 0}$ forma un semigruppo di convoluzione, infatti

(1) μ_0 è la legge di 0, che è δ_0;

(2) se $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, allora

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, \mathrm{d}\mu_t(y) - f(0)\right| &= |\mathbb{E}\left[f(X_t - X_0)\right] - f(0)| \\ &\leq \mathbb{E}\left[|f(X_t - X_0) - f(0)|\right] \longrightarrow 0\end{aligned}$$

per $t \searrow 0$ grazie il Teorema di convergenza di Vitali in quanto $X_t \xrightarrow{\mathbf{P}} X_0$, quindi per continuità $f(X_t - X_0) \xrightarrow{\mathbf{P}} f(0)$ ed f è limitata;

(3) μ_{t+s} è la legge di $X_{t+s} - X_0 = (X_{t+s} - X_s) + (X_s - X_0)$, ma $X_{t+s} - X_s$ e $X_s - X_0$ sono indipendenti, dunque per quanto noto sulla legge della somma di due v.a. indipendenti si ha $\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s$;

dunque si ha la tesi per la Proposizione 4.2.26. □

Corollario 4.2.29: *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità filtrato e sia $x \in \mathbb{R}$. Un $(\mathcal{F}_t)$-MB che parte da x è un processo di Feller con distribuzione iniziale δ_x e funzione di transizione $(P_t)_{t\geq 0}$ data da*

$$P_t f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z + y) e^{-\frac{y^2}{2t}}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}}\, \mathrm{d}y$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^d$ ed ogni $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_+$.

4.3 Applicazioni al MB

Nel seguito saranno fissati $x \in \mathbb{R}$, uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ e B un $(\mathcal{F}_t)$-MB che parte da x, inoltre preso $a > 0$ sarà

$$T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \geq a\} = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$$

che è un $(\mathcal{F}_t)$-tda, mentre per $t \geq 0$ sarà

$$S_t = \max_{s \leq t} B_s$$

detto *massimo viaggiante* di B.

Lemma 4.3.1: *Preso $t > 0$ si ha $\mathbf{P}(S_t > x) = 1$, dunque*

$$\mathbf{P}\left(\max_{s \leq t} B_s > x, \min_{s \leq t} B_s < x\right) = 1.$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che $\mathbf{P}(A) = 1$ in cui

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{S_{\frac{1}{n}} > x\right\}$$

e per farlo, grazie alla Legge 0-1 di Blumenthal (Teorema 4.2.14), basta dimostrare che $\mathbf{P}(A) > 0$, infatti $A = \bigcup_{n \geq N} \left\{S_{\frac{1}{n}} > x\right\}$ per ogni $N \in \mathbb{N}$, dunque $A \in \mathcal{F}^B_{0^+}$. Ora osserviamo che

$$\mathbf{P}\left(S_{\frac{1}{n}} > x\right) \geq \mathbf{P}\left(B_{\frac{1}{n}} > x\right) = \frac{1}{2}$$

e che $\mathbf{P}\left(S_{\frac{1}{n}} > x\right) \searrow \mathbf{P}(A)$. Quindi $\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2}$. Per l'enunciato col minimo basta considerare $-B$ (che è un $(\mathcal{F}_t)$-MB che parte da $-x$) al posto di B per ottenere

$$\mathbf{P}\left(\min_{s \leq t} B_s < x\right) = \mathbf{P}\left(\max_{s \leq t}(-B_s) > -x\right) = 1.$$

□

Proposizione 4.3.2: *Vale che*

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty\right) = \mathbf{P}\left(\liminf_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty\right) = 1.$$

In particolare per ogni $a > 0$ vale che T_a è un $(\mathcal{F}_t)$-tda $\mathbf{P}$-q.c. finito e $\mathbf{P}$-q.c. B non ammette limite per $t \longrightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Osserviamo che preso $R > 0$ e definito il MB std $W_t = tB_{t^{-1}}$ con $t \geq 0$, vale

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} > R\right) \geq \mathbf{P}\left(\limsup_{n \to +\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} > R\right) = \mathbf{P}\left(\limsup_{n \to +\infty} \sqrt{n} W_{n^{-1}} > R\right)$$

in cui nell'RHS si intende $n \in \mathbb{N}$, ma

$$\begin{aligned} A = \left\{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt{n} W_{n^{-1}} > R\right\} &= \limsup_{n \to +\infty} \left\{\sqrt{n} W_{n^{-1}} > R\right\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{m \geq n} \left\{\sqrt{m} W_{m^{-1}} > R\right\} \in \mathcal{F}^W_{0^+} \end{aligned}$$

in quanto se $A_n = \bigcup_{m \geq n} \left\{\sqrt{m} W_{m^{-1}} > R\right\}$ si ha che $A_n \searrow A$ ed $A_n \in \mathcal{F}^W_{k^{-1}}$ definitivamente in $n \in \mathbb{N}_+$ per ogni $k \in \mathbb{N}_+$, dunque $A \in \mathcal{F}^W_{k^{-1}}$ per ogni $k \in \mathbb{N}_+$ (perché $A = \bigcap_{n \geq N} A_n$ per ogni $N \in \mathbb{N}_+$). Quindi per la Proposizione 4.2.14 (Legge 0-1 di Blumenthal)

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n \to +\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} > R\right) \in \{0, 1\}$$

dunque si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\frac{B_n}{\sqrt{n}}>R\right) &\geq \lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\frac{B_n}{\sqrt{n}}>R\right)\\ &=\mathbf{P}\left(B_1>R\right)>0\end{aligned}$$

in cui si è usato che $\frac{B_n}{\sqrt{n}} \overset{\mathcal{D}}{=} B_1$. Quindi

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to+\infty}\frac{B_t}{\sqrt{t}}>R\right)=1.$$

Dunque passando al limite per $R\to+\infty$ otteniamo $\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to+\infty}\frac{B_t}{\sqrt{t}}=+\infty\right)=1$ ed applicando questo a $-B$ (che è $(\mathcal{F}_t)$-MB che parte da $-x$) otteniamo anche $\mathbf{P}\left(\liminf_{t\to+\infty}\frac{B_t}{\sqrt{t}}=-\infty\right)=1$. □

Corollario 4.3.3: *Sia* $Z=\{t\geq 0 \mid B_t=x\}$, *allora* $\mathbf{P}$*-q.c.* Z *è chiuso, senza punti isolati ed illimitato. Inoltre* $\mathbf{P}$*-q.c.* $\mathcal{L}^1(Z)=0$, *quindi in particolare ha parte interna vuota.*

Dimostrazione. La chiusura segue dalla continuità delle traiettorie del MB. Inoltre vale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathcal{L}^1(Z)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty}\mathbf{1}_Z(t)\,\mathrm{d}t\right]\\ &=\int_0^{+\infty}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_Z(t)\right]\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{+\infty}\mathbf{P}(B_t=x)\,\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

Vediamo l'illimitatezza. Chiaramente vale

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(Z \text{ è limitato}\right) &\leq \mathbf{P}\left(\exists n\in\mathbb{N}\ \forall s\geq t\ \ |B_s-x|>0\right)\\ &\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}\left(\forall s\geq n\ \ |B_s-x|>0\right)\end{aligned}$$

e per ogni $n\in\mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\forall s\geq n\ \ |B_s-x|>0\right) &= \lim_{M\to+\infty}\mathbf{P}\left(\min_{s\in[n,M]}|B_s-x|>0\right)\\ &=\lim_{M\to+\infty}\mathbf{P}\left(\min_{s\in[M^{-1},n^{-1}]}|B_{s^{-1}-x|>0}\right)\\ &=\lim_{M\to+\infty}\mathbf{P}\left(\min_{s\in[M^{-1},n^{-1}]}|s(B_{s^{-1}}-x)|>0\right)\\ ((s(B_{s^{-1}}-x))_{s\geq 0}\text{ è MB std}) &=\lim_{M\to+\infty}\mathbf{P}\left(\min_{s\in[M^{-1},n^{-1}]}|B_s-x|>0\right)\\ &=\mathbf{P}\left(\min_{s\in(0,n^{-1}]}|B_s-x|>0\right)=0\end{aligned}$$

in cui l'ultima uguaglianza è dovuta al Lemma 4.3.1 si ha quindi quanto voluto.

Vediamo ora che non ha punti isolati. Per ogni $p\in\mathbb{Q}_+$ sia

$$z_p=\inf\{t\geq p \mid B_t=0\}$$

allora z_p è $(\mathcal{F}_t)$-tda $\mathbf{P}$-q.c. finito (perché Z è $\mathbf{P}$-q.c. illimitato) e $(B_{s+z_p} - B_{z_p})_{s\geq 0} = (B_{s+z_p})_{s\geq 0}$ è $(\mathcal{F}_{t+z_p})$-MB std (Proposizione 4.2.24), dunque come conseguenza del Corollario precedente si ha

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{p\in\mathbb{Q}_+}\bigcap_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}}\left\{\max_{s\leq\varepsilon} B_{s+z_p} > 0, \min_{s\leq\varepsilon} B_{s+z_p} < 0\right\}\right) = 1$$

quindi $\mathbf{P}$-q.c. ogni numero della forma z_p con $p \in \mathbb{Q}_+$ non è isolato (da destra). Se invece fissato $\omega \in \Omega$ prendiamo un $0 < t \in Z(\omega)$ t.c. $t \neq z_p(\omega)$ per ogni $p \in \mathbb{Q}_+$, possiamo considerare una successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+$ t.c. $p_n \nearrow t$ e definiti $t_n = z_{p_n}(\omega)$ si ottiene che $q_n \leq t_n < t$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $t_n \to t$ ed essendo $t_n \in Z(\omega)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ottiene che t non è isolato (da sinistra) in $Z(\omega)$. □

Teorema 4.3.4 (Principio di riflessione del MB): *Per ogni $a > 0$ ed ogni $t \geq 0$ vale*

$$\mathbf{P}(S_t \geq a) = \mathbf{P}(T_a \leq t) = 2\mathbf{P}(B_t \geq a) = \mathbf{P}(|B_t| \geq a).$$

In particolare S e $|B|$ hanno la stessa legge.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che

$$\mathbf{P}(S_t \geq a) = \mathbf{P}(S_t \geq a, B_t < a) + \mathbf{P}(B_t \geq a)$$

ma essendo $B_{T_a} = a$ vale

$$\mathbf{P}(S_t \geq a, B_t < a) = \mathbf{P}(T_a \leq t, B_t < a) = \mathbf{P}(T_a \leq t, B_{T_a+(t-T_a)} - B_{T_a} < 0)$$

ma essendo $(B_{T_a+s} - B_{T_a})_{s\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_{T_a+t})$-MB std indipendente da $\mathcal{F}_{T_a}$ per la Proposizione 4.2.24, si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_t \geq a, B_t < a) &= \mathbf{P}(T_a \leq t, B_{T_a+(t-T_a)} - B_{T_a} < 0)\\ &= \mathbf{P}(T_a \leq t)\mathbf{P}(B_{T_a+(t-T_a)} - B_{T_a} < 0)\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_a \leq t) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(S_t \geq a)\end{aligned}$$

da cui segue facilmente la tesi. □

5

Introduzione alle Equazioni Differenziali Stocastiche

5.1 Definizione di EDS

Nel seguito supporremo che ogni processo stocastico sia definito su uno spazio di probabilità filtrato (non necessariamente lo stesso). Siano inoltre $d, n \in \mathbb{N}_+$. Fissiamo inoltre alcune notazioni. Se X ed Y sono processi stocastici definiti sullo stesso spazio filtrato, scriveremo $X = Y$ per intendere l'uguaglianza tra processi, cioè che X ed Y sono indistinguibili. Invece se X ed Y sono due processi stocastici qualsiasi (definiti anche su spazi di probabilità filtrati diversi) scriveremo $X \overset{\mathcal{D}}{=} Y$ per intendere l'uguaglianza in legge, cioè che sono uno versione dell'altro.

Chiameremo $\mathbb{W}^d = C^0([0,\infty);\mathbb{R}^d)$. Se preso $s \geq 0$ la mappa $w_s : \mathbb{W}^d \to \mathbb{R}^d$ è la valutazione in s, cioè $w_s(\xi) = \xi(s)$ per ogni $\xi \in \mathbb{W}^d$, denotiamo con $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ la filtrazione canonica su $\mathbb{W}^d$, cioè per ogni $t \geq 0$

$$\mathcal{G}_t = \sigma(w_s \mid s \leq t).$$

Diremo inoltre che una funzione $f : [0,\infty) \times \mathbb{W}^d \to \mathbb{R}^n$ è *progressivamente misurabile* se $(f(t,\cdot))_{t\geq 0}$ è un processo stocastico $(\mathcal{G}_t)$-progressivamente misurabile.

Dato X processo stocastico continuo a valori in $\mathbb{R}^d$ ed f come sopra, scriveremo $f(t, X(\omega))$ per intendere il valore della funzione f al tempo $t \geq 0$ sulla traiettoria $s \mapsto X_s(\omega)$ e quando si vuole mantenere ω implicito scriveremo $f(t, X)$. Ovviamente $(f(t,X))_{t\geq 0}$ è un processo stocastico a valori in $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 5.1.1: Osserviamo che se X è un processo stocastico a valori in $\mathbb{R}^d$ continuo e $(\mathcal{F}_t)$-adattato ed $f : [0,\infty) \times \mathbb{W}^d \to \mathbb{R}^n$ è progressivamente misurabile, allora il processo a valori in $\mathbb{R}^n$ dato da $(f(t,X))_{t\geq 0}$ è $(\mathcal{F}_t)$-progressivamente misurabile (che ci serve per dare senso agli integrali stocastici).

Definizione 5.1.2: Date $f : [0,\infty) \times \mathbb{W}^d \to \mathbb{R}^{d\times n}$ e $g : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ progressivamente misurabili, l'*equazione differenziale stocastica (EDS)* di coefficienti (f, g) è la scrittura

$$\mathrm{d}X_t = g(t, X)\,\mathrm{d}t + f(t, X)\,\mathrm{d}B_t$$

tale equazione sarà indicata brevemente con $\mathrm{e}(f,g)$, inoltre se è imposto un vincolo del tipo $X_0 = Z$ $\mathbf{P}$-q.c. con Z una v.a. $\mathcal{F}_0$-misurabile si dirà che l'EDS *ha dato iniziale* Z. In particolare il dato dell'EDS $\mathrm{e}(f,g)$ col dato iniziale $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$ $\mathbf{P}$-q.c. verrà indicato con $\mathrm{e}_x(f,g)$. Nel seguito utilizzeremo il nome EDS sia per EDS libere sia per EDS con dato iniziale fregandocene della leggera ambiguità che questa terminologia crea.

Infine quando considereremo un'equazione del *tipo* $\mathrm{e}(\sigma,b)$ si intenderà un'equazione $\mathrm{e}(f,g)$ in cui $f(f,\xi) = \sigma(\xi_t)$ e $g(t,\xi) = b(\xi_t)$ per ogni $\xi \in \mathbb{W}^d$ ed ogni $t \geq 0$.

Osservazione 5.1.3: Nel contesto della definizione precedente $\mathrm{e}(f,g)$ si può riscrivere in

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(s,X)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(s,X)\,\mathrm{d}B_s.$$

che in coordinate è

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t g_i(s,X)\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^n \int_0^t f_{i,j}(s,X)\,\mathrm{d}B_s^j$$

con $i = 1,...,d$.

Definizione 5.1.4: Date $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times n}$ e $g : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ progressivamente misurabili, una *soluzione* di $\mathrm{e}(f,g)$ è una coppia (X,B) di processi definiti sul medesimo spazio filtrato $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbf{P})$, $(\mathcal{F}_t)$-adattati e t.c.

(1) B è un $(\mathcal{F}_t)$-MB^n std;

(2) per ogni $t \geq 0$ vale

$$\int_0^t \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n f_{i,j}(s,X)^2\,\mathrm{d}s < +\infty, \qquad \int_0^t |g(s,X)|\,\mathrm{d}s < +\infty \qquad \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

(3) per $i = 1,...,d$ vale

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t g_i(s,X)\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^n \int_0^t f_{i,j}(s,X)\,\mathrm{d}B_s^j.$$

Inoltre diremo che un processo X, definito sullo spazio filtrato $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbf{P})$, *risolve* $\mathrm{e}(f,g)$, se esiste B $(\mathcal{F}_t)$-MB^n std t.c. (X,B) è una soluzione di $\mathrm{e}(f,g)$. Infine diremo che X risolve $\mathrm{e}_x(f,g)$ se $X_0 = x$ $\mathbf{P}$-q.c. e risolve $\mathrm{e}(f,g)$.

Osservazione 5.1.5: Data una soluzione (X,B) di una EDS, vale ovviamente che X è una semimartingala vettoriale continua.

5.2 Teoremi di esistenza, unicità e di continuità rispetto al dato iniziale

Definizione 5.2.1: Diciamo che $\mathrm{e}(f,g)$ gode di:

- *unicità per traiettorie* se per ogni spazio filtrato $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbf{P})$ e per ogni B $(\mathcal{F}_t)$-MB^n, se (X,B) e $(\tilde{X},B)$ sono soluzioni di $\mathrm{e}(f,g)$ con $X_0 = \tilde{X}_0$ $\mathbf{P}$-q.c. allora $X = \tilde{X}$;
- *unicità in legge* se prese comunque due soluzioni (X,B) e $(\tilde{X},\tilde{B})$ di $\mathrm{e}(f,g)$ (anche definite anche su spazi di probabilità filtrati differenti) con $X_0 \overset{\mathcal{D}}{=} \tilde{X}_0$ allora $X \overset{\mathcal{D}}{=} \tilde{X}$.

