Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives (Théorie)

Hélène Cossette et Etienne Marceau

Version : 18 octobre 2019

Table des matières

1 Notions de probabilité pour la modélisation du risque **1**

1.1 Introduction . . . 1
1.2 Variables aléatoires . . . 1
1.2.1 Définitions . . . 1
1.2.2 Variables aléatoires discrètes . . . 2
1.2.3 Variables aléatoires continues . . . 2
1.3 Espérance d'une variable aléatoire . . . 3
1.3.1 Définition . . . 3
1.3.2 Espérance d'une fonction . . . 4
1.3.3 Moment d'ordre n . . . 4
1.3.4 Espérance d'une fonction indicatrice . . . 5
1.3.5 Intégrale de Riemann – Stieltjes . . . 5
1.4 Variance . . . 6
1.4.1 Définition . . . 6
1.4.2 Coefficient de variation . . . 6
1.5 Moments centrés . . . 7
1.6 Coefficient d'asymétrie . . . 7
1.7 Fonction génératrice des moments . . . 8
1.8 Fonction génératrice des probabilités . . . 8
1.9 Transformée de Laplace-Stieltjes . . . 10
1.10 Espérance tronquée . . . 11
1.10.1 Définition . . . 11
1.10.2 Exemples . . . 12
1.11 Fonction *stop-loss* et espérance limitée . . . 14
1.11.1 Définition de la fonction *stop-loss* . . . 14
1.11.2 Définition de l'espérance limitée . . . 15
1.11.3 Exemples . . . 18
1.12 Fonction d'excès-moyen . . . 19
1.13 Fonction quantile . . . 19
1.13.1 Définition de base . . . 19
1.13.2 Deuxième définition . . . 21
1.13.3 Théorèmes en lien avec la fonction quantile . . . 22
1.14 Fonction quantile et espérance . . . 25
1.15 Construction de distributions avec mélange . . . 27
1.16 Lois conjointes de n variables aléatoires . . . 28
1.16.1 Définitions et propriétés . . . 28
1.16.2 Variables aléatoires à support dénombrable . . . 30
1.16.3 Variables aléatoires continues . . . 30
1.17 Covariance et corrélation linéaire . . . 31
1.18 Espérance conditionnelle . . . 33
1.19 Somme de variables aléatoires . . . 33
1.19.1 Définitions et caractéristiques de base . . . 33
1.19.2 Somme de 2 v.a. discrètes indépendantes . . . 34

1.19.3 Somme de 2 v.a. continues indépendantes . . . 35
1.19.4 Somme de v.a. indépendantes et fgm . . . 35
1.20 Somme de v.a. indépendantes et fgp . . . 37
1.20.1 Relation de base . . . 37
1.20.2 En coulisses . . . 37
1.20.3 Exemple #1 . . . 37
1.20.4 Exemple #2 . . . 38
1.20.5 Exemple #3 . . . 39
1.21 Somme de v.a. indépendantes et TLS . . . 40
1.22 Différence de v.a. indépendantes . . . 40
1.23 Notes bibliographiques . . . 41

2 Méthodes de simulation Monte-Carlo 43
2.1 Introduction . . . 43
2.2 Génération de nombres pseudo-aléatoires . . . 43
2.3 Méthodes de base . . . 44
2.3.1 Simulation par la méthode inverse . . . 44
2.3.2 Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a. . . . 45
2.3.3 Simulation de v.a. définies par un mélange . . . 45
2.4 Erreur et intervalle de confiance . . . 50
2.5 Notes bibliographiques . . . 51

3 Mesures de risque et mutualisation des risques 53
3.1 Introduction . . . 53
3.2 Mesures de risque VaR . . . 53
3.3 Mesure de risque TVaR . . . 55
3.4 Mesure LTVaR . . . 60
3.5 Mesure CTE et controverse . . . 60
3.6 Propriétés des mesures de risque . . . 63
3.7 Mutualisation en actuariat . . . 72
3.7.1 Mutualisation et coût moyen par contrat . . . 73
3.7.2 Mutualisation et loi des grands nombres avec variance finie . . . 74
3.7.3 Mutualisation et loi des grands nombres nombres avec variance infinie . . . 77
3.7.4 Marge de sécurité positive et mesure de solvabilité sur une période . . . 78
3.8 Primes pures et primes majorées . . . 82
3.8.1 Principe de la valeur espérée . . . 83
3.8.2 Principe de la variance . . . 83
3.8.3 Principe de l'écart type . . . 83
3.8.4 Principe de la VaR . . . 84
3.8.5 Principe de la TVaR . . . 84
3.8.6 Approche top-down et principes adaptés de la VaR et de la TVaR . . . 84
3.8.7 Principe exponentiel . . . 84
3.8.8 Exemples numériques . . . 84
3.9 Notes bibliographiques . . . 84

4 Modélisation des risques non-vie 87
4.1 Introduction . . . 87
4.2 Modèle stochastique pour un risque X . . . 87
4.2.1 Modèle général pour X . . . 87
4.2.2 Espérance de X . . . 88
4.2.3 Variance de X . . . 88
4.2.4 Fonction de répartition de X . . . 89
4.2.5 Simulation de somme aléatoire . . . 89
4.2.6 Espérance tronquée de X . . . 90

4.2.7 Mesure TVaR . . . 90
4.2.8 Fonction génératrice des moments . . . 90
4.2.9 Transformée de Laplace-Stieltjes . . . 91
4.2.10 Fgp et somme aléatoire de v.a. iid . . . 91
4.3 Distributions de fréquence . . . 93
4.3.1 Loi de Poisson . . . 93
4.3.2 Loi binomiale . . . 93
4.3.3 Loi binomiale négative . . . 94
4.3.4 Comparaison des variances des trois lois composées . . . 94
4.4 Distributions du montant d'un sinistre . . . 95
4.4.1 Loi exponentielle . . . 95
4.4.2 Lois gamma et Erlang . . . 96
4.4.3 Loi lognormale . . . 97
4.4.4 Loi Weibull . . . 97
4.4.5 Lois Pareto, Burr et F-généralisée . . . 97
4.4.6 Lois mélanges d'exponentielles et d'Erlang . . . 98
4.4.7 Comparaison des lois gamma, lognormale et de Pareto . . . 99
4.5 Distributions de sinistres *light* et *heavy tailed* . . . 99
4.5.1 Existence de la fgm . . . 99
4.5.2 Fonction d'excès-moyen . . . 100
4.5.3 Distribution sub-exponentielle . . . 100
4.6 Approches indemnitaire et forfaitaire . . . 100
4.6.1 Approche indemnitaire . . . 101
4.6.2 Approche forfaitaire . . . 105
4.6.3 Remarques . . . 106
4.7 Généralisation des principales lois de fréquence . . . 106
4.7.1 Lois Poisson-mélange . . . 106
4.7.2 Loi Poisson-gamma ou binomiale négative . . . 107
4.7.3 Loi Poisson-inverse gaussienne . . . 110
4.7.4 Loi Poisson-lognormale . . . 110
4.7.5 Modification de la masse à 0 . . . 111
4.8 Somme aléatoire et allocation . . . 111
4.9 Pertes financières . . . 112
4.10 Pertes financières *vs* coûts en assurance . . . 114
4.11 Notes bibliographiques . . . 116

5 Mutualisation des risques non-vie 117
5.1 Introduction . . . 117
5.2 Méthodes d'agrégation des risques . . . 117
5.3 Agrégation et cas particuliers . . . 131
5.3.1 Loi Poisson composée . . . 131
5.3.2 Loi binomiale négative composée . . . 132
5.3.3 Loi binomiale composée . . . 133
5.4 Méthodes d'approximation fondées sur les moments . . . 133
5.4.1 Approximation fondée sur la distribution normale . . . 134
5.4.2 Approximation fondée sur la distribution gamma translatée . . . 135
5.4.3 Approximation fondée sur la distribution lognormale . . . 136
5.4.4 Approximation fondée sur la distribution F-généralisée . . . 136
5.5 Mutualisation et activités d'assurance . . . 136
5.6 Calcul de la prime majorée - exemple . . . 139
5.7 Mutualisation et facteur aléatoire commun . . . 139
5.7.1 Mutualisation, risque systématique et risque non systématique . . . 139
5.7.2 Mutualisation et risque d'inflation . . . 141
5.7.3 Mutualisation et mortalité stochastique . . . 142

5.8 Mutualisation et risque de crédit . . . 145
5.9 Mutualisation et risques extraordinaires . . . 148
5.10 Mutualisation et risque financier . . . 149
5.11 Mutualisation et catastrophes naturelles . . . 150
5.12 Mutualisation et sinistre maximal . . . 153
5.13 Notes bibliographiques . . . 155

6 Méthodes d'allocation volet 1 157
6.1 Introduction . . . 157
6.2 Propriétés désirables . . . 158
6.3 Fonction homogène et exemples . . . 158
6.4 Théorème d'Euler, remarques et corollaire . . . 159
6.5 Risque global d'un portefeuille et contributions . . . 161
6.5.1 Mesure écart-type et contribution . . . 162
6.5.2 Mesure VaR et contribution . . . 163
6.5.3 Mesure TVaR et contribution . . . 164
6.5.4 Approximation de la contribution . . . 165
6.5.5 Approximation basée sur la simulation . . . 165
6.6 Exemple – Loi normale multivariée . . . 166
6.7 Notes bibliographiques . . . 168

7 Aperçu de la procédure d'estimation 169
7.1 Rappel . . . 169
7.2 Procédure d'estimation . . . 169
7.3 Opérations d'une compagnie d'assurance . . . 170
7.4 Notes bibliographiques . . . 170

8 Estimation des lois pour la fréquence 173
8.1 Introduction . . . 173
8.2 Méthode du maximum de vraisemblance . . . 173
8.2.1 Poisson . . . 174
8.2.2 Binomiale négative . . . 175
8.3 Test d'adéquation . . . 176
8.4 Modèles de fréquence avec masse supplémentaire à zéro . . . 176
8.5 Modèles mélanges de Poisson . . . 177
8.6 Notes bibliographiques . . . 178

9 Estimation des lois pour le montant de sinistre 179
9.1 Introduction . . . 179
9.2 Contexte . . . 179
9.3 Formats des données . . . 179
9.4 Étapes . . . 179
9.5 Ensembles de données . . . 179
9.6 Fonction de répartition empirique . . . 180
9.7 Analyse graphique avec les *q-q plot* . . . 180
9.8 Fonction empirique d'excès moyen . . . 181
9.9 Méthode des moments – données complètes . . . 181
9.10 Méthode du maximum de vraisemblance – données complètes . . . 183
9.11 Méthode du maximum de vraisemblance — données groupées . . . 185
9.12 Méthode du maximum de vraisemblance — données tronquées à gauche . . . 187
9.13 Méthode du maximum de vraisemblance — données censurées à droite . . . 188
9.14 Tests d'adéquation . . . 189
9.14.1 Test de Kolmogorov-Smirnov. . . . 189
9.14.2 Test de Anderson-Darling . . . 190
9.15 Test d'adéquation du khi-deux . . . 190

9.16 Sélection d'un modèle . . . 190
9.16.1 Test du ratio de vraisemblance . . . 191
9.16.2 Méthodologies informelles . . . 191
9.17 Intervalles de confiance . . . 192
9.18 Intervalles de confiance (bis) . . . 192
9.18.1 Comportement asymptotique . . . 193
9.18.2 Intervalle de confiance pour les paramètres . . . 193
9.18.3 Intervalle de confiance pour des fonctions des paramètres . . . 193
9.18.4 Exemple . . . 194
9.19 Méthode du maximum de vraisemblance – version complémentaire . . . 195
9.19.1 Définitions et méthode . . . 195
9.19.2 Données individuelles . . . 196
9.19.3 Données groupées . . . 198
9.19.4 Propriétés des estimateurs . . . 199
9.19.5 Intervalles de confiance . . . 200
9.20 Estimation selon l'approche 2 . . . 205
9.21 Notes bibliographiques . . . 206

10 Processus de Poisson et cie 207
10.1 Introduction . . . 207
10.2 Processus de Poisson homogène . . . 207
10.3 Processus de Poisson non-homogène . . . 212
10.3.1 Motivations . . . 212
10.3.2 Résultats . . . 212
10.4 Processus de Poisson mixte . . . 218
10.5 Processus de renouvellement . . . 222
10.6 Processus agrégés . . . 223
10.7 Valeur présente et processus agrégés . . . 228
10.7.1 Valeur présente et rente certaine . . . 228
10.7.2 Valeur présente et rente sur la vie . . . 228
10.7.3 Valeur présente et processus Poisson composée . . . 229
10.8 Notes bibliographiques . . . 231

11 Méthodes récursives d'agrégation 233
11.1 Introduction . . . 233
11.2 Motivations . . . 233
11.3 Nombres complexes . . . 235
11.4 Fonction génératrice de probabilités multivariée . . . 240
11.4.1 Définition . . . 240
11.4.2 Propriétés . . . 240
11.4.3 Exemples . . . 241
11.5 Somme de v.a. discrètes . . . 241
11.5.1 Somme de n v.a. discrètes indépendantes . . . 241
11.5.2 Somme de n v.a. discrètes i.i.d. . . . 242
11.5.3 Somme de n v.a. discrètes . . . 245
11.6 Somme aléatoire et algorithme de Panjer . . . 246
11.6.1 Notions préliminaires . . . 246
11.6.2 Famille (a,b,0) de lois de fréquence . . . 248
11.6.3 Algorithme de Panjer . . . 250
11.7 Méthodes de discrétisation . . . 255
11.7.1 Méthodes *upper* et *lower* . . . 255
11.7.2 Méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée . . . 257
11.8 Agrégation et transformée de Fourier rapide . . . 260
11.8.1 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire . . . 260

11.8.2 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire discrète avec support fini 261
11.8.3 Algorithme FFT 262
11.8.4 Convolution 262
11.8.5 Autres applications 262
11.8.6 Un peu de magie – série 1 263
11.8.7 Un peu de magie – série 2 264
11.8.8 Un peu de magie – série 3 265
11.8.9 Exemples 267
11.9 Transformée de Fourier rapide 271
11.9.1 Description de la méthode 271
11.9.2 Transformée de Fourier rapide et R 272
11.9.3 Somme de deux v.a. discrètes indépendantes 272
11.9.4 Somme de n v.a. discrètes indépendantes 273
11.9.5 Somme aléatoire (loi composée) 273
11.9.6 Pot-pourri 275
11.9.7 Commentaires 277
11.10 Distribution mélange d'Erlang 277
11.10.1 Définition de base 277
11.10.2 Le mélange d'Erlang est aussi une somme aléatoire de v.a. obéissant à une loi exponentielle 277
11.10.3 La classe des mélanges d'Erlang est dense 278
11.10.4 Un mélange d'exponentielles est un mélange d'Erlang 279
11.10.5 La somme aléatoire de v.a. obéissant à un mélange d'Erlang obéit à un mélange d'Erlang 280
11.10.6 La somme finie de v.a. de lois mélange d'Erlang obéit à un mélange d'Erlang 281
11.10.7 Développement détaillé – La somme aléatoire de v.a. obéissant à un mélange d'Erlang obéit à un mélange d'Erlang 282
11.11 Approximation Poisson composée 287
11.11.1 Cas particulier 287
11.11.2 Cas général 289
11.12 Notes bibliographiques 290

12 Comparaison des risques et ordres stochastiques 291
12.1 Introduction 291
12.2 Ordres partiels 291
12.3 Ordre en dominance stochastique 292
12.3.1 Définition 292
12.3.2 Mesure VaR 292
12.3.3 Espérance 292
12.3.4 Fonctions croissantes univariées 293
12.3.5 Fonctions croissantes multivariées 293
12.3.6 Propriétés de fermeture 293
12.3.7 Condition suffisante 294
12.3.8 Lois paramétriques 294
12.3.9 Lois de Bernoulli et de Poisson 295
12.3.10 Méthodes de discrétisation *upper* et *lower* 295
12.3.11 Stochastiquement croissante 297
12.3.12 Variance et ordre en dominance stochastique 298
12.4 Ordres convexes 298
12.4.1 Définitions 298
12.4.2 Résultats 299
12.4.3 Propriétés de fermeture 299
12.4.4 Condition suffisante 299
12.4.5 Mesure TVaR 300
12.4.6 Lois paramétriques 300

12.4.7 Lois de Bernoulli et de Poisson . . . 301
12.4.8 Lois Poisson - mélange . . . 301
12.4.9 Méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée . . . 303
12.4.10 Mutualisation des risques . . . 304
12.5 Notes bibliographiques . . . 304

13 Distributions multivariées et agrégation des risques 305
13.1 Introduction . . . 305
13.2 Classes de Fréchet . . . 305
13.3 Comonotonicité . . . 306
13.3.1 Définition . . . 306
13.3.2 Représentation intéressante . . . 306
13.3.3 Comonotonicité et simulation . . . 307
13.3.4 Comonotonicité et borne supérieure de Fréchet . . . 307
13.3.5 Toutes les composantes du vecteur dépendent d'une seule v.a. . . . 307
13.3.6 Comonotonicité et agrégation . . . 307
13.3.7 Somme v.a. comonotones de loi lognormales . . . 312
13.3.8 Conséquences . . . 313
13.4 Antimonotonicité . . . 314
13.4.1 Définition . . . 314
13.4.2 Représentation intéressante . . . 314
13.4.3 Antimonotonicité et simulation . . . 314
13.4.4 Antimonotonicité et borne inférieure de Fréchet . . . 314
13.4.5 Antimonotonicité et un autre résultat . . . 315
13.4.6 Antimonotonicité et agrégation des risques . . . 315
13.5 Antimonotonicité . . . 316
13.5.1 Introduction . . . 316
13.5.2 Somme de v.a antimonotones continues positives . . . 317
13.6 Covariance et coefficient corrélation de Pearson . . . 320
13.7 Lois multivariées et agrégation . . . 321
13.7.1 Approche générale pour des v.a. continues . . . 321
13.7.2 Approche générale pour des v.a. discrètes . . . 321
13.8 Lois continues bivariées et multivariées . . . 322
13.8.1 Loi exponentielle bivariée Eyraud - Farlie - Gumbel - Morgenstern (EFGM) . . . 322
13.8.2 Loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin . . . 323
13.8.3 Loi gamma bivariée Cheriyan - Ramabhadran - Mathai - Moschopoulos (CRMM) . . . 324
13.8.4 Loi normale multivariée . . . 325
13.8.5 Loi normale mélange multivariée . . . 327
13.8.6 Loi de Student multivariée . . . 327
13.8.7 Lois multivariées construites par mélange commun . . . 328
13.8.8 Lois exponentielles bivariée mélange . . . 329
13.8.9 Loi Pareto bivariée . . . 329
13.9 Lois discrètes bivariées et multivariées . . . 330
13.10 Loi de Poisson bivariée Teicher . . . 330
13.11 Loi binomiale bivariée Marshall-Olkin . . . 332
13.11.1 Définition et propriétés . . . 332
13.11.2 Simulation . . . 333
13.11.3 Agrégation . . . 334
13.12 Loi Poisson mélange bivariée . . . 334
13.12.1 Loi Poisson-gamma bivariée . . . 335
13.12.2 Loi Poisson mélange bivariée prise 2 . . . 335
13.12.3 Loi Poisson-gamma bivariée CRMM . . . 336
13.13 Loi de Bernoulli multivariée Cossette - Gaillardetz - Marceau - Rioux (CGMR) . . . 337
13.14 Lois composées multivariées . . . 338

13.14.1 Notions préliminaires . . . 338
13.14.2 Montants de sinistres de distributions gamma . . . 339
13.14.3 Montants de sinistres de distributions mélanges d'Erlang . . . 340
13.14.4 Montants de sinistres avec support arithmétique . . . 341
13.14.5 Poisson composée bivariée . . . 342
13.15 Poisson composée multivariée . . . 344
13.16 Modèles avec chocs communs . . . 345
13.17 Modèles avec mélange commun . . . 348
13.18 Notes bibliographiques . . . 350

14 Théorie des copules **353**
14.1 Introduction . . . 353
14.1.1 D'où vient le mot *copule* ? . . . 353
14.1.2 Copules et actuariat . . . 353
14.2 Structure du chapitre . . . 354
14.3 Copules . . . 354
14.3.1 Définition pour d'une copule bivariée . . . 354
14.3.2 Définition pour d'une copule multivariée . . . 355
14.4 Théorème de Sklar . . . 356
14.4.1 Énoncé du théorème . . . 356
14.4.2 Démonstration du théorème . . . 356
14.5 Conséquences pratiques du théorème de Sklar . . . 357
14.5.1 Extraire une copule grâce au théorème de Sklar . . . 357
14.5.2 Construire une distribution multivariée grâce au théorème de Sklar . . . 358
14.5.3 Avantages de l'approche via les copules . . . 358
14.6 Bornes de Fréchet . . . 358
14.7 Copule et fonction de densité . . . 358
14.8 Simulation . . . 359
14.9 Copules associées . . . 359
14.10 Copule de survie et théorème de Sklar . . . 360
14.10.1 Fonction de densité . . . 361
14.11 Propriété d'invariance . . . 361
14.11.1 Importante propriété . . . 361
14.11.2 Exemple . . . 361
14.12 Fonction de répartition conditionnelle . . . 361
14.12.1 Définition . . . 361
14.12.2 Simulation et fonction de répartition conditionnelle . . . 362
14.13 Copule complète . . . 362
14.14 Familles de copules . . . 362
14.15 Copules de bases . . . 362
14.15.1 Copule d'indépendance . . . 362
14.15.2 Copule borne supérieure de Fréchet . . . 363
14.15.3 Copule bivariée de la borne inférieure de Fréchet . . . 363
14.15.4 Copule bivariée de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM) . . . 363
14.16 Copules archimédiennes . . . 364
14.16.1 Préliminaires . . . 364
14.16.2 Construction des copules archimédiennes - Étape #1 . . . 365
14.16.3 Construction des copules archimédiennes - Étape #2 . . . 366
14.16.4 Simulation pour les copules archimédiennes . . . 367
14.16.5 Copule bivariée de Ali-Mikhail-Haq . . . 368
14.16.6 Copule bivariée de Clayton . . . 369
14.16.7 Copule bivariée de Frank . . . 372
14.16.8 Copule bivariée de Gumbel . . . 375
14.17 Copules elliptiques . . . 378

14.17.1 Copule normale bivariée . . . 378
14.17.2 Copule de Student bivariée . . . 380
14.18 Copules avec singularité . . . 383
14.18.1 Copule bivariée de Fréchet . . . 383
14.18.2 Copule bivariée de Cuadras-Augé . . . 384
14.18.3 Copule bivariée de Marshall-Olkin . . . 384
14.19 Illustrations . . . 386
14.19.1 Lois bivariées avec marginales exponentielles . . . 386
14.19.2 Lois multivariées avec marginales gamma . . . 387
14.19.3 Exemple – Copule de Frank et marginales de loi exponentielle . . . 387
14.20 Copules et lois discrètes . . . 387
14.20.1 Mise en place . . . 387
14.20.2 Exemple – Copule de Clayton avec marginales de loi binomiale . . . 388
14.20.3 Exemple – Copules de Frank, Clayton et de Gumbel avec marginales de loi négative binomiale . . . 389
14.20.4 Proposition – Copule EFGM et marginales discrètes . . . 389
14.21 Méthodes d'agrégation de risques dépendants . . . 390
14.21.1 Introduction . . . 390
14.21.2 Méthode avec discrétisation . . . 390
14.21.3 Méthode des carrés . . . 392
14.21.4 Méthodes des rectangles . . . 394
14.21.5 Bornes minimale et maximale pour la VaR . . . 397
14.22 Méthodes de construction des copules . . . 402
14.22.1 Méthode d'inversion . . . 402
14.22.2 Méthode algébrique . . . 403
14.22.3 Méthode géométrique . . . 403
14.22.4 Méthode par mélange . . . 408
14.23 Mesures de dépendance . . . 409
14.24 Propriétés désirables pour un mesure de dépendance . . . 409
14.25 Coefficient de corrélation de Pearson . . . 409
14.25.1 Définition . . . 409
14.25.2 Est-ce que le coefficient de corrélation de Pearson satisfait les propriétés désirables pour un mesure de dépendance . . . 410
14.25.3 Mesure de relation de dépendance linéaire . . . 410
14.25.4 Invariance aux transformations linéaires . . . 410
14.25.5 Problèmes . . . 411
14.26 Mesures de corrélation des rangs et concordance . . . 416
14.27 Rho de Spearman . . . 416
14.27.1 Définition . . . 416
14.27.2 Rho de Spearman et propriétés désirables . . . 418
14.27.3 Rho de Spearman et valeurs possibles . . . 418
14.27.4 Rho de Spearman et comonotonicité . . . 418
14.27.5 Rho de Spearman et antimonotonicité . . . 419
14.27.6 Rho de Spearman et indépendance . . . 419
14.27.7 Rho de Spearman et représentation alternative . . . 419
14.28 Tau de Kendall . . . 419
14.28.1 Définition . . . 419
14.28.2 Propriétés du tau de Kendall . . . 420
14.29 Remarques sur le rho de Spearman et tau de Kendall . . . 420
14.30 Mesures de corrélation des rangs (mesures d'association) et copule . . . 421
14.30.1 Rho de Spearman . . . 421
14.30.2 Tau de Kendall . . . 421
14.30.3 Quelques expressions . . . 422
14.30.4 Mesures d'association et paramètres des copules . . . 422

14.31 Estimation du rho de Spearman et du tau de Kendall . . . 423
14.31.1 Mise en place . . . 423
14.31.2 Rho de Spearman . . . 423
14.31.3 Tau de Kendall . . . 424
14.32 Mesures de dépendance et indépendance . . . 425
14.33 Mesures de corrélation des rangs et v.a. discrètes . . . 425
14.34 Coefficients de dépendance de queue . . . 426
14.34.1 Définitions . . . 426
14.34.2 Remarques . . . 426
14.34.3 Contexte de l'assurance . . . 426
14.34.4 Contexte de la finance quantitative . . . 426
14.34.5 Copules . . . 427
14.35 Dépendance positive par quadrant . . . 427
14.36 Échangeabilité . . . 429
14.37 Impact de la dépendance et ordre supermodulaire . . . 430
14.37.1 Définitions . . . 430
14.37.2 Ordre supermodulaire et ordre convexe univarié . . . 431
14.37.3 Ordre supermodulaire et comonotonicité . . . 431
14.37.4 Ordre supermodulaire et indépendance . . . 431
14.37.5 Ordre supermodulaire et copules . . . 431
14.37.6 Ordre supermodulaire et loi de Poisson multivariée . . . 432
14.37.7 Ordre supermodulaire et lois composées multivariées . . . 432
14.37.8 Ordre supermodulaire et bornes de Fréchet . . . 432
14.38 Estimation procedures and copulas . . . 433
14.38.1 Introduction . . . 433
14.38.2 Fully Maximum Likelihood Estimation . . . 433
14.38.3 Variant to Maximum Likelihood Estimation : Semi-parametric method (Genest & Rivest) 434
14.38.4 Variant to Maximum Likelihood Estimation : IFM Method (Joe's method) . . . 434
14.39 Estimation et lois multivariées continues . . . 435
14.39.1 Mise en place . . . 435
14.39.2 Méthode du maximum de vraisemblance . . . 436
14.40 Estimation et copules . . . 436
14.40.1 Données et objectif . . . 436
14.40.2 Méthode des moments avec corrélation par les rangs . . . 436
14.40.3 Méthodes moments . . . 437
14.40.4 Copule non-paramétrique . . . 438
14.40.5 Maximum de vraisemblance . . . 439
14.41 Compléments sur l'estimation avec les copules . . . 441
14.42 Estimation copules et lois discrètes . . . 441
14.43 Estimation et copules . . . 443
14.43.1 Données et objectif . . . 443
14.43.2 Méthode des moments avec corrélation par les rangs . . . 444
14.43.3 Méthodes moments . . . 445
14.43.4 Copule non-paramétrique . . . 446
14.43.5 Maximum de vraisemblance . . . 446
14.44 Compléments sur l'estimation avec les copules . . . 449
14.45 Estimation copules et lois discrètes . . . 449
14.46 Indépendance ? . . . 449
14.47 Compléments sur l'estimation avec les copules . . . 451
14.48 Notes bibliographiques . . . 451

15 Méthodes d'allocation volet 2 **459**
15.1 Introduction . . . 459
15.2 Règles d'Euler et mesures VaR et TVaR . . . 459

15.3 Lois multivariées avec support arithmétique . . . 460
15.3.1 Mise en place . . . 460
15.3.2 Variables aléatoires indépendantes . . . 461
15.3.3 Exemple – variables aléatoires indépendantes de loi Poisson . . . 461
15.3.4 Exemple – variables aléatoires indépendantes de loi Poisson composée . . . 462
15.3.5 Exemple – variables aléatoires dépendantes . . . 463
15.3.6 Exemples – Règles basées sur les mesures VaR et TVaR . . . 463
15.3.7 Lois multivariées avec support arithmétique . . . 466
15.4 Lois multivariées continues . . . 468
15.4.1 Mise en place . . . 468
15.4.2 Exemple – variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle . . . 468
15.4.3 Exemple – variables aléatoires indépendantes de loi gamma . . . 469
15.4.4 Exemple – variables aléatoires dépendantes de loi bivariée exponentielle EFGM . . . 470
15.4.5 Méthode numérique . . . 471
15.4.6 Autres lois multivariées continues . . . 471
15.4.7 Lois multivariées composées . . . 473
15.4.8 Loi Poisson composée multivariée . . . 475
15.5 Euler, fgp et FFT . . . 477
15.6 Allocation et positions financières . . . 478
15.7 Notes bibliographiques . . . 478

A Annexes pour les examens 479
1.1 Symboles, abréviations et limites . . . 480
1.1.1 Symboles . . . 480
1.1.2 Abréviations . . . 480
1.1.3 Limites . . . 480
1.1.4 Séries de Taylor connues . . . 480
1.2 Définitions utiles . . . 481
1.3 Lois continues à support positif . . . 483
1.3.1 Loi uniforme . . . 483
1.3.2 Loi exponentielle . . . 484
1.3.3 Loi gamma . . . 485
1.3.4 Loi béta . . . 486
1.3.5 Loi Erlang . . . 488
1.3.6 Loi Erlang généralisée . . . 489
1.3.7 Loi de Weibull . . . 491
1.3.8 Loi lognormale . . . 492
1.3.9 Loi inverse gaussienne . . . 493
1.3.10 Loi Pareto . . . 495
1.3.11 Loi F-généralisée . . . 496
1.3.12 Loi Burr . . . 497
1.3.13 Loi log-logistique . . . 498
1.4 Lois continues à support réel . . . 499
1.4.1 Loi normale . . . 499
1.4.2 Loi de Student . . . 500
1.5 Lois discrètes . . . 501
1.5.1 Loi avec support arithmétique . . . 501
1.5.2 Loi de Poisson . . . 502
1.5.3 Loi binomiale . . . 503
1.5.4 Loi de Bernoulli . . . 504
1.5.5 Loi binomiale négative . . . 505
1.5.6 Loi géométrique . . . 506
1.5.7 Loi logarithmique . . . 507
1.6 Lois univariées avec mélange . . . 509

1.6.1 Loi mélange d'exponentielles . . . 509
1.6.2 Loi mélange d'Erlang . . . 510
1.7 Tables de la loi normale . . . 511
1.7.1 Fonction de répartition . . . 511
1.7.2 Valeurs de la fonction quantile . . . 512
1.8 Tables de la loi gamma . . . 513
1.8.1 Fonction de répartition . . . 513
1.8.2 Fonction quantile . . . 515
1.9 Tables de la loi de Poisson . . . 517
1.9.1 Fonction de répartition . . . 517
1.9.2 Fonction stop-loss . . . 518
1.10 Table de la loi du khi-deux . . . 519

B Matériel utile **521**
2.1 Liste de fonctions R . . . 522
2.2 R et Packages . . . 523
2.3 Algorithme de Panjer et lois de fréquence $(a, b, 0)$ . . . 525
2.4 **Relation récursive pour somme de v.a. discrètes i.i.d.** . . . 527
2.5 Algorithmes récursifs et fonctions R . . . 528
2.5.1 Convolution directe (2 v.a. indépendantes) . . . 528
2.5.2 Convolution directe (n v.a. indépendantes) . . . 528
2.5.3 Algorithme récursif – DePril (n v.a. i.i.d.) . . . 529
2.5.4 Algorithme de Panjer – Poisson composée . . . 530
2.5.5 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale composée . . . 530
2.5.6 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale négative composée (1) . . . 531
2.5.7 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale négative composée (2) . . . 531
2.6 Variables aléatoires discrètes, fgp, fonctions caractéristiques et méthode FFT . . . 532
2.6.1 Contexte . . . 532
2.6.2 Fonction caractéristique . . . 532
2.6.3 Définition de deux vecteurs . . . 532
2.6.4 Construction : $\underline{f}_X$ vers $\underline{\phi}_X$ . . . 532
2.6.5 Inversion : $\underline{\phi}_X$ vers $\underline{f}_X$ . . . 533
2.6.6 Remarque . . . 533
2.6.7 Algorithme FFT . . . 533
2.7 FFT et fonctions R . . . 534
2.7.1 FFT – Somme de deux v.a. discrètes indépendantes. . . . 534
2.7.2 FFT – Somme de n v.a. discrètes indépendantes . . . 534
2.7.3 FFT – Somme aléatoire (loi Poisson composée) . . . 535

Remerciements

Je tiens à remercier les étudiantes et les étudiants qui ont assisté aux cours que j'ai enseignés à l'École d'actuariat (Université Laval, Québec, Canada), à l'ISFA (Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France), à l'INSEA (Rabat, Maroc) et au Department of Mathematics and Statistics (McGill University, Montréal, Canada).

En particulier, je remercie :

Préface

Document de référence. Le présent ouvrage comprend la théorie pour les cours Act-2001 et Act-3000 de l'École d'actuariat (Université Laval) ainsi que pour le cours Modèles Stochastiques en assurance non-vie (Master Recherche) de l'ISFA (Université Claude Bernard Lyon 1). Il s'agit d'une version nouvelle et retravaillée de [Marceau, 2013].

Prérequis. Les prérequis pour cet ouvrage sont principalement des cours de bases en mathématiques, en probabilité et en statistique.

Conditions d'utilisation. Cet ouvrage est en cours de rédaction, ce qui implique que son contenu est continuellement révisé et mis à jour. Alors, il peut y avoir encore des erreurs et son contenu doit être encore amélioré. Pour cette raison, le lecteur à inviter à nous communiquer tout commentaire et / ou correction qu'il peut avoir. Les conditions suivantes d'utilisation doivent être respectées :

1. Cet ouvrage a été conçu pour des fins pédagogiques, personnelles et non-commerciales. Toute utilisation commerciale ou reproduction est interdite.
2. Son contenu demeure la propriété de son auteur.

Calculs et illustrations. Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project. Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Le logiciel GNU R et les bibliothèques sont disponibles sur le site du R Project et du Comprehensive R Archive Network (CRAN) :

https ://cran.r-project.org/.

L'environnement RStudio est disponible sur le site suivant :

https ://www.rstudio.com/products/rstudio/download/.

Versions précédentes :

1. 1er octobre 2019 ;
2. 6 septembre 2019 ;
3. 21 août 2019 ;
4. 17 février 2019.

Chapitre 1

Notions de probabilité pour la modélisation du risque

1.1 Introduction

Les notions de la théorie des probabilités sont fondamentales en actuariat.

1.2 Variables aléatoires

1.2.1 Définitions

On définit une variable aléatoire (v.a.) comme étant une fonction du résultat d'une expérience aléatoire ou d'un phénomène aléatoire. Une v.a. X est une fonction, souvent à valeurs réelles, définie sur un espace échantillonal. Cet espace correspond à l'ensemble des résultats possibles d'une expérience ou d'un phénomène aléatoire.

En actuariat, la variable aléatoire X peut représenter, par exemple, le montant à verser suite à un accident de voiture, pertes pour un contrat d'assurance habitation, les coûts à encourir pour un portefeuille d'assurance collective, les pertes liées à un investissement, les pertes encourues par tous les assureurs d'une région spécifique à la suite d'une catastrophe naturelle ou encore le montant total des rentes à verser par un régime de retraite pour la prochaine année. En résumé, dans un contexte actuariel, une variable aléatoire X représente les pertes pouvant être encourues par une entité dû à un ou plusieurs périls. L'entité peut être un individu ou un groupe d'individus, un commerce ou un groupe de commerces, une compagnie d'assurance ou de réassurance, une banque, une société d'État, etc.

On tentera ainsi de définir un modèle pouvant décrire le comportement de la variable aléatoire X représentant les coûts éventuels à payer. Nous visons ainsi à déterminer une prime d'assurance, à évaluer le capitale d'une compagnie d'assurance et à déterminer des stratégies permettant de gérer le risque que représente cette variable des coûts futurs.

Par convention, les variables aléatoires sont désignées par des lettres majuscules et les réalisations des variables aléatoires par des lettres minuscules. On définit la fonction de répartition de la variable aléatoire X par F_X où

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x).$$

Une fonction de répartition F_X possède les propriétés suivantes :

— F_X est non décroissante (croissante au sens large) ;

— F_X est semi-continue à droite ;

— $F_X(-\infty) = 0$ et $F_X(\infty) = 1$;

— $0 \leq F_X(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Le complément de F_X, noté $\overline{F}_X(x)$, est appelé la fonction de survie de X et il est défini par $\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$.

Il y a deux classes importantes de v.a. : les v.a. discrètes et les v.a. absolument continues.

1.2.2 Variables aléatoires discrètes

Une v.a. est dite discrète si elle prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs dans l'ensemble $A_X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$. On définit sa fonction de masse de probabilité par f_X où

$$f_X(x) = \Pr(X = x), \ x \in A_X \subset \mathbb{R},$$

avec $0 \leq f_X(x) \leq 1, \ x \in A_X$ et $\sum_{x \in A_X} f_X(x) = 1$. Le support A_X et la fonction de masse de probabilité fournissent une description complète du comportement aléatoire de X. La plus importante classe de v.a. discrètes positives est l'ensemble des v.a. avec support arithmétique, c.-à-d., $x_k = kh$, $k \in \mathbb{N}$ et $h > 0$ est un scalaire.

Une description des principales distributions discrètes est fournie en annexe : binomiale, Poisson, binomiale négative, géométrique. Comme il est expliqué au chapitre 4, ces 4 lois discrètes sont souvent utilisées comme lois de fréquence en actuariat.

1.2.3 Variables aléatoires continues

On dit qu'une v.a. X est absolument continue s'il existe une fonction $f_X(x) \geq 0$, définie sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\Pr(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

et

$$\Pr(X \in C) = \int_C f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

où C est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Par exemple, l'ensemble C peut être $]-\infty, a]$. Ainsi, on a

$$\Pr(X \in C) = \Pr(X \in]-\infty, a]) = \Pr(X \leq a) = F_X(a).$$

Si $C =]a, b]$, alors

$$\begin{aligned} \Pr(X \in C) &= \Pr(X \in]a, b]) = \Pr(a < X \leq b) \\ &= \Pr(X \leq b) - \Pr(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

On nomme f_X la fonction de densité de la v.a. X. On établit la relation suivante entre F_X et f_X :

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \Pr(X \in]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1.1}$$

Puis, en dérivant des deux côtés de l'égalité en (1.1), on obtient fonction de densité f_X :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,\mathrm{d}y = f_X(x).$$

Contrairement à la fonction de répartition F_X, la fonction de densité f_X peut être supérieure à 1. Une interprétation heuristique de f_X est donnée par

$$\begin{aligned} f_X(x)\,\mathrm{d}x &\simeq \Pr(X \in (x,\, x + \mathrm{d}x]) \\ &= \Pr(\text{v.a. } X \text{ prenne une valeur entre } x \text{ et } x + \mathrm{d}x). \end{aligned}$$

En annexe, on présente une description des principales distributions continues utilisées en actuariat telles que les distributions normale, uniforme, bêta, exponentielle, gamma, Erlang, Pareto, lognormale, Weibull.

Pour toutes ces distributions, l'expression de la fonction de densité est de forme fermée. Pour les lois uniforme, exponentielle, Erlang, Pareto et Weibull, la fonction de répartition est de forme fermée, ce qui n'est pas le cas pour les lois normale, lognormale et gamma avec un paramètre α qui n'est pas entier.

Comme on l'explique au chapitre 4, les lois exponentielle, gamma, Erlang, Pareto, lognormale et Weibull sont utilisées notamment pour la modélisation des montants de sinistres. La loi normale est fondamentale en théorie des probabilités, en actuariat et en gestion quantitative des risques. Comme on le verra dans cet ouvrage, elle n'est toutefois pas directement utilisée pour la modélisation des montants de sinistres.

1.3 Espérance d'une variable aléatoire

1.3.1 Définition

L'espérance d'une v.a. X désigne la valeur espérée que peut prendre cette v.a.

Si X est une v.a. discrète avec un support fini, c.-à-d., prenant un nombre fini de valeurs $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_m\}$ et avec une fonction de masse de probabilité f_X, l'espérance de cette v.a. est donnée par

$$E[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i \Pr(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i \; f_X(x_i).$$

Si X est une v.a. discrète avec support dénombrable, c.-à-d., qui prend des valeurs dans l'espace dénombrable $A_X = \{x_1, x_2, x_3, ...\} \in \mathbb{R}$ et avec une fonction de masse de probabilité f_X, l'expression de son espérance est

$$E[X] = \sum_{x \in A_X} x \Pr(X = x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \; f_X(x_i),$$

en supposant que la somme converge.

Lorsque X est une v.a. continue avec une fonction de densité f_X, l'espérance de X est définie par

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

L'espérance possède la propriété de linéarité

$$E[aX + b] = E[aX] + b = aE[X] + b,$$

que X soit une v.a. discrète ou continue.

En actuariat, la notion d'espérance est importante. Par exemple, si la v.a. X représente les coûts pour un contrat d'assurance pour la prochaine année, alors l'espérance de X correspond à la prime pure de ce contrat. Généralement, la prime chargée pour le contrat est supérieure à l'espérance de X. Différents modèles pour X sont étudiés au chapitre 4.

On a le résultat suivant pour une v.a. continue positive.

Proposition 1.1 *Soit une v.a. X continue positive dont l'espérance existe. Alors, on a*

$$E[X] = \int_{0}^{\infty} \overline{F}_X(x) \mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

Preuve. De (1.2), on a

$$E[X] = \int_{0}^{\infty} y f_X(y) \mathrm{d}y = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{y} f_X(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

qui devient

$$E[X] = \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^\infty \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x.$$

■

On a aussi un résultat similaire pour une v.a. discrète définie sur un support arithmétique $\{0, 1h, 2h, ...\}$.

Proposition 1.2 *Soit une v.a. X discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, ...\}$ dont l'espérance existe. Alors, on a*

$$E[X] = h\sum_{k=0}^{\infty} \overline{F}_X(kh). \tag{1.4}$$

Preuve. On déduit

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} jhf_X(jh) = h\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} f_X(jh)$$

qui devient

$$E[X] = h\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh) = h\sum_{k=0}^{\infty} \overline{F}_X(kh).$$

■

1.3.2 Espérance d'une fonction

On examine l'espérance d'une fonction g de X.

Dans le cas où X est une v.a. discrète avec support fini et avec une fonction de masse de probabilité f_X, l'expression de $E[g(X)]$ est

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{m} g(x_i)\, f_X(x_i).$$

Lorsque X est une v.a. discrète définie sur un support dénombrable et avec une fonction de masse de probabilité f_X, on a

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\ \ f_X(x_i),$$

en supposant que la somme converge.

Si X est une v.a. continue avec fonction de densité f_X, l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

si l'intégrale existe.

1.3.3 Moment d'ordre n

Un exemple important de fonction g est le cas où $g(y) = y^n$, pour $n \in \mathbb{N}^+$.

On définit $E[X^n]$ comme le moment d'ordre n de la v.a. X, s'il existe. Ainsi, si la v.a. X est discrète avec support fini, on a

$$E[X^n] = \sum_{i=1}^{m} x_i^n \Pr(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i^n f_X(x_i).$$

Si la v.a. X est discrète avec support dénombrable, l'expression de $E[X^n]$ est

$$E[X^n] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n \Pr(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n f_X(x_i),$$

en supposant que la somme converge.

Pour une v.a. continue X, on a

$$E\left[g\left(X\right)\right]=E\left[X^{n}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x^{n}\ f_{X}\left(x\right)\mathrm{d}x,$$

en supposant que l'intégrale existe.

1.3.4 Espérance d'une fonction indicatrice

Soit la fonction g définie par $g\left(y\right)=1_{\{y\in C\}}$, où $1_{\{y\in C\}}$ est une fonction indicatrice telle que

$$1_{\{y\in C\}}=\left\{\begin{array}{ll}1, & y\in C\\ 0, & y\notin C\end{array}\right.,$$

où C est un sous-ensemble du support de X. Ainsi, on a $E\left[1_{\{X\in C\}}\right]=\Pr\left(X\in C\right)$.

Si $C=(-\infty,b]$, alors la fonction indicatrice $1_{\{y\in(-\infty,b]\}}$ est équivalente à $1_{\{y\leq b\}}$, où

$$1_{\{y\leq b\}}=\left\{\begin{array}{ll}1, & y\leq b\\ 0, & y>b\end{array}\right.,$$

et l'expression de l'espérance devient

$$E\left[g\left(X\right)\right]=E\left[1_{\{X\leq b\}}\right]=F_{X}\left(b\right).$$

La fonction de répartition de la v.a. X peut donc s'écrire comme l'espérance de fonction indicatrice $1_{\{y\leq b\}}$. De façon similaire, à partir d'une fonction indicatrice $1_{\{y>b\}}$, soit

$$1_{\{y>b\}}=\left\{\begin{array}{ll}1, & y>b\\ 0, & y\leq b\end{array}\right.,$$

on a

$$E\left[g\left(X\right)\right]=E\left[1_{\{X>b\}}\right]=\overline{F}_{X}\left(b\right),$$

qui correspond à la fonction de survie de X.

1.3.5 Intégrale de Riemann – Stieltjes

Il peut aussi advenir que la distribution d'une v.a. X soit mixte c.-à-d. l'expression de sa fonction de répartition est $F_{X}\left(x\right)=\theta F_{0}\left(x\right)+\left(1-\theta\right)F_{1}\left(x\right)$, où F_{0} est une fonction de répartition discrète avec fonction de masse de probabilité f_{0}, F_{1} est une fonction de répartition absolument continue avec fonction de densité de probabilité f_{1} et $\theta\in[0,1]$. Alors, l'espérance de $g\left(X\right)$ est définie en fonction de l'intégrale de Riemann - Stieltjes

$$\begin{aligned}E\left[g\left(X\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}g\left(x\right)\mathrm{d}F_{X}\left(x\right)\\ &= \theta\sum_{x\in A}g\left(x\right)f_{0}\left(x\right)+\left(1-\theta\right)\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x\right)f_{1}\left(x\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

où A correspond à l'ensemble de tous les points de sauts de $F_{X}\left(x\right)$.

1.4 Variance

1.4.1 Définition

Soit une v.a. X dont le moment d'ordre 2 existe. On définit la variance d'une v.a. X par

$$\mathrm{Var}\,(X) = E\left[(X - E\,[X])^2\right]. \tag{1.5}$$

Si X est une v.a. discrète avec support fini ou dénombrable, (1.5) devient

$$\mathrm{Var}\,(X) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - E\,[X])^2 f_X\,(x_i)$$

ou

$$\mathrm{Var}\,(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E\,[X])^2 f_X\,(x_i)\,.$$

Dans le cas où X est une v.a. continue, on a

$$\mathrm{Var}\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\,[X])^2 f_X\,(x)\,\mathrm{d}x.$$

La variance de X s'interprète comme étant une mesure de la variabilité ou de la dispersion de la v.a. X par rapport à son espérance. Clairement, la variance est toujours positive ou nulle. Elle prend une valeur nulle dans le cas où la v.a. X est une constante.

En développant (1.5), on obtient l'expression

$$\mathrm{Var}\,(X) = E\left[X^2\right] - E\,[X]^2\,, \tag{1.6}$$

qui est couramment utilisée pour calculer la variance de X.

Soit une v.a. Y définie comme une transformation linéaire de X, c.-à-d., $Y = aX + b$. Alors, la variance de Y est donnée par

$$\mathrm{Var}\,(Y) = \mathrm{Var}\,(aX + b) = \mathrm{Var}\,(aX) = a^2\mathrm{Var}\,(X)\,.$$

Soit une v.a. X avec $E\left[X^2\right] < 0$. On définit l'écart type de la v.a. X par $\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}$, qui est aussi une mesure de dispersion ou de variabilité de la v.a. X par rapport à son espérance. L'écart type est de la même échelle que les valeurs pouvant être prises par la v.a. X. Comme la variance, l'écart type est positif ou nul. De plus, pour $Y = aX + b$, on a

$$\sqrt{\mathrm{Var}\,(Y)} = a\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}.$$

1.4.2 Coefficient de variation

Soit une v.a. X avec $E\left[X^2\right] < 0$. On a également recours au coefficient de variation de la v.a. X, défini par $\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{E[X]}$. Le coefficient de variation est perçu comme une mesure relative de variabilité ou de dispersion et il est aussi appelé le risque unitaire en gestion quantitative des risques.

Le coefficient de variation de la loi exponentielle est de 1, servant de point de comparaison pour les autres lois continues positives. Une loi avec un coefficient de variation supérieur (inférieur) à 1 est considérée comme une loi avec une variance élevée (faible). Le coefficient de variation de la loi gamma est donné par $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ et on observe qu'il est supérieur (inférieur) à 1 si le paramètre α est inférieur (supérieur) à 1. Le coefficient de la loi Erlang est toujours inférieur à 1. Le coefficient de variation d'une loi très utilisée en actuariat, la loi lognormale, est donné par $\sqrt{\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1}$ et il est toujours supérieur à 1. Si $\alpha > 2$, le coefficient de variation de la loi de Pareto, dont l'expression est $\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}$, est aussi toujours supérieur à 1.

1.5 Moments centrés

Soit une v.a. X dont le moment d'ordre n existe. On définit le moment centré d'ordre n par $E\left[(X-E[X])^n\right]$. La variance est un cas particulier de moment centré avec $n=2$.

Si X est une v.a. discrète avec support fini ou dénombrable, l'expression de $E\left[(X-E[X])^n\right]$ est donnée par

$$E\left[(X-E[X])^n\right]=\sum_{i=1}^{m}(x_i-E[X])^n f_X(x_i)$$

ou

$$E\left[(X-E[X])^n\right]=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E[X])^n f_X(x_i).$$

Pour une v.a. continue X, on a

$$E\left[(X-E[X])^n\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^n f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

En développant son expression, on a la relation suivante :

$$E\left[(X-E[X])^n\right]=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}E\left[X^j\right]E[X]^{n-j}. \tag{1.7}$$

Les moments centrés sont invariants à la translation. Soit la v.a. $Y=X+c$. Alors, on a

$$E\left[(Y-E[Y])^n\right]=E\left[(X-E[X])^n\right].$$

De plus, pour la v.a. $Y=cX$, on a

$$E\left[(Y-E[Y])^n\right]=c^nE\left[(X-E[X])^n\right].$$

Outre la variance, on est aussi intéressé par le moment centré d'ordre 3, qui permet de définir le coefficient d'asymétrie.

1.6 Coefficient d'asymétrie

Soit une v.a. X dont les trois premiers moments existent. Le coefficient d'asymétrie de la v.a. X, noté $\gamma(X)$, est défini par

$$\gamma(X)=\frac{E\left[(X-E[X])^3\right]}{\mathrm{Var}(X)^{\frac{3}{2}}},$$

où le troisième moment centré est donné par

$$E\left[(X-E[X])^3\right]=E\left[X^3\right]-3E[X]E\left[X^2\right]+2E[X]^3, \tag{1.8}$$

selon (1.7).

Le coefficient d'asymétrie donne une information quant à l'asymétrie de la distribution de X par rapport à son espérance.

Dans le cas où $\gamma(X)=0$, la distribution de la v.a. X est symétrique par rapport à son espérance. La loi normale est un exemple de distribution avec un coefficient d'asymétrie nul.

Si $\gamma(X)>0$, l'asymétrie de la distribution de X est à gauche (positive), ce qui signifie que la distribution est plus étalée à droite de l'espérance. Ainsi, la probabilité que la v.a. X prenne une valeur beaucoup plus élevée que son espérance est élevée.

Le coefficient d'asymétrie de la distribution gamma est donné par $\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ et il décroît quand le paramètre de forme α augmente. Le coefficient d'asymétrie de la loi exponentielle est 2. Les distributions lognormale et

de Pareto ($\alpha > 3$) ont aussi des coefficients d'asymétrie positifs. La loi de Poisson, la loi binomiale négative et la loi binomiale avec $q < \frac{1}{2}$ possèdent une asymétrie positive.

Quand $\gamma(X) < 0$, l'asymétrie de la distribution de X est à droite. Par exemple, la loi binomiale avec $q > \frac{1}{2}$ possède une asymétrie négative.

1.7 Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments (fgm) d'une v.a. X est définie par

$$\mathcal{M}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX}\right], \tag{1.9}$$

en supposant que l'espérance existe pour un ensemble de valeurs de $t > 0$. La fgm est un cas particulier de l'espérance d'une fonction g de X où $g(y) = \mathrm{e}^{ty}$.

Si X est une v.a. discrète avec support fini, l'expression de la fgm de X est

$$\mathcal{M}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{tx_i} f_X(x_i),$$

pour tout $t > 0$.

Quand X est une v.a. discrète avec support dénombrable, (1.9) devient

$$\mathcal{M}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}^{tx_i} f_X(x_i),$$

si la somme converge pour un ensemble de valeurs de $t > 0$.

Dans le cas d'une v.a. continue X, on a

$$\mathcal{M}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f_X(x)\ \mathrm{d}x,$$

si l'intégrale existe pour un ensemble de valeurs de $t > 0$.

La fgm des distributions exponentielle, gamma et normale, existe. En revanche, la fgm des distributions de Pareto et de Burr n'existe pas. Quand elle existe, la fgm de X permet d'identifier sa distribution.

Si la fgm d'une v.a. X existe, le moment d'ordre m de X correspond à la m-ième dérivée de la fgm évaluée à $t = 0$

$$E\left[X^m\right] = \left.\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\mathcal{M}_X(t)\right|_{t=0}.$$

En effet, puisque la fgm existe, on peut insérer la dérivée à l'intérieur de l'espérance

$$\left.\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\mathcal{M}_X(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}E\left[\mathrm{e}^{tX}\right]\right|_{t=0} = E\left[\left.\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\mathrm{e}^{tX}\right]\right|_{t=0}$$

qui devient

$$\left.\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\mathcal{M}_X(t)\right|_{t=0} = E\left[X^m\mathrm{e}^{tX}\right]\big|_{t=0} = E\left[X^m\right].$$

1.8 Fonction génératrice des probabilités

Soit une v.a. discrète X définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ avec un fonction de masse de probabilité (fmp)

$$f_X(k) = \Pr(X = k),\ k \in \mathbb{N}.$$

La fonction de génératice de probabilité (fgp) d'une v.a. X permet de représenter la fmp d'une v.a. X sous la forme d'une série de puissances. Les coefficients de cette série de puissances correspondent aux masses de

la fonction de masse de probabilité.

Définition 1.3 *La fonction génératrice de probabilités d'une v.a. X est définie par*

$$\mathcal{P}_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k, \tag{1.10}$$

pour $t \in [0,1]$).

Théorème 1 ***Fonction de masse de probabilité.*** *La valeur de $f_X(k)$ est calculée à partir de $\mathcal{P}_X(t)$ avec*

$$f_X(k) = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}r^k}\mathcal{P}_X(r)\bigg|_{r=0}. \tag{1.11}$$

La relation en (1.11) permet d'identifier les coefficients dans la série de puissances en (1.10). De plus, la fgp d'une v.a. discrète positive X définit la distribution de cette v.a.

Propriété 1.4 $\mathcal{P}_X(0) = f_X(0)$ *et* $\mathcal{P}_X(1) = 1$.

Propriété 1.5 *Soit deux v.a. X et Y. Si $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{P}_Y$ sont identiques, alors, selon le Théorème 1, les v.a. X et Y ont la même distribution.*

Propriété 1.6 ***Espérance.*** *Supposons que $E[X] < \infty$. Alors, on a*

$$E[X] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{P}_X(t)\bigg|_{t=1}$$

Exemple 1.7 *Soit une v.a. discrète X telle que $\mathcal{P}_X(t) = t^c$ ($c \in \mathbb{N}$). Alors, la v.a. X est une v.a. dégénérée à c, soit* $\Pr(X = c) = 1$.

Exemple 1.8 *Soit une v.a. discrète X avec*

$$\mathcal{P}_X(t) = 0.2 + 0.4t + 0.3t^2 + 0.1t^3, \text{ pour } t \in [0,1].$$

Sans recourir à (1.11), on déduit aisément les valeurs suivantes de la fonction de masse de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$f_X(k)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Exemple 1.9 *Soit une v.a. discrète X avec*

$$\mathcal{P}_X(t) = 0.2 + 0.4t^2 + 0.3t^7 + 0.1t^{15}, \text{ pour } t \in [0,1].$$

On déduit les valeurs suivantes de la fonction de masse de probabilité de X :

k	0	2	7	15
$f_X(k)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Pour certaines lois discrètes connues, la fonction de t, $\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k$, s'exprime sous une forme fermée. C'est notamment le cas des lois de Poisson, binomiale et binomiale négative.

En appliquant (1.11), on voit au chapitre 999 que la fonction de masse de probabilité de ces trois lois paramétriques satisfait une relation récursive.

Exemple 1.10 ***Loi de Poisson.*** *Soit $X \sim$Poisson($\lambda \in \mathbb{R}^+$). Alors,*

$$\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)},$$

pour tout nombre complexe t tel que $|t| \leq 1$ (en particulier pour des nombres réels $t \in [0,1]$).

Exemple 1.11 ***Loi binomiale.*** *Soit $X \sim$Binomiale($n \in \mathbb{N}^+$; $q \in (0,1)$). Alors,*

$$\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k = (qt + 1 - q)^n,$$

pour tout nombre complexe t tel que $|t| \leq 1$ (en particulier pour des nombres réels $t \in [0,1]$).

Exemple 1.12 ***Loi binomiale négative.*** *Soit $X \sim$Binomiale négative($r \in \mathbb{R}^+$; $q \in (0,1)$). Alors,*

$$\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k = \left(\frac{q}{1-(1-q)t}\right)^r,$$

pour tout nombre complexe t tel que $|t| \leq 1$ (en particulier pour des nombres réels $t \in [0,1]$).

1.9 Transformée de Laplace-Stieltjes

Soit une v.a. positive X. La transformée de Laplace-Stielltjes (TLS) d'une v.a. X est définie par

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right], \text{ pour } t > 0,$$

en supposant que l'espérance existe. Puisque la v.a. X est positive et puisque $t > 0$, la TLS existe pour toutes les distributions dicrètes, continues ou mixtes à support de valeurs positives. En effet, comme $\mathrm{e}^{-tX} \leq 1$, pour tout $t > 0$, alors

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] \leq 1, \text{ pour } t > 0.$$

Si X est une v.a. discrète avec support fini ou dénombrable, l'expression de la TLS de X est

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{-tx_i} f_X(x_i)$$

ou

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx_i} f_X(x_i), \text{ pour } t > 0.$$

Dans le cas d'une v.a. continue X, on a

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_X(x)\, \mathrm{d}x, \text{ pour } t > 0,$$

si l'intégrale existe pour des valeurs de $t \neq 0$.

Exemple 1.13 *Soit une v.a. X telle que $\mathcal{L}_X(t) = \mathrm{e}^{-ct}$, $c > 0$, $t > 0$. Alors, la v.a. X est une v.a. dégénérée à c, soit* $\Pr(X = c) = 1$.

Exemple 1.14 *Soit $X \sim$ Gamma(α, β). Alors, on a $\mathcal{L}_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\alpha}$, $t > 0$.*

S'il existe, le moment d'ordre m de X correspond à la m-ième dérivée de la TLS évaluée à $t = 0$

$$E\left[X^m\right] = (-1)^m \left.\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \mathcal{L}_X(t)\right|_{t=0}.$$

En effet, on a

$$(-1)^m \left.\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \mathcal{L}_X(t)\right|_{t=0} = (-1)^m \left.\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right]\right|_{t=0} = (-1)^m \left.E\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \mathrm{e}^{-tX}\right]\right|_{t=0}$$

qui devient

$$(-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\mathcal{L}_X(t)\Big|_{t=0} = E\left[X^m \mathrm{e}^{tX}\right]\Big|_{t=0} = E\left[X^m\right].$$

1.10 Espérance tronquée

1.10.1 Définition

Soit une v.a. X dont l'espérance existe. L'espérance tronquée de la v.a. X est un cas particulier de l'espérance d'une fonction g où $g(y) = y \times 1_{\{y \leq d\}}$. On définit l'espérance tronquée à d de la v.a. X par $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$.

Si X est une v.a. discrète avec un support fini, on a

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{m} x_i \times 1_{\{x_i \leq d\}} f_X(x_i).$$

Si X est une v.a. discrète avec un support dénombrable, on a

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \times 1_{\{x_i \leq d\}} f_X(x_i),$$

en supposant que la somme converge.

Lorsque X est une v.a. continue, l'expression de $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ est

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \int_{-\infty}^{d} x f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 1.15 *L'espérance tronquée à d de X s'interprète comme l'espérance des valeurs que X peut prendre lorsque celles-ci sont inférieures à d.*

Remarque 1.16 *À noter que* $\lim_{d \to \infty} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = E[X]$.

On peut aussi s'intéresser au complément de cette espérance qui est $E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right]$. La proposition suivante permet d'établir une relation entre l'espérance d'une variable aléatoire X, son espérance tronquée ainsi que le complément de cette dernière.

Proposition 1.17 *Soit X une v.a continue ou discrète. Alors,*

$$E[X] = E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] + E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right].$$

Preuve. On considère le cas où X est une v.a continue. On a

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{d} x f_X(x)\mathrm{d}x + \int_{d}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] + E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right]. \end{aligned}$$

À noter que $E[X] = E[X \times 1] = E\left[X \times \left(1_{\{X \leq d\}} + 1_{\{X > d\}}\right)\right] = E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] + E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right]$. ■

Les espérances $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ et $E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right]$ sont utiles notamment pour définir l'expression de la mesure de risque TVaR, comme il est expliqué en § 3.2

1.10.2 Exemples

Dans cette sous-section, on développe les expressions $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ et $E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right]$ pour certaines lois continues.

Exemple 1.18 *Soit $X \sim Exp(\beta)$ avec fonction de densité $f_X(x) = \beta \mathrm{e}^{-\beta x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. L'expression de l'espérance tronquée est*

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= \int_0^d x f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^d x\beta \mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x = -d\mathrm{e}^{-\beta d} + \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d}\right). \end{aligned}$$

De la proposition 1.17, on déduit aussi

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] &= \int_d^\infty x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta} + d\mathrm{e}^{-\beta d} - \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d}\right) \\ &= d\mathrm{e}^{-\beta d} + \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d}. \ \square \end{aligned} \tag{1.12}$$

Exemple 1.19 *Soit $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ avec fonction de densité $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. La fonction de répartition est notée $H(x; \alpha, \beta)$ et la fonction de survie, $\overline{H}(x; \alpha, \beta)$. L'expression de $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ est donnée par*

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= \int_0^d x \frac{\beta^a}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\int_0^d \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha+1-1}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha}{\beta} H(d; \alpha+1, \beta) = E[X]\, H(d; \alpha+1, \beta). \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] &= E[X] - E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] \\ &= E[X]\left(1 - H(d; \alpha+1, \beta)\right) \\ &= E[X]\,\overline{H}(d; \alpha+1, \beta). \ \square \end{aligned} \tag{1.13}$$

Exemple 1.20 *Soit $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ avec fonction de densité $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. On a la relation $X = \mu + \sigma Z$, où la v.a. Z obéit à la loi normale standard, soit $Z \sim N(0, 1)$, dont la fonction de répartition F_Z est notée Φ. Alors, la fonction de répartition de X est notée comme suit :*

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

L'expression de $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ *est donnée par*

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= \int_{-\infty}^{d} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{d} \mu \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{-\infty}^{d} (x-\mu) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\ &= \mu\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] &= E[X] - E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] \\ &= \mu\overline{\Phi}\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \ \square \end{aligned} \tag{1.14}$$

Exemple 1.21 *Soit* $X \sim LN\left(\mu, \sigma^2\right)$. *Comme* $X = \mathrm{e}^Y$ *où* $Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, *alors l'expression de la fonction de répartition de* X *est*

$$F_X(x) = F_Y(\ln(x)) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right).$$

L'expression de l'espérance tronquée est donnée par

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= E\left[\mathrm{e}^Y \times 1_{\{\mathrm{e}^Y \leq d\}}\right] = E\left[\mathrm{e}^Y \times 1_{\{Y \leq \ln(d)\}}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(d)} \mathrm{e}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\ln(d)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(x-\left(\mu+\sigma^2\right)\right)}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

qui devient

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}\Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) = E[X]\,\Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right).$$

Par la suite, comme

$$E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] = E[X] - E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = E[X] - E[X]\,\Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right),$$

on obtient

$$E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] = E[X]\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)\right) = E[X]\,\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right). \ \square \tag{1.15}$$

Exemple 1.22 *Soit* $X \sim Pa(\alpha, \beta)$ *avec* $\alpha > 1$ *et fonction de densité* $f_X(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}$, $x \in \mathbb{R}$. *L'expression de* $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ *est donnée par*

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= \int_0^d x \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} \mathrm{d}x \\ &= -d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha + \int_0^d \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

qui devient

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = -d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha-1}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+d)^{\alpha-1}}\right).$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] &= E[X] - E\left[X \times 1_{\{x \leq d\}}\right] \\ &= \frac{\lambda}{\alpha-1}\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+d)^{\alpha-1}} + d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha}. \square \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.11 Fonction *stop-loss* et espérance limitée

1.11.1 Définition de la fonction *stop-loss*

Définition 1.23 *Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. La fonction stop-loss $\pi_X(d)$ correspond à l'espérance d'une fonction $g(x) = \max(x-d;0)$ telle que*

$$\pi_X(d) = E[\max(X-d;0)], \tag{1.17}$$

où $d \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 1.24 *Soit une v.a X positive dont l'espérance existe. Alors,*

$$\pi_X(d) = E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - d\overline{F}_X(d), \tag{1.18}$$

pour $d \in \mathbb{R}$.

Preuve. Comme $\max(X-d;0) = X \times 1_{\{X>d\}} - d \times 1_{\{X>d\}}$, une expression alternative à (1.17) est

$$\begin{aligned} \pi_X(d) &= E[\max(X-d;0)] \\ &= E\left[X \times 1_{\{X>d\}} - d \times 1_{\{X>d\}}\right] \\ &= E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - dE\left[1_{\{X>d\}}\right] \\ &= E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - d\overline{F}_X(d), \end{aligned}$$

pour $d \in \mathbb{R}$. ■

Remarque 1.25 *Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. Alors, à partir de (1.17), on a*

$$\pi_X(0) = \lim_{d \to 0} \pi_X(d) = E[X]. \tag{1.19}$$

La fonction définie en (1.17) est importante en actuariat, notamment en réassurance. La fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$ représente l'espérance des coûts en sinistre en excédant d'une limite, appelée limite de rétention ou franchise.

Si la v.a. X obéit à une loi continue, (1.17) devient

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} (x-d) f_X(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.20}$$

Proposition 1.26 *Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. Alors, on a*

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} \overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.21}$$

pour $d \geq 0$.

Preuve. Soit X une v.a. continue positive. Alors, en intégrant par parties, (1.20) devient

$$\begin{aligned}\pi_X(d) &= \int_d^\infty (x-d) f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -(x-d)\overline{F}_X(x)\big|_d^\infty + \int_d^\infty \overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_d^\infty \overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

■

Remarque 1.27 *Noter que (1.19) et (1.21) est valide uniquement lorsque la v.a. X est positive.*

Si X est une v.a. discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, ...\}$ avec fonction de masse de probabilité $f_X(kh)$, $k \in \mathbb{N}$, et si $d = hk_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, (1.17) s'écrit comme suit :

$$\pi_X(k_0 h) = \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0 h; 0) f_X(kh) = h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (k-k_0) f_X(kh). \tag{1.22}$$

Proposition 1.28 *Soit une v.a. X discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, ...\}$ dont l'espérance existe. Alors, on a*

$$\pi_X(k_0 h) = h \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{F}_X(kh), \tag{1.23}$$

pour $k_0 \in \mathbb{N}$.

Preuve. À partir de (1.22) et sachant que

$$\overline{F}_X(kh) = \Pr(X > kh) = \sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh), \tag{1.24}$$

pour $k \in \mathbb{N}$., on réarrange la somme en développant chaque terme et on obtient

$$\begin{aligned}\pi_X(k_0 h) &= h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (k-k_0) f_X(kh) \\ &= h\left(1 \times f_X((k_0+1)h) + 2 \times f_X((k_0+2)h) + 3 \times f_X((k_0+3)h) + ...\right) \\ &= h\left(f_X((k_0+1)h) + f_X((k_0+2)h) + f_X((k_0+3)h) + ...\right) \\ &\quad + h\left(f_X((k_0+2)h) + f_X((k_0+3)h) + ...\right) \\ &\quad + h\left(f_X((k_0+3)h) + ...\right) \\ &\quad + ... \\ &= h \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} f_X(jh) \\ &= h \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{F}_X(kh),\end{aligned}$$

pour $k_0 \in \mathbb{N}$. ■

1.11.2 Définition de l'espérance limitée

Définition 1.29 *Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. L'espérance limitée correspond à l'espérance d'une fonction $g(x) = \min(x : d)$ définie par*

$$E[\min(X; d)]. \tag{1.25}$$

Si la v.a. X obéit à une loi continue, (1.25) correspond à

$$E\left[\min\left(X;d\right)\right]=\int_0^d xf_X\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_0^d df_X\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^d xf_X\left(x\right)\mathrm{d}x+d\overline{F}_X\left(d\right). \tag{1.26}$$

Proposition 1.30 *Soit une v.a. X positive dont l'espérance existe. Alors, on a*

$$E\left[\min\left(X;d\right)\right]=\int_0^d \overline{F}_X\left(x\right)\mathrm{d}x, \tag{1.27}$$

pour $d\geq 0$.

Preuve. Soit$X$ une v.a. continue positive.En intégrant par parties le premier terme de (1.26), on obtient

$$\begin{aligned}E\left[\min\left(X;d\right)\right] &= -xd\overline{F}_X\left(x\right)\big|_0^d+\int_0^d \overline{F}_X\left(x\right)\mathrm{d}x+d\overline{F}_X\left(d\right)\\ &= -d\overline{F}_X\left(d\right)+0+\int_0^d \overline{F}_X\left(x\right)\mathrm{d}x+d\overline{F}_X\left(d\right)\\ &= \int_0^d \overline{F}_X\left(x\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

■

Pour une v.a. discrète X définie sur le support $\{0,1h,2h,...\}$ avec fmp $f_X\left(kh\right)$, $k\in\mathbb{N}$, et pour $d=hk_0$ avec $k_0\in\mathbb{N}$, l'espérance en (1.25) correspond à

$$\begin{aligned}E\left[\min\left(X;k_0h\right)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\min\left(kh;k_0h\right)f_X\left(kh\right)\\ &= \sum_{k=0}^{k_0}khf_X\left(kh\right)+k_0h\sum_{k=k_0+1}^{\infty}f_X\left(kh\right)\end{aligned}$$

qui devient

$$E\left[\min\left(X;k_0h\right)\right]=\sum_{k=0}^{k_0}khf_X\left(kh\right)+k_0h\overline{F}_X\left(k_0h\right), \tag{1.28}$$

pour $k_0\in\mathbb{N}$.

Proposition 1.31 *Soit une v.a. X discrète définie sur le support $\{0,1h,2h,...\}$ dont l'espérance existe. Alors, on a*

$$E\left[\min\left(X;k_0h\right)\right]=h\sum_{k=0}^{k_0-1}\overline{F}_X\left(kh\right), \tag{1.29}$$

pour $k_0\in\mathbb{N}$.

Preuve. On commence par développer les termes de la somme en (1.28)

$$\begin{aligned}
E\left[\min\left(X;k_0h\right)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\min\left(kh;k_0h\right)f_X\left(kh\right)\\
&= \sum_{k=0}^{k_0}khf_X\left(kh\right)+k_0h\sum_{k=k_0+1}^{\infty}f_X\left(kh\right)\\
&= \left(0hf_X\left(0h\right)+1hf_X\left(1h\right)+2hf_X\left(2h\right)+3hf_X\left(3h\right)+...+k_0hf_X\left(k_0h\right)\right)+k_0h\overline{F}_X\left(k_0h\right)\\
&= h\left(f_X\left(1h\right)+f_X\left(2h\right)+f_X\left(3h\right)+...+k_0f_X\left(k_0h\right)\right)\\
&\quad +h\left(f_X\left(2h\right)+f_X\left(3h\right)+...+k_0f_X\left(k_0h\right)\right)\\
&\quad +h\left(f_X\left(3h\right)+...+k_0f_X\left(k_0h\right)\right)\\
&\quad +...\\
&\quad +h\left(k_0f_X\left(k_0h\right)\right)\\
&\quad +k_0h\overline{F}_X\left(k_0h\right).
\end{aligned}$$

Ensuite, on réarrange les termes comme suit :

$$\begin{aligned}
E\left[\min\left(X;k_0h\right)\right] &= h\left(f_X\left(1h\right)+f_X\left(2h\right)+f_X\left(3h\right)+...+k_0f_X\left(k_0h\right)+\overline{F}_X\left(k_0h\right)\right)-h\overline{F}_X\left(k_0h\right)\\
&\quad +h\left(f_X\left(2h\right)+f_X\left(3h\right)+...+k_0f_X\left(k_0h\right)+\overline{F}_X\left(k_0h\right)\right)-h\overline{F}_X\left(k_0h\right)\\
&\quad +h\left(f_X\left(3h\right)+...+k_0f_X\left(k_0h\right)+\overline{F}_X\left(k_0h\right)\right)-h\overline{F}_X\left(k_0h\right)\\
&\quad +...\\
&\quad +h\left(k_0f_X\left(k_0h\right)+\overline{F}_X\left(k_0h\right)\right)-h\overline{F}_X\left(k_0h\right)\\
&\quad +k_0h\overline{F}_X\left(k_0h\right)\\
&= \sum_{k=0}^{k_0-1}h\overline{F}_X\left(kh\right)-k_0h\overline{F}_X\left(k_0h\right)+k_0h\overline{F}_X\left(k_0h\right)\\
&= \sum_{k=0}^{k_0-1}h\overline{F}_X\left(kh\right)
\end{aligned}$$

pour $k_0 \in \mathbb{N}$. ■

Il est intéressant d'établir une relation entre la fonction stop-loss et l'espérance limitée. Soit X une v.a. positive. Étant donné que l'on peut écrire la v.a. comme la somme $X = \min\left(X;d\right)+\max\left(X-d;0\right)$ pour $d \geq 0$, on a également la relation

$$E\left[X\right] = E\left[\min\left(X;d\right)\right]+E\left[\max\left(X-d;0\right)\right]. \tag{1.30}$$

La relation en (1.30) est confirmée lorsque X est une v.a. continue positive et une v.a. discrète définie sur le support $\{0, 1h, 2h, ...\}$.

