Act-2001 – Exemples au dépannage

Etienne Marceau, Ph.D. A.S.A.

Professeur titulaire (École d'actuariat, ULaval), Co-directeur (Laboratoire ACT&RISK)
École d'actuariat

École d'actuariat, U.Laval

8 février 2017

Modèle de base

Définition

Définition de X :

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k\,, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

- M : nombre de sinistres
- B_k : montant du $k$ième sinistre

Modèle de base

Espérance

Soit les v.a. M et B tel que $E[M] < \infty$ et $E[B] < \infty$
Espérance de X :

$$E[X] = E[E[X|M]] = E[M \times E[B]] = E[M]\,E[B]$$

Modèle de base

Variance

Soit les v.a. M et B tel que $E\left[M^j\right] < \infty$ et $E\left[B^j\right] < \infty$, pour $j = 1, 2$
Variance de X :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left(X\right) &= E_M\left[\mathrm{Var}\left(X|M\right)\right] + \mathrm{Var}_M\left(E\left[X|M\right]\right) \\ &= E\left[M\right]\mathrm{Var}\left(B\right) + \mathrm{Var}\left(M\right)\left(E\left[B\right]\right)^2. \end{aligned}$$

Modèle de base

Algorithme de simulation

On vise à simuler une réalisation $X^{(j)}$ de X

1. Simuler une réalisation $M^{(j)}$ de M.
2. Si $M^{(j)} = 0$, alors $X^{(j)} = 0$.
3. Si $M^{(j)} > 0$, alors ...
    1. Simuler les réalisations $B_1^{(j)}$, ..., $B_{M^{(j)}}^{(j)}$ de B_1, ..., $B_{M^{(j)}}$.
    2. Calculer $X^{(j)} = B_1^{(j)} + ... + B_{M^{(j)}}^{(j)}$.

Modèle de base

Transformée de Laplace-Stieltes

Soit les v.a. M et B avec la fgp P_M et la transformée de L-S L_B
Transformée de L-S de X :

$$L_X(t) = E\left[E\left[\mathrm{e}^{-tX}|M\right]\right] = P_M(L_B(t))$$

Loi Poisson composée

Exemple #1

Soit $M \sim Pois\left(\lambda = 1.5\right)$ et $B \sim Gamma\left(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{500}\right)$.

1. Calculer $E\left[X\right]$ et $Var\left(X\right)$.
2. Calculer $F_X\left(x\right)$, pour $x = 0$, 500, 1000, 1500, 2000, 5000 (note : prendre $k^* = 1000$). Tracer la courbe.
3. Utiliser un outil d'optimization numérique en R (et si nécessaire) pour évaluer $VaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$
4. Évaluer $TVaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
5. Évaluer $E\left[\left(X - x\right)_+\right]$, pour $x = 0$, 500, 1000, 1500, 2000, 5000. Refaire avec $VaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$. Valider la relation
$$TVaR_\kappa\left(X\right) = VaR_\kappa\left(X\right) + \frac{1}{1-\kappa} E\left[\left(X - VaR_\kappa\left(X\right)\right)_+\right].$$
6. Produire $m = 1000000$ réalisations $X^{(j)}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ de X. Évaluer approximativement les quantités dans les items précédents.

Loi binomiale négative composée

Exemple #2

Soit $M \sim BinNeg\left(r = 2, q = \frac{4}{7}\right)$ et $B \sim Gamma\left(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{500}\right)$.

1. Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.
2. Calculer $F_X(x)$, pour $x = 0,\ 500,\ 1000,\ 1500,\ 2000,\ 5000$ (note : prendre $k^* = 1000$). Tracer la courbe.
3. Utiliser un outil d'optimization numérique en R (et si nécessaire) pour évaluer $VaR_\kappa(X)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$
4. Évaluer $TVaR_\kappa(X)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
5. Évaluer $E\left[(X - x)_+\right]$, pour $x = 0,\ 500,\ 1000,\ 1500,\ 2000,\ 5000$. Refaire avec $VaR_\kappa(X)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$. Valider la relation
$$TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} E\left[(X - VaR_\kappa(X))_+\right].$$
6. Produire $m = 1000000$ réalisations $X^{(j)}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ de X. Évaluer approximativement les quantités dans les items précédents.

Loi binomiale composée

Exemple #3

Soit $M \sim Binom\left(n = 30, q = 0.05\right)$ et $B \sim Gamma\left(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{500}\right)$.