Definizione 5.2.2 (Soluzione forte): Fissiamo l'equazione $\mathrm{e}(f, g)$. Una soluzione (X, B), definita sullo spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$, è detta *soluzione forte* se il processo X è adattato a $(\mathcal{F}_t^{B,\mathbf{P}})_{t\geq 0}$ filtrazione naturale di B completata rispetto a $\mathbf{P}$.

Un importante teorema, che non dimostreremo in queste note, riguardante il collegamento tra le due nozioni di unicità appena introdotte è il seguente.

Teorema 5.2.3 (di Yamada-Watanabe): *Fissiamo* $\mathrm{e}(f, g)$. *Se vale l'unicità per traiettorie allora*

(1) vale anche l'unicità in legge;

(2) ogni soluzione del problema con condizione iniziale deterministica del tipo $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$ $\mathbf{P}$*-q.c. è soluzione forte.*

Definizione 5.2.4: Data $\mathrm{e}(f, g)$, diciamo che f, g soddisfano le *ipotesi (IL)* se esiste un $K > 0$ t.c.

$$\|f(t,\xi) - f(t,\eta)\| + \|g(t,\xi) - g(t,\eta)\| \leq K \sup_{s\in[0,t]} \|\xi(s) - \eta(s)\| \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{W}^d \quad \forall t \geq 0 \tag{5.1}$$

e se $\forall x \in \mathbb{R}^d$, indicando con $\xi^x \in \mathbb{W}^d$ la funzione costante in x, vale che $t \mapsto f(t, \xi^x)$ e $t \mapsto g(t, \xi^x)$ sono localmente limitate.

Osservazione 5.2.5: Nel caso in cui l'EDS è del tipo $\mathrm{e}(\sigma, b)$ *le ipotesi (IL) sono equivalenti a*

$$\|\sigma(\xi(t)) - \sigma(\eta(t))\| + \|b(\xi(t))) - b(\eta(t))\| \leq K\|\xi(t) - \eta(t)\| \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{W}^d \quad \forall t \geq 0. \tag{5.2}$$

Infatti le ipotesi di limitatezza locale sono sempre verificate in quanto $t \mapsto \sigma(x)$ e $t \mapsto b(x)$ sono costanti per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e considerando $\sigma(\xi(t)) = f(t, \xi)$, $b(\xi(t)) = g(t, \xi)$ per ogni $\xi \in \mathbb{W}^d$ ed ogni $t \geq 0$ si ha che se vale (5.2) allora banalmente vale anche (5.1), viceversa se vale (5.1) si ha

$$\begin{aligned}\|\sigma(\xi(t)) - \sigma(\eta(t))\| + \|b(\xi(t))) - b(\eta(t))\| &= \left\| f(t, \xi^{\xi(t)}) - f(t, \xi^{\eta(t)}) \right\| + \left\| g(t, \xi^{\xi(t)}) - g(t, \xi^{\eta(t)}) \right\| \\ &\leq K\|\xi(t) - \eta(t)\|\end{aligned}$$

per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{W}^d$ ed ogni $t \geq 0$, in cui per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ si è denotata con ξ^x la funzione costante x, che è (5.2).

Osservazione 5.2.6: Consideriamo una EDS $\mathrm{e}(f, g)$ con f, g che godono delle Ipotesi (IL). In effetti è possibile dimostrare (anche se noi non lo faremo, vedi Proposition 1.4 in Revuz-Yor) che l'unicità (per traiettorie, ma in realtà basterebbe l'uguaglianza delle leggi) rispetto a condizioni iniziali deterministiche basta per avere l'unicità in legge.

Definizione 5.2.7: La *norma Hilbert-Schmidt* su $\mathbb{R}^{d\times n}$ è la mappa $\|\cdot\|_{HS} : \mathbb{R}^{d\times n} \to [0, \infty)$ t.c.

$$\|A\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$$

per ogni $\forall A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,d \\ j=1,\ldots,r}} \in \mathbb{R}^{d\times n}$.

Osservazione 5.2.8: Nel seguito indicheremo per comodità $\|\cdot\|_{HS} = \|\cdot\|$.

Osservazione 5.2.9: Fissiamo uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ con le ipotesi abituali. Segue dal quanto noto sull'integrazione stocastica rispetto a martingale locali continue che se B è un $(\mathcal{F}_t)$-MB^n std ed $H : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{d\times n}$ è $(\mathcal{F}_t)$-progressivamente misurabile e t.c. $H_{i,j} \in L^2_{loc}(B^j)$ per ogni $i \in 1,...,d$ ed ogni $j = 1,...,r$, allora vale

$$\mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t H(s)\,\mathrm{d}B_s\right\|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \|H(t)\|^2\ \mathrm{d}s\right].$$

Infatti si ha

$$\mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t H(s)\,\mathrm{d}B_s\right\|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^d\left(\sum_{j=1}^n\int_0^t H_{i,j}(s)\,\mathrm{d}B_s^j\right)^2\right]$$

ma per ogni $i = 1,...,d$ il processo $I_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t H_{i,j}(s)\,\mathrm{d}B_s^j$ è martingala locale continua nulla in 0, con variazione quadratica

$$\langle I_i\rangle_t = \sum_{j=1}^n \langle H_{i,j}\cdot B^j\rangle_t = \sum_{j=1}^n (H_{i,j}^2\cdot\langle B^j\rangle)_t = \sum_{j=1}^n\int_0^t H_{i,j}^2(s)\,\mathrm{d}s$$

quindi abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t H(s)\,\mathrm{d}B_s\right\|^2\right] &\leq \sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n\int_0^t H_{i,j}^2(s)\,\mathrm{d}s\right]\\ &= \sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[\int_0^t H_{i,j}(s)^2\,\mathrm{d}s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \|H(t)\|^2\ \mathrm{d}s\right]\end{aligned}$$

Osservazione 5.2.10: Sia $h = (h_i)_{i=1,...,d} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ una funzione boreliana localmente limitata. Allora per ogni $p \geq 2$ e per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t h(r)\,\mathrm{d}r\right\|^p \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|h(r)\|^p\ \mathrm{d}r.$$

Infatti vale

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t h(r)\,\mathrm{d}r\right\|^p &= \left(\sum_{i=1}^d\left|\frac{1}{t}\int_0^t h_i(r)\,\mathrm{d}r\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}\\ \text{(Jensen)}\ &\leq \left(\sum_{i=1}^d\frac{1}{t}\int_0^t |h_i(r)|^2\ \mathrm{d}r\right)^{\frac{p}{2}}\\ &= \left(\frac{1}{t}\int_0^t\left[\sum_{i=1}^d |h_i(r)|^2\right]\mathrm{d}r\right)^{\frac{p}{2}}\\ \text{(Jensen)}\ &\leq \frac{1}{t}\int_0^t\left[\sum_{i=1}^d |h_i(r)|^2\right]^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}r = \frac{1}{t}\int_0^t \|h(r)\|^p\ \mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Ricordiamo il seguente noto risultato.

Lemma 5.2.11 (di Gronwall): *Siano $\xi, \eta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ localmente integrabili e $C > 0$ t.c.*

$$\xi(t) \le \eta(t) + C \int_0^t \xi(s)\, \mathrm{d}s \quad \forall t \in [0, T]$$

allora

$$\xi(t) \le C \int_0^t e^{C(t-s)} \eta(s)\, \mathrm{d}s \quad \forall t \in [0, T].$$

In particolare se $\eta(t) = K \in \mathbb{R}$ è costante, allora

$$\xi(t) \le K e^{Ct} \quad \forall t \in [0, T].$$

Dimostrazione. (Facoltativo) Siano $\Xi(t) = \int_0^t \xi(s)\, \mathrm{d}s$ e $h(t) = \Xi(t) e^{-Ct}$ per $t \ge 0$. Allora derivando h ed usando la disuguaglianza che si ha come ipotesi si ottiene per $t \ge 0$

$$h'(t) = \xi(t)e^{-Ct} - C\Xi(t)e^{-Ct} \le (\eta(t) + C\Xi(t))e^{-Ct} - C\Xi(t)e^{-Ct} = \eta(t)e^{-Ct}$$

che integrando diventa

$$h(t) = \Xi(t)e^{-Ct} \le \int_0^t e^{-Cs}\eta(s)\, \mathrm{d}s$$

ossia

$$\Xi(t) \le \int_0^t e^{C(t-s)}\eta(s)\, \mathrm{d}s$$

che è quanto voluto. □

Teorema 5.2.12 (Esistenza e unicità per EDS con condizione iniziale deterministica): *Fissiamo $x \in \mathbb{R}^d$ e $\mathrm{e}_x(f, g)$ e supponiamo che valgano le ipotesi (IL). Allora per ogni spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}, \mathbf{P})$ con le ipotesi abituali e per ogni B $(\mathcal{F}_t)$-MB^n std, esiste processo X^x t.c. (X^x, B) è soluzione forte di $\mathrm{e}_x(f, g)$. Inoltre tale processo è l'unica soluzione di $\mathrm{e}_x(f, g)$ a meno di indistinguibilità.*

Dimostrazione. Vediamo prima l'esistenza. Fissiamo uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}, \mathbf{P})$ ed un B $(\mathcal{F}_t)$-MB^n std. Inoltre definiamo lo spazio $\mathcal{D}$ dei processi stocastici U t.c. per ogni $t \ge 0$

$$\Phi_t(U) = \mathbb{E}\left[\sup_{s \in [0,t]} \|U_s\|^2\right] < +\infty.$$

Vogliamo costruire un processo X t.c. (X, B) sia una soluzione di $\mathrm{e}_x(f, g)$, per farlo costruiamo una successione di approssimanti $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$X_t^0 = x, \qquad X_t^{n+1} = S(X^n)_t \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

in cui per ogni $U \in \mathcal{D}$ ed ogni $t \ge 0$

$$S(U)_t = x + \int_0^t g(s, U)\, \mathrm{d}s + \int_0^t f(s, U)\, \mathrm{d}B_s$$

in cui la definizione è ben posta in quanto

$$\|f(t, U)\|^2 = \left\|(f(t, U) - f(t\xi^0)) + f(t, \xi^0)\right\|^2 \le 2(\left\|f(t, \xi^0)\right\|^2 + K^2 \sup_{s \in [0,t]} \|U_s\|^2)$$

e quindi grazie alle Ipotesi (IL) si ha

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \|f(s,U)\|^2 \,\mathrm{d}s\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|f(s,\xi^0)\right\|^2 \,\mathrm{d}s\right] + 2K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \sup_{r\in[0,s]} \|U_r\|^2 \,\mathrm{d}s\right] < +\infty$$

ed analogamente per g. Prendiamo quindi $U, V \in \mathcal{D}$, vale

$$S(U)_s - S(V)_s = \int_0^s (g(r,U) - g(r,V))\,\mathrm{d}r + \int_0^s (f(r,U) - f(r,V))\,\mathrm{d}B_r$$

per ogni $s \geq 0$, dunque usando il fatto $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, per $s \in [0,t]$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\|S(U)_s - S(V)_s\|^2 &\leq 2\left\|\int_0^s (g(r,U) - g(r,V))\,\mathrm{d}r\right\|^2 + 2\left\|\int_0^s (f(r,U) - f(r,V))\,\mathrm{d}B_r\right\|^2 \\
&\leq 2\left\|\int_0^s (g(r,U) - g(r,V))\,\mathrm{d}r\right\|^2 + 2\sup_{s\in[0,t]}\left\|\int_0^s (f(r,U) - f(r,V))\,\mathrm{d}B_r\right\|^2 \\
&= 2s^2\left\|\frac{1}{s}\int_0^s (g(r,U) - g(r,V))\,\mathrm{d}r\right\|^2 + 2\sup_{s\in[0,t]}\left\|\int_0^s (f(r,U) - f(r,V))\,\mathrm{d}B_r\right\|^2 \\
\text{(Osservazione 5.2.10)}\quad &\leq 2s\int_0^s \|g(r,U) - g(r,V)\|^2 \,\mathrm{d}r + 2\sup_{s\in[0,t]}\left\|\int_0^s (f(r,U) - f(r,V))\,\mathrm{d}B_r\right\|^2 \\
\text{(Ipotesi (IL))}\quad &\leq 2tK^2\int_0^t \left(\sup_{h\in[0,r]}\|U_h - V_h\|^2\right)\mathrm{d}r + 2\sup_{s\in[0,t]}\left\|\int_0^s (f(r,U) - f(r,V))\,\mathrm{d}B_r\right\|^2
\end{aligned}$$

di conseguenza per $0 \leq t \leq T < +\infty$ vale

$$\begin{aligned}
\Phi_t(S(U) - S(V)) &= \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\|S(U)_s - S(V)_s\|^2\right] \\
&\leq 2tK^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\sup_{h\in[0,r]}\|U_h - V_h\|^2\right)\mathrm{d}r\right] + 2\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left\|\int_0^s (f(r,U) - f(r,V))\,\mathrm{d}B_r\right\|^2\right] \\
&= 2tK^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{h\in[0,r]}\|U_h - V_h\|^2\right]\mathrm{d}r + 2\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left\|\int_0^s (f(r,U) - f(r,V))\,\mathrm{d}B_r\right\|^2\right] \\
&= 2tK^2\int_0^t \Phi_r(U - V)\,\mathrm{d}r + 2\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left\|\int_0^s (f(r,U) - f(r,V))\,\mathrm{d}B_r\right\|^2\right] \\
\text{(Dis. max. Doob)}\quad &\leq 2tK^2\int_0^t \Phi_r(U - V)\,\mathrm{d}r + 8\mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t (f(r,U) - f(r,V)\,\mathrm{d}B_r\right\|^2\right] \\
\text{(Osservazione 5.2.9)}\quad &\leq 2tK^2\int_0^t \Phi_r(U - V)\,\mathrm{d}r + 8\mathbb{E}\left[\int_0^t \|(f(r,U) - f(r,V)\|^2 \,\mathrm{d}r\right] \\
&= 2tK^2\int_0^t \Phi_r(U - V)\,\mathrm{d}r + 8\int_0^t \mathbb{E}\left[\|(f(r,U) - f(r,V)\|^2\right]\mathrm{d}r \\
\text{(Ipotesi (IL))}\quad &\leq 2tK^2\int_0^t \Phi_r(U - V)\,\mathrm{d}r + 8K^2\int_0^t \Phi_r(U,V)\,\mathrm{d}r \\
&\leq 2K^2(4+T)\int_0^t \Phi_r(U - V)\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Prendendo $V = \xi^0$ questo dimostra in particolare che $S(U) \in \mathcal{D}$ per ogni $U \in \mathcal{D}$. Deduciamo quindi che, fissato $T \geq 0$, per ogni $t \in [0,T]$ vale chiamando $C_T = 2K^2(4+T)$

$$\begin{aligned}
\Phi_t(X^{n+1} - X^n) &\leq C_T \int_0^t \Phi_{t_1}(X^n - X^{n-1})\,\mathrm{d}t_1 \\
&\leq C_T^2 \int_0^t \int_0^{t_1} \Phi_{t_2}(X^{n-1} - X^{n-2})\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 \\
&\leq C_T^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \Phi_{t_n}(X^1 - \xi^x)\,\mathrm{d}t_n \dots \mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1
\end{aligned}$$

in cui $\xi^x \in \mathbb{W}^d$ è la funzione costante x. Inoltre sempre per ogni $t \in [0,T]$ si ha

$$\begin{aligned}
\Phi_t(S(\xi^x) - \xi^x) &= \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left\| \int_0^s g(r,\xi^x)\,\mathrm{d}r + \int_0^s f(r,\xi^x)\,\mathrm{d}B_r \right\|^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left(\left\| \int_0^s g(r,\xi^x)\,\mathrm{d}r \right\|^2 + \left\| \int_0^s f(r,\xi^x)\,\mathrm{d}B_r \right\|^2 \right)\right] \\
\text{(Jensen e Doob)} \quad &\leq 2t\mathbb{E}\left[\int_0^t \|g(r,\xi^x)\|^2\,\mathrm{d}r\right] + 8\mathbb{E}\left[\left\| \int_0^t f(r,\xi^x)\,\mathrm{d}r \right\|^2\right] \\
\text{(Osservazione 5.2.9)} \quad &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^T \|g(r,\xi^x)\|^2\,\mathrm{d}r\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^T \|f(r,\xi^x)\|^2\,\mathrm{d}r\right] \\
\text{(Limitatezza locale nelle Ipotesi (IL))} \quad &\leq C_T'
\end{aligned}$$

per un qualche $C_T' > 0$, quindi

$$\Phi_t(X^{n+1} - X^n) \leq C_T^n C_T' \frac{t^n}{n!} \quad \forall t \in [0,T]$$

da cui segue

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi_t(X^{n+1}, X^n)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(C_T' \frac{(TC_T)^n}{n!} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \quad \forall t \in [0,T]$$

in particolare

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \left\|X_s^{n+1} - X_s^n\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty \quad \forall T \geq 0.$$

Di conseguenza vale

$$\begin{aligned}
+\infty &> \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sup_{s\in[0,T]} \left\|X_s^{n+1} - X_s^n\right\|^2 \right\|_{L^2(\mathbf{P})} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^N \left\| \sup_{s\in[0,T]} \left\|X_s^{n+1} - X_s^n\right\|^2 \right\|_{L^2(\mathbf{P})} \\
&\geq \lim_{N\to+\infty} \left\| \sum_{n=0}^N \sup_{s\in[0,T]} \left\|X_s^{n+1} - X_s^n\right\|^2 \right\|_{L^2(\mathbf{P})} \\
\text{(Beppo Levi)} \quad &= \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{s\in[0,T]} \left\|X_s^{n+1} - X_s^n\right\|^2 \right\|_{L^2(\mathbf{P})}
\end{aligned}$$

e quindi $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{s\in[0,T]} \left\|X_s^{n+1} - X_s^n\right\|^2$ converge $\mathbf{P}$-q.c. e come conseguenza $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sui limitati $\mathbf{P}$-q.c. ad un processo continuo $(\mathcal{F}_t^{B,\mathbf{P}})$-adattato (in quanto è limite $\mathbf{P}$-q.c. di una successione di processi $(\mathcal{F}_t^{B,\mathbf{P}})$-adattati e $(\mathcal{F}_t^{B,\mathbf{P}})$ è $\mathbf{P}$-completa) e che soddisfa $\mathrm{e}_x(f,g)$, infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$X_t^{n+1} = x + \int_0^t g(s, X^n)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(s, X^n)\,\mathrm{d}B_s$$

e $X_t^{n+1} \longrightarrow X_t$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$ e per quanto riguarda gli integrali possiamo passare al limite sotto al segno d'integrale per i Teoremi di convergenza dominata stocastico e non. Si ha quindi l'esistenza cercata e la soluzione così costruita è forte.