En combinant (1.21) et (1.27), on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[\min\left(X;d\right)\right]+\pi_X\left(d\right) &= \int_0^d\overline{F}_X\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_d^{\infty}\overline{F}_X\left(x\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^d\overline{F}_X\left(x\right)\mathrm{d}x\\
&= E\left[X\right]
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de (1.3).

On assemble (1.23) et (1.29) comme suit :

$$\begin{aligned} E\left[\min\left(X;k_0h\right)\right]+\pi_X\left(k_0h\right) &= h\sum_{k=k_0}^{\infty}\overline{F}_X\left(kh\right)+h\sum_{k=k_0}^{\infty}\overline{F}_X\left(kh\right) \\ &= h\sum_{k=0}^{\infty}\overline{F}_X\left(kh\right) \\ &= E\left[X\right], \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de (1.4).

1.11.3 Exemples

On identifie l'expression de la fonction *stop-loss* pour certaines lois continues.

Exemple 1.32 *Soit une v.a. $X \sim Exp\left(\beta\right)$. Avec (1.18), on obtient*

$$\begin{aligned} \pi_d\left(X\right) &= E\left[\max\left(X-d;0\right)\right]=E\left[X\times 1_{\{X>d\}}\right]-d\overline{F}_X\left(d\right) \\ &= d\mathrm{e}^{-\beta d}+\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d}-d\mathrm{e}^{-\beta d}=\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d}, \end{aligned}$$

pour $d\in\mathbb{R}^+$. □

Exemple 1.33 *Soit une v.a. $X \sim Ga\left(\alpha,\beta\right)$. Avec (1.18), on obtient*

$$\begin{aligned} \pi_d\left(X\right) &= E\left[\max\left(X-d;0\right)\right]=E\left[X\times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]-d\overline{F}_X\left(d\right) \\ &= E\left[X\right]\overline{H}\left(d;\alpha+1,\beta\right)-d\overline{H}\left(d;\alpha,\beta\right), \end{aligned}$$

pour $d\in\mathbb{R}^+$. □

Exemple 1.34 *Soit une v.a. $X \sim LN\left(\mu,\sigma\right)$. Avec (1.18), on obtient*

$$\begin{aligned} \pi_X\left(d\right) &= E\left[X\times 1_{\{X>d\}}\right]-d\overline{F}_X\left(d\right) \\ &= E\left[X\right]\overline{\Phi}\left(\frac{\ln\left(d\right)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)-d\overline{\Phi}\left(\frac{\ln\left(d\right)-\mu}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

pour $d\in\mathbb{R}^+$. □

Exemple 1.35 *Soit une v.a. $X \sim Pa\left(\alpha,\lambda\right)$, avec $\alpha>1$. Avec (1.18), on obtient*

$$\begin{aligned} \pi_X\left(d\right) &= E\left[X\times 1_{\{X>d\}}\right]-d\overline{F}_X\left(d\right) \\ &= \frac{\lambda}{\alpha-1}\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\left(\lambda+d\right)^{\alpha-1}}+d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha}-d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha} \\ &= \frac{\lambda}{\alpha-1}\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\left(\lambda+d\right)^{\alpha-1}}, \end{aligned}$$

pour $d\in\mathbb{R}^+$. □

Exemple 1.36 *Soit une v.a. continue $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. On sait que*

$$E\left[X\times 1_{\{X>d\}}\right]=\mu\overline{\Phi}\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)+\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.31}$$

pour $d \in \mathbb{R}$. Ensuite, en combinant (1.18) et (1.31), on obtient

$$\begin{aligned}
\pi_d(X) &= E[\max(X-d;0)] = E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - d\overline{F}_X(d) \\
&= \mu\overline{\Phi}\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) + \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}} - d\mu\overline{\Phi}\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) \\
&= (\mu-d)\,\overline{\Phi}\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) + \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}},
\end{aligned}$$

pour $d \in \mathbb{R}$. $\square$

1.12 Fonction d'excès-moyen

Dans le cadre de l'analyse des durées de vie et de la distribution du montant d'un sinistre, on a recours à la fonction d'excès-moyen (plus spécifiquement appelée espérance de durée de vie résiduelle en analyse des durées de vie) définie par

$$e_X(d) = E[X-d|\,X>d] = \frac{\pi_X(d)}{1-F_X(d)}. \tag{1.32}$$

Cette fonction est notamment utile dans l'analyse graphique effectuée lors de l'estimation des paramètres de lois continues. On présente ci-dessous l'expression de la fonction d'excès moyen pour certaines lois continues en appliquant (1.32).

Exemple 1.37 *Soit une v.a. $X \sim Exp(\beta)$. La fonction d'excès moyen est donnée par*

$$e_X(d) = \frac{\pi_X(d)}{1-F_X(d)} = \frac{\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d}}{\mathrm{e}^{-\beta d}} = \frac{1}{\beta}. \ \square$$

Exemple 1.38 *Soit une v.a. $X \sim Ga(\alpha,\beta)$. La fonction d'excès moyen est donnée par*

$$\begin{aligned}
e_X(d) &= \frac{E[X]\,\overline{H}(d;\alpha+1,\beta) - d\overline{H}(d;\alpha,\beta)}{\overline{H}(d;\alpha,\beta)} \\
&= E[X]\,\frac{\overline{H}(d;\alpha+1,\beta)}{\overline{H}(d;\alpha,\beta)} - d. \ \square
\end{aligned}$$

Exemple 1.39 *Soit une v.a. $X \sim LN(\mu,\sigma)$. La fonction d'excès moyen est donnée par*

$$\begin{aligned}
e_X(d) &= \frac{E[X]\,\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right) - d\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu}{\sigma}\right)}{\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu}{\sigma}\right)} \\
&= E[X]\,\frac{\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)}{\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu}{\sigma}\right)} - d. \ \square
\end{aligned}$$

Exemple 1.40 *Soit une v.a. $X \sim Pa(\alpha,\lambda)$, avec $\alpha > 1$. La fonction d'excès moyen est donnée par*

$$e_X(d) = \frac{\lambda}{\alpha-1}\,\frac{\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+d)^{\alpha-1}}}{\frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda+d)^{\alpha}}} = E[X]\left(1+\frac{d}{\lambda}\right). \ \square$$

1.13 Fonction quantile

1.13.1 Définition de base

On débute avec la définition de base (et générale) de la fonction quantile.

Définition 1.41 *Soit une v.a. X avec fonction de répartition F_X. On définit la fonction de répartition inverse F_X^{-1} de F_X par*

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}, \tag{1.33}$$

pour $u \in (0,1)$. Par convention, $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$. La fonction de répartition inverse F_X^{-1} est aussi appelée la fonction quantile de X.

À partir de la définition de la fonction quantile en (1.33), on déduit les propriétés suivantes.

Propriétés 1.42 *La fonction quantile satisfait les propriétés suivantes :*

1. *F_X^{-1} est non décroissante (croissante au sens large) ;*
2. *F_X^{-1} est continue à gauche ;*
3. *$F_X^{-1}(F_X(x)) \leq x$;*
4. *$F_X\left(F_X^{-1}(x)\right) \geq u$.*

Soit X une v.a. continue. Alors, F_X^{-1} correspond à l'unique solution de

$$F_X(x_u) = u, \tag{1.34}$$

pour $u \in (0,1)$. Pour certaines lois continues, il est possible d'obtenir une expression fermée pour la fonction quantile. Cette démarche est illustrée dans les exemples suivants.

Exemple 1.43 *Soit $X \sim Exp(\beta)$. À partir de (1.34), l'expression analytique de la fonction quantile est déterminée en isolant x dans*

$$F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x} = u,$$

pour $u \in (0,1)$. On obtient $F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\beta}\ln(1-u)$, pour $u \in (0,1)$. □

Exemple 1.44 *Soit $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$. Eu utilisant (1.34), la fonction quantile est obtenue isolant x dans*

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha} = u,$$

pour $u \in (0,1)$. Il en résulte

$$F_X^{-1}(u) = \frac{\lambda}{(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda,$$

pour $u \in (0,1)$. □

Exemple 1.45 *Soit $X = bU$ où $b \in \mathbb{R}^+$ et $U \sim Bêta(\alpha, 1)$ avec $F_U(x) = x^{\alpha}$, $x \in [0,1]$. Alors, il suffit d'isoler x dans l'équation $u = F_X(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{\alpha}$ et on déduit que $F_X^{-1}(u) = bu^{\frac{1}{\alpha}}$.* □

Pour d'autres lois continues, on dispose d'une expression fermée de $F_X(x)$ pour laquelle il est impossible d'isoler l'expression de la fonction quantile. Dans ces circonstances, on doit recourir à un outil d'optimisation pour calculer la valeur de la fonction quantile. C'est le cas notamment de la loi Erlang dont la fonction de répartition est

$$F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\beta x)^j}{j!},$$

pour $x \geq 0$.

Dans le cas des v.a. discrètes, il suffit d'appliquer directement la définition en (1.33) comme il est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 1.46 *Soit une v.a. discrète X définie avec*

$$\Pr(X = 0) = 0.2, \quad \Pr(X = 100) = 0.3, \quad \Pr(X = 500) = 0.35$$

Illustration 1.1 – Courbe des valeurs de la fonction de rÃ©partition F_X fournie Ã l'exemple 1.47

et $\Pr(X = 1000) = 0.15$. *Les expressions des fonctions de répartition et quantile sont*

$$F_X(u) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2, & 0 \leq x < 100 \\ 0.5, & 100 \leq x < 500 \\ 0.85, & 500 \leq x < 1000 \\ 1, & x \geq 1000 \end{cases} \quad \text{et } F_X^{-1}(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u \leq 0.2 \\ 100, & 0.2 < u \leq 0.5 \\ 500, & 0.5 < u \leq 0.85 \\ 1000, & 0.85 < u \leq 1 \end{cases}.$$

□

L'identification de la fonction quantile devient plus délicate lorsque la fonction de répartition présente une forme non standard avec des portions à la fois monotones croissantes et des plateaux (ou des portions horizontales). Dans le prochain exemple, on présente le cas d'une v.a. X ayant une telle fonction de répartition.

Exemple 1.47 *Soit une v.a. X dont la fonction de répartition est donnée par*

$$F_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{200}\right)^2, & , \quad 0 \leq x < 100 \\ 0.25, & , \quad 100 \leq x < 200 \\ 1 - \left(\frac{300}{300+x}\right)^2, & , \quad x \geq 200 \end{cases}.$$

La fonction de répartition est représentée sur le graphique de l'illustration 1.1.

Alors, l'expression de F_X^{-1} est donnée par

$$F_X^{-1}(u) = \begin{cases} 200\left(u^{\frac{1}{2}}\right), & 0 \leq u \leq 0.25 \\ 200, & 0.25 < u \leq 0.64 \\ 300\left((1-u)^{-\frac{1}{2}} - 1\right), & 0.64 \leq u < 1 \end{cases}.$$

□

1.13.2 Deuxième définition

Dans certaines situations, on a aussi recours à une seconde définition donnée ci-dessous de la fonction quantile.

Définition 1.48 *Soit une v.a. X avec fonction de répartition F_X. On définit une deuxième version de la*

fonction de répartition inverse F_X^{-1+} *de* F_X *par*

$$F_X^{-1+}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > u\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq u\},$$

pour $u \in (0,1)$. *Par convention,* $\inf \emptyset = +\infty$ *et* $\sup \emptyset = -\infty$. *Cette deuxième version de la fonction inverse* F_X^{-1+} *est aussi appelée une deuxième version de la fonction quantile de* X.

Les propriétés de F_X^{-1+} sont :

— F_X^{-1+} est non décroissante (croissante au sens large) ;

— F_X^{-1+} est semi-continue à droite.

Si une v.a. X est continue, alors $F_X^{-1+}(u) = F_X^{-1}(u)$. Si X est une v.a. discrète et si u correspond à une partie horizontale de $F_X(x)$, alors $F_X^{-1}(u)$ correspond à l'extrémité gauche de l'intervalle et $F_X^{-1+}(x)$ correspond à l'extrémité droite de l'intervalle. On illustre la distinction entre les deux fonctions F_X^{-1+} et F_X^{-1} dans les exemples qui suivent.

Exemple 1.49 *Soit une v.a. discrète* X *avec* $\Pr(X = x) = \frac{1}{4}$, *où* $x \in \{1, 5, 10, 18\}$. *Alors,* $F_X^{-1}(0.4) = F_X^{-1+}(0.4) = 5$ *mais* $F_X^{-1}(0.5) = 5$ *et* $F_X^{-1+}(0.5) = 10$. □

Exemple 1.50 *Soit une v.a. discrète* X *définie à l'exemple 1.46. Pour* $u \in [0,1] \setminus \{0.2, 0.5, 0.85\}$, *on a* $F_X^{-1+}(u) = F_X^{-1}(u)$. *De plus,* $F_X^{-1+}(0.2) = 100$, $F_X^{-1+}(0.5) = 500$ *et* $F_X^{-1+}(0.85) = 1000$. □

Exemple 1.51 *Soit une v.a.* X *dont la fonction de répartition est définie à l'exemple 1.47. On a* $F_X^{-1+}(u) = F_X^{-1}(u)$ *pour toute valeur de* $u \neq 0.25$. *Pour* $u = 0.25$, *on a* $F_X^{-1+}(0.25) = 200$ *et* $F_X^{-1}(0.25) = 100$. □

1.13.3 Théorèmes en lien avec la fonction quantile

On présente ci-dessous un théorème important dont l'une des applications conduit à la méthode inverse utilisée dans la simulation stochastique (voir Chapitre 2).

Théorème 1.52 ***Théorème de la fonction quantile.*** *Soit une v.a.* X *avec fonction de répartition* F_X *et fonction quantile* F_X^{-1}. *Soit une v.a.* $U \sim U(0,1)$. *Alors, la fonction de répartition de* $F_X^{-1}(U)$ *est* F_X, *c.-à-d.,* $F_X^{-1}(U) \sim X$.

Preuve. On fait la preuve en deux étapes.

1. **Étape no1 - v.a. continue.** On suppose que la v.a. X est continue. Comme les évènements $\left\{F_X^{-1}(U) \leq x\right\}$ et $\{U \leq F_X(x)\}$ coïncident, alors on a

$$\Pr\left(F_X^{-1}(U) \leq x\right) = \Pr\left(U \leq F_X(x)\right).$$

De la fonction de répartition de $U \sim U(0,1)$, on déduit

$$\Pr\left(F_X^{-1}(U) \leq x\right) = \Pr\left(U \leq F_X(x)\right) = F_X(x).$$

Cette étape de la preuve est mis en image à l'illustration 1.2.

2. **Étape no2 - v.a. quelconque.** Maintenant, on considère le cas général d'une v.a. X dont la fonction de répartition peut avoir des sauts et des portions horizontales. Le cas des v.a. discrètes et continues est aussi inclus. On doit à nouveau montrer que les évènements $\left\{F_X^{-1}(U) \leq x\right\}$ et $\{U \leq F_X(x)\}$ coïncident.

— On suppose que $x \geq F_X^{-1}(u)$, pour $u \in (0,1)$. Puisque

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{y \in \mathbb{R}, F_X(y) \geq u\},$$

alors $F_X(x) \geq u$, pour $u \in (0,1)$. Bref, on a

$$x \geq F_X^{-1}(u) \Rightarrow F_X(x) \geq u,$$

pour $u \in (0,1)$. Ceci est mis en image à l'illustration 1.3.

Illustration 1.2 – Mise en images de l'étape no1 de la preuve du Théorème de la fonction quantile.

Illustration 1.3 – Mise en images de la partie 1 de l'étape no2 de la preuve du Théorème de la fonction quantile.

Illustration 1.4 – Mise en images de la partie 2 de l'étape no2 de la preuve du Théorème de la fonction quantile.

— Ensuite, on suppose que $F_X(x) \geq u$, ce qui implique

$$x \geq F_X^{-1}(u) = \inf\{y \in \mathbb{R}, F_X(y) \geq u\},$$

pour $u \in (0,1)$.

— Puisque les évènements $\left\{F_X^{-1}(U) \leq x\right\}$ et $\{U \leq F_X(x)\}$ coïncident, on a

$$\Pr\left(F_X^{-1}(U) \leq x\right) = \Pr\left(U \leq F_X(x)\right) = F_X(x).$$

Ceci est mis en image à l'illustration 1.4.

■

Théorème 1.53 ***Théorème sur la Transformation intégrale de probabilité ("Probability Integral Transform")****. Soit une v.a. continue X avec fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1}. Alors, $F_X(X) \sim U(0,1)$.*

Preuve. Pour tout $u \in (0,1)$, on développe l'expression de la fonction de répartition de $F_X(X)$

$$\Pr\left(F_X(X) \leq u\right) = \Pr\left(X \leq F_X^{-1}(u)\right) = F_X\left(F_X^{-1}(u)\right) = u,$$

ce qui permet de déduire le résultat désiré. ■

Proposition 1.54 *Soit une v.a. X. Si φ est une fonction strictement croissante et continue, alors on a*

$$F_{\varphi(X)}^{-1}(u) = \varphi\left(F_X^{-1}(u)\right),$$

pour $u \in (0,1)$.

Preuve. Voir, par exemple, [Denuit et al., 2006]. ■

1.14 Fonction quantile et espérance

La proposition ci-dessous présente une relation entre entre la fonction quantile d'une v.a. et son espérance.

Proposition 1.55 *Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F_X, fonction quantile F_X^{-1} et dont l'espérance existe. Soit une v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$. Alors, on a*

$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = E\left[F_X^{-1}(U)\right] = E\left[X\right]. \tag{1.35}$$

Preuve. Selon le Théorème 1.52 de la fonction quantile, on a

$$E\left[F_X^{-1}(U)\right] = E\left[X\right] < \infty.$$

Or, on sait que

$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 F_X^{-1}(u)\,f_U(u)\,\mathrm{d}u = E\left[F_X^{-1}(U)\right],$$

ce qui permet de conclure que

$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = E\left[F_X^{-1}(U)\right] = E\left[X\right].$$

■

On établit une relation entre la fonction quantile et la fonction *stop-loss*.

Proposition 1.56 *Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F_X, fonction quantile F_X^{-1} et dont l'espérance existe. Soit une v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$. Alors, on a*

$$\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = \pi_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right) + F_X^{-1}(\kappa)\,(1-\kappa), \tag{1.36}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= \int_\kappa^1 \left(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(\kappa) + F_X^{-1}(\kappa)\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_\kappa^1 \left(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(\kappa)\right)\mathrm{d}u + \int_\kappa^1 F_X^{-1}(\kappa)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \max\left(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(\kappa)\,;0\right)\mathrm{d}u + F_X^{-1}(\kappa)\,(1-\kappa) \\
&= E\left[\max\left(F_X^{-1}(U) - F_X^{-1}(\kappa)\,;0\right)\right] + F_X^{-1}(\kappa)\,(1-\kappa),
\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

Puis, par le Théorème 1.52 de la fonction quantile, on a

$$\begin{aligned}
\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= E\left[\max\left(F_X^{-1}(U) - F_X^{-1}(\kappa)\,;0\right)\right] + F_X^{-1}(\kappa)\,(1-\kappa) \\
&= E\left[\max\left(X - VaR_\kappa(X)\,;0\right)\right] + F_X^{-1}(\kappa)\,(1-\kappa),
\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$. ■

On établit une relation entre la fonction quantile et l'espérance tronquée.

Proposition 1.57 *Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F_X, une fonction quantile F_X^{-1} et dont l'espérance existe. Alors, on a*

$$\begin{aligned}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= E\left[X\times 1_{\left\{X>F_X^{-1}(\kappa)\right\}}\right] \\ &\quad +F_X^{-1}(\kappa)\left(F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right)-\kappa\right) \qquad (1.37)\\ \int_0^\kappa F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= E\left[X\times 1_{\left\{X\le F_X^{-1}(\kappa)\right\}}\right] \\ &\quad +F_X^{-1}(\kappa)\left(\kappa-F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right)\right), \qquad (1.38)\end{aligned}$$

pour $\kappa\in(0,1)$.

Preuve. La preuve est divisée en 2 parties.

1. Preuve de (1.37). En remplaçant (1.18) dans (1.36), on a

$$\begin{aligned}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= \pi_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right)+F_X^{-1}(\kappa)(1-\kappa)\\ &= E\left[X\times 1_{\left\{X>F_X^{-1}(\kappa)\right\}}\right]-F_X^{-1}(\kappa)\times\overline{F}_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right)+F_X^{-1}(\kappa)(1-\kappa)\\ &= E\left[X\times 1_{\left\{X>F_X^{-1}(\kappa)\right\}}\right]-F_X^{-1}(\kappa)\times\left(1-F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right)\right)+F_X^{-1}(\kappa)(1-\kappa)\\ &= E\left[X\times 1_{\left\{X>F_X^{-1}(\kappa)\right\}}\right]+F_X^{-1}(\kappa)\left(F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right)-\kappa\right),\end{aligned}$$

   pour $\kappa\in(0,1)$.

2. Preuve de (1.38). La relation

$$\int_0^\kappa F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u-\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u \qquad (1.39)$$

   est satisfaite pour tout $\kappa\in(0,1)$. On combine (1.35) et (1.37) dans (1.39), pour obtenir le résultat désiré :

$$\begin{aligned}\int_0^\kappa F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= E[X]-E\left[X\times 1_{\left\{X>F_X^{-1}(\kappa)\right\}}\right]-F_X^{-1}(\kappa)\left(F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right)-\kappa\right)\\ &= E\left[X\times 1_{\left\{X\le F_X^{-1}(\kappa)\right\}}\right]++F_X^{-1}(\kappa)\left(\kappa-F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right)\right),\end{aligned}$$

   pour $\kappa\in(0,1)$.

■

Les deuxièmes termes en (1.37) et (1.38) permettent de tenir compte des sauts éventuels dans la distribution de X. Si la v.a. X est continue, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.58 *Lorsque la v.a. X est continue, $F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right)=\kappa$ et (1.37) et (1.38) deviennent*

$$\begin{aligned}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= E\left[X\times 1_{\left\{X>F_X^{-1}(\kappa)\right\}}\right] \qquad (1.40)\\ \int_0^\kappa F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= E\left[X\times 1_{\left\{X\le F_X^{-1}(\kappa)\right\}}\right], \qquad (1.41)\end{aligned}$$

pour $\kappa\in(0,1)$.

1.15 Construction de distributions avec mélange

La construction de distributions avec mélange est fréquemment utilisée dans la modélisation des risques en actuariat.

Soit une v.a. discrète Θ, dite de *mélange*, où $\Theta \in A = \{\theta_1, \theta_2, ...\}$ avec $\Pr(\Theta = \theta) = f_\Theta(\theta)$, $\theta \in A$. Alors, la distribution de X est dite *avec mélange* si sa fonction de répartition est de la forme

$$F_X(x) = \sum_{\theta \in A} F_{X|\Theta=\theta}(x) f_\Theta(\theta), \tag{1.42}$$

où la fonction de répartition conditionnelle de X sachant $\Theta = \theta$, $F_{X|\Theta=\theta}$, est la fonction de répartition d'une loi connue dont les paramètres varient selon θ_i, $i \in \mathbb{N}^+$. Ainsi, selon la formule de l'espérance totale, on a

$$E[g(X)] = \sum_{\theta \in A} E[g(X)|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta), \tag{1.43}$$

si les espérances existent. Par exemple, on déduit de (1.43) les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{\theta \in A} E[X|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta), \\ E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] &= \sum_{\theta \in A} E\left[X \times 1_{\{X>d\}}|\Theta = \theta\right] f_\Theta(\theta), \\ E[\min(X;d)] &= \sum_{\theta \in A} E[\min(X;d)|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta). \end{aligned} \tag{1.44}$$

De même, en supposant les conditions d'existence respectées, on a

$$\mathcal{M}_X(t) = \sum_{\theta \in A} M_{X|\Theta=\theta}(t) f_\Theta(\theta).$$

Dans le cas où la distribution conditionnelle de $(X|\Theta = \theta)$ est continue, l'expression de la fonction de densité marginale de X est

$$f_X(x) = \sum_{\theta \in A} f_{X|\Theta=\theta_i}(x) f_\Theta(\theta).$$

On suppose maintenant que la v.a. de mélange Θ est continue avec fonction de densité f_Θ. Alors, la fonction de répartition marginale de X est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|\Theta=\theta}(x) f_\Theta(\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

et l'expression de l'espérance de $g(X)$ est

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[g(X)|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta) \, \mathrm{d}\theta.$$

Exemple 1.59 *Soit* $\Theta \sim Bin(2, 0.2)$ *et*

$$(X|\Theta = \theta) \sim Exp\left(\frac{1}{(\theta+1)10}\right).$$

Selon (1.42), la fonction de répartition de X *est donnée par*

$$F_X(x) = \sum_{\theta=0}^{2} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10(\theta+1)}}\right) \binom{2}{\theta} 0.2^\theta \times 0.8^{2-\theta}.$$

Comme $E[X|\Theta] = 10(\Theta+1)$*, on déduit en appliquant la formule de l'espérance totale*

$$E[X] = E_\Theta[E[X|\Theta]] = E_\Theta[10(\Theta+1)] = 14.$$

□

La distribution de Pareto peut être représentée sous la forme d'un mélange de lois exponentielles, tel qu'illustré dans le prochain exemple.

Exemple 1.60 *Soit* $\Theta \sim Ga(\alpha, 1)$*. Si* $(X|\Theta=\theta) \sim Exp\left(\frac{\theta}{\lambda}\right)$*, l'expression de la fonction de survie de* X *est donnée par*

$$\begin{aligned}\overline{F}_X(x) &= \int_0^\infty \overline{F}_{X|\Theta=\theta}(x) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\lambda}x} f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= M_\Theta\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = \left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda}}\right)^\alpha = \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha,\end{aligned}$$

qui correspond à la fonction de survie de la distribution de Pareto. □

1.16 Lois conjointes de n variables aléatoires

1.16.1 Définitions et propriétés

Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$. La fonction de répartition conjointe de $\underline{X}$ est définie par

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \Pr(X_1 \le x_1, ..., X_n \le x_n).$$

Avant de présenter les propriétés de $F_{\underline{X}}$, on définit l'opérateur $\triangle_{a_i,b_i}$ où

$$\triangle_{a_i,b_i} F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{\underline{X}}(x_1, ..., b_i, ..., x_n) - F_{\underline{X}}(x_1, ..., a_i, ..., x_n).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\triangle_{a_j,b_j} \triangle_{a_i,b_i} F_{\underline{X}}(\underline{x}) &= \triangle_{a_j,b_j} F_{\underline{X}}(x_1, ..., b_i, ..., x_n) - \triangle_{a_j,b_j} F_{\underline{X}}(x_1, ..., a_i, ..., x_n) \\ &= F_{\underline{X}}(x_1, ..., b_i, ..., b_j ..., x_n) - F_{\underline{X}}(x_1, ..., b_i, ..., a_j ..., x_n) \\ &\quad - F_{\underline{X}}(x_1, ..., a_i, ..., b_j ..., x_n) + F_{\underline{X}}(x_1, ..., a_i, ..., a_j ..., x_n).\end{aligned}$$

Pour $n = 2$, on écrit

$$\begin{aligned}\Pr(\underline{a} < \underline{X} \le \underline{b}) &= \Pr(\underline{X} \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \\ &= \triangle_{a_1,b_1} \triangle_{a_2,b_2} F_{\underline{X}}(\underline{x}) \\ &= F_{\underline{X}}(b_1, b_2) - F_{\underline{X}}(a_1, b_2) \\ &\quad - F_{\underline{X}}(b_1, a_2) + F_{\underline{X}}(a_1, a_2).\end{aligned}$$

Propriétés 1.61 *Une fonction de répartition multivariée* $F_{\underline{X}}$ *est une application de* $\mathbb{R}^n$ *vers* $[0,1]$ *telle que :*

1. $F_{\underline{X}}$ *est non décroissante sur* $\mathbb{R}^n$ *;*
2. $F_{\underline{X}}$ *est continue à droite sur* $\mathbb{R}^n$ *;*
3. $\lim_{x_i \to -\infty} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = 0$*, pour* $i = 1, ..., n$ *;*
4. $\lim_{x_1 \to \infty, ..., x_n \to \infty} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = 1$ *;*
5. *Pour tout* x*, on a*
$$\triangle_{a_1,b_1} ... \triangle_{a_n,b_n} F_{\underline{X}}(\underline{x}) \ge 0 \tag{1.45}$$
pour s'assurer que
$$\Pr(\underline{a} < \underline{X} \le \underline{b}) = \Pr(\underline{X} \in (a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]) \ge 0.$$

Si $F_{\underline{X}}$ est dérivable, (1.45) est équivalent à

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 ... \partial x_n} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) \geq 0$$

sur $\mathbb{R}^n$.

On définit la fonction de répartition marginale de X_i par

$$F_{X_i}(x_i) = \Pr(X_i \leq x_i) = F_{X_1,...,X_n}(\infty, ..., \infty, x_i, \infty, ..., \infty),$$

pour tout $i = 1, ..., n$. On utilise fréquemment l'expression "marginale" au lieu de "fonction de répartition marginale".

La fonction de survie conjointe de $\underline{X}$ est définie par

$$\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \Pr(X_1 > x_1, ..., X_n > x_n).$$

Pour $n = 2$ et $n = 3$, on a

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$$

et

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) &= 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) - F_{X_3}(x_3) \\ &\quad + F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) + F_{X_1,X_3}(x_1, x_3) \\ &\quad + F_{X_2,X_3}(x_2, x_3) - F_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

La fonction de survie marginale de la v.a. X_i est définie par

$$\overline{F}_{X_i}(x_i) = \Pr(X_i > x_i) = \overline{F}_{X_1,...,X_n}(0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0),$$

pour $i = 1, ..., n$.

La fgm multivariée de $\underline{X}$ est définie par

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n) = E\left[e^{t_1 X_1} ... e^{t_n X_n}\right]$$

si l'espérance existe.

Les v.a. X_1, ..., X_n sont indépendantes si et seulement si on a

$$\begin{aligned} F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) &= F_{X_1}(x_1) ... F_{X_n}(x_n), \\ \overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) &= \overline{F}_{X_n}(x_n) ... \overline{F}_{X_1}(x_n). \end{aligned}$$

De plus, si les v.a. X_1, ..., X_n sont indépendantes, on a

$$E[g(X_1) ... g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] ... E[g_n(X_n)],$$

pour toutes fonctions intégrables $g_1, ..., g_n$. Par exemple, l'espérance du produit des v.a. X_i et X_j devient

$$E[X_i X_j] = E[X_i] E[X_j],$$

pour $i \neq j \in \{1, ..., n\}$. Également,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n) &= E\left[e^{t_1 X_1} ... e^{t_n X_n}\right] \\ &= E\left[e^{t_1 X_1}\right] ... E\left[e^{t_n X_n}\right] \\ &= \mathcal{M}_{X_1}(t_1) ... \mathcal{M}_{X_n}(t_n). \end{aligned}$$

Les notions concernant les lois conjointes sont traitées de façon détaillée aux chapitres 13 et 14.

1.16.2 Variables aléatoires à support dénombrable

Soit un vecteur de n v.a. discrètes positives $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ à support dénombrable. La fonction de masse de probabilité conjointe de $\underline{X}$, désignée par $f_{\underline{X}}$, est définie par

$$f_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = \Pr(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n).$$

La fonction $f_{\underline{X}}$ prend des valeurs dans $[0, 1]$. Afin de simplifier la présentation, prenons le cas particulier où $X_i \in \{0, 1h, 2h, ...\}$, $i = 1, 2, ...$, et h est un scalaire strictement positif. Pour $n = 2$, on a la relation suivante pour la fmp conjointe de (X_1, X_2) :

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(m_1h, m_2h) &= F_{X_1,X_2}(m_1h, m_2h) - F_{X_1,X_2}(m_1h - h, m_2h) \\ &\quad - F_{X_1,X_2}(m_1h, m_2h - h) \\ &\quad + F_{X_1,X_2}(m_1h - h, m_2h - h), \end{aligned}$$

pour $(m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et avec $F_{X_1,X_2}(m_1h, m_2h) = 0$ si $m_1 < 0$ ou $m_2 < 0$. On a également les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} & E[g_1(X_1) ... g_n(X_n)] \\ = & \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} g_1(m_1h) ... g_n(m_nh) f_{X_1,...,X_n}(m_1h, ..., m_nh) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & E[g(X_1, ..., X_n)] \\ = & \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} g(m_1h, ..., m_nh) f_{X_1,...,X_n}(m_1h, ..., m_nh). \end{aligned}$$

En particulier, la fgm multivariée de $\underline{X}$ est

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{m_1ht_1} ... \mathrm{e}^{m_nht_n} f_{X_1,...,X_n}(m_1h, ..., m_nh),$$

si elle existe. De plus, on définit aussi la fgp multivariée par

$$\mathcal{P}_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_1=0}^{\infty} t_1^{m_1h} ... t_n^{m_nh} f_{X_1,...,X_n}(m_1h, ..., m_nh), \quad |t_i| \leq 1, \ i = 1, 2, ..., n.$$

1.16.3 Variables aléatoires continues

Soit un vecteur de n v.a. continues $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$. La fonction de densité conjointe de $\underline{X}$ est définie par

$$f_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 ... \partial x_n} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n).$$

La fonction de densité conjointe $f_{\underline{X}}$ prend des valeurs positives qui peuvent être supérieures à 1 telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n = 1.$$

Une interprétation heuristique de la fonction de densité conjointe est

$$f_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n \simeq \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in (x_i, x_i + \mathrm{d}x_i]\right).$$

Notamment, on a

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in (a_i, b_i]\right) = \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_n}^{b_n} f_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n,$$

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\, f_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n,$$

et

$$E\left[g(X_1, ..., X_n)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, ..., x_n)\, f_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n.$$

L'expression de la fgm multivariée est donnée par

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{t_1 x_1} ... \mathrm{e}^{t_n x_n} f_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n.$$

Soit $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur de v.a. continues positives. Alors, l'expression de la TLS multivariée de $\underline{X}$ est

$$\mathcal{L}_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n) = \int_{0}^{\infty} ... \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t_1 x_1} ... \mathrm{e}^{-t_n x_n} f_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n, \text{ pour } t_i > 0,\ i = 1, 2, ..., n.$$

1.17 Covariance et corrélation linéaire

Soit une paire de v.a. (X, Y). On définit la covariance entre X et Y par

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right] = E[XY] - E[X]\, E[Y].$$

La covariance entre X et Y permet de mesurer la relation de dépendance linéaire entre deux v.a. Si les v.a. X et Y sont discrètes et dénombrables, l'expression de $E[XY]$ est donnée par

$$E[XY] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i\ y_j\, f_{X,Y}(x_i, y_j).$$

On a aussi

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (x_i - E[X])(y_j - E[Y])\ f_{X,Y}(x_i, y_j).$$

Si les v.a. X et Y sont continues, l'expression de $E[XY]$ est

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\ \ f_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

De plus, on a

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])(y - E[Y])\ \ f_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

La covariance peut être positive, nulle ou négative. Une valeur positive (négative) indique une relation de dépendance linéaire positive (négative) entre X et Y. Lorsque les v.a. X et Y sont indépendantes, on a $E[XY] = E[X] \times E[Y]$ et il en résulte que la covariance entre elles est nulle. En revanche, comme il est illustré dans le prochain exemple, une covariance nulle entre les v.a. X et Y n'implique pas qu'elles soient indépendantes entre elles.

Exemple 1.62 *Soit une paire de v.a. discrètes* (X,Y) *où* $X \in \{-1,0,1\}$ *et* $Y \in \{-2,0,2\}$. *Les valeurs de la fmp conjointe de* (X,Y) *sont fournies dans le tableau suivant :*

$x\backslash y$	-2	0	2
-1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0

Clairement, on a $f_X(-1) = f_X(0) = f_X(1) = \frac{1}{3}$, $f_Y(-2) = f_Y(2) = \frac{1}{6}$ *et* $f_Y(0) = \frac{2}{3}$. *On obtient* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. *Toutefois,* $f_{X,Y}(0,0) \neq f_X(0) f_Y(0) = \frac{2}{9}$. *Alors, les v.a.* X *et* Y *ne sont pas indépendantes bien que leur covariance soit nulle.* □

Les propriétés de la covariance sont fournies dans l'énoncé qui suit.

Propriétés 1.63 *Soit les v.a.* X, Y, Z, W *et les scalaires* a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. *Alors, on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,X) &= \mathrm{Var}(X), \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cov}(Y,X), \\
\mathrm{Cov}(aX,bY) &= ab\mathrm{Cov}(X,Y), \\
\mathrm{Cov}(X+c,Y+d) &= \mathrm{Cov}(X,Y), \\
\mathrm{Cov}(aX+c,bY+d) &= ab\mathrm{Cov}(X,Y), \\
\mathrm{Cov}(X,Y+Z) &= \mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Z), \\
\mathrm{Cov}(X+W,Y+Z) &= \mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(W,Y) \\
&\quad +\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(W,Z).
\end{aligned}$$

On définit le coefficient de corrélation linéaire de Pearson ρ_P par

$$\rho_P(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}},$$

où $-1 \leq \rho_P(X,Y) \leq 1$.Si les v.a. X et Y sont indépendantes, alors le coefficient de corrélation linéaire de Pearson est nul. Toutefois, la réciproque n'est pas vraie car le coefficient de corrélation linéaire de Pearson ne mesure que la relation de dépendance linéaire entre les deux v.a. X et Y. Si $\rho_P(X,Y) = 0$, les v.a. X et Y sont dites non corrélées linéairement. La notion de dépendance et les mesures de dépendance sont très importantes en actuariat. Elles sont traitées aux chapitres 13 et 14.

Soit un vecteur de v.a. $(X_1,...,X_n)$. La matrice variance-covariance associée à $(X_1,...,X_n)$ est définie par

$$\begin{pmatrix}
\mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,X_n) \\
\mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2,X_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathrm{Cov}(X_n,X_1) & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) & \cdots & \mathrm{Var}(X_n)
\end{pmatrix}.$$

On définit les v.a. $S = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ et $T = \sum_{i=1}^n b_i X_i$, où $a_1,...,a_n$, $b_1,...,b_n \in \mathbb{R}$. Alors, on a les relations suivantes :

$$E[S] = \sum_{i=1}^n a_i E[X_i],\ E[T] = \sum_{i=1}^n b_i E[X_i],$$

$$\mathrm{Var}(S) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\neq i}^n a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i,X_j),$$

$$\mathrm{Var}(T) = \sum_{i=1}^n b_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\neq i}^n b_i b_j \mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

et

$$\mathrm{Cov}\left(S,T\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right).$$

De façon similaire, on définit aussi la matrice de corrélation composée des coefficients de corrélation linéaire pour toutes les paires du vecteur $(X_1,...,X_n)$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_P\left(X_1,X_2\right) & \cdots & \rho_P\left(X_1,X_n\right) \\ \rho_P\left(X_2,X_1\right) & 1 & \cdots & \rho_P\left(X_2,X_n\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_P\left(X_n,X_1\right) & \rho_P\left(X_n,X_2\right) & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.18 Espérance conditionnelle

Soit les v.a. X et Y. L'espérance conditionnelle d'une fonction g de la v.a. X sachant que la v.a. Y a pris la valeur y est désignée par $E\left[g\left(X\right)|Y=y\right]$. Cela signifie que l'on utilise cette information sur la v.a. Y et une relation de dépendance éventuelle entre X et Y pour évaluer la valeur espérée de $g\left(X\right)$. Toutefois, si les v.a. X et Y sont indépendantes, alors cette information est superflue et $E\left[g\left(X\right)|Y=y\right]=E\left[g\left(X\right)\right]$. On fournit un bref aperçu sur les espérances conditionnelles, que l'on applique fréquemment dans cet ouvrage.

Soit les v.a. discrètes X et Y définies sur les supports dénombrables $\{x_1,x_2,...\}$ et $\{y_1,y_2,...\}$. La fonction de répartition conditionnelle de X sachant Y est définie par

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y_j}\left(x_i\right) &= \Pr\left(X=x_i|Y=y_j\right) \\ &= \frac{\Pr\left(X=x_i,Y=y_j\right)}{\Pr\left(Y=y_j\right)}=\frac{f_{X,Y}\left(x_i,y_j\right)}{f_Y\left(y_j\right)}, \end{aligned}$$

pour $x_i\in\{x_1,x_2,...\}$ et $y_j\in\{y_1,y_2,...\}$. L'expression de l'espérance conditionnelle de $g\left(X\right)$ sachant $Y=y_j$ est donnée par

$$E\left[g\left(X\right)|Y=y_j\right]=\sum_{i=1}^{\infty}g\left(x_i\right)f_{X|Y=y_j}\left(x_i\right),$$

pour $y_j\in\{y_1,y_2,...\}$. Ainsi, on a la fonction de répartition conditionnelle de X sachant $Y=y_j$ qui est

$$F_{X|Y=y_j}\left(x\right)=\sum_{i=1}^{\infty}1_{\{x_i\leq x\}}f_{X|Y=y_j}\left(x_i\right),$$

pour $y_j\in\{y_1,y_2,...\}$.

Soit les v.a. continues X et Y. La fonction de densité conditionnelle de X sachant $Y=y$ est définie par

$$f_{X|Y=y}\left(x\right)=\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)},$$

pour $x,y\in\mathbb{R}$ et quand $f_Y\left(y\right)>0$. On obtient l'expression de l'espérance conditionnelle de $g\left(X\right)$ sachant $Y=y$ avec

$$E\left[g\left(X\right)|Y=y\right]=\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x\right)f_{X|Y=y}\left(x\right)\mathrm{d}x$$

pour $y\in\mathbb{R}$.

1.19 Somme de variables aléatoires

1.19.1 Définitions et caractéristiques de base

On s'intéresse au comportement aléatoire de la v.a. $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$. Dans un contexte actuariel, cette somme représente les coûts d'un portefeuille de n risques. On débute par les caractéristiques de base.

L'espérance de S est donnée par

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i].$$

Il est important de noter qu'il n'est pas nécessaire que les v.a X_i soient indépendantes pour trouver $E[S_n]$. La variance de la v.a. S est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

On suppose que les fgm des v.a. X_1, ..., X_n existent. On développe l'expression de la fgm de S pour 2 cas particuliers.

— **Cas 1** : On suppose que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes. On a

$$\mathcal{M}_S(t) = E\left[\mathrm{e}^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_{X_i}(t). \tag{1.46}$$

— **Cas 2** : On suppose que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées (iid). Il en résulte que

$$\mathcal{M}_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_{X_i}(t) = (\mathcal{M}_X(t))^n.$$

La fgm de S permet notamment de trouver $E\left[S^k\right]$ pour $k = 1, 2, ...$ et à identifier, si possible, la distribution de S. Le développement de la fgm de S dans le cas général est traité au chapitre 13.

En actuariat, on s'intéresse fortement au comportement aléatoire de S, en examinant en détails les caractéristiques de S et de l'évaluation de sa distribution. Les chapitres 5, 2 et 11 traitent de ce sujet primordial en actuariat.

1.19.2 Somme de 2 v.a. discrètes indépendantes

Soit deux v.a. indépendantes discrètes X_1 et X_2 définies sur le support arithmétique $\{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$ avec $f_{X_1}(kh) = \Pr(X_1 = kh)$ et $f_{X_2}(kh) = \Pr(X_2 = kh)$, pour $k \in \mathbb{N}$. On veut calculer la fmp de $S = X_1 + X_2$, notée $f_S(kh) = \Pr(S = kh)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En conditionnant sur les valeurs possibles de X_1 et en raison de l'hypothèse d'indépendance entre X_1 et X_2, on déduit que

$$f_S(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{X_1}(jh)\, f_{X_2}((k-j)h).$$

Cette opération est appelée le produit de convolution de f_{X_1} et f_{X_2}, et elle est désignée sous la notation $f_{X_1} * f_{X_2}$. Ainsi, on a $f_S(kh) = f_{X_1} * f_{X_2}(kh)$, $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.64 *Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim Bin(5, 0.3)$ et $X_2 \sim Bin(10, 0.2)$. On définit $S = X_1 + X_2$. Lorsque l'on effectue directement le produit de convolution avec $h = 1$, les valeurs obtenues de $f_S(k)$ pour $k = 0, 1, ..., 13$ sont les suivantes :*

k	0	1	2	3	4	5	6
$f_S(k)$	0.01805	0.08379	0.18058	0.23967	0.21909	0.14614	0.07348
k	7	8	9	10	11	12	13
$f_S(k)$	0.02837	0.00848	0.00196	0.00035	0.00005	0.00001	0.00000

De plus, $f_S(k) = 0$*, pour* $k = 14, 15$*. La v.a.* S *n'obéit pas à une loi connue. Il est possible de vérifier que* $E[S] = \sum_{k=0}^{15} k f_S(k) = 3.5$ *qui est aussi égal à* $E[X_1] + E[X_2] = 1.5 + 2 = 3.5$. □

1.19.3 Somme de 2 v.a. continues indépendantes

On considère deux v.a. indépendantes continues positives X_1 et X_2 avec fonctions de densité f_{X_1} et f_{X_2} respectivement. L'expression de la fonction de densité f_S de $S = X_1 + X_2$ est donnée par

$$f_S(x) = \int_0^x f_{X_1}(y) f_{X_2}(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

que l'on obtient en conditionnant sur les valeurs possibles de X_1 et en utilisant l'hypothèse d'indépendance entre X_1 et X_2. Ainsi, f_S correspond au produit de convolution de f_{X_1} et f_{X_2} que l'on désigne par $f_S(x) = f_{X_1} * f_{X_2}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Exemple 1.65 *Soit* $S = X_1 + X_2$ *où* X_1 *et* X_2 *sont des v.a. indépendantes avec* $X_i \sim U(0, b_i)$*,* $i = 1, 2$ *et* $0 < b_1 \leq b_2$*. L'expression de* f_S *est donnée par*

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_0^x f_{X_1}(y) f_{X_2}(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x \frac{1}{b_1} I_{\{x\in[0,b_1]\}} \frac{1}{b_2} I_{\{(x-y)\in[0,b_2]\}}\mathrm{d}y \\ &= \begin{cases} \frac{x}{b_1 b_2}, & 0 \leq x \leq b_1 \\ \frac{b_1}{b_1 b_2}, & b_1 \leq x \leq b_2 \\ \frac{b_1+b_2-x}{b_1 b_2}, & b_2 \leq x \leq b_1 + b_2 \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.66 *Soit* $S = X_1 + X_2$ *où* X_1 *et* X_2 *sont des v.a. indépendantes avec* $X_i \sim Exp(\beta_i)$*,* $i = 1, 2$ *et* $\beta_1 \neq \beta_2$*. L'expression de* f_S *est*

$$f_S(x) = \int_0^x \beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 y} \beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2(x-y)}\mathrm{d}y = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x} + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2 x},$$

qui correspond à la fonction de densité de la loi Erlang généralisée. Il est aisé de montrer que $E[S] = \int_0^\infty x f_S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}$ *qui correspond aussi à* $E[X_1] + E[X_2]$. □

Exemple 1.67 *Soit les v.a. indépendantes* X_1 *et* X_2 *où* $X_1 = cY_1$*,* $c \in \mathbb{R}^+$*,* $Y_1 \sim Bêta(2, 1)$ *et* $X_2 \sim Exp(\beta)$*. On définit la v.a.* $S = X_1 + X_2$*. On obtient l'expression suivante pour* $f_S(x)$ *:*

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_0^{\min(x;c)} 2\left(\frac{y}{c}\right)\frac{1}{c}\beta \mathrm{e}^{-\beta(x-y)}\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{c}\mathrm{e}^{-\beta x}\left\{\left(\frac{\min(x;c)\,\mathrm{e}^{\beta\min(x;c)}}{c}\right) - \frac{1}{\beta c}\left(\mathrm{e}^{\beta\min(x;c)} - 1\right)\right\}. \end{aligned}$$

□

1.19.4 Somme de v.a. indépendantes et fgm

Une méthode pour identifier la loi d'une somme d'un nombre fini de v.a. $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est d'utiliser la fgm. En effet, on a

$$\mathcal{M}_S(t) = E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = E\left[\mathrm{e}^{t\sum_{i=1}^n X_i}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right]. \tag{1.47}$$

L'idée est alors d'identifier la loi de S à partir de l'expression obtenue avec (1.47). On présente ci-dessous des exemples d'application de cette approche. Les résultats de ces exemples seront utiles tout au long de cet ouvrage.

Exemple 1.68 *Soit les v.a. indépendantes* $X_i \sim Pois(\lambda_i)$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors, la v.a.* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *obéit également à une loi de Poisson de paramètre* $\lambda_1 + ... + \lambda_n$. *Pour le démontrer, on applique (1.47)*

$$\mathcal{M}_S(t) = E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i\left(\mathrm{e}^t-1\right)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+...+\lambda_n)\left(\mathrm{e}^t-1\right)}$$

qui correspond à la fgm de la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + ... + \lambda_n$. □

Pour chacun des prochains exemples, le résultat est démontré de manière identique à celle utilisée dans l'exemple 1.68.

Exemple 1.69 *Soit les v.a. indépendantes* $X_i \sim Bin(r_i, q)$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors, la v.a.* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *obéit également à une loi binomiale de paramètres* $r_1 + ... + r_n$ *et* q. □

Exemple 1.70 *Soit les v.a. indépendantes* $X_i \sim BinNég(r_i, q)$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors, la v.a.* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *obéit également à une loi binomiale négative de paramètres* $r_1 + ... + r_n$ *et* q. □

Exemple 1.71 *Soit les v.a.indépendantes* $X_i \sim Ga(\alpha_i, \beta)$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors, la v.a.* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *obéit à une loi gamma de paramètres* $\alpha_1 + ... + \alpha_n$ *et* β. □

Exemple 1.72 *Une v.a. de loi Erlang peut être représentée comme la somme de v.a. iid de loi exponentielle. Soit les v.a. iid* $X_1, ..., X_n$ *de loi exponentielle avec paramètres* $\beta_i = \beta$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors, la v.a.* $T_n = X_1 + ... + X_n$ *obéit à une loi Erlang de paramètres* n *et* β *car*

$$\mathcal{M}_{T_n}(t) = E\left[\mathrm{e}^{tT_n}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right] = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^n.$$

Dans la proposition suivante, on utilise aussi la fgm afin d'identifier la fonction de densité de la somme de n v.a. indépendantes de loi gamma avec des paramètres β_1, ..., β_n différents.

Proposition 1.73 *Soit* n *v.a. indépendantes* $X_i \sim Ga(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, ..., n$. *On définit* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Alors, on a*

$$f_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k h(x; \alpha + k, \beta), \tag{1.48}$$

où $p_k = \sigma\xi_k$, *pour* $k \in \mathbb{N}$, *avec* $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$,

$$\begin{aligned}
\beta &= \max(\beta_1; ...; \beta_n), \quad \sigma = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^{\alpha_i}, \\
\zeta_k &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{k} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta}\right)^k, \quad (k = 1, 2, ...), \\
\xi_0 &= 1, \ \xi_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i\zeta_i\xi_{k-i}, \quad (k = 1, 2, ...).
\end{aligned}$$

Remarque 1.74 *Dans le théorème 1.48, la distribution de* S *correspond à un mélange de lois gamma. Les probabilités* p_0, p_1, p_2, ... *sont calculées récursivement.*

Preuve. Voir [Moschopoulos, 1985]. ■

Exemple 1.75 *Soit les v.a. indépendantes* $X_1 \sim Ga\left(3.2, \frac{1}{5}\right)$ *et* $X_2 \sim Ga\left(1.4, \frac{1}{10}\right)$. *On définit* $S = X_1 + X_2$ *où l'on déduit* $E[S] = 30$. *À partir du théorème 1.48, on a calculé* $\alpha = 4.6$, $\beta = 0.2$ *et* $\sigma = 0.3789$ *ainsi que les valeurs de* p_k *pour* $k = 0, 1, ..., 5$ *:*

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0.3789	0.2653	0.1592	0.0902	0.0496	0.0267

On obtient $F_X(30) = 0.5711$ *et* $F_X(100) = 0.9989$. □

1.20 Somme de v.a. indépendantes et fgp

1.20.1 Relation de base

Soit les v.a. indépendantes X_1, ..., X_n définies sur $\mathbb{N}$ avec

$$f_{X_i}(k) = \Pr(X_i = k), \, k \in \mathbb{N}, \, .$$

et

$$\mathcal{P}_{X_i}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k f_X(k) = E\left[t^{X_i}\right], t \in [0,1], i = 1, 2, ..., n.$$

Proposition 1 *Soit les v.a. discrètes positives (avec support $\mathbb{N}$) indépendantes $X_1, ..., X_n$ dont les fgp sont $\mathcal{P}_{X_i}(r)$, pour $i = 1, ..., n$. On définit la v.a. $S = X_1 + ... + X_n$. Alors, la fgp de la v.a. S est donnée par*

$$\mathcal{P}_S(t) = \mathcal{P}_{X_1}(t) \times ... \times \mathcal{P}_{X_n}(t), \tag{1.49}$$

pour $t \in [0,1]$.

Preuve. La fgp de la v.a. S est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_S(t) &= E[t^S] = E[t^{X_1+...+X_n}] \\
&= E[t^{X_1} \times ... \times t^{X_n}] \\
&= E[t^{X_1}] \times ... \times E[t^{X_n}] \\
&= \mathcal{P}_{X_1}(t) \times ... \times \mathcal{P}_{X_n}(t),
\end{aligned}$$

pour $t \in [0,1]$. ■

On illustre la propriété 1 dans l'exemple suivant.

Exemple 1 *Soit les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$, avec $X_i \sim Pois(\lambda_i)$, pour $i = 1, ..., n$. On définit la v.a. $S = X_1 + ... + X_n$. Alors, la fgp de la v.a. S est donnée par*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_S(t) &= \mathcal{P}_{X_1}(t) \times ... \times \mathcal{P}_{X_n}(t) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_1(t-1)} \times ... \times \mathrm{e}^{\lambda_n(t-1)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_1(t-1)+...+\lambda_n(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+...+\lambda_n)(t-1)},
\end{aligned}$$

pour $r \in [0,1]$.

On déduit que $S \sim Pois(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$.

1.20.2 En coulisses

Habituellement, on se contente du formalisme tel la relation en (1.49) et des expressions fermées pour les lois discrètes connues, tout en oubliant ce qui se passe en coulisses en multipliant les séries convergentes de puissances.

Dans le cas où la v.a. X_i est définie sur un support fini, $\mathcal{P}_{X_i}(t)$ correspond à un polynôme en "t" ($i \in \{1, 2, ..., n\}$).

En appliquant la relation en (1.49), on multiplie des polynômes et le résultat de ce produit, $\mathcal{P}_S(t)$, est lui-même un polynôme. Les coefficients de ce polynôme correspondent aux valeurs de la fmp de la v.a. S. Cette procédure est illustrée dans les prochains exemples. Elle est identique dans le cas de v.a. définies sur $\mathbb{N}$.

1.20.3 Exemple #1

Soit les v.a. indépendantes X_1 et X_2 avec

$$f_{X_i}(k) = \Pr(X_i = k) > 0, \, k \in \{0, 1, 2\}, \, i = 1, 2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$. On vise à calculer les valeurs de

$$f_S(k) = \Pr(S = k) > 0,\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Pour y parvenir, on applique (1.49)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \mathcal{P}_{X_1}(t) \times \mathcal{P}_{X_2}(t) \\ &= \left(f_{X_1}(0) + f_{X_1}(1)\,t + f_{X_1}(2)\,t^2\right) \times \left(f_{X_2}(0) + f_{X_2}(1)\,t + f_{X_2}(2)\,t^2\right)\end{aligned}$$

et, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(0) \\ &\quad + (f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(1) + f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(0)) \times t \\ &\quad + (f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(2) + f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(1) + f_{X_1}(2)\,f_{X_2}(0)) \times t^2 \\ &\quad + (f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(2) + f_{X_1}(2)\,f_{X_2}(1)) \times t^3 \\ &\quad + (f_{X_1}(2)\,f_{X_2}(2)) \times t^4.\end{aligned} \tag{1.50}$$

Puisque

$$\mathcal{P}_S(t) = f_S(0) + f_S(1)\,t + f_S(2)\,t^2 + f_S(3)\,t^3 + f_S(4)\,t^4. \tag{1.51}$$

est identique à (1.50), on identifie les coefficients ($f_S(0)$, ..., $f_S(4)$) du polynôme en "t" de (1.51) à partir des coefficients du polynôme en "t" de (1.50).

1.20.4 Exemple #2

On généralise la procédure décrite en § 1.20.3 en considérant la somme de deux v.a. définies sur $\mathbb{N}$. Soit les v.a. indépendantes X_1 et X_2 avec

$$\mathcal{P}_{X_i}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{X_i}(k)\,t^k,\ i = 1, 2.$$

On définit $S = X_1 + X_2$. Clairement, $\mathcal{P}_{X_1}(t)$ et $\mathcal{P}_{X_2}(t)$ sont des séries de puissances dont l'argument est $t \in [0, 1]$. Alors, la fgp de la v.a. S, donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \mathcal{P}_{X_1}(t) \times \mathcal{P}_{X_2}(t) \\ &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1)\,t^{k_1}\right) \times \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_2}(k_2)\,t^{k_2}\right),\end{aligned}$$

est une série de puissances dont l'argument est "t" et dont les coefficients sont les valeurs de f_S. En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1)\,t^{k_1}\right) \times \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_2}(k_2)\,t^{k_2}\right) \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1)\,t^{k_1} \times f_{X_2}(k_2)\,t^{k_2}.\end{aligned} \tag{1.52}$$

La double somme en (1.52) peut se résumer en une somme unique en mettant entre parenthèses les

coefficients de t^l pour chaque $l \in \mathbb{N}$, comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} f_{X_1}(k_1)\, t^{k_1} \times f_{X_2}(k_2)\, t^{k_2} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} t^l \left(\sum_{j=0}^{l} f_{X_1}(j)\, f_{X_2}(l-j)\right), \end{aligned} \tag{1.53}$$

où le coefficient de t^l, donné par

$$\sum_{j=0}^{l} f_{X_1}(j)\, f_{X_2}(l-j),$$

est la valeur de $f_S(l)$ par la définition de la fgp de S. En effet, la définition de la fgp de la v.a. S est

$$\mathcal{P}_S(t) = \sum_{l=0}^{\infty} f_S(l)\, t^l. \tag{1.54}$$

Puisque les deux représentations en (1.53) et (1.54) de la fgp de la v.a. S sont identiques, il suffit d'identifier (pour chaque l) le coefficient de t^l dans (1.53) pour déterminer l'expression de $f_S(l)$ dans (1.54), permettant de conclure que

$$f_S(l) = \sum_{j=0}^{l} f_{X_1}(j)\, f_{X_2}(l-j),$$

ce qui correspond au produit de convolution de deux fonctions de masse probabilité. Cette identification des coefficients de t^l est essentielle pour comprendre les démonstrations des algorithmes récursifs discutés subséquemment.

1.20.5 Exemple #3

Soit la v.a. $X \in \{0, 1, 2\}$ avec

$$\mathcal{P}_X(t) = \left(0.3 + 0.5t + 0.2t^2\right).$$

On définit la somme de v.a iid $S_5 = X_1 + ... + X_5$ où $X_i \sim X$, $i = 1, 2, ..., 5$ avec

$$\mathcal{P}_{S_5}(t) = \mathcal{P}_X(t)^5 = \left(0.3 + 0.5t + 0.2t^2\right)^5.$$

Clairement,

$$f_{S_5}(0) = P_{S_5}(0) = 0.3^5.$$

De la Propriété 1, on déduit

$$\begin{aligned} f_{S_5}(1) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{P}_{S_5}(t)\Big|_{t=0} \\ &= 5 \times \left(\mathcal{P}_X(t)^4\right) \times \mathcal{P}'_X(t)\Big|_{t=0} \\ &= 5 \times f_{S_4}(0) \times f_X(1) \end{aligned}$$

avec

$$f_{S_4}(0) = f_X(0)^4.$$

Toutefois, cette approche, quoique correcte, mais fastidieuse, ne conduit pas à un algorithme satisfaisant.

1.21 Somme de v.a. indépendantes et TLS

Le résultat suivant permet d'identifier la TLS d'une somme de v.a. indépendantes et est utile pour l'évaluation numérique de F_S.

Proposition 2 *Soit les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ dont les TLS sont $\mathcal{L}_{X_i}(t)$, pour $i = 1, ..., n$. On définit la v.a. $S = X_1 + ... + X_n$. Alors, la TLS de la v.a. S est donnée par*

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{X_1}(t) \times ... \times \mathcal{L}_{X_n}(t),$$

pour $t \in [0, \infty)$.

Preuve. La TLS de la v.a. S est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= E[\mathrm{e}^{-tS}] = E[\mathrm{e}^{-t(X_1+...+X_n)}] \\ &= E[\mathrm{e}^{-tX_1} \times ... \times \mathrm{e}^{-tX_n}] \\ &= E[\mathrm{e}^{-tX_1}] \times ... \times E[\mathrm{e}^{-tX_n}] \\ &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times ... \times \mathcal{L}_{X_n}(t),\end{aligned}$$

pour $t \in [0, \infty)$. ■

Exemple 2 *Soit les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ avec $X \sim Gamma(\alpha_i, \beta)$, pour $i = 1, 2, ..., n$. Alors, la TLS de la v.a. S est donnée par*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times ... \times \mathcal{L}_{X_n}(t) \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_1} \times ... \times \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_n} = \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_1 + ... + \alpha_n}\end{aligned}$$

pour $t \in [0, \infty)$. On déduit que $S \sim Gamma(\alpha_1 + ... + \alpha_n, \beta)$.

1.22 Différence de v.a. indépendantes

Dans cette section, on examine le comportement aléatoire de $S = X_1 - X_2$, où les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes. L'expression de $E[S]$ est donnée par

$$E[S] = E[X_1 - X_2] = E[X_1] - E[X_2],$$

en vertu de la propriété de linéarité de l'espérance. Comme les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes, on a

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(-X_2) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Var}(X_i).$$

Le comportement de sommes et de différences de v.a. dépendantes est examiné de manière plus élaborée aux chapitres 13 et 14.

Soit deux v.a. indépendantes discrètes X_1 et X_2 dont le support est arithmétique et avec $f_{X_i}(kh) = \Pr(X_i = kh)$, $k \in \mathbb{N}$ $(i = 1, 2)$ et $h \in \mathbb{R}^+$. Pour identifier l'expression générale de la fmp de $S = X_1 - X_2$, on distingue les trois cas $(k = 0)$, $(k < 0)$ et $(k > 0)$:

$$f_S(kh) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} f_{X_1}(jh) f_{X_2}(jh), & k = 0 \\ \sum_{j=0}^{\min(m_1-k;m_2)} f_{X_1}((j+k)h) f_{X_2}(jh), & k = 1, ..., m_1 \\ \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2+k)} f_{X_1}(jh) f_{X_2}((j-k)h), & k = -m_2, ..., -1 \end{cases}.$$

Exemple 1.76 *Soit $X_1 = 1000M_1$ et $X_2 = 1000M_2$ avec $M_1 \sim Bin(4, 0.2)$ et $M_2 \sim Bin(6, 0.4)$. On observe que*

$$E[S] = 1000(E[M_1] - E[M_2]) = -1600.$$

On obtient les valeurs suivantes de $f_S(1000k)$ *pour* $k \in \{-6, -5, ..., 0, ..., 4\}$ *:*

k	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f_S(1000k)$	0.001678	0.016777	0.072352	0.175636	0.262832	0.249908
k	0	1	2	3	4	$-$
$f_S(1000k)$	0.150626	0.056181	0.012442	0.001493	0.000075	$-$

□

Soit deux v.a. continues positives indépendantes X_1 et X_2 avec fonctions de densité f_{X_1} et f_{X_2}. On définit la v.a. $S = X_1 - X_2$ dont l'expression de f_S est fournie par

$$f_S(x) = \begin{cases} \int_0^\infty f_{X_1}(y) f_{X_2}(y)\,\mathrm{d}y, & x = 0 \\ \int_0^\infty f_{X_1}(x+y) f_{X_2}(y)\,\mathrm{d}y, & x > 0 \\ \int_0^\infty f_{X_1}(y) f_{X_2}(y-x)\,\mathrm{d}y, & x < 0 \end{cases}.$$

Exemple 1.77 *Soit la v.a.* $S = X_1 - X_2$ *où* X_1 *et* X_2 *sont des v.a. indépendantes avec* $X_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1, 2$. *L'expression obtenue pour* f_S *est*

$$f_S(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_1+\beta_2}, & x = 0 \\ \frac{1}{\beta_1+\beta_2}\mathrm{e}^{-\beta_1 x}, & y > 0 \\ \frac{1}{\beta_1+\beta_2}\mathrm{e}^{-\beta_2|x|}, & y < 0 \end{cases}$$

et correspond à la fonction de densité de la loi de Laplace (ou double exponentielle). On constate que $E[S] = \int_0^\infty x f_S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}$, *ce qui correspond aussi à* $E[S] = E[X_1] - E[X_2]$. □

1.23 Notes bibliographiques

Pour une introduction Ã la thÃ©orie des probabilitÃ©s, on peut consulter, p. ex., [Grimmett et al., 2001] et [Ross, 2014a]).

Code LaTeX : `chapitre_prob_tout_v2.tex`

Chapitre 2

Méthodes de simulation Monte-Carlo

2.1 Introduction

Les méthodes de simulation stochastique s'avèrent un outil crucial en actuariat et en gestion quantitative des risques. Pour plusieurs modèles de risque, il est impossible de connaître la forme exacte de la distribution du montant total pour le portefeuille d'une compagnie d'assurance. L'objectif de ce chapitre est de présenter une introduction aux méthodes de simulation stochastique. On commence en abordant brièvement la génération de nombres pseudo-aléatoires. On explique ensuite comment procéder pour simuler des réalisations par la méthode inverse et des réalisations à partir d'une loi définie par un mélange.

Des exemples d'application en actuariat sont présentés dans les prochains chapitres, notamment aux chapitres 3 et 4. Des algorithmes de simulation pour des vecteurs de v.a. avec composantes dépendantes sont fournis aux chapitres 13 et 14.

2.2 Génération de nombres pseudo-aléatoires

Les méthodes de simulation stochastique sont fondées sur la possibilité de produire de façon systématique des réalisations de la loi uniforme standard. Ces réalisations sont appelées des "nombres pseudo-aléatoires" et elles sont produites à l'aide de générateurs de nombres pseudo-aléatoires (GNPA).

L'objectif d'un bon GNPA est d'imiter le plus fidèlement possible la réalisation d'une suite de v.a. iid de loi uniforme standard. Il est souhaitable que le GNPA soit rapide, qu'il soit facile d'implantation et que les suites générées de nombres pseudo-aléatoires soient reproduisibles. Il doit y avoir un bon compromis entre vitesse, bonnes propriétés statistiques et imprévisibilité.

Le GNPA classique est le générateur congruentiel linéaire défini dans l'algorithme suivant.

Algorithme 2.1 ***GNPA congruentiel linéaire****. Le GNPA congruentiel linéaire est défini par la relation récurrente*

$$x_n = (ax_{n-1}) \mod m,\ n \in \mathbb{N}^+,$$

où a et m sont des entiers positifs choisis soigneusement et x_0 est la valeur source. La n-ième réalisation de la v.a. $U \sim U(0,1)$ est obtenue avec $U^{(n)} = \frac{x_n}{m}$ pour $n \in \mathbb{N}^+$. Il est recommandé d'utiliser les valeurs $a = 41\ 358$ et $m = 2^{31} - 1 = 2\ 147\ 483\ 647$.

Remarque 2.2 *Les valeurs $a = 41\ 358$ et $m = 2^{31} - 1 = 2\ 147\ 483\ 647$ indiquées dans l'algorithme 2.1 sont recommandées par [L'Ecuyer, 1994]. Elles ont été choisies afin de permettre une période maximale de cycle avant que la suite produite par le GNPA revienne à son point de départ.*

On considère l'exemple suivant.

Exemple 2.3 *En utilisant le GNPA défini à l'algorithme 2.1 et avec $x_0 = 343\ 463\ 463$, on obtient les valeurs*

suivantes de $x_1, ..., x_4$ *et de* $U^{(1)}, ..., U^{(4)}$ *:*

j	1	2	3	4
x_j	1 505 061 496	1 519 843 273	831 737 044	587 608 106
$U^{(j)}$	0.700848874	0.707732175	0.387307743	0.273626347

□

Dans le cadre du présent livre, le GNPA défini à l'algorithme 2.1 sera utilisé dans certains exemples et exercices afin de permettre de reproduire et vérifier les résultats obtenus. Toutefois, la théorie sur les générateurs des nombres pseudo-aléatoires est beaucoup plus élaborée et son exposé dépasse le cadre de ce livre. Chaque logiciel possède son propre générateur de nombres uniformes. En `R`, la fonction `runif()` produit des réalisations de la loi uniforme standard. Pour cette fonction, le logiciel `R` utilise par défaut le générateur Mersenne-Twister qui est parmi les générateurs les plus recommandés actuellement. Il est important de mentionner que le logiciel `R` propose aussi d'autres GNPA pouvant être spécifiés dans cette fonction.

2.3 Méthodes de base

2.3.1 Simulation par la méthode inverse

La simulation de réalisations d'une v.a. repose sur l'utilisation de réalisations issues de la distribution uniforme standard. La méthode de base pour simuler des v.a. est la méthode dite *inverse*. Pour utiliser cette méthode, on a recours à la fonction inverse de la fonction de répartition, dite aussi la fonction quantile, d'une v.a. X, qui est définie au chapitre 1.

Dans l'algorithme suivant, on décrit la méthode pour simuler une réalisation $X^{(j)}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ de la v.a. X dont la fonction de répartition est $F_X(x)$.

Algorithme 2.4 ***Méthode inverse.***

1. ***Étape 1.*** *On produit une réalisation* $U^{(j)}$ *de loi* $U(0,1)$ *à partir d'un GNPA.*
2. ***Étape 2.*** *On simule une réalisation* $X^{(j)}$ *de* X *où* $X^{(j)} = F_X^{-1}\left(U^{(j)}\right)$.

On répète les étapes 1 et 2 pour $j = 1, 2, ..., m$. □

L'algorithme 2.4 est fondée sur le théorème 1.52 de la fonction quantile. Il est aisé d'application lorsque la fonction quantile est explicite comme il est illustré dans les deux exemples suivants.

Exemple 2.5 *Soit* $X \sim Exp\left(\beta = \frac{1}{1000}\right)$ *avec* $F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\beta}\ln(1-u)$. *Avec 5 réalisations de la v.a.* $U \sim U(0,1)$, *on obtient les réalisations suivantes de la v.a.* X *:*

j	1	2	3	4	5
$U^{(j)}$	0.09727801	0.30285445	0.01541586	0.98764877	0.53034863
$X^{(j)}$	102.34065	360.76106	15.53592	4393.99927	755.76463

□

Exemple 2.6 *Soit* $X \sim Pareto(2.1, 1100)$ *avec* $F_X^{-1}(u) = \lambda\left((1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$. *À partir de 5 réalisations de la v.a.* $U \sim U(0,1)$, *on produit les réalisations suivantes de la v.a.* X *:*

j	1	2	3	4	5
$U^{(j)}$	0.09727801	0.30285445	0.01541586	0.98764877	0.53034863
$X^{(j)}$	54.934718	206.172573	8.168037	7814.603571	476.485653

□

Lorsque la fonction de répartition est explicite mais que la fonction quantile ne l'est pas, on peut utiliser un outil d'optimisation.

Dans les prochaines sous-sections, on examine la simulation de v.a. définies par une fonction d'un nombre fini de v.a., de v.a. définies par un mélange.

2.3.2 Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a.

Soit une v.a. Z définie en fonction des v.a. $X_1, ..., X_n$ c.-à-d. $Z = \phi(X_1, ..., X_n)$. La forme explicite de la fonction de répartition F_Z ne peut être obtenue. On peut toutefois produire des réalisations de $X_1, ..., X_n$ pour obtenir une réalisation de Z. La procédure pour simuler la réalisation j, $Z^{(j)}$ $(j = 1, ..., m)$, de la v.a. Z est décrite comme suit.

Algorithme 2.7 ***Simulation d'une fonction de v.a.***

1. ***Étape 1****. On simule les réalisations* $\left(X_1^{(j)}, ..., X_n^{(j)}\right)$ *de* $(X_1, ..., X_n)$.
2. ***Étape 2****. On évalue* $Z^{(j)} = \phi\left(X_1^{(j)}, ..., X_n^{(j)}\right)$.
   On répète pour $j = 1, 2, ..., m$.