1. Calculer $E\left[X\right]$ et $Var\left(X\right)$.
2. Calculer $F_X\left(x\right)$, pour $x = 0$, 500, 1000, 1500, 2000, 5000 (note : prendre $k^* = 1000$). Tracer la courbe.
3. Utiliser un outil d'optimization numérique en R (et si nécessaire) pour évaluer $VaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$
4. Évaluer $TVaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
5. Évaluer $E\left[\left(X - x\right)_+\right]$, pour $x = 0$, 500, 1000, 1500, 2000, 5000. Refaire avec $VaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$. Valider la relation

$$TVaR_\kappa\left(X\right) = VaR_\kappa\left(X\right) + \frac{1}{1-\kappa} E\left[\left(X - VaR_\kappa\left(X\right)\right)_+\right].$$

6. Produire $m = 1000000$ réalisations $X^{(j)}$ ($j = 1, 2, ..., m$) de X. Évaluer approximativement les quantités dans les items précédents.

Loi Poisson composée

Exemple #4

Soit $M \sim Pois\left(\lambda = 1.5\right)$ et $B \sim Pareto\left(\alpha = 2.5, \lambda = 1500\right)$.

1. Calculer $E\left[X\right]$ et $Var\left(X\right)$.
2. Produire $m = 1000000$ réalisations $X^{(j)}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ de X.
3. Évaluer approximativement les quantités suivantes :
    1. $F_X\left(x\right)$, pour $x = 0,\ 500,\ 1000,\ 1500,\ 2000,\ 5000$.
    2. $E\left[\left(X - x\right)_+\right]$, pour $x = 0,\ 500,\ 1000,\ 1500,\ 2000,\ 5000$.
    3. $VaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
    4. $TVaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
    5. Tracer les 4 courbes pour ces quantités.

Loi binomiale négative composée

Exemple #5

Soit $M \sim BinNeg\left(r=2, q=\frac{4}{7}\right)$ et $B \sim Pareto\left(\alpha=2.5, \lambda=1500\right)$.

1. Calculer $E\left[X\right]$ et $Var\left(X\right)$.
2. Produire $m=1000000$ réalisations $X^{(j)}$ $(j=1,2,...,m)$ de X.
3. Évaluer approximativement les quantités suivantes :
    1. $F_X\left(x\right)$, pour $x=0$, 500, 1000, 1500, 2000, 5000.
    2. $E\left[\left(X-x\right)_+\right]$, pour $x=0$, 500, 1000, 1500, 2000, 5000.
    3. $VaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa=0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
    4. $TVaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa=0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
    5. Tracer les 4 courbes pour ces quantités.

Loi Poisson composée

Exemple #6

Soit $M \sim Pois\left(\lambda = 1.5\right)$ et

$$B \sim LNorm\left(\mu = \ln\left(1000\right) - 0.32, \sigma = 0.8\right).$$

1. Calculer $E\left[X\right]$ et $Var\left(X\right)$.
2. Produire $m = 1000000$ réalisations $X^{(j)}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ de X.
3. Évaluer approximativement les quantités suivantes :
   1. $F_X\left(x\right)$, pour $x = 0,\ 500,\ 1000,\ 1500,\ 2000,\ 5000$.
   2. $E\left[\left(X - x\right)_+\right]$, pour $x = 0,\ 500,\ 1000,\ 1500,\ 2000,\ 5000$.
   3. $VaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
   4. $TVaR_\kappa\left(X\right)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
   5. Tracer les 4 courbes pour ces quantités.

Loi binomiale négative composée

Exemple #7

Soit $M \sim BinNeg\left(r = 2, q = \frac{4}{7}\right)$ et

$$B \sim LNorm\left(\mu = \ln(1000) - 0.32, \sigma = 0.8\right).$$

1. Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.
2. Produire $m = 1000000$ réalisations $X^{(j)}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ de X.
3. Évaluer approximativement les quantités suivantes :
   1. $F_X(x)$, pour $x = 0,\ 500,\ 1000,\ 1500,\ 2000,\ 5000$.
   2. $E\left[(X - x)_+\right]$, pour $x = 0,\ 500,\ 1000,\ 1500,\ 2000,\ 5000$.
   3. $VaR_\kappa(X)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
   4. $TVaR_\kappa(X)$, pour $\kappa = 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
   5. Tracer les 4 courbes pour ces quantités.