Vediamo adesso l'unicità. Supponiamo che X ed Y risolvano entrambi $\mathrm{e}_x(f,g)$ con moto browniano B e definiti sullo stesso spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$. Sia per ogni $k \in \mathbb{N}_+$

$$T_k = \inf\{t \geq 0 \mid \|X\| \wedge \|Y\| > k\}$$

allora $X^{T_k}, Y^{T_k} \in \mathcal{D}$ per ogni $k \in \mathbb{N}_+$. Fissiamo quindi $n, k \in \mathbb{N}_+$, per ogni $t \in [0,n]$ si deduce

$$\Phi_t(X^{T_k} - Y^{T_k}) = \Phi_t(S(X^{T_k}) - S(Y^{T_k})) \leq C_n \int_0^t \Phi_r(X^{T_k} - Y^{T_k})\,\mathrm{d}r$$

e dal Lemma 5.2.11 di Gronwall segue $\Phi_t(X^{T_k} - Y^{T_k}) = 0$ per ogni $t \in [0,n]$, ossia $X_{t\wedge T_k} = Y_{t\wedge T_k}$ per ogni $t \in [0,n]$ $\mathbf{P}$-q.c. ed essendo $n, k \in \mathbb{N}_+$ arbitrari si ottiene $X_t = Y_t$ per ogni $t \geq 0$ $\mathbf{P}$-q.c., che dimostra l'unicità. □

Sappiamo quindi che sotto le Ipotesi (IL) per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, dato uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ ed un $(\mathcal{F}_t)$-MB^n, esiste unico un'unica semimartingala vettoriale continua X^x t.c. (X^x, B) è una soluzione di $\mathrm{e}_x(f,g)$. Adesso vediamo che sotto aggiuntive ipotesi è possibile scegliere X^x all'interno della sua classe di indistinguibilità al fine di ottenere la continuità nella condizione iniziale $x \in \mathbb{R}^d$.

Definizione 5.2.13: Data $\mathrm{e}(f,g)$ diciamo che f, g soddisfano le *ipotesi (ILb)* se

$$|f(t,\xi) - f(t,\eta)| + |g(t,\xi) - g(t,\eta)| \leq K \sup_{s\in[0,t]} |\xi(s) - \eta(s)| \ \ \forall \xi, \eta \in \mathbb{W}^d \ \ \forall t \geq 0$$

ed f, g sono uniformemente limitate.

Osservazione 5.2.14: Se valgono le ipotesi (ILb) allora valgono anche quelle (IL).

Osservazione 5.2.15: Fissiamo uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ con le ipotesi abituali. Siano B è un $(\mathcal{F}_t)$-MB^n std ed $H : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times n}$ è continua $(\mathcal{F}_t)$-adattata e t.c. $H_{i,j} \in L^2_{loc}(B^j)$ per ogni $i \in 1,\dots,d$ ed ogni $j = 1,\dots,n$, allora preso $T \geq 0$, per ogni $p \geq 2$ ed ogni $t \in [0,T]$ esiste una costante $C'(p) > 0$ t.c.

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left\|\int_0^s H(r)\,\mathrm{d}B_r\right\|^p\right] \leq C'(p) T^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{E}\left[\int_0^t \|H(r)\|^p \,\mathrm{d}r\right].$$

Segue dalla Disuguaglianza BDG, infatti usando la Disuguaglianza di Jensen (alla misura contapunti), essendo $p \geq 2$, si ottiene intanto

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^s H(r)\,\mathrm{d}B_r \right\|^p &= \sup_{s\le t} \left[\sum_{i=1}^d \left| \sum_{j=1}^n \int_0^s H_{i,j}(r)\,\mathrm{d}B_r^j \right|^2 \right]^{\frac{p}{2}} \\
&= d^{\frac{p}{2}} \left[\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left| \sum_{j=1}^n \int_0^s H_{i,j}(r)\,\mathrm{d}B_r^j \right|^2 \right]^{\frac{p}{2}} \\
\text{(Jensen)} &\leq d^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=1}^d \left| \sum_{j=1}^n \int_0^s H_{i,j}(r)\,\mathrm{d}B_r^j \right|^p \\
&= d^{\frac{p}{2}-1} n^p \sum_{i=1}^d \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^s H_{i,j}(r)\,\mathrm{d}B_r^j \right|^p \\
\text{(Jensen)} &\leq d^{\frac{p}{2}-1} n^{p-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n \left| \int_0^s H_{i,j}(r)\,\mathrm{d}B_r^j \right|^p
\end{aligned}$$

quindi prendendo il $\sup_{s\le t}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\sup_{s\le t} \left\| \int_0^s H(r)\,\mathrm{d}B_r \right\|^p &\leq d^{\frac{p}{2}-1} n^{p-1} \sup_{s\le t} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n \left| \int_0^s H_{i,j}(r)\,\mathrm{d}B_r^j \right|^p \\
&= d^{\frac{p}{2}-1} n^{p-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n \sup_{s\le t} \left| \int_0^s H_{i,j}(r)\,\mathrm{d}B_r^j \right|^p
\end{aligned}$$

che prendendo il valore atteso ed usando la Disuguaglianza BDG ci dà

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t} \left\| \int_0^s H(r)\,\mathrm{d}B_r \right\|^p \right] &\leq d^{\frac{p}{2}-1} n^{p-1} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[\sup_{s\le t} \left| \int_0^s H_{i,j}(r)\,\mathrm{d}B_r^j \right|^p \right] \\
\text{(BDG)} &\leq d^{\frac{p}{2}-1} n^{p-1} C_p \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_{i,j}(r)^2\,\mathrm{d}r \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\
&\leq d^{\frac{p}{2}-1} n^{p-1} C_p t^{\frac{p}{2}} dn \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|H(r)\|^2\,\mathrm{d}r \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\
&= d^{\frac{p}{2}} n^p C_p t^{\frac{p}{2}} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{t} \int_0^s \|H(r)\|^2\,\mathrm{d}r \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\
\text{(Jensen)} &\leq d^{\frac{p}{2}} n^p C_p t^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{E}\left[\int_0^t \|H(r)\|^p\,\mathrm{d}r \right] \\
&\leq d^{\frac{p}{2}} n^p C_p T^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{E}\left[\int_0^t \|H(r)\|^p\,\mathrm{d}r \right]
\end{aligned}$$

quindi quanto voluto vale con $C'(p) = d^{\frac{p}{2}} n^p C_p$.

Teorema 5.2.16 (Continuità rispetto al dato iniziale deterministico per EDS): *Fissiamo* e(f, g), *uno spazio filtrato* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge0})$ *con le ipotesi abituali ed un* $(\mathcal{F}_t)$*-MB*^{n} *B. Supponiamo inoltre che valgano le ipotesi (ILb). Allora esiste un processo stocastico* $(X_t^x)_{\substack{t\ge0\\ x\in\mathbb{R}^d}}$ **P**-*q.c.*

continuo nella coppia (t,x) *e t.c.* (X^x, B) *è soluzione di* $\mathrm{e}_x(f,g)$, *cioè*

$$X_t^x = x + \int_0^t g(s, X^x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(s, X^x)\,\mathrm{d}B_s \quad \forall t \geq 0,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. *Tale processo è detto* flusso dell'EDS $e(f,g)$.

Dimostrazione. Nel seguito preso un $x \in \mathbb{R}^d$ con X^x intenderemo il processo t.c. (X^x, B) è soluzione di $\mathrm{e}_x(f,g)$. Prendiamo $x, y \in \mathbb{R}^d$, per semplicità di notazione chiameremo $X = X^x$ e $Y = X^y$. Siano $T \geq 0$, $0 \leq t \leq T$ e $p \geq 2$, allora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \|X_s - Y_s\|^p\right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left\|(x-y) + \int_0^s (g(r,X) - g(r,Y))\,\mathrm{d}r + \int_0^s (f(r,X) - f(r,Y))\,\mathrm{d}B_r\right\|^p\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left(\|x-y\| + \left\|\int_0^s (g(r,X) - g(r,Y))\,\mathrm{d}r\right\| + \left\|\int_0^s (f(r,X) - f(r,Y))\,\mathrm{d}B_r\right\|\right)^p\right]\end{aligned}$$

ed usando la nota disuguaglianza $(\|a\| + \|b\| + \|c\|)^p \leq C(p)(\|a\|^p + \|b\|^p + \|c\|^p)$ con $C(p) > 0$ costante, si ottiene

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \|X_s - Y_s\|^p\right] \leq \\ &\leq C(p)\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left(\|x-y\|^p + \left\|\int_0^s (g(r,X) - g(r,Y))\,\mathrm{d}r\right\|^p + \left\|\int_0^s (f(r,X) - f(r,Y))\,\mathrm{d}B_r\right\|^p\right)\right] \\ &= C(p)\left(\|x-y\|^p + \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left\|\int_0^s (g(r,X) - g(r,Y))\,\mathrm{d}r\right\|^p\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left\|\int_0^s (f(r,X) - f(r,Y))\,\mathrm{d}B_r\right\|^p\right]\right).\end{aligned}$$

Maggioriamo i due valori attesi separatamente. Iniziamo col primo, osserviamo che usando la Disuguaglianza di Jensen si ottiene

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^s (g(r,X) - g(r,Y))\,\mathrm{d}r\right\|^p &= s^p \left\|\frac{1}{s}\int_0^s (g(r,X) - g(r,Y))\,\mathrm{d}r\right\|^p \\ \text{(Osservazione 5.2.10)} \quad &\leq s^{p-1} \int_0^s \|(g(r,X) - g(r,Y)\|^p\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left\|\int_0^s (g(r,X) - g(r,Y))\,\mathrm{d}r\right\|^p\right] &\leq \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} s^{p-1} \int_0^s \|(g(r,X) - g(r,Y)\|^p\,\mathrm{d}r\right] \\ \text{(Ipotesi (ILb))} \quad &\leq t^{p-1}\mathbb{E}\left[\int_0^t K^p \sup_{l\in[0,r]} \|X_l - Y_l\|^p\,\mathrm{d}r\right] \\ &\leq T^{p-1}K^p \int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{l\in[0,r]} \|X_l - Y_l\|^p\right]\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo valore atteso bisogna stare più attenti perché entra in gioco un integrale stocastico. Usando quanto trovato nell'Osservazione 5.2.15, si ottiene l'esistenza di una costante $C'(p) > 0$ t.c.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left\|\int_0^s (f(r,X) - f(r,Y))\,\mathrm{d}B_r\right\|^p\right] &\leq C'(p)T^{\frac{p}{2}-1}\mathbb{E}\left[\int_0^t \|f(r,X) - f(r,Y)\|^p\,\mathrm{d}s\right] \\ \text{(Ipotesi (ILb))} \quad &\leq K^p C'(p)T^{\frac{p}{2}-1} \int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{l\in[0,r]} \|X_l - Y_l\|^p\right]\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Definiamo quindi per $t \geq 0$ $h_p(t) = \mathbb{E}\left[\sup_{r\in[0,t]} \|X_r - Y_r\|^p\right]$ che è finita grazie alla limitatezza uniforme di f e g assunta nelle ipotesi (ILb). Dai ai conti fatti fino ad ora possiamo dedurre

$$h_p(t) \leq C(p)\|x-y\|^p + C(p)T^{p-1}K^p \int_0^t h_p(r)\,\mathrm{d}r + C'(p)T^{\frac{p}{2}-1}K^p \int_0^t h_p(r)\,\mathrm{d}r$$

ossia chiamando $C = C(p)$ e $\tilde{C} = C(p)T^{p-1}K^p + C'(p)T^{\frac{p}{2}-1}K^p$

$$h_p(t) \leq C\|x-y\|^p + \tilde{C}\int_0^t h_p(r)\,\mathrm{d}r$$

per ogni $t \in [0,T]$. Quindi per il Lemma 5.2.11 di Gronwall segue

$$h_p(t) \leq C\|x-y\|^p e^{\tilde{C}t} \quad \forall t \in [0,T].$$

Quindi esplicitando tutte le notazioni, per $t = T$ si ottiene

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|X_t^x - X_t^y\|^p\right] \leq Ce^{\tilde{C}T}\|x-y\|^p$$

e se $p > d$, grazie al Teorema di continuità di Kolmogorov applicato al processo $(X^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$, visto come processo stocastico a valori in $C^0([0,T];\mathbb{R}^d)$ (che è uno spazio di Banach per ogni $T \geq 0$) si ottiene una modificazione continua nella coppia $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]$, chiamiamo tale processo $(X_t^{T,x})_{\substack{t\geq 0\\ x\in\mathbb{R}^d}}$. Prendendo $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ successione di numeri t.c. $T_n \to +\infty$, abbiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ una modificazione $(X_t^{T_n,x})_{\substack{t\geq 0\\ x\in\mathbb{R}^d}}$ continua in x e t per $t \in [0,T_n]$. Inoltre ognuno di questi processi è t.c. $(X^{T_n,x}, B)$ è soluzione di $\mathrm{e}_x(f,g)$, quindi grazie all'unicità provata nel Teorema precedente possiamo incollarli con successo preservando la continuità in entrambe le variabili. Inoltre la modificazione ottenuta, continua nella coppia $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\infty)$, chiamiamola $(\tilde{X}_t^x)_{\substack{t\geq 0\\ x\in\mathbb{R}^d}}$, è t.c. $(\tilde{X}, B)$ è soluzione forte di $\mathrm{e}_x(f,g)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, infatti fissato $x \in \mathbb{R}^d$ i due processi X^x e $\widetilde{X}^x$ sono continui e uno modificazione dell'altro, dunque sono indistinguibili e di sicuro anche $\widetilde{X}^x$ risolve con B l'EDS $\mathrm{e}_x(f,g)$ ed è adattato alla filtrazione $\mathbf{P}$-completa $(\mathcal{F}_t^{B,\mathbf{P}})_{t\geq 0}$. □

Osservazione 5.2.17: Nel Teorema precedente l'ipotesi di uniforme limitatezza di f e g lo abbiamo usato solamente per assicurarci la finitezza di $h_p(t)$ per ogni $t \geq 0$. Di fatti, in determinati casi, è possibile rilassare tale ipotesi a patto di mantenere la finitezza di $h_p(t)$ per un $p > d$ (che è tutto quello che serve per poter ricopiare la dimostrazione precedente).

Osservazione 5.2.18: Mettiamoci nel contesto del Teorema precedente. Sappiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ la soluzione (X^x, B) è soluzione forte, dunque usando il Criterio di misurabilità di Doob troviamo per ogni $t \geq 0$ una funzione

$$F_t : \mathbb{R}^d \times C([0,t];\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$$

misurabile nella seconda variabile e t.c. $F_t(x,(B_s)_{s\in[0,t]}) = X_t^x$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$ ed ogni $x \in \mathbb{R}^d$. In particolare F_t è continua nella prima variabile e quindi anche misurabile. Di conseguenza presa Z v.a. a valori in $\mathbb{R}^d$ $\mathcal{F}_0$-misurabile, la famiglia $(F_t(Z,(B_s)_{s\in[0,t]}))_{t\geq 0}$ è un processo stocastico ed insieme a B costituisce una soluzione di $\mathrm{e}(f,g)$ con dato iniziale Z.

5.3 Proprietà di Markov nel caso omogeneo

Consideriamo una EDS e(f, g) con f, g che godono delle ipotesi (ILb). Fissiamo $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità filtrato con le ipotesi abituali e fissiamo B un $(\mathcal{F}_t)$-MB^n std, consideriamo quindi il flusso $(X_t^x)_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ t\geq 0}}$ (che possiamo prendere continuo ovunque a meno di modificarlo su un insieme $\mathbf{P}$-nullo). Definiamo quindi per ogni $h \in C_0(\mathbb{R}^d)$, ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ed ogni $t \geq 0$

$$T_t h(x) = \mathbb{E}\left[h(X_t^x)\right]. \tag{5.3}$$

Proposizione 5.3.1: *Nel contesto sopra descritto vale che per ogni $t > 0$, l'eq.* (5.3)*, definisce una mappa*

$$T_t : C_0(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$$

lineare e continua.