Un exemple de fonction intéressante pour analyser le comportement aléatoire du risque global d'un portefeuille d'assurance est $\phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2.3.3 Simulation de v.a. définies par un mélange

Soit une v.a. Θ discrète ou continue dite de mélange où $\Theta \in A_\Theta$. On définit une v.a. X dont la fonction de répartition conditionnelle de $(X \,|\Theta = \theta)$ est $F_{X|\Theta=\theta}$ et la fonction quantile de $(X \,|\Theta = \theta)$ par $F^{-1}_{X|\Theta=\theta}$. L'expression de la fonction de répartition de X est

$$F_X(y) = \begin{cases} \int\limits_{\theta \in A_\Theta} F_{X|\Theta=\theta}(y) f_\Theta(\theta) \, \mathrm{d}\theta, & \text{si } \Theta \text{ est continue,} \\ \sum_{\theta \in A_\Theta} F_{X|\Theta=\theta}(y) f_\Theta(\theta), & \text{si } \Theta \text{ est discrète.} \end{cases}$$

Généralement, il n'y pas d'expression analytique de la fonction quantile de X. Les étapes permettant de simuler une réalisation de la v.a. X sont décrites dans l'algorithme suivant.

Algorithme 2.8 ***Simulation d'une v.a. définie avec un mélange****.*

1. ***Étape 1****. On simule une réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de* Θ.
2. ***Étape 2****. On produit une réalisation* $X^{(j)}$ *de* X *avec la fonction quantile* $F^{-1}_{X|\Theta=\Theta^{(j)}}$ *de la fonction de répartition conditionnelle de* $\left(X \,\middle|\Theta = \Theta^{(j)}\right)$.

On répète pour $j = 1, 2, ..., m$.

On illustre l'algorithme 2.8 dans l'exemple suivant.

Exemple 2.9 *Soit une v.a.* X *obéissant une distribution mélange d'exponentielle dont la fonction de répartition est donnée par*

$$F_X(x) = 0.2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{100}x}\right) + 0.3\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{200}x}\right) + 0.5\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{300}x}\right) \tag{2.1}$$

que l'on réécrit sous la forme

$$F_X(x) = \sum_{\theta=1}^{3} F_{X|\Theta=\theta}(x) f_\Theta(\theta),$$

avec $(X \,|\Theta = \theta) \sim Exp\left(\frac{1}{100\theta}\right)$, $f_\Theta(1) = 0.2$, $f_\Theta(2) = 0.3$ *et* $f_\Theta(3) = 0.5$. *En utilisant le GNPA défini à l'algorithme 2.1 et avec* $x_0 = 20\ 120\ 303$, *on a produit les 3 réalisations suivantes de* Θ *et de* X *:*

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$\Theta^{(j)}$	$X^{(j)}$
1	0.493284355	0.254340928	2	58.6974
2	0.032087844	0.089066452	1	9.3285
3	0.610318613	0.557198819	3	244.3903

Par convention, on a regroupé par couple les réalisations produites par le GNPA, que l'on note $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$. *Ensuite, on produit* $\Theta^{(j)} = F_\Theta^{-1}\left(U_1^{(j)}\right)$ *et*

$$X^{(j)} = F_{X|\Theta=\Theta^{(j)}}^{-1}\left(U_2^{(j)}\right) = -\left(100\Theta^{(j)}\right)\ln\left(1 - U_2^{(j)}\right),$$

pour $j = 1, 2, 3$. □

Exemple 2.10 *Soit une variable aléatoire* $\Theta \sim LN(\mu = -0.5, \sigma^2)$ *telle que* $E[\Theta] = 1$. *Sachant que* $\Theta = \theta$, *on a* $(M\,|\Theta = \theta) \sim Poisson(2\theta)$. *Simuler 2 réalisations* $M^{(1)}$ *et* $M^{(2)}$ *de la variable aléatoire* M *à l'aide des réalisations uniformes suivantes :*

j	$U^{(j)}$	$V^{(j)}$
1	0.147	0.317
2	0.941	0.304

Solution 2.11 *On doit dans un premier temps trouver la valeur du paramètre* σ *de la loi lognormale car on a* $\Theta \sim LN(\mu = -0.5, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} E[\Theta] &= \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = \mathrm{e}^{-0.5 + \frac{\sigma^2}{2}} = 1 \\ &\Rightarrow -0.5 + \frac{\sigma^2}{2} = \ln(1) \\ &\Rightarrow \sigma^2 = 1 \ \ car\ ln(1) = 0. \end{aligned}$$

Pour simuler une première réalisation de la variable aléatoire Θ, *soit* $\Theta^{(1)}$, *on a*

$$\Theta^{(1)} = \mathrm{e}^{\mu + \sigma\Phi^{-1}\left(U^{(1)}\right)}$$

et donc

$$\begin{aligned} \Theta^{(1)} &= \mathrm{e}^{\mu + \sigma\Phi^{-1}(0.147)} \\ &= \mathrm{e}^{-0.5 + 1\times(-1.54939)} \\ &= 0.1288. \end{aligned}$$

Ainsi, on a que $\left(M^{(1)}\,\middle|\Theta^{(1)} = 0.1288\right) \sim Poisson\left((2)(0.1288) = 0.2576\right)$. *On doit donc produire une réalisation d'une variable aléatoire Poisson de moyenne* 0.2576 *avec* $F_{M^{(1)}|\Theta=\theta}^{-1}$. *Pour cela, on doit trouver* $F_{M^{(1)}|\Theta=\theta}$:

$$\begin{aligned} \Pr(M^{(1)} &= 0\,\middle|\Theta^{(1)} = 0.1288) = \mathrm{e}^{-0.2576} = 0.77288 \\ \Pr(M^{(1)} &= 1\,\middle|\Theta^{(1)} = 0.1288) = 0.2576\mathrm{e}^{-0.2576} = 0.19912 \\ \Pr(M^{(1)} &= 2\,\middle|\Theta^{(1)} = 0.1288) = \frac{(0.2576)^2\mathrm{e}^{-0.2576}}{2!} = 0.025649 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(M^{(1)} &\leq 0 \mid \Theta^{(1)} = 0.1288134) = 0.77288 \\ \Pr(M^{(1)} &\leq 1 \mid \Theta^{(1)} = 0.1288134) = 0.972 \end{aligned}$$

Étant donné la réalisation $V^{(1)} = 0.317$ *de la variable aléatoire uniforme* V, *on a*

$$F_{M^{(1)}|\Theta=\theta}^{-1}(0.317) = 0.$$

En résumé pour la première réalisation $M^{(1)}$ de la variable aléatoire M on a

j	$U^{(j)}$	$\Theta^{(j)}$	$V^{(j)}$	$M^{(j)}$
1	*0.147*	*0.1288*	*0.317*	*0*

Passons maintenant à la simulation d'une deuxième réalisation de la variable aléatoire M, soit $M^{(2)}$. Avec la réalisation $U^{(2)} = 0.941$, on obtient

$$\begin{aligned}\Theta^{(2)} &= \mathrm{e}^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(0.941)}\\ &= \mathrm{e}^{-0.5+1\times(-1.0692)}\\ &= 1.76685.\end{aligned}$$

On a donc que $(M^{(2)}\,|\Theta^{(2)} = 1.76685\,) \sim$ Poisson$((2)\,(1.76685) = 3.5337)$. On doit ainsi simuler une réalisation d'une variable aléatoire Poisson de moyenne 3.5337 avec $F^{-1}_{M^{(2)}|\Theta^{(2)}=\theta}$. On doit trouver $F_{M^{(2)}|\Theta^{(2)}=\theta}$:

$$\begin{aligned}\Pr(M^{(2)} &= 0\,\Big|\Theta^{(2)} = 1.76685\,) = \mathrm{e}^{-3.5337} = 0.02920\\ \Pr(M^{(2)} &= 1\,\Big|\Theta^{(2)} = 1.76685\,) = 3.5337\mathrm{e}^{-3.5337} = 0.10317\\ \Pr(M^{(2)} &= 2\,\Big|\Theta^{(2)} = 1.76685\,) = \frac{(3.5337)^2\mathrm{e}^{-3.5337}}{2!} = 0.18229\\ \Pr(M^{(2)} &= 3\,\Big|\Theta^{(2)} = 1.76685\,) = \frac{(3.5337)^3\mathrm{e}^{-3.5337}}{3!} = 0.214719\\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(M^{(2)} &\leq 0 \mid \Theta^{(2)} = 1.76685) = 0.0292\\ \Pr(M^{(2)} &\leq 1 \mid \Theta^{(2)} = 1.76685) = 0.13237\\ \Pr(M^{(2)} &\leq 2 \mid \Theta^{(2)} = 1.76685) = 0.31466\\ \Pr(M^{(2)} &\leq 3 \mid \Theta^{(2)} = 1.76685) = 0.529379\end{aligned}$$

Étant donné la réalisation $V^{(2)} = 0.304$ de la variable aléatoire uniforme V, on a

$$F^{-1}_{M^{(1)}|\Theta=\theta}(0.304) = 2.$$

En résumé, pour la deuxième réalisation $M^{(2)}$, on a

j	$U^{(j)}$	$\Theta^{(j)}$	$V^{(j)}$	$M^{(j)}$
2	0.941	1.76685	0.304	2

Exemple 2.12 *On considère un portefeuille de 2 contrats d'assurance maladie influencés par les conditions climatiques. On désigne par Θ une variable aléatoire représentant ces conditions climatiques avec $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ et*

k	$\Pr(\Theta = \theta_k)$	$\Pr(\Theta \leq \theta_k)$
1	0.8	0.8
2	0.15	0.95
3	0.05	1

.

On suppose que les coûts pour le contrat i sont définis par

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1\\ 0, & I_i = 0\end{cases}$$

avec $B_i \sim Exp(\beta_i)$ *où* $\beta_1 = \frac{1}{1000}$, $\beta_2 = \frac{1}{2000}$ *et* $(I_i \,|\Theta = \theta_k\,) \sim Bern(q_i^{(k)})$

k	$q_1^{(k)}$	$q_2^{(k)}$
1	0.05	0.06
2	0.10	0.11
3	0.20	0.21

.

On désigne par S *la variable aléatoire représentant l'ensemble des coûts pour le portefeuille où* $S = X_1 + X_2$. *En utilisant dans l'ordre les 11 réalisations uniformes suivantes*

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$U^{(j)}$	0.791	0.124	0.978	0.556	0.972	0.731	0.671	0.355	0.986	0.821	0.726

,

simuler 3 réalisations de la variable aléatoire S, *soit* $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ *et* $S^{(3)}$.

Solution 2.13 ***pour l'exemple 2.12.***

1. ***Première réalisation de la variable aléatoire*** S ***:*** *On doit dans un premier temps simuler une réalisation de la variable aléatoire* Θ. *Étant donné* $U^{(1)} = 0.791$, *on a* $\Theta^{(1)} = \theta_1$ *et donc*

$$\begin{aligned}(I_1^{(1)} \Big| \Theta^{(1)} = \theta_1\,) &\sim Bern(q_1^{(1)} = 0.05)\\ (I_2^{(1)} \Big| \Theta^{(1)} = \theta_1\,) &\sim Bern(q_2^{(1)} = 0.06)\end{aligned}$$

On doit donc simuler une réalisation d'une variable aléatoire $Bern(q_1^{(1)} = 0.05)$ *et d'une variable aléatoire de loi* $Bern(q_2^{(1)} = 0.06)$ *avec la méthode inverse. Pour une variable aléatoire de loi* $Bern(q_1^{(1)} = 0.05)$, *on a*

$$\begin{aligned}\Pr(I_1^{(1)} &\leq 0 \Big| \Theta^{(1)} = \theta_1\,) = 0.95\\ \Pr(I_1^{(1)} &\leq 1 \Big| \Theta^{(1)} = \theta_1\,) = 1.\end{aligned}$$

Par conséquent, avec le nombre uniforme $U^{(2)} = 0.124$, *on a* $I_1^{(1)} = 0$ *et par conséquent* $X_1^{(1)} = 0$. *Pour une variable aléatoire de loi* $Bern(q_2^{(1)} = 0.06)$, *on a*

$$\begin{aligned}\Pr(I_2^{(1)} &\leq 0 \mid \Theta^{(1)} = \theta_1) = 0.94\\ \Pr(I_2^{(1)} &\leq 1 \mid \Theta^{(1)} = \theta_1) = 1\end{aligned}$$

Étant donné la troisième réalisation uniforme $U^{(3)} = 0.978$, *on obtient* $I_2^{(1)} = 1$. *On doit donc simuler une réalisation* $B_2^{(1)}$ *avec la méthode inverse. On a*

$$X_2^{(1)} = -2000 \ln \left(1 - F_{B_2^{(1)}}(U^{(4)})\right),$$

où $U^{(4)} = 0.556$. *Ainsi, on obtient*

$$\begin{aligned}X_2^{(1)} &= -2000 \ln (1 - 0.556)\\ &= 1623.86.\end{aligned}$$

En résumé, pour la première réalisation de S, *on a*

$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	$I_1^{(1)}$	$U^{(3)}$	$I_2^{(1)}$	$U^{(4)}$	$X_2^{(1)}$	$S^{(1)}$
0.791	*0.124*	*0*	*0.978*	*1*	*0.556*	*1623.86*	*1623.86.*

2. ***Deuxième réalisation de la variable aléatoire*** S ***:*** *On doit dans un premier temps simuler une*

réalisation de la variable aléatoire Θ. *Étant donné* $U^{(5)} = 0.972$, *on a* $\Theta^{(2)} = \theta_3$ *et donc*

$$\begin{aligned}(I_1^{(2)} \Big| \Theta^{(2)} = \theta_3\,) &\sim Bern(q_1^{(3)} = 0.2)\\ (I_2^{(2)} \Big| \Theta^{(2)} = \theta_3\,) &\sim Bern(q_2^{(3)} = 0.21)\end{aligned}$$

On doit donc simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi $Bern(q_1^{(3)} = 0.05)$ *et d'une variable aléatoire* $Bern(q_2^{(3)} = 0.06)$ *avec la méthode inverse. Pour une v.a de loi* $Bern(q_1^{(3)} = 0.2)$, *on a*

$$\begin{aligned}\Pr(I_1^{(2)} &\leq 0 \Big| \Theta^{(2)} = \theta_3\,) = 0.8\\ \Pr(I_1^{(2)} &\leq 1 \Big| \Theta^{(2)} = \theta_3\,) = 1\end{aligned}$$

Par conséquent, avec le nombre uniforme $U^{(6)} = 0.731$ *ce qui conduit à* $I_1^{(2)} = 0$ *et par conséquent* $X_1^{(2)} = 0$. *Pour une variable aléatoire de loi* $Bernn(q_2^{(3)} = 0.21)$, *on a*

$$\begin{aligned}\Pr(I_2^{(2)} &\leq 0 \mid \Theta^{(2)} = \theta_3) = 0.79\\ \Pr(I_2^{(2)} &\leq 1 \mid \Theta^{(2)} = \theta_3) = 1\end{aligned}$$

Par conséquent, avec le nombre uniforme $U^{(7)} = 0.671$, *on a* $I_2^{(2)} = 0$ *et par conséquent* $X_2^{(2)} = 0$. *En résumé, pour la deuxième réalisation de* S, *on a*

$U^{(5)}$	$U^{(6)}$	$I_1^{(2)}$	$U^{(7)}$	$I_2^{(2)}$	$S^{(2)}$
0.972	*0.731*	*0*	*0.671*	*0*	*0*

3. ***Troisième réalisation de la variable aléatoire*** S ***:*** *On doit dans un premier temps simuler une réalisation de la variable aléatoire* Θ. *État donné* $U^{(8)} = 0.355$, *on a* $\Theta^{(3)} = \theta_1$ *et donc*

$$\begin{aligned}(I_1^{(3)} \Big| \Theta^{(3)} = \theta_1\,) &\sim Bern(q_1^{(1)} = 0.05)\\ (I_2^{(3)} \Big| \Theta^{(3)} = \theta_1\,) &\sim Bern(q_2^{(1)} = 0.06)\end{aligned}$$

On doit donc simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi $Bern(q_1^{(1)} = 0.05)$ *et d'une variable aléatoire de loi* $Bern(q_2^{(1)} = 0.06)$ *avec la méthode inverse. Pour une v.a de loi* $Bern(q_1^{(1)} = 0.05)$, *on a*

$$\begin{aligned}\Pr(I_1^{(3)} &\leq 0 \Big| \Theta^{(3)} = \theta_1\,) = 0.95\\ \Pr(I_1^{(3)} &\leq 1 \Big| \Theta^{(3)} = \theta_1\,) = 1.\end{aligned}$$

Par conséquent, avec le nombre uniforme uniforme $U^{(9)} = 0.986$, *on a* $I_1^{(3)} = 1$. *On doit donc simuler une réalisation de* $B_1^{(3)}$ *avec la méthode inverse. On a*

$$X_1^{(3)} = -1000 \ln\left(1 - U^{(10)}\right),$$

où $U^{(10)} = 0.821$ *et par conséquent* $X_1^{(3)} = 1720.37$. *Pour une variable aléatoire de loi* $Bern(q_2^{(1)} = 0.06)$, *on a*

$$\begin{aligned}\Pr(I_2^{(3)} &\leq 0 \mid \Theta^{(1)} = \theta_1) = 0.94\\ \Pr(I_2^{(3)} &\leq 1 \mid \Theta^{(1)} = \theta_1) = 1\end{aligned}$$

Illustration 2.1 – Valeurs de $F_X(x)$ (courbe) où $X \sim LN(2,1)$ et de $\widehat{\theta}_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} 1_{\{X^{(j)} \leq x\}}$ (escalier) pour $m = 10$ (graphique a), $m = 100$ (graphique b), $m = 1000$ (graphique c) et $m = 1\ 000\ 000$ (graphique d).

Étant donné la troisième réalisation uniforme $U^{(11)} = 0.726$, on obtient $I_2^{(3)} = 0$ et par conséquent $X_2^{(3)} = 0$. En résumé, pour la première réalisation de S, on a

$U^{(8)}$	$U^{(9)}$	$I_1^{(3)}$	$U^{(10)}$	$I_2^{(3)}$	$U^{(11)}$	$X_1^{(3)}$	$S^{(3)}$
0.355	0.986	1	0.821	0	0.726	1623.86	1623.86

2.4 Erreur et intervalle de confiance

Soit une v.a. X dont on parvient à produire m réalisations $X^{(1)}$, ..., $X^{(m)}$. L'approximation de $\theta = E[g(X)]$ d'une fonction intégrable de X est

$$\theta \simeq \widehat{\theta}_m = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} g\left(X^{(j)}\right).$$

Par la loi des grands nombres, l'approximation $\widehat{\theta}_m$ converge vers θ avec probabilité 1 quand le nombre m de réalisations tend vers ∞. Dans l'illustration 2.1, on observe la convergence de $\widehat{\theta}_m$ vers θ lorsque $g(x) = 1_{\{X \leq x\}}$ i.e $\theta = F_X(x)$ et $\widehat{\theta}_m$ est la fonction de répartition empirique.

La variance de $\widehat{\theta}_m$ est

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{\theta}_m\right) = \frac{1}{m}\mathrm{Var}\left(g\left(X\right)\right).$$

En vertu du théorème central limite, l'erreur $\left(\widehat{\theta}_m - \theta\right)$ est approximativement normale avec moyenne 0 et écart type $\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(g(X))}}{\sqrt{m}}$, ce qui signifie que la qualité de l'approximation obtenue par simulation s'améliore d'un facteur d'ordre $\sqrt{m}$. Le terme $\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(g(X))}}{\sqrt{m}}$ est habituellement appelé l'erreur standard. Dans le cas d'approximation numérique, cette amélioration est d'un facteur d'ordre m. Souvent, comme $\mathrm{Var}\left(g\left(X\right)\right)$ ne peut pas être évaluée avec exactitude, on l'estime à l'aide de l'estimateur échantillonnal classique

$$\widehat{\mathrm{Var}}\left(g\left(X\right)\right) = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(g\left(X^{(j)}\right) - \widehat{\theta}_m\right)^2. \tag{2.2}$$

On se base sur la distribution asymptotique de l'erreur $\left(\widehat{\theta}_m - \theta\right)$ afin de construire un intervalle de confiance de niveau α pour $\widehat{\theta}_m$ dont les bornes sont fournies par

$$\widehat{\theta}_m \pm \frac{\sqrt{\mathrm{Var}\left(g\left(X\right)\right)}}{\sqrt{m}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Généralement, comme la valeur $\sqrt{\mathrm{Var}\left(g\left(X\right)\right)}$ ne peut pas être obtenue, on utilise (2.2) pour calculer les bornes de l'intervalle de confiance

$$\widehat{\theta}_m \pm \frac{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}\left(g\left(X\right)\right)}}{\sqrt{m}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

On met en pratique ces principes généraux dans le prochain exemple qui porte sur une somme de deux v.a.

Exemple 2.14 *Soit une v.a.* $S = X_1 + X_2$ *où* $X_1 \sim LN\left(6, 1^2\right)$ *et* $X_2 \sim Gamma\left(0.6, 1/1000\right)$ *sont indépendantes. On utilise le GNPA défini à l'algorithme 2.1 et avec* $x_0 = 2012$. *On produit dans l'ordre* $m = 1\ 000\ 000$ *réalisations de* (X_1, X_2) *afin de produire les* m *réalisations de* S. *On indique dans le tableau ci-dessous les 2 premières réalisations de* (X_1, X_2) *et de* S *:*

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	69.0344	416.8423	485.8767
2	418.63450	128.2339	546.8684

On sait que $E\left[S\right] = 1265.1416$ *et* $\mathrm{Var}\left(S\right) = 1\ 360\ 191$. *À partir des* m *réalisations, les approximations obtenues de* $E\left[S\right]$ *et* $\mathrm{Var}\left(S\right)$ *sont respectivement 1266.251 et 1 365 455. On indique ci-dessous les approximations obtenues pour*

$$\pi_S\left(2000k\right) = E\left[\max\left(S - 2000 \times k; 0\right)\right],$$

pour $k = 1, 2$ *ainsi que les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance (avec un niveau de confiance de 95 %) de ces approximations :*

k	borne inf.	approx. $\pi_S\left(2000k\right)$	borne sup.	erreur standard
1	210.8036	212.2769	213.7501	0.7517
2	45.6727	46.5121	47.3516	0.4283

□

2.5 Notes bibliographiques

Un exposé sur les générateurs de nombres pseudo-aléatoires (GNPA) est offert dans, par. ex., [Gentle, 2006], [L'Ecuyer, 1994], [L'Ecuyer, 2012] et [Rubinstein and Kroese, 2016].

Pour une solide introduction à la méthode Monte-Carlo, on peut consulter les ouvrages suivants : [Fishman, 2013], [Gentle, 2006], [Glasserman, 2013], [Lemieux, 2009] et [Rubinstein and Kroese, 2016].

Pour des applications de ces méthodes en actuariat et en gestion quantitative du risque, on suggère, p. ex., [Denuit and Charpentier, 2005], [Glasserman, 2013] et [Klugman et al., 2009].

Code LaTeX : `chapitre_monte-carlo_v5.tex`

Chapitre 3

Mesures de risque et mutualisation des risques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on examine les mesures de risque et la mutualisation des risques. On débute dans la première section avec une présentation de trois différentes mesures de risque.

3.2 Mesures de risque VaR

La mesure *Value at Risk* (VaR) est une mesure de risque très populaire en gestion des risques et en science actuarielle.

Définition 3.1 *Soit* $0 < \kappa < 1$. *La mesure de risque* Value at Risk *(VaR) avec un niveau de confiance* κ *associée à la v.a.* X *est définie par* $VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa)$.

Ainsi, la probabilité que la v.a. X prenne une valeur supérieure à la VaR est moindre ou égale à $1 - \kappa$.

Regardons une illustration simple. Soit $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ avec $\alpha = 2$ et $\beta = \frac{1}{5}$ représentant les pertes pour un portefeuille d'assurance pour une période fixe. La fonction de densité f_X est représentée à l'illustration 3.1.

On pose la question suivante : où se trouve l'espérance de X sur l'abscisse du graphique à l'illustration 3.1 ? Est-il suffisant de prévoir un montant de $E[X]$ pour financer les pertes du portefeuille pour la prochaine année ? L'espérance $E[X]$ est indiquée sur le graphique de l'illustration 3.2.

Une alternative pourrait être de mettre de côté un montant qui permettrait de financer les pertes avec une probabitlité de 80%. Est-ce suffisant ? Serait-il préférable de choisir une probabilité de 99.5% ?

Ces deux montants, $VaR_{0.8}(X)$ et $VaR_{0.995}(X)$, sont représentés sur le graphique de l'illustration 3.3.

La mesure de risque VaR ne donne toutefois pas d'information sur le comportement de la distribution au delà de la VaR. Par exemple, pour une v.a. continue X et pour $\kappa = 99.99\%$, il y a une probabilité de 0.01% que la v.a. X prenne une valeur supérieure à $VaR_{99.99\%}(X)$ sans préciser l'ampleur de la valeur que X peut prendre si elle excède la VaR.

À l'aide de la méthode de simulation inverse vue au chapitre 2, on peut approximer la VaR. Plus spécifiquement, soit une v.a. X dont on a produit m réalisations $X^{(1)}$, ..., $X^{(m)}$. Une approximation de F_X est fournie à l'aide de la fonction de répartition empirique définie par

$$F^{(m)}(x) \simeq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} 1_{\{X^{(j)} \leq x\}}. \tag{3.1}$$

Puisque $F^{(m)}$ est une fonction de répartition associée à une distribution discrète, il en découle que

Illustration 3.1 – Description

Illustration 3.2 – Description

Illustration 3.3 – Description

l'approximation de $VaR_\kappa(X)$ est

$$VaR_\kappa(X) \simeq F^{(m)-1}(\kappa) = \inf\left\{X^{(j)}, i = 1, 2, ..., m\ ; F^{(m)}\left(X^{(j)}\right) \geq \kappa\right\}.$$

Parmi les approches qui existent pour établir un intervalle de confiance pour un quantile, on considère celle qui est fondée sur la loi binomiale. Soit le vecteur de réalisations classées en ordre croissant de X, que l'on note par $\left(X^{[1]}, ..., X^{[m]}\right)$. On fixe j_0 tel que $F^{(m)-1}(\kappa) = X^{[j_0]}$. Le nombre $R_{m,\kappa}$ de réalisations qui sont inférieures ou égales à $X^{[j_0]}$ obéit à une loi binomiale de paramètres m et κ (c.-à-d. $R_{m,\kappa} \sim Bin(m, \kappa)$). L'intervalle de confiance de niveau α est de la forme $\left(X^{[j_1]}, X^{[j_2]}\right)$, où $X^{[j_1]}$ et $X^{[j_2]}$ sont déterminées de telle sorte que

$$\Pr\left(X^{[j_1]} < VaR_\kappa(X) \leq X^{[j_2]}\right) = \Pr(j_1 < R_{m,\kappa} \leq j_2)$$

soient le plus près possible de α. Afin de déterminer les valeurs de j_1 et j_2 (et conséquemment les valeurs de $X^{[j_1]}$ et $X^{[j_2]}$) et si le nombre m de simulations est élevé, on approxime la loi binomiale par la loi normale et on calcule j_{diff} comme étant la valeur arrondie de $\left(\sqrt{\mathrm{Var}(R_{m,\kappa})} \times \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$, où $\mathrm{Var}(R_{m,\kappa}) = m \times \kappa \times (1 - \kappa)$. Ensuite, on fixe $j_1 = j_0 - j_{diff}$ et $j_2 = j_0 + j_{diff}$ et les bornes de l'intervalle de confiance sont $X^{[j_0 - j_{diff}]}$ et $X^{[j_0 + j_{diff}]}$.

Exemple 3.2 ***(Suite de l'exemple 2.14).*** *Dans le tableau suivant, on fournit les approximations de $VaR_\kappa(S)$ obtenues pour κ = 0.50, 0.95, 0.99 et 0.999 accompagnées des bornes de leurs intervalles de confiance avec un niveau de 95 % :*

κ	*borne inférieure*	*approx. de $VaR_\kappa(X)$*	*borne supérieure*
0.5	$X^{[499\ 020]} = 932.4$	$X^{[500\ 000]} = 934.4$	$X^{[500\ 980]} = 936.4$
0.95	$X^{[949\ 573]} = 3413.8$	$X^{[950\ 000]} = 3424.1$	$X^{[950\ 427]} = 3433.9$
0.99	$X^{[989\ 805]} = 5504.6$	$X^{[990\ 000]} = 5534.9$	$X^{[990\ 195]} = 5561.2$
0.999	$X^{[998\ 938]} = 9713.5$	$X^{[999\ 000]} = 9852.1$	$X^{[999\ 062]} = 10\ 038.2$
0.9999	$X^{[999\ 880]} = 16\ 528.5$	$X^{[999\ 900]} = 17\ 417.4$	$X^{[999\ 920]} = 18\ 201.4$

Comme prévu, l'intervalle de confiance pour $VaR_{0.5}(X)$ est beaucoup plus étroit que celui de $VaR_{0.9999}(X)$. □

3.3 Mesure de risque TVaR

La mesure *Tail Value at Risk* (TVaR) est proposée comme une alternative à la mesure VaR. La définition ci-dessous est la définition fondamentale et première de la TVaR.

Définition 3.3 *Soit une v.a. X dont l'espérance existe. La mesure de risque TVaR avec un niveau de confiance κ est définie par*

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u, \tag{3.2}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

Remarque 3.4 *En appliquant (1.36), on observe*

$$TVaR_0(X) = \int_0^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u = E[X].$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

Deux expressions alternatives de la TVaR sont fournies dans la proposition suivante.

Proposition 3.5 *Soit une v.a. X dont l'espérance existe. À partir de la définition fondamentale en (3.2), on déduit les expressions suivantes de la TVaR :*

1. *Expression avec la fonction stop-loss :*

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X), \tag{3.3}$$

   pour $\kappa \in (0,1)$.

2. *Expression avec le complément de l'espérance tronquée :*

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa\right)}{1-\kappa}, \tag{3.4}$$

   pour $\kappa \in (0,1)$.

Preuve. La preuve est divisée en deux parties.

1. On remplace $F_X^{-1}(u)$ par $VaR_u(X)$ et on combine (3.2) avec (1.36)

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X)(1-\kappa)\right) \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X), \end{aligned}$$

   pour $\kappa \in (0,1)$.

2. En utilisant (1.37) avec (3.2) et en remplaçant $F_X^{-1}(u)$ par $VaR_u(X)$, on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa\right)\right), \end{aligned}$$

   pour $\kappa \in (0,1)$.

■

Preuve. Démonstration plus détaillée de (3.3). On a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X) + VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \left(F_X^{-1}(u) - VaR_\kappa(X)\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X)(1-\kappa) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[\max\left(F_X^{-1}(U) - VaR_\kappa(X);0\right)\right] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[\max(X - VaR_\kappa(X);0)\right] + VaR_\kappa(X) \quad \text{(Th. Fn. Quantile)} \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X),
\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$. ■

Preuve. Démonstration de (3.4). De (3.3), on déduit

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}E\left[\max(X - VaR_\kappa(X);0)\right] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[(X - VaR_\kappa(X)) \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] \\
&\quad -\frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X) \times E\left[1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] \\
&\quad -\frac{1}{1-\kappa}\left(VaR_\kappa(X) \times (1 - F_X(VaR_\kappa(X))) - (1-\kappa)VaR_\kappa(X)\right) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)\right\}
\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$. ■

Selon (3.2), la mesure $TVaR_\kappa(X)$ peut être considérée comme une moyenne arithmétique des mesures $VaR_u(X)$ pour des valeurs de u supérieures à κ. Alors que la mesure VaR indique un seul point de la queue de la distribution de X, la mesure TVaR fournit une meilleure indication de l'épaisseur de la queue.

On développe les expressions de la VaR et de la TVaR pour quelques lois continues.

Exemple 3.6 *Soit $X \sim Exp(\beta)$. L'expression de la VaR est*

$$VaR_\kappa(X) = -\frac{1}{\beta}\ln(1-\kappa).$$

Si $d = VaR_\kappa(X) = -\frac{1}{\beta}\ln(1-\kappa)$ dans (1.12), alors $\mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)} = 1-\kappa$. On remplace cette dernière expression dans (3.11) et on déduit

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} = VaR_\kappa(X) + \frac{1}{\beta}. \ \square$$

Exemple 3.7 *Soit $X \sim Gamma(\alpha,\beta)$. Il n'y pas de forme analytique pour la VaR. Sa valeur est calculée à l'aide d'un outil d'optimisation. On peut aussi utiliser la fonction quantile de la loi gamma programmée dans plusieurs logiciels (p. ex., `R`) pour calculer sa valeur. Avec (1.13) et (3.11), on obtient*

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} = \frac{E[X]\,\overline{H}(VaR_\kappa(X);\alpha+1,\beta)}{1-\kappa}. \ \square$$

Exemple 3.8 *Soit $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. On a la relation $X = \mu + \sigma Z$, où la v.a. $Z \sim N(0,1)$, dont la fonction*

de répartition F_Z est notée Φ et la fonction quantile, Φ^{-1}. L'expression de la VaR de X est

$$VaR_\kappa(X) = \mu + \sigma VaR_\kappa(Z) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\kappa).$$

Il n'y pas de forme analytique pour la VaR.

Avec $d = VaR_\kappa(X) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\kappa)$ dans (1.14) et (3.11), on déduit

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} \\ &= \frac{\mu\overline{\Phi}\left(\frac{\mu+\sigma F_Z^{-1}(\kappa)-\mu}{\sigma}\right) + \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\mu+\sigma F_Z^{-1}(\kappa)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}}{1-\kappa} \end{aligned}$$

qui devient

$$TVaR_\kappa(X) = \mu + \frac{1}{1-\kappa}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}. \tag{3.5}$$

À partir de (3.5), on obtient

$$TVaR_\kappa(Z) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}},$$

ce qui permet de déduire que

$$TVaR_\kappa(X) = \mu + \sigma TVaR_\kappa(Z),$$

confirmant les propriétés de multiplication par un scalaire positif 3.25 et de translation 3.26 de la TVaR. □

Exemple 3.9 *Soit $X \sim LN(\mu, \sigma)$. Comme on peut écrire $X = e^Y$ où $Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, on déduit $VaR_\kappa(X) = \mathrm{e}^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(\kappa)}$ avec la proposition 3.24. En appliquant conjointement (1.15) et (3.11) avec $d = VaR_\kappa(X)$, on obtient*

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{E[X]\,\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)}{1-\kappa} = \frac{E[X]\,\overline{\Phi}\left(\frac{\mu+\sigma\Phi^{-1}(\kappa)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)}{1-\kappa} \\ &= \frac{E[X]\,\overline{\Phi}\left(\Phi^{-1}(\kappa)-\sigma\right)}{1-\kappa}. \ \square \end{aligned}$$

Exemple 3.10 *Soit $X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$, avec $\alpha > 1$. On utilise conjointement (1.16) et (3.11) avec $d = VaR_\kappa(X) = \lambda\left(\frac{1}{(1-\kappa)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right)$ et on développe l'expression de la $TVaR$*

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} = \frac{\frac{\lambda}{\alpha-1}(1-\kappa)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + d(1-\kappa)}{1-\kappa} \\ &= \frac{\lambda}{\alpha-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} + d = \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right). \ \square \end{aligned}$$

Dans l'exemple suivant, on compare deux lois ayant des espérances identiques et des VaR identiques pour une certaine valeur de κ.

Exemple 3.11 *Soit $X_1 \sim Gamma\left(0.5, 2000^{-1}\right)$ et $X_2 \sim Pareto(\alpha, \lambda)$ telles que $E[X_1] = E[X_2] = 1000$ et*

$$VaR_{0.995}(X_1) = VaR_{0.995}(X_2) = 7879.4387.$$

Alors, on déduit que $\alpha = 4.474496$ et $\lambda = 3474.495631$. Enfin, on constate que

$$TVaR_{0.995}(X_1) = 9714.0349$$

et

$$TVaR_{0.995}(X_2) = 11\ 147.2322$$

confirmant que la mesure VaR ne donne pas une indication claire du comportement de la queue de la distribution. □.

Soit un vecteur de réalisations classées en ordre croissant de X, que l'on note par $\left(X^{[1]},...,X^{[m]}\right)$. On fixe j_0 tel que $F^{(m)-1}(\kappa) = X^{[j_0]}$. En utilisant les expressions (3.2) et (3.4) pour la TVaR conjointement avec (3.1), l'approximation de $TVaR_\kappa(X)$ correspond à

$$\begin{aligned} & TVaR_\kappa(X) \\ \simeq\ & \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X^{(j)} \times 1_{\left\{X^{(j)} > F^{(m)-1}(\kappa)\right\}}\right) \\ & + \frac{1}{1-\kappa}\left(F^{(m)-1}(\kappa)\left(F^{(m)}\left(F^{(m)-1}(\kappa)\right) - \kappa\right)\right) \\ \simeq\ & \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=j_0+1}^{m} X^{[j]} + X^{[j_0]}\left(F^{(m)}\left(X^{[j_0]}\right) - \kappa\right)\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Supposons que $m \times \kappa$ est un entier. Alors cet entier est j_0. Il en résulte que $\left(F^{(m)}\left(X^{[j_0]}\right) - \kappa\right) = 0$ et (3.6) devient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &\simeq \frac{1}{m(1-\kappa)}\sum_{j=1}^{m} X^{(j)} \times 1_{\left\{X^{(j)} > X^{[j_0]}\right\}} \\ &= \frac{1}{m-j_0}\sum_{j=j_0+1}^{m} X^{[j]}, \end{aligned}$$

ce qui correspond à la moyenne des $m - j_0$ plus grandes réalisations de X.

Proposition 3.12 *Soit une v.a. X avec fonction de répartition F_X. Soit une suite de v.a. iid. X_1, ..., X_n où $X_i \sim X$, $i = 1, 2, ..., n$. Alors, on a*

$$TVaR_\kappa(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=[n\kappa]+1}^{n} X^{[j]}}{\lfloor n(1-\kappa)\rfloor} \ \textit{(p.s.)}, \tag{3.7}$$

oÃ¹ $\lfloor u \rfloor$ correspond Ã la partie entière de u.

Preuve. Voir la preuve de la proposition 3.12 dans [Acerbi and Tasche, 2002]. ■

Quelques considérations pratiques doivent être prises en compte lors de l'approximation des mesures de risque VaR et $TVaR$.Prenons $\kappa = 0.99$. Si $m = 100$, alors les approximations de $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$ sont $X^{[99]}$ et $X^{[100]}$ (la moyenne d'un seul terme). Si $m = 10\ 000$, alors $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$ sont respectivement $X^{[9900]}$ et

$$\frac{\sum_{j=9901}^{10\ 000} X^{[j]}}{100}.$$

Si $m = 1\ 000\ 000$, alors $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$ sont respectivement $X^{[990\ 000]}$ et

$$\frac{\sum_{j=990\ 001}^{1\ 000\ 000} X^{[j]}}{10\ 000}.$$

Ainsi, il faut produire un grand nombre de réalisations de X afin d'obtenir des approximations de qualité de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$. Plus la valeur de κ est élevée, plus le nombre de réalisations à produire pour obtenir une approximation de qualité de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ doit être élevé.

Pour améliorer la qualité des approximations des mesures VaR et TVaR, on a deux options. La première consiste à produire un nombre m très élevé de réalisations. Cette option est limitée par la capacité de

l'outil informatique et par le temps de calcul. Dans certains cas, il est possible de corriger cet inconvénient en améliorant l'efficacité du code informatique. La deuxième option est d'avoir recours à des méthodes de réduction de variance. L'option 2 permet d'améliorer la qualité de l'approximation VaR et TVaR tout en se basant sur un nombre raisonnable de simulations. Les méthodes de réduction de la variance ne sont toutefois pas traitées dans le présent ouvrage.

3.4 Mesure LTVaR

Soit une v.a. X dont l'espérance existe ($E[X] < \infty$). La mesure de risque TVaR de la v.a. X quantifie la gravité de la perte au-delà de la VaR de la v.a. X, soit dans la queue droite de sa distribution. On introduit dans la présente section la mesure de risque Left-TVar de la v.a. X , désignée par LTVaR, qui quantifie la gravité de la perte en deçà de la VaR de la v.a. X. La LTVaR est définie par

$$LTVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u, \tag{3.8}$$

pour $u \in (0,1)$. Puisque

$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = E[X]$$

et

$$\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = (1-\kappa)\,TVaR_\kappa(X),$$

on déduit la relation suivante entre la LTVaR et la TVaR à partir de (3.8) :

$$LTVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa}\left(\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u - \int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{\kappa}\left(E[X] - (1-\kappa)\,TVaR_\kappa(X)\right), \tag{3.9}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

Comme

$$\begin{aligned}(1-\kappa)\,TVaR_\kappa(X) &= \left(E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] - VaR_\kappa(X)\left(\kappa - F_X\left(VaR_\kappa(X)\right)\right)\right)\\ &= \left(E[X] - E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_\kappa(X)\}}\right] - VaR_\kappa(X)\left(\kappa - F_X\left(VaR_\kappa(X)\right)\right)\right),\end{aligned}$$

on déduit de (3.9) que

$$LTVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa}\left(E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(\kappa - F_X\left(VaR_\kappa(X)\right)\right)\right), \tag{3.10}$$

pour $\kappa \in (0,1)$. Enfin, si X est une v.a. continue, on sait que $F_X(VaR_\kappa(X)) = \kappa$, ce qui mène à

$$LTVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa}E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_\kappa(X)\}}\right],$$

pour $\kappa \in (0,1)$, à partir de (3.10).

3.5 Mesure CTE et controverse

On présente aussi la définition de la mesure *Conditional Tail Expectation* (CTE).

Définition 3.13 *Soit $0 \le \kappa < 1$. La mesure CTE avec un niveau de confiance κ associée à la v.a. X est définie par*

$$CTE_\kappa(X) = E\left[X \middle| X > VaR_\kappa(X)\right],$$

Illustration 3.4 – On illustre la LTVaR et TVaR sur le graphique de la courbe des valeurs de la fonction de densité d'une v.a. continue positive X.

qui peut aussi s'écrire comme suit :

$$CTE_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right]}{\Pr(X > VaR_\kappa(X))}.$$

La mesure CTE est l'espérance de la v.a. X dans les cas où cette v.a. prend des valeurs supérieures à la VaR. La mesure CTE correspond à la moyenne des $100(1-\kappa)$ % valeurs les plus élevées que peut prendre X. On a $CTE_0(X) = E[X]$.

On analyse la relation entre les mesures de risque TVaR et CTE. Si la v.a. X est continue alors $F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa = 0$ et il en résulte que

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa}. \tag{3.11}$$

De plus, comme

$$\Pr(X > VaR_\kappa(X)) = \overline{F}_X(VaR_\kappa(X)) = 1-\kappa,$$

on obtient

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} = CTE_\kappa(X). \tag{3.12}$$

On constate que la mesure CTE est égale à la mesure TVaR lorsque la v.a. X est continue, ce qui n'est pas le cas de façon générale.

En fait, la mesure TVaR a été proposée initialement selon la définition 3.1 et la relation (3.12) a mené à la définition de la mesure CTE.

Pour éviter toute confusion, on utilise uniquement la mesure TVaR dans cet ouvrage.

Exemple 3.14 *Soit une v.a. discrète X avec support*

$$\{0, 100, 200, 500, 1000\}$$

et dont les valeurs de la fonction de masse de probabilité sont fournies dans le tableau suivant :

x	0	100	200	500	1000
$f_X(x)$	0.3	0.4	0.15	0.10	0.05
$F_X(x)$	0.3	0.7	0.85	0.95	1.00

La valeur de $E[X]$ est 170. Dans le tableau suivant, on indique les valeurs de $VaR_\kappa(X)$, $TVaR_\kappa(X)$ et $CTE_\kappa(X)$ pour $\kappa = 0.22$, 0.3, 0.39, 0.8501, 0.95 et 0.9999 :

κ	0.22	0.3	0.39	0.8501	0.95	0.9999
$VaR_\kappa(X)$	0	0	100	500	500	1000
$TVaR_\kappa(X)$	217.9487	242.8571	263.9344	666.7779	1000	1000
$CTE_\kappa(X)$	242.8571	242.8571	433.3333	1000	1000	*indéfinie*

Comme $VaR_{0.39}(X) = 100$, on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_{0.39}(X) &= \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_{0.39}(X)\}}]}{1-0.39} \\ &\quad + \frac{VaR_{0.39}(X)(F_X(VaR_{0.39}(X)) - 0.39)}{1-0.39} \\ &= \frac{200 \times 0.15 + 500 \times 0.1 + 1000 \times 0.05 + 100(0.7 - 0.39)}{1-0.39} \\ &= 263.934426 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} CTE_{0.39}(X) &= E[X|X > VaR_{0.39}(X)] \\ &= \sum_{x\in\{200,500,1000\}} \frac{x\Pr(X=x)}{\Pr(X>100)} \\ &= \frac{200\times 0.15 + 500\times 0.1 + 1000\times 0.05}{1-0.7} \\ &= 433.33. \end{aligned}$$

On constate que la valeur de $CTE_\kappa(X)$ *pour* $\kappa > 0.95$ *n'est pas définie, fournissant un argument supplémentaire à utiliser la mesure TVaR.* □

Quelques commentaires au sujet des définitions des mesures de risque. La définition de la TVaR présentée dans ce chapitre est rigoureuse. Il arrive qu'elle soit appelée CVaR pour *Conditional Value-at-Risk*. Comme il a été aussi mentionné la définition de la CTE pose de graves problèmes de rigueur.

L'actuaire et le gestionnaire des risques quantitatifs des risques sont préoccupées par les pertes (positives) d'une portefeuille. Il arrive que le gestionnaire des risques quantitatifs utilise le terme *Expected-Short-F all* pour désigner la TVaR telle qu'elle est définie dans ce chapitre.

Toutefois, le gestionnaire de placements, soucieux par les gains d'un portefeuille emploie souvent le terme *Expected-Short-Fall* pour désigner la LTVaR telle qu'elle est définie dans ce chapitre.

3.6 Propriétés des mesures de risque

En actuariat et en gestion quantitiative des risques, les mesures de risque servent notamment à établir le niveau de capital économique associé au portefeuille d'une compagnie d'assurance ou d'une institution financière. On définit les coûts pour un portefeuille de n contrats d'assurance par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où la v.a. X_i correspond aux coûts pour le contrat i, $i = 1, 2, ..., n$. On détermine le capital total pour le portefeuille avec $\varsigma_\kappa(S)$, où ς_κ désigne une mesure de risque avec niveau de confiance κ, notamment les mesures VaR_κ et TVaR_κ.

Définition 3.15 *Une mesure du risque* X *est une fonction, désignée par* ς_κ*, qui attribue une valeur positive au risque* X*. Un risque* X *est dit moins dangereux qu'un risque* Y *si* $\varsigma_\kappa(X) < \varsigma_\kappa(Y)$*. On considère* $\varsigma_\kappa(X)$ *comme le montant de capital dont une compagnie doit disposer pour faire face à une perte financière de montant* X*.*

Les organismes de surveillance des institutions financières requièrent que celles-ci établissent des "coussins" pour se protéger contre une expérience adverse d'un portefeuille. Ce coussin établi à partir de la mesure de risque ς_κ est appelé le capital économique et est défini par

$$CE_\kappa(S) = \varsigma_\kappa(S) - E[S].$$

Parmi les autres applications des mesures de risque, on voit en § 3.8 qu'elles peuvent être utilisées pour calculer la prime majorée. Elles servent aussi à quantifier des pertes éventuelles liées à des positions financières prises par un investisseur. De plus, elles sont aussi utilisées pour quantifier et comparer des stratégies d'investissement, notamment dans le contexte de gestion actif-passif. Enfin, les mesures de risque sont aussi appliquées comme outil de gestion dans le contexte des opérations de transaction des institutions financières.

Il est généralement admis qu'une mesure de risque devrait vérifier certaines conditions pour être utilisée comme outil de quantification du risque.

Propriété 3.16 ***Homogénéité****. Soit un risque* X *et un scalaire* $a \in \mathbb{R}^+$*. Une mesure* ς *est homogène si*

$$\varsigma_\kappa(aX) = a\varsigma_\kappa(X),$$

pour $0 < \kappa < 1$*.*

Une modification d'unité monétaire apportée au risque X conduit à une modification du même ordre pour la valeur obtenue avec la mesure de risque.

Propriété 3.17 ***Invariance à la translation***. *Soit un risque X et un scalaire $a \in \mathbb{R}$. Une mesure ς_κ est invariante à la translation si*

$$\varsigma_\kappa (X + a) = \varsigma_\kappa (X) + a,$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Par exemple, pour une v.a. représentant une perte définie par $L = X - \pi$ où π correspond à la prime associée à X, il est justifié d'avoir $\varsigma_\kappa (L) = \varsigma_\kappa (X) - \pi$.

Propriété 3.18 ***Monotonocité***. *Soit deux risques X_1 et X_2 tels que* $\Pr (X_1 \leq X_2) = 1$. *Une mesure ς_κ est monotone si*

$$\varsigma_\kappa (X_1) \leq \varsigma_\kappa (X_2),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Si le risque X_2 est plus dangereux que le risque X_1, il est raisonnable que la mesure de risque conduise à un capital plus élevé pour le risque X_2 que celui calculé pour le risque X_1.

Propriété 3.19 ***Sous-additivité***. *Soit deux risques X_1 et X_2. La mesure ς_κ est sous-additive si*

$$\varsigma_\kappa (X_1 + X_2) \leq \varsigma_\kappa (X_1) + \varsigma_\kappa (X_2),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

La propriété de sous-additivité est très importante relativement à la mutualisation des risques. En effet, il est intéressant d'examiner le bénéfice de mutualisation qui correspond

$$B_\kappa^\varsigma (S) = \sum_{i=1}^{n} \varsigma_\kappa (X_i) - \varsigma_\kappa (S)$$

et qui résulte de la mise en commun des risques X_1, ..., X_n. Comme la mutualisation des risques est le fondement de l'assurance, il serait souhaitable que $B_\kappa^\varsigma (S)$ soit positif.

La notion de mesure cohérente définie ci-dessous est due à [Artzner et al., 1999].

Définition 3.20 ***Mesure de risque cohérente***. *On dit qu'une mesure de risque ς_κ est* cohérente *si les propriétés 3.16, 3.17, 3.18 et 3.19 sont satisfaites.*

Dans la littérature actuarielle (voir, p. ex., [Denuit et al., 2006]), les trois propriétés suivantes sont aussi jugées désirables.

Propriété 3.21 ***Marge de risque non excessive***. *La mesure ς_κ ne doit pas induire une marge de risque excessive. Si $X \leq x_{\max}$, alors on a $\varsigma_\kappa (X) \leq x_{\max}$, pour* $0 < \kappa < 1$.

Il est injustifié de détenir un capital en excédent du montant maximal que les coûts d'un risque ou d'un portefeuille peut prendre.

Propriété 3.22 ***Marge de risque positive***. *On doit avoir $\varsigma_\kappa (X) \geq E[X]$, pour* $0 < \kappa < 1$.

Le capital minimum doit excéder les coûts espérés sinon il y aura ruine certaine.

Propriété 3.23 ***Marge de risque justifiée***. *Soit a une constante quelconque. On doit toujours avoir $\varsigma_\kappa (a) = a$, pour* $0 < \kappa < 1$.

Il n'est pas justifié de détenir un capital différent de a si les coûts pour un portefeuille correspondent à la constante a.

Les mesures de risque VaR et $TVaR$ étant fort utilisées en science actuarielle et en gestion quantitative du risque, nous vérifions si celles-ci sont cohérentes. Avant de débuter, on présente un résultat important pour la mesure VaR.

Proposition 3.24 *Soit une v.a. X. Pour une fonction croissante et continue φ de X, on a*

$$VaR_\kappa(\varphi(X)) = \varphi(VaR_\kappa(X)).$$

Preuve. Le résultat découle de la proposition 1.54. ■

De la proposition 3.24, on déduit les deux propriétés suivantes.

Propriété 3.25 ***Invariance à la multiplication par un scalaire positif (homogénéité).*** *Pour un scalaire $a \in \mathbb{R}^+$, on a*

$$VaR_\kappa(aX) = aVaR_\kappa(X) \text{ et } TVaR_\kappa(aX) = aTVaR_\kappa(X).$$

Preuve. Soit une v.a. Y telle que $Y = aX$ où $a \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(aX \leq y) \\ &= \Pr\left(X \leq \frac{y}{a}\right) \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(\kappa) &= VaR_\kappa(X) = \frac{y}{a} \\ &\Rightarrow y = VaR_\kappa(Y) = VaR_\kappa(aX) = aVaR_\kappa(X). \end{aligned}$$

On peut également démontrer que la VaR est invariante à la multiplication par un scalaire positif en appliquant directement la proposition 3.24 avec $\varphi(x) = ax$ étant donné que cette fonction est croissante et continue. Pour la TVaR, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(Y)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 aVaR_u(X)\mathrm{d}u \\ &= aTVaR_\kappa(X). \end{aligned}$$

À nouveau, on peut avoir recours à la proposition 3.24. En remplaçant le résultat obtenu pour la VaR dans la définition de base de la TVaR on obtient le résultat désiré. ■

Propriété 3.26 ***Invariance à la translation.*** *Pour un scalaire $b \in \mathbb{R}$, on a*

$$VaR_\kappa(X+b) = VaR_\kappa(X) + b \text{ et } TVaR_\kappa(X+b) = TVaR_\kappa(X) + b.$$

Preuve. Soit une v.a. Y telle que $Y = X + b$.On a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(X + b \leq y) \\ &= \Pr(X \leq y - b) \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(\kappa) &= VaR_\kappa(X) = y - b \\ &\Rightarrow y = VaR_\kappa(Y) = VaR_\kappa(X+b) = VaR_\kappa(X) + b. \end{aligned}$$

On peut également démontrer que la VaR est invariante à la translation en appliquant directement la

proposition 3.24 avec $\varphi(x) = x + b$ étant donné que cette fonction est croissante et continue. Pour la TVaR, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(Y)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (b + VaR_u(X))\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(b(1-\kappa) + \int_\kappa^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u\right) \\ &= b + TVaR_\kappa(X). \end{aligned}$$

À nouveau, on peut avoir recours à la proposition 3.24. En remplaçant le résultat obtenu pour la VaR dans la définition de base de la TVaR on obtient le résultat désiré. ■

Propriété 3.27 ***Multiplication par un scalaire négatif.*** *Pour un scalaire $b \in \mathbb{R}$, on a*

$$VaR_\kappa(-X) = -VaR_{1-\kappa}(X) \tag{3.13}$$

et

$$TVaR_\kappa(-X) = \frac{-1}{1-\kappa}\left(E[X] - \kappa TVaR_{1-\kappa}(X)\right). \tag{3.14}$$

De plus, on a

$$TVaR_\kappa(-X) = -LTVaR_{1-\kappa}(X). \tag{3.15}$$

Preuve. Soit une v.a. Y telle que $Y = -X$. On a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \le y) \\ &= \Pr(-X \le y) \\ &= \Pr(X > -y) \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X &\le -y) = 1-\kappa \\ &\Rightarrow VaR_{1-\kappa}(X) = -y \\ &\Rightarrow y = VaR_\kappa(Y) = -VaR_{1-\kappa}(X). \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$TVaR_\kappa(Y) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(Y)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_{1-u}(X)\,\mathrm{d}u. \tag{3.16}$$

En posant $s = 1-u$ avec $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}s$ dans (3.16), on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{1-\kappa}^0 VaR_s(X)\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_s(X)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.17}$$

En utilisant (1.37), (3.17) devient

$$TVaR_\kappa(Y) = -\frac{E\left[X \times 1_{\{X \leq VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right]}{1-\kappa}. \tag{3.18}$$

À partir de (3.17), on a aussi

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= -\frac{1}{1-\kappa}\int_0^1 VaR_s(X)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{1-\kappa}\int_{1-\kappa}^1 VaR_s(X)\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\left(E[X] - \kappa TVaR_{1-\kappa}(X)\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Enfin, l'expression en (3.27) est déduite de (3.17) et de la définition en (3.8) de la mesure LTVaR. ■

Comme $\varphi(x) = ax$ et $\varphi(x) = x + a$ sont des fonctions croissantes et continues, on déduit à l'aide de la proposition 1.54 que la mesure VaR est invariante à la translation et homogène. La mesure VaR est monotone. Si $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$, alors on observe $F_{X_1}(x) \geq F_{X_2}(x)$ pour tout x, ce qui implique $VaR_\kappa(X_1) \leq VaR_\kappa(X_2)$ pour tout κ. La mesure VaR n'est toutefois pas sous-additive comme il est illustré avec le contre-exemple suivant.

Exemple 3.28 *Soit des v.a. indépendantes X_1 et X_2 où $X_i \sim Exp(0.1)$. On sait que $X_1 + X_2 \sim Erlang(2, 0.1)$. Il est clair avec les valeurs de $VaR_\kappa(X_1 + X_2)$ et $VaR_k(X_1) + VaR_k(X_2)$ qui sont fournies dans le tableau suivant que la mesure VaR n'est pas sous-additive :*

κ	0.1	0.2	0.5	0.8	0.9
$VaR_k(X_1) + VaR_k(X_2)$	0.2107	0.4463	1.3863	3.2189	4.6052
$VaR_k(X_1 + X_2)$	0.5318	0.8244	1.6783	2.9943	3.8897

□

Dans plusieurs exemples numériques de cet ouvrage, on obtient l'inégalité

$$VaR_\kappa(S) > VaR_\kappa(X_1) + ... + VaR_\kappa(X_n).$$

Cela signifie que la mesure n'est pas sous-addtive et cela conduit à un bénéfice de mutualisation qui est négatif. Comme $VaR_\kappa(X) \leq x_{\max}$ pour tout κ et $VaR_\kappa(a) = a$, la mesure VaR n'introduit pas une marge de risque excessive et la marge introduite par cette mesure est justifiée. En revanche, la mesure VaR peut introduire une marge de risque négative.

Regardons maintenant les propriétés de la mesure de risque TVaR. Celle-ci est homogène. En effet, pour $a \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(aX) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(aX)\,\mathrm{d}u \\ &= a\frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u = aTVaR_\kappa(X), \end{aligned}$$

ce qui implique que la mesure TVaR est homogène. La mesure TVaR est invariante à la translation. En effet, on obtient la relation désirée en procédant comme suit :

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X+a) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X+a)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 a\mathrm{d}u \\ &= TVaR_\kappa(X) + a. \end{aligned}$$

La mesure TVaR est monotone. Lorsque l'inégalité $VaR_\kappa(X_1) \leq VaR_\kappa(X_2)$ est vérifiée pour tout κ, alors il est clair que $TVaR_\kappa(X_1) \leq TVaR_\kappa(X_2)$ pour tout κ. La sous-additivité de la mesure TVaR est vérifiée dans la proposition suivante.

Proposition 3.29 *La mesure TVaR est sous-additive.*

On présente deux preuves de la sous-additivité de la TVaR. On commence par une preuve basée sur l'approximation par la méthode de simulation Monte Carlo.

Preuve. On suit la démonstration fournie dans [McNeil et al., 2015]. Il est aussi recommandé de consulter la démonstation présentée dans l'annexe A de [Acerbi and Tasche, 2002]. Une autre démonstration est fournie dans [Denuit et al., 2006].

Soit une suite de v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n où $X_i \sim X$, $i = 1, 2, ..., n$. Pour un entier m tel que $1 \leq m+1 \leq n$, l'égalité suivante est vérifiée

$$\sum_{j=m+1}^{n} X_{j:n} = \sup\left\{X_{i_{m+1}} + ... + X_{i_n}; 1 \leq i_{m+1} \leq ... \leq i_n \leq m+1\right\}.$$

Soit un couple de v.a. (X, Y) dont la fonction de répartition est désignée par $F_{X,Y}$. Soit la suite de couple de v.a. i.i.d. (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) où $(X_i, Y_i) \sim (X, Y)$ pour $i = 1, 2, ...n$. On définit $S = X + Y$ et $S_i = X_i + Y_i$, pour $i = 1, 2, ..., n$. Par le lemme 3.12, on a

$$TVaR_\kappa(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=[n\kappa]+1}^{n} S_{j:n}}{[n(1-\kappa)]} \text{ (p.s.)},$$

où $S_{1:n} \leq S_{2:n} \leq ... \leq S_{n-1:n} \leq S_{n:n}$ sont les statistiques d'ordre de S_1, ..., S_n et $[u]$ correspond à la partie entière de u. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=[n\kappa]+1}^{n} S_{j:n} &= \sup\left\{S_{i_{[n\kappa]+1}} + ... + S_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq ... \leq i_n \leq [n\kappa]+1\right\} \\
&\leq \sup\left\{X_{i_{[n\kappa]+1}} + ... + X_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq ... \leq i_n \leq [n\kappa]+1\right\} \\
&\quad + \sup\left\{Y_{i_{[n\kappa]+1}} + ... + Y_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq ... \leq i_n \leq [n\kappa]+1\right\} \\
&= \sum_{j=[n\kappa]+1}^{n} X_{j:n} + \sum_{j=[n\kappa]+1}^{n} Y_{j:n}.
\end{aligned}$$

Il suffit de diviser par $[n(1-\kappa)]$ et de faire tendre $n \to \infty$ et on déduit le résultat voulu en appliquant le lemme 3.12. ■

La prochaine preuve est basée sur la représentation de la TVaR avec la prime stop-loss.

Preuve. On rappelle que

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u,\ \kappa \in (0,1). \tag{3.20}$$

La relation

$$TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \tfrac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) \quad , \quad \text{pour } \kappa \in (0,1), \tag{3.21}$$

est valide pour toute v.a. X. Soit la fonction convexe

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(x)$$

pour $x \in \mathbb{R}$. Alors, (3.21) peut être récrit sous la forme

$$TVaR_\kappa(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}}\{\varphi(x)\}. \tag{3.22}$$

On a

$$TVaR_\kappa(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}}\{\varphi(x)\}$$

ce qui signifie

$$TVaR_\kappa(X) \leq \varphi(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour $\alpha \in (0,1)$, on a

$$TVaR_\kappa(\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y) \leq x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_{\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y}(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On choisit

$$x_\alpha = \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y)$$

et on a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y) &\leq x_0 + \frac{1}{1-\kappa}\pi_{\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y}(x_0) \\
&= x_0 + \frac{1}{1-\kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y - x_0; 0)] \\
&= \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y) \\
&\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y - \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y); 0)].
\end{aligned}$$

La fonction $E[\max(W;0)]$est convexe. Alors, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y) &\leq \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y) \\
&\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y - \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y); 0)] \\
&= \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y) \\
&\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times E[\max(\alpha \times (X - VaR_\kappa(X)) + (1-\alpha) \times (Y - VaR_\kappa(Y)); 0)] \\
&\leq \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y) \\
&\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times \alpha E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] \\
&\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times (1-\alpha) E[\max(Y - VaR_\kappa(Y); 0)] \\
&= \alpha \times VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} \times \alpha E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] \\
&\quad + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y) + \frac{1}{1-\kappa} \times (1-\alpha) E[\max(Y - VaR_\kappa(Y); 0)]
\end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in (0,1)$.

La relation est vraie pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa\left(\frac{1}{2} \times X + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times Y\right) &\leq \frac{1}{2} \times VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} \times \frac{1}{2} E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] \\
&\quad + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times VaR_\kappa(Y) + \frac{1}{1-\kappa} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) E[\max(Y - VaR_\kappa(Y); 0)]
\end{aligned}$$

Avec la propriété d'homoénéité de la TVaR, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} TVaR_\kappa(X+Y) &\leq \frac{1}{2} \times VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} \times \frac{1}{2} E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] \\
&\quad + \frac{1}{2} \times VaR_\kappa(Y) + \frac{1}{1-\kappa} \times \frac{1}{2} E[\max(Y - VaR_\kappa(Y); 0)]
\end{aligned}$$

On multiplie par 2 de part et d'autre de l'inégalité θ et on obtient le résultat désiré. ■

On sait que $TVaR_0(X) = E[X]$. Pour vérifier que $TVaR_\kappa(X) \geq E[X]$, on dérive l'expression de la

TVaR par rapport à κ et on obtient

$$\frac{\mathrm{d}TVaR_\kappa(X)}{\mathrm{d}\kappa} = \frac{-VaR_\kappa(X)}{1-\kappa} + \frac{TVaR_\kappa(X)}{1-\kappa}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u \\ &\geq \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_\kappa(X)\,\mathrm{d}u = VaR_\kappa(X), \end{aligned}$$

alors on a $\frac{\mathrm{d}TVaR_\kappa(X)}{\mathrm{d}\kappa} \geq 0$, ce qui implique que la TVaR est croissante en κ. On déduit que la mesure TVaR introduit une marge de risque positive. La mesure TVaR ne conduit pas à une marge de risque excessive, car

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u \\ &\leq \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 x_{\max}\mathrm{d}u = x_{\max}. \end{aligned}$$

Comme

$$TVaR_\kappa(a) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 a\mathrm{d}u = a,$$

on conclut que la mesure TVaR introduit une marge justifiée.

Exemple 3.30 *Soit des v.a. X et $Y = \mathrm{e}^X$. Alors, $VaR_\kappa(Y) = \mathrm{e}^{VaR_\kappa(X)}$, car $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ est une fonction croissante et continue.* □

Exemple 3.31 *Un individu investit une somme $V(0) = 10\ 000$ au temps 0 dans un fonds mutuel. Il ne fait aucun retrait et aucun dépôt au cours de la prochaine période. La valeur au temps 1 de son investissement est représentée par la v.a. $V(1) = V(0)Y$ où Y est une v.a. continue positive avec $E[Y] = 1.12$. La valeur de la perte liée à l'investissement est définie par $L = V(0) - V(1)$. On dispose de l'information suivante :*

κ	$VaR_\kappa(Y)$	$E\left[Y \times 1_{\{Y \leq VaR_\kappa(Y)\}}\right]$
0.005	0.44444	0.00197
0.01	0.49014	0.00431
0.05	0.63192	0.02728
0.95	1.72122	1.02406
0.99	2.04150	1.09782
0.995	2.16755	1.10831

Alors, $E[L] = V(0) - V(0)E[Y] = 10\ 000(1-1.12) = -1\ 200$. Ensuite, en appliquant la propriété de translation de la VaR et (3.27), on déduit

$$\begin{aligned} VaR_{0.995}(L) &= VaR_{0.995}(V(0) - V(0)Y) \\ &= V(0) + V(0) \times (-VaR_{0.005}(Y)) \\ &= 10\ 000 + 10\ 000 \times (-0.44444) = 5555.6. \end{aligned}$$

Selon la propriété de translation de la TVaR, l'expression de la TVaR de L est donnée par

$$TVaR_\kappa(L) = TVaR_\kappa(V(0) - V(1)) = V(0) + TVaR_\kappa(-V(1)),$$

où

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(-V(1)) &= V(0) \times TVaR_\kappa(-Y) \\ &= V(0) \times -\frac{1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_s(Y)\,\mathrm{d}s \\ &= V(0) \times -\frac{1}{1-\kappa}E\left[Y \times 1_{\{X \leq VaR_{1-\kappa}(Y)\}}\right], \end{aligned}$$

avec (3.17) et (3.18). Alors, on déduit

$$TVaR_\kappa(L) = V(0)\left(1 - \frac{1}{1-\kappa}E\left[Y \times 1_{\{X \leq VaR_{1-\kappa}(Y)\}}\right]\right).$$

Pour $\kappa = 0.995$*, on obtient*

$$TVaR_{0.995}(L) = 10\ 000\left(1 - \frac{0.00197}{1-0.995}\right) = 6060. \quad \square$$

Exemple 3.32 *Soit une v.a.* X *où* $f_X(x) = \frac{1}{4}$ *et* $x \in \{1, 5, 10, 18\}$*. On définit la v.a.* $Y = 21 - X$*. D'après (**??**), on déduit que*

$$VaR_{0.3}(Y) = 21 - VaR^+_{1-0.3}(X) = 21 - 10 = 11$$

et

$$VaR_{0.75}(Y) = 21 - VaR^+_{1-0.75}(X) = 21 - 5 = 16.$$

Afin de vérifier les valeurs obtenues, on calcule directement les valeurs de $VaR_{0.3}(Y)$ *et* $VaR_{0.75}(Y)$*. De plus, on a*

$$TVaR_{0.3}(Y) = 21 - \frac{1}{1-0.3}\left(\frac{1+5+10}{4} - 10 \times (0.75 - 0.7)\right) = 16$$

et

$$TVaR_{0.75}(Y) = 21 - \frac{1}{1-0.75}\left(\frac{1+5}{4} - 5 \times (0.5 - 0.25)\right) = 20.$$

Clairement, on détermine que $f_Y(y) = \frac{1}{4}$*, où* $y \in \{3, 11, 16, 20\}$*, à partir de laquelle on confirme que* $VaR_{0.3}(Y) = 11$*,* $VaR_{0.75}(Y) = 16$*,* $TVaR_{0.3}(Y) = 16$ *et* $TVaR_{0.75}(Y) = 20$*.* $\square$

Exemple 3.33 *Soit une v.a.* R *représentant le taux de rendement instantané pour un fonds mutuel au cours de la prochaine période dont les valeurs de la fonction de masse de probabilité sont les suivantes :*

r	-0.2	-0.1	-0.05	0	0.02	0.05	0.1
$f_R(r)$	0.05	0.05	0.1	0.2	0.3	0.25	0.05

On investit une somme $V(0) = 1000$ *au début de la période et la valeur à la fin de la période est la v.a.* $V(1) = V(0)\,\mathrm{e}^R$ *dont les valeurs de* $f_{V(1)}(v)$ *et de* $F_{V(1)}(v)$ *sont fournies dans le tableau suivant :*

v	818.73	904.84	951.23	1000	1020.20	1051.27	1105.17
$f_{V(1)}(v)$	0.05	0.05	0.1	0.2	0.3	0.25	0.05
$F_{V(1)}(v)$	0.05	0.1	0.20	0.40	0.70	0.95	1.00

On définit la perte liée à cet investissement par la v.a. $L = V(0) - V(1)$ *et, à partir de (**??**), on déduit les valeurs suivantes de* $VaR_\kappa(L)$ *:*

κ	0.01	0.05	0.50	0.95	0.99
$VaR_{1-\kappa}(V(1))$	1105.17	1051.27	1020.20	818.73	818.73
$VaR^+_{1-\kappa}(V(1))$	1105.17	1105.17	1020.20	904.84	818.73
$VaR_\kappa(L)$	-105.17	-105.17	-20.20	95.11	181.27

Par exemple, on obtient aussi

$$\begin{aligned} TVaR_{0.95}(L) &= 1000 - \frac{(818.73 + 904.84) \times 0.05 - (904.84\,(0.1 - 0.05))}{1 - 0.95} \\ &= 181.27 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(L) &= 1000 - \frac{(818.73 \times 0.05 - 818.73\,(0.05 - 0.01))}{1 - 0.99} \\ &= 181.27. \end{aligned}$$

On peut obtenir directement les valeurs de $VaR_{\kappa}(L)$ et $TVaR_{\kappa}(L)$ en déterminant les valeurs de $f_L(l)$ et de $F_L(l)$ qui sont fournies dans le tableau suivant :

l	-105.17	-51.27	-20.20	0	48.77	95.11	181.27
$f_L(v)$	0.05	0.25	0.30	0.20	0.10	0.05	0.05
$F_L(v)$	0.05	0.30	0.60	0.80	0.90	0.95	1.00

□

3.7 Mutualisation en actuariat

La mutualisation des risques est fondamentale en actuariat. Les opérations d'assurance sont fondées sur la possibilité de mutualiser les risques. On considère un ensemble ou un conglomérat de risques $X_1, ..., X_n$ que l'on convient d'appeler un portefeuille de risques. Ces risques peuvent être indépendants ou dépendants entre eux. Le risque global correspond à l'ensemble des coûts du portefeuille, que l'on représente par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Par exemple, cela peut être un portefeuille d'une compagnie d'assurance avec n contrats pour une période fixe. Le portefeuille peut être aussi constitué de n risques (titres) avec risque de défaut. Comme autre exemple, le portefeuille peut être constitué de n lignes d'affaires d'une compagnie d'assurance ou de toute autre compagnie. La connaissance du comportement de S est cruciale pour l'institution qui détient ce portefeuille. Connaître la distribution de S est essentielle pour calculer les mesures de risque liées à un portefeuille, pour évaluer la solvabilité du portefeuille, etc.

Dans ce chapitre, on présente les caractéristiques et certains résultats analytiques relatifs à la distribution du montant total des sinistres. On examine l'effet de la mutualisation de risques indépendants et on démontre la nécessité d'inclure une marge relative de sécurité dans les primes.

Dans l'exemple suivant, on examine la mutualisation des risques en ayant recours aux mesures VaR et TVaR. On met en évidence notamment que la mesure VaR ne satisfait pas la propriété de sous-additivité.