Dimostrazione. Fissiamo $t \geq 0$. Sia $h \in C_0(\mathbb{R}^d)$, vediamo che $T_t h \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Prendiamo una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ e $x \in \mathbb{R}^d$ t.c. $x_n \to x$. Allora vale

$$T_t h(x_n) = \mathbb{E}\left[h(x_t^{x_n})\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[h(X_t^x)\right]$$

in quanto il flusso è continuo e h è continua, quindi $h(X_t^{x_n}) \to h(X_t^x)$ ed inoltre essendo h limitata, per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si ottiene la convergenza dei valori attesi. Quindi $T_t h \in C(\mathbb{R}^d)$. Vediamo ora che invece $T_t h \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Vale

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[h(X_t^x)\right]\right| &\leq \mathbb{E}\left[|h(X_t^x)|\mathbf{1}_{\{\|X_t^x - x\|\leq R\}}\right] + \mathbb{E}\left[|h(X_t^x)|\mathbf{1}_{\{\|X_t^x - x\|> R\}}\right] \\
&\leq \sup_{z\in\overline{B}(x,R)} |h(z)| + \|h\|_\infty \mathbf{P}\left(\left\|X_t^x - x\right\| > R\right) \\
\text{(Markov)} &\leq \sup_{z\in\overline{B}(x,R)} |h(z)| + \frac{\|h\|_\infty}{R^2}\mathbb{E}\left[\left\|X_t^x - x\right\|^2\right] \\
&= \sup_{z\in\overline{B}(x,R)} |h(z)| + \frac{\|h\|_\infty}{R^2}\mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t g(s, X^x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(s, X^x)\,\mathrm{d}B_s\right\|^2\right] \\
&\leq \sup_{z\in\overline{B}(x,R)} |h(z)| + \frac{2\,\|h\|_\infty}{R^2}\mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t g(s, X^x)\,\mathrm{d}s\right\|^2 + \left\|\int_0^t f(s, X^x)\,\mathrm{d}B_s\right\|^2\right] \\
&\leq \sup_{z\in\overline{B}(x,R)} |h(z)| + \frac{2\,\|h\|_\infty}{R^2}K_t
\end{aligned}$$

da cui per $\|x\| \to +\infty$ otteniamo

$$\left|\mathbb{E}\left[h(X_t^x)\right]\right| \leq o(1) + \frac{2\|h\|_\infty}{R^2}K_t \quad \forall R > 0$$

quindi si ottiene quanto voluto mandando $R \to +\infty$, ossia

$$|T_t h(x)| = \left|\mathbb{E}\left[h(X_t^x)\right]\right| \longrightarrow 0 \quad \text{per } \|x\| \to +\infty.$$

Quindi T_t come da tesi è effettivamente a valori in $C_0(\mathbb{R}^d)$ ed è palesemente lineare. Vediamo la continuità. Prendiamo $h \in C_0(\mathbb{R}^d)$, allora vale

$$|T_t h(x)| \leq \mathbb{E}\left[|h(X_t^x)|\right] \leq \|h\|_\infty$$

da cui segue $\|T_t h\|_\infty \leq \|h\|_\infty$ e quindi la continuità di T_t per linearità. □

Restringiamo adesso la classe di EDS considerate. Consideriamo una EDS del tipo $\mathrm{e}(\sigma, b)$ che soddisfa le Ipotesi (ILb). Fissiamo $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità filtrato con le ipotesi abituali e fissiamo B un $(\mathcal{F}_t)$-MB^n std, consideriamo quindi il flusso $(X_t^x)_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ t\geq 0}}$ (che possiamo prendere continuo ovunque a meno di modificarlo su un insieme $\mathbf{P}$-nullo). Definiamo per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ed ogni $t \geq 0$ il nucleo markoviano

$$P_t(x, A) = \mathbf{P}(X_t^x \in A).$$

Lemma 5.3.2: *Se H è un processo continuo e $(\mathcal{F}_t)$-adattato a valori in $\mathbb{R}^{d\times n}$, vale*

$$\int_s^{t+s} H_r \,\mathrm{d}B_r = \int_0^t H_{s+r}\,\mathrm{d}(B_{\cdot+s-B_s})_r$$

per ogni $s, t \geq 0$.

Dimostrazione. Vale in effetti per processi elementari (facile verifica), poi si passa a processi più generali grazie al Corollario 3.2.45. □

Proposizione 5.3.3: *Nel contesto descritto sopra la famiglia $(P_t)_{t\geq 0}$ è una funzione di transizione di Feller su $\mathbb{R}^d$ e $P_t h = T_t h$ per ogni $t \geq 0$ ed ogni $h \in C_0(\mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo la relazione di Chapman-Kolmogorov. Fissiamo $x \in \mathbb{R}^d$, dico che $(X_{t+s}^x)_{t\geq 0}$ insieme al moto browniano $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ forma una soluzione di $\mathrm{e}(\sigma, b)$ con dato iniziale X_s^x. Infatti vale

$$\begin{aligned} X_{t+s}^x &= x + \int_0^{t+s} b(X_r^x)\,\mathrm{d}r + \int_0^{t+s} \sigma(X_r^x)\,\mathrm{d}B_r \\ X_s^x &= x + \int_0^s b(X_r^x)\,\mathrm{d}r + \int_0^s \sigma(X_r^x)\,\mathrm{d}B_r \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} X_{t+s}^x &= X_s^x + \int_s^{t+s} b(X_r^x)\,\mathrm{d}r + \int_s^{t+s} \sigma(X_r^x)\,\mathrm{d}B_r \\ \text{(Lemma 5.3.2)} \quad &= X_s^x + \int_0^t b(X_{s+r}^x)\,\mathrm{d}r + \int_0^t \sigma(X_{s+r}^x)\,\mathrm{d}(B_{\cdot+s-B_s})_r \end{aligned}$$

inoltre (per quanto detto nell'Osservazione 5.2.18) possiamo trovare una funzione F_t misurabile t.c. $F_t(Z, (B_s)_{s\in[0,t]})$ sia soluzione con B, al tempo t, di $\mathrm{e}(\sigma, b)$ con dato iniziale Z v.a.. Dunque la legge di X_{t+s}^x è la stessa di $F_t(Z, (B_s)_{s\in[0,t]})$ con Z v.a. scelta in modo che sia indipendente da B e con legge uguale a quella di X_s^x, come dato iniziale (per l'Osservazione 5.2.6). Di conseguenza per $h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_+$ vale

$$P_{t+s}h(x) = \mathbb{E}\left[h(X_{t+s}^x)\right] = \mathbb{E}\left[h(F_t(Z, (B_s)_{s\in[0,t]}))\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[h(F_t(Z, (B_s)_{s\in[0,t]}))\,|\,Z\right]\right]$$

ma per il Freezing Lemma si ha

$$\mathbb{E}\left[h(F_t(Z, (B_s)_{s\in[0,t]}))\,|\,Z\right] = \mathbb{E}\left[F_t(z, (B_s)_{s\in[0,t]})\right]_{|z=Z} = \mathbb{E}\left[h(X_t^z)\right]_{z=Z} = P_t h(Z)$$

(in cui ancora si è usata l'unicità in legge per dire che $F_t(z, (B_s)_{s\in[0,t]}) \overset{\mathcal{D}}{=} X_t^z$) dunque

$$P_{t+s}h(x) = \mathbb{E}\left[P_t h(Z)\right] = \mathbb{E}\left[P_t h(X_s^x)\right] = P_s\left(P_t h\right)(x).$$

Dunque $(P_t)_{t\geq 0}$ è una funzione di transizione, vediamo che è di Feller usando la Proposizione 4.2.8. Ovviamente $P_t h = T_t h$ per ogni $h \in C_0(\mathbb{R}^d)$ e grazie alla Proposizione 5.3.1 si ha che $P_t h \in C_0(\mathbb{R}^d)$ per ogni $h \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Rimane da vedere solamente la continuità (a destra) della mappa $t \mapsto P_t h(x)$ con $h \in C_0(\mathbb{R}^d)$ e $x \in \mathbb{R}^d$. Se $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0+\infty)$, $t \geq 0$ e $t_n \longrightarrow t$ vale

$$P_{t_n} h(x) = \mathbb{E}\left[h(X^x_{t_n})\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[h(X^x_t)\right] = P_t h(x)$$

in quanto il flusso è continuo e h è continua, quindi $h(X^x_{t_n}) \to h(X^x_t)$, inoltre h è limitata, di conseguenza usando il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si ottiene la convergenza dei valori attesi. □

Corollario 5.3.4: *Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ vale che $(X^x_t)_{t\geq 0}$ è un processo di Feller con semigruppo di Feller $(P_t)_{t\geq 0}$ definito da $P_t h(x) = T_t h(x) = \mathbb{E}\left[h(X^x_t)\right]$ per ogni $h \in C_0(\mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Grazie alle Proposizioni precedenti abbiamo che $(P_t)_{t\geq 0}$ è effettivamente un semigruppo di Feller. Vediamo ora la proprietà di Markov. Osserviamo che presi $t, s \geq 0$ ed $x \in \mathbb{R}^d$, vale

$$\begin{aligned}
X^x_{t+s} &= x + \int_0^{t+s} b(X^x_r)\,\mathrm{d}r + \int_0^{t+s} \sigma(X^x_r)\,\mathrm{d}B_s \\
&= X^x_t + \int_t^{t+s} b(X^x_r)\,\mathrm{d}r + \int_t^{t+s} \sigma(X^x_r)\,\mathrm{d}B_s \\
\text{(Lemma 5.3.2)}\quad &= X^x_t + \int_0^{s} b(X^x_{t+r})\,\mathrm{d}r + \int_0^{s} \sigma(X^x_{t+r})\,\mathrm{d}(B_{\cdot+t} - B_t)_r
\end{aligned}$$

inoltre (per quanto detto nell'Osservazione 5.2.18) possiamo trovare una funzione F_s misurabile t.c. $F_s(Z, (B_{r+t} - B_t)_{r\in[0,s]})$ sia soluzione con $B_{\cdot+t} - B_t$, al tempo s, di e(σ, b) con dato iniziale Z v.a., quindi per l'unicità in legge detta nell'Osservazione 5.2.6 si ha

$$X^x_{t+s} \overset{\mathcal{D}}{=} F_s(X^x_t, (B_{r+t} - B_t)_{r\in[0,s]}).$$

A questo punto se $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ si ha per indipendenza di $(B_{r+t} - B_t)_{r\in[0,s]}$ da $\mathcal{F}_t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(X^x_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[f(F_s(X^x_t, (B_{r+t} - B_t)_{r\in[0,s]})) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f(F_s(y, (B_{r+t} - B_t)_{r\in[0,s]}))\right]_{|y=X^x_t} \\
&= \mathbb{E}\left[f(X^y_s)\right]_{|y=X^x_t} = \mathbb{E}\left[f(X^{X^x_t}_s)\right] = P_s f(X^x_t)
\end{aligned}$$

in cui abbiamo usato ancora una volta l'unicità in legge per dire che $F_s(y, (B_{r+t} - B_t)_{r\in[0,s]}) \overset{\mathcal{D}}{=} X^y_s$ □

Nel seguito se $A, B \in \mathbb{R}^{k\times m}$ sono due matrici della stessa taglia sarà

$$A : B = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} B_{i,j}.$$

Invece se $x, y \in \mathbb{R}^k$ la quantità xy sarà l'usuale prodotto scalare euclideo tra i due vettori in questione.

Proposizione 5.3.5: *Se $\mathcal{D}_A$ è il dominio del generatore infinitesimale di $(P_t)_{t\geq 0}$ vale*

$$C_c^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}_A$$

e per ogni $h \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ il generatore infinitesimale è

$$Ah(x) = \nabla h(x) b(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(H_h(x)(\sigma\sigma^T)(x)\right).$$

Dimostrazione. Chiamiamo per comodità $X^x = X$. Sia $h \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, la formula di Itô ci dice che

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}h(X_t) &= \nabla h(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}H_h(X_t) : (dX_t \otimes dX_t) \\
&= \nabla h(X_t)\,(b(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{n}\partial_i\partial_j h(X_t)\,\mathrm{d}\langle X^i, X^j\rangle_t
\end{aligned}$$

ma per ogni $i = 1, \dots, d$ ed ogni $j = 1, \dots, n$ vale (essendo X_t una soluzione di $\mathrm{e}(\sigma, b)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left\langle X^i, X^j\right\rangle_t &= \mathrm{d}\left\langle\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{i,k}(X_t)B_t^k\right)\left(\sum_{l=1}^{n}\sigma_{j,l}(X_t)B_t^l\right)\right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sigma_{i,k}(X_t)\sigma_{j,k}(X_t)\,\mathrm{d}t \\
&= (\sigma\sigma^T)_{i,j}(X_t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}h(X_t) &= \nabla h(X_t)\,(b(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{n}\partial_i\partial_j h(X_t)(\sigma\sigma^T)_{i,j}(X_t)\,\mathrm{d}t \\
&= \nabla h(X_t)\,(b(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(H_h(X_t)(\sigma\sigma^T)(X_t)\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

che in forma estesa si può riscrivere in

$$\begin{aligned}
h(X_t^x) = &\left[h(x) + \int_0^t \nabla h(X_s^x)b(X_s^x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(H_h(X_s^x)(\sigma\sigma^T)(X_s^x)\right)\,\mathrm{d}s\right] \\
&+ \int_0^t \nabla h(X_s^x)(\sigma(X_s^x)\,\mathrm{d}B_t)
\end{aligned}$$

ed il termine $\int_0^t \nabla h(X_s^x)(\sigma(X_s^x)\,\mathrm{d}B_s)$ è proprio una martingala (per quanto noto sull'integrale rispetto al MB). Quindi usando la proprietà di martingala si ha che per ogni $t \geq 0$ vale

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \nabla h(X_s^x)(\sigma(X_s^x)\,\mathrm{d}B_s)\right] = 0.$$

Quindi abbiamo ottenuto per ogni $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[h(X_t^x)\right] &= h(x) + \int_0^t \mathbb{E}\left[\nabla h(X_s^x)b(X_s^x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(H_h(X_s^x)(\sigma\sigma^T)(X_s^x)\right)\right]\,\mathrm{d}s \\
&= h(x) + \int_0^t \mathbb{E}\left[Ah(X_s^x)\right]\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

ossia

$$P_t h(x) = h(x) + \int_0^t P_s A h(x)\,\mathrm{d}s \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

la tesi segue quindi dal Corollario 4.2.18. □

5.4 EDS lineari

In questa sezione assumiamo $d = n = 1$.

Definizione 5.4.1: Una EDS è detta *lineare* se può essere scritta nella forma

$$\mathrm{d}Y_t = \mathrm{d}H_t + Y_t\,\mathrm{d}X_t, \qquad Y_0 = H_0$$

o equivalentemente

$$Y_t = H_t + \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s$$

con H e X due semimartingale continue.

Teorema 5.4.2 (Soluzione per EDS lineari): *Data una EDS lineare*

$$\mathrm{d}Y_t = \mathrm{d}H_t + Y_t\,\mathrm{d}X_t, \qquad Y_0 = H_0$$

questa ha come soluzione il processo

$$Y_t = \mathcal{E}(X)_t \left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} (\,\mathrm{d}H_s - \,\mathrm{d}\langle H, X\rangle_s) \right)$$

in cui $\mathcal{E}(X)$ è l'esponenziale stocastico di X. In particolare se $\langle H, X\rangle = 0$ allora

$$Y_t = \mathcal{E}(X)_t \left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1}\,\mathrm{d}H_s \right).$$

Dimostrazione. Essendo $d\mathcal{E}(X)_s = \mathcal{E}(X)_s\,\mathrm{d}X_s$, $\mathcal{E}(X)_0 = 1$ ed usando l'associatività dell'integrale stocastico di Itô (Ass.), si ha, per Y_t come da tesi

$$\begin{aligned}
\int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s &= H_0 \int_0^t \mathcal{E}(X)_s\,\mathrm{d}X_s + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s \left(\int_0^s \mathcal{E}(X)_u^{-1} (\,\mathrm{d}H_u - \,\mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) \right) \mathrm{d}X_s \\
&= H_0 \int_0^t \,\mathrm{d}\mathcal{E}(X)_s + \int_0^t \left(\int_0^s \mathcal{E}(X)_s^{-1} (\,\mathrm{d}H_u - \,\mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) \right) \mathcal{E}(X)_s\,\mathrm{d}X_s \\
\text{(Ass.)}\quad &= H_0\mathcal{E}(X)_t - H_0 + \int_0^t \left(\int_0^s \mathcal{E}(X)_s^{-1} (\,\mathrm{d}H_u - \,\mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) \right) \mathrm{d}\mathcal{E}(X)_s.
\end{aligned}$$