Exemple 3.34 *On considère un portefeuille de n contrats d'assurance vie temporaire 1 an. Toutes les durées de vie des assurés sont i.i.d. avec une probabilité de décès de 0.0017 (qui correspond à la probabilité de décès d'un individu d'une quarantaine d'année en Amérique du Nord). Le montant de prestation de décès est 100 000. Alors, les coûts pour le contrat i correspondent à $X_i = 100\ 000 I_i$ où $I_i \sim Bern(0.0017)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. La prime pure pour un contrat est $E[X_i] = 100\ 000q = 170$. De plus, on observe que $VaR_{0.995}(X_i) = 0$ et $TVaR_{0.995}(X_i) = 34\ 000$ $(i = 1, ..., n)$. On fournit dans le tableau ci-dessous les valeurs de $VaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ et $TVaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ pour $n = 100$, $1000, 100\ 000$ et $1\ 000\ 000$:*

n	*100*	*1000*	*100 000*	*1 000 000*
$VaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$	*200 000*	*600 000*	*20 400 000*	*180 700 000*
$TVaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$	*214 640.5*	*646 349.1*	*20 889 484*	*182 036 101*

Les valeurs sont exactes puisque $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, 0.0017)$, d'après la proposition 5.31. Selon la mesure VaR, on observe que le bénéfice de mutualisation est négatif quelle que soit la taille n du portefeuille :

$$B_{0.995}^{VaR}(S) = \sum_{i=1}^{n} VaR_{0.995}(X_i) - VaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leq 0.$$

Comme la mesure TVaR est sous-additive, le bénéfice de mutualisation est positif pour tout n :

$$B_{0.995}^{VaR}(S) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}(X_i) - TVaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \geq 0.$$

L'utilisation des VaR individuelles pour déterminer le capital total pour l'ensemble du portefeuille peut conduire à des conséquences financières désastreuses. En effet, en prenant le point de vue d'un gestionnaire de risque pour une institution financière, on suppose qu'il demande à chaque entité i ($i = 1, 2, ..., n$) dont le risque est défini par X_i d'établir le montant de capital à mettre de côté pour faire face à chaque risque et d'en faire le total. Si on utilise la VaR, il n'est pas nécessaire de financer le risque de décès puisque la probabilité de survie est supérieure à 99.5 %. Comme le montant de capital est 0 pour chaque entité, il en résulte que leur somme est aussi 0. En se basant sur la mesure TVaR, le montant à mettre de côté pour chaque risque serait de 34 000 pour une espérance de coûts de 170. Le coût en capital est exhorbitant. En profitant de la mutualisation des risques et pour $n = 1000$ (1 000 000), le montant global en se basant sur la TVaR est alors de 646 349.1 (182 036 101), soit 646.3491 (182.0361) par risque. Le bénéfice de mutualisation par risque est de 34 000 − 646.3491 = 33 353.6509 (34 000 − 182.0361 = 33 817.9639).

Du point de vue d'un actuaire en tarification, l'utilisation éventuelle de la VaR pour le calcul de la prime est aussi problématique. En effet, selon la VaR, la prime pour un risque est 0, soit un montant inférieur à la prime pure. En utilisant la $TVaR$, une prime de 34 000 est disproportionnée par rapport à l'espérance des coûts, soit 170. Toutefois, en supposant que n contrats soient émis et que les coûts $X_1, ..., X_n$ soient i.i.d., on profite de la mutualisation des risques, ce qui permet de demander une prime moins élevée. Pour, p. ex., $n = 100\ 000$ et en utilisant la $TVaR$, la prime est de 208.8948. □

3.7.1 Mutualisation et coût moyen par contrat

Pour comprendre la mutualisation des risques, il est intéressant d'examiner le comportement du coût moyen par contrat pour un portefeuille de contrats dont les coûts sont identiquement distribués.

Dans le mécanisme de l'assurance, chaque assuré transfère son risque (actuariel) individuel à la compagnie d'assurance. Le regroupement de ces risques individuels constitue le risque global de l'assureur. Pour comprendre l'impact de cette mutualisation des risques individuels, il est intéressant d'examiner le comportement aléatoire du coût moyen par contrat que l'on définit par W_n, où

$$W_n = \frac{S}{n} = \frac{\text{Montant total réclamé}}{\text{Nombre de contrats}}.$$

Le coût moyen correspond en fait à la répartition du coût total (ou du risque global) sur l'ensemble du groupe d'assuré. C'est donc la part attribuée à la suite d'un partage, d'une allocation équitable des coûts du portefeuille parmi les membres de celui-ci. Comme ce partage résulte de la mutualisation, il est intéressant de comparer le comportement de la part W_n à celui d'un risque individuel X avant le partage. L'espérance de W_n est

$$E[W_n] = E\left[\frac{S}{n}\right] = \frac{1}{n}E[S]$$

et, comme les risques individuels X_i sont identiquement distribués, $E[W_n]$ devient

$$E[W_n] = \frac{nE[X]}{n} = E[X],$$

ce qui signifie que l'espérance du coût moyen est égale à l'espérance du coût pour un seul contrat. L'expression pour la variance de W_n est donnée par

$$\text{Var}(W_n) = \text{Var}\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}(S).$$

Si l'on suppose que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont iid, l'expression de $\mathrm{Var}\,(W_n)$ devient

$$\mathrm{Var}\,(W_n) = \frac{1}{n^2} n\ \mathrm{Var}\,(X) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}\,(X) < \mathrm{Var}\,(X)\,,$$

d'où l'on constate que la variance du coût moyen est inférieure à la variance du coût par contrat pour $n > 1$. Ainsi, la variabilité d'un risque individuel diminue en regroupant plusieurs risques individuels. Par ailleurs, lorsque n est très grand, on observe que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\,(W_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Var}\,(X) = 0,$$

ce qui implique que la variance du coût moyen tend vers 0 quand le nombre d'assurés indépendants augmente considérablement. On observe ainsi une diversification complète du risque d'assurance

Si l'on suppose que les v.a. X_i sont seulement identiquement distribuées et si l'on ne suppose pas l'indépendance entre les risques individuels, la variance du coût moyen sera donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(W_n) &= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\,(S) = \frac{1}{n^2}\left[n\mathrm{Var}\,(X) + n(n-1)\mathrm{Cov}(X_1, X_2)\right] \\ &= \frac{\mathrm{Var}\,(X)}{n} + \frac{n-1}{n}\mathrm{Cov}(X_1, X_2).\end{aligned}$$

De plus, lorsque n est très grand, on observe que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\,(W_n) = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{\mathrm{Var}\,(X)}{n} + \frac{n-1}{n}\mathrm{Cov}(X_1, X_2)\right\} = \mathrm{Cov}(X_1, X_2),$$

ce qui implique que la variance du coût moyen n'est pas éliminée quand le nombre d'assurés augmente.

3.7.2 Mutualisation et loi des grands nombres avec variance finie

La loi des grands nombres est souvent évoquée lorsqu'il est question du mécanisme d'assurance et de la mutualisation des risques. Soit une suite de v.a. $X_1, ..., X_n$ iid. dont l'espérance et la variance existent. On convient que $X_i \sim X$ $(i = 1, 2, ..., n)$. On définit la v.a. $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, où $E\,[W_n] = E\,[X]$ et $\mathrm{Var}\,(W_n) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}\,(X)$. On examine le comportement de la v.a. W_n lorsque n tend vers l'infini. Selon les différentes versions de la loi des grands nombres, on sait que W_n tend vers l'espérance de $E\,[W_n]$.

Avant de démontrer la loi des grands nombres, deux résultats préliminaires, l'inégalité de Markov et l'inégalité de Chebychev, sont nécessaires.

Proposition 3.35 ***Inégalité de Markov***. *Soit une v.a. Z ne prenant que des valeurs positives et dont l'espérance existe. Alors, on a $\Pr\,(Z \geq a) \leq \frac{E[Z]}{a}$, pour tout $a > 0$.*

Preuve. Soit Z une v.a. continue ne prenant que des valeurs positives. On a

$$\begin{aligned}E\,[Z] &= \int_0^\infty x f_Z\,(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a x f_Z\,(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty x f_Z\,(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_a^\infty x f_Z\,(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^\infty a f_Z\,(x)\,\mathrm{d}x = a\Pr(Z > a)\end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat désiré. Le cas avec une v.a. discrète peut être traité de façon similaire. ■

L'inégalité de Markov peut aussi être écrite sous la forme suivante :

$$\Pr(Z > a) \leq \frac{E\,[g(Z)]}{g(a)}, \text{ pour tout } a > 0,$$

où g est une fonction positive, croissante et dont l'espérance existe.

Dans la proposition suivante, on fournit un exemple d'application de l'inégalité de Markov afin d'obtenir une borne exponentielle à la probabilité de ruine $\psi_n\,(u)$.

Proposition 3.36 ***Borne exponentielle***. *Soit des v.a. indépendantes X_1, ..., X_n dont les $\mathcal{M}_{\underline{X}}$ existent. La v.a. X_i correspond aux coûts d'un contrat dont la prime est $\pi_i = (1+\eta_i)\,E[X_i]$ avec une marge de sécurité η_i strictement positive, $i = 1, 2, ..., n$. Les coûts totaux pour l'ensemble du portefeuille sont définis par $S = \sum_{i=1}^n X_i$ et le revenu total de primes est $\pi_S = \sum_{i=1}^n \pi_i$. On définit le coefficient ρ_B comme étant la solution strictement positive (si elle existe) de $E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = \mathrm{e}^{t\pi_S}$, où $E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right]$. Alors, on a*

$$\psi_n(u) \leq \mathrm{e}^{-\rho_B u},\ u \geq 0,$$

où u correspond au capital alloué en début de période pour le portefeuille.

Preuve. En appliquant la proposition 3.35 avec $g(y) = \mathrm{e}^{\rho y}$, on a

$$\begin{aligned}\psi_n(u) &= \overline{F}_S(u+\pi_S) = \Pr(S > \pi_S + u)\\ &= \Pr\left(\mathrm{e}^{\rho_B S} > \mathrm{e}^{\rho_B(\pi_S+u)}\right) \leq \frac{E\left[\mathrm{e}^{\rho_B S}\right]}{\mathrm{e}^{\rho_B \pi_S}\mathrm{e}^{\rho_B u}} = \mathrm{e}^{-\rho_B u},\ u \geq 0.\end{aligned}$$

■

L'inégalité de Chebychev présentée dans le corollaire suivant est un cas particulier de l'inégalité de Markov.

Corollaire 3.37 ***Inégalité de Chebychev***. *Soit une v.a. Z dont l'espérance $E[Z]$ et la variance* $\mathrm{Var}(Z)$ *existent. Pour tout $k > 0$, on a*

$$\Pr\left(|Z - E[Z]| > k\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Preuve. Soit une v.a. $Y = \frac{(Z-E[Z])^2}{\mathrm{Var}(Z)}$ c.-à-d. Y est une v.a. positive avec $E[Y] = 1$. Comme la v.a. Y est positive, on applique directement l'inégalité de Markov pour obtenir l'inégalité de Chebychev. En effet, on a $\Pr\left(Y > k^2\right) \leq \frac{E(Y)}{k^2}$ qui devient

$$\Pr\left(\frac{(Z - E[Z])^2}{\mathrm{Var}(Z)} > k^2\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

que l'on peut réécrire

$$\Pr\left(\left|\frac{Z - E[Z]}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}}\right| > k\right) \leq \frac{1}{k^2},$$

ce qui implique que $\Pr\left(|Z - E[Z]| > k\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}\right) \leq \frac{1}{k^2}$. ■

Dans le corollaire 3.37, il est à noter que la probabilité

$$\Pr\left(|Z - E[Z]| > k\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}\right)$$

correspond à

$$\Pr\left(Z - E[Z] \leq -k\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}\right) + \Pr\left(Z - E[Z] \geq k\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}\right). \tag{3.23}$$

L'inégalité de Chebychev est utilisée notamment pour démontrer la loi des grands nombres.

Proposition 3.38 ***La loi des grands nombres.*** *Soit $X_1, X_2, ...$ une suite de v.a. iid. avec $E[X_i] = \mu$ et $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$, pour $i \in \mathbb{N}^+$. Soit la v.a. $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, où $E[W_n] = \mu$ et $\mathrm{Var}(W_n) = \frac{1}{n}\sigma^2$. Alors, $\forall\varepsilon > 0$, on a $\Pr[|W_n - \mu| > \varepsilon] \to 0$ quand $n \to \infty$.*

Remarque 3.39 ***Interprétation en assurance.*** *Soit un portefeuille de n contrats dont les coûts sont iid satisfaisant les conditions de la loi des grands nombres. Selon le résultat de la proposition 3.38, quand le nombre de contrats augmente, la probabilité que le coût moyen W_n par contrat dévie d'une faible marge de son espérance μ s'approche de 0.*

Preuve. On applique l'inégalité de Chebychev

$$\Pr\left(|W_n - E[W_n]| \geq k\sqrt{\mathrm{Var}(W_n)}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

ce qui implique que

$$\Pr\left(|W_n - E[W_n]| \geq k\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Il en découle donc que

$$\Pr\left(|W_n - \mu| \geq k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}. \tag{3.24}$$

Pour $\forall \varepsilon > 0$, on définit k tel que $k^2 = \frac{n\,\varepsilon^2}{\sigma^2}$. À partir de (3.24), on a

$$\Pr\left(|W_n - \mu| \geq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

On montre avec l'inégalité de Chebychev que

$$\Pr(|W_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2},$$

pour $\forall\ n > 0$. Enfin, pour $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|W_n - \mu| > \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \to 0.$$

■

Selon les conditions et le résultat de la loi des grands nombres, le coût moyen par contrat tend en probabilité vers l'espérance du coût par contrat. On sait également que la variance du coût moyen par contrat est inférieure à la variance du coût individuel par contrat $\mathrm{Var}(W_n) < \mathrm{Var}(X)$ si n est supérieur à 1. Ainsi, le résultat

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|W_n - \mu| > \varepsilon) \to 0$$

n'implique pas que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|S - nu| \geq \varepsilon) \to 0.$$

En d'autres termes, le fait que le coût moyen par contrat s'approche de l'espérance du coût pour un contrat n'implique pas que le coût total du portefeuille tende vers n fois l'espérance du coût individuel par contrat.

Exemple 3.40 *Soit des v.a. iid X_1, ..., X_n, avec $X_i \sim X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Alors, on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= \mathcal{L}_S\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \left(\mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta + \frac{t}{n}}\right)^{n\times\alpha} \\
&= \left(\frac{n\beta}{n\beta + t}\right)^{n\times\alpha}
\end{aligned}$$

pour $t \in [0, 1]$.

On déduit que

$$W_n \sim Gamma(n\alpha, n\beta)$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$.

Illustration 3.5 – Courbes des valeurs de la fonction de densité de W_n, pour $n = 1, 10, 100$ pour l'exemple 3.40

Comme prévu, on observe

$$E[W_n] = \frac{\alpha n}{\beta n} = \frac{\alpha}{\beta} = E[X]$$

et

$$Var(W_n) = \frac{\alpha n}{(\beta n)^2} = \frac{1}{n}\frac{\alpha}{\beta^2} \leq \frac{1}{n} Var(X),$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$.

On illustre les résultats de cet exemple avec $X \sim gamma(\alpha = 0.5, \beta = 0.05)$. *Les valeurs de* $f_{W_n}(x)$ *et de* $F_{W_n}(x)$ *sont tracées sur les graphiques des illustrations 3.5 et 3.6 pour* $n = 1, 10, 100$.

3.7.3 Mutualisation et loi des grands nombres nombres avec variance infinie

On présente une application de la TLS pour démontrer une variante de la loi des grands nombres pour risques indépendants, i.e., les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées avec $E[X_i] = E[X] < \infty$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$. On vise à démontrer de façon appropriée que la part allouée W_n tend (en distribution) vers la v.a. Z où $\Pr(Z = E[W_n]) = 1$. Ainsi, il faut démontrer le résultat qui permet d'obtenir cette conclusion. La démonstration est faite sans supposer que $Var(X) < \infty$. On utilise la TLS de W_n donnée par (pour $t > 0$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{-W_n t}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}St}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-S\frac{t}{n}}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-(X_1+...+X_n)\frac{t}{n}}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-X_1\frac{t}{n}}\right] \times ... \times E\left[\mathrm{e}^{-X_n\frac{t}{n}}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-X\frac{t}{n}}\right]^n.
\end{aligned}$$

Illustration 3.6 – Courbes des valeurs de la fonction de ré partition de W_n, pour $n = 1, 10, 100$ pour l'exemple 3.40

Ensuite, on procède au passage à la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) &= \lim_{n\to\infty} E\left[\mathrm{e}^{-X\frac{t}{n}}\right]^n \\
&\simeq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{E[X]\,t}{n}\right)^n \\
&= \mathrm{e}^{-E[X]t} \\
&= \mathcal{L}_Z(t)
\end{aligned}$$

où $\Pr(Z = E[X]) = \Pr(Z = E[W_n]) = 1$. Comme $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) = \mathcal{L}_Z(t)$, on conclut $\lim_{n\to\infty} F_{W_n}(x) = F_Z(x)$ pour tout point de continuité $x \in \mathbb{R}$ et donc que la v.a W_n converge en distribution vers la v.a. Z où $\Pr(Z = E[X]) = 1$. Dans un contexte d'assurance, on peut interpréter ce résultat comme suit : quand la taille n du portefeuille devient importante, la part allouée à chaque contrat tend vers la constante $E[X]$.

3.7.4 Marge de sécurité positive et mesure de solvabilité sur une période

La mutualisation des risques n'est pas suffisante pour garantir que la compagnie soit en mesure de rester solvable en prenant en charge le plus grand nombre possible de contrats d'assurance. On a recours à la probabilité de ruine pour démontrer la nécessité que la prime demandée pour un contrat comprenne une marge de sécurité positive. La probabilité de ruine sur une période est une mesure de solvabilité qui permet d'évaluer le risque global associé au portefeuille. On peut utiliser la probabilité de ruine comme mesure de solvabilité associée au portefeuille. La probabilité de ruine correspond à la probabilité que la compagnie ne rencontre pas ses engagements au cours de la prochaine période (p. ex., une journée, une semaine, un mois, une année) en supposant un capital initial $u \geq 0$. Les coûts pour un portefeuille de n contrats d'assurance sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où la v.a. X_i correspond aux coûts pour le contrat i et pour lequel une prime π_i est demandée, $i = 1, 2, ..., n$. La probabilité de ruine $\psi_n(u)$ est définie par

$$\psi_n(u) = \Pr\left(S > \sum_{i=1}^{n} \pi_i + u\right) = 1 - F_S\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i + u\right),$$

où $\sum_{i=1}^{n} \pi_i$ correspond au revenu total de primes du portefeuille pour la période. Il est requis de pouvoir évaluer de façon exacte ou approximative F_S afin de calculer $\psi_n(u)$.

Pour démontrer la nécessité d'inclure une marge de sécurité positive, on essaie de savoir quel est le

comportement de la probabilité de ruine $\psi_n(u)$ quand le nombre de contrats n augmente et que la prime π_i chargée est inférieure, égale ou supérieure à l'espérance du montant réclamé par contrat i $(i = 1, 2, ..., n)$. On examine le comportement de $\psi_n(u)$ dans le cas où les coûts des contrats du portefeuille sont iid.

Proposition 3.41 *Soit des v.a. iid $X_1, ..., X_n$ où X_i correspond aux coûts du contrat i d'un portefeuille de n contrats avec $E[X_i] = E[X] < \infty$ et $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(X) < \infty$, $i = 1, 2, ..., n$. La prime chargée par contrat est $\pi_i = \pi$, $i = 1, 2, ..., n$. Alors, on a les deux résultats suivants :*

1. *si $\pi > E[X]$, $\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) = 0$, $u \geq 0$;*
2. *si $\pi < E[X]$, $\lim_{n\to\infty} \psi_n(0) = 1$.*

Preuve. n utilise l'inégalité de Chebychev pour démontrer les deux résultats. Comme les v.a. sont iid, l'expression de $\psi_n(u)$ est donnée par

$$\psi_n(u) = \Pr\left(S > \sum_{i=1}^{n} \pi_i + u\right) = \Pr(S > n\pi + u) \tag{3.25}$$

avec $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où $E[S] = nE[X]$ et $\mathrm{Var}(S) = n\mathrm{Var}(X)$.

1. Cas $\pi > E[X]$. On définit $\pi = \mu + \delta$ où $\delta > 0$. À partir de (3.25) et avec (3.23), on a

$$\psi_n(u) = \Pr(S - n\mu > n\delta + u) \leq \Pr(|S - n\mu| > n\delta + u).$$

En appliquant l'inégalité de Chebychev, on a alors

$$\begin{aligned}
\psi_n(u) &\leq \Pr(|S - n\mu| > n\delta + u) \\
&= \Pr\left(|S - n\mu| > \frac{n\delta + u}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\sqrt{\mathrm{Var}(S)}\right) \\
&\leq \frac{\mathrm{Var}(S)}{(n\delta + u)^2} = \frac{n\mathrm{Var}(X)}{(n\delta + u)^2}.
\end{aligned}$$

Finalement, on déduit $\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n\mathrm{Var}(X)}{(n\delta+u)^2} = 0$.

2. Cas $\pi < E[X]$. On pose $\pi = \mu - \delta$ où $\delta > 0$. Avec (3.25) et (3.23), l'expression de $\psi_n(0)$ devient

$$\begin{aligned}
\psi_n(u) &= \Pr(S - n\mu > -n\delta) = 1 - \Pr(S - n\mu \leq -n\delta) \\
&\geq 1 - \Pr(|S - n\mu| > n\delta).
\end{aligned}$$

À l'aide de l'inégalité de Chebychev, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}
\psi_n(u) &\geq 1 - \Pr(|S - n\mu| > n\delta) \\
&= 1 - \Pr\left(|S - E(S)| > \frac{n\delta}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\sqrt{\mathrm{Var}(S)}\right) \\
&\geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(S)}{(n\delta)^2}.
\end{aligned}$$

Puis, en passant à la limite, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\mathrm{Var}(S)}{(n\delta)^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{n\mathrm{Var}(X)}{(n\delta)^2}\right) = 1.$$

■

Remarque 3.42 *On constate que la probabilité de ruine $\psi_n(u)$ tend vers 0 quand le nombre de contrats tend vers ∞ et que la prime chargée est supérieure à $E[X]$. Toutefois, si la compagnie d'assurance charge*

une prime inférieure à l'espérance du montant réclamé par contrat et qu'elle assure un grand nombre de risques, alors la ruine devient certaine si la compagnie possède un capital initial u qui est nul. Le cas où le capital initial est strictement supérieur à 0 est traité à la remarque 3.43.

Remarque 3.43 *On considère la situation d'une compagnie qui alloue un capital $0 < u < \infty$ (fini et positif) pour le portefeuille décrit à la proposition 3.41 et charge une prime $\pi < E[X]$. Soit le plus petit nombre entier n_0 (fini puisque u est fini) de contrats tel que $n_0 E[X] > n_0\pi + u$. Alors, pour $n \geq n_0$, on a $u + n\pi - nE[X] < 0$ et on déduit*

$$\begin{aligned} & \psi_n(u) \\ = \; & \Pr(S > u + n\pi) \\ = \; & \Pr(S - E[S] > u + n\pi - nE[X]) \\ = \; & 1 - \Pr(S - E[S] \leq u + n\pi - nE[X]) \\ \geq \; & 1 - \Pr(|S - E[S]| > nE[X] - (u + n\pi)) \end{aligned}$$

qui devient

$$\psi_n(u) = 1 - \Pr\left(|S - E[S]| > \frac{nE[X] - (u + n\pi)}{\sqrt{nVar(X)}}\sqrt{nVar(X)}\right).$$

Avec l'inégalité de Chebychev, on a

$$\psi_n(u) \geq 1 - \frac{nVar(X)}{(nE[X] - (u + n\pi))^2}, \; n \geq n_0.$$

On obtient $\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) \to 1$.

La proposition 3.41 permet de constater que le regroupement de risques individuels ne permet pas de diminuer le risque global d'une compagnie d'assurance. Il faut également charger une prime qui soit supérieure à l'espérance. De la preuve de la proposition 3.41, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.44 *Selon les conditions de la proposition 3.41 et si $\pi > E[X]$, alors on a*

$$\psi_n(u) \leq \min\left(\frac{n\mathrm{Var}(X)}{(n(\pi - E[X]) + u)^2}; 1\right)$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$ et $u \geq 0$.

Le corollaire 3.44 se généralise au contexte d'un portefeuille de n contrats indépendants, sans être identiquement distribués.

Corollaire 3.45 *Soit des v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ dont les premiers et deuxièmes moments existent. La v.a. X_i correspond aux coûts d'un contrat dont la prime est $\pi_i = (1 + \eta_i) E[X_i]$ avec une marge de sécurité η_i strictement positive, $i = 1, 2, ..., n$. Les coûts totaux pour l'ensemble du portefeuille sont définis par $S = \sum_{i=1}^n X_i$ et le revenu total des primes est $\pi_S = \sum_{i=1}^n \pi_i$. Alors, on a*

$$\psi_n(u) \leq \min\left(\frac{\mathrm{Var}(S)}{(\pi_S - E[S] + u)^2}; 1\right)$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$ et $u \geq 0$.

Les inégalités dans les corollaires 3.44 et 3.45 sont conservatrices. Néanmoins, elles permettent de démontrer que la probabilité de ruine décroît avec la taille du portefeuille à la condition que le revenu total de primes π_S excède les coûts totaux espérés $E[S]$.

Illustration 3.7 – Courbes des valeurs de la probabilité de ruine pour illustrer l'impact de la prime sur celle-ci pour l'exemple 3.46

Exemple 3.46 *On considère un portefeuille homogène de contrats d'assurance vie. Les durées de vie des assurés sont iid. La probabilité q de décès est de 2 % et la prestation b en cas de décès est de 1000. L'espérance des coûts pour un contrat est 20. La probabilité de ruine est $\psi_n(0) = \overline{F}_S(n\pi)$, où $S = 1000N$, $N \sim Bin(n, q)$ et π est la prime pour un contrat. Dans l'illustration 3.7, on observe le comportement de $\psi_n(0)$ lorsque la taille n du portefeuille augmente et pour π égal à 10, 30 et 40.* □

Dans l'exemple suivant, on illustre la situation traitée à la remarque 3.43.

Exemple 3.47 *On considère un portefeuille de n contrats d'assurance IARD dont les coûts sont définis par les v.a. iid X_1, ..., X_n où $X_i \sim Ga\left(0.1, \frac{1}{10\ 000}\right)$, pour $i = 1, ..., n$. La compagnie d'assurance IARD possède un montant important de capital. Afin d'augmenter sa part de marché, elle décide de charger une prime $\pi_i = \frac{E[X_i]}{2} = 500$ pour $i = 1, ..., n$ et de financer cette réduction de prime par l'allocation au portefeuille d'un capital $u = 1\ 000\ 000$. On définit la probabilité de ruine au cours de la prochaine année pour le portefeuille par $\psi_n(u) = \Pr\left(S > u + \sum_{i=1}^n \pi_i\right)$ où la v.a. $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim Ga(n0.1, \frac{1}{10\ 000})$ correspond au montant total*

des engagements pour la prochaine année. On indique certaines valeurs obtenues pour $\psi_n(u)$ *:*

n	*500*	*1000*	*1500*	*2006*
$\psi_n(u)$	*0*	*0.000006*	*0.024731*	*0.499063*
n	*2007*	*2500*	*3000*	*4000*
$\psi_n(u)$	*0.500473*	*0.946940*	*0.998838*	*1*

Si la compagnie décide de suivre cette stratégie, une croissance non contrôlée du nombre de contrats causera une augmentation de la probabilité d'être insolvable menant ultimement à une ruine certaine, comme prévu à la remarque 3.43. □

Dans le cadre des exercices, on examine le comportement de $\psi_n(u)$ dans certains cas où les risques ne sont pas indépendants.

3.8 Primes pures et primes majorées

La prime pure pour un contrat d'assurance correspond à l'espérance des coûts associés à un contrat d'assurance. On note la prime pure par $PP = E[X]$ où la v.a. X correspond aux coûts couverts pour un contrat. La prime pure ne contient pas de marge de sécurité et de marge de profit. La prime pure ne tient pas compte des dépenses. On définit également la prime majorée $\Pi(X)$ par $\Pi(X) = PP(X) + MR(X)$. La prime majorée comprend la portion de $PP(X)$ associée au risque actuariel X et tient également compte de la marge de sécurité $MR(X)$. Avec la proposition 3.41, on a démontré la nécessité de la présence d'une marge de sécurité positive. La prime majorée (et la marge de sécurité) est calculée à l'aide de différentes méthodes de calcul des primes.

Soit une v.a. X représentant les coûts couverts par un contrat d'assurance et dont l'espérance est $E[X] < \infty$. Au chapitre 4, on a vu que la prime pure pour un contrat d'assurance correspond à l'espérance $E[X]$ des coûts associés à un contrat d'assurance. Avec la proposition 3.41, on a démontré l'importance de charger une prime, dite la prime majorée $\Pi(X)$, qui est strictement supérieure à la prime pure. Le principe de calcul de la prime majorée est une règle visant à calculer cette prime pour un contrat d'assurance. Dans le calcul de la prime pure et de la prime majorée, on ignore les marges pour dépenses et les marges pour le profit. Dans cette section, on présente des propriétés désirables pour les principes de prime et on expose ensuite les principes de calcul de la prime majorée. On termine avec des exemples numériques.

Propriété 3.48 ***Marge de sécurité positive (P1)****. Selon ce principe, la prime majorée doit être supérieure à la prime pure* $\Pi(X) \geq E[X]$*.*

Comme il est démontré à la proposition 3.41, la prime majorée doit inclure une marge de sécurité positive pour éviter l'insolvabilité.

Propriété 3.49 ***Exclusion de marge de sécurité non justifiée (P2)****. Pour une constante* $a > 0$*, on dit avoir* $\Pi(a) = a$*.*

La prime ne doit pas inclure de marge injustifée dans le cas où les coûts pour un contrat correspondent à une valeur constante, puisque le contrat ne comporte pas de risque.

Propriété 3.50 ***Additivité (P3).*** *Soit* X_1*,* X_2 *deux risques indépendants. On doit avoir* $\Pi(X_1 + X_2) = \Pi(X_1) + \Pi(X_2)$*.*

Lorsque ce principe est satisfait, il n'y pas d'avantage (ou désavantage) pour un assuré ou pour la compagnie d'assurance à segmenter le risque couvert en plusieurs composantes de risque.

Propriété 3.51 ***Sous-additivité (P4)****. Soit* X_1*,* X_2 *deux risques. On doit avoir* $\Pi(X_1 + X_2) \leq \Pi(X_1) + \Pi(X_2)$*.*

Ce principe prévient qu'un individu ou une compagnie d'assurance partage un risque en deux et qu'il en tire avantage. De plus, la mutualisation des coûts de plusieurs contrats doit conduire à une réduction des primes demandées pour l'ensemble des contrats.

Propriété 3.52 ***Invariance d'échelle (P5)****. Pour une constante $a > 0$, on dit avoir $\Pi(aX) = a\Pi(X)$.*

Le changement d'échelle (p. ex. changement d'unité monétaire) ne doit pas avoir d'impact sur la valeur de la prime. Cette propriété est aussi appelée la propriété d'homogénéité.

Propriété 3.53 ***Invariance à la translation (P6)****. Pour une constante $a > 0$, on dit avoir $\Pi(X + a) = \Pi(X) + a$.*

Si l'on augmente les coûts associés au risque d'une constante, on s'attend à ce que la prime augmente d'un montant identique.

Propriété 3.54 ***Maximum (P7).*** *Si les coûts associés à un contrat ne peuvent excéder une valeur $x_{\max}$, alors on doit avoir $\Pi(X) \leq x_{\max}$.*

Si les coûts pour un contrat n'excède pas un montant $x_{\max}$, il serait injustifié que la prime majorée soit supérieur à ce montant.

Dans ce qui suit, on aborde les principaux principes de calcul de la prime majorée. La prime majorée, notée $\Pi(X)$, s'exprime comme la somme de la prime pure et de la marge pour le risque c.-à-d. $\Pi(X) = PP(X) + MR(X)$.

3.8.1 Principe de la valeur espérée

On définit la prime majorée $\Pi(X)$ par $\Pi(X) = (1+\kappa)\ E(X) = E(X) + \kappa E(X)$, où $\kappa > 0$, pour éviter la ruine certaine. On en déduit que la marge de sécurité $MR(X)$ est égale à $\kappa E(X)$. Le principe de la valeur espérée satisfait aux propriétés P1, P3, P4, P5. La propriété P2 n'est pas satisfaite. En effet, si $X = a$, alors $\Pi(X) = \Pi(a) = (1+\eta)\,a > a$. De plus,

$$\Pi(X + a) = (1+\eta)\,E[X] + (1+\eta)\,a > \Pi(X) + a,$$

ce qui implique que la propriété P6 n'est pas rencontrée. Ainsi, le principe est invariant au changement d'échelle (P5) mais n'est pas consistant (P6). La propriété P7 est satisfaite si κ n'excède pas $\frac{x_{\max}}{E[X]} - 1$, pour $x_{\max} < \infty$. Ce principe a pour inconvénient de ne pas tenir compte de la variabilité et de la nature spécifique de la v.a. X. Le principe est très simple d'application.

3.8.2 Principe de la variance

On définit $\Pi(X)$ par $\Pi(X) = E(X) + \kappa \mathrm{Var}(X)$, où $\kappa > 0$. Dans ce cas, la prime de sécurité $MR(X)$ est égale à $MR(X) = \kappa \mathrm{Var}(X)$. Les propriétés P1, P2, P3 et P6 sont satisfaites. La principe de la variance est additif dans le cas de risques X_1 et X_2 non corrélés. Le principe est sous-additif à la condition que les risques X_1 et X_2 soient négativement corrélés. Comme on a

$$\Pi(aX) = aE[X] + \kappa a^2 \mathrm{Var}(X) \neq a\Pi(X),$$

le principe de la variance n'est pas invariant au changement d'échelle. La propriété P7 est satisfaite si κ n'excède pas $\frac{x_{\max} - E[X]}{\mathrm{Var}(X)} - 1$, pour $x_{\max} < \infty$.

3.8.3 Principe de l'écart type

La prime majorée est obtenue avec $\Pi(X) = E(X) + \kappa\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$, où $\kappa > 0$. La marge de sécurité est donnée par $MR(X) = \kappa\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. On se doit de préciser que la valeur de κ change avec le principe de prime et également du nombre de contrats que l'assureur prévoit émettre. Les propriétés P1, P2 et P6 sont satisfaites. La principe de l'écart type n'est pas additif et n'est pas sous-additif. Puisque l'on a

$$\Pi(aX) = aE[X] + \kappa a\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = a\Pi(X),$$

le principe de l'écart type est invariant au changement d'échelle. La propriété P7 est satisfaite si κ n'excède pas $\frac{x_{\max} - E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} - 1$, pour $x_{\max} < \infty$.

3.8.4 Principe de la VaR

On obtient le montant de la prime majorée $\Pi(X)$ selon le principe de la VaR par $\Pi(X) = VaR_\kappa(X)$, où κ est élevé (p. ex.,$\kappa = 95$, 99, 99.5, 99.9 %). La marge de sécurité $MR(X)$ est définie par $MR(X) = VaR_\kappa(X) - E(X)$. Les propriétés 2, 5, 6 et 7 sont satisfaites. Comme on le sait, la VaR n'est pas une mesure sous-additive et par le fait même elle n'est pas additive. Pour certaines valeurs de κ, on a $VaR_\kappa(X) \leq E[X]$, ce qui conduit à introduire une marge de sécurité négative.

3.8.5 Principe de la TVaR

On obtient le montant de la prime majorée $\Pi(X)$ selon le principe de la TVaR par $\Pi(X) = TVaR_\kappa(X)$, où κ est élevé (p. ex.,$\kappa = 0.95$, 0.99, 0.995, 0.999). La marge de sécurité $MR(X)$ est définie par $MR(X) = TVaR_\kappa(X) - E(X)$. Toutes les propriétés sont satisfaites.

3.8.6 Approche top-down et principes adaptés de la VaR et de la TVaR

Dans les principes de la VaR et de la TVaR, on ne tient pas compte du nombre de contrats potentiels qui peuvent être émis. En se basant sur l'approche *top-down*, on adapte ces deux principes en déterminant la prime globale pour n risques que l'on répartit ensuite parmi les n risques. Lorsque les risques sont identiquement distribués, cela revient à appliquer les principes de la VaR ou de la TVaR avec la v.a. W_n plutôt que sur la v.a. X seulement où $W_n = \frac{X_1+...+X_n}{n}$, où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont identiquement distribuées $X_1 \sim ... \sim X_n \sim X$. L'expression de la prime majorée $\Pi(X)$ est donnée par $\Pi(X) = VaR_\kappa(W_n)$ ou $\Pi(X) = TVaR_\kappa(W_n)$, où κ est élevé (p. ex.,$\kappa = 0.95$, 0.99, 0.995, 0.999).

La prime calculée avec $VaR_\kappa(W_n)$ satisfait les propriétés 2, 5, 6 et 7, et la prime obtenue à l'aide de $TVaR_\kappa(W_n)$ satisfait à toutes les propriétés. Notamment, elle profite de façon significative de la mutualisation des risques. L'économie qui résulte de la mutualisation est $TVaR_\kappa(W_n) - TVaR_\kappa(X)$.

3.8.7 Principe exponentiel

On obtient le montant de la prime majorée $\Pi(X)$ selon le principe exponentiel par $\Pi(X) = \frac{1}{\kappa}\ln\{\mathcal{M}_X(\kappa)\}$ avec $\kappa > 0$. Le principe exponentiel satisfait à toutes les propriétés désirables.

On peut établir un lien entre le principe de la variance et le principe exponentiel. Le développement du logarithme de la fgm est

$$\ln E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = \sum_{m=1}^{\infty} \kappa_m \frac{t^m}{m!},$$

où les termes κ_m sont appelés les cumulants. Les termes κ_m sont définis par

$$\kappa_m = \left.\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \ln E\left[\mathrm{e}^{tX}\right]\right|_{t=0}.$$

On déduit que $\kappa_1 = E[X]$ et $\kappa_2 = \mathrm{Var}(X)$. On peut approximer la prime calculée selon le principe exponentiel par

$$\Pi(X) = \frac{1}{a}\ln E\left[\mathrm{e}^{aX}\right] \simeq \frac{1}{a}\left(aE[X] + \frac{a^2}{2!}\mathrm{Var}(X)\right) = E[X] + \frac{a}{2!}\mathrm{Var}(X),$$

et on reconnaît le principe de la variance.

3.8.8 Exemples numériques

[...]

3.9 Notes bibliographiques

Pour un exposé sur les mesures de risque et leurs propriétés, on consultera, p. ex., [Acerbi and Tasche, 2002], [Artzner et al., 1999], [McNeil et al., 2015] et [Denuit et al., 2006].

Voir p. ex., [Chaubey et al., 1998], [Daykin et al., 1993], [Denuit et al., 2004] et [Gerber, 1979] pour une synthèse sur les méthodesd'approximation basées sur les moments.

L'approximation par une loi lognormale est souvent appeléapproximation Fenton-Wilkinson et elle a été proposée par [Fenton, 1960] et [Marlow, 1967].

Les principaux résultats de la théorie des probabilités tels que le théorème central limite et la loi des grands nombres sont exposés dans tout livre de base sur la théorie des probabilités (voir, p. ex., [Grimmett et al., 2001] et [Ross, 2014a]). La variante du théorème central limite est fournie dans, p. ex., [Panjer and Willmot, 1992].

Pour un exposé général et classique sur les principes de primes, on peut consulter [Goovaerts et al., 1984]. On trouve une introduction récente sur le sujet dans [Young, 2014]. Les principes de primes sont aussi traités dans [Kaas et al., 2008] et [Rolski et al., 2009].

Code LaTeX : `chapitre_mecanismes_v4.tex`

Chapitre 4

Modélisation des risques non-vie

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les modèles de base utilisés pour décrire le comportement aléatoire d'un risque en actuariat pour une période fixe. Les coûts ou les pertes liés au risque sont représentés par la v.a. X. L'approche pour modéliser la v.a. X dépend du type de risque et de la nature de la perte qui peut être associée à ce risque.

On aborde dans un premier temps la modélisation de la v.a. X selon l'approche fréquence-sévérité où les coûts sont définis en fonction du nombre de sinistres et du montant d'un sinistre. Cette approche peut être utilisée par exemple pour modéliser, pour une période fixée, les coûts en sinistres d'un contrat d'assurance IARD ; les coûts en sinistres pour un contrat d'assurance en soins de santé ; ou le montant total des sinistres pour une ligne d'affaires. On examine les propriétés de ce modèle, notamment l'espérance, la variance, la fonction de répartition et l'évaluation des mesures de risque.

On présente les principales distributions pour le montant d'un sinistre et pour le nombre de sinistres. On aborde aussi certaines généralisations des principales lois de fréquence. On discute aussi de la classe de distributions pour les montants élevés de sinistres. On examine la modélisation des pertes liées aux risques financiers, par exemple, les pertes découlant d'une position sur les marchés financiers. On compare la modélisation des coûts dans le contexte de l'assurance à celle des pertes liées à un investissement sur les marchés financiers.

Dans tous les cas, l'actuaire a recours à des modèles pour décrire les risques actuariels. Dans la modélisation des risques actuariels, il doit à la fois y avoir un modèle assez simple pour qu'il soit aisément manipulable et assez élaboré afin de tenir compte de la complexité des risques actuariels analysés.

Dans le cas de l'assurance, il convient d'analyser les risques actuariels individuels puis d'examiner le risque actuariel global que représente le regroupement de ces contrats pour la compagnie d'assurance. Ces modèles jouent un rôle capital dans la compréhension de la mutualisation des risques notamment. Les modèles considérés dans ce chapitre se limitent à analyser les risques actuariels sur une courte période de temps, soit d'un an par exemple.

Les contextes d'application de l'assurance non vie sont, p. ex., l'assurance automobile, l'assurance habitation, l'assurance responsabilité, l'assurance maladie, la réassurance et l'assurance collective.

4.2 Modèle stochastique pour un risque X

4.2.1 Modèle général pour X

Selon le modèle général, on définit la v.a. X par une somme aléatoire

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, \ M > 0 \\ 0, \ M = 0 \end{cases},$$

où la v.a. discrète M représente le nombre de sinistres et la v.a. positive B_k correspond au montant du k-ième sinistre. La fonction de masse de probabilité et la fgp de M sont notées par f_M et $\mathcal{P}_M$. Les v.a. B_1, B_2, ... sont supposées indépendantes entre elles et indépendantes de la v.a. M. De plus, les v.a. B_1, B_2, ... sont supposées identiquement distribuées et on convient que $B_k \sim B$, pour $k \in \mathbb{N}^+$. La fonction de répartition et la fgm de B sont notées par F_B et M_B. Selon les hypothèses du modèle, le nombre de sinistres n'a pas d'influence sur les montants des sinistres. De plus, les montants de chaque sinistre ont le même comportement aléatoire et le montant du premier sinistre n'a pas d'incidence sur le montant du deuxième sinistre et ainsi de suite.

La v.a. X obéit à une loi dite composée. La v.a. M est appelée une v.a. de fréquence, de comptage ou de dénombrement. Le montant d'un sinistre est appelé sévérité ou gravité, d'où l'appellation fréquence-sévérité pour cette approche. Le choix de la loi pour la v.a. de fréquence M et de la loi pour le montant d'un sinistre B sont cruciaux. Les principales lois discrètes pour la v.a. M sont présentées en § 4.3 et § 4.7. On discute des principales lois continues pour la v.a. B utilisées en actuariat en § 4.4 et § 4.5. Dans les sous-sections qui suivent, on identifie les expressions de l'espérance, de la variance, de la fonction de répartition, de l'espérance tronquée, de la TVaR et de la fgm de la v.a. X.

4.2.2 Espérance de X

On identifie l'expression de l'espérance de X en conditionnant sur M et en utilisant la formule de l'espérance totale

$$E[X] = E_M[E[X|M]], \tag{4.1}$$

où $E[X|M=0] = 0$ et

$$E[X|M=k] = E[B_1 + ... + B_k] = k \times E[B] \ \ (k \in \mathbb{N}^+).$$

Ainsi, on déduit que

$$E[X|M] = M \times E[B]. \tag{4.2}$$

En remplaçant (4.2) dans (4.1), l'expression pour $E[X]$ est donnée par

$$E[X] = E[E[X|M]] = E[M \times E[B]] = E[M]E[B]. \tag{4.3}$$

Selon (4.3), l'espérance des coûts pour un risque ($E[X]$) correspond au produit du nombre espéré de sinistres ($E[M]$) et du montant espéré d'un sinistre ($E[B]$). En actuariat, dans le contexte de l'assurance, l'espérance de la v.a. X correspond à la prime pure.

4.2.3 Variance de X

Afin d'obtenir l'expression de la variance de X, on conditionne à nouveau sur la v.a. M en ayant recours à la formule de la variance totale

$$\mathrm{Var}(X) = E_M[\mathrm{Var}(X|M)] + \mathrm{Var}_M(E[X|M]) \tag{4.4}$$

où $\mathrm{Var}(X|M=0)$ et

$$\mathrm{Var}(X|M=k) = \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{k} B_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Var}(B_j) = k \times \mathrm{Var}(B) \ \ (k \in \mathbb{N}^+).$$

Alors, on a

$$\mathrm{Var}(X|M) = M \times \mathrm{Var}(B). \tag{4.5}$$

En remplaçant (4.5) ainsi que (4.2) dans (4.4), il en résulte que

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E[M \times \mathrm{Var}(B)] + \mathrm{Var}(ME[B]) \\ &= E[M]\,\mathrm{Var}(B) + \mathrm{Var}(M)\,(E[B])^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Selon (4.4) ou (4.6), la variance des coûts pour le risque $\mathrm{Var}(X)$ est égale à la somme de la variance des coûts liés aux montants des sinistres, soit $E[\mathrm{Var}(X|M)] = E[M]\,\mathrm{Var}(B)$, et de la variance des coûts liés au nombre de sinistres, soit $\mathrm{Var}(E[X|M]) = \mathrm{Var}(M)\,(E[B])^2$.

4.2.4 Fonction de répartition de X

La fonction de répartition de X est obtenue en conditionnant sur la v.a. M telle que

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(M = k)\Pr(X \leq x|M = k) \\ &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\Pr(B_1 + ... + B_k \leq x) \\ &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, F_{B_1+...+B_k}(x). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Si $\Pr(M = 0) > 0$, on note la présence d'une masse de probabilité à 0. Cette masse de probabilité est élevée pour des contrats individuels d'assurance non vie ou IARD (ex : automobile, habitation). Comme on le verra plus loin, l'expression (4.7) de F_X est intéressante lorsque l'on dispose d'une expression analytique pour $F_{B_1+...+B_n}$. Des exemples seront présentés dans le présent chapitre. Dans ce cas, la fonction de répartition F_X nous permet notamment de calculer la mesure de risque $VaR_\kappa(X)$. Généralement, on doit avoir recours à un outil d'optimisation pour la calculer.

4.2.5 Simulation de somme aléatoire

Soit X une v.a. définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où M est une v.a. discrète, $B_1, B_2, ...$ sont des v.a. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) et qui sont aussi indépendantes de M.

La procédure pour produire des réalisations de X est la suivante :

Algorithme 4.1 ***Simulation à partir d'une somme aléatoire***

1. ***Étape 1****. On simule une réalisation $M^{(j)}$ de la v.a. M.*
2. ***Étape 2****. Si $M^{(j)} = 0$, alors $X^{(j)} = 0$. Sinon on passe à l'étape 3.*
3. ***Étape 3****. On simule $M^{(j)}$ réalisations de B et on obtient $X^{(j)} = B_1^{(j)} + B_2^{(j)} + ... + B_{M^{(j)}}^{(j)}$.*

On répète pour $j = 1, 2, ..., m$.

On illustre cette méthode dans le prochain exemple.

Exemple 4.2 *Soit une v.a. $X \sim BNComp(r = 2, q = 0.5; F_B)$ avec $M \sim BinNég(2, 0.5)$ et $B \sim LN(4, 3^2)$. On dispose des réalisations suivantes de loi uniforme standard :*

j	1	2	3	4
$U^{(j)}$	0.0371	0.6234	0.3469	0.8976

On déduit que $M^{(1)} = F_M^{-1}(U^{(1)}) = 0$, ce qui implique $X^{(1)} = 0$. Ensuite, comme $M^{(2)} = F_M^{-1}(U^{(2)}) = 2$, il en résulte que

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= B_1^{(2)} + B_2^{(2)} = F_B^{-1}\left(U^{(3)}\right) + F_B^{-1}\left(U^{(4)}\right) \\ &= 16.758 + 2450.342 = 2467.100. \end{aligned}$$

□

4.2.6 Espérance tronquée de X

On conditionne sur M pour développer l'expression de l'espérance tronquée de X, soit

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq b\}}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(M=k)\, E\left[X \times 1_{\{X \leq b\}} | M=k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k \leq b\}}\right]. \end{aligned}$$

On déduit

$$E\left[X \times 1_{\{X > b\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k > b\}}\right]. \tag{4.8}$$

Il est possible d'évaluer (4.8) quand on possède une forme analytique pour $E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k > b\}}\right]$.

4.2.7 Mesure TVaR

En remplaçant (4.7) et (4.8) dans (3.4), l'expression de $TVaR_\kappa(X)$ devient

$$\begin{aligned} & TVaR_\kappa(X) \\ = & \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k > VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} \\ & + \frac{VaR_\kappa(X)\left(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa\right)}{1-\kappa}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

qui peut être évaluée à la condition que l'on puisse calculer explicitement

$$E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k > VaR_\kappa(X)\}}\right]$$

et $F_X(VaR_\kappa(X))$.

Supposons que la v.a. B est continue et strictement positive (c.-à-d. elle n'admet pas de masse de probabilité à 0). Alors la distribution de X est mixte avec une masse de probabilité à 0 et une partie continue pour $x > 0$. Si $\kappa < \Pr(M=0)$ alors $VaR_\kappa(X) = 0$. De plus, quand $\kappa > \Pr(M=0)$, cela implique que $VaR_\kappa(X) > 0$ de telle sorte que $F_X(VaR_\kappa(X)) = \kappa$. Il en découle que le deuxième terme dans (4.9) est égal à 0 dans les deux cas et que l'expression pour $TVaR_\kappa(X)$ devient

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k > VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa}. \tag{4.10}$$

Il est à noter que (4.10) est intéressante quand $B_1 + ... + B_k$ appartient à une famille de distributions qui est fermée sous la convolution, telle que la distribution gamma.

4.2.8 Fonction génératrice des moments

On suppose que la fgm de B existe, ce qui implique que la fgm de X existe aussi. Afin d'obtenir l'expression de la fgm de X, on conditionne sur la v.a. M

$$\mathcal{M}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = E_M\left[E\left[\mathrm{e}^{tX} | M\right]\right]. \tag{4.11}$$

Pour $M = 0$, $E\left[\mathrm{e}^{tX} | M = 0\right] = 1$ et pour $M \in \mathbb{N}^+$, on déduit

$$E\left[\mathrm{e}^{tX} | M = k\right] = E\left[\mathrm{e}^{t(B_1+...+B_k)}\right] = E\left[\mathrm{e}^{tB_1}\right] \times ... \times E\left[\mathrm{e}^{tB_k}\right]$$

car les v.a. B_1, ..., B_k sont indépendantes. Comme elles sont aussi identiquement distribuées, il s'ensuit que

$$E\left[\mathrm{e}^{tX}\,|M\right] = \mathcal{M}_B(t)^M. \tag{4.12}$$

On remplace (4.12) dans (4.11) et on obtient

$$\mathcal{M}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = E_M\left[\mathcal{M}_B(t)^M\right] = \mathcal{P}_M\left(\mathcal{M}_B(t)\right), \tag{4.13}$$

où $\mathcal{P}_M$ est la fgp de M. Étant donné le lien entre la fgp et la fgm d'une v.a, on peut écrire

$$\mathcal{M}_X(t) = \mathcal{M}_M\left(\ln \mathcal{M}_B(t)\right).$$

4.2.9 Transformée de Laplace-Stieltjes

On suppose que la v.a. B est positive, ce qui implique que la v.a. X est aussi positive. On conditionne sur la v.a. M afin d'obtenir l'expression de la T.L.S. de X, notée $\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right]$,

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] = E_M\left[E\left[\mathrm{e}^{-tX}\,|M\right]\right],\ t > 0. \tag{4.14}$$

Si $M = 0$, $E\left[\mathrm{e}^{tX}\,|M = 0\right] = 1$. Puis, quand $M = k$ pour $k \in \mathbb{N}^+$, on trouve

$$E\left[\mathrm{e}^{-tX}\,|M = k\right] = E\left[\mathrm{e}^{-t(B_1+...+B_k)}\right] = E\left[\mathrm{e}^{-tB_1}\right] \times ... \times E\left[\mathrm{e}^{-tB_k}\right],$$

car les v.a. B_1, ..., B_k sont indépendantes. Puisque ces v.a. sont aussi identiquement distribuées, il s'ensuit que

$$E\left[\mathrm{e}^{-tX}\,|M\right] = \mathcal{L}_B(t)^M. \tag{4.15}$$

On remplace (4.15) dans (4.14) et on obtient

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] = E_M\left[\mathcal{L}_B(t)^M\right] = \mathcal{P}_M\left(\mathcal{L}_B(t)\right),\ t > 0.$$

4.2.10 Fgp et somme aléatoire de v.a. iid

Soit une v.a. X définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k & ,\ M > 0 \\ 0, & ,\ M = 0 \end{cases},$$

où

- M est une v.a. discrète de fréquence ;
- $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ est une suite de v.a. positives iid définies sur $\mathbb{N}$, avec $B_k \sim B$; et
- $\underline{B}$ est indépendante de M.

Alors, la v.a. X prend des valeurs dans $\mathbb{N}$ avec

$$f_X(k) = \Pr(X = k),\ k \in \mathbb{N}.$$

La fgp de la v.a. X est

$$\mathcal{P}_X\left(t\right) = \mathcal{P}_M\left(\mathcal{P}_B\left(t\right)\right).$$

L'objectif est de calculer les valeurs de f_X avec les fgp, tel qu'illustré dams l'exemple ci-dessous.

Exemple 4.3 *Soit les v.a.* $M \sim Binom\,(2, q)$ *et* $B \in \{0, 1, 2, 3\}$ *avec*

$$\Pr\left(B = k\right) = b_k,\ k = 0, 1, 2, 3,$$

et

$$\mathcal{P}_B\left(t\right) = \sum_{k=0}^{3} b_k t^k.$$

La fgp de X est

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X(t) &= \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t)) \\ &= (1-q+q\mathcal{P}_B(t))^2 \\ &= (1-q)^2 + 2(1-q)\,q\mathcal{P}_B(t) + q^2\mathcal{P}_B(t)^2 .\end{aligned}$$

Ensuite, la fgp de X devient

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X(t) &= (1-q)^2 \\ &\quad +2(1-q)\,q \times \sum_{k=0}^{3} b_k t^k \\ &\quad +q^2 \times \left(\sum_{k=0}^{3} b_k t^k\right)^2 .\end{aligned}$$

Puis, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X(t) &= (1-q)^2 \\ &\quad +2(1-q)\,q \times \sum_{k=0}^{3} b_k t^k \\ &\quad +q^2 \times \sum_{k=0}^{6} c_k t^k\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{6} c_k t^k &= b_0^2 + 2b_1b_0t + \left(2b_2b_0 + b_1^2\right)t^2 + (2b_3b_0 + 2b_2b_1)\,t^3 \\ &\quad + \left(2b_3b_1 + b_2^2\right)t^4 + 2b_3b_2t^5 + b_3^2t^6.\end{aligned}$$

Finalement, en réarrangeant les termes, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X(t) &= \sum_{k=0}^{6} f_X(k)\,t^k \\ &= (1-q)^2 + 2(1-q)\,q \times b_0 + q^2b_0^2 \\ &\quad + \left(2(1-q)\,q \times b_1 + q^2 \times (2b_1b_0)\right) \times t \\ &\quad + \left(2(1-q)\,q \times b_2 + q^2 \times \left(2b_2b_0 + b_1^2\right)\right) \times t^2 \\ &\quad + \left(2(1-q)\,q \times b_3 + q^2 \times (2b_3b_0 + 2b_2b_1)\right) \times t^3 \\ &\quad + q^2 \times \left(2b_3b_1 + b_2^2\right) \times t^4 \\ &\quad + q^2 \times 2b_3b_2 \times t^5 \\ &\quad + q^2 \times b_3^2 \times t^6.\end{aligned}$$

L'approche décrite à l'exemple 4.3 est applicable à la condition que $\mathcal{P}_M$ et $\mathcal{P}_B$ soient des polynômes de degrés qui ne sont pas trop élevés. Il est possible d'établir une procédure plus efficace. Cet exemple a permis d'illustrer le calcul des valeurs de la fonction de masse de probabilité de S, selon une approche dite de la "force brute" (*brute force*, en anglais). L'objectif des algorithmes récursifs (voir §11.6 au chapitre 11) est d'identifiquer (et calculer) ces coefficients de façon efficace.

4.3 Distributions de fréquence

En actuariat, les principales lois pour la v.a. de fréquence sont les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative. Les lois de X correspondantes sont alors appelées lois Poisson composée, binomiale composée et binomiale négative composée. Comme la loi de Poisson est au cœur de la modélisation des risques en assurance IARD, on s'intéresse aussi aux extensions de cette loi obtenues par mélange. Pour cette raison, on décrit les lois Poisson-gamma (qui est aussi la loi binomiale négative), Poisson-inverse gaussienne et Poisson-lognormale. Pour chaque loi de fréquence, on indique les expressions de l'espérance, de la variance et de la fgm de la loi composée correspondante, qui sont obtenues à partir de (4.2), (4.6) et (4.13).

4.3.1 Loi de Poisson

La loi de Poisson est fondamentale dans la modélisation du nombre de sinistres pour les risques en assurance IARD. Elle constitue en quelque sorte la loi de base. L'espérance et la variance de la loi de Poisson sont égales. Cette propriété est appelée l'équidispersion.

Lorsque $M \sim Poisson\,(\lambda)$, il en découle que la v.a. X obéit à une loi Poisson composée avec les paramètres λ et F_B, notée $X \sim PComp\,(\lambda; F_B)$. L'espérance de X est $E[X] = \lambda E\,[B]$ et l'expression de la variance de X est

$$\mathrm{Var}\,(X) = \lambda \mathrm{Var}\,(B) + \lambda E\,[B]^2 = \lambda E\left[B^2\right].$$

La fgm de X est $\mathcal{M}_X\,(t) = \mathrm{e}^{\lambda(M_B(t)-1)}$.

Le moment centré d'ordre 3 est déterminé avec la relation (1.8) et le moment d'ordre 3 donné par

$$E\left[X^3\right] = \lambda E[B^3] + 3\lambda^2 E[B]E[B^2] + \lambda^3 E^3[B],$$

que l'on obtient en dérivant $\mathcal{M}_X\,(t)$ à 3 reprises. On obtient

$$E\left[(X - E\,[X])^3\right] = \lambda E[B^3]$$

à partir duquel on détermine l'expression suivante pour le coefficient d'asymétrie :

$$\gamma\,(X) = \frac{E\left[(X - E\,[X])^3\right]}{(\mathrm{Var}\,(X))^{3/2}} = \frac{E[B^3]}{\sqrt{\lambda E[B^2]^3}} > 0.$$

On constate que la distribution Poisson composée est toujours positivement asymétrique.

4.3.2 Loi binomiale

Soit $M \sim Bin\,(n, q)$. Il en résulte que X obéit à une loi binomiale composée avec les paramètres n, q et F_B, notée $X \sim BComp\,(n, q; F_B)$. L'espérance de X est $E[X] = nqE\,[B]$ et la variance de X est donnée par

$$\mathrm{Var}\,(X) = nq\mathrm{Var}\,(B) + nq\,(1-q)\,E\,[B]^2.$$

La fgm de X est

$$\mathcal{M}_X\,(t) = (1 - q + q\mathcal{M}_B\,(t))^n.$$

En fixant $nq = \lambda$, la loi binomiale tend vers la loi de Poisson de paramètre λ lorsque le nombre n tend vers ∞. En effet, soit la v.a. $M_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$. Alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{M_n}\,(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\lambda\,(t-1)}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)},$$

qui correspond à la fgp de la loi de Poisson.

Le moment centré d'ordre 3 est donné par

$$E\left[(X - E\,[X])^3\right] = n(qE\left[B^3\right] - 3q^2 E\left[B^2\right] E\,[B] + 2q^3 E\,[B]^3), \tag{4.16}$$

avec lequel on obtient le coefficient d'asymétrie $\gamma(X)$. En réarrangeant les termes de l'équation (4.16), on obtient

$$E\left[(X-E[X])^3\right] = E[M] \times \left\{ \begin{array}{c} E\left[(B-E[B])^3\right] + 3(1-q)E[B]\operatorname{Var}[B] \\ +(1-q)(1-2q)E[B]^3 \end{array} \right\}. \tag{4.17}$$

Selon (4.17), $\gamma(X)$ est positif si $E\left[(B-E[B])^3\right] > 0$, propriété souvent satisfaite pour la distribution d'un montant de sinistre (s'il existe), et si $q < 0.5$, ce qui est souvent les contextes d'application en actuariat.

4.3.3 Loi binomiale négative

Soit $M \sim BinNég(r,q)$. On en déduit que la v.a. X obéit à une loi binomiale négative composée avec les paramètres r, q et F_B, notée $X \sim BNComp(r,q;F_B)$. L'espérance et la variance de X sont respectivement

$$E[X] = r\frac{1-q}{q}E[B]$$

et

$$\operatorname{Var}(X) = r\frac{1-q}{q^2}E[B]^2 + r\frac{1-q}{q}\operatorname{Var}(B).$$

La fgm de X est $\mathcal{M}_X(t) = \left(1 - \frac{1-q}{q}(\mathcal{M}_B(t)-1)\right)^{-r}$.

Le moment centré d'ordre de X est

$$\begin{aligned} E\left[(X-E[X])^3\right] &= r\frac{(1-q)}{q}E\left[B^3\right] \\ &\quad +3r\frac{(1-q)^2}{q^2}E\left[B^2\right] \\ &\quad +E[B] + 2r\frac{(1-q)^3}{q^3}E[B]^3. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Puisque (4.18) est toujours positif, on constate que la loi binomiale négative composée possède toujours une asymétrie positive.

4.3.4 Comparaison des variances des trois lois composées

Pour les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative, on sait que l'on a respectivement $\operatorname{Var}(M) = E[M]$, $\operatorname{Var}(M) \leq E[M]$ et $\operatorname{Var}(M) \geq E[M]$. On compare les variances de la loi binomiale composée et de la loi binomiale négative composée à la variance de la loi Poisson composée. Pour la binomiale composée, on a

$$\operatorname{Var}(X) = nq\left(\operatorname{Var}(B) + (1-q)E[B]^2\right) \leq nqE\left[B^2\right].$$

Pour la loi binomiale négative composée, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X) &= r\frac{1-q}{q^2}E[B]^2 + r\frac{1-q}{q}\operatorname{Var}(B) \\ &= r\frac{1-q}{q}\left(\frac{1}{q}E[B]^2 + \operatorname{Var}(B)\right) \geq r\frac{1-q}{q}E[B^2]. \end{aligned}$$

Par conséquent, si les paramètres des trois lois de fréquence pour M sont fixés de telle sorte que leur espérance est identique et si la loi de B est identique pour les trois lois composées, on constate que

$$E\left[X^{BComp}\right] = E\left[X^{PComp}\right] = E\left[X^{BNComp}\right]$$

et

$$\operatorname{Var}\left(X^{BComp}\right) \leq \operatorname{Var}\left(X^{PComp}\right) \leq \operatorname{Var}\left(X^{BNComp}\right).$$

4.4 Distributions du montant d'un sinistre

Le choix de la distribution du montant d'un sinistre est crucial dans la modélisation du risque X. En actuariat, on a généralement recours à une loi continue avec un support compris dans $\mathbb{R}^+$ pour modéliser le comportement aléatoire du montant d'un sinistre. Dans la majorité des contextes d'application en assurance dommage et en assurance maladie, les distributions des montants de sinistre possèdent une asymétrie positive.

Les principales lois considérées pour le montant d'un sinistre sont les lois exponentielle, gamma, lognormale et Pareto. Il y a aussi les lois Burr, Weibull (avec $\tau \in]0,1[$), log-logistique, F-généralisée et inverse-gaussienne.

Des lois construites à l'aide de mélange telles que la loi mélange d'exponentielles et la loi mélange d'Erlang sont aussi utilisées.

Dans la présente section, on présente brièvement les principales lois pour modéliser le montant d'un sinistre. Les principales caractéristiques de ces lois sont fournies en annexe. Les expressions de la fonction quantile, de la VaR, de la TVaR, de la fonction *stop-loss* et de la fonction d'excès-moyen sont développées au chapitre 1.

Le classement des distributions du montant d'un sinistre selon leur comportement dans la queue, c.-à-d. pour les valeurs élevés de montant de sinistre, est examiné en § 4.5.

4.4.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle est une loi fondamentale en actuariat et elle possède de nombreuses propriétés intéressantes. Elle sert souvent de loi de référence par rapport aux autres lois continues utilisées pour la description du comportement d'un montant de sinistre. Elle est définie en termes d'un seul paramètre. Son mode est à 0 et la fonction d'excès moyen est une constante. Son coefficient d'asymétrie est égal à 2. En supposant $B \sim Exp(\beta)$, il est aussi possible d'obtenir des expressions analytiques de quantités définies en fonction de X, notamment la fonction de répartition, la TVaR et la prime *stop-loss* associées à X. En revanche, il est rare que la loi exponentielle soit utilisée directement pour modéliser un montant de sinistre.

La propriété suivante est propre à la loi exponentielle et elle est appelée la propriété sans mémoire.

Proposition 4.4 *Soit une v.a. $X \sim Exp(\beta)$. On définit la v.a. $W(d) = (X-d)\,|X > d$, correspondant à l'excédent de la v.a. X par rapport à d sachant que X dépasse d. Alors, $W(d) \sim Exp(\beta)$.*

Preuve. On identifie la distribution de $W(d)$ à partir de sa fonction de survie qui est donnée par

$$\begin{aligned}\overline{F}_{W(d)}(x) &= \Pr(W(d) > x) = \Pr((X-d) > x | X > d) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\beta(x+d)}}{\mathrm{e}^{-\beta d}} = \mathrm{e}^{-\beta x}.\end{aligned}$$

■

On mentionne aussi la propriété suivante relative au minimum de n v.a. indépendantes de loi exponentielle.

Proposition 4.5 *Soit des v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ de loi exponentielle avec paramètres $\beta_i > 0$ pour $i = 1, ..., n$. Alors, la v.a. $T_n = \min(X_1; ...; X_n)$ obéit aussi à une loi exponentielle de paramètre $\beta_1 + ... + \beta_n$.*

Preuve. La fonction de survie de T_n est donnée par

$$\begin{aligned}\overline{F}_{T_n}(x) &= \Pr(\min(X_1; ...; X_n) > x) = \Pr(X_1 > x, ..., X_n > x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_i > x) = \mathrm{e}^{-(\beta_1 + ... + \beta_n)x},\end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat désiré. ■

Cette propriété est utilisée notamment pour la contruction de la loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin au chapitre 13.

Illustration 4.1 – Valeurs de $f_B(x)$ oÃ^1 $B \sim Ga(\alpha, \frac{\alpha}{5})$, pour $\alpha = 0.5$, 1, 5 et 100.

4.4.2 Lois gamma et Erlang

La loi gamma est une généralisation de la loi exponentielle. Avec ses deux paramètres α et β, elle offre plus de flexibilité dans la modélisation du montant d'un montant de sinistre. Si $\alpha > 1$, son mode est supérieur à 0 et sa fonction d'excès moyen est décroissante. Si $0 < \alpha < 1$, le mode se trouve à 0 et la fonction d'excès moyen est croissante. La loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma avec $\alpha = 1$.

Dans le graphique de la figure 4.1, on représente la fonction de densité de la loi gamma pour des valeurs de $\alpha = 0.5$, 1, 5, et 100 et $\beta = \frac{\alpha}{5}$ tel que $E[B] = 5$.

De même que la loi exponentielle, on obtient des expressions analytiques de F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$ lorsque le montant d'un sinistre obéit à une loi gamma. Ces expressions sont présentées dans la prochaine proposition.

Proposition 4.6 *Supposons que $B \sim Gamma(\alpha, \beta)$. Alors, on déduit*

$$F_X(x) = f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) H(x; \alpha k, \beta), \tag{4.19}$$

$$E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) \frac{k\alpha}{\beta} \overline{H}(b; \alpha k + 1, \beta) \tag{4.20}$$

et

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) \frac{k\alpha}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(X); \alpha k + 1, \beta). \tag{4.21}$$

□

Preuve. Dans le cas où $B \sim Gamma(\alpha, \beta)$ avec $H(x; \alpha, \beta)$, on sait que $B_1 + ... + B_k \sim Gamma(\alpha k, \beta)$. Alors, on remplace $F_{B_1+...+B_k}(x)$ par $H(x; \alpha k, \beta)$ dans (4.7) et on obtient (4.19). De plus, en remplaçant

$$E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k>b\}}\right]$$

par

$$\frac{k\alpha}{\beta}\overline{H}\left(b;\alpha k+1,\beta\right)$$

dans (4.8) et (4.10), on obtient (4.20) et (4.21). ■

Remarque 4.7 *La valeur de $VaR_\kappa(X)$ est calculée à partir de (4.19) en utilisant un outil d'optimisation.*

La loi Erlang est aussi un cas particulier de la gamma avec $\alpha \in \mathbb{N}^+$, ce qui implique que sa fonction de répartition a la forme analytique suivante :

$$F_X(x) = H(x;n,\beta) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\beta x)^j}{j!},\ x \in \mathbb{R}^+.$$

Ce n'est pas le cas lorsque le paramètre α de la loi gamma n'est pas entier. Bien que l'on n'utilise pas directement la loi Erlang dans la modélisation de la distribution d'un montant de sinistre, elle intervient fréquemment d'un point de vue calculatoire.

On illustre les résultats de la proposition 4.6 dans le prochain exemple.

Exemple 4.8 *Soit une v.a. $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ où $\lambda = 1.4$ et $B \sim Gamma\left(\alpha = 1.8, \beta = 1000^{-1}\right)$, avec $E[X] = 2520$. On obtient les valeurs suivantes de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$:*

κ	$VaR_\kappa(X)$	$TVaR_\kappa(X)$
0	0	2520
0.5	1834.662	4521.468
0.95	7767.176	9872.831
0.99	11 175.341	13 127.725
0.995	12 558.726	14 464.324

□

4.4.3 Loi lognormale

La loi lognormale est fréquemment utilisée en actuariat, notamment pour la modélisation des montants de sinistres dans la modélisation des montants de sinistres en assurance IARD et en gestion quantitative des risques. Son mode est supérieur à 0 et son coefficient d'asymétrie est positif. Sa fonction d'excès moyen est croissante. Avec ses deux paramètres, elle possède une très grande flexibilité pour la modélisation.

À la figure 4.2, on présente les graphiques de la fonction de densité et de la VaR de loi lognormale pour trois couples de paramètres (μ, σ). Dans les trois cas, les valeurs des paramètres ont été choisis de telle sorte que les 3 espérances soient identiques.

Si un montant d'un sinistre obéit à une loi lognormale, il n'est pas possible d'obtenir des expressions analytiques de F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$. Toutefois, il est aisé d'appliquer les approches décrites aux chapitres 2 et 11 pour les évaluer approximativement.

4.4.4 Loi Weibull

Avec ses deux paramètres τ et β, la loi Weibull est une généralisation de la loi exponentielle. Si $\tau > 1$, elle est utile dans la modélisation des durées de vie. Si $\tau < 1$, son mode se trouve à 0, son coefficient d'asymétrie est positif et sa fonction d'excédent moyen est croissante. Alors, avec $0 < \tau < 1$, elle peut être considérée pour modéliser la distribution d'un montant de sinistre. En revanche, si cette distribution est choisie, il n'est pas possible d'obtenir des expressions analytiques de F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$. Dans ce cas, il est conseillé d'appliquer les approches décrites aux chapitres 2 et 11 pour les évaluer approximativement.

La loi exponentielle correspond à un cas particulier de la loi Weibull avec $\tau = 1$.

4.4.5 Lois Pareto, Burr et F-généralisée

La loi de Pareto est aussi une loi fondamentale en actuariat pour la modélisation des montants de sinistres. Elle possède 2 paramètres et elle est fréquemment utilisée pour la modélisation des sinistres de montants

Illustration 4.2 – Valeurs de la la fonction de densité et de la VaR de $X \sim LN(\mu, \sigma)$ pour les couples suivants de (μ, σ) : $\left(2.375, \frac{1}{2}\right)$ (ligne avec petits traits), $(2, 1)$ (ligne continue) et $(0.875, 1.5)$ (ligne pointillée). Pour les 3 couples, l'espérance de X est 12.1825.

élevés. Avec un mode se trouvant à 0, son espérance existe si $\alpha > 1$ et sa variance existe si $\alpha > 2$. Le moment d'ordre n existe à la condition que $\alpha > n$. Parmi ses caractéristiques importantes, on mentionne aussi que sa fonction d'excédent moyen est linéaire et croissante. À la section 1.15, on démontre que la loi Pareto peut être représentée comme un mélange de lois exponentielles où la loi mélange est gamma.

Les distributions Burr et F-généralisée sont deux généralisations de la loi Pareto. Leurs trois paramètres permettent notamment plus de flexibilité que la loi Pareto dans la modélisation, offrant la possibilité d'un mode supérieur à 0. Tout comme la loi Pareto, elles sont utilisées pour la modélisation de montants de sinistres pouvant prendre des valeurs élevées. Elles font partie de la famille de lois ayant un comportement de type Pareto. La loi Burr peut être représentée comme un mélange de lois Weibull où la v.a. de mélange est de loi gamma. Quant à elle, la loi F-généralisée peut être représentée comme un mélange de lois gamma et la v.a. de mélange est aussi gamma.

On ne peut obtenir des expressions analytiques de F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$ si le montant d'un sinistre obéit à une loi Pareto, Burr ou F-généralisée. Malgré cet inconvénient, on peut évaluer approximativement ces quantités en utilisant les approches décrites aux chapitres 2 et 11.

4.4.6 Lois mélanges d'exponentielles et d'Erlang

Les lois obtenues par mélange permettent une plus grande flexibilité dans la modélisation de la distribution d'un montant de sinistre. Souvent, l'utilisation de mélange conduit à des lois de type *heavy tailed*. Il existe des lois avec mélanges finis, telles que la loi mélange d'exponentielle, des lois avec mélanges dénombrables, telles que la loi mélange d'Erlang, et des lois avec mélanges non dénombrables. À la section 1.15, on présente un exemple de cette troisième catégorie où il est démontré que la loi Pareto est un mélange non dénombrable de lois exponentielles. La loi Pareto tend vers la loi exponentielle de paramètre β lorsque le paramètre α de la loi Pareto tend vers ∞ tout en satisfaisant la contrainte que $\frac{\alpha}{\lambda-1} = \frac{1}{\beta}$.