Ma osserviamo che per ogni $t \geq 0$ vale

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{E}(X), \int_0^\cdot \mathcal{E}(X)_u^{-1} (\,\mathrm{d}H_u - \,\mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) \right\rangle_t &= \left\langle \int_0^\cdot \mathcal{E}(X)_u\,\mathrm{d}X_u, , \int_0^\cdot \mathcal{E}(X)_u^{-1} (\,\mathrm{d}H_u - \,\mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) \right\rangle_t \\
&= \left\langle \mathcal{E}(X) \cdot X, \mathcal{E}(X)^{-1} \cdot (H - \langle H, X\rangle) \right\rangle_t \\
&= \langle X, H - \langle H, X\rangle\rangle_t = \langle X, H\rangle_t.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Quindi usando l'integrazione per parti stocastica si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^t Y_s \, \mathrm{d}X_s &= H_0\mathcal{E}(X)_t - H_0 + \int_0^t \left(\int_0^s \mathcal{E}(X)_s^{-1} (\mathrm{d}H_u - \mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) \right) \mathrm{d}\mathcal{E}(X)_s \\
&= H_0\mathcal{E}(X)_t - H_0 + \mathcal{E}(X)_t \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} (\mathrm{d}H_u - \mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) - 0 \\
&\quad - \int_0^t \mathcal{E}(X)_s \, \mathrm{d} \left(\int_0^s \mathcal{E}(X)_u^{-1} (\mathrm{d}H_u - \mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) \right) \\
&\quad - \left\langle \mathcal{E}(X), \int_0^{\cdot} \mathcal{E}(X)_u^{-1} (\mathrm{d}H_u - \mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) \right\rangle_t \\
\text{(Ass. e eq.(5.4))} \quad &= H_0\mathcal{E}(X)_t - H_0 + \mathcal{E}(X)_t \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} (\mathrm{d}H_u - \mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) \\
&\quad - \int_0^t \mathcal{E}(X)_s \mathcal{E}(X)_s^{-1} (\mathrm{d}H_s - \mathrm{d}\langle H, X\rangle_s) - \langle H, X\rangle_t \\
&= H_0\mathcal{E}(X)_t - H_0 + \mathcal{E}(X)_t \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} (\mathrm{d}H_u - \mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) \\
&\quad - (H_t - \langle H, X\rangle_t - H_0) - \langle H, X\rangle_t \\
&= H_0\mathcal{E}(X)_t - H_0 + \mathcal{E}(X)_t \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} (\mathrm{d}H_u - \mathrm{d}\langle H, X\rangle_u) - H_t \\
&= Y_t - H_t
\end{aligned}$$

cioè il processo Y dato risolve l'EDS lineare considerata. □

Corollario 5.4.3: *Consideriamo una EDS del tipo*

$$\mathrm{d}Y_t = a(t)Y_t \, \mathrm{d}t + b(t) \, \mathrm{d}B_t, \quad Y_0 = x$$

con B un MB std, Y_t processo a valori reali e $a, b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Allora la soluzione Y è data da

$$Y_t = e^{\int_0^t a(s) \, \mathrm{d}s} \left(x + \int_0^t e^{-\int_0^s a(r) \, \mathrm{d}r} b(s) \, \mathrm{d}B_s \right).$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema precedente con

$$H_t = x + \int_0^t b(s) \, \mathrm{d}B_s$$

$$X_t = \int_0^t a(s) \, \mathrm{d}s$$

infatti l'equazione precedente si può riscrivere in

$$\mathrm{d}Y_t = d \left(x + \int_0^t b(s) \, \mathrm{d}B_s \right) + Y_t \, \mathrm{d} \left(\int_0^t a(s) \, \mathrm{d}s \right).$$

□

Esempio 5.4.4 (Equazione di Ornstein-Uhlenbeck 1-dimensionale): Un importante esempio di EDS lineare è l'*equazione di Ornstein-Uhlenbeck* talvolta detta anche *dinamica di Langevin*. L'equazione è

$$\mathrm{d}V_t = -\beta V_t \, \mathrm{d}t + \sigma \, \mathrm{d}B_t, \qquad V_0 = v$$

dove B è un MB std, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $v \in \mathbb{R}$. Grazie al Teorema precedente ($H_t = \sigma B_t + v$ e $X_t = -\beta$) possiamo affermare che la soluzione è

$$V_t = \mathrm{e}^{-\beta t} \left(v + \int_0^t e^{\beta s} \sigma \, \mathrm{d}B_s \right) = e^{-\beta t} v + \int_0^t e^{-\beta (t-s)} \sigma \, \mathrm{d}B_s$$

che è un processo gaussiano e di Feller (quest'ultima cosa segue da quanto dimostrato nella sezione precedente) con generatore infinitesimale per $h \in C_c^2(\mathbb{R})$ dato da

$$Ah(x) = -\beta x \partial_x h(x) + \frac{\sigma}{2} \partial_x^2 h(x).$$

Esempio 5.4.5 (Moto browniano geometrico): Consideriamo l'EDS lineare

$$\mathrm{d}G_t = \mu G_t \, \mathrm{d}t + \sigma G_t \, \mathrm{d}B_t, \qquad G_0 = x$$

con $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ t.c. $\mu\sigma > 0$ ($H_t = 0$ e $X_t = \mu t + \sigma B_t$), la cui soluzione è

$$G_t = G_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} t \right) + \sigma B_t \right) = G_0 \mathcal{E}(\mu t + \sigma B_t)$$

che è ancora un processo di Feller con generatore infinitesimale per $h \in C_c^2(\mathbb{R})$ dato da

$$Ah(x) = \mu x \partial_x h(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_x^2 h(x).$$

6

Teorema di Girsanov ed Alcune Conseguenze

6.1 Teorema di Girsanov

In tutto il resto di questo scritto sarà fissato uno spazio misurabile filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0})$ con $(\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$ filtrazione continua a destra e t.c. presa $\mathcal{F}_\infty^0 = \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t^0$ valga $\mathcal{F}_\infty^0 = \mathcal{F}$ (ipotesi non veramente necessaria ma che semplifica qualche risultato e non troppo restringente). Considereremo inoltre due probabilità $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ su tale spazio filtrato e indicheremo gli operatori di valore atteso rispetto a $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ rispettivamente con $\mathbf{E_P}$ e $\mathbf{E_Q}$.

Ricordiamo che essendo la filtrazione $(\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$ continua a destra è possibile scegliere il bracket tra due $(\mathcal{F}_t^0)$-semimartingale continue e l'integrale stocastico di un processo $(\mathcal{F}_t^0)$-progressivamente misurabile e localmente limitato rispetto ad una $(\mathcal{F}_t^0)$-semimartingala continua all'interno della rspettiva classe di indistinguibilità in modo da averli $(\mathcal{F}_t^0)$-adattati, in particolare il secondo costituirà quindi una $(\mathcal{F}_t^0)$-semimartingala continua.

La domanda, da tenere a mente, che motiva gran parte di quello che vedremo è la seguente:

Se $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ e X è $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-semimartingala continua, vale allora che X è $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$-semimartingala continua?

questa domanda è interessante in quanto in generale non è vero che una martingala locale continua rispetto a $\mathbf{P}$ è anche martingala locale continua rispetto a $\mathbf{Q}$.

Definizione 6.1.1: Diremo che $\mathbf{Q}$ è $(\mathcal{F}_t^0)$-*localmente assolutamente continua* rispetto a $\mathbf{P}$, e scriveremo $\mathbf{Q} \lhd \mathbf{P}$, se per ogni $t \geq 0$ vale $\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} \ll \mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0}$.

Osservazione 6.1.2: Se $\mathbf{Q} \lhd \mathbf{P}$ allora per il Teorema di Radon-Nikodym esiste un processo $(D_t)_{t\geq 0}$ t.c. per ogni $t \geq 0$ D_t è una versione di $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0}}{\mathrm{d}\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0}}$ ed in particolare è $\mathcal{F}_t^0$-misurabile.

Lemma 6.1.3: *Il processo D è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala non negativa t.c. $\mathbb{E}_\mathbf{P}[D_t] = 1$ per ogni $t \geq 0$.*

Dimostrazione. Essendo per ogni $t \geq 0$ la v.a. D_t densità tra due misure (positive) è non negativa. Ricordiamo che D_s è $\mathcal{F}_s^0$-misurabile e preso $B \in \mathcal{F}_s^0$ vale

$$\mathbb{E}_\mathbf{P}[\mathbf{1}_B D_t] = \mathbb{E}_\mathbf{Q}[\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}_\mathbf{P}[\mathbf{1}_B D_s]$$

infatti $D_t\, \mathrm{d}\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0} = \mathrm{d}\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0}$ e $\mathcal{F}_s^0 \subset \mathcal{F}_t^0$, dunque

$$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[D_t \mid \mathcal{F}_s^0\right] = D_s.$$

Infine $\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[D_t] = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[\mathbf{1}_\Omega] = 1$. □

Osservazione 6.1.4: Essendo D una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala ed essendo la filtrazione $(\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$ continua a destra, D ammette una modificazione (rispetto a $\mathbf{P}$) $\mathbf{P}$-q.c. cadlag per quanto noto dalla teoria delle martingale a tempo continuo. **Quindi d'ora in poi assumeremo sempre D P-q.c. cadlag**.

Ricordiamo che presa $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$ il completamento di $\mathcal{F}$ rispetto a $\mathbf{P}$ possiamo estendere $\mathbf{P}$ ad una probabilità $\overline{\mathbf{P}}$ su $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$ t.c. se $A \in \mathcal{F}$ e N è $\mathbf{P}$-nullo

$$\overline{\mathbf{P}}(A \cup N) = \mathbf{P}(A).$$

Nel seguito faremo per comodità l'abuso di notazione di indicare $\overline{\mathbf{P}}$ sempre con $\mathbf{P}$ (quindi quando ci si troverà davanti ad una $\mathbf{P}$ che potrà avere come argomento un elemento di $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$ si dovrà pensare a $\overline{\mathbf{P}}$). Nel seguito inoltre si indicherà con $\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{F}_t^0$ e gli insiemi $\mathbf{P}$-nulli, ossia $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{P}})_{t\geq 0}$ sarà il completamento di $(\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$ rispetto a $\mathbf{P}$.

Proposizione 6.1.5: *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$;

(2) D è processo UI;

(3) per ogni $t \geq 0$ si può estendere $\mathbf{Q}$ ad una probabilità $\widetilde{\mathbf{Q}}$ su $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$ (completamento di $\mathcal{F}$ rispetto a $\mathbf{P}$) t.c. $\widetilde{\mathbf{Q}} \ll \mathbf{P}$.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Osserviamo che se $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$, possiamo prendere $D_\infty = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ ed osserviamo che vale $\mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[D_\infty \mid \mathcal{F}_t^0\right] = D_t$ $\mathbf{P}$-q.c. (verificando la definizione di speranza condizionale) di conseguenza si ha l'uniforme integrabilità cercata.

(2) $\Rightarrow$ (1). Per quanto noto sulla convergenza di martingale uniformemente integrabili a tempo continuo $\mathbf{P}$-q.c. continue a destra si ha l'esistenza di una v.a. $D_\infty \in L^1(\mathbf{P})$ t.c. $D_t \overset{L^1(\mathbf{P})}{\longrightarrow} D_\infty$, quindi in particolare

$$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[D_\infty] = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbf{P}}[D_t] = 1.$$

Sia $A \in \mathcal{F}_t^0$ allora grazie sempre alla convergenza in $L^1(\mathbf{P})$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[\mathbf{1}_A D_\infty] &= \lim_{s\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbf{P}}[\mathbf{1}_A D_s] \\
&= \lim_{\substack{s\to+\infty \\ s\geq t}} \mathbb{E}_{\mathbf{P}}[\mathbf{1}_A D_s] \\
&= \lim_{\substack{s\to+\infty \\ s\geq t}} \mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_s^0}(A) = \mathbf{Q}(A)
\end{aligned}$$

quindi per ogni $A \in \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t^0 = \mathcal{F}_\infty^0 = \mathcal{F}$ vale $\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[\mathbf{1}_A D_\infty] = \mathbf{Q}(A)$, ossia $D_\infty\, \mathrm{d}\mathbf{P} = \mathbf{Q}$. Quindi $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$.

(1) $\Rightarrow$ (3). (Facoltativo) Essendo $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ i nulli di $\mathbf{P}$ sono contenuti nei nulli di $\mathbf{Q}$, quindi $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$ è una sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}^{\mathbf{Q}}$ e prendendo $\widetilde{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{Q}}_{|\mathcal{F}^{\mathbf{P}}}$ (con $\overline{\mathbf{Q}}$ l'usuale estensione di $\mathbf{Q}$ a $\mathcal{F}^{\mathbf{Q}}$ completamento rispetto a $\mathbf{Q}$ di $\mathcal{F}$) si ha quanto voluto.

(3) $\Rightarrow$ (1). (Facoltativo) Sia $A \in \mathcal{F}_\infty^0 = \mathcal{F}$ t.c. $\mathbf{P}(A) = 0$. Allora $A \in \mathcal{F}_t^{\mathbf{P}}$ per ogni $t \geq 0$, quindi $\widetilde{Q}(A) = 0$. Di conseguenza $\widetilde{\mathbf{Q}} \ll \mathbf{P}$. □

Proposizione 6.1.6: *Se* $\mathbf{Q} \triangleleft \mathbf{P}$ *e* T *è un* $(\mathcal{F}_t^0)$*-tda, allora* D_T *è densità di* $\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_T^0 \cap \{T<+\infty\}}$ *rispetto a* $\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_T^0 \cap \{T<+\infty\}}$.

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{F}_T^0$, allora $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{T\wedge t}^0 \subset \mathcal{F}_t^0$, infatti per ogni $s \geq 0$

$$(A \cap \{T \leq t\}) \cap \{T \wedge t \leq s\} = A \cap \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s^0$$

dunque $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{T\wedge t}^0$ ed inoltre se $B \in \mathcal{F}_{T\wedge t}^0$ allora $B = B \cap \{T \wedge t \leq t\} \in \mathcal{F}_t^0$, quindi $\mathcal{F}_{T\wedge t}^0 \subset \mathcal{F}_t^0$. Di conseguenza, per il Teorema d'arresto opzionale, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(A \cap \{T \leq t\}) &= \mathbb{E}_\mathbf{P}\left[\mathbf{1}_{A\cap\{T\leq t\}} D_t\right] \\
&= \mathbb{E}_\mathbf{P}\left[\mathbf{1}_{A\cap\{T\leq t\}} \mathbb{E}_\mathbf{P}\left[D_t \mid \mathcal{F}_{T\wedge t}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_\mathbf{P}\left[\mathbf{1}_{A\cap\{T\leq t\}} D_{T\wedge t}\right] \\
&= \mathbb{E}_\mathbf{P}\left[\mathbf{1}_{A\cap\{T\leq t\}} D_T\right].
\end{aligned}$$

e mandando $t \nearrow +\infty$ si ottiene $\{T \leq t\} \nearrow \{T < +\infty\}$, dunque

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(A \cap \{T < +\infty\}) &= \lim_{t\to+\infty} \mathbf{Q}(A \cap \{T \leq t\}) \\
&= \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}_\mathbf{P}\left[\mathbf{1}_{A\cap\{T\leq t\}} D_T\right] \\
&= \mathbb{E}_\mathbf{P}\left[\mathbf{1}_{A\cap\{T<+\infty\}} D_T\right].
\end{aligned}$$

□

Proposizione 6.1.7: *Per ogni* $t \geq 0$ *la v.a.* D_t *è strettamente positiva* $\mathbf{Q}$*-q.c., anzi posto*

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid D_t = 0 \text{ o } D_{t^-} = 0\}$$

vale $\mathbf{Q}(T < +\infty) = 0$.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che T è un $(\mathcal{F}_t^0)$-tda. Dato $n \in \mathbb{N}_+$ poniamo

$$T_n = \inf\left\{t \geq 0 \mid D_t \leq \frac{1}{n}\right\}$$

questi sono $(\mathcal{F}_t^0)$-tda e $T_n \leq T$. Siano quindi $n, m \in \mathbb{N}_+$, vale $\{T \leq m\} \subset \{T_n < +\infty\}$, quindi usando la Proposizione precedente si ha

$$\mathbf{Q}(T \leq m) \leq \mathbf{Q}(T_n < +\infty) = \mathbb{E}_\mathbf{P}\left[D_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n<+\infty\}}\right] \leq \frac{1}{n}$$

quindi passando al limite per $m \to +\infty$ otteniamo

$$\mathbf{Q}(T < +\infty) \leq \frac{1}{n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ da cui segue $\mathbf{Q}(T < +\infty) = 0$. □

Osservazione 6.1.8: Supponiamo $\mathbf{Q} \triangleleft \mathbf{P}$. Sia $X = X_0 + M + A$ una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-semimartingala continua.

- Vale $V_t(A) < +\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$, quindi si ha anche $V_t(A) < +\infty$ $\mathbf{Q}$-q.c. per ogni $t \geq 0$ (in quanto A è $(\mathcal{F}_t^0)$-adattato).

- Preso $t \geq 0$ ed una successione di partizioni di $[0,\infty)$ $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $|\Delta_n| \to 0$, vale la convergenza

$$\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_+\\ t_k^{(n)}<t}} |M_{t_i^{(n)}} - M_{t_{i-1}^{(n)}}|^2 + |M_t - M_{t_k^{(n)}}|^2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle M\rangle_t \quad \text{in probabilità sotto } \mathbf{P}$$

ed essendo tutte le v.a. $\mathcal{F}_t^0$-misurabili (essendo M $(\mathcal{F}_t^0)$-adattato) e $\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} \ll \mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0}$ vale anche

$$\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_+\\ t_k^{(n)}<t}} |M_{t_i^{(n)}} - M_{t_{i-1}^{(n)}}|^2 + |M_t - M_{t_k^{(n)}}|^2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle M\rangle_t \quad \text{in probabilità sotto } \mathbf{Q}.$$

Similmente si vede che se X e Y sono due $(\mathcal{F}_t^0)$-semimartingale rispetto sia a $\mathbf{P}$ che a $\mathbf{Q}$ vale che il bracket $\langle X,Y\rangle$ calcolato sotto $\mathbf{Q}$ è uguale a quello calcolato sotto $\mathbf{P}$.

Veniamo quindi al teorema della sezione.

Lemma 6.1.9: *Se M è un processo continuo t.c. esiste una successione $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di $(\mathcal{F}_t^0)$-tda t.c. $T_n \nearrow +\infty$ $\mathbf{Q}$-q.c. e M^{T_n} è $(\mathcal{F}_t^0,\mathbf{Q})$-martingala locale continua per ogni $n\in\mathbb{N}$ allora M è una $(\mathcal{F}_t^0,\mathbf{Q})$-martingala locale continua.*

Dimostrazione. A meno di sostituire T_n con $T_n \wedge n$ possiamo supporre T_n finito per ogni $n\in\mathbb{N}$ ed a meno di considerare $M - M_0$ possiamo supporre $M_0 = 0$. Grazie alle ipotesi per ogni $n\in\mathbb{N}$ troviamo una successione di $(\mathcal{F}_t^0)$-tda $(T_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}}$ t.c. $T_m^{(n)} \nearrow +\infty$ per $m\to+\infty$ $\mathbf{Q}$-q.c. e $M^{T_n\wedge T_m^{(n)}}$ è una $(\mathcal{F}_t^0,\mathbf{Q})$-martingala continua limitata per ogni $m,n\in\mathbb{N}$. Ora avendo preso i T_n finiti vale

$$\{T_m^{(n)} < T_n\} \searrow \emptyset \quad \text{per } m\to+\infty \text{ per ogni } n\in\mathbb{N}$$

e quindi $\mathbf{Q}(T_m^{(n)} < T_n) \searrow 0$ per $m\to+\infty$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Di conseguenza per ogni $n\in\mathbb{N}$ esiste un $m_n\in\mathbb{N}$ t.c. $\mathbf{Q}(T_{m_n}^{(n)} \leq T_n) \leq 2^{-n}$, allora $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Q}(T_{m_n}^{(n)} \leq T_n) < +\infty$ e quindi per il Lemma di Borel-Cantelli si ha

$$\mathbf{Q}\left(T_{m_n}^{(n)} \leq T_n \text{ frequentemente in } n\right) = 0$$

basta quindi osservare che

$$\begin{aligned}\{T_n\wedge T_{m_n}^{(n)} \not\to +\infty\} &\subset \{T_n \wedge T_{m_n}^{(n)} = T_{m_n}^{(n)} \text{ frequentemente in } n\}\\ &= \{T_{m_n}^{(n)} \leq T_n \text{ frequentemente in } n\}\end{aligned}$$

per ottenere

$$\mathbf{Q}\left(T_n \wedge T_{m_n}^{(n)} \not\to +\infty\right) = 0.$$

Quindi $(T_{m_n}^{(n)} \wedge T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è $\mathbf{Q}$-q.c. tendente a $+\infty$ e per ogni $n\in\mathbb{N}$ il processo arrestato $M^{T_{m_n}^{(n)}\wedge T_n}$ è una martingala continua limitata, la tesi è dimostrata. □

Teorema 6.1.10 (di Girsanov): *Supponiamo che $\mathbf{Q} \lhd \mathbf{P}$ e che il processo delle densità D sia continuo. Ogni $(\mathcal{F}_t^0,\mathbf{P})$-semimartingala continua è anche una $(\mathcal{F}_t^0,\mathbf{Q})$-semimartingala continua. In particolare data una $(\mathcal{F}_t^0,\mathbf{P})$-martingala locale continua M, il processo*

$$\widetilde{M}_t = M_t - \int_0^t D_s^{-1}\,\mathrm{d}\langle D,M\rangle_s \quad \forall t\geq 0$$

è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$-martingala locale continua. Inoltre presa una seconda $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala locale continua N vale

$$\langle \widetilde{M}, \widetilde{N} \rangle = \langle M, N \rangle = \langle \widetilde{M}, N \rangle$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per passi.

Passo 1. *Dimostriamo che un processo continuo e $(\mathcal{F}_t^0)$-adattato X è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$-martingala locale continua se XD è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala locale continua.*

Supponiamo che XD sia una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala locale continua e supponiamo senza perdita di generalità $X_0 = 0$ (a meno di sostituire X con $X - X_0$). Prendiamo $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(\mathcal{F}_t^0)$-tda t.c. $(XD)^{T_n}$ sia una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala continua limitata e X^{T_n} sia limitato per ogni $n \in \mathbb{N}$ (basta per ogni $n \in \mathbb{N}$ prendere il minimo tra l'n-esimo tda di una successione di tda associati a XD e $S_n = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t| \geq n\}$).

Se $S \leq T$ sono due $(\mathcal{F}_t^0)$-tda limitati, grazie al Lemma precedente vale

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[X_S^{T_n}\right] &= \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[X_S^{T_n} D_{T_n \wedge S}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[(XD)_S^{T_n}\right] \\ \text{(Teo. d'arr. opz.)} \quad &= \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[(XD)_T^{T_n}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[X_T^{T_n}\right] \end{aligned}$$

da cui segue che X^{T_n} è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$-martingala continua limitata grazie al Teorema d'arresto opzionale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre $T_n \nearrow +\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. dunque $T_n \nearrow +\infty$ anche $\mathbf{Q}$-q.c., infatti $T_n \nearrow$, quindi vale l'uguaglianza

$$\{T_n \not\to +\infty\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{T_n \leq k \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

e di conseguenza essendo $A_k = \{T_n \leq k \ \ \forall n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}_k^0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ottiene

$$\mathbf{Q}(T_n \not\to +\infty) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{Q}(A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[\mathbf{1}_{A_k} D_k\right] = 0$$

in quanto $A_k \subset \{T_n \not\to +\infty\}$, dunque $\mathbf{P}(A_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Passo 2. *Dimostriamo che $\widetilde{M}$ è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$-martingala locale continua.*

Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ il $(\mathcal{F}_t^0)$-tda

$$T_n = \inf\{t \geq 0 \mid D_t \leq \frac{1}{n}\}$$

ed osserviamo che allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'integrale $\int_0^{T_n \wedge t} D_s^{-1} \, \mathrm{d}\langle D, M \rangle_s$ è finito ($D_s \geq \frac{1}{n}$ per $s \leq T_n$) e $\widetilde{M}^{T_n}$ è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-semimartingala continua. Usiamo quindi l'integrazione per parti stocastica insieme al fatto che $d\widetilde{M}_t = \mathrm{d}M_t - D_t^{-1} \, \mathrm{d}\langle M, D \rangle_t$ per scrivere

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_t^{T_n} D_t^{T_n} &= \widetilde{M}_0 D_0 + \int_0^{T_n \wedge t} \widetilde{M}_s \, \mathrm{d}D_s + \int_0^{T_n \wedge t} D_s \, \mathrm{d}\widetilde{M}_s + \langle M, D \rangle_{T_n \wedge t} \\ &= M_0 D_0 + \int_0^{T_n \wedge t} \widetilde{M}_s \, \mathrm{d}D_s + \int_0^{T_n \wedge t} D_s \, \mathrm{d}M_s - \int_0^{T_n \wedge t} D_s D_s^{-1} \, \mathrm{d}\langle M, D \rangle_s + \langle M, D \rangle_{T_n \wedge t} \\ &= M_0 D_0 + \int_0^{T_n \wedge t} \widetilde{M}_s \, \mathrm{d}D_s + \int_0^{T_n \wedge t} D_s \, \mathrm{d}M_s \end{aligned}$$

Dunque $(\widetilde{M}D)^{T_n}$ è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala locale continua. Ma $T_n \nearrow +\infty$ $\mathbf{Q}$-q.c. (in quanto D è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala $\mathbf{Q}$-q.c. strettamente positiva), dunque grazie al Lemma 6.1.9 si ha che $\widetilde{M}D$ è una $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P})$-martingala locale continua e usando il Passo precedente si ottiene quanto voluto. □

Osservazione 6.1.11: D'ora in poi useremo anche la notazione "dot" per indicare l'integrale stocastico. Cioè, quando ha senso, $H \cdot M$ indicherà il processo integrale stocastico di H rispetto ad M.

Proposizione 6.1.12: *Sia M una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala locale continua. Se $H \in L^2_{loc}(M, \mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \lhd \mathbf{P}$, allora $H \in L^2_{loc}(\widetilde{M}, \mathbf{Q})$ e*

$$\widetilde{H \cdot M} = H \cdot \widetilde{M}.$$

Dimostrazione. La prima affermazione è una conseguenza dell'uguaglianza $\langle \widetilde{M} \rangle = \langle M \rangle$. Preso D il processo delle densità, vale

$$\begin{aligned}
\widetilde{H \cdot M} &= H \cdot M - D^{-1} \cdot \langle D, H \cdot M \rangle \\
&= H \cdot M - D^{-1} \cdot (H \cdot \langle D, M \rangle) \\
&= H \cdot M - (D^{-1} H) \cdot \langle D, M \rangle) \\
&= H \cdot M - H \cdot (D^{-1} \cdot \langle D, M \rangle) \\
&= H \cdot (M - D^{-1} \cdot \langle D, M \rangle) = H \cdot \widetilde{M}.
\end{aligned}$$

□

Definizione 6.1.13: Una coppia di probabilità $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ è detta *coppia di Girsanov* se $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$ ed il processo delle densità D è continuo. In tal caso l'applicazione $M \mapsto \widetilde{M} = G_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}}(M)$ è detta *trasformata di Girsanov* da $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$.

Osserviamo che se $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ è una coppia di Girsanov allora in particolare $\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} \sim \mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0}$ per ogni $t \geq 0$ e il processo delle densità D è continuo, questo fatto ci permette di dire che D_t è strettamente positiva anche $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$ (in quanto D è $(\mathcal{F}_t^0)$-adattato). In questo caso è applicabile al processo delle densità D il seguente utile risultato.

Proposizione 6.1.14: *Se D è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala locale continua $\mathbf{P}$-q.c. strettamente positiva, allora esiste un'unica L $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala locale continua t.c.*

$$D_t = \mathcal{E}(L)_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L \rangle_t\right) \quad \forall t \geq 0.$$

Inoltre L soddisfa

$$L_t = \log(D_0) + \int_0^t D_s^{-1}\, \mathrm{d}D_s.$$

Dimostrazione. Definiamo la $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala locale continua $L_t = \log(D_0) + \int_0^t D_s^{-1}\, \mathrm{d}D_s$. Ricordiamo che per quanto noto sull'esponenziale stocastico vale che $\mathcal{E}(L)$ è l'unica soluzione dell'EDS

$$\mathrm{d}X_t = X_t\, \mathrm{d}L_t, \quad X_0 = \exp(L_0)$$

Osserviamo che essendo per definizione $\mathrm{d}L_t = D_t^{-1}\, \mathrm{d}D_t$ vale

$$\mathrm{d}D_t = D_t D_t^{-1}\, \mathrm{d}D_t = D_t\, \mathrm{d}L_t$$

e che $D_0 = \exp(L_0)$, dunque $D_t = \mathcal{E}(L)_t$ $\mathbf{P}$-q.c. per ogni $t \geq 0$. □

Corollario 6.1.15: *Supponiamo che* $\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} \sim \mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0}$ *per ogni* $t \geq 0$ *e che il processo delle densità* D *sia continuo. Allora esiste un'unica* L $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$*-martingala locale continua t.c.* $D = \mathcal{E}(L)$*, ossia*

$$\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} = \mathcal{E}(L)_t \, \mathrm{d}\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0} \quad \forall t \geq 0.$$

In particolare L *è della forma*

$$L_t = \log(D_0) + \int_0^t D_s^{-1} \, \mathrm{d}D_s \quad \forall t \geq 0.$$

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione precedente e dalla Proposizione 6.1.7. □

Quindi è utile riscrivere il Teorema 6.1.10 di Girsanov nel seguente modo, che è applicabile nel caso in cui $\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} \sim \mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0}$ per ogni $t \geq 0$, quindi in particolare quando $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ è una coppia di Girsanov.

Teorema 6.1.16 (di Girsanov, versione esponenziale): *Supponiamo che esista una* L $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$*-martingala locale continua t.c.*

$$\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} = \mathcal{E}(L)_t \, \mathrm{d}\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0} \quad \forall t \geq 0$$

allora $M \mapsto \widetilde{M} = M - \langle L, M \rangle$ *manda* $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$*-martingale locali continue in* $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$*-martingale locali continue.*

Dimostrazione. Osserviamo che essendo $D_t = \mathcal{E}(L)_t$ $\mathbf{P}$-q.c. strettamente positivo vale che $\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} \sim \mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0}$ per ogni $t \geq 0$. Inoltre $D^{-1} \cdot \langle D, M \rangle = \langle D^{-1} \cdot D, M \rangle = \langle L, M \rangle$, da cui segue $\widetilde{M} = M - \langle L, M \rangle$. Il resto segue dalla Proposizione precedente e dal Teorema 6.1.10 di Girsanov. □

6.2 Criteri di Kazamaki e Novikov

Nella maggior parte delle applicazioni del Teorema di Girsanov è data una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala locale continua nulla in 0, L, e si costruisce quindi $\mathbf{Q}$ ponendo $\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} = \mathcal{E}(L)_t \, \mathrm{d}\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0}$ per ogni $t \geq 0$. Tale costruzione però, per avere senso, ha bisogno che $\mathcal{E}(L)$ sia una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala continua "vera" (in quanto abbiamo visto che se $\mathbf{Q}$ è un'altra probabilità t.c. $\mathbf{Q} \lhd \mathbf{P}$ allora il processo delle densità è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala). La discussione appena fatta motiva la ricerca di criteri per stabilire quando $\mathcal{E}(L)$ è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala continua.

Per farlo ci mettiamo per comodità nel setting di un fissato spazio di probabilità filtrato generico $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ con filtrazione continua a destra.

Lemma 6.2.1: *Se* Y *è una supermartingala positiva con limite* $\mathbf{P}$*-q.c.* $Y_\infty \in L^1(\mathbf{P})$ *t.c.* $\mathbb{E}[Y_\infty] = \mathbb{E}[Y_0]$ *allora è una martingala UI.*

Dimostrazione. Infatti per il Lemma di Fatou condizionale si ha che

$$\mathbb{E}\left[Y_\infty \mid \mathcal{F}_t^0\right] \leq \liminf_{s \to +\infty} \mathbb{E}\left[Y_s \mid \mathcal{F}_t^0\right] = Y_t$$

dunque prendendo i valori attesi si ottiene

$$\mathbb{E}[Y_\infty] \leq \mathbb{E}[Y_t] \leq \mathbb{E}[Y_0]$$

(in cui si è usata la proprietà di supermartingala nella seconda disuguaglianza) ma $\mathbb{E}[Y_\infty] = \mathbb{E}[Y_0]$ per ipotesi dunque $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_0]$ per ogni $t \geq 0$, da cui segue che è una martingala (una supermartingala con funzione di media costante è una martingala). Inoltre sempre da quanto detto sopra segue che $Y_t - \mathbb{E}\left[Y_\infty \mid \mathcal{F}_t^0\right] \geq 0$ per ogni $t \geq 0$ ed inoltre

$$\mathbb{E}\left[Y_t - \mathbb{E}\left[Y_\infty \mid \mathcal{F}_t^0\right]\right] = \mathbb{E}\left[Y_t\right] - \mathbb{E}\left[Y_\infty\right] = \mathbb{E}\left[Y_t\right] - \mathbb{E}\left[Y_0\right] = 0$$

da cui $Y_t = \mathbb{E}\left[Y_\infty \mid \mathcal{F}_t^0\right]$ **P**-q.c. per ogni $t \geq 0$, da cui segue l'uniforme integrabilità voluta. □

Teorema 6.2.2 (Criterio di Kazamaki): *Se L è una martingala continua UI t.c.*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right] < +\infty$$

allora $\mathcal{E}(L)$ è una martingala continua UI.

Dimostrazione. Essendo $\mathcal{E}(L) = \mathcal{E}(L - L_0)\exp(L_0)$ possiamo assumere senza perdita di generalità $L_0 = 0$. Sia $a \in (0,1)$ e T tda **P**-q.c. finito, vale

$$\mathcal{E}(aL)_T = \exp\left(aL_T - \frac{a^2}{2}\langle L\rangle_T\right) = \exp((a - a^2)L_T)\exp\left(a^2\left(L_T - \frac{1}{2}\langle L\rangle_T\right)\right). \tag{6.1}$$

Osserviamo quindi che per ogni $\Gamma \in \mathcal{F}$ vale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \mathcal{E}(aL)_T\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \exp(a(1-a)L_T)\exp\left(a^2\left(L_T - \frac{1}{2}\langle L\rangle_T\right)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \exp(a(1-a)L_T)\mathcal{E}(L)_T^{a^2}\right]\end{aligned}$$

usiamo quindi la Disuguaglianza di Hölder con $p = \frac{1}{a^2}$ ($q = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-a^2}$) per ottenere

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \mathcal{E}(aL)_T\right] &\leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \exp\left(\frac{a(1-a)}{1-a^2}L_T\right)\right]^{1-a^2} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \mathcal{E}(L)_T\right]^{a^2} \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \exp\left(\frac{a}{1+a}L_T\right)\right]^{1-a^2} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \mathcal{E}(L)_T\right]^{a^2} \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \exp\left(\frac{a}{1+a}L_T\right)\right]^{1-a^2}\end{aligned}$$

vorremmo dire che $\left\{\exp\left(\frac{a}{1+a}L_T\right) \mid T \text{ tda } \mathbf{P}\text{-q.c. finito}\right\}$ è UI per ottenere automaticamente che anche la famiglia

$$\{\mathcal{E}(aL)_T \mid T \text{ tda } \mathbf{P}\text{-q.c. finito}\}$$

è UI. Osserviamo che per la Disuguaglianza di Jensen condizionale ed il fatto che per $a \in (0,1)$ vale $\frac{a}{1+a} < \frac{1}{2}$, si ha

$$\exp\left(\frac{a}{1+a}L_T\right) = \exp\left(\frac{a}{1+a}\mathbb{E}\left[L_\infty \mid \mathcal{F}_T\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right) \mid \mathcal{F}_T\right]$$

ma per le ipotesi $\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right) \in L^1(\mathbf{P})$, dunque si ha l'uniforme integrabilità voluta. Questo ci permette di dire che $\mathcal{E}(aL)$ è una martingala UI. Infatti possiamo passare al limite per $n \longrightarrow +\infty$ nella proprietà di martingala di $\mathcal{E}(aL)_n^T \mathbf{1}_{T_n > 0}$, con $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tda associati a $\mathcal{E}(aL)$, per ottenere la proprietà di martingala per $\mathcal{E}(aL)$.