La loi mélange d'exponentielle possède un mode à 0 et elle peut être une candidate dans la modélisation d'un montant de sinistre. Son coefficient de variation est toujours supérieur à 1. Au chapitre 11, on obtient des expressions analytiques pour F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$ pour la loi mélange d'exponentielle.

La loi mélange d'Erlang offre une grande flexibilité dans la modélisation. Cette loi comprend la loi exponentielle et la loi Erlang comme cas particulier. Il est aussi possible de représenter un loi mélange d'exponentielles comme une loi mélange d'Erlang. De plus, il est possible d'approximer toute distribution avec support positif par une loi mélange d'Erlang. Si on modélise un montant de sinistre par une loi mélange d'Erlang, on obtient des expressions analytiques pour F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$. On examine de façon plus détaillée les propriétés de la loi mélange d'Erlang au chapitre 11.

Illustration 4.3 – Courbes de f_{B_1}, f_{B_2} et f_{B_3} où $B_1 \sim LN\left(\ln(3) - \frac{\ln(3)}{2}, \ln(3)\right)$, $B_2 \sim Ga(1/2, 1/6)$ et $B_3 \sim Pa(3, 6)$.

4.4.7 Comparaison des lois gamma, lognormale et de Pareto

Dans le prochain exemple, on compare les lois gamma, lognormale et de Pareto dont les 2 paramètres sont fixés de telle sorte que leur espérance et leur variance soient identiques. On illustre notamment que l'espérance et la variance d'une v.a. n'offre qu'une connaissance partielle et très limitée du comportement aléatoire de cette dernière, car il existe une panoplie de lois satisfaisant ces deux contraintes.

Exemple 4.9 *Soit des v.a. B_1, B_2 et B_3 représentant le montant d'un sinistre dont l'espérance et la variance sont 3 et 18 où*

$$B_1 \sim LN\left(\ln(3) - \frac{\ln(3)}{2}, \ln(3)\right),$$

$B_2 \sim Gamma(1/2, 1/6)$ et $B_3 \sim Pareto(3, 6)$. D'après le graphique de l'illustration 4.3, il est clair que leurs fonctions de densité sont très différentes.

4.5 Distributions de sinistres *light* et *heavy tailed*

En actuariat, on a l'habitude de classifier les distributions à support positif pour les montants de sinistres en termes de distributions *light* et *heavy tailed*. Les distributions *heavy tailed* sont importantes pour modéliser des sinistres avec montants élevés, en particulier en réassurance. Généralement, on retrouve les distributions Pareto, lognormale, Weibull avec paramètre $\tau \in]0, 1[$, Burr, F-généralisée et log-logistique au sein de cette classe. Les distributions exponentielle, gamma et Weibull avec paramètre $\tau \in [1, \infty)$ font partie de la classe des distributions *light tailed*.

Il existe quelques critères pour établir la classification.

4.5.1 Existence de la fgm

Les distributions dont la fgm. n'existe pas sont des distributions *heavy tailed*, alors que celles dont la fgm. existe font partie de la classe des distributions *light tailed*. Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F_X. On dit que F_X appartient à la classe des distributions *heavy tailed* si on a

$$\lim_{x \to \infty} \mathrm{e}^{rx} \overline{F}_X(x) \to \infty,$$

pour tout $r > 0$. Autrement, F_X fait partie de la classe des distributions *light tailed* si on a

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{rx}\overline{F}_X(x) < \infty,$$

pour tout $r > 0$.

Selon ce critère, les distributions Pareto, lognormale, Weibull avec paramètre $\tau \in]0,1[$, Burr, F-généralisée et log-logistique sont *heavy tailed* alors que les distributions exponentielle, gamma et Weibull paramètre $\tau \in [1,\infty)$ sont *light tailed*.

4.5.2 Fonction d'excès-moyen

On peut aussi recourir à la fonction d'excès-moyen définie par $e_X(d) = E[X-d|\,X>d] = \pi_X(d)\overline{F}_X(d)^{-1}$. Si $\lim_{d\to\infty} e_X(d)$ tend vers ∞, alors la distribution appartient à la classe des distributions *heavy tailed*. Lorsque $\lim_{d\to\infty} e_X(d)$ tend vers une constante, la distribution est *light tailed*. La fonction d'excès-moyen de la loi exponentielle est une constante peu importe la valeur de d, ce qui en fait une distribution *frontière*.

À nouveau, en se fondant sur ce critère, les distributions Pareto, lognormale, Weibull avec paramètre $\tau \in]0,1[$, Burr, F-généralisée et log-logistique sont *heavy tailed* alors que les distributions gamma et Weibull avec paramètre $\tau \in [1,\infty)$ sont *light tailed*.

4.5.3 Distribution sub-exponentielle

On dit que la distribution de X est sub-exponentielle si, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\Pr(X_1 + ... + X_n > x) \sim n\overline{F}_X(x), \text{ quand } x \to \infty, \tag{4.22}$$

où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont iid et $X_i \sim X$ pour $i = 1, ..., n$.

Ce critère est équivalent à

$$\Pr(X_1 + ... + X_n > x) \sim \Pr(\max(X_1; ...; X_n) > x), \text{ quand } x \to \infty,$$

ce qui revient à dire que le comportement du sinistre le plus élevé explique en grande partie le comportement de l'ensemble du portefeuille. En se basant sur ce critère, les distributions citées comme *heavy tailed* sont aussi sub-exponentielles.

Soit une v.a. X obéissant à une loi composée en fonction de la v.a. de fréquence M et de la v.a. du montant d'un sinistre B. Si la distribution de la v.a. B est sub-exponentielle, cela implique que

$$\overline{F}_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\,\overline{F}_{B_1+...+B_k}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\,k\overline{F}_B(x) = E[M]\,\overline{F}_B(x), \tag{4.23}$$

quand $x \to \infty$. En d'autres termes, le comportement aléatoire de X pour les valeurs élevées de x est grandement expliqué par le montant du sinistre le plus élevé. Ce résultat asymptotique est examiné à l'exemple 11.50.

4.6 Approches indemnitaire et forfaitaire

À la section 4.2, on a présenté un modèle général pour modéliser la v.a. X. Si M obéit à une loi Bernoulli (qui est un cas particulier de la loi binomiale), on convient de dire que la v.a. X est modélisée selon l'approche indemnitaire ou forfaitaire

$$X = M \times B = \begin{cases} B, & M = 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases}.$$

D'un point de vue mathématique, les deux approches sont identiques. Seule l'interprétation de chacune d'elles diffère.

4.6.1 Approche indemnitaire

Selon l'approche indemnitaire, on suppose qu'un seul événement (sinistre ou perte) peut survenir pendant une période. Les coûts liés à l'événement fortuit sont définis par une v.a. positive B. Cette approche peut être appliquée pour décrire les coûts d'un contrat d'assurance vie temporaire 1 an, les coûts du volet de la protection incendie d'un contrat d'assurance habitation ou les pertes liées à un titre avec risque de défaut.

Les expressions (4.7), (4.2) et (4.6) de la fonction de répartition, de l'espérance et de la variance de X deviennent

$$F_X(x) = 1 - q + qF_B(x), \ x \in \mathbb{R}^+, \tag{4.24}$$

$E[X] = qE[B]$ et $\mathrm{Var}(X) = q\mathrm{Var}(B) + q(1-q)E[B]^2$. On déduit de (4.24) une expression analytique pour la mesure $VaR_\kappa(X)$ qui est donnée par

$$VaR_\kappa(X) = \begin{cases} 0, & 0 < \kappa < 1-q \\ VaR_{\frac{\kappa-(1-q)}{q}}(B), & 1-q < \kappa < 1 \end{cases}.$$

L'expression (4.8) de l'espérance tronquée devient

$$E\left[X \times 1_{\{X \le d\}}\right] = \Pr(I=1)\, E\left[B \times 1_{\{B \le d\}}\right] = qE\left[B \times 1_{\{B \le d\}}\right],$$

et, de la même façon, on obtient

$$E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] = qE\left[B \times 1_{\{B > d\}}\right].$$

À partir de (4.9), on déduit l'expression suivante pour $TVaR_\kappa(X)$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{qE\left[B \times 1_{\{B>b\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(F_X\left(\left(VaR_\kappa(X)\right)\right) - \kappa\right)}{1-\kappa}.$$

Dans les deux exemples qui suivent, on considère le cas particulier d'un contrat d'assurance vie temporaire 1 an.

Exemple 4.10 *Pour un contrat d'assurance vie temporaire 1 an, les coûts correspondent à la prestation en cas de décès et ils sont nuls si aucun décès ne survient. On définit la v.a. X par $X = bI$, où $I \sim Bern(q)$ et la constante b correspond au montant de prestation à verser en cas de décès. La v.a. X peut prendre les valeurs 0 ou b avec les probabilités $\Pr(X=0) = \Pr(I=0) = 1-q$ et $\Pr(X=b) = \Pr(I=1) = q$. L'espérance et la variance des coûts sont données par $E[X] = bE[X] = bq$ et $\mathrm{Var}(X) = b^2\mathrm{Var}(I) = b^2q(1-q)$. La f.g.m. de la v.a. X est donnée par $\mathcal{M}_X(t) = 1 - q + qe^{bt}$. Il est à noter que la probabilité de décès dépend des différentes caractéristiques de l'assuré telles que l'âge, le sexe, les habitudes de vie, etc.* □

Exemple 4.11 *Un contrat d'assurance vie temporaire 1 an est émis à un individu âgé de 50 ans. La probabilité de décès à 50 ans est $q = 0.0073$. La prestation de décès est de 100 000\$. (a) Définir X. (b) Trouver $E[X]$. (c) Trouver $Var(X)$. (d) Trouver la fonction de masse de probabilité de X.*

Solution 4.12 *(a) $X = 100000I$ où $I \sim Bern(q = 0.0073)$. (b) $E[X] = bq = (100000)(0.0073) = 730$. (c)*

$$\begin{aligned} Var(X) &= b^2q(1-q) \\ &= (100000)^2(0.0073)(0.9927) \\ &= 7.246\,7 \times 10^7. \end{aligned}$$

(d)

$$\Pr(X=x) = \begin{cases} 0.9927, & si\ x = 0\ (très\ élevée) \\ 0.0073, & si\ x = 100000. \end{cases}$$

Exemple 4.13 *On considère le volet incendie d'un contrat d'assurance habitation. La valeur de la maison est de $b = 300000$. On suppose qu'au plus un incendie peut se produire par année avec $q = 0.1$. En cas*

d'incendie, on a

$$B = bU,$$

où U est la proportion du dommage à la suite de l'incendie et $f_U(y) = 3y^2$, $0 \leq y \leq 1$. La variable aléatoire X représente les coûts pour le contrat.(a) Trouver $E[X]$. (b) Trouver $Var(X)$. (c) Trouver l'expression de $F_X(y)$. (d) Trouver la probabilité que les coûts soient supérieurs à 200 000\$. (e) Trouver la fonction de densité de X.

Solution 4.14 *(a)*

$$\begin{aligned} E[X] &= E[I]\,E[B] \\ &= qE[B] \\ &= (0.1)\,E[B] \end{aligned}$$

$$E[B] = E[bU] = bE[U]$$

$$\begin{aligned} E[U] &= \int_0^1 x f_U(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\left(3x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{3x^4}{4}\Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[B] &= (300000)\left(\frac{3}{4}\right) = 225000 \\ E[X] &= (0.1)\,(225000) = 22500 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[I]\,Var(B) + Var(I)\,E^2[B] \\ &= qVar(B) + q(1-q)E^2[B] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(B) &= Var(bU) \\ &= b^2 Var(U) \\ &= b^2(E\left[U^2\right] - E^2[U]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[U^2\right] &= \int_0^1 \left(x^2\right)\left(3x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{3x^5}{5}\Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\,(U) &= \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{3}{5} - \frac{9}{16} \\ &= \frac{3}{80} \end{aligned}$$

$$Var\,(B) = (300000)^2 \left(\frac{3}{80}\right)$$

$$\begin{aligned} Var\,(X) &= (0.1)\,(300000)^2 \left(\frac{3}{80}\right) + (0.1)\,(0.9)\,(225000)^2 \\ &= 4\ 893\ 750\ 000 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} F_X(y) &= \Pr(X \leq y) \\ &= 1 - q + qF_B(y) \ \textit{où}\ B = bU \\ &= 1 - q + q\Pr(bU \leq y) \\ &= 1 - q + q\Pr\left(U \leq \frac{y}{b}\right) \\ &= 1 - q + qF_U\left(\frac{y}{b}\right). \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \Pr(X &> 200000) = 1 - \Pr(X \leq 200000) \\ &= 1 - (1 - q + qF_B(200000)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_B(200000) &= \Pr(B \leq 200000) \\ &= \Pr(bU \leq 200000) \ \textit{où}\ b = 300000 \\ &= \Pr\left(U \leq \frac{2}{3}\right) \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} 3x^2 \mathrm{d}x \\ &= x^3 \Big|_0^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

$$\Pr(X > 200000) = 1 - \left(0.9 + (0.1)\left(\frac{8}{27}\right)\right) = 0.07037.$$

(e) X est une variable aléatoire mixte c'est-à-dire qu'elle a une masse à zéro et une portion continue entre 0 et 300000 :

$$\begin{aligned} f_X(y) &= \frac{\mathrm{d}F_X(y)}{\mathrm{d}y} \\ &= \frac{\mathrm{d}(1 - q + qF_B(y))}{\mathrm{d}y} \\ &= qf_B(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_B(y) &= \frac{\mathrm{d}F_B(y)}{\mathrm{d}y} \\ &= \frac{\mathrm{d}F_U(\frac{y}{b})}{\mathrm{d}y} \\ &= \frac{1}{b} f_U\left(\frac{y}{b}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(y) &= \left\{ \begin{array}{c} 1-q,\ y=0 \\ q\left(\frac{1}{b}\right) f_U(\frac{y}{b}),\ 0<y<b \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 1-q,\ y=0 \\ \left(\frac{3q}{b^3}\right) y^2,\ 0<y<b \end{array} \right. . \end{aligned}$$

On suppose que la variable aléatoire des coûts X est définie selon l'approche indemnitaire, soit

$$X = \left\{ \begin{array}{c} B,\ I=1 \\ 0,\ I=0 \end{array} \right. ,$$

où $I \sim Bern(0.15)$ et $B \sim Exp\left(\frac{1}{10000}\right)$. (a) Trouver $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_{0.99}(X)$. (b) Trouver $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.

Solution 4.15 *(a) Pour $0 \leq \kappa \leq 1-0.15$, $VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa) = 0$. Alors, $VaR_{0.5} = 0$. Pour $0.85 < \kappa \leq 1$, $F_X^{-1}(\kappa)$ est la valeur de x^* tel que $F_X(x^*) = 1 - q + qF_B(x^*) = \kappa$, c'est-à-dire la valeur de x^* tel que*

$$F_B(x^*) = \frac{\kappa - (1-q)}{q}.$$

Par conséquent,

$$VaR_\kappa(X) = F_B^{-1}\left(\frac{\kappa-(1-q)}{q}\right).$$

On a donc

$$VaR_{0.99}(X) = F_B^{-1}\left(\frac{0.99-0.85}{0.15}\right) = F_B^{-1}\left(\frac{14}{15}\right)$$

où $F_B(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10000}}$. Alors, on a $\mathrm{e}^{-\frac{x}{10000}} = 1 - \frac{14}{15}$ et donc $x = -10000 \ln\left(1 - \frac{14}{15}\right)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(X) &= -10000 \ln\left(1 - \frac{14}{15}\right) \\ &= 27080.5 \end{aligned}$$

(b) Pour $\kappa = 0.5$, on a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.5}(X) &= \frac{1}{1-0.5}\left(E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{0.5}(X)\}}\right] + VaR_{0.5}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.5}(X)\right) - 0.5\right)\right) \\ &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{0.5}(X)\}}\right]}{1-0.5} \ \textit{car}\ VaR_{0.5}(X) = 0. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>0\}}\right] &= qE\left[B \times 1_{\{B>0\}}\right] \\ &= (0.15)\, E[B] \\ &= 1500. \end{aligned}$$

$$TVaR_{0.5}(X) = \frac{1500}{0.5} = 3000.$$

Pour $\kappa = 0.99$*, on a*

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(X) &= \frac{1}{1-0.99}\left(E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{0.99}(X)\}}\right] + VaR_{0.99}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.99}(X)\right) - 0.99\right)\right) \\ &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{0.99}(X)\}}\right]}{1-0.99} \end{aligned}$$

car

$$F_X\left(VaR_{0.99}(X)\right) = 1 - 0.15 + 0.15F_B(27080.50201) = 0.99$$

étant donné que $\kappa = 0.99 > \Pr(X=0) = 0.85$ *et donc que la distribution de* X *est continue à cet endroit. Pour une variable aléatoire exponentielle, on a (voir annexe)*

$$E\left[B \times 1_{\{B\leq b\}}\right] = -b\mathrm{e}^{-\beta b} + \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta b}\right).$$

Alors,

$$\begin{aligned} E\left[B \times 1_{\{B\leq 27080.5\}}\right] &= -27080.5\mathrm{e}^{-\frac{1}{10000}27080.5} + 10000\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10000}27080.5}\right) \\ &= 7528. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E\left[B \times 1_{\{B>27080.5\}}\right] &= E[B] - E\left[B \times 1_{\{B\leq 27080.5\}}\right] \\ &= 10000 - 7528 \\ &= 2472. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>27080.5\}}\right] &= qE\left[B \times 1_{\{B>27080.5\}}\right] \\ &= (0.15)(2472) \\ &= 370.8. \end{aligned}$$

$$TVaR_{0.99}(X) = \frac{370.8}{1-0.99} = 37080.$$

4.6.2 Approche forfaitaire

Selon l'approche forfaitaire, le modèle décrivant les coûts pour un contrat en assurance non vie ou IARD est contruit de telle sorte que

$$I = \begin{cases} 1, \text{ si au moins un sinistre se produit} \\ 0, \text{ sinon} \end{cases},$$

avec $\Pr(I=1) = q$ et $\Pr(I=0) = 1-q$. La v.a. B correspond au coût total en sinistres encourus pour le contrat si au moins un sinistre se produit pendant la période. Par exemple, en assurance santé, la v.a. B représente la somme de tous les frais encourus si au moins une réclamation est faite au cours d'une période.

Exemple 4.16 *On considère un contrat d'assurance maladie émis à une famille composée de 2 adultes et 2 enfants. On suppose que la variable aléatoire d'occurence* I *obéit à une loi de Bernoulli de paramètre* $q = 0.3$ *et que la variable aléatoire* B *obéit à une loi exponentielle de paramètre* $\beta = 0.0001$ *telle que* $E[B] = \frac{1}{\beta} = 10000$*. (a) Trouver* $E[X]$*.(b) Trouver* $Var(X)$*. (c) Trouver* F_X*. (d) Trouver* $VaR_{0.99}$*.*

Solution 4.17 *(a)* $E[X] = E[I]E[B] = (0.3)(10000) = 3000$*. (b)*

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[I]Var(B) + Var(I)E^2[B] \\ &= (0.3)(10000)^2 + (0.3)(0.7)(10000)^2 \\ &= 51\ 000\ 000. \end{aligned}$$

(c) $F_X(x) = (1-q) + qF_B(x) = 0.7 + 0.3\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10000}}\right)$. *(d) On cherche la valeur de* x^* *pour laquelle* $F_X(x^*) = (1-q) + qF_B(x^*) = 0.99$:

$$\begin{aligned}
0.7 + 0.3\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^*}{10000}}\right) &= 0.99 \\
0.3\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^*}{10000}}\right) &= 0.29 \\
1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^*}{10000}} &= \frac{29}{30} \\
\mathrm{e}^{-\frac{x^*}{10000}} &= \frac{1}{30} \\
\ln\left(\frac{1}{30}\right) &= -\frac{x^*}{10000},
\end{aligned}$$

et donc $VaR_{0.99} = 34\ 011.97$.

4.6.3 Remarques

L'appellation approche fréquence-sévérité est souvent utilisée lorsque l'on suppose que la v.a. M peut prendre des valeurs supérieures à 1. La fréquence désigne le nombre de sinistres et la sévérité, le montant d'un sinistre. En fait, on peut voir l'approche indemnitaire comme un cas particulier de l'approche fréquence-sévérité. L'approche forfaitaire est uniquement valide lorsqu'on ne possède pas les données sur le nombre de sinistres et le montant individuel des sinistres.

4.7 Généralisation des principales lois de fréquence

Il est possible de procéder de différentes façons pour généraliser les trois principales lois discrètes : mélange de la loi de Poisson ; modication de la masse à 0 ; et composition.

4.7.1 Lois Poisson-mélange

Souvent, dans les applications pratiques, la loi de Poisson n'offre pas une description adéquate du comportement des données. Dans ces circonstances, les lois Poisson-mélange jouent un rôle important dans la modélisation du comportement de la fréquence.

Soit une v.a. Θ positive de telle sorte que $E[\Theta] = 1$, $\mathrm{Var}(\Theta) < \infty$ et $M_\Theta(t)$ existe. La v.a. Θ influence la v.a. M de la façon suivante. On suppose que la loi conditionnelle de M est donnée par $(M|\Theta = \theta) \sim Poisson(\lambda\theta)$ avec $\lambda > 0$. Cela signifie que $E[M|\Theta] = \Theta\lambda$, $\mathrm{Var}(M|\Theta) = \Theta\lambda$ et $\mathcal{P}_{M|\Theta}(t) = E\left[t^M|\Theta\right] = \mathrm{e}^{\Theta\lambda(t-1)}$. On peut s'imaginer que M correspond au nombre de sinistres pour un contrat d'assurance automobile. Comme on ne connaît pas les habitudes de conduite du conducteur, on introduit une incertitude quant au paramètre de la loi de Poisson.

Quelle est la loi de M ? Tout d'abord, en conditionnant sur Θ, on constate que

$$E[M] = E_\Theta[E[M|\Theta]] = E[\Theta\lambda] = \lambda \times 1 = \lambda. \tag{4.25}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(M) &= E_\Theta[\mathrm{Var}(M|\Theta)] + \mathrm{Var}_\Theta(E[M|\Theta]) \\
&= E[\Theta\lambda] + \mathrm{Var}_\Theta(\Theta\lambda) = \lambda + \lambda^2\mathrm{Var}_\Theta(\Theta).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

En poursuivant l'interpétration fournie plus haut, l'incertitude quant au comportement du conducteur n'affecte pas l'espérance mais son influence conduit à une variance de M qui est supérieure à son espérance. Ainsi, la présence du mélange ajoute de la surdispersion par rapport à la loi de Poisson dans le comportement du nombre de sinistres.

On identifie la loi de M par l'intermédiaire de sa fgp qui est donnée par

$$\mathcal{P}_M(t) = E\left[t^M\right] = E_\Theta\left[E\left[t^M|\Theta\right]\right] = E\left[\mathrm{e}^{\Theta\lambda(t-1)}\right] = M_\Theta(\lambda(t-1)). \tag{4.27}$$

La v.a. Θ peut être discrète ou continue. Si la v.a. Θ est continue positive avec fonction de densité f_Θ alors la fonction de masse de probabilité de M est donnée par

$$\Pr(M=k) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^k}{k!} f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta,\ k \in \mathbb{N}^+.$$

Autrement, si la v.a. Θ est discrète avec support $\mathbb{N}^+$, la fonction de masse de probabilité de M est donnée par

$$\Pr(M=k) = \sum_{\theta=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}\Pr(\Theta=\theta),\ k \in \mathbb{N}^+.$$

Le choix de la loi de Θ a un impact important sur le comportement de la v.a. M.

On examine trois cas particuliers de loi Poisson-mélange : la loi Poisson-gamma (ou binomiale négative), la loi Poisson-inverse gaussienne et la loi Poisson-lognormale.

4.7.2 Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

Soit une v.a. $\Theta \sim Gamma(\alpha = r, \beta = r)$ de telle sorte que $E[\Theta] = \frac{r}{r} = 1$, $\mathrm{Var}(\Theta) = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$ et $M_\Theta(t) = \left(\frac{r}{r-t}\right)^r$. Alors, la v.a. M obéit à la loi Poisson-gamma, notée $M \sim P-Ga(\lambda, r)$. En fait, la loi Poisson-gamma correspond à la loi binomiale négative. À partir de (4.25), (4.26) et (4.27), on obtient $E[M] = \lambda$, $\mathrm{Var}(M) = \lambda + \frac{\lambda^2}{r}$ et

$$\mathcal{P}_M(t) = \left(\frac{r}{r-s}\right)^r = \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{r}(t-1)}\right)^r. \tag{4.28}$$

En fixant $\frac{\lambda}{r} = \frac{1-q}{q}$ (ce qui implique $q = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{r}}$), on retrouve la première paramétrisation de la loi binomiale négative où

$$\mathcal{P}_M(t) = \left(\frac{1}{1-\frac{1-q}{q}(t-1)}\right)^r = \left(\frac{q}{1-(1-q)t}\right)^r,$$

avec $E[M] = \lambda = r\frac{1-q}{q}$ et

$$\mathrm{Var}(M) = \lambda + \frac{\lambda^2}{r} = r\frac{1-q}{q^2}.$$

Dans l'exemple suivant, on illustre l'impact du choix des paramètres r et q de la loi binomiale négative sur le comportement aléatoire des coûts d'un contrat d'assurance.

Exemple 4.18 *Les coûts pour une ligne d'affaires sont définis par la v.a. $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $B \sim Exp(\beta = 1)$. Les paramètres r et q de la v.a. de fréquence M sont fixés de telle sorte que $E[M] = 200$. On considère 4 couples de valeurs pour (r, q) : $\left(1, \frac{1}{201}\right)$, $\left(2, \frac{1}{101}\right)$, $\left(5, \frac{1}{41}\right)$ et $\left(25, \frac{1}{9}\right)$. On présente dans l'illustration 4.4 les courbes de la fonction de répartition F_X de X pour les quatre couples d'hypothèses.*

On observe l'impact significatif des paramètres de la loi binomiale négative sur le comportement de la v.a. X. Dans le tableau suivant, on indique les valeurs de $VaR_{0.5}(X)$, $VaR_{0.995}(X)$, $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$:

r	q	$VaR_{0.5}(X)$	$VaR_{0.995}(X)$	$TVaR_{0.5}(X)$	$TVaR_{0.995}(X)$
1	$\frac{1}{201}$	138.320	1063.959	339.320	1264.959
2	$\frac{1}{101}$	167.509	748.435	306.217	861.415
5	$\frac{1}{41}$	186.499	511.316	271.108	567.148
25	$\frac{1}{9}$	196.973	332.139	235.481	352.004

Dans l'illustration 4.5, on reproduit les valeurs de $VaR_\kappa(X)$ pour les quatre couples de paramètres.

Illustration 4.4 – Courbes de $F_X(x)$ où $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $B \sim Exp(1)$ et 4 couples de valeurs pour (r, q) : $\left(1, \frac{1}{201}\right)$, $\left(2, \frac{1}{101}\right)$, $\left(5, \frac{1}{41}\right)$ et $\left(25, \frac{1}{9}\right)$.

Illustration 4.5 – Courbes de $VaR_\kappa(X)$ où $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $B \sim Exp(1)$ et 4 couples de valeurs pour (r, q) : $\left(1, \frac{1}{201}\right)$, $\left(2, \frac{1}{101}\right)$, $\left(5, \frac{1}{41}\right)$ et $\left(25, \frac{1}{9}\right)$.

Illustration 4.6 – Courbes de $TVaR_\kappa(X)$ où $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $B \sim Exp(1)$ et 4 couples de valeurs pour (r, q) : $\left(1, \frac{1}{201}\right)$, $\left(2, \frac{1}{101}\right)$, $\left(5, \frac{1}{41}\right)$ et $\left(25, \frac{1}{9}\right)$.

Les courbes de $TVaR_\kappa(X)$ pour les quatre couples de paramètres sont tracées dans le graphique de l'illustration 4.6.

Pour une valeur de κ fixée, on observe que la valeur de $TVaR_\kappa(X)$ augmente lorsque le paramètre r diminue (de telle sorte que l'espérance du nombre de sinistres reste identique). L'explication de ce comportement sera traité au chapitre 12. □

On observe également

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} E[M] &= \lambda \\
\lim_{r\to\infty} \mathrm{Var}(M) &= \lim_{r\to\infty} \lambda + \frac{\lambda^2}{r} = \lambda \\
\lim_{r\to\infty} \mathcal{P}_M(t) &= \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{r}(t-1)}\right)^r = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

D'après (4.29), si $r \to \infty$ de telle sorte que l'espérance de M reste égale λ, la variance de M tend vers λ et la loi de M tend vers la loi de Poisson de paramètre λ.

Exemple 4.19 *Soit des v.a. M_1, ..., M_5 où*

$$M_i \sim BinNég\left(r = r_i, q = \left(1 + \frac{2}{r_i}\right)^{-1}\right),\ i = 1, 2, 3, 4,$$

avec $r_1 = 0.5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 100$, et $M_5 \sim Poisson(\lambda = 2)$ de telle sorte que $E[M_i] = 2$, $i = 1, 2, ..., 5$. Dans le tableau ci-dessous, on fournit les valeurs de la fonction de masse de probabilité pour les cinq v.a. :

k	$f_{M_1}(k)$	$f_{M_2}(k)$	$f_{M_3}(k)$	$f_{M_4}(k)$	$f_{M_5}(k)$
0	0.447214	0.333333	0.250000	0.138033	0.135335
1	0.178885	0.222222	0.250000	0.270653	0.270671
2	0.107331	0.148148	0.187500	0.267999	0.270671
3	0.071554	0.098765	0.125000	0.178668	0.180447
4	0.050088	0.065844	0.078125	0.090209	0.090224
5	0.036063	0.043896	0.046875	0.036791	0.036089
10	0.008461	0.005781	0.002686	0.000049	0.000038
15	0.002273	0.000761	0.000122	0.000000	0.000000
20	0.000646	0.000100	0.000005	0.000000	0.000000

Quand la valeur de r augmente, les valeurs des fonctions de masse de probabilité tendent comme prévu vers celles de la loi de Poisson. □

4.7.3 Loi Poisson-inverse gaussienne

Soit $\Theta \sim IG(1,\beta)$ de telle sorte que $E[\Theta] = 1$ et $\mathrm{Var}(\Theta) = \beta$. On dit alors que la v.a. M obéit à la loi Poisson-inverse gaussienne, notée $M \sim P-IG(\lambda,\beta)$. D'après (4.25), (4.26) et (4.27), on déduit que $E[M] = \lambda$, $\mathrm{Var}(M) = \lambda + \lambda^2\beta$ et

$$\mathcal{P}_M(t) = \exp\left(\frac{1}{\beta}\left(1-\sqrt{1-2\beta\lambda(t-1)}\right)\right).$$

Il n'y pas d'expression analytique pour f_M car on ne peut évaluer explicitement

$$f_M(k) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta\theta^3}}\exp\left(-\frac{1}{2\beta\theta}(\theta-1)^2\right)\mathrm{d}\theta.$$

On a recours à une relation récursive pour déterminer les valeurs de $f_M(k)$. Les points de départ sont

$$f_M(0) = \mathcal{P}_M(0) = \exp\left(\frac{1}{\beta}\left(1-\sqrt{1+2\beta\lambda}\right)\right)$$

et

$$\begin{aligned} f_M(1) &= \left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_M(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\lambda}{\sqrt{1-2\beta\lambda(t-1)}}\mathcal{P}_M(t)\right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2\beta\lambda}}f_M(0). \end{aligned}$$

Pour $k = 2,3,...$, on utilise la relation récursive

$$\begin{aligned} f_M(k) &= \frac{2\lambda\beta}{1+2\lambda\beta}\left(1-\frac{3}{2k}\right)f_M(k-1) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{(1+2\lambda\beta)k(k+1)}f_M(k-2). \end{aligned}$$

4.7.4 Loi Poisson-lognormale

Soit une v.a. $\Theta \sim LN(\mu,\sigma^2)$ où $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$ de telle sorte que $E[\Theta] = \exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right) = 1$ et

$$\mathrm{Var}(\Theta) = \mathrm{e}^{(2\mu+\sigma^2)}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right) = \left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right).$$

Il en résulte que la v.a. M obéit à une loi Poisson-lognormale avec paramètres λ et σ, notée $M \sim P-LN(\lambda,\sigma^2)$. À partir de (4.25), (4.26), on obtient $E[M] = \lambda$ et $\mathrm{Var}(M) = \lambda + \lambda^2\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)$. Il n'y a pas de forme explicite pour la fonction de masse de probabilité. On doit utiliser des méthodes d'intégration numérique pour évaluer

$$f_M(k) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}\frac{1}{\theta\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln\theta+\frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\theta.$$

Dans l'exemple, on compare les valeurs obtenues des fonctions de masse de probabilité pour la loi Poisson-gamma (binomiale négative) et la loi Poisson-lognormale.

Exemple 4.20 *Soit des v.a.* $M_1 \sim P-LN(\lambda=2,\sigma^2=1)$ *et* $M_2 \sim BN(r,q)$ *où* $r = \left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right) = 0.5820$

et $q = \left(1 + \frac{2}{r}\right)^{-1} = 0.2254$. *Les paramètres des deux lois sont fixés de telle sorte que* $E[M_1] = E[M_2] = 2$ *et* $\mathrm{Var}(M_1) = \mathrm{Var}(M_2) = 8.8731$. *Les valeurs obtenues de* $f_{M_1}(k)$ *et* $f_{M_2}(k)$, *pour* $k = 0, 1, ..., 5$ *sont indiquées dans le tableau ci-dessous :*

k	$f_{M_1}(k)$	$f_{M_2}(k)$
0	0.3325	0.4202
1	0.2506	0.1894
2	0.1526	0.1161
3	0.0910	0.0774
4	0.0556	0.0537
5	0.0352	0.0381

□

4.7.5 Modification de la masse à 0

Dans certaines applications, les lois de Poisson, binomiale, binomiale négative ou Poisson-mélange n'offrent pas une description adéquate de la masse à 0. Alors, il est possible de modifier la masse à 0 d'une loi discrète. Soit une v.a. discrète M' avec fonction de masse de probabilité $f_{M'}$ et $I \sim Bern(q)$. On définit une v.a. discrète M avec fonction de masse de probabilité $f_M(0) = (1-q) + qf_{M'}(0)$, $k = 0$, et $f_M(k) = qf_{M'}(k)$, $k \in \mathbb{N}^+$. Il en résulte que $E[M] = qE[M']$ et $\mathrm{Var}(M) = qE\left[M'^2\right] - q^2E[M]^2$ et $\mathcal{P}_M(r) = 1 - q + q\mathcal{P}_{M'}(r)$.

4.8 Somme aléatoire et allocation

Soit une v.a. X définie selon une somme aléatoire $X = \sum_{k=1}^{M} B_k$, si $M > 0$, et $X = 0$ si $M = 0$. On suppose que la v.a. B est continue et positive impliquant

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, E\left[\left(\sum_{j=1}^{k} B_j\right) \times 1_{\left\{\sum_{j=1}^{k} B_j > VaR_\kappa(X)\right\}}\right].$$

On présente deux règles pour expliquer la valeur de $TVaR_\kappa(X)$ en fonction des deux sources qui définissent le comportement de X, soit les v.a. M et B.

Définition 4.21 ***Règle basée sur la variance.*** *Comme première approche, on peut recourir à une règle basée sur la variance de* X, *soit* $\mathrm{Var}(X)$. *En effet, les parts allouées aux v.a.* M *et* B *du comportement de* $TVaR_\kappa(X)$ *sont définies par*

$$\begin{aligned} C_\kappa^{\mathrm{Var}}(M) &= \frac{\mathrm{Var}(E[X|M])}{\mathrm{Var}(X)} TVaR_\kappa(X) = \frac{\mathrm{Var}(M)\, E[B]^2}{\mathrm{Var}(X)} TVaR_\kappa(X) \\ C_\kappa^{\mathrm{Var}}(B) &= \frac{E[\mathrm{Var}(X|M)]}{\mathrm{Var}(X)} TVaR_\kappa(X) = \frac{E[M]\,\mathrm{Var}(B)}{\mathrm{Var}(X)} TVaR_\kappa(X). \end{aligned}$$

La règle basée sur la variance a l'avantage d'être simple et intuitive. De plus, elle se base sur l'expression (4.6) de la variance de X. Toutefois, cette approche se fonde uniquement sur les variances et espérances des v.a. M et B.

Définition 4.22 ***Règle basée sur la TVaR.*** *La deuxième approche se base sur la décomposition suivante :*

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right] &= E_M\left[(X - E[X|M] + E[X|M]) \times 1_{\{X>b\}}\right] \\ &= E_M\left[(X - E[X|M]) \times 1_{\{X>b\}}\right] \\ &\quad + E\left[E[X|M] \times 1_{\{X>b\}}\right]. \end{aligned}$$

Comme

$$E_M\left[E[X|M] \times 1_{\{X>b\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} kE[B] \times f_M(k) \Pr(B_1 + ... + B_k > b),$$

on déduit que la part allouée à la v.a. M est donnée par

$$C_{\kappa}^{TVaR}(M) = \frac{E_M\left[E[X|M] \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}\right]}{1-\kappa}.$$

La part allouée à la v.a. B est

$$C_{\kappa}^{TVaR}(B) = TVaR_{\kappa}(X) - C_{\kappa}^{TVaR}(M).$$

□

Dans l'exemple qui suit, on illustre l'impact du choix de la loi du montant d'un sinistre sur la $TVaR$ ainsi que les parts allouées aux v.a. M et B.

Exemple 4.23 *On considère une v.a. $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ avec $B \sim Gamma(\alpha, \beta)$. On fixe les paramètres α et β de telle sorte que $E[B] = 2$. De plus, on a $\lambda = 2$ c.-à-d. $E[M] = 2$, ce qui implique que $E[X] = E[M]E[B] = 4$. Dans le tableau ci-dessous, on présente les valeurs de $VaR_{\kappa}(X)$ et $TVaR_{\kappa}(X)$ pour trois paires de paramètres (α, β) et pour $\kappa = 0.995$:*

α	β	$VaR_{0.995}(X)$	$TVaR_{0.995}(X)$
0.1	0.05	57.74695	75.10465
1	0.5	19.43193	22.47014
10	5	13.66158	15.22953

En supposant que le capital correspond à $TVaR_{\kappa}(X)$, on indique les valeurs des contributions selon les deux approches pour trois paires de paramètres (α, β) et pour $\kappa = 0.995$:

α	β	$C_{0.995}^{\text{Var}}(M)$	$C_{0.995}^{\text{Var}}(B)$	$C_{0.995}^{TVaR}(M)$	$C_{0.995}^{TVaR}(B)$
0.1	0.05	6.82770	68.27695	6.59984	68.50481
1	0.5	11.23507	11.23507	10.00647	12.46367
10	5	13.84502	1.38451	13.57499	1.65454

□

4.9 Pertes financières

Jusqu'à présent, on s'est intéressé principalement à la modélisation des risques liés à des activités d'assurance ou à des activités similaires. Dans cette section, on traite brièvement de la modélisation des pertes liées à un investissement sur une période.

Soit un individu ou une société qui investit une somme $V(0)$ dans un fonds ABC pendant une période. Selon le contexte, la période est de 1 journée, 10 journées (banques), 1 mois, 1 trimestre ou 1 année. La valeur de l'investissement à la fin de la période est $V(1)$. Dans la gestion quantitative des risques, on est préoccupé par le fait que la valeur de $V(1)$ soit inférieure à l'investissement initial (ou à un objectif fixé), ce qui implique une perte financière L positive. On définit la perte liée à cet investissement par la v.a. L où $L = V(0) - V(1)$ avec $E[L] = V(0) - E[V(1)]$ et $\text{Var}(L) = \text{Var}(V(1))$. On définit le rendement instantané pour la période par la v.a. R. La valeur de l'investissement $V(1)$ correspond alors à $V(1) = V(0)\,\mathrm{e}^R$ et on a la perte $L = V(0) - V(0)\,\mathrm{e}^R$. On fera une perte si $V(1)$ prend des valeurs peu élevées c'est-à-dire si le rendement pour la période est négatif.

Supposons que la v.a. R est continue, ce qui implique que la v.a. $V(1)$ est aussi continue. En utilisant (3.27), on déduit que

$$VaR_{\kappa}(L) = V(0) + VaR_{\kappa}(-V(1)) = V(0) - VaR_{1-\kappa}(V(1)). \tag{4.30}$$

Ensuite, en appliquant (3.18) ou (3.27), on a

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(L) &= V(0) + TVaR_{\kappa}(-V(1)) \\ &= V(0) - \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} VaR_{1-u}(V(1))\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

qui devient

$$TVaR_\kappa(L) = V(0) - \frac{E\left[V(1) \times 1_{\{V(1) \leq VaR_{1-\kappa}(V(1))\}}\right]}{1-\kappa} \tag{4.31}$$

ou

$$TVaR_\kappa(L) = V(0) - \frac{1}{1-\kappa}\left(E\left[V(1)\right] - \kappa TVaR_{1-\kappa}(V(1))\right).$$

La valeur $VaR_{1-\kappa}(V(1))$ corrrespond au montant tel que la probabilité que la valeur de l'investissement au temps 1 soit inférieure à ce montant est $1-\kappa$. La quantité $E\left[X \times 1_{\{X \leq VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right]$ correspond à l'espérance des valeurs de $V(1)$ inférieures à $VaR(V(1))$.

Exemple 4.24 *Soit une v.a. $R \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ représentant le rendement instantané du fonds ABC pour la prochaine période. La valeur de l'investissement à la fin de la période correspond à la v.a. $V(1) = V(0)\,\mathrm{e}^R$. Alors, $E[L] = V(0) - V(0)\,\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ et*

$$\mathrm{Var}(L) = V(0)^2\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^R\right) = V(0)^2\,\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right).$$

Avec (4.30), l'expression de $VaR_\kappa(L)$ est donnée par

$$VaR_\kappa(L) = V(0) - VaR_{1-\kappa}(V(1)) = V(0) - V(0)\,\mathrm{e}^{\mu+\sigma VaR_{1-\kappa}(Z)},$$

où $Z \sim N(0,1)$. En utilisant (4.31), l'expression de $TVaR_\kappa(L)$ devient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(L) &= V(0) + TVaR_\kappa(-V(1)) \\ &= V(0) - \frac{1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_s(V(1))\,\mathrm{d}s \\ &= V(0) - V(0)\frac{1}{1-\kappa}E\left[\mathrm{e}^R \times 1_{\{\mathrm{e}^R \leq VaR_{1-\kappa}(\mathrm{e}^R)\}}\right]. \end{aligned}$$

Puisque e^R obéit à une loi lognormale, on a

$$E\left[\mathrm{e}^R \times 1_{\{\mathrm{e}^R \leq VaR_{1-\kappa}(\mathrm{e}^R)\}}\right] = \exp(\mu + \sigma^2/2)F_Z\left(VaR_{1-\kappa}(Z) - \sigma\right),$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(L) &= V(0) - V(0)\frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X \leq VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right] \\ &= V(0) - V(0)\frac{1}{1-\kappa}\exp(\mu + \sigma^2/2)F_Z\left(VaR_{1-\kappa}(Z) - \sigma\right). \end{aligned}$$

□

On applique les résultats de l'exemple 4.24 dans l'exemple suivant.

Exemple 4.25 *On suppose que $V(0) = 10\ 000$, $\mu = 0.08$ et $\sigma = 0.2$. L'espérance et la variance de la perte sont $E[L] = -1051.71$ et $\mathrm{Var}(L) = 4\ 984\ 639.22$. Dans le tableau ci-dessous, on présente les valeurs $VaR_\kappa(L)$ et $TVaR_\kappa(L)$ pour $\kappa = 0$, 0.01, 0.5, 0.99 et 0.995 :*

κ	0	0.005	0.01	0.5	0.99	0.995
$VaR_\kappa(L)$	$-\infty$	-8133.32	-7250.73	-832.87	3197.33	3528.43
$TVaR_\kappa(L)$	-1051.71	-1010.00	-976.50	700.20	3631.16	3914.81

□

Il est important de souligner que, dans les contextes pratiques, la loi normale n'offre pas un choix adéquat pour modéliser le rendement R. Dans le prochain exemple, on présente une autre loi pour R.

Exemple 4.26 *Un individu investit une somme $V(0) = 10\ 000$ dans le fonds mutuel ABC pendant une année. La valeur de l'investissement à la fin de l'année est $V(1) = V(0)\,\mathrm{e}^R$ où le rendement instantané R*

est la somme des deux composantes R_1 et R_2, avec $R_1 \sim N\left(\mu_1 = 0.2, \sigma_1^2 = 0.2^2\right)$. La composante R_2 obéit à une loi Poisson composée avec

$$R_2 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où le nombre de sauts dans les rendements est la v.a. $M \sim$ Poisson $(\lambda = 0.2)$ et les tailles des sauts B_1, B_2, B_3, ... se comportent comme $B \sim N\left(-0.5, 0.04^2\right)$. Noter que les sauts ont une espérance négative. Les v.a. R_1 et R_2 sont indépendantes. On définit la perte liée à l'investissement par la v.a. $L = V(0) - V(1)$. L'espérance et la variance de R sont respectivement

$$E[R] = E[R_1] + E[R_2] = 0.2 + 0.2 \times (-0.5) = 0.1$$

et

$$\mathrm{Var}(R) = \mathrm{Var}(R_1) + \mathrm{Var}(R_2) = 0.09032.$$

L'espérance de $V(1)$ est

$$\begin{aligned} E[V(1)] &= E\left[V(0)\,\mathrm{e}^{R}\right] = V(0)\,E\left[\mathrm{e}^{R}\right] = V(0)\,E\left[\mathrm{e}^{R_1}\right]E\left[\mathrm{e}^{R_2}\right] \\ &= 10\ 000\mathrm{e}^{0.2+\frac{0.2^2}{2}}\,\mathrm{e}^{0.2\left(\mathrm{e}^{-0.5+\frac{0.04^2}{2}}-1\right)} = 11\ 518.89 \end{aligned}$$

et on a $E[L] = V(0) - E[V(1)] = -1518.89$. Le deuxième moment de $V(1)$ est

$$\begin{aligned} E\left[V(1)^2\right] &= E\left[V(0)^2\,\mathrm{e}^{2R}\right] = V(0)^2\,E\left[\mathrm{e}^{2R}\right] \\ &= V(0)^2\,E\left[\mathrm{e}^{2R_1}\right]E\left[\mathrm{e}^{2R_2}\right] \\ &= 10\ 000^2\mathrm{e}^{2\times 0.2+4\times\frac{0.2^2}{2}}\,\mathrm{e}^{0.2\left(\mathrm{e}^{-2\times 0.5+4\frac{0.04^2}{2}}-1\right)} = 142\ 448\ 694. \end{aligned}$$

On a $\mathrm{Var}(V(1)) = \mathrm{Var}(L) = 9\ 763\ 864$. En conditionnant sur M, la fonction de répartition de $V(1)$ est donnée par

$$\begin{aligned} F_{V(1)}(x) &= f_M(0)\Pr\left(10\ 000\mathrm{e}^{R_1} \le x\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\Pr\left(10\ 000\mathrm{e}^{R_1+B_1+\ldots+B_k} \le x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k)\,F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{V(0)}\right) - \mu_1 - k\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + k\sigma_2^2}}\right). \end{aligned}$$

L'expression de la fonction de répartition de L est donnée par

$$\begin{aligned} F_L(x) &= \Pr(V(0) - V(1) \le x) \\ &= \Pr(V(1) > V(0) - x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k)\,\overline{F}_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{V(0)-x}{V(0)}\right) - \mu_1 - k\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + k\sigma_2^2}}\right) \end{aligned}$$

avec $x \in (-\infty, V(0)]$. On obtient, par exemple, $\Pr(L \le 5000) = 0.9830$, $VaR_{0.995}(L) = 6142.08$ et $TVaR_{0.995}(L) = 6730.64$. □

4.10 Pertes financières *vs* coûts en assurance

En assurance, les coûts sont positifs et peuvent être nuls avec une forte probabilité. Dans cette section, on examine à l'aide d'un exemple l'impact de modéliser conjointement le risque d'assurance et le risque financier

pour une seule entité. Ce thème est traité de façon plus détaillée au chapitre 5.

Exemple 4.27 *On définit les prestations de décès versées par un assureur à la fin de la prochaine année par la v.a.* $S = bN$, *où* $N \sim BinNég(r = 5, q = \frac{1}{5})$ *et* $b = 1000$. *L'assureur récolte les primes* $V(0)$ *au début de la période et les investit pour la durée de la période. Il compte utiliser les revenus totaux afin de payer les coûts en sinistres à la fin de la période. On suppose que l'assureur a deux options : (A) investir dans un titre sans risque avec un rendement instantané constant* δ *de 4 % ou (B) investir dans un titre avec risque dont le rendement instantané est représenté par la v.a.* R. *L'assureur calcule le montant* $V(0) = vE[S]$ *où la valeur de* v *est fixée selon l'option choisie. Approche A :* $v = \mathrm{e}^{-\delta}$ *avec* $\delta = 4$ % *; la perte de l'assureur est* $L_A = S - V_A(0)\mathrm{e}^{0.04}$. *Approche B :* $v = \frac{1}{E[\mathrm{e}^R]}$ *où* $R \sim N(0.08, 0.2^2)$ *; la perte de l'assureur est* $L_B = S - V_B(0)\mathrm{e}^R$. *On compare les comportements aléatoires des pertes* L_A *et* L_B.

Tout d'abord, la valeur de $V_A(0)$ *est* 19 215.789 *et celle de* $V_B(0)$ *est* 18 096.748. *À première vue, l'option B semble plus avantageuse. De plus, pour les deux options, les espérances de* L_A *et* L_B *sont nulles*

$$E[L_A] = E[S] - V(0)\,\mathrm{e}^{0.06} = 0$$

et

$$E[L_B] = E[S] - V(0)\,E\left[\mathrm{e}^R\right] = 0.$$

Toutefois, les variances diffèrent :

$$\mathrm{Var}(L_A) = \mathrm{Var}(S) = 100\ 000\ 000$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(L_B) &= \mathrm{Var}(S) + V(0)^2\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^R\right)\\ &= 100\ 000\ 000 + V(0)^2\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^R\right)\\ &= 116\ 324\ 309.026 > \mathrm{Var}(L_A).\end{aligned}$$

On constate que l'option B est plus risquée en comparant seulement les variances de L_A *et* L_B. *En effet, l'option B combine à la fois le risque d'assurance et le risque financier rattaché à l'investissement. Les fonctions de répartition de* L_A *et* L_B *sont*

$$F_{L_A}(x) = \Pr\left(S \le V_A(0)\,\mathrm{e}^{0.04} + x\right) = \Pr\left(N \le \frac{bE[N] + x}{b}\right)$$

et

$$\begin{aligned}F_{L_B}(x) &= \Pr\left(S \le V_B(0)\,\mathrm{e}^R + x\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_N(k)\,\Pr\left(1000k \le V_B(0)\,\mathrm{e}^R + x\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_N(k)\,\Pr\left(\mathrm{e}^R > \frac{1000k - x}{V_B(0)}\right).\end{aligned}$$

La probabilité que l'assureur ne remplisse pas ses engagements selon l'option A et l'option B sont $p_A = \Pr(L_A > 0) = 0.42067$ *et* $p_B = \Pr(L_B > 0) = 0.45381$. *Les expressions de* $E\left[L_A \times 1_{\{L_A > d\}}\right]$ *et* $E\left[L_B \times 1_{\{L_B > d\}}\right]$ *sont*

$$\begin{aligned}&E\left[L_A \times 1_{\{L_A > d\}}\right]\\ =\ &E\left[\left(S - V_A(0)\,e^{0.04}\right) \times 1_{\{(S - V_A(0)e^{0.04}) > d\}}\right]\\ =\ &\sum_{k=0}^{\infty} f_N(k)\left(1000k - V_A(0)\,e^{0.04}\right) \times 1_{\{(1000k - V_A(0)e^{0.04}) > d\}}\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
& E\left[L_B \times 1_{\{L_B>d\}}\right] \\
= \; & E\left[\left(S - V_B(0)\, e^R\right) \times 1_{\{(S-V_B(0)e^R)>d\}}\right] \\
= \; & \sum_{k=0}^{\infty} f_N(k)\, E\left[\left(1000k - V_B(0)\, e^R\right) \times 1_{\{(1000k-V_B(0)e^R)>d\}}\right] \\
= \; & \sum_{k=0}^{\infty} f_N(k)\, E\left[1000k \times 1_{\left\{e^R \leq \frac{1000k-d}{V_B(0)}\right\}}\right] \\
& -V_B(0) \sum_{k=0}^{\infty} f_N(k)\, E\left[e^R \times 1_{\left\{e^R \leq \frac{1000k-d}{V_B(0)}\right\}}\right]
\end{aligned}
$$

Les valeurs de $VaR_\kappa(L_A)$, $VaR_\kappa(L_B)$, $TVaR_\kappa(L_A)$ et $TVaR_\kappa(L_B)$ sont présentées dans le tableau ci-dessous :

κ	$VaR_\kappa(L_A)$	$VaR_\kappa(L_B)$	$TVaR_\kappa(L_A)$	$TVaR_\kappa(L_B)$
0.005	*-17000*	*-22333.38*	*92.05*	*0*
0.5	*-1000*	*-1207.58*	*7760.36*	*376.82*
0.99	*30000*	*30637.54*	*35823.86*	*252226.00*
0.995	*34000*	*35109.83*	*40088.90*	*346849.70*

L'option A a le désavantage de requérir un investissement initial plus élevé que celui exigé par l'option B. En revanche, l'ajout du risque d'investissement augmente la variabilité et l'importance de la perte éventuelle à la fin de l'année pour l'option B. □

4.11 Notes bibliographiques

Parmi les ouvrages de référence, on mentionne, par exemple, [Panjer and Willmot, 1992], [Klugman et al., 2012] et [Rolski et al., 2009]. Les distributions univariées continues et discrètes sont traitées dans [Johnson et al., 1995] et [Johnson et al., 2005]. Dans le contexte de l'actuariat, on consultera [Denuit et al., 2007] pour un exposé fort élaboré sur les distributions de fréquence et [Klugman et al., 2012] pour un exposé aussi complet sur les distributions du montant d'un sinistre. On peut consulter [McNeil et al., 2015] pour un exposé détaillé concernant les pertes financières dans une perspective de gestion quantitative des risques. Les distributions *light* et *heavy tailed* sont traitées de manière fouillée dans [Embrechts et al., 2013].

Code LaTeX : `chapitre_modelisation_des_risques_non-vie_v6.tex`

Chapitre 5

Mutualisation des risques non-vie

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on examine la mutualisation des risques, plus précisement on étudie le comportement du montant total des sinistres pour un portefeuille composé de risques individuels. Connaître le comportement des coûts associés au portefeuille permet à une compagnie d'assurance ou autre entité financière d'évaluer la santé financière du portefeuille et aide l'actuaire dans la gestion des risques. De plus, l'information détenue sur le risque global associé au portefeuille est utilisée à des fins de tarification et de réassurance.On s'intéresse aussi à l'adaptation de la mutualisation dans le contexte des risques extraordinaires. On considère l'impact du risque catastrophique et du risque financier sur la mutualisation des risques. On traite aussi de l'impact de la présence d'un facteur aléatoire tel que le risque d'épidémie, le phénomène d'amélioration de la mortalité ou le risque climatique sur la mutualisation des risques. On étudie aussi le comportement aléatoire du montant maximal des sinistres pour un portefeuille en tenant compte de l'effet du choix de la distribution du montant d'un sinistre. Les méthodes basées sur la simulation et les méthodes récursives d'agrégation des risques sont présentées aux chapitres 2 et 11. La modélisation de la dépendance est traitée dans les chapitres 13 et 14.

5.2 Méthodes d'agrégation des risques

Pour bien quantifier le risque global auquel la compagnie d'assurance fait face en émettant des contrats, la connaissance de la fonction de répartition de S est importante. On débute avec quelques exemples.

Exemple 5.1 ***Portefeuille d'assurance vie temporaire 1 an.*** *On considère un portefeuille de* 10 *contrats d'assurance vie temporaire 1 an. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. $X_i = b_i I_i$ où $I_i \sim$ Bernoulli (q_i) pour $i = 1, 2, ..., 10$. Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{10} X_i$. Les v.a. I_1, ..., I_{10} sont indépendantes. On suppose que $q_i = 0.001i$ et $b_i = 1000\,(11 - i)$, $i = 1, 2, ..., 10$. L'espérance et la variance des coûts du portefeuille sont 220 et 1 161 600. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité $f_S\,(1000k)$ de S pour $k = 0, 1, ..., 5$ sont les suivantes :*

k	0	1	2	3	4	5
$f_S\,(1000k)$	0.946302	0.009559	0.008594	0.006748	0.007718	0.005849

Par exemple, $f_S\,(0) = \Pi_{i=1}^{10} f_{X_i}\,(0) = \Pi_{i=1}^{10} f_{I_i}\,(0)$ *et*

$$\begin{aligned} f_S\,(5000) &= f_{I_6}\,(1)\,\Pi_{i=1,i\neq 6}^{10} f_{I_i}\,(0) \\ &+ f_{I_7}\,(1)\,f_{I_{10}}\,(1)\,\Pi_{i=1,i\neq 7,i\neq 10}^{10} f_{I_i}\,(0) \\ &+ f_{I_8}\,(1)\,f_{I_9}\,(1)\,\Pi_{i=1,i\neq 8,i\neq 9}^{10} f_{I_i}\,(0)\,. \end{aligned}$$

□

Exemple 5.2 ***Portefeuille de deux contrats.*** *Pour une exposition à un risque spécifique i, les coûts au*

cours de la prochaine année pour un portefeuille sont définis par la v.a.

$$X_i = \begin{cases} D_i, & I_i = 1, \\ 0, & I_i = 0, \end{cases}$$

où les v.a. $I_i \sim Bernoulli\,(q_i = 0.1i)$ $(i = 1, 2)$, $D_i \sim Gamma\left(\alpha = i, \beta_i = \frac{1}{1000}\right)$ $(i = 1, 2)$. *Les v.a.* D_1 *et* D_2 *sont indépendantes entre elles et indépendantes du couple* (I_1, I_2). *On sait que* $f_{I_1,I_2}(1,1) = \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) = 0.06$. *On définit les coûts totaux pour le portefeuille par la v.a.* $S = X_1 + X_2$. *On observe que* $E[S] = 500$ *et* $\mathrm{Var}(S) = 1\ 390\ 000$. *L'expression de* F_S *est donnée par*

$$\begin{aligned} F_S(x) &= f_{I_1,I_2}(0,0)) + f_{I_1,I_2}(1,0)\,F_{D_1}(x) \\ &\quad + f_{I_1,I_2}(0,1)\,F_{D_2}(x) \\ &\quad + f_{I_1,I_2}(1,1)\,F_{D_1+D_2}(x) \\ &= f_{I_1,I_2}(0,0)) + f_{I_1,I_2}(1,0)\,H(x;1;\beta) \\ &\quad + f_{I_1,I_2}(0,1)\,H(x;2;\beta) \\ &\quad + f_{I_1,I_2}(1,1)\,H(x;3;\beta), \end{aligned}$$

où $D_1 + D_2 \sim Gamma\left(3, \frac{1}{1000}\right)$ *et* $H(x;\alpha,\beta)$ *est la fonction de répartition d'une loi gamma de paramètres* α *et* β. *Par exemple,* $F_S(4000) = 0.972160$. □

Exemple 5.3 *On considère un portefeuille de* n *contrats d'assurance vie temporaire 1 an émis à des assurés dont les durées de vie* $T_1, ..., T_n$ *sont indépendantes et identiquement distribuées. Le montant de prestation de décès est* $b_i = b$, $i = 1, ..., n$. *De plus,* $\Pr(T_i \leq 1) = q$, *soit la probabilité de décès au cours de la prochaine année. Les coûts pour le contrat* i *sont définis selon l'approche indemnitaire, soit*

$$X_i = \{bI_i,\ i = 1, ..., n\ \ ,$$

où $I_i \sim Bern(q)$. *Le montant total des sinistres pour le portefeuille est* $S = X_1 + ... + X_n$. *(a) Trouver les valeurs possibles de* S. *(b) Trouver* $E[S]$. *(c) Trouver* $Var(S)$. *(d) Trouver* $\Pr(S = k \times b)$, $k = 0, 1, ..., n$.

Solution 5.4 *(a)* $S \in \{0, b, 2b, ..., nb\}$. *(b)*

$$E[S] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = nE[X] = nbq.$$

(c)

$$\begin{aligned} Var(S) &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \\ &= nVar(X) \\ &= nb^2q(1-q). \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} S &= X_1 + ... + X_n \\ &= bI_1 + ... + bI_n \\ &= b(I_1 + ... + I_n) \\ &= bN, \end{aligned}$$

où N *correspond au nombre de décès parmi le goupe de risques individuels et donc* $N \sim Bin(n, q)$. *Par*

conséquent, on a

$$\begin{aligned}\Pr(S &= k\times b) = \Pr(bN = k\times b)\\ &= \Pr(N=k)\\ &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k},\ k=0,1,2,...,n.\end{aligned}$$

À noter que la distribution de $(I_1 + ... + I_n)$ *peut être identifiée à l'aide de la fgm comme suit :*

$$\begin{aligned}M_N(t) &= E\left[\mathrm{e}^{t(I_1+...+I_n)}\right]\\ &= E\left[\mathrm{e}^{tI_1}\right]...E\left[\mathrm{e}^{tI_n}\right]\\ &= M_{I_1}(t)...M_{I_n}(t)\\ &= (M_I(t))^n\\ &= (1-q+q\mathrm{e}^t)^n,\end{aligned}$$

ce qui correspond à la fgm d'une variable aléatoire $Binomiale(n,q)$.

Exemple 5.5 *On considère le portefeuille décrit à l'Exemple 5.3 où toutefois* $I_i \sim Bern(0.001i)$, $i = 1,...,n = 5$. *On suppose que* $I_1,...,I_5$ *sont des variables aléatoires indépendantes. (a) Trouver les valeurs possibles de* S. *(b) Trouver* $E[S]$. *(c) Trouver* $Var(S)$. *(d) Trouver* $\Pr(S = k\times b)$, $k = 0,1,...,n$.

Solution 5.6 *(a)* $S \in \{0, b, 2b, ..., 5b\}$. *(b)*

$$\begin{aligned}E[S] &= E[X_1 + ... + X_5]\\ &= \sum_{i=1}^{5} E[X_i]\end{aligned}$$

où $E[X_i] = bE[I_i] = bq_i = (b)(0.001i)$. *Donc,*

$$\begin{aligned}E[S] &= b(0.001 + 0.002 + 0.003 + 0.004 + 0.005)\\ &= 0.015b.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}Var(S) &= Var(X_1 + ... + X_5)\\ &= \sum_{i=1}^{5} Var(X_i)\end{aligned}$$

où $Var(X_i) = b^2 Var(I_i) = b^2 q_i(1-q_i) = b^2(0.001i)(1-0.001i)$. *Donc,*

$$\begin{aligned}Var(S) &= b^2((0.001)(0.999) + (0.002)(0.998) + (0.003)(0.997) + (0.004)(0.996) + (0.005)(0.995))\\ &= 0.014945b^2.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\Pr(S &= 0) = \Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, ..., X_5 = 0)\\ &= \Pr(X_1 = 0)...\Pr(X_5 = 0)\\ &= \Pr(I_1 = 0)...\Pr(I_5 = 0)\\ &= (1-0.001)(1-0.002)(1-0.003)(1-0.004)(1-0.005)\\ &= 0.98508.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(S &= b) = \Pr(X_1 = b, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 0) \\
+\Pr(X_1 &= 0, X_2 = b, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 0) \\
+\Pr(X_1 &= 0, X_2 = 0, X_3 = b, X_4 = 0, X_5 = 0) \\
+\Pr(X_1 &= 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = b, X_5 = 0) \\
+\Pr(X_1 &= b, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = b) \\
&= (0.001)\,(1-0.002)(1-0.003)(1-0.004)(1-0.005) \\
&\quad +(1-0.001)\,(0.002)\,(1-0.003)(1-0.004)(1-0.005) \\
&\quad +(1-0.001)(1-0.002)\,(0.003)\,(1-0.004)(1-0.005) \\
&\quad +(1-0.001)(1-0.002)(1-0.003)\,(0.004)\,(1-0.005) \\
&\quad +(1-0.001)(1-0.002)(1-0.003)(1-0.004)\,(0.005)
\end{aligned}$$

Même chose pour $\Pr(S = kb)$ *avec* $k = 2, 3, 4, 5$.

Exemple 5.7 *On considère le portefeuille décrit à l'Exemple 5.3 où toutefois le portefeuille est composé de 2 classes de* n_1 *et* n_2 *contrats indépendants. Pour les contrats de la première classe, on a*

$$\Pr(T_i \leq 1) = q_1,\ i = 1, ..., n_1$$

alors que pour les contrats de la deuxième classe, on a

$$\Pr(T_i \leq 1) = q_2,\ i = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2.$$

Le montant de prestation pour tous les contrats est de b. Développer l'expression de f_S *où* $S \in \{0, b, ..., nb\}$.

Solution 5.8 *On a*

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n_1} bI_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} bI_i \\
&= b\sum_{i=1}^{n_1} I_i + b\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} I_i \\
&= bN_1 + bN_2,
\end{aligned}$$

où $N_1 \sim Bin(n_1, q_1)$ *et* $N_2 \sim Bin(n_2, q_2)$. *On peut également écrire* $S = bN$, *où* $N = N_1 + N_2$ *n'obéit pas toutefois à une loi binomiale. On a donc*

$$\Pr(S = kb) = \Pr(N = k),\ k = 0, 1, ..., n$$

où la distribution de N *est obtenue avec le produit de convolution*

$$\Pr(N = k) = \sum_{j=0}^{k} \Pr(N_1 = j)\Pr(N_2 = n - j).$$

Exemple 5.9 *On considère le portefeuille décrit à l'Exemple 5.7 où le montant de prestation pour les risques de la deuxième classe est maintenant de* $b_2 = 2b$. *Trouver la fonction de masse de probabilité de* S.

Solution 5.10 *On a*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n_1} bI_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} 2bI_i \\ &= b\sum_{i=1}^{n_1} I_i + 2b\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} I_i \\ &= bN_1 + 2bN_2 \\ &= b\left(N_1 + 2N_2\right), \end{aligned}$$

où $N_1 \sim Bin\left(n_1, q_1\right)$ *et* $N_2 \sim Bin\left(n_2, q_2\right)$. *On a* $S \in \{0, b, 2b, 3b, ..., n_1 b + 2n_2 b\}$. *Pour calculer* $\Pr\left(S = kb\right)$, *on doit procéder cas par cas, c'est-à-dire*

$$\Pr\left(S = 0\right) = \Pr\left(N_1 = 0\right)\Pr\left(N_2 = 0\right)$$

$$\Pr\left(S = b\right) = \Pr\left(N_1 = 1\right)\Pr\left(N_2 = 0\right)$$

$$\Pr\left(S = 2b\right) = \Pr\left(N_1 = 2\right)\Pr\left(N_2 = 0\right) + \Pr\left(N_1 = 0\right)\Pr\left(N_2 = 1\right)$$

On observe ainsi avec l'Exemple 5.3, l'Exemple 5.7 et l'Exemple 5.9 que l'évaluation de la fonction de masse de S *devient plus difficile à évaluer lorsque la description du portefeuille est plus complexe.*

Exemple 5.11 *On considère le portefeuille suivant comportant 3 classes de risques supposés indépendants où chaque classe est un regroupement de risques homogènes :*

Classe	*# contrats*	*Prestation*	*Prob. décès*
1	$n^{(1)} = 5$	$b^{(1)} = 2000$	$q^{(1)} = 0.0037$
2	$n^{(2)} = 12$	$b^{(2)} = 3000$	$q^{(2)} = 0.0088$
3	$n^{(3)} = 9$	$b^{(3)} = 1000$	$q^{(3)} = 0.0065.$

On désigne les coûts du risque i *de la classe* j *par* $X_i^{(j)}$ *définie par*

$$X_i^{(j)} = b^{(j)} I_i^{(j)},$$

où $I_i^{(j)} \sim Bern(q^{(j)})$. *Le paramètre de la loi de Bernoulli ne dépend pas de* i *de telle sorte que la probabilité de décès est la même pour les risques d'une même classe. (a) Trouver* $E\left[S\right]$. *(b) Trouver* $Var\left(S\right)$. *(c) Trouver* $\Pr(S = 0)$, $\Pr(S = 1000)$, $\Pr(S = 2000)$.

Solution 5.12 *(a)*

$$\begin{aligned} E\left[S\right] &= E\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n^{(j)}} X_i^{(j)}\right] \\ &= n^{(1)}b^{(1)}q^{(1)} + n^{(2)}b^{(2)}q^{(2)} + n^{(3)}b^{(3)}q^{(3)} \\ &= (5)(2000)(0.0037) + (12)(3000)(0.0088) + (9)(1000)(0.0065) \\ &= 412.3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
Var\,(S) &= Var\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n^{(j)}} X_i^{(j)}\right) \\
&= n^{(1)}\left(b^{(1)}\right)^2 q^{(1)}(1-q^{(1)}) + n^{(2)}\left(b^{(2)}\right)^2 q^{(2)}(1-q^{(2)}) + n^{(3)}\left(b^{(3)}\right)^2 q^{(3)}(1-q^{(3)}) \\
&= (5)\,(2000)^2\,(0.0037)\,(1-0.0037) + (12)\,(3000)^2\,(0.0088)\,(1-0.0088) + (9)\,(1000)^2\,(0.0065)\,(1-0.0065) \\
&= 1\ 073\ 882.
\end{aligned}$$

(c) On a $S = S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)}$ *où* $S^{(j)} = b^{(j)}N^{(j)}$ *et* $N^{(j)} \sim Bin(n^{(j)}, q^{(j)})$*. Alors,*

$$\begin{aligned}
\Pr(S &= 0) = \Pr(S^{(1)} = 0, S^{(2)} = 0, S^{(3)} = 0) \\
&= \Pr(S^{(1)} = 0)\Pr(S^{(2)} = 0)\Pr(S^{(3)} = 0) \\
&= \Pr(N^{(1)} = 0)\Pr(N^{(2)} = 0)\Pr(N^{(3)} = 0) \\
&= (1-0.0037)^5(1-0.0088)^{12}(1-0.0065)^9 \\
&= 0.8325.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(S &= 1000) = \Pr(S^{(1)} = 0, S^{(2)} = 0, S^{(3)} = 1000) \\
&= \Pr(S^{(1)} = 0)\Pr(S^{(2)} = 0)\Pr(S^{(3)} = 1000) \\
&= \Pr(N^{(1)} = 0)\Pr(N^{(2)} = 0)\Pr(N^{(3)} = 1) \\
&= (1-0.0037)^5(1-0.0088)^{12}\binom{9}{1}(0.0065)(1-0.0065)^8 \\
&= 0.049.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(S &= 2000) = \Pr(S^{(1)} = 2000, S^{(2)} = 0, S^{(3)} = 0) \\
+\Pr(S^{(1)} &= 0, S^{(2)} = 0, S^{(3)} = 2000) \\
&= \Pr(S^{(1)} = 2000)\Pr(S^{(2)} = 0)\Pr(S^{(3)} = 0) \\
+\Pr(S^{(1)} &= 0)\Pr(S^{(2)} = 0)\Pr(S^{(3)} = 2000) \\
&= \Pr(N^{(1)} = 1)\Pr(N^{(2)} = 0)\Pr(N^{(3)} = 0) \\
+\Pr(N^{(1)} &= 0)\Pr(N^{(2)} = 0)\Pr(N^{(3)} = 2) \\
&= \binom{5}{1}(0.0037)(1-0.0037)^4(1-0.0088)^{12}(1-0.0065)^9 \\
&\quad +(1-0.0037)^5(1-0.0088)^{12}\binom{9}{2}(0.0065)^2(1-0.0065)^7 \\
&= 0.01674.
\end{aligned}$$

Exemple 5.13 *On considère le portefeuille de l'Exemple 5.11 où toutefois* $n^{(1)} = 421$*,* $n^{(2)} = 749$ *et* $n^{(3)} = 375$*. On fixe la prime par contrat à 1.2 fois la prime pure, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned}
\Pi_i^{(j)} &= \textit{prime pour } \textbf{\textit{un}} \textit{ risque de la classe } j \\
&= 1.2 \times E\left[X_i^{(j)}\right] = (1.2)\,b^{(j)}q^{(j)}.
\end{aligned}$$

À l'aide de l'approximation normale, évaluer la probabilité que les coûts totaux pour le portefeuille excèdent le revenu total de primes, soit $\Pr(S > REV)$*, où* $REV = \textit{revenu total} = \sum_{j=1}^{3} n^{(j)}\Pi^{(j)}$ *où* $n^{(j)}\Pi^{(j)}$ *correspond à l'ensemble des primes de la classe* j*.*

Solution 5.14

$$\begin{aligned}\Pr(S > REV) &= 1 - \Pr(S \leq REV) \\ &= 1 - \Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{REV - E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[S] &= E\left[S^{(1)}\right] + E\left[S^{(2)}\right] + E\left[S^{(3)}\right] \\ &= (421)(2000)(0.0037) + (749)(3000)(0.0088) + (375)(1000)(0.0065) \\ &= 25\ 326.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(S) &= Var\left(S^{(1)}\right) + Var\left(S^{(2)}\right) + Var\left(S^{(3)}\right) \\ &= (421)(2000)^2(0.0037)(1-0.0037) + (749)(3000)^2(0.0088)(1-0.0088) + (375)(1000)^2(0.0065)(1-0.0065) \\ &= 67\ 428\ 179\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}REV &= \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} \\ &= (1.2)\,E[S] \\ &= 30391.8\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Pr(S &> REV) = 1 - \Pr(S \leq REV) \\ &= 1 - \Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{REV - E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) \\ &= 1 - \Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{30391.8 - 25326.5}{\sqrt{67428179}}\right) \\ &\approx 1 - \Pr(Z \leq 0.6169) \ \textit{où}\ Z \sim N(0,1) \\ &= 1 - 0.7313 \\ &= 0.2687.\end{aligned}$$

Exemple 5.15 *Soit une portefeuille constitué de deux risques X_1 et X_2 définis par*

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases}$$

où B_1, B_2 et (I_1, I_2) sont indépendants. On ne précise toutefois pas la relation de dépendance entre I_1 et I_2. On définit le montant total des sinistres pour le portefeuille par $S = X_1 + X_2$. (a) Trouver $E[S]$. (b) Trouver $Var(S)$. (c) Trouver F_S.

Solution 5.16 *(a)*

$$\begin{aligned}E[S] &= E[X_1 + X_2] \\ &= E[X_1] + E[X_2],\end{aligned}$$

où $E[X_i] = E[I_i]\,E[B_i]$. (b)

$$Var(S) = Var(X_1) + Var(X_1) + 2Cov(X_1, X_2).$$

$$Cov(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1]\,E[X_2]$$

$$E[X_1X_2] = E[E[X_1X_2|I_1, I_2]]$$

$$\begin{aligned}
E[X_1X_2|I_1 = 0, I_2 = 0] &= 0 \\
E[X_1X_2|I_1 = 0, I_2 = 1] &= 0 \\
E[X_1X_2|I_1 = 1, I_2 = 0] &= 0 \\
E[X_1X_2|I_1 = 1, I_2 = 1] &= E[B_1B_2] = E[B_1]E[B_2].
\end{aligned}$$

On déduit donc

$$E[X_1X_2|I_1, I_2] = I_1I_2E[B_1]E[B_2]$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
E[X_1X_2] &= E[I_1I_2E[B_1]E[B_2]] \\
&= E[B_1]E[B_2]E[I_1I_2].
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] \\
&= E[B_1]E[B_2]E[I_1I_2] - E[B_1]E[B_2]E[I_1]E[I_2] \\
&= E[B_1]E[B_2]Cov(I_1, I_2).
\end{aligned}$$

En conclusion, on obtient

$$\begin{aligned}
Var(S) &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\
&= E[I_1]Var(B_1) + Var(I_1)E^2[B_1] \\
&\quad +E[I_2]Var(B_2) + Var(I_2)E^2[B_2] \\
&\quad +2E[B_1]E[B_2]Cov(I_1, I_2).
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= \Pr(S \leq x) \\
&= \Pr(X_1 + X_2 \leq x) \\
&= \Pr(X_1 + X_2 \leq x|I_1 = 0, I_2 = 0)\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) \\
&\quad + \Pr(X_1 + X_2 \leq x|I_1 = 1, I_2 = 0)\Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \\
&\quad + \Pr(X_1 + X_2 \leq x|I_1 = 0, I_2 = 1)\Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) \\
&\quad + \Pr(X_1 + X_2 \leq x|I_1 = 1, I_2 = 1)\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0)\Pr(B_1 \leq x) + \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1)\Pr(B_2 \leq x) \\
&\quad + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1)\Pr(B_1 + B_2 \leq x).
\end{aligned}$$

Exemple 5.17 *On considère un portefeuille de $n = 2$ contrats d'assurance-maladie. On suppose que le montant total des sinistres pour le contrat i est défini par*

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases},$$

où $I_1 \sim Bern(0.2)$, $I_2 \sim Bern(0.25)$, $B_1 \sim Gamma\left(2, \frac{2}{1000}\right)$ et $B_2 \sim Gamma\left(1, \frac{2}{1000}\right)$. On suppose que les variables aléatoires I_1, I_2, B_1, B_2 sont indépendantes. (a) Trouver $E[S]$. (b) Trouver $Var(S)$. (c) Trouver $\Pr(S \leq 2100)$.

Solution 5.18 *(a)*

$$\begin{aligned} E[S] &= E[X_1 + X_2] \\ &= E[X_1] + E[X_2] \\ &= E[I_1]\,E[B_1] + E[I_2]\,E[B_2] \\ &= (0.2)\,(1000) + (0.25)\,(500) \\ &= 325. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(X_1 + X_2) \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) \\ &= E[I_1]\,Var[B_1] + Var[I_1]\,E^2[B_1] + E[I_2]\,Var[B_2] + Var[I_2]\,E^2[B_2] \\ &= (0.2)\left(\frac{2}{(2/1000)^2}\right) + (0.2)\,(0.8)\left(\frac{2}{2/1000}\right)^2 + (0.25)\left(\frac{1}{(2/1000)^2}\right) + (0.25)\,(0.75)\left(\frac{1}{2/1000}\right)^2 \\ &= 260000 + 109375 \\ &= 369375. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \Pr(S &\leq 2100) = \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1} \Pr(S \leq 2100\,|I_1 = i_1, I_2 = i_2\,)\Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2) \\ &= \Pr(X_1 + X_2 \leq 2100\,|I_1 = 0, I_2 = 0\,)\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) \\ +\Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100\,|I_1 = 1, I_2 = 0\,)\Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \\ +\Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100\,|I_1 = 0, I_2 = 1\,)\Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) \\ +\Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100\,|I_1 = 1, I_2 = 1\,)\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(S &\leq 2100) = (1)\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0)\Pr(B_1 \leq 2100) \\ +\Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1)\Pr(B_2 \leq 2100) + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1)\Pr(B_1 + B_2 \leq 2100) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 0) = \Pr(I_1 = 0)\Pr(I_2 = 0) \\ &= (0.8)\,(0.75) \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 1, I_2 = 0) = \Pr(I_1 = 1)\Pr(I_2 = 0) \\ &= (0.2)\,(0.75) \\ &= 0.15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) = \Pr(I_1 = 0)\Pr(I_2 = 1) \\ &= (0.8)\,(0.25) \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 1, I_2 = 1) = \Pr(I_1 = 1)\Pr(I_2 = 1) \\ &= (0.2)\,(0.25) \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(B_1 &\leq 2100) = 1 - \sum_{j=0}^{2-1} \frac{\left(\left(\frac{2}{1000}\right)(2100)\right)^j \mathrm{e}^{-\left(\frac{2}{1000}\right)(2100)}}{j!} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-4.2} - 4.2\mathrm{e}^{-4.2} \\ &= 0.922\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(B_2 &\leq 2100) = 1 - \mathrm{e}^{-4.2} \\ &= 0.985\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(B_1 + B_2 &\leq 2100) = 1 - \sum_{j=0}^{3-1} \frac{\left(\left(\frac{2}{1000}\right)(2100)\right)^j \mathrm{e}^{-\left(\frac{2}{1000}\right)(2100)}}{j!} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-4.2} - 4.2\mathrm{e}^{-4.2} - \frac{(4.2)^2\mathrm{e}^{-4.2}}{2!} \\ &= 0.78976,\end{aligned}$$

car $(B_1 + B_2) \sim Erlang\left(3, \frac{2}{1000}\right)$. *On obtient donc*

$$\begin{aligned}\Pr(S &\leq 2100) = 0.6 + (0.15)(0.922) + (0.12)(0.985) + (0.05)(0.78976) \\ &= 0.974788.\end{aligned}$$

À noter que dans cet exemple, on peut calculer F_S *de façon explicite étant donné que* $(B_1 + B_2) \sim Erlang(\beta)$.

Exemple 5.19 *On considère l'Exemple 5.17 mais où toutefois les variables aléatoires* I_1 *et* I_2 *ne sont plus indépendantes. On suppose plutôt que* $Cov(I_1, I_2) = 0.03$. *(a) Trouver* $E[S]$. *(b) Trouver* $Var(S)$. *(c) Trouver* $\Pr(S \leq 2100)$.

Solution 5.20 *(a) Même si les variables aléatoires* I_1 *et* I_2 *ne sont plus indépendantes, on obtient le même résultat pour* $E[S]$. *(b)*

$$\begin{aligned}Var(S) &= Var(X_1 + X_2) \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\ &= 260000 + 109375 + 2Cov(X_1, X_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Cov(X_1, X_2) &= Cov(I_1B_1, I_2B_2) \\ &= E[I_1B_1I_2B_2] - E[I_1B_1]E[I_2B_2] \\ &= E[B_1]E[B_2]E[I_1I_2] - E[B_1]E[I_1]E[B_2]E[I_2] \\ &= E[B_1]E[B_2]Cov(I_1, I_2) \\ &= (1000)(500)(0.03) \\ &= 15000.\end{aligned}$$

On aurait pu également évaluer $Cov(X_1, X_2)$ *comme suit :*

$$Cov(X_1, X_2) = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]$$

où

$$\begin{aligned}E[X_1X_2] &= E[I_1B_1I_2B_2] \\ &= E[B_1]E[B_2]E[I_1I_2].\end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} E[I_1 I_2] &= Cov(I_1, I_2) + E[I_1]\,E[I_2] \\ &= 0.03 + (0.2)\,(0.25) \\ &= 0.08 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= (1000)\,(500)\,(0.08) \\ &= 40000. \end{aligned}$$

De plus, on sait que

$$\begin{aligned} E[X_1] &= E[I_1]\,E[B_1] = (0.2)\,(1000) = 200 \\ E[X_2] &= E[I_2]\,E[B_2] = (0.25)\,(500) = 125, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= 40\ 000 - (200)\,(125) \\ &= 15000. \end{aligned}$$

Une troisième approche aurait pu être utilisée pour trouver $Cov(X_1, X_2)$, soit en conditionnant sur (I_1, I_2). On a

$$Cov(X_1, X_2) = E\left[Cov(X_1, X_2\,|\underline{I})\right] + Cov(E\left[X_1\,|\underline{I}\right], E\left[X_2\,|\underline{I}\right]),$$

où $\underline{I} = (I_1, I_2)$ et

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2\,|I_1 = 0, I_2 = 0) &= 0 \\ Cov(X_1, X_2\,|I_1 = 1, I_2 = 0) &= 0 \\ Cov(X_1, X_2\,|I_1 = 0, I_2 = 1) &= 0 \\ Cov(X_1, X_2\,|I_1 = 1, I_2 = 1) &= Cov(B_1, B_2). \end{aligned}$$

On a donc

$$Cov(X_1, X_2\,|\underline{I}) = I_1 I_2 Cov(B_1, B_2)$$

d'où

$$\begin{aligned} E\left[Cov(X_1, X_2\,|\underline{I})\right] &= Cov(B_1, B_2) E[I_1 I_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

car les variables aléatoires B_1 et B_2 sont indépendantes. De plus, on a pour le 2ième terme impliqué dans la covariance

$$\begin{aligned} E\left[X_1\,|\underline{I}\right] &= I_1 E[B_1] \\ E\left[X_2\,|\underline{I}\right] &= I_2 E[B_2] \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$Cov(E\left[X_1\,|\underline{I}\right], E\left[X_2\,|\underline{I}\right]) = E[B_1]\,E[B_2]\,Cov(I_1, I_2)$$

On obtient donc pour la covariance

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= E\left[Cov(X_1, X_2\,|\underline{I})\right] + Cov(E\left[X_1\,|\underline{I}\right], E\left[X_2\,|\underline{I}\right]) \\ &= 0 + E[B_1]\,E[B_2]\,Cov(I_1, I_2) \\ &= (1000)\,(500)\,(0.03) \\ &= 15000, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Var\,(S) &= Var\,(X_1 + X_2) \\ &= Var\,(X_1) + Var\,(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\ &= 260000 + 109375 + (2)\,(15000) \\ &= 399375. \end{aligned}$$

(c) On doit évaluer les probabilités conjointes d'occurence.

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 1, I_2 = 1) = E\,[I_1 I_2] \\ &= Cov(I_1, I_2) + E\,[I_1]\,E\,[I_2] \\ &= 0.03 + (0.2)\,(0.25) \\ &= 0.08 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 1, I_2 = 0) = \Pr(I_1 = 1) - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= 0.2 - 0.08 \\ &= 0.12, \end{aligned}$$

car $\Pr(I_1 = 1) = \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1)$.

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) = \Pr(I_2 = 1) - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= 0.25 - 0.08 \\ &= 0.17. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 0) = 1 - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) - \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) \\ &= 1 - 0.08 - 0.12 - 0.17 \\ &= 0.63. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(S &\leq 2100) = \sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} \Pr(S \leq 2100\,|I_1 = i_1, I_2 = i_2\,)\,\Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2) \\ &= \Pr(X_1 + X_2 \leq 2100\,|I_1 = 0, I_2 = 0\,)\,\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) \\ +\Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100\,|I_1 = 1, I_2 = 0\,)\,\Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \\ +\Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100\,|I_1 = 0, I_2 = 1\,)\,\Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) \\ +\Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100\,|I_1 = 1, I_2 = 1\,)\,\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(S &\leq 2100) = (1)\,\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) + \Pr(B_1 \leq 2100)\,\Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \\ +\Pr(B_2 &\leq 2100)\,\Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) + \Pr(B_1 + B_2 \leq 2100)\,\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= 0.63 + (0.922)\,(0.12) + (0.985)\,(0.17) + (0.78976)\,(0.08) \\ &= 0.9712708. \end{aligned}$$

Exemple 5.21 *On considère l'Exemple 5.17 mais avec un nombre n de contrat et où les variables aléatoires I_i $(i = 1, ..., n)$ sont identiquement distribuées comme la variable aléatoire canonique I. On suppose également que les variables aléatoires B_i $(i = 1, ..., n)$ sont identiquement distribuées. Les variables aléatoires $I_1, ..., I_n$ sont considérées indépendantes de même pour les variables aléatoires $B_1, ..., B_n$. Trouver l'expression pour F_S.*

Solution 5.22 *On définit $S = X_1 + ... + X_n$ et $N = I_1 + ... + I_n$, où $N \sim Bin(n, q)$. On peut donc exprimer*

S sous la forme d'une somme aléatoire

$$S = \begin{cases} 0, \ N = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N} C_k, \ N > 0, \end{cases}$$

où C_k représente les coûts pour un des contrats ayant eu un sinistre ou plus et N correspond au nombre de contrats du portefeuille ayant eu un sinistre ou plus. De plus, on a que les variables aléatoires $C_1, C_2, ...$ sont identiquement distribuées comme la variable aléatoire B représentant le montant total des sinistres pour un contrat. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \Pr(S &\leq x) = \Pr(N = 0) + \sum_{k=1}^{n} \Pr(S \leq x \,|N = k\,) \Pr(N = k) \\ &= \Pr(N = 0) + \sum_{k=1}^{n} \Pr(C_1 + ... + C_k \leq x) \Pr(N = k). \end{aligned}$$

Remarque 5.23 *La variable aléatoire B_1 diffère de la variable aléatoire C_1.*

Remarque 5.24 *On ne se préoccupe pas de la provenance des coûts, c'est-à-dire de quel contrat provient les sinistres.*

Remarque 5.25 *Il est possible d'écrire S comme une somme aléatoire car les contrats sont homogènes, c'est-à-dire $I_1, ..., I_n$ sont des variables aléatoires identiquement distribuées ainsi que les variables aléatoires $B_1, ..., B_n$.*

Exemple 5.26 *On suppose qu'un portefeuille d'assurance est divisé en $m = 3$ classes. On désigne par $n^{(j)}$ le nombre de contrats pour la classe j avec*

j	$n^{(j)}$	$q^{(j)}$	*Loi de* $B^{(j)}$
1	*200*	*0.15*	*Pareto*$(\alpha = 2.2, \lambda = 1200)$
2	*150*	*0.24*	*Lognormale*$(\mu = 7, \sigma^2 = 4)$
3	*350*	*0.18*	*Gamma*$\left(\alpha = 3, \beta = \frac{3}{1000}\right)$.

On suppose que les contrats sont indépendants et $S = \sum\limits_{j=1}^{3} \sum\limits_{i=1}^{n^{(j)}} X_i^{(j)}$, où les variables aléatoires $X_i^{(j)}$ $\left(i = 1, ..., n^{(j)}\right)$ sont identiquement distribuées comme la variable aléatoire $X^{(j)}$ définie par

$$X^{(j)} = \begin{cases} B^{(j)}, \ I^{(j)} = 1 \\ 0, \ I^{(j)} = 0 \end{cases}$$

Utiliser l'approximation normale pour évaluer $\Pr(S > x)$.

Solution 5.27 *On a*

$$\begin{aligned} E\,[S] &= E\left[\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n^{(j)}} X_i^{(j)}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n^{(j)}} E\left[X_i^{(j)}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{3} n^{(j)} E\left[X^{(j)}\right], \end{aligned}$$

car $X_i^{(j)}$ $\left(i = 1, ..., n^{(j)}\right)$ *sont des variables aléatoires identiquement distribuées comme la variable aléatoire* $X^{(j)}$. *On a les moments suivants pour les variables aléatoires* $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}$ *:*

$$\begin{aligned}
B^{(1)} &\sim Pareto(\alpha = 2.2, \lambda = 1200) \\
E\left[B^{(1)}\right] &= \frac{\lambda}{\alpha - 1} = \frac{1200}{2.2 - 1} = 1000 \\
Var\left(B^{(1)}\right) &= \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \left(\frac{\lambda}{\alpha - 1}\right)^2 \\
&= \frac{2(1200)^2}{(1.2)\,(0.2)} - (1000)^2 \\
&= 11000000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{(2)} &\sim Lognormale(\mu = 7, \sigma^2 = 4) \\
E\left[B^{(2)}\right] &= \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = \mathrm{e}^{7 + \frac{4}{2}} = \mathrm{e}^9 \\
Var\left(B^{(2)}\right) &= \mathrm{e}^{2\mu + 2\sigma^2} - \left(\mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}\right)^2 \\
&= \mathrm{e}^{22} - (\mathrm{e}^9)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{(3)} &\sim Gamma\left(\alpha = 3, \beta = \frac{3}{1000}\right) \\
E\left[B^{(3)}\right] &= \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{\frac{3}{1000}} = 1000 \\
Var\left(B^{(3)}\right) &= \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{3}{\left(\frac{3}{1000}\right)^2} = 333333.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E[S] &= (200)\,(0.15)\,(1000) + (150)\,(0.24)\left(\mathrm{e}^9\right) + (350)\,(0.18)\,(1000) \\
&= 384711.
\end{aligned}$$

Pour la variance du montant total des sinistres, on a

$$\begin{aligned}
Var(S) &= Var\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n^{(j)}} X_i^{(j)}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} n^{(j)} Var\left(X^{(j)}\right)
\end{aligned}$$

car les contrats sont supposés indépendants et $X_i^{(j)} \sim X^{(j)}$, *pour* $i = 1, ..., n^{(j)}$. *Ainsi,*

$$\begin{aligned}
Var(S) &= (200)\left(E\left[I^{(1)}\right]Var\left(B^{(1)}\right) + Var\left(I^{(1)}\right)E^2\left[B^{(1)}\right]\right) \\
&\quad + (150)\left(E\left[I^{(2)}\right]Var\left(B^{(2)}\right) + Var\left(I^{(2)}\right)E^2\left[B^{(2)}\right]\right) \\
&\quad + (350)\left(E\left[I^{(3)}\right]Var\left(B^{(3)}\right) + Var\left(I^{(3)}\right)E^2\left[B^{(3)}\right]\right) \\
&= (200)\left((0.15)(11000000) + (0.15)(0.85)\left(1000^2\right)\right) \\
&\quad + (150)\left((0.24)\left(\mathrm{e}^{22} - \mathrm{e}^{18}\right) + (0.24)(0.76)\left(\mathrm{e}^9\right)^2\right) \\
&\quad + (350)\left((0.18)(333333) + (0.18)(0.82)\left(1000^2\right)\right) \\
&= (200)(1777500) + (150)(856597069) + (350)(207600) \\
&= 128917720350.
\end{aligned}$$

Selon l'approximation normale, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(S &\leq x) = \Phi\left(\frac{x - E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{x - 384711}{\sqrt{128917720350}}\right)
\end{aligned}$$

Avec ces exemples, on constate rapidement que le calcul de la fonction de répartition de la somme de v.a. peut s'avérer difficile. En actuariat, plusieurs méthodes d'agrégation ont été proposées, en particulier pour des portefeuilles constitués de v.a. indépendantes. Récemment, plusieurs chercheurs se sont aussi intéressés aux méthodes d'agrégation pour des sommes de v.a. dépendantes ou toute autre fonction de v.a. dépendantes.

Dans ce chapitre, on examine tout d'abord l'agrégation de risques X_1, ..., X_n où les v.a. X_i sont modélisées de telle sorte qu'ils nous permettent d'obtenir une forme explicite pour la fonction de répartition de S. Pour la majorité des autres modèles de X_i, on doit avoir recours à des méthodes d'agrégation pour évaluer F_S. Ces méthodes sont expliquées aux chapitres 2 et 11 pour les portefeuilles de risques indépendants et aux chapitres 13 et 14 pour les portefeuilles de risques dépendants.

On regroupe en trois catégories les méthodes d'approximation pour évaluer F_S. La première catégorie est constituée des méthodes basées sur les moments et elle sera traitée dans le présent chapitre. La deuxième catégorie correspond aux méthodes de simulation stochastique (ou Monte-Carlo) et ces méthodes seront abordées au chapitre 2. La troisième catégorie regroupe les méthodes numériques récursives et l'étude de ces méthodes fait l'objet du chapitre 11.

5.3 Agrégation et cas particuliers

Dans cette section, on examine des cas particuliers pour lesquels il est possible d'identifier la loi de $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

5.3.1 Loi Poisson composée

La proposition suivante contient un résultat important en actuariat.

Proposition 5.28 *Soit les v.a. indépendantes* X_1, ..., X_n *où*

$$X_i \sim PComp(\lambda_i; F_{B_i}), i = 1, 2, ..., n.$$

Alors, $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim PComp(\lambda_S, F_C)$, *où* $\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ *et*

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S}F_{B_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S}F_{B_2}(x) + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda_S}F_{B_n}(x).$$

Le résultat de la proposition 5.28 est valide peu importe que les fgm de B_1, ..., B_n existent ou non. Néanmoins, on a choisi d'utiliser les fgm pour démontrer ce résultat. Une démonstration à l'aide des transformées de Laplace est fournie dans [Rolski et al., 2009].

Preuve. La fgm de X_i est donnée par

$$\mathcal{M}_{X_i}(t) = \mathcal{P}_{M_i}(\mathcal{M}_{B_i}(t)) = \mathrm{e}^{\lambda_i\left(\mathcal{M}_{B_i}(t)-1\right)}, \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

À partir de (1.46), l'expression de la fgm de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = E\left[\mathrm{e}^{t\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}\right] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i\left(\mathcal{M}_{B_i}(t)-1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_1\left(\mathcal{M}_{B_1}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\lambda_2\left(\mathcal{M}_{B_2}(t)-1\right)}...\mathrm{e}^{\lambda_n\left(\mathcal{M}_{B_n}(t)-1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_1\mathcal{M}_{B_1}(t)-\lambda_1}\mathrm{e}^{\lambda_2\mathcal{M}_{B_2}(t)-\lambda_2}...\mathrm{e}^{\lambda_n\mathcal{M}_{B_n}(t)-\lambda_n} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_1\mathcal{M}_{B_1}(t)+\lambda_2\mathcal{M}_{B_2}(t)+...+\lambda_n\mathcal{M}_{B_n}(t)-(\lambda_1+\lambda_2...+\lambda_n)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_S\left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_S}\mathcal{M}_{B_1}(t)+\frac{\lambda_2}{\lambda_S}\mathcal{M}_{B_2}(t)+...+\frac{\lambda_n}{\lambda_S}\mathcal{M}_{B_n}(t)\right)-1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_S\left(\mathcal{M}_C(t)-1\right)},
\end{aligned}$$

en posant $\lambda_S = \lambda_1 + ... + \lambda_n$ et

$$\mathcal{M}_C(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S}\mathcal{M}_{B_1}(t) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S}\mathcal{M}_{B_2}(t) + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda_S}\mathcal{M}_{B_n}(t). \tag{5.1}$$

On déduit de (5.1) que la distribution de C est un mélange des distributions de B_1, ... , B_n. D'après (5.1), cela implique que F_C est une combinaison convexe de $F_{B_1}, ..., F_{B_n}$, soit

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S}F_{B_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S}F_{B_2}(x) + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda_S}F_{B_n}(x).$$

Comme

$$\mathcal{M}_S(t) = \mathrm{e}^{\lambda_S\left(\mathcal{M}_C(t)-1\right)} = \mathcal{P}_N(\mathcal{M}_C(t)) \tag{5.2}$$

est la fgm d'une loi Poisson composée, on déduit de (5.2) que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim PComp(\lambda_S, F_C)$ telle que

$$S = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} C_k, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases},$$

avec les hypothèses usuelles, $N = \sum_{i=1}^{n} M_i \sim Pois(\lambda_S)$ et $C_k \sim C$ pour $k \in \mathbb{N}^+$. ■

Une interprétation de ce résultat fondamental en actuariat est fournie dans la remarque suivante.

Remarque 5.29 *Le risque global s'analyse en considérant le portefeuille comme une seule entité. Il importe peu de savoir de quel risque provient un sinistre. Comme S obéit à une loi Poisson composée, tous les résultats liés à cette loi sont valides pour ce cas particulier. Pour que ce résultat soit valide, il n'est pas nécessaire de supposer que les v.a. $M_1, M_2, ..., M_n$ soient identiquement distribuées ou que les v.a. $B_1, B_2, ..., B_n$ soient identiquement distribuées.*

5.3.2 Loi binomiale négative composée

Le résultat de la prochaine proposition est moins général que celui de la proposition 5.28.

Proposition 5.30 *Soit les v.a. indépendantes X_1, ..., X_n où*

$$X_i \sim BNComp(r_i, q; F_B), i = 1, 2, ..., n.$$

Alors, $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BNComp(r_S, q; F_B)$, où $r_S = \sum_{i=1}^{n} r_i$.

Preuve. On sait que la fgm de X_i est donnée par

$$\mathcal{M}_{X_i}(t) = \mathcal{P}_{M_i}(\mathcal{M}_{B_i}(t)) = \left(1 - \frac{(1-q)}{q}(\mathcal{M}_B(t) - 1)\right)^{-r_i}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

On développe l'expression de la fgm de S comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = E\left[\mathrm{e}^{t\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}\right] = \prod_{i=1}^n \mathcal{M}_{X_i}(t) \\
&= \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{(1-q)}{q}(\mathcal{M}_B(t) - 1)\right)^{-r_i} \\
&= \left(1 - \frac{(1-q)}{q}(\mathcal{M}_B(t) - 1)\right)^{-r_S},
\end{aligned}$$

avec $r_S = \sum_{i=1}^n r_i$. Posons $N = \sum_{i=1}^n M_i$. Alors, on déduit que $N \sim BinNég(r_S, q)$ avec

$$\mathcal{P}_N(t) = \left(1 - \frac{(1-q)}{q}(t-1)\right)^{-r_S}.$$

On déduit

$$\mathcal{M}_S(t) = \left(1 - \frac{(1-q)}{q}(\mathcal{M}_B(t) - 1)\right)^{-r_S} = \mathcal{P}_N(\mathcal{M}_B(t)),$$

ce qui implique que S obéit à une loi binomiale négative composée avec

$$S = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} B_k, \ N > 0 \\ 0, \ N = 0 \end{cases},$$

où N est le nombre de sinistres pour l'ensemble du portefeuille et B_k correspond au montant du $k^{ième}$ sinistre produit par le portefeuille avec $B_k \sim B$ pour $k \in \mathbb{N}^+$. ■

L'interprétation du résultat de la proposition 5.30 est semblable à celle fournie à la remarque 5.29. On déduit de la proposition 5.30 que

$$F_S(x) = \Pr(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N = k) F_{B_1+B_2+...+B_k}(x), \ x \geq 0.$$

Il est important de mentionner que, si l'on relâche la contrainte sur les paramètres des lois de $M_1, ..., M_n$ ou la contrainte sur les lois des montants de sinistres, la loi de S_n n'est pas binomiale négative composée.

5.3.3 Loi binomiale composée

Le prochain résultat est semblable à la celui de la proposition 5.30.

Proposition 5.31 *Soit les v.a. indépendantes X_1, ..., X_n où*

$$X_i \sim BComp(n_i, q; F_B), i = 1, 2, ..., n.$$

Alors, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim BComp(n_S, q; F_B)$, où $n_S = \sum_{i=1}^n n_i$.

Preuve. La preuve est semblable à celle de la proposition 5.30. ■

5.4 Méthodes d'approximation fondées sur les moments

Plusieurs méthodes fondées sur les moments de la v.a. S ont été suggérées en actuariat et gestion quantitative des risques. L'idée de ces méthodes est d'approximer la v.a. S par la v.a. T dont il est aisé

d'évaluer F_T et les différentes mesures de risque qui y sont associées. On détermine les paramètres de la distribution de T de telle sorte que $E\left[S^k\right] = E\left[T^k\right]$ pour $k = 1, 2, ..., m$, où le nombre m de moments est relativement petit, p. ex., $m = 2$, 3 ou 4.

On peut classifier les méthodes basées sur les approximations sous trois approches.

Selon la première approche, on approxime la v.a. S par une v.a. T obéissant à une distribution connue, dont les plus fréquemment considérées sont les distributions normale, gamma, lognormale, inverse gaussienne, ou la distribution Pareto généralisée. L'approximation est basée sur les deux ou trois premiers moments. Il arrive aussi qu'un paramètre de translation soit ajouté. Souvent, la qualité de l'approximation ne peut pas être quantifiée. L'approximation basée sur la distribution normale est fondée sur le théorème central limite.

Selon la deuxième approche, les approximations sont des raffinements de l'approximation obtenue avec la distribution normale. Des exemples d'approximations sous cette deuxième approche sont l'approximation Normal Power, des approximations résultant de développements de la série d'Edgeworth et les approximations de type Cornish Fisher. Ces approximations sont basées uniquement sur les premiers moments de la v.a. S. En actuariat, l'approximation Normal Power est utilisée pour évaluer approximativement la distribution d'une somme aléatoire. En gestion quantitative des risques, l'approximation Cornish Fisher est souvent employée pour faire des calculs liés à la mesure VaR. Un des principaux handicaps des méthodes relevant de la deuxième approche est qu'elle ne conduit pas à une distribution pour T. De plus, il est difficile de mesurer la qualité de ces approximations.

Selon la troisième approche, on approxime la distribution inconnue de S par un mélange de distributions connues. Il est proposé dans [Feldmann and Whitt, 1998] une méthode d'approximation fondée sur les moments supposant que la v.a. T obéit à un mélange fini de lois exponentielles. On suggère dans [Johnson and Taaffe, 1989] une approche similaire en supposant que la v.a. T obéit à un mélange fini de distributions Erlang avec des paramètres communs d'échelle.

Il n'est pas possible de traiter en détails dans le présent ouvrage les méthodes d'approximations fondées sur les moments. Dans cette section, on présente brièvement celles qui utilisent la loi normale, la loi gamma translatée, la loi lognormale et la loi F-généralisée.

5.4.1 Approximation fondée sur la distribution normale

La méthode basée sur la distribution normale, souvent appelée approximation normale, est fondée sur le théorème central limite. Les valeurs de $E[S]$ et $VaR(S)$ sont supposées connues. On approxime la v.a. S par la v.a. $T \sim Normale\left(E[T], \mathrm{Var}(T)\right)$, où $E[T] = E[S]$ et $\mathrm{Var}(T) = \mathrm{Var}(S)$. En utilisant les résultats de l'annexe (et démontrés au chapitre 1), il en résulte que

$$\begin{aligned}
F_S(x) &\simeq F_T(x) = \Phi\left(\frac{x - E[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right), \\
VaR_\kappa(S) &\simeq VaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}VaR_\kappa(Z), \\
TVaR_\kappa(S) &\simeq TVaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}TVaR_\kappa(Z), \\
&= E[S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(VaR_\kappa(Z))^2}{2}}}{(1-\kappa)\sqrt{2\pi}},
\end{aligned}$$

où $Z \sim Normale(0, 1)$.

La version classique du théorème central limite est la suivante.

Théorème 5.32 ***Théorème central limite (version classique).*** *Soit X_1, X_2, ..., X_n des v.a. iid avec $E[X_i] = \mu_X$ et $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_X^2$ pour $i = 1, 2, ..., n$. On définit la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, avec $E[S_n] = n\mu_X$ et $\mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2$. Alors, on a*

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z,$$

quand $n \to \infty$.

Il existe plusieurs variantes au théorème central limite. On présente ci-dessous la version de ce théorème dans le cas où les.v.a. X_1, ...,X_n ne sont pas identiquement distribuées.

Théorème 5.33 ***Théorème central limite (variante).*** *Soit $X_1, ..., X_n$ des v.a. indépendantes, dont les espérances et les variances existent. On définit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec $E[S_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$ et $\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(S_i)$. Alors, on a*

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z,$$

quand $n \to \infty$. La condition nécessaire et suffisante pour l'application du théorème, appelée condition de Lindeberg, est que, pour tout $s > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \int_{|y|>s\sigma} (y - \mu_i)^2 \, \mathrm{d}F_{X_i}(y) = 0.$$

Preuve. Voir, p. ex., [Panjer and Willmot, 1992]. ■

Remarque 5.34 *La condition de Lindeberg signifie que les variances des v.a. X_i doivent être petites par rapport à la variance de la somme S_n. Voir les détails dans, p. ex., [Panjer and Willmot, 1992].*

La qualité de l'approximation par la loi normale standard dépend du nombre de risques et du choix de la loi pour X. C'est une approximation simple à utiliser, mais elle n'est pas toujours satisfaisante, en particulier dans la queue de la distribution de S. En utilisant l'approximation normale, il y a donc de fortes chances qu'on évalue inadéquatement les mesures de risque. Pour remédier à ce problème, on a recours aux méthodes récursives (voir chapitre 11) et aux méthodes basées sur la simulation (voir chapitre 2).

5.4.2 Approximation fondée sur la distribution gamma translatée

L'approximation basée sur la distribution gamma translatée relève de la première approche. Comme la loi gamma possède une asymétrie positive, elle est jugée mieux adaptée que la loi normale pour approximer le comportement aléatoire du montant total des coûts pour un portefeuille. Soit une v.a. $T \sim Gamma(\alpha, \beta)$. Alors, on approxime S par $T + x_0$ où $T + x_0$ obéit à une loi gamma translatée. Si x_0 est strictement positif, la v.a. S ne peut admettre de valeur nulle, contrairement à la réalité. Cependant, comme il a été mentionné, cette approximation ne sert habituellement qu'à analyser la portion de droite de la courbe de S. On identifie les trois paramètres α, β et x_0 comme étant les solutions des trois équations suivantes :

$$E[S] = E[T + x_0] = E[T] + x_0 = \frac{\alpha}{\beta} + x_0,$$

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(T + x_0) = \mathrm{Var}(T) = \frac{\alpha}{\beta^2},$$

$$\gamma(S) = \frac{E\left[(S - E[S])^3\right]}{(\mathrm{Var}(S))^{\frac{3}{2}}} = \gamma(T + x_0) = \gamma(T) = \frac{2}{\alpha^{\frac{1}{2}}}.$$

On obtient $\alpha = \frac{4}{(\gamma(S))^2}$, $\beta = \frac{2}{\gamma(S)\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}$ et $x_0 = E[S] - \frac{2\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{\gamma(S)}$. L'approximation basée sur la distribution gamma translatée est valide pour analyser des valeurs supérieures à $E[S]$. Elle peut être utilisée notamment pour évaluer approximativement $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour des valeurs élevées de κ. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) &\simeq VaR_\kappa(T) + x_0, \\ TVaR_\kappa(S) &\simeq TVaR_\kappa(T) + x_0. \end{aligned}$$

Si S possède une masse de probabilité non négligeable à 0, on peut écrire

$$F_S(x) = 1 - q + qF_{S'}(x),$$

où $q = F_S(0)$, et choisir d'approximer $S' = (S|S > 0)$ par $T + x_0$.

5.4.3 Approximation fondée sur la distribution lognormale

En actuariat et en gestion quantitative des risques, on est souvent confronté à évaluer le comportement aléatoire de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les v.a. X_1, ..., X_n sont indépendantes ou non, identiquement distribuées ou non et dont les marginales sont de loi lognormale. Une des premières approximations proposées et qui est fréquemment utilisée en pratique est d'approximer la v.a. S par la v.a. $T \sim LN\left(\mu_T, \sigma_T^2\right)$. On définit $\zeta_k = \frac{E\left[T^k\right]}{E[T]^k}$, $k = 1, 2$. Les expressions de μ_T et σ_T satisfaisant les relations $E[S] = E[T]$ et $E\left[S^2\right] = E\left[T^2\right]$ sont $\sigma_T = \sqrt{\ln \zeta_2}$ et $\mu_T = \ln(E[T]) - \frac{1}{2}\sigma_T^2$.

Dans le cas où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont iid avec $X_i \sim LN\left(\mu, \sigma^2\right)$, l'approximation admet des résultats satisfaisants si $\sigma < 1$.

5.4.4 Approximation fondée sur la distribution F-généralisée

Soit une v.a. $T \sim FG(\alpha, \lambda, \tau)$ avec $E[T] = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}$, $E\left[T^2\right] = \lambda^2 \frac{\tau(\tau+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$ et $E\left[T^3\right] = \lambda^3 \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}$, en supposant que $\alpha > 3$. On définit $\zeta_k = \frac{E\left[T^k\right]}{E[T]^k}$, $k = 1, 2, 3$. Les expressions de τ, α et λ satisfaisant les relations $E[S] = E[T]$, $E\left[S^2\right] = E\left[T^2\right]$ et $E\left[S^3\right] = E\left[T^3\right]$ sont données par

$$\tau = 2\frac{\zeta_3 - \zeta_2^2}{\zeta_2^2 + \zeta_2\zeta_3 - 2\zeta_3}, \quad \alpha = \frac{\tau + 1 - 2\tau\zeta_2}{\tau + 1 - \tau\zeta_2}$$

et $\lambda = E[T]\,\frac{\alpha-1}{\tau}$.

5.5 Mutualisation et activités d'assurance

Il est connu que les activités d'assurance sont fondées sur la mutualisation des risques. En fait, ce sujet constitue le cœur du présent chapitre. Les modèles étudiés et les mesures présentées jusqu'à présent servent à quantifier, à comprendre et analyser la mutulisation des risques, ses bénéfices et ses limites.

On examine le comportement de W_n via les mesures de risque VaR et TVaR pour un portefeuille de risques indépendants.

Exemple 5.35 *Soit des risques individuels i.i.d. X_1 ,..., X_n où X_i est défini par*

$$X_i = \begin{cases} B_i, & si\ I_i = 1 \\ 0, & si\ I_i = 0 \end{cases}, \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n).$$

Les v.a. I_i et B_i sont indépendantes, $I_i \sim Bern(0.2)$ et $B_i \sim B \sim Ga(0.1, 1/100)$, pour $i = 1, 2, ..., n$. La part par contrat est définie par $W_n = \frac{S_n}{n}$ où $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BComp(n, q; F_B)$. La fonction de densité du coût moyen W_n pour les valeurs de $n = 100, 500, 1000$ est présentée à l'illustration 5.1. Lorsque le nombre n de contrats augmente, la v.a. W_n tend à prendre des valeurs qui s'approche de $E[W_n] = E[X] = 2$ et la variance de W_n diminue. □

DEBUT FIGURE Courbes de $f_{W_n}(x)$ pour $n = 100$ (ligne continue), 500 (ligne avec petits traits) et 1000 (ligne pointillée) où $W_n = \frac{S_n}{n}$ et où $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BComp(n, q; F_B)$.
LABEL Fig3005
FICHIER ch3fnsdenswn.bmp
FIN FIGURE

Exemple 5.36 *On considère un conglomérat de n risques i.i.d. X_1, ..., X_n où les coûts $X_i \sim X$ pour $i = 1$, 2, ..., n. On suppose que $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ où $\lambda = 1.4$ et $B \sim Ga\left(1.8, 1000^{-1}\right)$. On sait que*

Illustration 5.1 – Courbes de $f_{W_n}(x)$ pour $n = 100$ (ligne continue), 500 (ligne avec petits traits) et 1000 (ligne pointillée) où $W_n = \frac{S_n}{n}$ et où $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BComp(n, q; F_B)$.

$E[X] = 1.4 \times 1800 = 2520$. *On reproduit les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous :*

κ	$VaR_\kappa(X)$	$TVaR_\kappa(X)$
0	0	2520
0.5	1834.662	4521.468
0.95	7767.176	9872.831
0.99	11 175.341	13 127.725
0.995	12 558.726	14 464.324

À partir de la proposition 5.28, on déduit que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim PComp(n\lambda, F_C)$ *avec* $C \sim Ga\left(1.8, 1000^{-1}\right)$. *Pour* $n = 100$, *on fournit les valeurs de* $VaR_\kappa(W_n)$ *et* $TVaR_\kappa(W_n)$ *dans le tableau ci-dessous :*

κ	$VaR_\kappa(W_n)$	$TVaR_\kappa(W_n)$
0	0	2520
0.5	2513.663	2731.835
0.95	2967.491	3089.056
0.99	3165.472	3266.675
0.995	3239.398	3334.715

On constate l'influence de l'agrégation des risques sur les valeurs de la mesure $TVaR$. *Comme prévu, on observe que*

$$VaR_{0.5}(S_{100}) > VaR_{0.5}(X_1) + ... + VaR_{0.5}(X_{100})$$

alors que

$$TVaR_\kappa(S_{100}) \leq TVaR_\kappa(X_1) + ... + TVaR_\kappa(X_{100}),$$

pour toutes les valeurs de κ. *Bref, comme la mesure VaR n'est pas cohérente, elle n'est pas adéquate pour analyser le comportement de* W_n. *À l'aide de la mesure TVaR, on observe que le bénéfice de mutualisation par contrat (à* $\kappa = 0.995$*) est*

$$\begin{aligned}
\frac{B_\kappa^{TVaR}(S)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}(X_i) - \frac{1}{n} TVaR_{0.995}(S_n) \\
&= TVaR_{0.995}(X) - TVaR_{0.995}(W_n) \\
&= 14\ 464.324 - 3334.715 = 11\ 129.609,
\end{aligned}$$

ce qui est significatif avec seulement $n = 100$ contrats. $\square$

Dans le prochain exemple, on traite du comportement de W_n via les mesures de risque VaR et TVaR dans le contexte d'un portefeuille de risques dépendants.

Exemple 5.37 *Soit un portefeuille de n contrats d'assurance IARD. On considère le volet dommages matériels à la suite d'un accident d'un contrat d'assurance automobile. Les coûts encourus pour le contrat i $(i = 1, 2, ..., n)$ sont définis par la v.a. X_i où la v.a. X_i est définie selon l'approche fréquence-sévérité avec*

$$X_i = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, & M_i > 0. \\ 0, & M_i = 0 \end{cases},$$

où M_i est une v.a. discrète et les v.a. $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, ... sont i.i.d. et indépendantes de la v.a. M_i (convention : $B_{i,1} \sim B_{i,2} \sim ... \sim B \sim Exp\left(\frac{1}{10000}\right)$). La v.a. M est influencée par les conditions climatiques qui sont représentées par la v.a. $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$. Sachant que $\Theta = \theta_j$, $(M_i|\Theta = \theta_j) \sim Pois\,(0.05\theta_j)$ pour $i = 1, 2, ..., n$ avec $\theta_1 = 1$ et $\theta_2 = 4$ et $\Pr(\Theta = \theta_1) = 0.8$ et $\Pr(\Theta = \theta_2) = 0.2$.

On définit $S_n = \sum_{n=1}^{n} X_i$ et le coût moyen par contrat $W_n = \frac{1}{n} S_n$. L'espérance et la variance de M_1 sont $E[M_1] = 0.08$ et $\mathrm{Var}(M_1) = 0.0836$. On obtient les valeurs de $E[X_1]$ et $\mathrm{Var}(X_1)$ avec

$$E[X_1] = E[M_1]\,E[B_1] = 800$$

et

$$\mathrm{Var}(X_1) = E[M_1]\,\mathrm{Var}(B_1) + \mathrm{Var}(M_1)\,E[M_1]^2 = 16\ 360\ 000.$$

Comme

$$\mathrm{Cov}(M_1, M_2) = (E[M_1 M_2] - E[M_1]\,E[M_2]) = 0.0036,$$

on a

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E[B_1]\,E[B_2]\,\mathrm{Cov}(M_1, M_2) = 360\ 000.$$

Les valeurs de $f_{M_1}(k) = \sum_{j=1}^{2} \Pr(\Theta = \theta_i)\,\mathrm{e}^{-0.05\theta_j} \frac{(0.05j)^k}{k!}$ pour $k = 0, 1, 2$ sont 0.924730, 0.070798 et 0.004226. De plus, la valeur de

$$F_{X_1}(x) = f_{M_1}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{M_1}(k)\,F_{B_{1,1}+...B_{1,k}}(x),$$

pour $x = 20\ 000$ est 0.9885342.

On constate que $\lim_{n\to\infty} E[W_n] = E[X_1] = 800$ et

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(W_n) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \mathrm{Var}(X_1) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \right) \\ &= \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 360\ 000. \end{aligned}$$

Le risque global n'est pas complètement éliminé à la suite de la mutualisation en raison de la présence du facteur commun représentant le risque climatique. On a $F_{W_n}(x) = F_{S_n}(nx)$ et, par la formule des probabilités totales, l'expression de $F_{S_n}(x)$ est donnée par

$$F_{S_n}(x) = \sum_{j=1}^{2} f_\Theta(\theta_j)\,F_{S_n|\Theta=\theta_j}(x).$$

En appliquant la proposition 5.28, $(S_n|\Theta = \theta_j) \sim PComp\,(0.05\theta_j, F_B)$. Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs exactes de $VaR_\kappa(W_n)$ et de $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $n = 1$, 100 et 10 000 et $\kappa = 99$ % :

n	1	100	10 000
$VaR_\kappa(W_n)$	21 453.347	3119.389	2104.876
$TVaR_\kappa(W_n)$	32 074.91	3466.654	2132.145

□

5.6 Calcul de la prime majorée - exemple

On illustre les principes de la section 3.8 dans l'exemple suivant.

Exemple 5.38 *On suppose que* $X \sim BNComp\,(r, q; F_B)$ *avec* $B \sim Exp\,(\beta)$ *et*

$$E\left[\mathrm{e}^{aX}\right] = \left(\frac{q}{\left(1-(1-q)\left(\frac{\beta}{\beta-a}\right)\right)}\right)^r.$$

Pour $r = 0.2$, $q = 0.5$ *et* $\beta = \frac{1}{1000}$, *on déduit que* $E\,[X] = 200$ *et* $\mathrm{Var}\,(X) = 600\ 000$. *La prime pure est 200. Les valeurs de primes majorées selon les différents principes sont fournies dans le tableau suivant :*

Principes	$\Pi\,(X)$
Valeur espérée ($\kappa = 0.2$)	*240*
Écart type ($\kappa_1 = 0.2$)	*256.98*
Écart type ($\kappa_2 = 0.2$)	*265.28*
Variance ($\kappa = 0.00005$)	*230*
Exponentiel ($\kappa = 0.0001$)	*235.57*
VaR ($\kappa = 0.99$)	*4001.34*
TVaR ($\kappa = 0.99$)	*5679.49*

Les valeurs calculées selon les principes de la VaR et TVaR sont exactes. Le principe adapté de la VaR *avec* $n = 1000$ *et* $\kappa = 0.99$ *donne* $\Pi\,(X) = VaR_{0.99}\,(W_{1000}) = 260.3677$ *(valeur exacte) et le principe adapté de la* $TVaR$ *avec* $n = 1000$ *et* $\kappa = 0.99$ *mène à une prime majorée* $\Pi\,(X) = TVaR_{0.99}\,(W_{1000}) = 270.0610$ *(valeur exacte). Pour le principe de l'écart type, le paramètre* κ_1 *(ou* κ_2*) a été calculé en appliquant le principe adapté de la VaR (ou TVaR) où l'on évalue* $VaR_{0.99}\,(W_{1000})$ *(ou* $TVaR_{0.99}\,(W_{1000})$*) conjointement avec l'approximation normale. Selon les valeurs obtenues, les valeurs de primes calculées selon le principe de la variance et le principe exponentiel sont semblables. La disparité entre les valeurs produites avec ces deux principes augmentent avec le paramètre* a. *Il est intéressant de comparer les valeurs exactes et approximatives (avec l'approximation normale) de la prime majorée selon le principe adapté de la VaR (ou de la TVaR). Enfin, l'économie due à la mutualisation par contrat selon la TVaR est significative puisque* $TVaR_{0.99}\,(X) - TVaR_{0.99}\,(W_{1000}) = 5679.490 - 270.0610 = 5409.429$. □

5.7 Mutualisation et facteur aléatoire commun

La présence d'un facteur aléatoire commun a un impact considérable sur le risque global d'un portefeuille et elle met en évidence les limites de la mutualisation des risques. Le facteur aléatoire commun correspond à un facteur aléatoire affectant l'ensemble des risques d'un portefeuille d'une institution financière. Il se manifeste dans différents contextes des activités d'assurance et financières : risque climatique, risque d'inflation, risque de mortalité stochastique, etc. Ces contextes sont étudiés séparément.

On a recours à des modèles simples inspirés des modèles basés sur les mélanges communs. On considère les cas où la dépendance est introduite via un ou des facteurs communs pouvant affecter l'ensemble ou des parties du portefeuille.

5.7.1 Mutualisation, risque systématique et risque non systématique

La présence d'un facteur commun (mortalité stochastique, risque climatique, inflation, etc.) induit une relation de dépendance entre les risques. Afin de comprendre le comportement du risque global du portefeuille, on le scinde en deux composantes, soit le risque non systématique et le risque systématique. Le risque non

systématique est le risque que l'on parvient à éliminer en mutualisant les contrats (risques individuels) alors que le risque systématique n'est pas éliminé en mutualisant les risques.

Soit un portefeuille de n risques dont les coûts sont définis par les v.a. X_1, ... , X_n. Les contrats du portefeuille sont exposés à un risque commun, représenté par la v.a. Θ, discrète ou continue. On définit les coûts totaux du portefeuille par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. L'espérance de la v.a. S est donnée par $E[S] = E_\Theta[E[S|\Theta]]$. Utilisant la formule de la variance totale, on décompose $\mathrm{Var}(S)$ sous la forme suivante

$$\mathrm{Var}(S) = E_\Theta[\mathrm{Var}(S|\Theta)] + \mathrm{Var}_\Theta(E[S|\Theta]),$$

où $E_\Theta[\mathrm{Var}(S|\Theta)]$ correspond à la composante de la variance de S expliquée par le risque non systématique (diversifiable par la mutualisation) et $\mathrm{Var}_\Theta(E[S|\Theta])$ est la composante qui explique le risque systématique (non diversifiable par la mutualisation).

Exemple 5.39 *On considère le volet dommages matériels suite à un accident d'un contrat d'assurance automobile. Les coûts encourus sont définis par la v.a. X définie selon l'approche fréquence-sévérité avec*

$$X = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{M} B_j, M > 0 \\ 0, M = 0 \end{cases},$$

où M est une v.a. discrète et les v.a. $B_1, B_2, ...$ sont i.i.d. et indépendantes de la v.a. M. De plus, $B_1 \sim B_2 \sim ... \sim B \sim Exp\left(\frac{1}{10\ 000}\right)$. La v.a. M est influencée par les conditions climatiques qui sont représentées par la v.a. $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. Sachant que $\Theta = \theta_j$, $(M|\Theta = \theta_j)$ obéit à une loi binomiale négative ($r = 0.2, \beta = 0.5 \times \theta_j$) avec $\theta_1 = 0.5$, $\theta_2 = 2$ et $\theta_3 = 5$, et $\Pr(\Theta = \theta_1) = 0.8$, $\Pr(\Theta = \theta_2) = 0.15$ et $\Pr(\Theta = \theta_3) = 0.05$.

En premier lieu, on trouve en conditionnant sur la v.a. Θ que $E[M] = 0.095$ et $\mathrm{Var}(M) = 0.208975$ ce qui implique que $E[X] = 950$ et $\mathrm{Var}(X) = 30\ 397\ 500$. Les valeurs des mesures $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ sont données dans le tableau ci-dessous pour différentes valeurs de κ :

κ	$VaR_\kappa(X)$	$TVaR_\kappa(X)$
0.5	0	1900
0.95	3601.618	18 471.14
0.995	37 976.583	57 352.82

Ensuite, pour un portefeuille de m contrats identiques, on examine la part allouée par contrat $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ où la v.a. $X_i \sim X$ $(i = 1, 2, ..., n)$. L'espérance et la variance de W_n sont 950 et 4 072 500 pour $n = 10$ et elles sont 950 et 1 440 000 pour $n = 100$. On observe que $\lim_{n\to\infty} E[W_n] = E[X_1] = 950$ et

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(W_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathrm{Cov}(X_1, X_2)\right) \\ &= \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 1\ 147\ 500. \end{aligned}$$

Les valeurs de $VaR_\kappa(W_n)$ et $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $n = 10$ et 100 et avec $\kappa = 0.95$ et 0.995 sont fournies dans le tableau ci-dessous :

κ	$VaR_\kappa(W_{10})$	$TVaR_\kappa(W_{10})$	$VaR_\kappa(W_{100})$	$TVaR_\kappa(W_{100})$
0.95	4677.549	7796.20	3422.793	5144.924
0.995	12 147.825	15 986.83	6986.245	7894.919

Pour expliquer la valeur de $\mathrm{Var}(W_n)$, on la décompose en deux termes : la composante diversifiable $E_\Theta[\mathrm{Var}(W_n|\Theta)]$ et la composante non diversifiable, $\mathrm{Var}_\Theta(E[W_n|\Theta])$. Les expressions de ces composantes sont

$$\begin{aligned} E_\Theta[\mathrm{Var}(W_n|\Theta)] &= \frac{E\left[rn0.5\Theta(1 + 0.5\Theta)\ 10\ 000^2 + rn0.5\Theta\ 10\ 000^2\right]}{n^2} \\ &= \frac{29\ 250\ 000}{n} \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Var}_\Theta(E[W_n|\Theta]) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}rn0.5\Theta\ 10\ 000\right) = 1\ 147\ 500.$$

Pour n = 1, 10 et 100, on a :

n	$E_\Theta\left[\mathrm{Var}\left(W_n\vert\Theta\right)\right]$	$\mathrm{Var}_\Theta\left(E\left[W_n\vert\Theta\right]\right)$	$\mathrm{Var}\left(W_n\right)$
1	29 250 000	1 147 500	30 397 500
10	2 925 000	1 147 500	4 072 500
100	292 500	1 147 500	1 440 000

On constate que $\lim_{n\to\infty} E\left[\mathrm{Var}\left(W_n\vert\Theta\right)\right] = 0$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\Theta\left(E\left[W_n\vert\Theta\right]\right) = 1\ 147\ 500.$$

Bref, la valeur de $\mathrm{Var}\left(W_n\right)$ *a deux sources :* $\frac{E_\Theta[\mathrm{Var}(W_n\vert\Theta)]}{\mathrm{Var}(W_n)}$ *est le pourcentage de la variance de* $\mathrm{Var}\left(W_n\right)$ *que l'on obtient par mutualisation et* $\frac{\mathrm{Var}_\Theta(E[W_n\vert\Theta])}{\mathrm{Var}(W_n)}$ *est le pourcentage de la variance de* $\mathrm{Var}\left(W_n\right)$ *que l'on ne réduit pas via la mutualisation et qui est due à l'environnement aléatoire (conditions climatiques).*

On suppose que l'on fixe la prime pour un contrat par $\pi_{\kappa,n} = TVaR_\kappa\left(W_n\right)$. *On décompose la prime* $\pi_{\kappa,n}$ *de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}
\pi_{\kappa,n} &= E\left[W_n\right] + \left(TVaR_\kappa\left(W_n\right) - E\left[W_n\right]\right) \\
&= E\left[W_n\right] \\
&\quad + \frac{E_\Theta\left[\mathrm{Var}\left(W_n\vert\Theta\right)\right]}{\mathrm{Var}\left(W_n\right)}\left(TVaR_\kappa\left(W_n\right) - E\left[W_n\right]\right) \\
&\quad + \frac{\mathrm{Var}_\Theta\left(E\left[W_n\vert\Theta\right]\right)}{\mathrm{Var}\left(W_n\right)}\left(TVaR_\kappa\left(W_n\right) - E\left[W_n\right]\right) \\
&= PP + CD_{\kappa,n} + CND_{\kappa,n}.
\end{aligned}$$

On interprète les trois termes comme suit : PP *est la prime pure,* $CD_{\kappa,n}$ *permet de financer le risque diversifiable et* $CND_{\kappa,n}$ *permet de financer le risque non diversifiable. Les valeurs de* PP, $CD_{\kappa,n}$, $CND_{\kappa,n}$ *pour* n = 10, 100 *et* κ = 0.95, 0.995 *sont :*

κ	PP	$CD_{\kappa,10}$	$CND_{\kappa,10}$	$CD_{\kappa,100}$	$CND_{\kappa,100}$
0.95	950	4917.160	1929.040	852.094	3342.830
0.995	950	10 799.933	4236.897	1410.687	5534.232

On observe qu'augmenter le nombre de contrats permet de diminuer la valeur de la prime $\pi_{\kappa,n} = TVaR_\kappa\left(W_n\right)$ *et que la composante diversifiable tend vers 0 lorsque le nombre de contrats devient élevé. En outre, le pourcentage de la variance expliqué par le risque diversifiable diminue de 71.8 % à 20.3 % en augmentant le nombre de contrats de 10 à 100. Bien que la mutualisation des risques permette d'éliminer le risque diversifiable, la compagnie d'assurance reste exposée au risque lié à la dépendance entre les assurés, induite par la v.a.* Θ. □

5.7.2 Mutualisation et risque d'inflation

La modélisation du risque d'inflation est illustrée dans l'exemple suivant.

Exemple 5.40 ***Risque d'inflation.*** *On considère un portefeuille de* n *contrats d'assurance maladie. On veut examiner l'impact de l'inflation (indexation des frais médicaux) sur les coûts du portefeuille. Les coûts pour un contrat sont définis par la v.a.* X_i, *où* $X_i = \mathrm{e}^R \times Y_i$, *avec*

$$Y_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases},$$

pour $i = 1, 2, 3, ..., n$. *On suppose que les v.a.* Y_1,...,Y_n *sont indépendantes. Pour des fins de simplification, on suppose que le taux d'indexation* R *est une v.a. discrète avec* $\Pr\left(R = r_j\right) = f_R\left(r_j\right)$ *pour* $j = 1, 2, ..., m$. *On a*

$$E\left[X_i\right] = E\left[\mathrm{e}^R \times Y_i\right] = E\left[\mathrm{e}^R\right] \times E\left[Y_i\right]$$

et

$$E\left[X_i^2\right] = E\left[\mathrm{e}^{2R} \times Y_i^2\right] = E\left[\mathrm{e}^{2R}\right] \times E\left[Y_i^2\right],$$

pour $i = 1, 2, 3, ..., n$. *De plus, on déduit*

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x) &= \sum_{j=1}^{m} \Pr(R = r_j) \Pr(X_i \leq x | R = r_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Pr(R = r_j) F_{Y_i}\left(x\mathrm{e}^{-r_j}\right), \end{aligned}$$

avec $F_{Y_i}(z) = 1 - q_i + q_i F_{B_i}(z)$, *pour* $i = 1, 2, 3, ..., n$. *Pour* $i \neq i'$, *on mentionne que* $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i'}) = E[X_i X_{i'}] - E[X_i] E[X_{i'}]$ *avec*

$$E[X_i X_{i'}] = E\left[\mathrm{e}^R \times Y_i \times \mathrm{e}^R \times Y_{i'}\right] = E\left[\mathrm{e}^{2R}\right] \times E[Y_i] E[Y_{i'}].$$

Après quelques manipulations, on obtient

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{i'}) = E[X_i X_{i'}] - E[X_i] E[X_{i'}] = E[Y_i] E[Y_{i'}] \mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^R\right).$$

Le montant total des coûts pour le portefeuille est $S = \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathrm{e}^R T$ *où* $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. *L'espérance de* S *est donnée par*

$$E[S] = E\left[\mathrm{e}^R \times T\right] = E\left[\mathrm{e}^R\right] \times E[T].$$

Pour le calcul de la variance, on peut recourir à l'approche suivante $\mathrm{Var}(S) = E\left[S^2\right] - E[S]^2$ *avec*

$$E\left[S^2\right] = E\left[\mathrm{e}^{2R} \times T^2\right] = E\left[\mathrm{e}^{2R}\right] \times E\left[T^2\right]$$

et $E\left[T^2\right] = \mathrm{Var}(T) + E[T]^2$. *On peut aussi appliquer la formule de la variance totale*

$$\mathrm{Var}(S) = E_R[\mathrm{Var}(S|R)] + \mathrm{Var}_R(E[S|R])$$

avec

$$\begin{aligned} E[S|R] &= E[T]\mathrm{e}^R \\ \mathrm{Var}(S|R) &= \mathrm{Var}(T)\mathrm{e}^{2R}, \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} E_R[\mathrm{Var}(S|R)] &= \mathrm{Var}(T) E\left[\mathrm{e}^{2R}\right] \\ \mathrm{Var}_R(E[S|R]) &= E[T]^2 \mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^R\right). \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$F_S(x) = \sum_{j=1}^{m} f_R(r_j) \Pr(S \leq x | R = R_j) = \sum_{j=1}^{m} f_R(r_j) F_T\left(x\mathrm{e}^{-r_j}\right).$$

Dans le cas où $F_T\left(x\mathrm{e}^{-r_j}\right)$ *ne peut pas être évaluée de façon exacte, on a recours à des méthodes d'agrégation.* □

5.7.3 Mutualisation et mortalité stochastique

On examine un phénomène intéressant propre à une compagnie d'assurance de personnes. La mortalité stochastique est un sujet d'actualité. Par mortalité stochastique, on entend à la fois le risque d'amélioration des durées de vie des assurés d'un portefeuille de contrats de rente ou d'assurance ou le risque d'épidémie, par exemple.

Afin d'expliquer l'impact et la gestion du risque de mortalité stochastique, on a recours à un modèle simple. On considère deux portefeuilles d'une compagnie d'assurance de personnes. Le portefeuille 1 comporte n_1 contrats d'assurance vie temporaire 1 an. Le portefeuille 2 comprend n_2 contrats d'assurance dotation pure

1 an. Un contrat d'assurance temporaire prévoit, en cas de décès pendant la prochaine année, le versement d'une prestation à la fin de l'année. En cas de survie jusqu'à la fin de la première année, le titulaire du contrat d'assurance dotation pure se voit verser une prestation à la fin de l'année.

L'ensemble des contrats des deux portefeuilles est exposé à la mortalité stochastique, représentée par la v.a. $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$ avec $\alpha_j = \Pr(\Theta = \theta_j) = 0.5$, pour $j = 1, 2$. La v.a. Θ influence les durées de vie de tous les assurés des portefeuilles 1 et 2. On définit les coûts éventuels pour la prochaine année du contrat k du portefeuille i par la v.a. $X_{i,k}$. Pour le portefeuille 1, on a

$$X_{1,k} = \begin{cases} b_k, \text{ si l'assuré } k \text{ décède pendant l'année} \\ 0, \text{ si l'assuré } k \text{ survit jusqu'à la fin de l'année} \end{cases},$$

alors que pour le portefeuille 2, on définit

$$X_{2,k} = \begin{cases} 0, \text{ si l'assuré } k \text{ décède pendant l'année} \\ c_k, \text{ si l'assuré } k \text{ survit jusqu'à la fin de l'année} \end{cases}.$$

Le montant total des sinistres pour le portefeuille i ($i = 1, 2$) est représenté par la v.a. $S_i = X_{i,1} + ... + X_{i,n_i}$. Le montant total des sinistres pour les deux portefeuilles combinés est défini par la v.a. $S = S_1 + S_2$. La probabilité conditionnelle de décès de l'assuré k du portefeuille i sachant que $\Theta = \theta_j$ est désignée par $q_{i,k}^{(\theta_j)}$. De plus, la probabilité non conditionnelle de décès de l'assuré k du portefeuille i est $q_{i,k} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j q_{i,k}^{(\theta_j)}$. Tous les assurés sont distincts. Sachant Θ, les durées de vie des assurés sont conditionnellement indépendantes. On ne tient pas compte du taux d'intérêt dans les calculs.

Il est important de mentionner que les assurés des contrats d'assurance temporaire et les titulaires des contrats d'assurance dotation pure ne font pas partie du même groupe d'âge.

Il est clair que $E[X_{1,k}] = b_k q_{1,k}$, $E[X_{2,k}] = c_k (1 - q_{1,k})$, $\mathrm{Var}(X_{1,k}) = b_k^2 (1 - q_{1,k}) q_{1,k}$, $\mathrm{Var}(X_{2,k}) = c_k^2 (1 - q_{2,k}) q_{2,k}$. On quantifie le risque associé à chaque v.a. S_1, S_2 et S par leurs variances. Pour chacune de ces v.a., on utilise la formule de la variance totale pour décomposer la variance en deux composantes : une composante quantifiant la mortalité systématique et une deuxième composante quantifiant la mortalité non systématique :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S_i) &= E[\mathrm{Var}(S_i|\Theta)] + \mathrm{Var}(E[S_i|\Theta]), \; i = 1, 2 \\ \mathrm{Var}(S) &= E[\mathrm{Var}(S|\Theta)] + \mathrm{Var}(E[S|\Theta]). \end{aligned}$$

Ainsi, deux sources expliquent la valeur des variances de S_1, S_2 et S :

— % de $\mathrm{Var}(S_i)$ (ou $\mathrm{Var}(S)$) expliqué par le risque non systématique (mutualisation) : $\frac{E[\mathrm{Var}(S_i|\Theta)]}{\mathrm{Var}(S_i)}$ (ou $\frac{E[\mathrm{Var}(S|\Theta)]}{\mathrm{Var}(S)}$) ;

— % de $\mathrm{Var}(S_i)$ (ou $\mathrm{Var}(S)$) expliqué par le risque systématique (mortalité stochastique) : $\frac{\mathrm{Var}(E[S_i|\Theta])}{\mathrm{Var}(S_i)}$ (ou $\frac{\mathrm{Var}(E[S|\Theta])}{\mathrm{Var}(S)}$).

On considère le problème suivant. Pour un portefeuille d'assurance dotation pure 1 an, on suppose que $\frac{\mathrm{Var}(E[S_2|\Theta])}{\mathrm{Var}(S_2)} >> \frac{E[\mathrm{Var}(S_i|\Theta)]}{\mathrm{Var}(S_i)}$, comme on s'y attend en pratique. Alors, on fusionne le portefeuille d'assurance dotation pure 1 an avec un portefeuille d'assurance temporaire 1. En procédant de la sorte, on espère que la source $\frac{\mathrm{Var}(E[S|\Theta])}{\mathrm{Var}(S)}$ du risque systématique s'approche de zéro, ce qui implique que l'on a réussi à éliminer le risque systématique.

Il reste à déterminer sous quelle condition cela est possible. En fait, on veut que $\mathrm{Var}(E[(S|\Theta)])$ soit égal à zéro. Par convention, on suppose que

$$q_i^{(\theta_1)} > q_i > q_i^{(\theta_2)},$$

pour $i = 1, 2$. On suppose aussi que les quantités c, n_2 et b sont connues. De plus, les probabilités α_1, $q_1^{(\theta_1)}$, $q_2^{(\theta_1)}$, α_2, $q_1^{(\theta_2)}$, $q_2^{(\theta_2)}$ sont connues d'avance d'après le modèle. Il reste à déterminer le nombre n_1 de contrats.

À cette fin, on développe, en fonction des paramètres du modèle, les expressions de la composante

quantifiant la mortalité systématique pour chaque v.a. S_1, S_2 et S. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(E\left[(S_1|\Theta)\right]\right) &= E\left[\left(E\left[(S_1|\Theta)\right]-E\left[S_1\right]\right)^2\right]\\ &= \sum_{j=1}^{2}\alpha_j\left(bn_1q_1^{(\theta_j)}-bn_1q_1\right)^2.\end{aligned}$$

Ensuite, l'expression de $\mathrm{Var}\left(E\left[(S_2|\Theta)\right]\right)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(E\left[(S_2|\Theta)\right]\right) &= E\left[\left(E\left[(S_2|\Theta)\right]-E\left[S_2\right]\right)^2\right]\\ &= \sum_{j=1}^{2}\alpha_j\left(cn_2\left(1-q_2^{(\theta_j)}\right)-cn_2\left(1-q_2\right)\right)^2.\end{aligned}$$

Enfin, on déduit l'expression suivante pour $\mathrm{Var}\left(E\left[(S|\Theta)\right]\right)$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}\left(E\left[(S|\Theta)\right]\right)\\ =\;& E\left[\left(E\left[(S|\Theta)\right]-E\left[S\right]\right)^2\right]\\ =\;& E\left[\left(E\left[(S_1|\Theta)\right]-E\left[S_1\right]+E\left[(S_2|\Theta)\right]-E\left[S_2\right]\right)^2\right]\\ =\;& \sum_{j=1}^{2}\alpha_j\left(E\left[(S_1|\Theta=\theta_j)\right]-E\left[S_1\right]+E\left[(S_2|\Theta=\theta_j)\right]-E\left[S_2\right]\right)^2\end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}\left(E\left[(S|\Theta)\right]\right)\\ =\;& \sum_{j=1}^{2}\alpha_j\left(bn_1q_1^{(\theta_j)}-bn_1q_1+cn_2\left(1-q_2^{(\theta_j)}\right)-cn_2\left(1-q_2\right)\right)^2.\end{aligned} \tag{5.3}$$

On veut trouver n_1 de telle sorte que (5.3) soit nulle. Alors, (5.3) devient

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}\left(E\left[(S|\Theta)\right]\right)\\ =\;& \sum_{j=1}^{2}\alpha_j\left(bn_1\left(q_1^{(\theta_j)}-q_1\right)-cn_2\left(q_2^{(\theta_j)}-q_2\right)\right)^2\\ =\;& \alpha_1\left(bn_1\alpha_2\left(q_1^{(\theta_1)}-q_1^{(\theta_2)}\right)-cn_2\alpha_2\left(q_2^{(\theta_1)}-q_2^{(\theta_2)}\right)\right)^2\\ &+\alpha_2\left(bn_1\alpha_1\left(q_1^{(\theta_2)}-q_1^{(\theta_1)}\right)-cn_2\alpha_1\left(q_2^{(\theta_2)}-q_2^{(\theta_1)}\right)\right)^2\\ =\;& \left(\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_1^2\right)\left(bn_1\left(q_1^{(\theta_1)}-q_1^{(\theta_2)}\right)-cn_2\left(q_2^{(\theta_1)}-q_2^{(\theta_2)}\right)\right)^2\\ =\;& 0.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Il faut que l'intérieur de la parenthèse en (5.4) soit nul. On isole n_1 et on obtient

$$n_1=\frac{n_2c\left(1-q_2^{(\theta_2)}-\left(1-q_2^{(\theta_1)}\right)\right)}{b\left(q_1^{(\theta_1)}-q_1^{(\theta_2)}\right)}. \tag{5.5}$$

L'interprétation du ratio en (5.5) est donnée par

$$\frac{\text{écart entre les deux espérances conditionnelles de } S_2}{\text{écart entre les deux espérances conditionnelles de } S_1 \text{ divisé par } n_1}.$$

Bref, on cherche n_1 de telle sorte que l'écart entre les deux espérances conditionnelles de S_1 soit égal à l'écart entre les deux espérances conditionnelles de S_2.

Ces notions sont illustrées via l'exemple suivant.

Exemple 5.41 *Les hypothèses sont :* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ *; portefeuille 1 avec* n_1 *contrats (à déterminer), prestation de décès* $b_k = 10\ 000$, $q_{1,k}^{(\theta_1)} = 0.0035$, $q_{1,k}^{(\theta_2)} = 0.0025$ *; portefeuille 2 avec* $n_2 = 2000$ *contrats, montant de dotation pure* $c_k = 10\ 000$, $q_{2,k}^{(\theta_1)} = 0.04$, $q_{1,k}^{(\theta_2)} = 0.02$.

À partir de ces valeurs pour les paramètres du modèle, on obtient $n_1^* = 40\ 000$. *De plus, on a* $E[S_1] = 1\ 200\ 000$, $E[S_2] = 19\ 400\ 000$ *et* $E[S] = 20\ 600\ 000$. *On obtient aussi*

$$\mathrm{Var}(S_1) = 5.1963 \times 10^{10} \ (0.189962),$$

$$\mathrm{Var}(S_2) = 4.58 \times 10^{10} \ (0.011031),$$

$$\mathrm{Var}(S) = 1.7763 \times 10^{10} \ (0.00647).$$

Le coefficient de variation (valeurs entre parenthèses) de S *est plus bas que le coefficient de variation de* S_1 *et que le coefficient de variation de* S_2. *Le pourcentage de la variance expliquée par la mortalité systématique pour* S_1, S_2 *et* S *est* $\frac{\mathrm{Var}(E[(S_1|\Theta)])}{\mathrm{Var}(S_1)} = 76.97785\ \%$, $\frac{\mathrm{Var}(E[(S_2|\Theta)])}{\mathrm{Var}(S_2)} = 87.33624\ \%$ *et* $\frac{\mathrm{Var}(E[(S|\Theta)])}{\mathrm{Var}(S)} = 0$.

En unifiant les deux portefeuilles (avec le nombre n_1 *de contrats calculé adéquatement), on a réussi à éliminer le risque systématique. En composant un portefeuille d'un nombre approprié de contrats d'assurance vie temporaire et de contrats d'assurance dotation pure, on est parvenu à éliminer complètement le risque lié à la mortalité stochastique. Les compagnies d'assurance vie ont la possibilité de recourir à cette forme de couverture naturelle afin d'éliminer le risque lié à la mortalité stochastique, ce qui n'est pas le cas des régimes privés de retraite. Par ailleurs, compte tenu du nombre de contrats d'assurance vie que la compagnie d'assurance détient dans son portefeuille, elle peut établir la capacité maximale à émettre des contrats d'assurance dotation pure.* □

5.8 Mutualisation et risque de crédit

Une compagnie d'assurance ou une institution financière peuvent être exposées à des activités d'assurance et de crédit. On a recours à l'exemple simple suivant pour illustrer la mutualisation de ces deux types d'activités.