Come conseguenza, per ogni $a \in (0,1)$, si ha l'esistenza di una v.a. $\mathcal{E}(aL)_\infty \in L^1(\mathbf{P})$ t.c. $\mathcal{E}(aL)_t \longrightarrow \mathcal{E}(aL)_\infty$ **P**-q.c. ed in $L^1(\mathbf{P})$, in particolare $\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(aL)_\infty\right] = 1$.

Per concludere dimostriamo adesso che $\mathcal{E}(L)$ è una martingala UI. Essendo $\mathcal{E}(L)$ una supermartingala positiva continua si ha l'esistenza di una v.a. $\mathcal{E}(L)_\infty \in L^1(\mathbf{P})$ t.c. $\mathcal{E}(L)_t \longrightarrow \mathcal{E}(L)_\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. (attenzione ancora non sappiamo se vi converge in $L^1(\mathbf{P})$). Inoltre essendo L martingala continua UI si ha l'esistenza di una v.a. $L_\infty \in L^1(\mathbf{P})$ t.c. $L_t \longrightarrow L_\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. ed in $L^1(\mathbf{P})$.

Dall'equazione (6.1), per ogni $a \in (0,1)$, vale

$$\mathcal{E}(aL)_\infty = \exp(a(1-a)L_\infty)\mathcal{E}(L)_\infty^{a^2},$$

quindi usando come prima la Disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$1 = \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(aL)_\infty\right] \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{a}{1+a}L_\infty\right)\right]^{1-a^2} \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right]^{a^2} \leq 1, \tag{6.2}$$

mandando $a \nearrow 1$ si ottiene usando il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue che

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{a}{1+a}L_\infty\right)\right]^{1-a^2} \to 1$$

e quindi

$$1 \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right] \leq 1$$

ossia $\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right] = 1 = \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_0\right]$, da questo segue che $\mathcal{E}(L)$ è una martingala continua UI grazie al Lemma 6.2.1. □

Corollario 6.2.3 (Criterio di Novikov): *Se L è una martingala locale continua e*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty\right)\right] < +\infty$$

allora $\mathcal{E}(L)$ è una martingala continua UI.

Dimostrazione. Essendo $\mathcal{E}(L) = \mathcal{E}(L-L_0)\exp(L_0)$ possiamo assumere senza perdita di generalità $L_0 = 0$. Vogliamo usare il Criterio di Kazamaki (Teorema 6.2.2). Osserviamo che sotto le nostre ipotesi L è in realtà una martingala continua UI, infatti $x \leq \exp\left(\frac{x}{2}\right)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui segue

$$\mathbb{E}\left[\langle L\rangle_\infty\right] \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\langle L\rangle_\infty}{2}\right)\right]$$

e quindi $L \in \mathrm{H}_0^2$ (Proposizione 3.1.40). Dunque rimane da dimostrare soltanto che $\exp\left(\frac{L_\infty}{2}\right) \in L^1(\mathbf{P})$. Per ogni $t \geq 0$ ed $a > 0$ vale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{L_t}{2}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{L_t}{2} - a\langle L\rangle_t + a\langle L\rangle_t\right)\right]\\ \text{(Cauchy-Schwarz)}\ &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(L_t - 2a\langle L\rangle_t\right)\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\exp\left(2a\langle L\rangle_t\right)\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

che per $a = \frac{1}{4}$ ci dà per ogni $t \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{L_t}{2}\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_t\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right)\right]^{\frac{1}{2}} \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty\right)\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Se $t \to +\infty$ si ha $L_t \longrightarrow L_\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. e dal Lemma di Fatou segue

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right]^{\frac{1}{2}} \leq \liminf_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_t\right)\right] < +\infty.$$

□

Corollario 6.2.4: *Se L è una martingala locale continua nulla in* 0 *e*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right)\right] < +\infty \quad \forall t \geq 0$$

allora $\mathcal{E}(L)$ è una martingala continua (non necessariamente UI).

Dimostrazione. Infatti per ogni tda T vale $\langle L^T\rangle = \langle L\rangle^T$, dunque $\langle L^T\rangle_\infty = \langle L\rangle_T$ e se $T = t$ è deterministico si ottiene $\langle L^t\rangle_\infty = \langle L\rangle_t$. Ma grazie alle ipotesi, per ogni $t \geq 0$, si ha

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L^t\rangle_\infty\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right)\right] < +\infty$$

quindi possiamo applicare il Criterio di Novikov (Corollario 6.2.3) ad ogni L^t per dire che $(L_s)_{s\leq t}$ è una martingala continua UI per ogni $t \geq 0$, quindi si ottiene che L è una martingala continua. □

Esempio 6.2.5: Se B è un MB std, $H \in L^2_{\text{loc}}(B)$ e vale

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\, \mathrm{d}s\right)\right] < +\infty \quad \forall t \geq 0$$

allora l'esponenziale stocastico $\mathcal{E}(H\cdot B) = \exp\left(\int_0^t H_s\, \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\, \mathrm{d}s\right)$ è una martingala continua per il Corollario precedente, ma in generale non è UI.

Se ad esempio si prende $H_s = 1$ per ogni $s \geq 0$, allora

$$\mathcal{E}(H\cdot B)_t = \mathcal{E}(B)_t = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right) \quad \forall t \geq 0$$

che non è UI, infatti $\mathbf{P}$-q.c. vale

$$\lim_{t\to+\infty} \mathcal{E}(B)_t = \lim_{t\to+\infty} \exp\left(t\left(\frac{B_t}{t} - \frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

quindi se $\mathcal{E}(B)$ fosse UI per il Teorema di convergenza di Vitali dovrebbe convergere in $L^1(\mathbf{P})$ a 0, ma invece $\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(B)_t\right] = 1$ per ogni $t \geq 0$, quindi $\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(B)_t\right] \not\to 0$.

Ma se in più vale

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} H_s^2\, \mathrm{d}s\right)\right] < +\infty$$

allora $\mathcal{E}(H\cdot B)$ è una martingala continua UI per il Critero di Novikov (Corollario 6.2.3).

Osservazione 6.2.6: Osserviamo che se L è una martingala locale continua con $\mathcal{E}(L)$ martingala continua UI, allora esiste una $\mathcal{E}(L)_\infty \in L^1(\mathbf{P})$ t.c. limite $\mathbf{P}$-q.c. ed in $L^1(\mathbf{P})$ e t.c. $\mathcal{E}(L)_t = \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty \mid \mathcal{F}_t^0\right]$ per ogni $t \geq 0$. Quindi se si definisce una probabilità $\mathbf{Q}$ mediante

$$\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} = \mathcal{E}(L)_t\, \mathrm{d}\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0} \quad \forall t \geq 0$$

in realtà si ha $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$. Infatti se $A \in \mathcal{F} = \bigcup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t^0$ allora esiste un $t \geq 0$ t.c. $A \in \mathcal{F}_t^0$ e di conseguenza si ha

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[\mathbf{1}_A\mathcal{E}(L)_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[\mathbf{1}_A\mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[\mathcal{E}(L)_\infty \mid \mathcal{F}_t^0\right]\right] = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[\mathbf{1}_A\mathcal{E}(L)_\infty\right]$$

ossia in realtà $\mathbf{Q} = \mathcal{E}(L)_\infty\, \mathrm{d}\mathbf{P}$. Infine nel caso in cui $\mathcal{E}(L)_\infty > 0$ $\mathbf{P}$-q.c. si può concludere addirittura che $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ (infatti $\{\mathcal{E}(L)_\infty = 0\}$ ovviamente è anche $\mathbf{Q}$-nullo).

6.3 Il teorema e la formula di Cameron-Martin

Utilizziamo quindi quanto dimostrato finora per studiare la misura di Wiener, in particolare dimostreremo la sua "quasi-invarianza" rispetto a determinate operazioni sul MB std. Torniamo nel setting della prima sezione.

Proposizione 6.3.1: *Supponiamo* $\mathbf{Q} \lhd \mathbf{P}$ *e che il processo delle densità* D *sia continuo. Sia* B *un* $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$*-MB std, allora* $\widetilde{B} = B - D^{-1} \cdot \langle D, B\rangle$ *è un* $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$*-MB std.*

Dimostrazione. Per il Teorema 6.1.10 di Girsanov sappiamo che $\widetilde{B}$ è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$-martingala locale continua con $\langle \widetilde{B}\rangle_t = \langle B\rangle_t = t$ per ogni $t \geq 0$ e $\widetilde{B}_0 = 0$. Quindi per la caratterizzazione del MB di Lévy segue che $\widetilde{B}$ è un $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$-MB std. □

Osservazione 6.3.2: Sia L una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala locale continua nulla in 0 t.c. $\mathcal{E}(L)$ sia una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala, allora definendo

$$\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} = \mathcal{E}(L)_t \,\mathrm{d}\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0} \quad \forall t \geq 0$$

preso B un $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-MB std, il processo

$$\widetilde{B}_t = B_t - \langle L, B\rangle_t \quad \forall t \geq 0$$

è un $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$-MB std.

Supponiamo adesso che sia $L = H \cdot B$ con $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(B)$ adeguata, in tal caso

$$\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} = \exp\left(\int_0^t H_s \,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0},$$

allora

$$\langle L, B\rangle_t = \langle H \cdot B, B\rangle_t = (H \cdot \langle B\rangle)_t = \int_0^t H_s \,\mathrm{d}s$$

perciò

$$\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t H_s \,\mathrm{d}s.$$

è un $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$-MB std.

Definizione 6.3.3 (Spazio di Cameron-Martin): Diciamo che una $h \in \mathbb{W}$ appartiene a CM se esiste una funzione $h' \in L^2([0, \infty), \mathcal{L}^1)$ t.c.

$$h(t) = \int_0^t h'(s) \,\mathrm{d}s \quad \forall t \geq 0.$$

Lo spazio CM è detto *spazio di Cameron-Martin*.

Nel seguito se X è un processo stocastico continuo su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ indicheremo con $\mathbf{P}_X$ la sua legge su $\mathbb{W} = C([0, \infty))$.

Teorema 6.3.4 (di Cameron-Martin): *Sia* B *un* $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$*-MB std e* $h \in$ CM *allora la legge del processo* B^h *definito come*

$$B_t^h = B_t - \int_0^t h'(s) \,\mathrm{d}s = B_t - h(t) \quad \forall t \geq 0$$

è equivalente a quella di B.

Questa proprietà è nota come quasi-invarianza *della misura di Wiener rispetto alla traslazione di una funzione in* CM.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che grazie alle ipotesi su h e grazie al Criterio di Novikov (Corollario 6.2.3) il processo $\mathcal{E}(h' \cdot B)$ è una $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{P})$-martingala contiua UI, quindi come detto nella precedente Osservazione se definiamo la probabilità $\mathbf{Q}$ attraverso

$$\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} = \exp\left(\int_0^t h'(s)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t (h'(s))^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0},$$

allora il processo

$$\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t h'(s)\,\mathrm{d}s = B_t - h(t) = B_t^h \quad \forall t \geq 0$$

è un $(\mathcal{F}_t^0, \mathbf{Q})$-MB std. Inoltre per quanto detto nell'Osservazione 6.2.6 si ha $\mathbf{Q} = E_h(B)\,\mathrm{d}\mathbf{P}$ con $E_h(B) = \exp\left(\int_0^{+\infty} h'(s)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(h'(s))^2\,\mathrm{d}s\right) > 0$ $\mathbf{P}$-q.c., in particolare $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$. Ma indicando con $\mu = \mathbf{P}_B = \mathbf{Q}_{B^h}$ la misura di Wiener, si ottiene

$$\mathbf{P}_{B^h} \sim \mathbf{Q}_{B^h} = \mathbf{P}_B = \mu$$

che è quanto voluto. □

Corollario 6.3.5: *Nel contesto nel Teorema precedente vale in particolare*

$$\mathbf{P}_{B+h} = E_h\,\mathrm{d}\mu$$

con $\mu = \mathbf{P}_B$ *la misura di Wiener e* $E_h(w) = \exp\left(\left(\int_0^{+\infty} h'(s)\,\mathrm{d}b_s\right)(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(h'(s))^2\,\mathrm{d}s\right)$ *per ogni* $w \in \mathbb{W}$, *in cui con* $(b_t)_{t\geq 0}$ *si è indicato il processo delle coordinate/valutazioni su* $(\mathbb{W}, \mathcal{B}(\mathbb{W}), \mu)$ *(che quindi è un MB std).*

Dimostrazione. (Facoltativo) Infatti se $\mathbf{Q}$ è definita come nella precedente dimostrazione, per ogni $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ continua e limitata si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{W}} f(w)\,\mathrm{d}\mathbf{P}_{B+h}(w) &= \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[f(B+h)\right] \\
(h \text{ deterministico}) \quad &= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[f(B^h+h)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[f(B)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left[f(B)E_h(B)\right] = \int_{\mathbb{W}} f(w)E_h(w)\,\mathrm{d}\mu(w)
\end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Osservazione 6.3.6: Osserviamo che nel contesto del Corollario precedente, considerando un MB std B come v.a. a valori in $\mathbb{W}$ vale $\left(\int_0^{+\infty} h'(s)\,\mathrm{d}b_s\right)(B) = \int_0^{+\infty} h'(s)\,\mathrm{d}B_s$, quindi la notazione di E_h è consistente.

Tale uguaglianza si può verificare usando il Corollario 3.2.45 e quanto detto nell'Osservazione successiva a tale Corollario, infatti l'uguaglianza vale banalmente nel caso in cui h' è semplice, poi si prende una successione di funzioni semplici che converge puntualmente $\mathcal{L}^1$-q.o. a h' ed a meno di modificare h' su un insieme $\mathcal{L}^1$-nullo possiamo supporre che la vi converga ovunque su $[0, \infty)$, quindi si passa al limite nell'uguaglianza voluta usando il Corollario e l'Osservazione prima menzionati per ottenerla per $h' \in L^2([0, \infty), \mathcal{L}^1)$ generica.

6.4 Applicazione del teorema di Girsanov alle EDS

Fissiamo sempre uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ con filtrazione continua a destra. Siano $f : [0,\infty) \times \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ e $g : [0,\infty) \times \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ progressivamente misurabili e consideriamo l'EDS $\mathrm{e}_x(f,g)$ con coefficienti dati da f e g e dato iniziale $x \in \mathbb{R}$, cioè

$$\mathrm{d}X_t = g(t,X)\,\mathrm{d}t + f(t,X)\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x.$$

Supponiamo anche che esista una soluzione a tale EDS. Consideriamo una funzione $h : [0,\infty) \times \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ progressivamente misurabile e limitata e definiamo la martingala locale continua L come

$$L_t^h = \int_0^t h(s,X)\,\mathrm{d}B_s \quad \forall t \geq 0.$$

Lemma 6.4.1: *Il processo $\mathcal{E}(L^h)$ è una martingala continua.*

Dimostrazione. Infatti per ogni $t \geq 0$ vale

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t h(s,X)^2\,\mathrm{d}s\right)\right] < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6.3}$$

dunque la tesi segue dal Corollario 6.2.4 del Criterio di Novikov. □

Essendo $\mathcal{E}(L^h)$ una martingala possiamo definire la probabilità $\mathbf{Q}$ attraverso $\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_t^0} = \mathcal{E}(L^h)_t\,\mathrm{d}\mathbf{P}_{|\mathcal{F}_t^0}$ per ogni $t \geq 0$. Per costruzione $\mathbf{Q} \triangleleft \mathbf{P}$. Abbiamo dimostrato grazie al Teorema 6.1.10 di Girsanov che

$$\widetilde{B}_t = B_t - \langle L^h, B\rangle_t = B_t - \int_0^t h(s,X)\,\mathrm{d}s \quad \forall t \geq 0$$

è ancora un MB std (Proposizione 6.3.1 ed Osservazione successiva). Vale il seguente risultato.

Teorema 6.4.2: *Se (X,B) è una soluzione di $\mathrm{e}_x(f,g)$, allora $(X,\widetilde{B})$ è una soluzione dell'EDS $\mathrm{e}_x(f, g+fh)$.*

Dimostrazione. Infatti preso $t \geq 0$ vale

$$\begin{aligned} X_t &= x + \int_0^t g(s,X)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(s,X)\,\mathrm{d}B_s \\ &= x + \int_0^t g(s,X)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(s,X)\,\mathrm{d}\left(\widetilde{B}_s + \langle L^h, B\rangle_s\right) \\ &= x + \int_0^t \left(g(s,X) + f(s,X)h(s,X)\right)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(s,X)\,\mathrm{d}\widetilde{B}_s. \end{aligned}$$

□

Corollario 6.4.3: *Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e limitata, allora esistono soluzioni per l'EDS*

$$\mathrm{d}X_t = h(X_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \quad X_0 = 0$$

in cui B è un MB std.