Exemple 5.42 ***Activités d'assurance et activités bancaires.*** *On considère l'institution financière ABC ayant des activités d'assurance et bancaires pendant une année. Le portefeuille d'activités d'assurance est composé de deux lignes d'affaires : assurance automobile aux particuliers (classe 1) et assurance habitation aux particuliers (classe 2). On suppose que tous les risques individuels sont indépendants. Les coûts pour un contrat* i *de la classe* j *sont représentés par la v.a.* $X_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, ..., n^{(j)}\ ;\ j = 1, 2)$.

- *Assurance habitation : Nb de contrats* $n^{(1)} = 3000$, $E\left[X_i^{(1)}\right] = 100$ *et* $\mathrm{Var}\left(X_i^{(1)}\right) = 300^2$, $i = 1, 2, ..., n^{(1)}$.
- *Assurance automobile : Nb de contrats* $n^{(2)} = 2000$, $E\left[X_i^{(2)}\right] = 120$ *et* $\mathrm{Var}\left(X_i^{(2)}\right) = 400^2$, $i = 1, 2, ..., n^{(2)}$.

Pour un contrat i *de la classe* j, *la prime est égale à* $1.06 \times \frac{1}{1.04} \times E\left[X_i^{(j)}\right]$ $(i = 1, 2, ..., n^{(j)}\ ;\ j = 1, 2)$. *Les revenus de primes sont investis à un taux annuel d'intérêt de* $4\ \%$.

Le portefeuille d'activités bancaires est constitué de certificats de dépôt et de prêts personnels.

— *Certificats de dépôt 1 an. ABC a émis 1000 certificats de dépôt avec échéance 1 an. Pour chaque certificat, le montant investi est* $\frac{500}{1.04}$ *au temps 0. La valeur remboursée à l'échéance est 500.*

— *Prêts personnels 1 an. ABC a émis 650 prêts personnels avec échéance 1 an. Pour chaque prêt, la valeur prêtée est* $\frac{800}{1.05}$*. Chaque emprunteur doit rembourser 800 à échéance. La probabilité de défaut est de* $q = 2.5$ *%. En cas de défaut, l'emprunteur n'est pas en mesure de rembourser le montant de 800. La valeur remboursée au temps 1 par l'emprunteur* l *(*$l = 1, 2, ..., 650$*) est représentée par la v.a.* Y_l *où* $Y_l = 800 \times J_l$*,* $J_l \sim Bern\,(1-q)$ *(*$l = 1, 2, ..., 650$*). Tous les emprunteurs sont indépendants. Les activités d'assurance et les activités bancaires sont indépendantes.*

On utilise les notations et hypothèses suivantes :

— P *= revenu total des primes d'assurance accumulées au temps 1.*

— S *= montant total des sinistres que ABC devra rembourser au temps 1.*

— D *= montant total des versements que ABC doit faire par rapport aux certificats de dépôt au temps 1.*

— C *= montant total des prêts qui seront remboursés à ABC par les emprunteurs au temps 1.*

— L *= pertes au temps 1 = montant total des engagements à verser au temps 1 − montant total des sommes disponibles au temps 1 (pour payer ces engagements).*

On définit $L = S - P + D - C$ *où* S *et* C *sont des v.a. alors que* P *et* D *sont des constantes. Ainsi, pour les activités d'assurance, les entrées de fonds sont certaines et les sorties de fonds (sinistres) sont aléatoires. Pour les activités bancaires, les sorties de fonds sont certaines et les entrées de fonds (remboursement des prêts) sont aléatoires. L'espérance de* L *est donnée par*

$$E\,[L] = E\,[S] - P + D - E\,[C] = -39\ 400,$$

où

$$\begin{aligned} E\,[S] &= 3000 \times 100 + 2000 \times 120 = 540\ 000, \\ P &= 1.06 \times E\,[S] = 1.06 \times (3000 \times 100 + 2000 \times 120) = 572\ 400, \\ D &= 500\ 000 \ \textit{et}\ E\,[C] = 507\ 000. \end{aligned}$$

Ensuite, la variance de L *est*

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,(S) &= 3000 \times 300^2 + 2000 \times 400^2 = 59\ 000\ 000, \\ \mathrm{Var}\,(C) &= 650 \times 800^2 \times 0.025\,(1 - 0.025) = 10\ 140\ 000, \\ \mathrm{Var}\,(L) &= \mathrm{Var}\,(S) + \mathrm{Var}\,(C) = 600\ 140\ 000. \end{aligned}$$

En ayant recours à l'approximation normale, la probabilité d'une perte positive est

$$\begin{aligned} \Pr\,(L > 0) &= 1 - \Pr\,(L \leq 0) \simeq 1 - \Pr\left(Z \leq \frac{-\,(-39\ 400)}{\sqrt{600\ 140\ 000}}\right) \\ &= 0.0538836. \end{aligned}$$

En utilisant l'approximation normale, les valeurs de $VaR_\kappa\,(L)$ *et* $TVaR_\kappa\,(L)$ *avec* $\kappa = 99.5$ *% sont 23 702.04 et 31 446.25. Bien que la probabilité d'une perte positive soit seulement de 5.39 %, la gravité de cette perte peut être très élevée. Dans cet exemple, on a supposé que les défauts liés aux prêts personnels sont indépendants alors qu'en réalité ils sont dépendants. Il en résulterait un effet à la hausse sur la TVaR.* □

On présente ci-dessous un exemple illustrant l'impact des effets insidieux de titres avec risques de défaut.

Exemple 5.43 *On considère une compagnie d'assurance vie qui a émis* 300 000 *contrats d'assurance temporaire 1 an. Les durées de vie des assurés sont i.i.d. Le montant de prestation de décès est de 50. La probabilité de décès pour la période est* $q = 0.01$*. Le taux annuel d'intérêt déterministe est* $i = 0.05$ *(compte en banque).*

Toutefois, pour diminuer son prix, la prime pour le contrat d'assurance est calculée selon le principe d'équivalence avec un taux d'intérêt i_c*, c.-à-d.* $PUN = b\frac{q}{1+i_c}$*. Le taux* i_c *est calculé en supposant que le*

revenu total de primes est investi entièrement dans un portefeuille de titres à revenus fixes comportant un risque de défaut. Ces titres sont des prêts individuels d'un an (émis par la compagnie) avec un capital de $c = 1$ *à rembourser à l'échéance (1 an). Un emprunteur a une probabilité de défaut de* $r = \frac{1}{101}$ *de ne pas payer le capital à échéance (en cas de défaut, l'emprunteur ne remboursera pas le capital associé au prêt). La valeur prêtée par l'institution correspond à l'espérance de la valeur présente (actualisée) du montant qui peut être recouvert par la compagnie :*

$$VAL = c\frac{1-r}{1+i} = c\frac{1}{1+i_c},$$

où $1 + i_c = \frac{1+i}{1-r} = \frac{1.05}{1-\frac{1}{101}} = 1.0605$. *Le revenu total de primes est noté par* PUN^{TOT} *et le nombre de prêts est* $m = \frac{PUN^{TOT}}{VAL}$.

Les risques de défaut des emprunteurs sont influencés par les conditions économiques représentées par la v.a. Θ *où* $\Pr(\Theta = \theta_i) = \pi_i$ $(i = 1, 2)$ *avec* $\theta_1 =$ *conditions normales et* $\theta_2 =$ *conditions de crise. Pour* $i = 1, 2, ..., m$, *on définit la v.a.* I_i *où* $I_i = 1$ *lorsque l'emprunteur* i *fait défaut et* $I = 0$, *sinon. On a* $\Pr(I_i = 1) = r = \frac{1}{101}$. *On note* $\Pr(I_i = 1|\Theta = \theta_j) = r^{(j)}$ *avec* $j = 1, 2$. *On fixe* $\pi_1 = 0.9$, $\pi_2 = 0.1$, $r^{(1)} = 0.009$ *et* $r^{(2)} = \frac{1.819}{101} = 0.01801$ *de telle sorte que la relation* $\Pr(I_i = 1) = \sum_{j=1}^{2} \pi_j r^{(j)} = r = \frac{1}{101}$ *soit satisfaite. Les conditions économiques influencent uniquement les risques des emprunteurs à faire défaut et n'affectent pas les temps de décès des assurés. On suppose que les risques des emprunteurs à faire défaut et que les durées de vie des assurés sont indépendants.*

Étant donné les conditions économiques qui prévalent, les emprunteurs sont conditionnellement indépendants. On définit les v.a. suivantes : $Z(1)$ *est la somme totale des prestations de décès à verser au temps 1 ;* $V(1)$ *est la valeur du portefeuille d'investissement au temps 1 correspondant à la somme totale des prêts remboursés et de la valeur résiduelle dans le certificat de dépôt ; et* $L(1)$ *est la perte au temps* 1 *avec* $L(1) = Z(1) - V(1)$. *On utilise l'approximation normale de façon appropriée pour évaluer le comportement de* $Z(1)$ *et* $V(1)$.

On a $PUN = 0.471475719$ *et* $VAL = 0.942951438$. *Il en résulte que le revenu total de primes est*

$$PUN^{TOT} = 0.471475719 \times 300\ 000 = 141\ 442.715\,7$$

et que le nombre de prêts est $m = \frac{0.471475719 \times 300\ 000}{0.942951438} = 150\ 000$. *On détermine* $E[Z(1)] = 150\ 000$ *et* $\mathrm{Var}(Z(1)) = 7\ 425\ 000$. *En outre, on a*

$$\begin{aligned} E[V(1)|\Theta = \theta_1] &= 148\ 650.0, \\ E[V(1)|\Theta = \theta_2] &= 147\ 298.514\,851 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(V(1)|\Theta = \theta_1) &= 1337.85, \\ \mathrm{Var}(V(1)|\Theta = \theta_2) &= 2652.8317. \end{aligned}$$

On utilise l'approximation normale de façon adéquate pour calculer la probablité que la perte $L(1)$ *soit positive*

$$\begin{aligned} \Pr(L(1) > 0) &= \Pr(Z(1) - V(1) > 0) \\ &= \pi_1 \Pr(Z(1) - V(1) > 0|\Theta = \theta_1) \\ &\quad + \pi_2 \Pr(Z(1) - V(1) > 0|\Theta = \theta_2) \\ &\simeq \pi_1 \Pr(W_1 > 0) + \pi_2 \Pr(W_2 > 0), \end{aligned}$$

où $W_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ *avec* $\mu_i = E\left[Z\left(1\right)\right] - E\left[V\left(1\right)|\Theta = \theta_i\right]$, $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}\left(Z\left(1\right)\right) + \mathrm{Var}\left(V\left(1\right)|\Theta = \theta_i\right)$ *et*

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 150\ 000 - 148\ 650.0 = 1350, \\
\mu_2 &= 150\ 000 - 147\ 298.5149 = 2701.4851, \\
\sigma_1^2 &= 7\ 425\ 000 + 1337.85 = 7\ 426\ 337.85, \\
\sigma_2^2 &= 7\ 425\ 000 + 2652.8317 = 7\ 427\ 652.832.
\end{aligned}$$

Avec $Y \sim N\left(0,1\right)$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\Pr\left(L\left(1\right) > 0\right) &\simeq \pi_1 \Pr\left(Y > \frac{-1350}{\sqrt{7\ 426\ 337.85}}\right) \\
&\quad + \pi_2 \Pr\left(Y > \frac{-2701.485149}{\sqrt{7\ 427\ 652.832}}\right) \\
&= 0.9 \Pr\left(Y > -0.495389\right) \\
&\quad + 0.1 \Pr\left(Y > -0.991235\right) \\
&= 0.704775.
\end{aligned}$$

Finalement, on déduit $VaR_{0.995}\left(L\left(1\right)\right) = 8606.515$ *et* $TVaR_{0.995}\left(L\left(1\right)\right) = 7728.2$. *La probabilité d'une perte positive est très élevée.* □

5.9 Mutualisation et risques extraordinaires

On entend par risque extraordinaire les coûts couverts par une protection offerte aux dommages d'un barrage hydro-électrique, d'une raffinerie, d'une plate-forme d'extraction pétrolière, d'un avion, d'un satellite, etc.

Le mécanisme d'assurance fondé sur la mutualisation des risques ne peut pas être appliqué à ce type de risques. En fait, une compagnie d'assurance ne peut pas à elle seule assumer un tel risque. Il est impossible d'imaginer qu'une compagnie d'assurance dispose de la capacité financière nécessaire pour assumer un ensemble de risques relativement similaires. Les risques extraordinaires intéressent généralement les compagnies de réassurance.

Ce type de risques d'assurance est légèrement différent. On imagine un groupe de n compagnies de réassurance. On suppose aussi que le marché compte n risques extraordinaires $X_1, X_2, ..., X_n$ à assurer. Pour simplifier la présentation, on suppose que les v.a. $X_1, X_2, ..., X_n$ sont i.i.d., ce qui implique que les risques extraordinaires sont indépendants et que leurs comportements aléatoires sont similaires. Donc, on a $E\left[X_i\right] = E\left[X\right]$ et $\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \mathrm{Var}\left(X\right)$, pour $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$. On sait que chaque compagnie de réassurance ne peut pas assumer la totalité d'un seul risque isolé, par exemple X_1, vu l'ampleur des coûts associés. On suppose alors que chaque compagnie de réassurance assume une part égale de chaque risque X_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Ainsi, le risque global assumé par la compagnie de réassurance j est $S_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$. On observe que

$$E\left[S_j\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{n}{n} E\left[X\right] = E\left[X\right]$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(S_j\right) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_i\right) \\
&= \frac{n}{n^2} \mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{1}{n} \mathrm{Var}\left(X\right)
\end{aligned}$$

pour $j = 1, 2, ..., n$.

Ainsi, pour une compagnie de réassurance j, l'espérance des coûts reste identique qu'elle assume 1 seul rique ou n parts égales de n risques i.i.d. Cependant, quand la compagnie de réassurance assume n parts

égales de n risques i.i.d., il est important de constater que la variabilité des coûts est nettement inférieure à la variabilité des coûts lorsqu'elle décide d'assumer en entier un seul contrat.

5.10 Mutualisation et risque financier

Lorsque le portefeuille de contrats d'assurance est exposé au risque financier, il en découle un impact important sur la mutualisation des risques. On considère via un exemple l'impact du risque financier sur la mutualisation au sein d'un portefeuille d'assurance.

Exemple 5.44 *On suppose que n contrats d'assurance temporaire 1 an sont émis à des assurés dont les durées de vie sont i.i.d. Pour tous les contrats, la prestation de décès est b et la probabilité de décès est $q = 0.01$. Le montant total des prestations à la fin de l'année est représenté par la v.a. S_n et la compagnie désire que l'espérance du montant disponible pour financer S_n soit égal à $(1+\theta)\,E[S_n] = (1+\theta)\,nbq$. La compagnie a le choix entre 2 stratégies de financement et elle calcule la prime pour chaque contrat selon chaque stratégie.*

— ***Stratégie 1***. *La compagnie investit le revenu total de primes dans un placement dont le rendement instantané est assuré à 4 % (ex : titre obligataire avec échéance 1 an). La valeur de l'investissement à 0 est $V^{(1)}(0) = n \times \pi^{(1)}_{(n)}$, soit le revenu total des primes. La valeur de l'investissement au temps 1 est $V^{(1)}(1)$ où $V^{(1)}(1) = \mathrm{e}^{0.04} \times V^{(1)}(0)$. La prime pour chaque contrat est déterminée de telle sorte que la relation*

$$E\left[V^{(1)}(1)\right] = \mathrm{e}^{0.04} \times V^{(1)}(0) = \mathrm{e}^{0.04} n\pi^{(1)}_{(n)} = (1+\theta)\,E[S_n]$$

soit satisfaite. On obtient

$$\pi^{(1)}_{(n)} = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-0.04}(1+\theta)\,E[S_n] = \mathrm{e}^{-0.04}(1+\theta)\,bq.$$

— ***Stratégie 2***. *La compagnie investit le revenu total de primes dans un fonds d'actions dont le rendement instantané est une v.a. R. On suppose que la v.a. R obéit à une loi normale d'espérance $0.1 - \frac{1}{2} \times 0.4^2$ et de variance 0.4^2. La valeur de l'investissement à 0 est $V(0) = n\pi^{(2)}_{(n)}$, soit le revenu total des primes. La valeur de l'investissement au temps 1 est $V(1)$ où $V(1) = \mathrm{e}^R \times V(0)$. La prime pour chaque contrat est déterminée de telle sorte que la relation*

$$E[V(1)] = E\left[\mathrm{e}^R\right] \times V(0) = E\left[\mathrm{e}^R\right] n\pi^{(2)}_{(n)} = (1+\theta)\,E[S_n]$$

soit satisfaite. On obtient

$$\pi^{(2)}_{(n)} = \frac{1}{n}\frac{(1+\theta)\,E[S_n]}{E[\mathrm{e}^R]} = (1+\theta)\,\frac{bq}{E[\mathrm{e}^R]}.$$

Pour chaque stratégie $j = 1$ et 2, on calcule $P^{(j)}_{(n)} = \Pr\left(S_n \le V^{(j)}(1)\right)$, soit la probabilité que la compagnie remplisse ses engagements sous la stratégie j. On définit N_n le nombre de décès pour le portefeuille où $N_n \sim Bin(n,q)$. Les expressions pour chaque probabilité sont

$$\begin{aligned} P^{(1)}_{(n)} &= \Pr\left(S_n \le V^{(1)}(1)\right) = \\ &= \Pr\left(S_n \le \mathrm{e}^{-0.04}(1+\theta)\,nbq\right) \\ &= \Pr\left(N_n \le \mathrm{e}^{-0.04}(1+\theta)\,nq\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_{(n)}^{(2)} &= \Pr\left(S_n \leq V^{(2)}(1)\right) = \Pr\left(N_n \leq \frac{V^{(2)}(1)}{b}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N_n = k) \Pr\left(\frac{n(1+\theta)\frac{bq}{E[\mathrm{e}^R]}\mathrm{e}^R}{b} > k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N_n = k) \Pr\left(R > \ln\left(\frac{n(1+\theta)q}{E[\mathrm{e}^R]}\right)\right). \end{aligned}$$

On fixe $b = 10\ 000$ *et* $q = 0.001$. *Dans le tableau suivant, on calcule les valeurs de* $\pi_{(n)}^{(j)}$ *et* $P_{(n)}^{(j)}$ *pour chaque stratégie 1 et 2, pour* $n = 1000$ *et 1 000 000 ainsi que pour différentes valeurs de* θ *:*

n	θ	$\pi_{(n)}^{(1)}$	$\pi_{(n)}^{(2)}$	$P_{(n)}^{(1)}$	$P_{(n)}^{(2)}$
1000	20 %	11.52947	10.85805	0.7357589	0.6021346
1 000 000	20 %	11.52947	10.85805	1	0.6011207
1000	5 %	10.08829	9.500793	0.7357589	0.5468857
1 000 000	5 %	10.08829	9.500793	0.9440612	0.4694943
1000	0 %	9.607894	9.048374	0.7357589	0.527555
1 000 000	0 %	9.607894	9.048374	0.5084094	0.4214691
1000	-10 %	8.647105	8.143537	0.367695	0.488666
1 000 000	-10 %	8.647105	8.143537	0.000694	0.322501

Cet exemple permet de visualiser l'interaction du risque financier et de la mutualisation de risques indépendants. Le risque de mortalité se diversifie alors que le risque financier ne se diversifie pas, car le revenu total de primes est investi dans le même fonds et que les fluctuations aléatoires du marché influencent par conséquent l'ensemble des contrats du portefeuille. L'impact du risque financier dépend à la fois de la marge de sécurité θ *(négative ou positive) et du nombre de contrats au sein du portefeuille.*

Si on fixe une marge relative de sécurité strictement positive, on constate que la probabilité de remplir les engagements tend vers 1 sous la stratégie 1 lorsque le nombre de contrats augmente (ce qui est démontré à la proposition 3.41). Toutefois, si l'on choisit la stratégie 2, la prime est moins élevée car la stratégie est plus agressive mais on réduit de façon significative la probabilité de remplir les engagements (pour $\theta = 20$ *%,* $P_{(1\ 000\ 000)}^{(2)} = 60.11207$ *% versus* $P_{(1\ 000\ 000)}^{(1)} = 100$ *%). Si la marge relative de sécurité est strictement négative et sous la stratégie 1, la probabilité de remplir les engagements tend vers 0 lorsque le nombre* n *de contrats augmente. En revanche, comme la stratégie 2 est plus agressive, elle permet de compenser la présence d'une marge négative de sécurité ce qui conduit à une probabilité non nulle de remplir les engagements.* □

5.11 Mutualisation et catastrophes naturelles

Les catastrophes naturelles induisent une forte dépendance dans la réalisation des sinistres d'un ensemble de contrats. La gestion du risque global associé à un ensemble de contrats exposés à des catastrophes ne peut pas être faite de façon similaire à la gestion du risque global d'un ensemble de contrats indépendants.

On considère un ensemble de n contrats d'assurance habitation dans une région exposée à un risque élevé de catastrophe (ex : tremblements de terre, inondations, ouragans ou toute autre catastrophe naturelle).

Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. X_i où $X_i = X_i^{N-CAT} + X_i^{CAT}$, où la v.a. X_i^{CAT} représente les coûts associés à la protection pour catastrophe et la v.a. X_i^{N-CAT} correspond aux coûts pour les autres protections. Les v.a. X_i^{N-CAT} et X_i^{CAT} sont indépendantes. On a $E[X_i] = E\left[X_i^{N-CAT}\right] + E\left[X_i^{CAT}\right]$ et $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}\left(X_i^{N-CAT}\right) + \mathrm{Var}\left(X_i^{CAT}\right)$.

On se concentre sur la modélisation de X_i^{CAT} pour $i = 1, 2, ..., n$, en particulier sur les dommages matériels. La définition de la v.a. X_i^{CAT} comporte trois composantes, qui sont l'avènement d'une catastrophe (la fréquence), l'intensité de la catastrophe et les dommages matériels étant donné l'intensité de la catastrophe. Dans cette section, on a recours à une modélisation relativement simple.

Concernant la fréquence, on suppose qu'une seule catastrophe peut se produire au cours de la période fixée du contrat (ex : 1 an). On définit la v.a. $I^{CAT} \sim Bern\left(q^{CAT}\right)$ telle que I^{CAT} prend la valeur 1 si une catastrophe se produit au cours de la période et 0 sinon. En cas de catastrophe, l'intensité de la catastrophe

est définie par la v.a. Θ^{CAT}, une v.a. positive discrète ou continue. Dans le contexte des tremblements de terre, Θ^{CAT} représente l'échelle d'intensité de Mercali (6, 7, ..., 12). Dans cette section, les v.a. Θ et I^{CAT} sont supposées indépendantes, mais cette hypothèse n'est pas toujours adéquate selon le contexte (notamment pour les tremblements de terre).

On définit la v.a. X_i^{CAT} par

$$X_i^{CAT} = \begin{cases} B_i^{CAT}, & I^{CAT} = 1 \\ 0, & I^{CAT} = 0 \end{cases},$$

où B_i^{CAT} représente les dommages matériels en cas de catastrophe pour le contrat i si une catastrophe se produit. La v.a. B_i^{CAT} $(i = 1, 2, ..., n)$ est définie par $B_i^{CAT} = U_i^{CAT} \times c_i$ où la v.a. U_i^{CAT} représente le pourcentage de dommages et la constante c_i représente la valeur de la résidence. La v.a. U_i^{CAT} peut prendre des valeurs entre 0 et 1. Le comportement de la v.a. U_i dépend de l'intensité Θ du tremblement de terre. Sachant que $\Theta = \theta$ $(\theta = 1, 2)$, les v.a. $(U_i \,|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes. Les spécifications de la distribution de $(U_i \,|\Theta = \theta)$ sont établies en fonction du type de catastrophe et des caractéristiques de la propriété i $(i = 1, 2, ..., n)$ à partir de données passées et des avis d'experts.

On obtient

$$E\left[X_i^{CAT}\right] = E\left[I^{CAT}\right] E\left[B_i^{CAT}\right],$$

et

$$\mathrm{Var}\left(X_i^{CAT}\right) = E\left[I^{CAT}\right] \mathrm{Var}\left(B_i^{CAT}\right) + \mathrm{Var}\left(I^{CAT}\right) E\left[B_i^{CAT}\right]^2,$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. De plus, on a

$$\mathrm{Cov}\left(X_i^{CAT}, X_j^{CAT}\right) = E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT}\right] - E\left[X_i^{CAT}\right] E\left[X_j^{CAT}\right],$$

pour $i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$. D'abord,

$$E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT}\right] = E_{I^{CAT}}\left[E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT} \middle| I^{CAT}\right]\right]$$

avec

$$\begin{aligned} & E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT} \middle| I^{CAT} = 1\right] \\ = \; & E\left[B_i^{CAT} B_j^{CAT}\right] \\ = \; & \sum_{l=1}^{m} \Pr\left(\Theta = \theta_l\right) c_i c_j E\left[U_i^{CAT} | \Theta = \theta_l\right] E\left[U_j^{CAT} | \Theta = \theta_l\right] \end{aligned}$$

et

$$E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT} \middle| I^{CAT} = 0\right] = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT}\right] &= E_{I^{CAT}}\left[I^{CAT} \times E\left[B_i^{CAT}\right] E\left[B_j^{CAT}\right]\right] \\ &= E\left[I^{CAT}\right] E\left[B_i^{CAT} B_j^{CAT}\right]. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\left(X_i^{CAT}, X_j^{CAT}\right) &= \mathrm{Cov}\left(X_1^{CAT}, X_2^{CAT}\right) \\ &= E\left[I^{CAT}\right] E\left[B_i^{CAT} B_j^{CAT}\right] \\ &\quad - E\left[I^{CAT}\right] E\left[B_i^{CAT}\right] E\left[I^{CAT}\right] E\left[B_j^{CAT}\right], \end{aligned} \tag{5.6}$$

pour $i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a. S avec $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ que l'on peut exprimer sous la forme $S = S^{N-CAT} + S^{CAT}$ où la v.a. $S^{N-CAT} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{N-CAT}$ correspond à la somme des coûts

pour les protections qui ne sont pas liées aux catastrophes et la v.a.

$$S^{CAT} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{CAT} \tag{5.7}$$

correspond à la somme des coûts pour les protections liées aux catastrophes.

Concernant les coûts catastrophiques du portefeuille, on peut réécrire (5.7) sous la forme

$$S^{CAT} = \begin{cases} D^{CAT}, \ I = 1 \\ 0, \ I = 0 \end{cases}, \tag{5.8}$$

où $D^{CAT} = \sum_{i=1}^{n} B_i^{CAT}$. Selon (5.8), si une catastrophe survient, le portefeuille va encourir des coûts d'une ampleur considérable, représentés par la v.a. D^{CAT}. Cela est mis en évidence par le fait que l'on puisse exprimer S^{CAT} selon l'approche indemnitaire.

Selon l'équation (5.7), on déduit que

$$E\left[S^{CAT}\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i^{CAT}\right] = E\left[I^{CAT}\right] \sum_{i=1}^{n} E\left[B_i^{CAT}\right].$$

Selon (5.8), on déduit aussi que

$$\begin{aligned} E\left[S^{CAT}\right] &= E_{I^{CAT}}\left[E\left[S^{CAT} \middle| I^{CAT}\right]\right] \\ &= E\left[I^{CAT}\right] E\left[D^{CAT}\right] \\ &= E\left[I^{CAT}\right] \sum_{i=1}^{n} E\left[B_i^{CAT}\right]. \end{aligned}$$

En se basant sur (5.7), la variance de S^{CAT} est donnée par

$$\mathrm{Var}\left(S^{CAT}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_i^{CAT}\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathrm{Cov}\left(X_i^{CAT}, X_j^{CAT}\right) \tag{5.9}$$

ou, en utilisant la relation (5.8), son expression est

$$\mathrm{Var}\left(S^{CAT}\right) = E\left[I^{CAT}\right] \mathrm{Var}\left(D^{CAT}\right) + \mathrm{Var}\left(I^{CAT}\right) E\left[D^{CAT}\right]^2. \tag{5.10}$$

En développant (5.9) et (5.10), elles conduisent à la même expression de $\mathrm{Var}\left(S^{CAT}\right)$.

À partir de la relation (5.8), la fonction de répartition de S_{TOT}^{CAT} est déduite

$$\begin{aligned} F_{S_{TOT}^{CAT}}(x) &= \Pr\left(I^{CAT} = 0\right) + \Pr\left(I^{CAT} = 1\right) F_{D^{CAT}}(x) \\ &= \left(1 - q^{CAT}\right) + q^{CAT} F_{B_1^{CAT} + \ldots + B_n^{CAT}}(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, la mutualisation ne permet pas à la compagnie d'assurance de réduire le risque lié aux protections pour catastrophes, car les coûts totaux se comportent comme les coûts d'un risque modélisé selon l'approche indemnitaire.

On mentionne que $E[S] = E\left[S^{NCAT}\right] + E\left[S^{CAT}\right]$ et

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}\left(S^{NCAT}\right) + \mathrm{Var}\left(S^{CAT}\right).$$

De plus, la fonction de répartition de S est donnée par

$$F_S(x) = \left(1 - q^{CAT}\right) F_{S^{NCAT}}(x) + q^{CAT} F_{S^{NCAT} + D^{CAT}}(x).$$

Souvent, comme on n'a pas la forme analytique pour $F_{S^{NCAT}}$ et $F_{S^{NCAT}+D^{CAT}}$, on a recours aux méthodes

d'approximation (p. ex., méthodes d'approximation basées sur les moments, méthodes récursives, méthodes par simulation) pour évaluer $F_{S^{NCAT}}$ et $F_{S^{NCAT}+D^{CAT}}$.

Exemple 5.45 *Une compagnie d'assurance a émis n contrats d'assurance habitation pour des résidences unifamiliales établies dans la région FGH exposée au risque de tremblements de terre.*

Pour une année, les coûts pour ces couvertures sont représentés par les v.a. X_i^{CAT} $(i = 1, ..., n)$. Le nombre de tremblements de terre dans la région FGH est représenté par la v.a. I où $I \sim Bern(0.05)$. Lorsqu'un tremblement de terre se produit dans la région FGH, les coûts de sinistres pour le contrat i correspondent à la v.a.B_i^{CAT} $(i = 1, 2, ..., 500)$ où $B_i^{CAT} = U_i \times c_i$ où la v.a. U_i représente le pourcentage de dommage et la constante c_i représente la valeur de la résidence. La v.a. U_i peut prendre des valeurs entre 0 et 1.

Le comportement de la v.a. U_i dépend de l'intensité Θ du tremblement de terre. Sachant que $\Theta = j$ $(j \in \{6, 7, ..., 12\})$, les v.a. $(U_i \,|\Theta = j\,)$ sont i.i.d. avec $(U_i \,|\Theta = j\,) \sim Bêta\,(\alpha_j, \beta_j)$. Les valeurs de (α_j, β_j) $(j = 6, ..., 12)$ ainsi que les valeurs de la fonction de masse de probabilité de Θ sont fournies dans le tableau ci-dessous :

j	α_j	β_j	$E\,[U_i \,\|\Theta = j\,]$	$f_\Theta\,(j)$
6	2.00314018	248.389382	0.008	0.75
7	4.53586011	297.854814	0.015	0.10
8	3.52042656	71.3822663	0.047	0.05
9	5.1238591	50.570261	0.092	0.04
10	4.12149349	16.6941302	0.198	0.03
11	6.89215975	21.3543966	0.244	0.02
12	8.0206085	13.4823633	0.373	0.01

Les résidences ont toutes une valeur de 100. Ainsi, on a $E\left[B_i^{CAT}\right] = 2.808$, $\mathrm{Var}\left(B_i^{CAT}\right) = 44.03484$ et $VaR_{0.99}\left(B_i^{CAT}\right) = 34.3845$ $(i = 1, 2, ..., n)$. On définit les coûts totaux pour les $n = 1000$ contrats par la v.a. $S^{CAT} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{CAT}$. On commence par calculer l'espérance des coûts totaux avec

$$S^{CAT} = \begin{cases} D^{CAT}, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases}$$

où $E\left[S^{CAT}\right] = E\left[D^{CAT}\right] E\,[I]$. On détermine $E\left[D^{CAT}\right] = 2808$ et $\mathrm{Var}\left(D^{CAT}\right) = 34\,892\,990$. L'expression de $F_{D^{CAT}}\,(x)$ est donnée par

$$\Pr\left(D^{CAT} \leq x\right) = \sum_{j=6}^{12} \Pr\left(\Theta = j\right) \Pr\left(D^{CAT} \leq x | \Theta = j\right).$$

Pour cet exemple seulement, on applique l'approximation normale pour évaluer $\Pr\left(D^{CAT} \leq x | \Theta = j\right)$ pour chaque $j = 6, 7, ..., 12$ en procédant comme suit :

$$\Pr\left(D^{CAT} \leq x\right) \simeq \sum_{j=6}^{12} \Pr\left(\Theta = j\right) \Phi\left(\frac{x - E\left[D^{CAT} | \Theta = j\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(D^{CAT} | \Theta = j\right)}}\right).$$

On déduit que $VaR_{0.99}\left(D^{CAT}\right) \simeq 24\,890$. □

5.12 Mutualisation et sinistre maximal

Comme on l'a déjà mentionné, le choix de la loi du montant de sinistre peut avoir un impact considérable sur la distribution du montant total des sinistres d'un portefeuille. Dans le prochain exemple, on examine l'effet combiné de la mutualisation et du choix de la loi d'un montant de sinistre sur le comportement du montant maximal de sinistre pour un portefeuille. À cette fin, on considère deux lois particulières, les lois exponentielle et de Pareto.

Proposition 5.46 *Les coûts totaux pour le portefeuille d'assurance IARD sont définis par la v.a. $S_n \sim PComp\,(\lambda_n; F_B)$ où $\lambda_n = \gamma n$ et n = nombre de contrats i.i.d. constituant le portefeuille. Le montant du sinistre le plus élevé parmi tous les sinistres produits par le portefeuille est défini par la v.a. $C_{\max,n}$.*

L'expression de $F_{C_{\max,n}}$ *est donnée par*

$$F_{C_{\max,n}}(x) = P_{N_n}(F_B(x)) = \exp(n\gamma(F_B(x)-1)),$$

où $N_n \sim Pois(\gamma n)$. *En particulier, pour* $x \geq 0$, *on a*

$$F_{C_{\max,n}}(x) = \begin{cases} \exp\left(-n\gamma\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}\right), \text{ si } B \sim Pa(\alpha,\lambda) \\ \exp\left(-n\gamma e^{-\beta\alpha}\right), \text{ si } B \sim Exp(\beta) \end{cases}.$$

Preuve. En conditionnant sur la v.a. $N_n \sim Pois(\gamma n)$, qui représente le nombre de sinistres du portefeuille, l'expression de $F_{C_{\max,n}}$ est donnée par

$$\begin{aligned} F_{C_{\max,n}}(x) &= f_{N_n}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{N_n}(k) \Pr(C_{\max,n} \leq x | N_n = k) \\ &= f_{N_n}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{N_n}(k) \Pr(\max(B_1;...;B_k) \leq x) \\ &= f_{N_n}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{N_n}(k) (F_B(x))^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{N_n}(k) (F_B(x))^k = P_{N_n}(F_B(x)) \\ &= \exp(n\gamma(F_B(x)-1)). \end{aligned}$$

■

Dans le prochain exemple, on illustre le résultat de la proposition 5.46.

Exemple 5.47 *Les conditions de la proposition 5.46 sont supposées satisfaites. La valeur du paramètre* γ *est fixée à* 1. *Dans les tableaux ci-dessous, on illustre le comportement de* $\overline{F}_{C_{\max,n}}(x) = 1 - F_{C_{\max,n}}(x)$, *en considérant différentes valeurs de* n, *du paramètre* α *de la loi de Pareto et de* x. *Les paramètres sont choisis de telle sorte que* $E[N_n] = n$ *et* $E[S_n] = n \times 10$.

x $(n=1)$	$Exp\left(\frac{1}{10}\right)$	$Pa(1.1;1)$	$Pa(1.5;5)$	$Pa(2.1;11)$
$1 \times E[S_n]$	0.30780	0.06903	0.17506	0.22678
$1.5 \times E[S_n]$	0.19999	0.04626	0.11750	0.15146
$2 \times E[S_n]$	0.12658	0.03451	0.08556	0.10731
$2.5 \times E[S_n]$	0.07881	0.02739	0.06578	0.07958
$3 \times E[S_n]$	0.04857	0.02262	0.05256	0.06116

x $(n=10)$	$Exp\left(\frac{1}{10}\right)$	$Pa(1.1;1)$	$Pa(1.5;5)$	$Pa(2.1;11)$
$1 \times E[S_n]$	0.000456	0.06500	0.09870	0.07498
$1.5 \times E[S_n]$	0	0.03930	0.05629	0.03506
$2 \times E[S_n]$	0	0.02885	0.03737	0.02002
$2.5 \times E[S_n]$	0	0.02267	0.02708	0.01286
$3 \times E[S_n]$	0	0.01860	0.02077	0.00892

x $(n=100)$	$Exp\left(\frac{1}{10}\right)$	$Pa(1.1;1)$	$Pa(1.5;5)$	$Pa(2.1;11)$
$1 \times E[S_n]$	0	0.04883	0.03488	0.00750
$1.5 \times E[S_n]$	0	0.03155	0.01987	0.00322
$2 \times E[S_n]$	0	0.02310	0.01238	0.00178
$2.5 \times E[S_n]$	0	0.01812	0.00888	0.00111
$3 \times E[S_n]$	0	0.01485	0.00676	0.00076

x $(n=1000)$	$Exp\left(\frac{1}{10}\right)$	$Pa(1.1;1)$	$Pa(1.5;5)$	$Pa(2.1;11)$
$1 \times E[S_n]$	0	0.03902	0.01111	0.00061
$1.5 \times E[S_n]$	0	0.02516	0.00606	0.00026
$2 \times E[S_n]$	0	0.01840	0.00394	0.00014
$2.5 \times E[S_n]$	0	0.01442	0.00282	0.00009
$3 \times E[S_n]$	0	0.01182	0.00215	0.00006

Pour interpréter ces résultats, on considère x *comme étant le revenu de primes ou la somme d'argent que*

l'assureur possède pour faire face à ses engagements au cours de la prochaine période. On constate que la probabilité que le montant du sinistre le plus élevé excède le double de l'espérance des coûts demeure élevée même si l'espérance du nombre de sinistres augmente (en supposant que les montants de sinistres obéissent à une loi de Pareto). Ainsi, la probabilité est fort élevée qu'un seul sinistre (celui dont le montant est le plus élevé) puisse mettre en péril la solvabilité d'une compagnie. □

5.13 Notes bibliographiques

On peut consulter, p. ex., [Cossette et al., 2003] et [Lindskog and McNeil, 2003] pour une introduction sur les modèles de risque avec catastrophes.

Code LaTeX : `chapitre4_mutualisation.tex`

Chapitre 6

Méthodes d'allocation volet 1

6.1 Introduction

On considère un portefeuille de n risques, dont les coûts ou les pertes sont représentés par les v.a. X_1, ..., X_n, d'une institution financière (banque, compagnie d'assurance) ou toute autre entité responsable de la gestion des risques.

Après avoir établi la structure de dépendance pour $(X_1, ..., X_n)$, on établit le montant de capital associé au montant total des coûts ou des pertes pour l'ensemble du portefeuille $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ à l'aide d'une mesure de risque, comme la mesure VaR ou la mesure TVaR.

Il devient ensuite important d'établir la contribution de chaque risque X_i au montant de capital, en tenant compte à la fois du comportement aléatoire marginal de X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ et du comportement aléatoire conjoint du vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$.

Comme il est souhaité que la mutualisation des risques ait un effet bénéfique, la contribution de chaque risque doit être inférieure au capital qui serait établi de façon individuelle pour chaque risque.

Le portefeuille peut être celui d'une compagnie d'assurance, d'un investisseur (individuel ou institutionnel), d'une banque ou d'un régime de retraite.

Les pertes éventuelles associées au risque i sont définies par la v.a. L_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

En assurance, le portefeuille est constitué de contrats d'assurance (ou lignes d'affaires) et les risques correspondent aux coûts éventuels associés aux contrats (ou lignes d'affaires).

Pour une institution financière, le portefeuille est celui d'une banque (ou d'une compagnie d'assurance) et les risques représentent les pertes (ou profits) associées à une ligne d'affaires.

Le portefeuille peut être constitué de prêts ou de titres avec risques de défaut. Les risques sont les pertes résultant d'un défaut d'un prêt ou d'un titre.

Du point de vue d'un investisseur, le portefeuille est constitué de positions financières sur différents marchés (actions, obligations, positions longues ou courtes dans des produits dérivés).

On établit la procédure suivante pour l'allocation du capital :

— Établir la loi multivariée (conjointe) pour les coûts ou les pertes $X_1, ..., X_n$.

— Choisir une mesure de risque pour établir le capital total.

— Appliquer la mesure de risque sur le montant total des coûts ou des pertes.

— Dans le cas d'un effet de diversification positif, choisir un principe d'allocation pour établir la part de capital par risque.

On fixe le capital total de risque pour l'ensemble du portefeuille à l'aide d'une mesure de risque choisie ς, $\varsigma(S) = C_{TOT}(S)$ et le capital économique est $CE_{TOT}(S) = C_{TOT}(S) - E[S]$.

On définit par C_i la part du capital (contribution au risque) allouée au risque i $(i = 1, 2, ..., n)$.

La régle d'allocation doit tenir compte des relations de dépendance entre les risques.

La règle doit être additive, ce qui signifie que la relation $C_{TOT}(S) = \sum_{i=1}^{n} C_i$ doit être respectée.

Elle doit aussi pouvoir être appliquée pour un portefeuille de plusieurs contrats.

Elle doit permettre un juste partage entre les risques du bénéfice réalisé à la mutualisation des risques.

Dans ce chapitre, on présente les règles d'allocation de capital, notamment les règles basées sur la covariance, sur la VaR et sur la TVaR.

On étudie en détails l'évaluation des contributions selon les règles basées sur la TVaR.

6.2 Propriétés désirables

Pour les mesures de risque, on a présenté des propriétés désirables.

Il existe aussi des propriétés pour les methodes d'allocation de capital.

Soit un vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$.

On définit

$$S = X_1 + ... + X_n \,.$$

Soit une mesure de risque π_κ pour un niveau de confiance κ, pour $\kappa \in]0, 1[$.

On détermine le capital total avec

$$\pi_\kappa (S) \,.$$

Soit une méthode selon laquelle la part allouée au risque i est

$$C_i = \pi_k (X_i; S) \,.$$

Propriété 6.1 ***Allocation complète.*** *Le montant total de capital est alloué aux n risques*

$$\pi_\kappa (S) = \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{n} \pi_k (X_i; S) \,.$$

Propriété 6.2 ***Diversification.*** *Pour $i = 1, 2, ..., n$, on a*

$$C_i = \pi_k (X_i; S) \leq \pi_\kappa (X_i)$$

c.-à-d. la contribution allouée au risque i (au sein du portefeuille) doit être inférieure au capital pour X_i seulement (sans faire partie du portefeuille).

On présente quelques notions sur les fonctions homogènes et le théorème d'Euler ainsi que leur application en actuariat.

6.3 Fonction homogène et exemples

Définition 6.3 *Soit $\varphi (x_1, ..., x_n)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ avec valeur dans $\mathbb{R}$. La fonction φ est dite homogène de dégré m si*

$$\varphi (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^m \varphi (x_1, ..., x_n) \,,$$

pour tout $\lambda > 0$.

On fournit quelques exemples de fonctions homogènes.

Exemple 6.4 *Soit*

$$\varphi (x_1, ..., x_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \varphi (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) &= a_1 \lambda x_1 + ... + a_n \lambda x_n \\ &= \lambda \varphi (x_1, ..., x_n) \,, \end{aligned}$$

ce qui implique que φ est homogène avec degré 1. ■

Exemple 6.5 *Soit*

$$\varphi (x_1, ..., x_n) = b \times x_1 \times ... \times x_n$$

avec $b \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) &= b \times \lambda x_1 \times ... \times a_n \lambda x_n \\ &= \lambda^n \varphi(x_1, ..., x_n), \end{aligned}$$

ce qui implique que φ est homogène avec degré n. ■

Exemple 6.6 *Soit*

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = a_1 x_1^m + ... + a_n x_n^m$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$. Alors, on constate

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) &= a_1 \lambda^m x_1^m + ... + a_n \lambda^m x_n^m \\ &= \lambda^m \varphi(x_1, ..., x_n), \end{aligned}$$

ce qui implique que φ est homogène avec degré m. ■

Exemple 6.7 *Soit*

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1^5 + a_n x_2^3 x_3^2$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Alors, comme

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) &= a_1 \lambda^5 x_1^5 + a_2 \lambda^3 x_2^3 \lambda^2 x_3^2 \\ &= \lambda^5 \varphi(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

on déduit que φ est homogène avec degré 5. ■

Exemple 6.8 *Les fonctions*

$$\ln(x_1 + ... + x_n)$$

et

$$\exp(x_1 + ... + x_n)$$

ne sont pas homogènes. ■

6.4 Théorème d'Euler, remarques et corollaire

Le résultat suivant est important.

Théorème 6.9 ***Théorème d'Euler.*** *Soit $\varphi(x_1, ..., x_n)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ avec valeur dans $\mathbb{R}$, que l'on suppose différentiable en tout point. Si la fonction φ est (positivement) homogène de degré m, alors on a*

$$m\varphi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) \tag{6.1}$$

pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Preuve. Si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ est homogène d'ordre m, on sait que

$$\varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^m \varphi(x_1, ..., \lambda_n) \tag{6.2}$$

pour tout $\lambda > 0$. On dérive de part d'autre par rapport à λ et on pose $\lambda = 1$. Du côté gauche de l'égalité en

(6.2), on a

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\varphi\left(\lambda x_1,...,\lambda x_n\right)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi\left(\lambda x_1,...,\lambda x_n\right)}{\partial\left(\lambda x_i\right)}\times\left.\frac{\partial\left(\lambda x_i\right)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi\left(\lambda x_1,...,\lambda x_n\right)}{\partial\left(\lambda x_i\right)}\times x_i\Big|_{\lambda=1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi\left(x_1,...,x_n\right)}{\partial x_i}\times x_i.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour le côté droit de l'égalité en (6.2), on a

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\left(\lambda^m\varphi\left(x_1,...,x_n\right)\right)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} &= m\lambda^{m-1}\varphi\left(x_1,...,x_n\right)\big|_{\lambda=1} \\
&= m\varphi\left(x_1,...,x_n\right).
\end{aligned}$$

■

Remarque 6.10 *Pour $m=1$, (6.2) devient*

$$\varphi\left(x_1,...,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial\varphi\left(x_1,...,x_n\right)}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}C_i\left(x_1,...,x_n\right). \tag{6.3}$$

Ainsi, la fonction φ correspond à la somme des contributions de chaque variable x_i, qui correpond à

$$C_i\left(x_1,...,x_n\right)=x_i\frac{\partial\varphi\left(x_1,...,x_n\right)}{\partial x_i} \tag{6.4}$$

pour $i=1,2,...,n$.

Remarque 6.11 *À partir de (6.4), on observe que*

$$\begin{aligned}
C_i\left(x_1,...,x_n\right) &= x_i\frac{\partial\varphi\left(x_1,...,x_n\right)}{\partial x_i} \\
&= \lim_{h\to 0}x_i\frac{\varphi\left(x_1,...,x_i+h,...,x_n\right)-\varphi\left(x_1,...,x_i,...,x_n\right)}{h}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

En posant $h=\varepsilon x_i$, (6.5) devient

$$\begin{aligned}
C_i\left(x_1,...,x_n\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0}x_i\frac{\varphi\left(x_1,...,\left(1+\varepsilon\right)x_i,...,x_n\right)-\varphi\left(x_1,...,x_i,...,x_n\right)}{\left(1+\varepsilon\right)x_i-x_i} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi\left(x_1,...,\left(1+\varepsilon\right)x_i,...,x_n\right)-\varphi\left(x_1,...,x_i,...,x_n\right)}{\varepsilon} \\
&= \left.\frac{\partial\varphi\left(x_1,...,\lambda_i x_i,...,x_n\right)}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_i=1},
\end{aligned} \tag{6.6}$$

pour $i=1,2,...,n$.

À la suite de la Remarque 6.11, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 6.12 *Pour une fonction homogène d'ordre 1 et dérivable φ, (6.3) devient*

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,...,x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial\varphi(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial\varphi(\lambda_1 x_1,...,\lambda_n x_n)}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x_1,...,x_n),\end{aligned}$$

c.-à-d. la contribution de la variable est

$$C_i(x_1,...,x_n) = \left.\frac{\partial\varphi(\lambda_1 x_1,...,\lambda_n x_n)}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1}.$$

Remarque 6.13 ***Approximation de la contribution.*** *Dans les circonstances où on ne peut pas identifier la forme analytique pour (6.6), on recours à l'approximation*

$$C_i(x_1,...,x_n) \simeq \frac{\varphi(x_1,...,(1+\varepsilon)x_i,...,x_n) - \varphi(x_1,...,x_i,...,x_n)}{\varepsilon}$$

avec un choix très petit pour ε (p. ex., 10^{-3} ou 10^{-4}).

6.5 Risque global d'un portefeuille et contributions

Soit un portefeuille constitué de n risques (contrats, lignes d'affaires, etc.) $X_1,...,X_n$.

Le théorème 6.9 d'Euler est très utile pour établir la contribution d'un risque X_i au risque global $S = X_1 + ... + X_n$ du portefeuille.

Soit une mesure positivement homogène d'ordre 1 $\zeta(S) = \zeta(X_1 + ... + X_n)$.

À partir du Corollaire 6.12, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 6.14 *La contribution d'un risque X_i au risque global $S = X_1 + ... + X_n$ du portefeuille est donnée par*

$$C^{\zeta}(X_i) = \left.\frac{\partial\zeta(\lambda_1 X_1,...,\lambda_n X_n)}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1} \tag{6.7}$$

de telle sorte que

$$\zeta(S) = \zeta(X_1 + ... + X_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i(X_1,...,X_n).$$

Exemple 6.15 *Les mesures de risque*

$$TVaR_{\kappa}(X_1 + ... + X_n)$$

et

$$VaR_{\kappa}(X_1 + ... + X_n)$$

sont homogènes positives d'ordre 1.

En effet, on a

$$VaR_{\kappa}(\lambda X_1 + ... + \lambda X_n) = \lambda VaR_{\kappa}(X_1 + ... + X_n)$$

et

$$TVaR_{\kappa}(\lambda X_1 + ... + \lambda X_n) = \lambda TVaR_{\kappa}(X_1 + ... + X_n)$$

pour $\lambda > 0$. ■

Exemple 6.16 *La mesure de risque*

$$\sqrt{Var\left(X_1+...+X_n\right)}$$

est homogène positive avec ordre 1, car

$$\begin{aligned}\sqrt{Var\left(X_1+...+X_n\right)} &= \sqrt{Var\left(\lambda X_1+...+\lambda X_n\right)}\\ &= \sqrt{\lambda^2 Var\left(X_1+...+X_n\right)}\\ &= \lambda\sqrt{Var\left(X_1+...+X_n\right)}.\end{aligned}$$

■

Exemple 6.17 *En revanche, la variance*

$$Var\left(X_1+...+X_n\right)$$

est homogène positive avec ordre 2, parce qu'on a

$$\begin{aligned}Var\left(X_1+...+X_n\right) &= Var\left(\lambda X_1+...+\lambda X_n\right)\\ &= \lambda^2 Var\left(X_1+...+X_n\right).\end{aligned}$$

■

On considère trois mesures de risque pour lesquelles on peut identifier la forme de la contribution.

6.5.1 Mesure écart-type et contribution

Soit la v.a. $S=\sum_{i=1}^n X_i$. On mesure le risque global du portefeuille à l'aide la mesure écart-type de S qui est donnée par $\zeta\left(S\right)=\sqrt{Var\left(S\right)}$, où

$$\begin{aligned}Var\left(S\right) &= Var\left(X_1+...+X_n\right)\\ &= \sum_{i=1}^n Var\left(X_i\right)+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\neq i}^n Cov\left(X_i,X_j\right).\end{aligned}$$

On désire identifier la contribution de chaque risque X_i au risque global du portefeuille. À l'aide de 6.7, on a

$$\begin{aligned}C^{\sqrt{Var}}\left(X_i\right) &= \left.\frac{\partial\varphi\left(\lambda_1X_1,...,\lambda_nX_n\right)}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1}\\ &= \left.\frac{\partial\sqrt{Var\left(\lambda_1X_1+...+\lambda_nX_n\right)}}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1}\\ &= \left.\frac{\partial\sqrt{\sum_{i=1}^n Var\left(\lambda_iX_i\right)+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\neq i}^n Cov\left(\lambda_iX_i,\lambda_jX_j\right)}}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1}\\ &= \left.\frac{\partial\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2Var\left(X_i\right)+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\neq i}^n \lambda_i\lambda_jCov\left(X_i,X_j\right)}}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1}\end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} C^{\sqrt{Var}}(X_i) &= \frac{1}{2}\frac{2\lambda_i Var(X_i) + 2\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_j Cov(X_i,X_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} Var(\lambda_i X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} Cov(\lambda_i X_i, \lambda_j X_j)}}\Bigg|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1} \\ &= \frac{Var(X_i) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} Cov(X_i,X_j)}{\sqrt{Var(S)}} \\ &= \frac{Cov(X_i,S)}{\sqrt{Var(S)}}. \end{aligned}$$

Donc, la contribution du risque i au risque global est

$$C^{\sqrt{Var}}(X_i) = \frac{Cov(X_i,S)}{\sqrt{Var(S)}}.$$

Comme prévu, on observe

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} C^{\sqrt{Var}}(X_i) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{Cov(X_i,S)}{\sqrt{Var(S)}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} Cov(X_i,S)}{\sqrt{Var(S)}} \\ &= \frac{Var(S)}{\sqrt{Var(S)}} \\ &= \sqrt{Var(S)}. \end{aligned}$$

Corollaire 6.18 *Soit la mesure $\zeta(S) = \sqrt{Var(S)}$, où $S = X_1 + ... + X_n$. Alors, la contribution du risque X_i au risque global est*

$$C^{\sqrt{Var}}(X_i) = \frac{Cov(X_i,S)}{\sqrt{Var(S)}}.$$

6.5.2 Mesure VaR et contribution

Pour le prochain exemple, on a recours au lemme suivant.

Lemme 6.19 *Soit une v.a. continue Y. Alors, on a*

$$b = \frac{E\left[Y \times 1_{\{Y=b\}}\right]}{f_Y(b)} = E[Y|Y=b].$$

Soit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On mesure le risque global du portefeuille à l'aide de la mesure VaR de S qui est donnée par $\zeta(S) = VaR_\kappa(S)$, où

$$VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(X_1 + ... + X_n).$$

Pour simplifier la présentation, on suppose que les v.a. $X_1..., X_n$ sont continues.

Selon le lemme 6.19, on observe que

$$VaR_\kappa(X_1 + ... + X_n) = E[X_1 + ... + X_n | X_1 + ... + X_n = VaR_\kappa(X_1 + ... + X_n)]$$

Pour déterminer la contribution de chaque risque X_i au risque global du portefeuille. À l'aide du Théorème

6.9 d'Euler et de (6.6), on a

$$\begin{aligned} C_{\kappa}^{VaR}(X_i) &= \left.\frac{\partial E\left[\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n | S = VaR_{\kappa}(S)\right]}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1} \\ &= E\left[\lambda_i X_i | S = VaR_{\kappa}(S)\right]|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1} \\ &= E\left[X_i | S = VaR_{\kappa}(S)\right] \\ &= \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]}{f_S\left(VaR_{\kappa}(S)\right)}. \end{aligned}$$

Pour le développement, on ne multiplie pas les v.a. $X_1, ..., X_n$ qui sont présentent dans la condition, car il faut considérer cette condition comme une contrainte c.-à-d. on travaille avec la contrainte que la somme des v.a. est égale $b = VaR_{\kappa}(S)$. Bref, la contribution du risque i au risque global est

$$C_{\kappa}^{VaR}(X_i) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]}{f_S\left(VaR_{\kappa}(S)\right)}.$$

Comme prévu, on observe

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} C_{\kappa}^{VaR}(X_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]}{f_S\left(VaR_{\kappa}(S)\right)} \\ &= \frac{E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]}{f_S\left(VaR_{\kappa}(S)\right)} \\ &= \frac{E\left[S \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]}{f_S\left(VaR_{\kappa}(S)\right)} \\ &= VaR_{\kappa}(S). \end{aligned}$$

Corollaire 6.20 *Soit la mesure $\zeta(S) = VaR_{\kappa}(S)$, où $S = X_1 + ... + X_n$. Alors, la contribution du risque X_i au risque global est*

$$C_{\kappa}^{VaR}(X_i) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]}{f_S\left(VaR_{\kappa}(S)\right)}. \tag{6.8}$$

6.5.3 Mesure TVaR et contribution

Soit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On mesure le risque global du portefeuille à l'aide de la mesure TVaR de S qui est donnée par $\zeta(S) = TVaR_{\kappa}(S)$, où

$$TVaR_{\kappa}(S) = TVaR_{\kappa}(X_1 + ... + X_n).$$

Pour simplifier la présentation, on suppose que les v.a. $X_1..., X_i$ sont continues.

On sait que

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X_1 + ... + X_n) &= E\left[(X_1 + ... + X_n) | S > VaR_{\kappa}(S)\right] \\ &= \frac{E\left[(X_1 + ... + X_n) \times 1_{\{S>VaR_{\kappa}(S)\}}\right]}{1-\kappa} \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_{\kappa}(X_1+...+X_n)}^{\infty} E\left[(X_1 + ... + X_n) \times 1_{\{S=y\}}\right] dy. \end{aligned}$$

À partir de (6.8), on déduit

$$\begin{aligned} C_{\kappa}^{TVaR}(X_i) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_{\kappa}(X_1+...+X_n)}^{\infty} E\left[X_i \times 1_{\{S=y\}}\right] dy \\ &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X_i \times 1_{\{S>VaR_{\kappa}(X_1+...+X_n)\}}\right] dy. \end{aligned}$$

Corollaire 6.21 *Soit la mesure $\zeta(S) = TVaR_\kappa(S)$, où $S = X_1 + ... + X_n$. Alors, la contribution du risque X_i au risque global est*

$$C_\kappa^{VaR}(X_i) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right]}{1-\kappa}. \tag{6.9}$$

6.5.4 Approximation de la contribution

Comme on l'indique dans la remarque 6.13, si on ne parvient pas à identifier la forme analytique pour (6.7), on utilise l'approximation donnée par

$$C_i \simeq \frac{\zeta(X_1, ..., (1+\varepsilon) X_i, ..., X_n) - \zeta(X_1, ..., X_i, ..., X_n)}{\varepsilon}$$

avec un choix d'une très petite valeur pour ε (p. ex. 10^{-3} ou 10^{-4}).

6.5.5 Approximation basée sur la simulation

On considère un portefeuille d'un nombre n élevé de risques représentés par le vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$. Les coûts pour l'ensemble du portefeuille sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Pour parvenir à évaluer les différentes quantités de risque (p. ex., mesures de risque, mesures de solvabilité, primes *stop-loss*, etc.) définies en fonction des coûts totaux du portefeuille et à évaluer les contributions associées à chaque risque, il arrive en pratique que la seule possibilité repose sur les méthodes fondées sur la simulation stochastique.

Dans cette section, on explique la procédure pour évaluer approximativement les contributions selon les règles basées sur sur la VaR et sur la TVaR.

On suppose que l'on a produit les m réalisations

$$\left\{\left(X_1^{(j)}, ..., X_n^{(j)}\right), j = 1, 2, ..., m\right\}$$

de $(X_1, ..., X_n)$ et $\left\{S^{(j)}, j = 1, 2, ..., m\right\}$ de S.

Condition 6.22 *Dans cette section, on suppose que $\kappa \times m \in \mathbb{N}$.*

Condition 6.23 *Dans cette section, on fait aussi l'hypothèse que les v.a. $(X_1, ..., X_n)$ sont continues.*

Remarque 6.24 *Les deux hypothèses sont faites pour simplifier la présentation. Le cas plus général est traité en détail dans le chapitre 10 de Marceau (2013).*

L'ensemble des réalisations classées en ordre croissant de S est noté par $\left\{S^{[j]}, j = 1, 2, ..., m\right\}$. On fixe j_0 tel que $F_m^{-1}(\kappa) = X^{[j_0]}$ où F_n est la fonction de répartition empirique déterminée à partir des réalisations $\left\{S^{(j)}, j = 1, 2, ..., m\right\}$. Bref, $j_0 = \kappa m$.

La valeur de $VaR_\kappa(S)$ est déterminée approximativement par $F_m^{-1}(\kappa)$.

On fixe $VaR_\kappa(S) \simeq \widehat{VaR}_\kappa(S) = F_m^{-1}(\kappa) = S^{[j_0]}$.

On rappelle l'expression de l'approximation de $TVaR_\kappa(S)$ qui est donnée par

$$\begin{aligned}\widehat{TVaR}_\kappa(S) &\simeq \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m S^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)} > \widehat{VaR}_\kappa(S)\right\}}\right) \\ &= \frac{1}{m-j_0}\sum_{j=j_0+1}^m S^{[j]}.\end{aligned}$$

Les approximations des contributions au risque X_i selon les règles basées sur la VaR et la TVaR sont données respectivement par

$$C_\kappa^{VaR}(X_i) \simeq \widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_i) = \sum_{j=1}^m X_i^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)} = S^{[j_0]}\right\}}$$

et

$$\begin{aligned} C_{\kappa}^{TVaR}(X_i) &\simeq \widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_i) = \frac{1}{(1-\kappa)\,m}\sum_{j=1}^{m} X_i^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)} > S^{[j_0]}\right\}} \\ &= \frac{1}{m-j_0}\sum_{j=1}^{m} X_i^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)} > S^{[j_0]}\right\}}, \end{aligned}$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.

Exemple 6.25 *On considère un portefeuille avec trois v.a. continues X_1, X_2, et X_3. On a reproduit le tableau ci-dessous 10 réalisations du vecteur (X_1, X_2, X_3) :*

j	$X_1^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$S^{(j)}$	*rang*
1	442	636	4159	5237	5
2	1545	1620	2436	5601	6
3	3733	1933	7860	13526	10
4	1915	1637	2147	5699	7
5	1197	1448	1363	4008	3
6	2503	195	265	2963	1
7	918	1185	1131	3234	2
8	959	672	2718	4349	4
9	1991	1770	4137	7898	9
10	2667	2505	639	5811	8

On fournit dans le tableau suivant les valeurs de $\widetilde{VaR}$ et des contributions de chaque risque à cette mesure :

κ	$\widetilde{C}_{\kappa}^{VaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{VaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{VaR}(X_3)$	$\widetilde{VaR}_{\kappa}(S)$
0.7	1915	1637	2147	5699
0.8	2667	2505	639	5811
0.9	1991	1770	4137	7898

On fournit dans le tableau suivant les valeurs de $\widetilde{TVaR}$ et des contributions de chaque risque à cette mesure :

κ	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_3)$	$\widetilde{TVaR}_{\kappa}(S)$
0.7	2797	2069.33	4212	9078.33
0.8	2862	1851.5	5998.5	10712
0.9	3733	1933	7860	13526

Dans le tableau suivant, on observe que $\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_i) \leq \widetilde{TVaR}_{\kappa}(X_i)$, pour chaque valeur de κ et chaque risque X_i $(i = 1, 2, 3)$:

κ	$\widetilde{TVaR}_{\kappa}(X_1)$	$\widetilde{TVaR}_{\kappa}(X_2)$	$\widetilde{TVaR}_{\kappa}(X_3)$
0.7	2967.67	2069.33	5385.33
0.8	3200	2219	6009.5
0.9	3733	2505	7860

Cette relation découle de la propriété de sous-additivité de la mesure TVaR. Comme la mesure VaR n'est pas sous-additive, on n'observe pas une telle relation. Par exemple, $\widetilde{C}_{0.8}^{VaR}(X_2) = 2505 > \widetilde{VaR}_{0.9}(X_2) = 1770$.

6.6 Exemple – Loi normale multivariée

Soit un vecteur de v.a. $(X_1, .., X_n)$ obéissant à une loi normale multivariée avec

$$\underline{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)^{tr} \text{ et } \underline{\sigma} = (\sigma_1, ..., \sigma_n)^{tr}$$

("^{tr}" = transposée) et une matrice de coefficients de corrélation de Pearson dont les éléments sont

$$\rho_P\left(X_i, X_j\right) = \rho_{i,j}$$

pour $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

On sait

$$S \sim Norm\left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$$

avec

$$\mu_S = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

et

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j.$$

Alors, on déduit

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) &= \mu_S + \sigma_S \times \Phi^{-1}(\kappa) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j} \times \Phi^{-1}(\kappa) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1, j \neq i}^{n} Cov\left(X_i, X_j\right)} \times \Phi^{-1}(\kappa). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= \mu_S + \sigma_S \times \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j} \times \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1, j \neq i}^{n} Cov\left(X_i, X_j\right)} \times \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}. \end{aligned}$$

Pour obtenir la contribution selon la VaR, on utilise le corollaire 6.12 et l'expression de la contribution pour l'écart-type, c.-à-d., la contribution de la variable est

$$\begin{aligned} C^\zeta(X_i) &= VaR_\kappa(X_i; S) \\ &= \left.\frac{\partial \zeta(\lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_n X_n)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1} \\ &= E[X_i] + \frac{Var(X_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} Cov\left(X_i, X_j\right)}{\sqrt{Var(S)}} \times \Phi^{-1}(\kappa). \end{aligned}$$

Pour obtenir la contribution selon la TVaR, on utilise le corollaire 6.12 et l'expression de la contribution pour l'écart-type c.-à-d. la contribution de la variable est

$$\begin{aligned} C^\zeta(X_i) &= TVaR_\kappa(X_i; S) \\ &= \left.\frac{\partial \zeta(\lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_n X_n)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1} \\ &= E[X_i] \\ &\quad + \frac{Var(X_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} Cov\left(X_i, X_j\right)}{\sqrt{Var(S)}} \times \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}. \end{aligned}$$

Pour chaque risque X_i et selon la TVaR, le bénéfice de mutualisation est

$$\begin{aligned}
& TVaR_\kappa\left(X_i\right) - TVaR_\kappa\left(X_i;S\right) \\
= \; & E\left[X_i\right] + \sqrt{Var\left(X_i\right)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} \\
& -E\left[X_i\right] + \frac{Var\left(X_i\right) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} Cov\left(X_i,X_j\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}} \times \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} \\
= \; & \left(\sqrt{Var\left(X_i\right)} - \frac{Var\left(X_i\right) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} Cov\left(X_i,X_j\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} \\
= \; & \sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1 - \frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}.
\end{aligned}$$

On peut montrer que

$$\sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1 - \frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} \geq 0$$

ou

$$\sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1 - \frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} = 0$$

quand

$$\rho_{i,j} = 1$$

pour tout couple (i,j).

Pour chaque risque X_i et selon la VaR, le "bénéfice" de mutualisation est

$$\begin{aligned}
& VaR_\kappa\left(X_i\right) - VaR_\kappa\left(X_i;S\right) \\
= \; & E\left[X_i\right] + \sqrt{Var\left(X_i\right)} \times \Phi^{-1}\left(\kappa\right) \\
& -E\left[X_i\right] + \frac{Var\left(X_i\right) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} Cov\left(X_i,X_j\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}} \times \Phi^{-1}\left(\kappa\right) \\
= \; & \left(\sqrt{Var\left(X_i\right)} - \frac{Var\left(X_i\right) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} Cov\left(X_i,X_j\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \Phi^{-1}\left(\kappa\right) \\
= \; & \sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1 - \frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \Phi^{-1}\left(\kappa\right).
\end{aligned}$$

Pour $\kappa \in]0, 0.5[$, on peut montrer que

$$\sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1 - \frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \Phi^{-1}\left(\kappa\right) \leq 0$$

Pour $\kappa \in]0.5, 1[$, on peut montrer que

$$\sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1 - \frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \Phi^{-1}\left(\kappa\right) \geq 0$$

Pour $\kappa = 0.5$, on a

$$\sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1 - \frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \Phi^{-1}\left(\kappa\right) = 0.$$

6.7 Notes bibliographiques

Pour une introduction aux notions concernant l'allocation de capital, on recommande [Albrecht, 2014], [McNeil et al., 2015] et [Tasche, 1999].

Code LaTeX : `chapitre_allocation_partie1.tex`

Chapitre 7

Aperçu de la procédure d'estimation

7.1 Rappel

Par hypothèse, les coûts pour un contrat, une division ou un portefeuille d'assurance sont définis par la v.a. X.

En actuariat, on s'intéresse à la modélisation de v.a. X : choix du modèle approprié, calculs des différentes mesures ou primes, etc.

À la fois pour l'estimation et pour des fins de calculs, la v.a. X est représentée par une somme aléatoire

$$X = \sum_{k=1}^{M} B_k, \tag{7.1}$$

avec la convention $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$.

Les hypothèses classiques en lien avec la représentation sont les suivantes :

— M : v.a. discrète de fréquence (nombre de sinistres, ou nombre d'évènements, etc.) ;

— B_k : montant du $k$ième sinistre ;

— $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ = suite de v.a. indépendantes ;

— $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ = suite de v.a. identiquements distribuées avec la convention $B_k \sim B$;

— $\underline{B}$ indépendantes de la v.a. M.

Hypothèse additionnelle :

— Pour simplifier la présentation, on présume que la distribution de la v.a. B est absolument continue avec $F_B(0) = 0$.

Dans les prochains chapitres, on rappelle brièvement s'intéresse à l'estimation de la distribution de la v.a. X, en tenant compte de la modélisation en (7.1).

L'approche utilisée dépend du contexte et des données disponibles.

— Approche #1 : estimer séparément la distribution pour la v.a. M et la distribution pour la v.a. B ;

— Approche #2 : estimer directement la distribution de X en tenant compte de la représentation en (7.1).

L'approche #1 est traitée dans le chapitre 8, où l'on rappelle brièvement la procédure pour l'estimation de la distribution du nombre de sinistres, et le chapitre 9, où l'on aborde brièvement de la procédure d'estimation pour la distribution du montant de sinistres.

L'approche #2 est examinée brièvement à la fin du chapitre 9.

7.2 Procédure d'estimation

Les étapes de la procédure d'estimation sont les suivantes :

— Analyse exploratoire des données (moyenne, variance, qq-plot, histogramme, fonction d'excès moyen) ;
— Estimation des paramètres ;
— Adéquation et validation du modèle avec données (test d'adéquation du khi-deux, test de Kolmogovov, test d'anderson-Darling, critère de Atkaike) ;
— Choix de modèle (test du ratio de vraisemblance, etc.).

7.3 Opérations d'une compagnie d'assurance

Pour simplifier la présentation, on considère les opérations d'une compagnie d'assurance IARD.
On résume les activités d'une compagnie d'assurance comme suit :

1. Souscription initiale et tarification.
2. Souscription au renouvellement et tarification.
3. Gestion des sinistres.
4. Réserves.
5. Solvabilité et allocation du capital.

Le choix de modèles intervient, notamment dans la tarification des primes, le calcul des réserves et les calculs en lien avec la solvabilité de la compagnie d'assurance.

La procédure d'estimation et le cadre général des calculs à réaliser pour le contexte du "pricing" sont indiquée dans les illustrations 7.2 et 7.1, produites dans [Blier-Wong, 2018] (en s'inspirant d'illustrations semblables dans [Parodi, 2014]).

Illustration 7.1 – Procédure d'estimation et le cadre général des calculs à réaliser pour le contexte du "pricing" – détails.

Dans les chapitres 8 et 9, on présente les méthodes d'estimation dans un contexte de données univariées. Implicitement, on suppose l'indépendance entre les risques, entre le nombre de sinitres et les montants de sinistres. Les modèles de dépendance ainsi que les méthodes d'estimation et d'agrégation avec ces modèles sont présentées dans les chapitres 13 et 14.

7.4 Notes bibliographiques

Voir, p. ex., [Klugman et al., 2012], [Cizek et al., 2005], [Parodi, 2014] et [Albrecher et al., 2017], pour un aperçu sur l'estimation dans les modèles actuariels.

Code LaTeX : `chapitre_apercu_estima.tex`

Illustration 7.2 – Procédure d'estimation et le cadre général des calculs à réaliser pour le contexte du "pricing".

Chapitre 8

Estimation des lois pour la fréquence

8.1 Introduction

On utilise la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de la loi de M.

8.2 Méthode du maximum de vraisemblance

Les propriétés des estimateurs obtenus selon la méthode du maximum de vraisemblance sont connues.
Elles sont mentionnées dans le chapitre précédent.
Ces estimateurs sont asymptotiquement sans biais.
La distribution asymptotique de ces estimateurs est de loi normale.
Parmi les estimateurs dont la loi asymptotique est normale, ils sont ceux ayant la plus petite variance.
On peut développer une formule explicite de la variance asymptotique.
Un estimateur du maximum de vraisemblance est invariant sous une transformation du paramètre.En d'autres termes, un estimateur du maximum de vraisemblance d'une fonction d'un paramètre correspond à la fonction évaluée à cet estimateur du maximum de vraisemblance.
On suppose qu'on dispose des données fournies dans l'exemple suivant.
Exemple pratique : *Un employeur a recueilli des données au cours des deux dernières années pour un groupe sur les nombres de sinistres et les montants des sinistres. Les données concernant le nombre de sinistres sont présentées dans le tableau ci-dessous :*

Nombre de sinistres	Nombre de participants
0	390
1	385
2	277
3	196
4	126
5	65
6	45
7	28
8	15
9	9
10	5
11	3
12	1
13	1
14 et plus	0

On considère seulement les modèles Poisson et binomiale négative.

On convient de noter par n_k $(k = 0, 1, 2, ..., k_0)$ le nombre de risques (c.-à-d. contrats, individus) ayant eu k sinistres sur une période. Le nombre k_0 est le nombre de sinistres maximal observé pour un risque (individu, entité, contrat).