Dimostrazione. Prendiamo W un MB std, allora (W,W) è soluzione dell'EDS $\mathrm{e}_0(1,0)$. Applicando il Teorema precedente troviamo che (W,B) con

$$B_t = \widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t h(W_s)\,\mathrm{d}s$$

è una soluzione di $\mathrm{e}_0(1,h)$, che è l'EDS considerata. □

A

Ricorrenza e Transienza del MB

In quest'appendice andremo a studiare alcune proprietà MB^d std al variare di $d \in \mathbb{N}_+$ (tali proprietà si trasferiscono poi in modo ovvio anche a MB^d che partono non dall'origine). In particolare, in qualche senso, analizzeremo il suo movimento nello spazio d-dimensionale: quali regioni visita? Visita ogni aperto/chiuso? Con che probabilità lo fa?

Fissiamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Iniziamo dando della terminologia.

Definizione A.0.1: Un processo stocastico $X = (X_t)_{t\geq 0}$ a valori in uno spazio topologico E è detto

- *ricorrente per punti* se per ogni $x \in E$

$$\mathbf{P}\left(\exists t \geq 0 \quad X_t = x\right) = 1;$$

- *ricorrente* se per ogni $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, aperto

$$\mathbf{P}\left(\exists t \geq 0 \quad X_t \in A\right) = 1;$$

- *transiente* se non è ricorrente.

Osservazione A.0.2: Ovviamente un processo ricorrente per punti è anche ricorrente.

Fissiamo $B = (B_t)_{t\geq 0} = (B^i_t)^{i=1,\dots,d}_{t\geq 0}$ un MB^d std con $d \geq 1$, inoltre per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ed ogni $a > 0$ sarà

$$T^x_a = \inf\{t \geq 0 \mid \|B_t - x\| = a\}.$$

Osserviamo preliminarmente che se $d = 1$ abbiamo già la risposta alle nostre domande praticamente a portata di mano.

Teorema A.0.3: *Se $d = 1$ allora B è ricorrente per punti.*

Dimostrazione. Semplice conseguenza della Proposizione 4.3.2. □

Proposizione A.0.4: *Siano $a, b > 0$ e $x \in \mathbb{R}^d$ t.c. $a < \|x\| < b$, allora*

$$\mathbf{P}(T_a^x < T_b^x) = \begin{cases} \frac{\log(b)-\log(\|x\|)}{\log(b)-\log(a)} & \textit{se } d = 2 \\ \frac{\|x\|^{2-d}-b^{2-d}}{a^{2-d}-b^{2-d}} & \textit{se } d \geq 3. \end{cases}$$

Dimostrazione. Fissiamo un $d \geq 2$ e un $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$. Consideriamo per ogni $y \in \mathbb{R}^d$, $y \neq x$

$$f(y) = \varphi(\|y-x\|) = \begin{cases} \log(\|y-x\|) & \text{se } d = 2 \\ \frac{1}{\|y-x\|^{d-2}} & \text{se } d \geq 3 \end{cases}$$

e per ogni $t \geq 0$ chiamiamo $X_t = f(B_t)$. Ovviamente $f \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{x\})$ e un semplice conto mostra che f è armonica su $\mathbb{R}^d \setminus \{x\}$. Dico quindi che $X^{T_a^x \wedge T_b^x} = (f(B_{t\wedge T_a^x \wedge T_b^x}))_{t\geq 0}$ è una martingala, infatti usando la Formula di Itô, osservando che $B^{T_a^x \wedge T_b^x}$ ha traiettoria con immagine $\mathbf{P}$-q.c. contenuta in $\{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y-x\| \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^d \setminus \{x\}$ (ossia possiamo effettivamente usare la Formula di Itô), si ottiene

$$\begin{aligned} X_{t\wedge T_a^x \wedge T_b^x} &= f(0) + \int_0^t \nabla f(B_{s\wedge T_a^x \wedge T_b^x})\, \mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_{t\wedge T_a^x \wedge T_b^x})\, \mathrm{d}s \\ &= f(0) + \int_0^{t\wedge T_a^x \wedge T_b^x} \nabla f(B_s)\, \mathrm{d}B_s \end{aligned}$$

dunque $X^{T_a^x \wedge T_b^x}$ è una martingala locale continua, ma in realtà è una martingala continua UI, infatti:

- se $d \geq 3$ f è limitata su $\{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y-x\| \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^d \setminus \{x\}$, dunque $X^{T_a^x \wedge T_b^x}$ è una martingala continua limitata;
- se $d = 2$, vale $\nabla f(y) = \frac{y-x}{\|y-x\|^2}$ e per $i = 1, 2$ si ha

  $$\mathbb{E}\left[\int_0^{T_a^x \wedge T_b^x} \frac{(B_s^i - x_i)^2}{\|B_s - x\|^4}\, \mathrm{d}s\right] \leq \frac{1}{b^2} < +\infty$$

  quindi, per la Proposizione 3.2.32, $X^{T_a^x \wedge T_b^x} \in \mathrm{H}^2$.

Di conseguenza

$$\mathbb{E}\left[f(B_{t\wedge T_a^x \wedge T_b^x})\right] = f(0) = \varphi(\|x\|)$$

che diventa (essendo $\mathbf{P}(T_a^x < T_b^x) + \mathbf{P}(T_a^x \geq T_b^x) = 1$)

$$\varphi(a)\mathbf{P}(T_a^x < T_b^x) + \varphi(b)(1 - \mathbf{P}(T_a^x < T_b^x)) = \varphi(\|x\|)$$

da cui segue facilmente la tesi. □

Lemma A.0.5: *Siano $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}^d$ t.c. $0 < a < \|x\|$, allora*

$$\mathbf{P}(T_a^x < +\infty) = \begin{cases} 1 & \textit{se } d = 2 \\ \frac{a^{d-2}}{\|x\|^{d-2}} & \textit{se } d \geq 3. \end{cases}$$

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione precedente passando al limite per $b \longrightarrow +\infty$. □

Teorema A.0.6: *(1) Se $d = 2$ allora B è ricorrente ma non ricorrente per punti.*

(2) *Se $d \geq 3$ allora B è transiente. In particolare per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, esiste un $\varepsilon_x > 0$ t.c.*

$$\mathbf{P}(\exists t \geq 0 \quad B_t \in \overline{B}(x, \varepsilon_x)) < 1.$$

Dimostrazione. (1) Dal Lemma precedente nel caso $d = 2$ si deduce che per ogni $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ed ogni $a > 0$ la traiettoria di B entra in $\overline{B}(x, a)$ con probabilità 1 e $B_0 = 0$, quindi la proprietà di ricorrenza voluta. Vediamo adesso che B non è ricorrente per punti. Fissiamo $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$ ed osserviamo che

$$\mathbf{P}(T^x_{n^{-n}} < T^x_n) = \frac{\log(n) - \log(\|x\|)}{(1+n)\log(n)} \longrightarrow 0$$

per $n \to +\infty$. Sia $T^x = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = x\}$, vale $T^x \geq T^x_{n^{-n}}$, dunque $\{T^x < T^x_n\} \subset \{T^x_{n^{-n}} < T^x_n\}$, ma $T^x_n \nearrow +\infty$ $\mathbf{P}$-q.c., dunque

$$\mathbf{P}(T^x < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(T^x < T^x_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(T^x_{n^{-n}} < T^x_n) = 0$$

che equivale a quanto volevamo provare.

(2) Dal Lemma precedente nel caso $d \geq 3$ si osserva che se a è abbastanza piccolo $\mathbf{P}(T^x_a < +\infty) < 1$, da cui quanto voluto.

□

In realtà per $d \geq 2$ non solo B non è ricorrente per punti ma ogni punto non viene q.c. mai visitato da B.

Proposizione A.0.7: *Sia $d \geq 2$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ vale*

$$\mathbf{P}(\exists t \geq 0 \quad B_t = x) = 0$$

Dimostrazione. Osserviamo che dire fissato $x \in \mathbb{R}^d$, il fatto $\mathbf{P}(\exists t \geq 0 \quad B_t = x) = 0$ equivale a $\mathbf{P}(T^x_0 < +\infty) = 0$. Dimostriamo quest'ultimo fatto. Osserviamo che

$$\{T^x_0 < +\infty\} \subset \bigcap_{m \geq \|x\|^{-1}} \left\{T^x_{m^{-1}} < +\infty\right\}$$

e per il Lemma precedente $\mathbf{P}\left(T^x_{m^{-1}} < +\infty\right) = (m\,\|x\|)^{-d+2}$ per ogni $m > \|x\|^{-1}$, quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T^x_0 < +\infty) &\leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{m > \|x\|^{-1}} \left\{T^x_{m^{-1}} < +\infty\right\}\right)\\ &= \lim_{m\to+\infty} \mathbf{P}\left(T^x_{m^{-1}} < +\infty\right) = \lim_{m\to+\infty} (m\,\|x\|)^{-d+2} = 0.\end{aligned}$$

□

Grazie all'ultimo fatto dimostrato possiamo dimostrare anche il seguente interessante fatto.

Proposizione A.0.8: *Se $d \geq 3$ allora $\mathbf{P}$-q.c. vale $\|B_t\| \to +\infty$ per $n \to +\infty$.*

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, qualsiasi. Consideriamo la funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{x\})$ t.c. per ogni $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x\}$

$$f(y) = \frac{1}{\|y-x\|^{d-2}}.$$

Un semplice conto mostra che f è armonica e grazie alla Proposizione precedente sappiamo che B ha immagine $\mathbf{P}$-q.c. contenuta in $\mathbb{R}^d \setminus \{x\}$, dunque possiamo usare la Formula di Itô con $f(B)$ per ottenere

$$\begin{aligned} f(B_t) &= f(0) + \int_0^t \nabla f(B_s)\, \mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)\, \mathrm{d}s \\ (f \text{ è armonica}) &= f(0) + \frac{1}{2}\int_0^t \nabla f(B_s)\, \mathrm{d}B_s \end{aligned}$$

dunque $f(B)$ è una martingala locale continua positiva e quindi è anche una supermartingala continua positiva. Una supermartingala positiva è sempre limitata in $L^1(\mathbf{P})$, dunque per quanto noto sulla convergenza di supermartingale si ha l'esistenza di una v.a. non negativa $X \in L^1(\mathbf{P})$ t.c. $f(B_t) \longrightarrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. per $t \to +\infty$. Ma se $B = (B^i)^{i=1,\dots,d}$, si ha

$$f(B_t) \leq (\|B_t\| - \|x\|)^{-d+2} = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^d (B_t^i)^2} - \|x\|\right)^{-d+2}$$

e quindi $\mathbf{P}$-q.c.

$$X \leq \limsup_{t\to+\infty} (\|B_t\| - \|x\|)^{-d+2} = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^d \left(\limsup_{t\to+\infty} B_t^i\right)^2} - \|x\|\right)^{-d+2} = 0$$

in quanto grazie alla Proposizione 4.3.2 per ogni $i = 1, ..., d$ vale $\limsup_{t\to+\infty} B_t^i = +\infty$ $\mathbf{P}$-q.c., si ha quindi la tesi. □

Esempio A.0.9 (Una martingala locale continua UI che non è una martingala): Fissiamo $d \geq 3$ ed $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$. Sia B un MB^d std e sia f come nella Proposizione precedente allora definendo per ogni $t \geq 0$

$$M_t = f(B_t) = \frac{1}{\|B_t - x\|^{d-2}}$$

per quanto detto nella Dimostrazione precedente M è una martingala locale continua. Proviamo adesso che è UI e che non è una martingala. Proviamo che M è limitata in $L^p(\mathbf{P})$ per $p < \frac{d}{d-2}$ ($d(d-2)^{-1} > 1$). Fissiamo quindi $p < \frac{d}{d-2}$, poniamo $r = p(d-2)$ e chiamiamo $B_x = \overline{B}(x, 2^{-1}\|x\|)$ (che non contiene l'origine). Osservando che per $y \in B_x$ vale $\|y\| \geq 2^{-1}\|x\|$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[M_t^p\right] &= \mathbb{E}\left[\|B_t - x\|^{-d+2}\right] = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \|y-x\|^{-r} \exp\left(-\frac{\|y\|}{2t}\right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{B_x} \|y-x\|^{-r} \exp\left(-\frac{\|y\|}{2t}\right) \mathrm{d}y + \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{B_x^c} \|y-x\|^{-r} \exp\left(-\frac{\|y\|}{2t}\right) \mathrm{d}y \\ &\leq \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x\|}{4t}\right) \int_{B_x} \|z\|^{-r}\, \mathrm{d}z + \frac{2^r}{\|x\|^r (2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{\|y\|}{2t}\right) \mathrm{d}y \\ &= C_d \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x\|}{4t}\right) \int_0^{2^{-1}\|x\|} \rho^{-r+d-1}\, \mathrm{d}\rho + \frac{2^r}{\|x\|^r} \leq M < +\infty \end{aligned}$$

in cui il primo integrale dell'ultima equazione è finito in quanto essendo $p < d(d-2)^{-1}$ vale $r < d$ e quindi $-r+d-1 > -1$. Quindi M è martingala locale continua UI. Se fosse anche una martingala, essendo UI, dovrebbe convergere **P**-q.c. ed in $L^1(\mathbf{P})$ ad una $M_\infty \in L^1(\mathbf{P})$. In particolare M_∞ dovrebbe essere non negativa e con $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0] = \|x\|^{-d+2} > 0$. Ma dalla Proposizione precedente sappiamo che $\|B_t\| \longrightarrow +\infty$ per $t \to +\infty$, dunque necessariamente $M_\infty = 0$, che contraddice $\mathbb{E}[M_\infty] > 0$.

B

Polinomi di Hermite e Creazione di Martingale Locali Continue

Iniziamo definendo l'oggetto principale con cui lavoreremo in quest'appendice: i *polinomi di Hermite*. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\mathbb{R} \ni u \longmapsto \exp\left(ux - \frac{u^2}{2}\right) \in [0, \infty)$$

è analitica. I polinomi di Hermite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono quindi definiti attraverso la relazione

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u^n}{n!} h_n(x) = \exp\left(ux - \frac{u^2}{2}\right)$$

per ogni $x, u \in \mathbb{R}$. Di conseguenza per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$h_n(x) = \partial_u^n \exp\left(ux - \frac{u^2}{2}\right)\bigg|_{u=0} = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Osserviamo che definendo per ogni $n \in \mathbb{N}$ ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $a > 0$

$$H_n(x, a) = a^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

e $H_n(x, 0) = x^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} \exp\left(ux - \frac{au^2}{2}\right) &= \exp\left(\sqrt{a}u\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{(u\sqrt{a})^2}{2}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u^n}{n!} a^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u^n}{n!} H_n(x, a). \end{aligned}$$

quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$, ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $a \geq 0$

$$H_n(x, a) = \partial_u^n \exp\left(ux - \frac{au^2}{2}\right)\bigg|_{u=0}.$$

Osservazione B.0.1: Ricordiamo che è possibile provare per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che se $f \in C^n(\mathbb{R})$ vale

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(xf(x)) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Lemma B.0.2: *Se $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono i polinomi definiti nella discussione sopra, per $n \in \mathbb{N}_+$ valgono le relazioni*

$$\begin{aligned} \partial_x H_n(x,a) &= nH_{n-1}(x,a) \\ \left(\frac{1}{2}\partial_x^2 + \partial_a\right) H_n(x,a) &= 0 \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $a \geq 0$.

Dimostrazione. Siano $n \in \mathbb{N}_+$, $x \in \mathbb{R}$ ed $a \geq 0$. Vediamo la prima relazione

$$\begin{aligned} \partial_x H_n(x,a) &= \partial_x \partial_u^n \exp\left(ux - \frac{au^2}{2}\right)\Big|_{u=0} \\ &= \partial_u^n \partial_x \exp\left(ux - \frac{au^2}{2}\right)\Big|_{u=0} \\ &= \partial_u^n \left(u \exp\left(ux - \frac{au^2}{2}\right)\right)\Big|_{u=0} \\ &= \left[u\partial_u^n \exp\left(ux - \frac{au^2}{2}\right) + n\partial_u^{n-1} \exp\left(ux - \frac{au^2}{2}\right)\right]\Big|_{u=0} = nH_{n-1}(x,a). \end{aligned}$$

Vediamo la seconda relazione

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_x^2 H_n(x,a) &= \frac{1}{2}\partial_x^2 \partial_u^n \exp\left(ux - \frac{au^2}{2}\right)\Big|_{u=0} \\ &= \frac{1}{2}\partial_u^n \partial_x^2 \exp\left(ux - \frac{au^2}{2}\right)\Big|_{u=0} \\ &= \frac{1}{2}\partial_u^n \left(u^2 \exp\left(ux - \frac{au^2}{2}\right)\right)\Big|_{u=0} \\ &= -\partial_a H_n(x,a). \end{aligned}$$

□

Teorema B.0.3: *Sia M una martingala locale continua con $M_0 = 0$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ il processo $L^{(n)}$ definito per ogni $t \geq 0$ da*

$$L_t^{(n)} = H_n(M_t, \langle M \rangle_t)$$

è una martingala locale continua e per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $t \geq 0$

$$L_t^{(n)} = n! \int_0^t \mathrm{d}M_{t_1} \int_0^{t_1} \mathrm{d}M_{t_2} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathrm{d}M_{t_n}.$$

In particolare se $M = B$ è un MB std il processo $L^{(n)}$ è anche una martingala.

Dimostrazione. Grazie al Lemma precedente, applicando la Formula di Itô, si ottiene per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $t \geq 0$

$$L_t^{(n)} = n \int_0^t L_s^{(n-1)} \,\mathrm{d}s$$

da cui segue che $L^{(n)}$ è una martingala locale continua ed iterando anche la rappresentazione integrale della tesi. □

Osservazione B.0.4: Nel contesto del Teorema precedente, per $n = 0, 1, 2$ si ottengono le già note martingale locali continue $1, M, M^2 - \langle M \rangle$.