8.2.1 Poisson

On suppose que M obéit à une loi de Poisson avec

$$\begin{aligned} p_M(k) &= \Pr(M = k) \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\kappa}}{k!}, k = 0, 1, ..., \end{aligned}$$

où

$$E[M] = \lambda$$

et

$$Var\,(M) = \lambda.$$

L'estimateur selon la méthode du maximum de vraisemblance est la valeur de λ qui maximise la fonction de vraisemblance $L(\lambda)$.

Cela signifie que l'on cherche la valeur de λ qui donne la plus grande probabilité d'obtenir les données observées.

On cherche la valeur de λ qui maximise la fonction de vraisemblance $L\,(\lambda)$ c.-à-d.

$$\widehat{\lambda}_{MLE} = \underset{\lambda \in \Omega_\lambda}{\arg\max} L\,(\lambda)$$

La fonction de vraisemenblance correspond à

$$\begin{aligned} L\,(\lambda) &= \prod_{k=0}^{k_0} \Pr\,(M = k)^{n_k} \\ &= \prod_{k=0}^{k_0} e^{-\lambda n_k}\frac{\lambda^{\kappa n_k}}{k!}. \end{aligned}$$

Étant donné que la fonction de vraisemblance est une fonction croissante, le maximum de $L(\lambda)$ est atteint au même point que celui du logarithme naturel (népérien) de cette fonction qui est désigné par $l(\lambda)$

$$\begin{aligned} l(\lambda) &= \ln\{L\,(\lambda)\} \\ &= \sum_{k=0}^{k_0}\{-\lambda n_k + k n_k \ln(\lambda) - \ln(k!)\}\,. \end{aligned}$$

Pour trouver le λ qui maximise $l(\lambda)$, il suffit de prendre la dérivée de $l(\lambda)$ par rapport à λ

$$\frac{dl(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{k=0}^{k_0}\left\{-n_k + \frac{k n_k}{\lambda}\right\}. \tag{8.1}$$

Le maximum de $l(\lambda)$ est atteint à la valeur de λ dans (8.1) tel que

$$\frac{dl(\lambda)}{d\lambda} = 0. \tag{8.2}$$

À partir de (8.1) et (8.2), la valeur de λ, qu'on note $\widehat{\lambda}_{MLE}$, qui satisfait (8.2) est

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_{MLE} &= \frac{\sum_{k=0}^{k_0} kn_k}{\sum_{k=0}^{k_0} n_k} \\ &= \frac{\text{nombre total de sinistres}}{\text{nombre total de risques}},\end{aligned}$$

où $\widehat{\lambda}_{MLE}$ est l'estimateur de λ selon la méthode du maximum de vraisemblance.

On a

$$E\left[\widehat{\lambda}_{MLE}\right] = \lambda$$

et

$$Var\left(\widehat{\lambda}_{MLE}\right) = \frac{\lambda}{n}.$$

Remarque : $\widehat{\lambda}_{MLE}$ correspond à les estimateurs obtenus selon la méthode des moments et la méthode des moindres carrés.

8.2.2 Binomiale négative

On suppose que M obéit à une loi binomiale négative avec

$$\begin{aligned}p_M(k) &= \Pr(M = k) \\ &= \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k, k = 0, 1, ...,\end{aligned}$$

où

$$E[M] = r\beta$$

et

$$Var(M) = r\beta(1+\beta).$$

Les estimateurs des paramètres r et β selon la méthode du maximum de vraisemblance sont les valeurs de r et β qui maximisent la fonction de vraisemblance $L(r, \beta)$.

Cela signifie qu'on cherche les valeurs de r et β qui donnent la plus grande probabilité d'obtenir les données observées.

La fonction de vraisemblance correspond à

$$\begin{aligned}L(r, \beta) &= \prod_{k=0}^{k_0} \Pr(M = k)^{n_k} \\ &= \prod_{k=0}^{k_0}\left(\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!}\right)^{n_k}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{n_k r}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{n_k k}.\end{aligned}$$

Étant donné que la fonction de vraisemblance est une fonction croissante, le maximum de $L(r, \beta)$ est atteint au même point que celui du logarithme naturel (népérien) de cette fonction qui est désigné par $l(r, \beta)$

$$\begin{aligned}l(r, \beta) &= \ln\{L(r, \beta)\} \\ &= \sum_{k=0}^{k_0}\left\{\begin{array}{c} n_k \ln\binom{r+k-1}{k} - n_k r\ln(1+\beta) \\ +n_k k\ln(\beta) - kn_k\ln(1+\beta)\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de (r, β) qui maximise $l(r, \beta)$, il suffit de prendre les dérivées partielles de (r, β)

par rapport à r et à β

$$\frac{\partial l(r,\beta)}{\partial r} = \sum_{k=0}^{k_0} \left\{ n_k \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{r+s} - n_k \ln(1+\beta) \right\} = 0. \tag{8.3}$$

$$\frac{\partial l(r,\beta)}{\partial \beta} = \sum_{k=0}^{k_0} \left\{ -\frac{n_k r}{1+\beta} + \frac{n_k k}{\beta} - \frac{n_k k}{1+\beta} \right\} = 0. \tag{8.4}$$

Les estimateurs de r et β correspondent à la solution du système d'équations (8.3)s et (8.4). La solution est obtenue par le biais d'une méthode numérique telle que la méthode de Newton-Raphson.

8.3 Test d'adéquation

On utilise le test d'adéquation du khideux (test formel).
On a

$$n = n_0 + n_1 + ... + n_{k_0}.$$

Objectif : On teste si le modèle choisi est adéquat pour les données (fit to the data)
Statistique du test :

$$Q = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{(n_k - E_k)^2}{E_k}$$

On définit E_k = nombre espérés d'observations avec k sinistres

$$E_k = n \Pr(M = k; \underline{\theta})$$

Convention habituelle :

$$E_k \geq 5$$

auquel cas on fusionne des classes.
On définit une v.a. Z qui obéit à une loi du chi-deux

$$d.f. = (nbclasses) - (nbparam) - 1$$

On définit $z_{\alpha,df}$ (appélée valeur critique) tel que

$$\Pr(Z > z_{\alpha,df}) = \alpha$$

où, p. ex., $\alpha = 0.05$.
On rejette le modèle $(H0)$ si

$$Q > z_{\alpha,df}$$

On définit la p_{value}

$$p_{value} = \Pr(Z > Q)$$

De façon équivalente, on rejette le modèle $(H0)$ si

$$p_{value} < \alpha$$

8.4 Modèles de fréquence avec masse supplémentaire à zéro

Parfois, les lois Poisson et binomiale négaitve n'offrent pas une adéquation appropriée
Les données semblent présentées une surmasse à zéro
On définit une v.a. de fréquence M avec

$$\Pr(M = k) = (1-\alpha)\, 1_{\{k=0\}} + \alpha \Pr(M^* = k)$$

où M^* obéit à une loi Poisson ou binomiale négative et $0 \leq \alpha \leq 1$.

Exemple 1. On suppose que

$$M^* \sim Pois\,(\lambda)$$

Alors

$$\begin{aligned} \Pr\,(M=0) &= (1-\alpha)+\alpha e^{-\lambda} \\ \Pr\,(M=k) &= \alpha e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres α et λ. On peut faire un test de ration de vraisemblance pour valider que $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$.

□

Exemple 2. On suppose que

$$M^* \sim Binom\,(r,\beta)$$

Alors

$$\begin{aligned} \Pr\,(M=0) &= (1-\alpha)+\alpha\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \\ \Pr\,(M=k) &= \alpha\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres r, β et α. On peut faire un test de ration de vraisemblance pour valider que $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$.

8.5 Modèles mélanges de Poisson

On sait que la loi binomiale négative est obtenue par le mélange d'une loi Poisson ou le paramètre obéit à une loi gamma

On peut produire d'autres mélanges de la loi de Poisson en utlisant d'autres lois continues avec support positifs.

Loi binomiale négative. On suppose une v.a. Θ qui obéit à une loi gamma avec paramètres r et β. On suppose que la loi M est définie de telle sorte que

$$M|\Theta=\theta \sim Poisson\,(\theta)$$

avec

$$E\left[t^M|\Theta=\theta\right] = e^{\theta(t-1)}$$

Alors

$$\begin{aligned} P_M\,(t) &= E\left[t^M\right] \\ &= E_\Theta\left[E\left[t^M|\Theta\right]\right] \\ &= E_\Theta\left[E\left[t^M|\Theta\right]\right] \\ &= E_\Theta\left[e^{\Theta(t-1)}\right] \end{aligned}$$

Or, si

$$\Theta \sim Gamma\,(r,\beta)$$

on sait que

$$M_\Theta\,(s) = E_\Theta\left[e^{\Theta s}\right] = \left(\frac{\beta}{\beta-s}\right)^r$$

On déduit que

$$\begin{aligned} P_M(t) &= E_\Theta\left[e^{\Theta(t-1)}\right] \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta-(t-1)}\right)^r \\ &= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\beta}(t-1)}\right)^r \\ &= \left(\frac{1}{1-\gamma(t-1)}\right)^r, \end{aligned}$$

qui correspond à la f.g.p. de la loi binomiale négative.

Autres lois possibles pour Θ :

— Loi lognormale : pas de forme explicite de la loi de M. Cette loi est appelée Poisson-lognormale avec

$$\begin{aligned} \Pr(M=k) &= \int_0^\infty \Pr(M=k|\Theta=\theta)\, f_\Theta(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^\infty e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!} f_\Theta(\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

où $f_\Theta(\theta)$ est la fonction de densité d'une loi lognormale

— Loi inverse gaussienne : pas de forme explicite de la loi de M. Cette loi est appelée Poisson-inverse gaussienne avec

$$\begin{aligned} \Pr(M=k) &= \int_0^\infty \Pr(M=k|\Theta=\theta)\, f_\Theta(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^\infty e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!} f_\Theta(\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

où $f_\Theta(\theta)$ est la fonction de densité d'une loi inverse gaussienne

— Etc.

Remarques

— Le mélange introduit une surdispersion.

— Pour une loi Poisson mélange, on observe que

$$Var(M) > E[M]$$

8.6 Notes bibliographiques

Pour une introduction au méthodes d'estimation en actuariat, on recommande, p. ex., [Klugman et al., 2012] et [Cizek et al., 2005].

Code LaTeX : `chapitre_estima_frequence.tex`

Chapitre 9

Estimation des lois pour le montant de sinistre

9.1 Introduction

On commence par considérer le cas d'un portefeuille de risques (contrats) homogènes.
Par la suite, on considère le cas de portefeuilles avec des risques hétérogènes.

9.2 Contexte

Considérons l'échantillon de montants de sinistres $\{x_1, ..., x_n\}$.
On suppose que $x_1, ..., x_n$ sont des réalisations indépendantes de $X_1, ..., X_n$.
On fait l'hypothèses que les montants de sinistres $X_1, ..., X_n$ sont i.d. et ont pour fonction de répartition F_X.
Cela est plausible si les sinistres proviennent d'une même portefeuille de risques que l'on suppose homogène.
On ne connaît pas F_X.
On cherche à identifier F_X.

9.3 Formats des données

Les données de sinistres peuvent se présenter sous forme complète, tronquée, groupée, ou censurée.
(...)

9.4 Étapes

Les étapes sont :

- Analyse exploratoire des données (moyenne, variance, qq-plot, histogramme, fonction d'excès moyen)
- Estimation des paramètres
- Adéquation et validation du modèle avec données (test d'adéquation du khi-deux, test de Kolmogovov, test d'anderson-Darling, critère de Atkaike)
- Choix de modèle (test du ratio de vraisemblance, etc.)

9.5 Ensembles de données

...

9.6 Fonction de répartition empirique

La fonction de répartition empirique est utile pour identifier la forme de F_X.

On définit la fonction de répartition empirique $\widehat{F}_n$ par

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}(x_i)}{n}$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

La fonction de répartition empirique satisfait les propriétés d'une fonction de répartition.

Selon le théorème de Glivenko-Cantelli, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{F}_n(x) - F_X(x)\right| \to 0 \text{ (presque sûrement)}$$

lorsque $n \to \infty$.

Ainsi, $\widehat{F}_n$ peut offrir une bonne approximation de F_X lorsque n est grand.

On peut utiliser $\widehat{F}_n$ pour des fins de calculs actuariels.

Comme

$$n\widehat{F}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}(x_i)$$

correspond à une somme de v.a. i.i.d. de loi Bernoulli avec probabilité (x), il en résulte

$$n\widehat{F}_n(x) \sim Bin(n, F_X)$$

En vertu du théorème central limite, on a

$$\sqrt{n}\left(\widehat{F}_n(x) - F_X\right) \xrightarrow{d} Norm\left(0, \sigma_x^2\right)$$

quand $n \to \infty$ où

$$\sigma_x^2 = Var\left(1_{(-\infty,x]}(X)\right) = F_X(x)(1 - F(x))$$

On utilise ce résultat pour construire un intervalle de confiance de niveau α (ex : $\alpha = 95\%$) pour l'estimateur de $\widehat{F}_n(x)$ de $F_X(x)$

$$\widehat{F}_n(x) \pm z_{1-\frac{(1-\alpha)}{2}} \frac{\sqrt{\widehat{F}_n(x)\left(1 - \widehat{F}_n(x)\right)}}{\sqrt{n}}$$

où $z_{1-\frac{(1-\alpha)}{2}}$ est tel que

$$\Pr\left(Z \leq z_{1-\frac{(1-\alpha)}{2}}\right) = 1 - \frac{(1-\alpha)}{2}$$

avec $Z \sim Norm(0,1)$.,

9.7 Analyse graphique avec les *q-q plot*

Les *q-q plot* servent à faire ne analyse graphique des données.

Définition - Fonction quantile. La fonction inverse généralisée d'une fonction de répartition F définie par

$$F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}$$

pour $0 < \alpha < 1$, est appelée la fonction quantile d'une fonction de répartition F.

On convient de définir $x_\alpha = F^{\leftarrow}(\alpha)$ comme étant le $\alpha-$ quantile de F.

Le théorème implique que

$$\widehat{F}_n^{\leftarrow}(\alpha) \to F^{\leftarrow}(\alpha)$$

presque sûrement quand $n \to \infty$ en tout point de continuité de α de $F(\alpha)$.

Idée du qq-plot. Supposons que $\{x_1, ..., x_n\}$ sont des réalisations i.i.d. provenant d'une v.a. de fonction de répartition continue. Alors, si on trace le graphique $\widehat{F}_n^{\leftarrow}(\alpha)$ en fonction de $F^{\leftarrow}(\alpha)$ (pour $0 < \alpha < 1$) on doit s'attendre à une droite.

En pratique, on trace

$$\left\{\left(x_{(k)}, F^{\leftarrow}\left(\frac{k}{n+1}\right), k = 1, 2, ..., n\right)\right\}$$

pour une certaine fonction de répartition F.

9.8 Fonction empirique d'excès moyen

La fonction empirique d'excès-moyen est un outil d'adéquation graphique.

Considérons l'échantillon de montants de sinistres $\{x_1, ..., x_n\}$.

On suppose que les éléments de l'échantillon sont déjà ordonnés de façon croissante, c'est-à-dire

$$x_1 < ... < x_n.$$

La fonction d'excès moyen est estimée par la fonction empirique d'excès moyen définie par

$$\begin{aligned} \hat{e}_n(X_2) &= \frac{\sum_{j=1}^n x_j 1_{(X_2,\infty)}(x_j)}{\sum_{j=1}^n 1_{(X_2,\infty)}(x_j)} - X_2 \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n x_j 1_{(X_2,\infty)}(x_j)}{\text{nombre de } x_j > X_2} - X_2. \end{aligned}$$

En traçant la courbe de la courbe de $\hat{e}_n(X_2)$ pour $X_2 \in \{x_1, ..., x_n\}$ avec

$$\hat{e}_n(x_k) = \frac{\sum_{j=k+1}^n x_j}{n-k} - x_k \quad (k = 1, 2, ..., n-1),$$

il est possible de faire un premier diagnostique quant au modèle à choisir pour la sévérité. Si la fonction $\hat{e}_n(X_2)$ est croissante, alors la distribution possède une queue plus épaisse que la distribution exponentielle. Si elle décroissante, alors la queue de la distribution est moins épaisse que celle de la distribution exponentielle.

Le *q-q plot* est aussi utilisé comme outil d'adéquation graphique.

9.9 Méthode des moments – données complètes

On dispose de l'échantillon complet des montants de sinistres $\{x_1, ..., x_n\}$. On suppose qu'il est déjà ordonné.

On considère un modèle paramétrique pour X avec fonction de répartition $F_X(x; \underline{\theta})$ où $\underline{\theta} \in \Omega_{\underline{\theta}} \subseteq \mathbb{R}^h$ est le vecteur de h paramètres.

Le m-ième moment calculé à partir de l'échantillon est définit par

$$\widehat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k$$

Le m-ième moment associé au modèle paramétrique est donnée par

$$\mu_k(\underline{\theta}) = E\left[X^k; \underline{\theta}\right]$$

Définition. L'estimateur des moments pour $\underline{\theta}$ est la solution au système d'équations suivant

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_1 &= \mu_1(\underline{\theta}) \\ &\cdots \\ \widehat{\mu}_h &= \mu_h(\underline{\theta})\end{aligned}$$

Exemple - Loi exponentielle. On a

$$X \sim Exp(\beta)$$

avec

$$\mu_1(\beta) = \frac{1}{\beta}.$$

Il en résulte que

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{\widehat{\mu}_1}.$$

□

Exemple - Loi gamma. On a

$$X \sim Gamma(\alpha, \beta)$$

avec

$$\begin{aligned}\mu_1(\alpha,\beta) &= \frac{\alpha}{\beta} \\ \mu_2(\alpha,\beta) &= \frac{\alpha}{\beta^2}.\end{aligned}$$

Après quelques calculs, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha} &= \left(\frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{\mu}_1^2} - 1\right)^{-1} \\ \widehat{\beta} &= \frac{\widehat{\mu}_1}{\widehat{\alpha}}.\end{aligned}$$

□

Exemple - Loi Pareto. On a

$$X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$$

avec

$$\begin{aligned}\mu_1(\alpha,\lambda) &= \frac{\lambda}{\alpha - 1} \\ \mu_2(\alpha,\lambda) &= \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}.\end{aligned}$$

On fait divise $\mu_2(\alpha,\lambda)$ par $\mu_1(\alpha,\lambda)^2$ puis on isole α. Par la suite, on obtient λ à partir de $\mu_1(\alpha,\lambda)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha} &= \frac{\frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{\mu}_1^2} - 1}{\frac{1}{2}\frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{\mu}_1^2} - 1} \\ \widehat{\lambda} &= \widehat{\mu}(\widehat{\alpha} - 1).\end{aligned}$$

□

Exemple - Loi lognormale. On a

$$X \sim LNorm(\mu, \sigma^2)$$

avec

$$\begin{aligned}\mu_1(\mu,\sigma) &= \exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\\ \mu_2(\mu,\sigma) &= \exp\left(2\mu+2\sigma^2\right).\end{aligned}$$

Pour identifier σ^2, on divise $\mu_2(\alpha,\lambda)$ par $\mu_1(\alpha,\lambda)^2$. On détermine μ à partir de $\mu_1(\alpha,\lambda)$. On obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}^2 &= \ln\left(\frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{\mu}_1^2}\right)\\ \widehat{\mu} &= \ln(\widehat{\mu})-\frac{1}{2}\widehat{\sigma}^2.\end{aligned}$$

□

9.10 Méthode du maximum de vraisemblance – données complètes

On dispose de l'échantillon complet des montants de sinistres $\{x_1,...,x_n\}$.

On considère un modèle paramétrique pour X avec fonction de densité $f_X(x;\underline{\theta})$ où $\underline{\theta}\in\Omega_{\underline{\theta}}\subseteq\mathbb{R}^h$ est le vecteur de h paramètres pour le modèle paramétrique de X.

On cherche à estimer $\underline{\theta}$.

La fonction de vraisemblance $L(\underline{\theta})$ est définie par

$$L(\underline{\theta})=\prod_{j=1}^{n} f_X(x_j;\underline{\theta}).$$

On cherche la valeur de $\underline{\theta}$ qui maximise la fonction de vraisemblance $L(\underline{\theta})$ c.-à-d.

$$\underline{\widehat{\theta}}_{MLE}=\underset{\underline{\theta}\in\Omega_{\underline{\theta}}}{\arg\max} L(\underline{\theta})$$

Cela revient à maximiser le logarithme népérien de $L(\underline{\theta})$, où

$$\begin{aligned}l(\underline{\theta}) &= \ln\{L(\underline{\theta})\}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\ln\{f_X(x_j;\underline{\theta})\}.\end{aligned}$$

Alors, on cherche

$$\underline{\widehat{\theta}}_{MLE}=\underset{\underline{\theta}\in\Omega_{\underline{\theta}}}{\arg\max} l(\underline{\theta})$$

L'estiamteur $\underline{\widehat{\theta}}_{MLE}$ correspond à la solution du système des h équations suivantes

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(\underline{\theta})}{\partial\theta_1} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\ln\{f_X(x_j;\underline{\theta})\}}{\partial\theta_1}=0\\ &\vdots\\ \frac{\partial l(\underline{\theta})}{\partial\theta_h} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\ln\{f_X(x_j;\underline{\theta})\}}{\partial\theta_h}=0.\end{aligned}$$

Supposons que les vrais paramètres du modèle paramétrique sont $\underline{\theta}_0$.

Selon certaines conditions de régularités, l'estimateur $\underline{\widehat{\theta}}_{MLE}$ possèdent les propriétés suivantes.

Propriétés de $\underline{\widehat{\theta}}_{MLE}$.

— l'estimateur $\widehat{\underline{\theta}}_{MLE}$ est consistent, c.-à-d. pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\left|\widehat{\underline{\theta}}_{MLE} - \underline{\theta}_0\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

ou

$$\widehat{\underline{\theta}}_{MLE} \overset{d}{\to} \underline{\theta}_0$$

— l'estimateur $\widehat{\underline{\theta}}_{MLE}$ est asymptotiquement sans biais

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\widehat{\underline{\theta}}_{MLE}\right] = \underline{\theta}_0$$

— l'estimateur $\widehat{\underline{\theta}}_{MLE}$ est asymptotiquement normal

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\underline{\theta}}_{MLE} - \underline{\theta}\right) \overset{d}{\to} Norm\left(\underline{0}, I^{-1}\right)$$

où

$$I = E\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_1\partial\theta_h} & \\ & & & \\ \frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_h\partial\theta_1} & & \frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_h^2} & \underline{\theta}=\widehat{\underline{\theta}}_0 \end{array}\right)$$

— l'estimateur $\widehat{\underline{\theta}}_{MLE}$ est asymptotiquement efficient c.-à-d. parmi les estimateurs dont la loi asymptotique est normale, il est celui ayant la plus petite variance. Cette variance correspond à la borne de Rao-Cramer.

Important. Ces propriétés sont satisfaites si le modèle est correctement spécifié.

On considère un exemple.

Exemple (Loi exponentielle). La loi exponentielle compte un seul paramètre, λ ($h = 1$). Il en résulte que

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{j=1}^{n} \lambda \exp(-\lambda x_j) \\ &= \lambda^n \prod_{j=1}^{n} \exp(-\lambda x_j) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} l(\lambda) &= \ln\{L(\lambda)\} \\ &= n\ln\{\lambda\} - \sum_{j=1}^{n} \lambda x_j. \end{aligned}$$

On détermine la dérivée de $l(\lambda)$ par rapport à λ et, en isolant λ, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_{MLE} &= \frac{1}{\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{\text{moyenne empirique}}. \end{aligned}$$

□

Exemple : La loi lognormale compte deux paramètres, μ et σ^2 ($h = 2$). Si X obéit à une loi lognormale de paramètres μ et σ^2, alors $X_2 = \ln(X)$ est de loi normale avec les paramètres μ et σ^2. À partir de cette

relation, on déduit que les estimateurs de μ et σ^2 du maximum de vraisemblance sont

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln(x_j)$$

et

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} \{\ln(x_j) - \widehat{\mu}\}^2 .$$

□

En général, on doit avoir recours à des méthodes numériques telles que l'algorithme de Newton-Raphson (voir Klugman et collab. (1998) pour les détails). On peut aussi avoir recours à des

La loi Pareto compte deux paramètres, α et λ ($h = 2$). La fonction de vraisemblance et le logarithme naturel de la fonction de vraisemblance sont

$$\begin{aligned} L(\alpha,\lambda) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda + x_j)^{a+1}} \\ &= (\alpha\lambda^{\alpha})^n \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(\lambda + x_j)^{a+1}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} l(\alpha,\lambda) &= \ln\{L(\alpha,\lambda)\} \\ &= n\ln\{\alpha\} + n\alpha\ln\{\lambda\} - \sum_{j=1}^{n}(\alpha+1)\ln\{\lambda + x_j\} . \end{aligned}$$

On détermine les dérivées partielles de $l(\alpha,\lambda)$ par rapport à α et à λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha,\lambda)}{\partial\alpha} &= \frac{n}{\alpha} + n\ln\{\lambda\} - \sum_{j=1}^{n}\ln\{\lambda + x_j\} = 0 \\ \frac{\partial l(\alpha,\lambda)}{\partial\lambda} &= \frac{n\alpha}{\lambda} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha+1}{\lambda + x_j} = 0. \end{aligned}$$

L'algorithme de Newton-Raphson (voir Klugman et collab. (1998) pour les détails) peut être utilisé pour isoler α et λ.

Approche alternative : On peut trouver $\widehat{\underline{\theta}}_{MLE}$ avec EXCEL en utilisant la macro SOLVEUR. On maximise directement $\ln L(\underline{\theta})$ avec SOLVEUR

$$\begin{aligned} l(\underline{\theta}) &= \ln\{L(\underline{\theta})\} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\ln\{f_X(x_j;\underline{\theta})\} \end{aligned}$$

Cela est facile à appliquer. Cela fonctionne généralement bien quand le nombre de paramètres n'est pas trop élevé.

9.11 Méthode du maximum de vraisemblance — données groupées

On suppose que les montants de sinistres de l'échantillon sont disponibles sous forme de données groupées.

On définit les bornes $c_0, c_1, ..., c_r$ de telle sorte que

$$0 \le c_0 < c_1 < ... < c_r \le \infty$$

et on compte n_i sinistres dont les valeurs sont incluses dans $[c_{i-1}, c_i[$ pour $i = 1, 2, ..., r$. On a

$$n_1 + ... + n_r = n.$$

On considère un modèle paramétrique pour X avec fonction de densité $f_X(x; \underline{\theta})$ où $\underline{\theta}$ est le vecteur avec h paramètres pour le modèle paramétrique de X. On cherche à estimer $\underline{\theta}$.

Compte tenu des observations disponibles, la fonction de vraisemblance $L(\underline{\theta})$ est définie par

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{r} \{F_X(c_i; \underline{\theta}) - F_X(c_{i-1}; \underline{\theta})\}^{n_i}.$$

On cherche la valeur de $\underline{\theta}$ qui maximise la fonction de vraisemblance $L(\underline{\theta})$ ou celle du logarithme népérien de $L(\underline{\theta})$, avec

$$\begin{aligned} l(\underline{\theta}) &= \ln\{L(\underline{\theta})\} \\ &= \sum_{i=1}^{r} n_i \ln\{F_X(c_i; \underline{\theta}) - F_X(c_{i-1}; \underline{\theta})\}. \end{aligned}$$

Dans le cas de la loi exponentielle qui compte un seul paramètre, λ ($h = 1$), on a

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} \{\exp(-\lambda c_{i-1}) - \exp(-\lambda c_i)\}^{n_i}$$

avec

$$\begin{aligned} l(\lambda) &= \ln\{L(\lambda)\} \\ &= \sum_{i=1}^{r} n_i \ln\{\exp(-\lambda c_{i-1}) - \exp(-\lambda c_i)\}. \end{aligned}$$

La dérivée de $l(\lambda)$ par rapport à λ est

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{r} n_i \frac{c_i \exp(-\lambda c_i) - c_{i-1} \exp(-\lambda c_{i-1})}{\exp(-\lambda c_{i-1}) - \exp(-\lambda c_i)}.$$

L'estimateur $\widehat{\lambda}$ du maximum de vraisemblance de λ est la solution de

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \frac{c_{i-1} \exp(-\lambda c_{i-1}) - c_i \exp(-\lambda c_i)}{\exp(-\lambda c_{i-1}) - \exp(-\lambda c_i)} = 0$$

qui ne peut être obtenue qu'avec l'aide de méthodes numériques telle que l'algorithme de Newton-Raphson (voir Klugman et collab. (1998) pour les détails).

La loi Pareto compte deux paramètres, α et λ ($h = 2$). La fonction de vraisemblance et le logarithme naturel de la fonction de vraisemblance sont respectivement

$$L(\alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^{r} \left\{ \left(\frac{\lambda}{\lambda + c_{i-1}} \right)^{\alpha} - \left(\frac{\lambda}{\lambda + c_i} \right)^{\alpha} \right\}^{n_i}$$

et

$$\begin{aligned} l(\alpha, \lambda) &= \ln\{L(\alpha, \lambda)\} \\ &= \sum_{i=1}^{r} n_i \ln\left\{ \left(\frac{\lambda}{\lambda + c_{i-1}} \right)^{\alpha} - \left(\frac{\lambda}{\lambda + c_i} \right)^{\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

L'algorithme de Newton-Raphson (voir Klugman et collab. (1998) pour les détails) peut être utilisé pour isoler α et λ, une fois que les dérivées par rapport à chacun des paramètres ont été calculées.

Approche alternative : On peut trouver $\widehat{\underline{\theta}}_{MLE}$ avec EXCEL en utilisant la macro SOLVEUR. On maximise directement $\ln L(\underline{\theta})$ avec SOLVEUR

$$\begin{aligned} l(\underline{\theta}) &= \ln\{L(\underline{\theta})\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \ln\{f_X(x_j;\underline{\theta})\} \end{aligned}$$

Cela est facile à appliquer. Cela fonctionne généralement bien quand le nombre de paramètres n'est pas trop élevé.

Propriétés de $\widehat{\underline{\theta}}_{MLE}$. Identiques à celles énoncées dans le cas des données complètes.

9.12 Méthode du maximum de vraisemblance — données tronquées à gauche

On suppose que les données se présentent en étant tronquées à gauche.

Pour $d \geq 0$, cela que signifie que l'on dispose uniquement des données qui sont supérieures à d. On n'a pas les données qui sont inférieures à d.

On définit

$$X^{(d)} = \begin{cases} 0, & X < d \\ X, & X > d \end{cases}$$

ou $X^{(d)} = X \times 1_{(d,\infty)}(X)$. On déduit que

$$\begin{aligned} F_{X^{(d)}}(x) &= \Pr\left(X^{(d)} \leq x\right) = \Pr(X \leq x | X > d) \\ &= \frac{\Pr(d < X \leq x)}{\Pr(X > d)} = \frac{F_X(x) - F_X(d)}{1 - F_X(d)} \end{aligned}$$

De plus, on a

$$f_{X^{(d)}}(x) = f_{X|X>d}(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(d)}.$$

Il en résulte que la fonction de vraisemblance s'écrit sous la forme suivante :

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{r} f_{X^{(d)}}(x_i;\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{f_X(x_i;\underline{\theta})}{1 - F_X(d;\underline{\theta})} = \frac{1}{\left(\overline{F}_X(d;\underline{\theta})\right)^r} \prod_{i=1}^{r} f_X(x_i;\underline{\theta}).$$

La fonction $l(\underline{\theta})$ devient

$$\begin{aligned} l(\underline{\theta}) &= \ln\{L(\underline{\theta})\} \\ &= \prod_{i=1}^{r} \ln\{f_X(x_i;\underline{\theta})\} - r\ln\left(\overline{F}_X(d;\underline{\theta})\right). \end{aligned}$$

Exemple. On suppose que $X \sim Exp(\beta)$. On a

$$\begin{aligned} l(\underline{\theta}) &= \prod_{i=1}^{r} \ln\{f_X(x_i;\underline{\theta})\} - r\ln\left(\overline{F}_X(d;\underline{\theta})\right). \\ &= \prod_{i=1}^{r} \ln\left(\beta e^{-\beta x_i}\right) - r\ln e^{-\beta d} \\ &= r\ln(\beta) - \beta\sum_{i=1}^{r} x_i + r\beta d. \end{aligned}$$

On obtient

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(x_i - d)}.$$

□

9.13 Méthode du maximum de vraisemblance — données censurées à droite

On suppose que les données se présentent en étant censurées à droite

Pour $d \geq 0$, cela que signifie que l'on dispose uniquement des données qui sont inférieures ou à égales à d. On n'a pas les données qui sont inférieures à d.

On définit $X^{(d)} = \min(X;d)$. Alors, $X^{(d)}$ est une v.a. mixte : continue sur $(0,d)$ avec une masse à d.

Supposons qu'il y ait r_0 $(r_0 < r)$ données qui soient inférieures à d et que $x_i = d$ pour $i = r_0+1, ..., r$

Il en résulte que la fonction de vraisemblance s'écrit sous la forme suivante :

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{r_0} f_X(x_i;\underline{\theta}) \prod_{i=r_0+1}^{r} \overline{F}_X(d;\underline{\theta}).$$

La fonction $l(\underline{\theta})$ devient

$$\begin{aligned} l(\underline{\theta}) &= \ln\{L(\underline{\theta})\} \\ &= \prod_{i=1}^{r_0} \ln\{f_X(x_i;\underline{\theta})\} + (r-r_0)\ln\left(\overline{F}_X(d;\underline{\theta})\right). \end{aligned}$$

Exemple. On suppose que $X \sim Exp(\beta)$. On a

$$\begin{aligned} l(\underline{\theta}) &= \prod_{i=1}^{r_0} \ln\{f_X(x_i;\underline{\theta})\} + (r-r_0)\ln\left(\overline{F}_X(d;\underline{\theta})\right). \\ &= \prod_{i=1}^{r} \ln\left(\beta e^{-\beta x_i}\right) + (r-r_0)\ln e^{-\beta d} \\ &= r\ln(\beta) - \beta\sum_{i=1}^{r_0} x_i - (r-r_0)\beta d. \end{aligned}$$

Après les calculs habituels, on obtient

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{\frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{r_0} x_i + (r-r_0)d\right)}.$$

□

9.14 Tests d'adéquation

Il est important de vérifier si le modèle offre une description appropriée du comportement des données.

Approches complémentaires :

— Outils d'analyse graphique
— Tests d'adéquation

Outils d'analyse graphique :

— *qq-plot*
— fonction d'excès moyen empirique

Tests d'adéquation :

— Test de Kolmogorov-Smirnov
— Test de Anderson-Darling
— Test d'adéquation du khi-deux

Les tests de Kolmogorov-Smirnov et Anderson-Darlind s'appliquent sur des données continues.

Les données doivent être groupées pour utiliser le test d'adéquation du khi-deux, qui s'applique aussi pour les données discrètes.

9.14.1 Test de Kolmogorov-Smirnov.

On suppose que la fonction de la répartition, notée F_X, de X est continue

On a recours à la statistique de Kolmogorov-Smirnov

$$D_n = \max(\sup_{x_i} \left|\widehat{F}_n(x_i) - F_X(x_i)\right|, \sup_{x_i} \left|\widehat{F}_n(x_i-) - F_X(x_i)\right|$$

où $\widehat{F}_n(x_i-)$ est la valeur de la fonction empirique juste avant le saut à x_i.

Cela a nécessité que l'on teste $2n$ valeurs.

Sous l'hypothèse H_0, on ne connaît pas la nature exacte de la distribution de la statistique D_n.

Soit c_α tel que

$$\Pr(D_n > c_\alpha) = \alpha.$$

Les valeurs critiques c_α pour certaines valeurs de niveau de confiance α sont fournies dans le tableau ci-dessous :

α	20%	10%	5%	1%
c_α	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

Les approximation sont bonnes si $n > 15$.

On rejette H_0 (le modèle) si

$$D_n > c_\alpha$$

On peut construire un intervalle (bande) de confiance autour de $F(x)$.

On a

$$\Pr\left(\max(\widehat{F}_n(x) - F(x)) \leq c_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

ce qui est équivalent à

$$\Pr\left(\widehat{F}_n(x) - c_a \leq F(x)) \leq \widehat{F}_n(x) + c_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

On déduit les bornes

$$\begin{aligned} F_L(x) &= \max\left(0; \widehat{F}_n(x) - c_a\right) \\ F_U(x) &= \min\left(1; \widehat{F}_n(x) + c_\alpha\right) \end{aligned}$$

pour $F(x)$.

Le test de Kolmogov-Smirnov ne s'applique pas sur des données groupées.

9.14.2 Test de Anderson-Darling

Le test de Kolmogorov-Smirnov a l'avantage d'être non paramétrique. Néanmoins, ce test n'est pas bon pour identifier les problèmes éventuels dans la queue de la distribution. A cet égard, le test d'Anderson-Darling est une modification du test de Kolmogorov-Smirnov qui vise à corriger ce défaut.

(...)

9.15 Test d'adéquation du khi-deux

Pour appliquer le test du khi-deux, les données doivent être groupées. Si on dispose de données complètes, il suffit de les grouper.

Objectif : On veut vérifier si le modèle choisi est adéquat pour les données (fit to the data)

Statistique du test :

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i}$$

On définit E_j = nombre espérés d'observations

$$\begin{aligned} E_i &= n\left\{F_X\left(c_i;\underline{\theta}\right) - F_X\left(c_{i-1};\underline{\theta}\right)\right\} \\ &= n\Pr\left(c_{i-1} < X \leq c_i;\underline{\theta}\right) \end{aligned}$$

Convention habituelle :

$$E_i \geq 5$$

On définit une v.a. Z qui obéit à une loi du chi-deux

$$d.f. = (nbclasses) - (nbparam) - 1$$

On définit $Z_{\alpha,df}$ (appélée valeur critique) tel que

$$\Pr\left(Z > Z_{\alpha,df}\right) = \alpha,$$

où, p. ex., $\alpha = 0.05$.

On rejette le modèle $(H0)$ si

$$Q > Z_{\alpha,df}$$

On définit la p_{value}

$$p_{value} = \Pr\left(Z > Q\right)$$

De façon équivalente, on rejette le modèle $(H0)$ si

$$p_{value} < \alpha$$

9.16 Sélection d'un modèle

Principe de base. Il est important de choisir le modèle le plus simple possible. Il est recommandé de respecter le principe de parsimonie : le modèle le plus simple est toujours préféré au modèle plus complexe.

On doit se servir de son jugement lors de la sélection d'un modèle.

On peut utiliser les outils d'analyse graphique afin d'aider à la sélection du modèle.

Souvent, dans la pratique, on doit aussi tenir compte des contraintes de temps et de la mise en place du modèle.

On a aussi recours à des méthologies formelles et informelles. Un exemple de méthodologie formelle est le test de ratio de vraisemblance. Le test du ratio de vraisemblance permet de comparer des modèles provenant d'une même famille. Exemple : exponentielle et gamma. Toutefois, très souvent, on doit comparer des lois qui ne sont pas de la même familles. Exemple : gamma, lognormale, Pareto.

9.16.1 Test du ratio de vraisemblance

Le test de ratio de vraisemblance permet de choisir entre deux modèles, où l'un est le cas particulier de l'autre. On dit que les modèles sont imbriqués.

Exemples de modèles imbriqués :

— Exponentielle vs Gamma

— Mélanges de $K-1$ expon vs mélanges de K expon ($K = 2, 3, ...$)

etc.

Exemples de modèles non-imbriqués :

— Exponentielle vs lognormale

— Lognormale vs Pareto

— Lognormale vs Gamma

— Gamma vs Pareto.

Idée du test. On considère deux modèles imbriqués avec paramètres $\underline{\theta}_0$ et $\underline{\theta}_1$ en supposant

$$nbparam\left(\underline{\theta}_0\right) < nbparam\left(\underline{\theta}_1\right)$$

Statistic du test

$$R = 2\left\{\ln L\left(\underline{\theta}_1\right) - \ln L\left(\underline{\theta}_0\right)\right\}$$

Soit W une v.a qui obéit à un loi du chi-deux

$$d.f. = nbparam\left(\underline{\theta}_1\right) - nbparam\left(\underline{\theta}_0\right)$$

Soit $w_{\alpha,df}$ (appelée valeur critique) tel que

$$\Pr\left(W > w_{\alpha,df}\right) = \alpha,$$

$\alpha = 0.05$.

On rejette $H0$ (modèle avec $\underline{\theta}_0$) si

$$R > w_{\alpha,df}.$$

9.16.2 Méthodologies informelles

On a recours à des méthodologies informelles, qui sont basées sur des *scores*.

— Comparer les valeurs des statisques du test de Kolmogorov-Smirnov. On choisit le modèle avec la plus petite valeur.

— Comparer les valeurs des statisques du test de Anderson-Darling. On choisit le modèle avec la plus petite valeur.

— Comparer les $p-value$ produites par le test d'adéquation du khi-deux. On choisit le modèle avec la plus grande valeur.

— Comparer les valeurs du critère de l'information de Akaike. On choisit le modèle avec la plus petite valeur.

— Comparer les valeurs du critère bayesien de Schwartz. On choisit le modèle avec la plus petite valeur.

Le critère de l'information de Akaike et le critère bayesien de Schwartz reposent sur la même idée. On compare les valeurs des log des fonctions de vraisemblance et choisit le modèle avec la valeur la plus élevée. Toutefois, afin de tenir compte du nombre de caractères les corrections ont été suggérées :

— Critère de l'information de Akaike :

$$AIC = 2h - 2l\left(\underline{\theta}_h\right)$$

où $h =$ nombre de paramètres.

— Critère bayesien de Schwartz :

$$BSC = h \ln(r) - 2l(\underline{\theta}_h)$$

où h = nombre de paramètres et r = nb de données.

Comme on le constate, les deux critères sont de la même forme. Il vise à pénaliser pour le nombre de paramètres. Le critère bayesien de Schwartz pénalise davantage.

9.17 Intervalles de confiance

Parmi ses propriétés, on sait que l'estimateur $\underline{\widehat{\theta}}_{MLE}$ est asymptotiquement normal

$$\sqrt{n}\left(\underline{\widehat{\theta}}_{MLE} - \underline{\theta}\right) \xrightarrow{d} Norm\left(\underline{0}, I^{-1}\right)$$

où

$$I = E\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_1\partial\theta_h} & \\ & & & \\ \frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_h\partial\theta_1} & & \frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_h^2} & \underline{\theta}=\underline{\widehat{\theta}}_0 \end{array}\right)$$

On utilise les composantes de I^{-1} pour construire des intervalles de confiance pour les paramètres

$$\underline{\widehat{\theta}}_{MLE} = \left(\widehat{\theta}_{1,MLE}, ..., \widehat{\theta}_{h,MLE}\right)$$

de $(\theta_1, ..., \theta_h)$ où

$$I^{-1} = \begin{pmatrix} Var\left(\widehat{\theta}_{1,MLE}\right) & Cov\left(\widehat{\theta}_{1,MLE}, \widehat{\theta}_{2,MLE}\right) & Cov\left(\widehat{\theta}_{1,MLE}, \widehat{\theta}_{h,MLE}\right) \\ Cov\left(\widehat{\theta}_{2,MLE}, \widehat{\theta}_{1,MLE}\right) & Var\left(\widehat{\theta}_{2,MLE}\right) & Cov\left(\widehat{\theta}_{2,MLE}, \widehat{\theta}_{h,MLE}\right) \\ Cov\left(\widehat{\theta}_{h,MLE}, \widehat{\theta}_{1,MLE}\right) & Cov\left(\widehat{\theta}_{h,MLE}, \widehat{\theta}_{2,MLE}\right) & Var\left(\widehat{\theta}_{h,MLE}\right) \end{pmatrix}$$

L'intervalle de confiance de niveau α est

$$\widehat{\theta}_{i,MLE} \pm t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var\left(\widehat{\theta}_{i,MLE}\right)}$$

avec

$$\Pr\left(Z > t_{n-1\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

où Z obéit à une loi de Student de $n-1$ degrés de liberté n(ex : $\alpha = 1\%, 5\%$ ou 10%.).

Quand $n \to \infty$, la loi de Z tend vers une loi $N(0,1)$.

On veut maintenant construire un intervalle de confiance pour une fonction de h paramètres $g(\underline{\theta})$.

On a

$$g\left(\widehat{\theta}_{MLE}\right) \pm t_{n-1\frac{\alpha}{2}} \sqrt{g'(\underline{\theta})^t I^{-1} g'(\underline{\theta})}$$

où

$$g'(\underline{\theta})^t = \left(\frac{\partial g(\underline{\theta})}{\partial\theta_1}, ..., \frac{\partial g(\underline{\theta})}{\partial\theta_h}\right).$$

Cette méthode est appelée la méthode delta.

9.18 Intervalles de confiance (bis)

La présente section complète la section précédente.

9.18.1 Comportement asymptotique

Parmi ses propriétés, on sait que l'estimateur $\underline{\widehat{\theta}}_{MLE}$ est asymptotiquement normal

$$\sqrt{n}\left(\underline{\widehat{\theta}}_{MLE}-\underline{\theta}\right)\overset{d}{\to}Norm\left(\underline{0},I^{-1}\right)$$

où

$$I=E\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_1\partial\theta_h} & \\ & & & \\ \frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_h\partial\theta_1} & & \frac{\partial^2 l(\underline{\theta})}{\partial\theta_h^2} & \underline{\theta}=\underline{\widehat{\theta}}_0\end{array}\right)$$

9.18.2 Intervalle de confiance pour les paramètres

On utilise les composantes de I^{-1} pour construire des intervalles de confiance pour les paramètres

$$\underline{\widehat{\theta}}_{MLE}=\left(\widehat{\theta}_{1,MLE},...,\widehat{\theta}_{h,MLE}\right)$$

de $(\theta_1,...,\theta_h)$ où

$$I^{-1}=\left(\begin{array}{ccc}Var\left(\widehat{\theta}_{1,MLE}\right) & Cov\left(\widehat{\theta}_{1,MLE},\widehat{\theta}_{2,MLE}\right) & Cov\left(\widehat{\theta}_{1,MLE},\widehat{\theta}_{h,MLE}\right)\\ Cov\left(\widehat{\theta}_{2,MLE},\widehat{\theta}_{1,MLE}\right) & Var\left(\widehat{\theta}_{2,MLE}\right) & Cov\left(\widehat{\theta}_{2,MLE},\widehat{\theta}_{h,MLE}\right)\\ Cov\left(\widehat{\theta}_{h,MLE},\widehat{\theta}_{1,MLE}\right) & Cov\left(\widehat{\theta}_{h,MLE},\widehat{\theta}_{2,MLE}\right) & Var\left(\widehat{\theta}_{h,MLE}\right)\end{array}\right)$$

L'intervalle de confiance de niveau α est

$$\widehat{\theta}_{i,MLE}\pm t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\widehat{\theta}_{i,MLE}\right)}$$

avec

$$\Pr\left(Z>t_{n-1\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{\alpha}{2}$$

où Z obéit à une loi de Student de $n-1$ degrés de liberté n(ex : $\alpha=1\%,5\%$ ou 10%.).
Quand $n\to\infty$, la loi de Z tend vers une loi $N(0,1)$.

9.18.3 Intervalle de confiance pour des fonctions des paramètres

On considère une fonction des paramètres $g(\underline{\theta})$.
Exemples de fonctions $g(\underline{\theta})$:

- Espérance
- Quantile ou mesure VaR
- Mesure $TVaR$
- Prime stop-loss
- Probabilité
- Etc.

On veut construire un intervalle de confiance pour $g(\underline{\theta})$.
A cette fin, on utilise la methode delta (*delta method*).
Selon cette méthode,

$$\sqrt{n}\left(g\left(\underline{\widehat{\theta}}_{MLE}\right)-g\left(\underline{\theta}\right)\right)\overset{d}{\to}Norm\left(\underline{0},Var\left(g\left(\underline{\theta}\right)\right)\right)$$

où

$$Var\left(g\left(\underline{\theta}\right)\right)=g'\left(\underline{\theta}\right)^t I^{-1}g'\left(\underline{\theta}\right)$$

avec

$$g'(\underline{\theta})^t = \left(\frac{\partial g(\underline{\theta})}{\partial \theta_1}, ..., \frac{\partial g(\underline{\theta})}{\partial \theta_h}\right).$$

On construit l'intervalle de confiance suivant pour $g\left(\widehat{\underline{\theta}}_{MLE}\right)$:

$$g\left(\widehat{\underline{\theta}}_{MLE}\right) \pm t_{n-1\frac{\alpha}{2}} \sqrt{g'(\underline{\theta})^t I^{-1} g'(\underline{\theta})}$$

9.18.4 Exemple

Exemple. On considère un échantillon $\{x_1, ..., x_n\}$. On utilise la loi exponentielle de paramètre $\beta = \frac{1}{\gamma}$ pour modéliser le comportement des données.

On peut construire un intervalle de confiance pour

$$\begin{aligned}
\Pr(X > d) &= e^{-\frac{d}{\gamma}} = g_1(\gamma) \\
VaR_\kappa(X) &= -\gamma \ln(1-\kappa) = g_2(\gamma) \\
TVaR_\kappa(X) &= CTE_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \gamma = -\gamma \ln(1-\kappa) + \gamma = g_3(\gamma) \\
\pi_X(d) &= \gamma e^{-\frac{d}{\gamma}} = g_4(\gamma)
\end{aligned}$$

On sait que

$$Var(\widehat{\gamma}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{\gamma^2}{n}$$

On calcule que

$$\begin{aligned}
\frac{dg_1(\gamma)}{d\gamma} &= \frac{d}{\gamma^2} e^{-\frac{d}{\gamma}} \\
\frac{dg_2(\gamma)}{d\gamma} &= -\ln(1-\kappa) \\
\frac{dg_3(\gamma)}{d\gamma} &= -\ln(1-\kappa) + 1 \\
\frac{dg_4(\gamma)}{d\gamma} &= e^{-\frac{d}{\gamma}} + \frac{d}{\gamma} e^{-\frac{d}{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
Var(g_1(\widehat{\gamma})) &= \frac{d^2}{\gamma^2} e^{-\frac{2d}{\gamma}} \frac{1}{n^2} \\
Var(g_2(\widehat{\gamma})) &= \frac{\gamma^2}{n} (\ln(1-\kappa))^2 \\
Var(g_3(\widehat{\gamma})) &= (-\ln(1-\kappa) + 1)^2 \frac{\gamma^2}{n} \\
Var(g_4(\widehat{\gamma})) &= \left(e^{-\frac{d}{\gamma}} + \frac{d}{\gamma} e^{-\frac{d}{\gamma}}\right)^2 \frac{\gamma^2}{n}.
\end{aligned}$$

Supposons que $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 200$. Dans le tableau ci-dessous, on donne les $Var(g_i(\gamma))$ et des intervalles de confiance (avec niveau de confiance de 95%) pour $i = 1, 2, 3, 4$ et $n = 100, 1000, 10000$:

— $n = 100$

i	$g_i(\widehat{\gamma})$	$\sqrt{\widehat{Var}(g_i(\widehat{\gamma}))}$	Borne inf	Borne sup
1	0,082084999	0,02052125	0,041864088	0,122305909
2	921,0340372	92,10340372	740,5146831	1101,553391
3	1121,034037	112,1034037	901,3154034	1340,752671
4	16,41699972	5,745949904	5,155144857	27,67885459

— $n = 10000$

i	$g_i(\widehat{\gamma})$	$\sqrt{\widehat{Var}(g_i(\widehat{\gamma}))}$	Borne inf	Borne sup
1	0,082084999	0,002052125	0,078062908	0,08610709
2	921,0340372	9,210340372	902,9821018	939,0859726
3	1121,034037	11,21034037	1099,062174	1143,005901
4	16,41699972	0,5745949904	15,29081424	17,54318521

□

9.19 Méthode du maximum de vraisemblance – version complémentaire

L'estimation de paramètres à l'aide des méthodes des moments et des percentiles a l'avantage d'être facile à utiliser. Toutefois, les estimateurs ainsi obtenus n'ont habituellement pas une concordance sur l'ensemble des données observées dû à la prise en compte que d'une partie (les caractéristiques choisies) de l'information contenue dans l'échantillon. Pour contourner ce problème, on ne demandera pas que les données et le modèle correspondent exactement pour certains critères mais plutôt qu'ils soient près selon une certaine fonction de mesure choisie. Les estimateurs seront donc obtenus suite à l'optimisation d'une fonction objective. Dans le cas de la méthode du maximum de vraisemblance, les paramètres optimaux seront ceux qui maximise la fonction de vraisemblance. On verra plus loin que les estimateurs obtenus avec cette méthode possèdent des propriétés très intéressantes.

9.19.1 Définitions et méthode

Définition :

La fonction de vraisemblance ("likelihood function") correspond à la probabilité d'observer avec un modèle ce qui a été observé dans l'échantillon étant donné une certaine valeur d'un vecteur de paramètres du modèle supposé.

Le meilleur estimateur du vecteur des paramètres est donc celui qui maximise la fonction de vraisemblance, c'est-à-dire la probabilité d'observer avec le modèle ce qui a été observé avec l'échantillon.

Définition :

La fonction de vraisemblance pour un ensemble de n observations indépendantes est

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} L_i(\theta),$$

où $L_i(\theta)$ est la contribution de la *ième* observation.

Si la *ième* observation est un événement avec probabilité positive (d'une distribution discrète ou d'un intervalle) alors $L_i(\theta)$ correspond à cettre probabilité.

Si la *ième* observation est une valeur d'une distribution continue, alors $L_i(\theta)$ correspond à la fonction de densité à cette valeur.

Définition :

Soit un échantillon aléatoire $X_1, ..., X_n$ où X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Alors, $\widehat{\theta}_{MV}$ est dit l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ si $L(\widehat{\theta}_{MV})$ est maximale, où $L(\theta)$ est la fonction de vraisemblance.

On considère deux cas pour les données de l'échantillon : des données individuelles et des données groupées.

9.19.2 Données individuelles

Dans le cas où l'échantillon est composé de données individuelles, la fonction de vraisemblance est donnée par

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\theta).$$

Il n'est pas certain que la fonction de vraisemblance ait un maximum parmi les valeurs possibles de θ. De plus, on doit être prudent lors de la maximisation de cette fonction car il peut y avoir des maximums locaux en plus du maximum global. Lorsqu'il n'est pas possible de maximiser la fonction de vraisemblance analytiquement (c'est-à-dire poser les dérivées partielles égales à zéro et résoudre), des approches numériques sont requises.

Exemple :

Soit $X_1, ..., X_n$ un échantillon aléatoire provenant d'une loi exponentielle de paramètre λ. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

Solution :

On a $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$ et

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} \\ &= \theta e^{-\theta x_1} \times ... \times \theta e^{-\theta x_n} \\ &= \theta^n e^{-\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}. \end{aligned}$$

Pour trouver le θ qui maximise $L(\theta)$, il est plus facile mais équivalent de maximiser la fonction $l(\theta) = \ln L(\theta)$ (étant donné que la fonction ln est une fonction croissante). Alors,

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \ln L(\theta) \\ &= \ln\left(\theta^n e^{-\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}\right) \\ &= \ln \theta^n - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i. \end{aligned}$$

Le θ qui maximise $l(\theta)$ est celui pour lequel la dérivée première de $l(\theta)$ par rapport à θ est égale à 0, c'est-à-dire

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

On obtient donc la solution

$$\widehat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Il faut maintenant vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum global. On a

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0$$

et

$$\lim_{\theta \to \pm\infty} l(\theta) = 0$$

et donc on peut conclure que $\widehat{\theta}_{MV}$ est bien l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

Exemple :

Soit $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$. Estimer les paramètres α et λ à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance pour l'échantillon suivant :

$$8.42, 6.97, 9.3, 11.15, 11, 12.04, 5.80, 8.52, 10.81, 7.24,$$
$$7.82, 6.42, 6.22, 7.40, 7.70, 5.88, 8.01, 8.26, 9.12, 8.32.$$

Solution :

On a $f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$ et

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \lambda) &= \prod_{i=1}^{20} f_X(x_i; \alpha, \lambda) \\
&= \prod_{i=1}^{20} \frac{\lambda^\alpha x_i^{\alpha-1} e^{-\lambda x_i}}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\lambda^{20\alpha}(x_1^{\alpha-1} \times ... \times x_{20}^{\alpha-1}) \times (e^{-\lambda x_1} \times ... \times e^{-\lambda x_{20}})}{(\Gamma(\alpha))^n} \\
&= \frac{\lambda^{20\alpha}(\prod_{i=1}^{20} x_i^{\alpha-1}) \times (e^{-\lambda \sum_{i=1}^{20} x_i})}{(\Gamma(\alpha))^{20}} \\
&= \frac{\lambda^{20\alpha}(\prod_{i=1}^{20} x_i)^{\alpha-1} \times (e^{-\lambda \sum_{i=1}^{20} x_i})}{(\Gamma(\alpha))^{20}}
\end{aligned}$$

Pour trouve les paramètres α et λ qui maximisent $L(\alpha, \lambda)$, il est plus facile de maximiser la fonction $l(\alpha, \lambda) = \ln L(\alpha, \lambda)$ (étant donné que la fonction ln est une fonction croissante). Alors,

$$\begin{aligned}
l(\alpha, \lambda) &= \ln L(\alpha, \lambda) \\
&= \ln \left(\frac{\lambda^{20\alpha}(\prod_{i=1}^{20} x_i)^{\alpha-1} \times (e^{-\lambda \sum_{i=1}^{20} x_i})}{(\Gamma(\alpha))^{20}} \right) \\
&= \ln \lambda^{20\alpha} + \ln(\prod_{i=1}^{20} x_i)^{\alpha-1} - \lambda \sum_{i=1}^{20} x_i - \ln\left((\Gamma(\alpha))^{20}\right) \\
&= 20\alpha \ln \lambda + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{20} \ln x_i - \lambda \sum_{i=1}^{20} x_i - 20 \ln(\Gamma(\alpha)).
\end{aligned}$$

Les paramètres α et λ qui maximisent $l(\alpha, \lambda)$ sont ceux pour lesquels les dérivées partielles de $l(\alpha, \lambda)$ par

rapport à α et λ sont égales à 0, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha,\lambda)}{\partial \alpha} &= 20\ln\lambda + \sum_{i=1}^{20}\ln x_i - \frac{20\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= 0 \\
\frac{\partial l(\alpha,\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{20\alpha}{\lambda} - \sum_{i=1}^{20} x_i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ce système d'équations n'a pas de solution explicite alors on doit le résoudre numériquement. On obtient la solution suivante :

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}_{MV} &= 23.223273 \\
\widehat{\lambda}_{MV} &= 2.791259.
\end{aligned}$$

Exemple :

Pour un contrat d'assurance avec une limite supérieure de 20, un assureur a enregistré les paiements suivants :

$$6, 11, 15, 18, 20, 20, 20, 20.$$

On suppose que le montant d'un sinistre obéit à une loi exponentielle de paramètre λ tel que $f_X(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ.

Solution :

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= f(6)f(11)f(15)f(18)(1-F_X(20))^4 \\
&= \lambda^4 e^{-\lambda(50)}(e^{-\lambda(20)})^4 \\
&= \lambda^4 e^{-\lambda(130)} \\
l(\lambda) &= \ln L(\lambda) \\
&= 4\ln\lambda - 130\lambda \\
l'(\lambda) &= \frac{4}{\lambda} - 130 \\
&= 0
\end{aligned}$$

On trouve $\widehat{\lambda} = \frac{4}{130}$.

9.19.3 Données groupées

Lorsque l'on détient toutes les données mais sous forme groupées, les informations détenues se résument comme suit. Soit les nombres $c_0 < c_1 < ... < c_k$ où c_0 est la plus petite observation possible (souvent 0) et c_k la plus grande observation possible (souvent ∞). D'un échantillon de taille n, on désigne par n_i le nombre de sinistres dans l'intervalle $(c_{i-1}, c_i]$ où $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. La fonction de vraisemblance dans un tel cas est basée sur la loi multinomiale qui est une généralisation à k événements de la loi binomiale, soit

$$\Pr(X_1 = x_1, ..., X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!...x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x2} ... p_k^{x_k}$$

où

$$\begin{aligned}
p_i &: \text{ prob. de réalisation de l'événement } i \\
x_i &: \text{ nbre de fois où l'événement } i \text{ se réalise} \\
\sum_{i=1}^{k} x_i &= n : \text{ taille de l'échantillon.}
\end{aligned}$$

Dans le cas de données de sinistres sous forme groupée, on a

$$\Pr(X \in (c_{i-1}, c_i]) = F_X(c_i;\theta) - F_X(c_{i-1};\theta) = p_{i.}$$

d'où la fonction de vraisemblance de la forme suivante :

$$L(\theta) = \frac{n!}{n_1!...n_k!} \prod_{i=1}^{k} \left[F_X(c_i;\theta) - F_X(c_{i-1};\theta)\right]^{n_i}.$$

Le paramètre θ qui maximise cette fonction de vraisemblance est toutefois le même qui maximise la fonction

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{k} \left[F_X(c_i;\theta) - F_X(c_{i-1};\theta)\right]^{n_i}$$

ou la fonction

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{k} n_i \ln\left[F_X(c_i;\theta) - F_X(c_{i-1};\theta)\right].$$

Exemple :

Soit X la variable aléatoire du montant d'un sinistre tel que $X \sim Exp(\lambda)$ où $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Trouver $\widehat{\lambda}_{MV}$ si les montants de sinistres suivants ont été observés :

Montant	Nombre
(0,500]	0
(500,2000]	5
(2000,5000]	7
(5000,10000]	2
> 10000	3

Solution :

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \left[F_X(2000) - F_X(500)\right]^5 \left[F_X(5000) - F_X(2000)\right]^7 \left[F_X(10000) - F_X(5000)\right]^2 \left[1 - F_X(10000)\right]^3 \\ &= \left[e^{-500\lambda} - e^{-2000\lambda}\right]^5 \left[e^{-2000\lambda} - e^{-5000\lambda}\right]^7 \left[e^{-5000\lambda} - e^{-10000\lambda}\right]^2 \left[e^{-10000\lambda}\right]^3 \end{aligned}$$

On doit avoir recours à des méthodes numériques pour trouver le λ qui maximise cette fonction.

9.19.4 Propriétés des estimateurs

Les estimateurs du maximum de vraisemblance possèdent les propriétés suivantes :

(1) $\widehat{\theta}_{MV}$ est asymptotiquement sans biais, c'est-à-dire si la taille de l'échantillon $n \to \infty$ alors $E\left[\widehat{\theta}_{MV}\right] = \theta$ ($\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta}_n^{MV} = \theta$)

(2) $\widehat{\theta}_{MV} \simeq N(\theta, [I(\theta)]^{-1})$ où $I(\theta)$ est l'information de Fisher. Lorsque les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont $i.i.d$, on a

$$\begin{aligned} I(\theta) &= -E\left[\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta^2}\right] = -nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_X(X;\theta)\right] \\ &= E\left[\left(\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_X(X;\theta)\right)^2\right]. \end{aligned}$$

(3) Parmi les estimateurs dont la distribution asymptotique est normale, $\widehat{\theta}_{MV}$ est celui à variance minimale car

$$Var(\widehat{\theta}_{MV}) = [I(\theta)]^{-1} = \text{borne de Rao-Cramer}$$

(4) Propriété d'invariance : l'estimateur du maximum de vraisemblance d'une fonction h de θ, c'est-à-dire $\widehat{h(\theta)}_{MV}$ est la fonction h évaluée au point $\widehat{\theta}_{MV}$, c'est-à-dire $h(\widehat{\theta}_{MV})$.

Exemple :

Soit X la variable aléatoire du montant d'un sinistre et $X \sim Exp(\lambda)$. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\Pr(X > 10000)$.

Solution :

On a

$$\begin{aligned} \Pr(X &> 10000) = 1 - (1 - e^{-10000\lambda}) \\ &= e^{-10000\lambda} \\ &= h(\lambda). \end{aligned}$$

Dans un exemple précédent, on a trouvé que pour $X \sim Exp(\lambda)$ on a $\widehat{\lambda}_{MV} = \frac{1}{\overline{X}}$. Alors,

$$\begin{aligned} P(\widehat{X > 10000})_{MV} &= \widehat{h(\lambda)}_{MV} \\ &= h(\widehat{\lambda}_{MV}) \\ &= e^{-\frac{10000}{\overline{X}}}. \end{aligned}$$

Remarques :

(1) Si $\theta = (\theta_1, ..., \theta_r)$, alors

$$\widehat{\theta}_{MV} \simeq Normale\ Multivariée(\theta, [\mathbf{I}(\theta)]^{-1}),$$

où $\mathbf{I}(\theta)$ est la matrice d'information de Fisher avec

$$\begin{aligned} I(\theta)_{rs} &= -E\left[\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta_s \partial\theta_r}\right] = -nE\left[\frac{\partial^2 \ln f(X;\theta)}{\partial\theta_s \partial\theta_r}\right] \\ &= E\left[\left(\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta_s}\right)\left(\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta_r}\right)\right] = nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial\theta_s}\right)\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial\theta_r}\right)\right] \end{aligned}$$

(2) Propriété d'invariance dans le cas multivarié :

$$h(\widehat{\theta_1, ..., \theta_r})_{MV} = h(\widehat{\theta}_{1_{MV}}, ..., \widehat{\theta}_{r_{MV}})$$

9.19.5 Intervalles de confiance

On étudie 3 cas :

— Intervalle de confiance pour θ (scalaire).
— Intervalle de confiance pour une fonction $h(\theta)$.
— Intervalle de confiance pour une fonction $h(\theta_1, \theta_2)$.

Intervalle de confiance pour θ

Étant donné que la distribution asymptotique de $\widehat{\theta}_{MV}$ est une normale, un intervalle de confiance pour θ de niveau $1 - \alpha$ est

$$\widehat{\theta}_{MV} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(\widehat{\theta}_{MV})}.$$

Si l'on doit estimer $\sigma^2_{\widehat{\theta}_{MV}} = Var(\widehat{\theta}_{MV})$ (par exemple en remplaçant le θ par $\widehat{\theta}_{MV}$), l'intervalle de confiance devient

$$\widehat{\theta}_{MV} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \sqrt{\widehat{Var}(\widehat{\theta}_{MV})},$$

où $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \sim Student(n-1)$. Si toutefois la taille de l'échantillon n est grande, la distribution de Student tend vers une normale(0,1) et donc $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \to N(0,1)$.

Exemple :

Soit un échantillon aléatoire $X_1, ..., X_n$ où $X_i \sim Weibull(\lambda^* = \theta/2, \tau = 2)$. Trouver un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour θ.

Solution :

On a

$$\begin{aligned} f_X(x;\theta) &= \frac{\theta}{2} \times 2 \times x e^{-\frac{\theta}{2}x^2} \\ &= \theta x e^{-\frac{\theta}{2}x^2}. \end{aligned}$$

On doit d'abord trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ. Ainsi,

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \\ &= \theta^n (x_1 x_2 ... x_n) e^{-\frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \end{aligned}$$

et

$$l(\theta) = n \ln \theta + \ln(\prod_{i=1}^{n} x_i) - \frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est la solution de

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{n}{\theta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \end{aligned}$$

soit

$$\widehat{\theta}_{MV} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

Ensuite, on doit trouver $\sigma^2_{\widehat{\theta}_{MV}} = Var(\widehat{\theta}_{MV})$. On sait que

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\widehat{\theta}_{MV}} &= [I(\theta)]^{-1} \\ &= \left(-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_X(X;\theta)\right]\right)^{-1}. \end{aligned}$$

On a

$$\ln f(x;\theta) = \ln \theta + \ln x - \frac{\theta x^2}{2}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} &= \frac{1}{\theta} - \frac{x^2}{2} \\ \frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2} &= -\frac{1}{\theta^2}. \end{aligned}$$

De plus,

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_X(X;\theta)\right] = -\frac{1}{\theta^2}$$

et par conséquent'

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\widehat{\theta}_{MV}} &= \frac{\theta^2}{n}\\ \widehat{\sigma}^2_{\widehat{\theta}_{MV}} &= \frac{\widehat{\theta}^2_{MV}}{n}.\end{aligned}$$

L'intervalle de confiance pour le paramètre θ de niveau $1-\alpha$ est donc

$$\frac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2} \pm t_{\alpha/2,n-1} \times \frac{2\sqrt{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

Intervalle de confiance pour h(θ) (Méthode Delta)

On sait que la distributions asymptotique de $\widehat{\theta}_{MV}$ est $N(\theta, \sigma^2_{\widehat{\theta}_{MV}})$ mais pour déterminer un intervalle de confiance pour $h(\theta)$ on a besoin de la distribution asymptotique de $\widehat{h(\theta)}_{MV}$.

Idée : On utilise l'expansion de Taylor de $\widehat{h(\theta)}_{MV}$ autour du point θ pour trouver la distribution asymptotique de $\widehat{h(\theta)}_{MV}$.

Rappel : Expansion de Taylor de $f(x)$ autour du point a est

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + ...$$

L'expansion de Taylor de $\widehat{h(\theta)}_{MV}$ autour du point θ est donnée par

$$\widehat{h(\theta)}_{MV} = h(\widehat{\theta}_{MV}) \approx h(\theta) + (\widehat{\theta}_{MV} - \theta)h'(\theta) + ...$$

On laissera tomber les autres termes de l'expansion car ils sont négligeables au niveau asymptotique. Étant donné que $h(\widehat{\theta}_{MV})$ est une fonction linéaire de $\widehat{\theta}_{MV}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}h(\widehat{\theta}_{MV}) &\approx h(\theta) + (\widehat{\theta}_{MV} - \theta)h'(\theta)\\ &= (h(\theta) - \theta h'(\theta)) + h'(\theta)\widehat{\theta}_{MV}\\ &= c_0 + c_1\widehat{\theta}_{MV},\end{aligned}$$

où $c_0 = h(\theta) - \theta h'(\theta)$, $c_1 = h'(\theta)$ et que $\widehat{\theta}_{MV}$ est asymptotique normal, on a que la distribution asymptotique de $h(\widehat{\theta}_{MV})$ est aussi normale. De plus, l'espérance asymptotique de $h(\widehat{\theta}_{MV})$ est

$$\begin{aligned}E\left[\widehat{h(\theta)}_{MV}\right] &\approx E\left[h(\theta) + (\widehat{\theta}_{MV} - \theta)h'(\theta)\right]\\ &= E\left[h(\theta)\right] + E\left[(\widehat{\theta}_{MV} - \theta)h'(\theta)\right]\\ &= h(\theta) + h'(\theta)E\left[\widehat{\theta}_{MV} - \theta\right]\\ &= h(\theta)\end{aligned}$$

car $\widehat{\theta}_{MV}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais et donc $E\left[\widehat{\theta}_{MV} - \theta\right] = 0$. Pour la variance asymptotique, on a

$$\begin{aligned}Var\left[\widehat{h(\theta)}_{MV}\right] &\approx Var\left[h(\theta) + (\widehat{\theta}_{MV} - \theta)h'(\theta)\right]\\ &= \left(h'(\theta)\right)^2 Var\left(\widehat{\theta}_{MV}\right)\\ &= \left(h'(\theta)\right)^2 \sigma^2_{\widehat{\theta}_{MV}}.\end{aligned}$$

Asymptotiquement, on a donc

$$\widehat{h(\theta)}_{MV} \simeq N(h(\theta), (h'(\theta))^2 \sigma^2_{\widehat{\theta}_{MV}}).$$

Pour conclure, un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour $h(\theta)$ est

$$h(\widehat{\theta}_{MV}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} h'(\theta)\sigma_{\widehat{\theta}_{MV}}$$

ou

$$h(\widehat{\theta}_{MV}) \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1} h'(\theta)\Big|_{\theta=\widehat{\theta}_{MV}} \widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_{MV}}.$$

Exemple :

Trouver un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour $\Pr(X \leq 10000)$ si $X \sim Exp(\lambda)$ où $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Solution :

On a $h(\theta) = F_X(10000;\theta) = 1 - e^{-10000\theta}$. On a déjà trouvé dans un exemple précédent $\widehat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\overline{X}}$. On cherche

$$\widehat{h(\theta)}_{MV} \pm t_{\alpha/2,n-1} h'(\theta)\Big|_{\theta=\widehat{\theta}_{MV}} \widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_{MV}}.$$

— $\widehat{h(\theta)}_{MV} = h(\widehat{\theta}_{MV}) = 1 - e^{-\frac{10000}{\overline{X}}}$

— $h'(\theta) = \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} = 10000e^{-10000\theta} \Rightarrow h'(\theta)\Big|_{\theta=\widehat{\theta}_{MV}} = 10000e^{-\frac{10000}{\overline{X}}}$

— $\sigma^2_{\widehat{\theta}_{MV}} = Var(\widehat{\theta}_{MV}) = [I(\theta)]^{-1} = -\frac{1}{nE\left[\frac{\partial^2 \ln f(X;\theta)}{\partial \theta^2}\right]}$

$$\begin{aligned}
\ln f(x;\theta) &= \ln(\theta e^{-\theta x}) \\
&= \ln\theta - \theta x \\
\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2} &= \frac{-1}{\theta^2} \\
&\Rightarrow Var(\widehat{\theta}_{MV}) = -\frac{1}{nE\left[\frac{-1}{\theta^2}\right]} = \frac{\theta^2}{n} \\
&\Rightarrow \widehat{Var(\widehat{\theta}_{MV})} = \frac{\widehat{\theta}^2_{MV}}{n}.
\end{aligned}$$

On a donc l'intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ suivant pour $\Pr(X \leq 10000)$:

$$1 - e^{-\frac{10000}{\overline{X}}} \pm t_{\alpha/2,n-1}(10000e^{-\frac{10000}{\overline{X}}})(\frac{\widehat{\theta}_{MV}}{\sqrt{n}}).$$

Intervalle de confiance pour $h(\theta_1, \theta_2)$

On sait que la distribution asymptotique de $(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV})$ est $N((\theta_1,\theta_2), [\mathbf{I}(\theta)]^{-1})$ mais pour déterminer un intervalle de confiance pour $h(\theta_1,\theta_2)$ on a besoin de la distribution asymptotique de $\widehat{h(\theta_1,\theta_2)}_{MV}$.

Idée : On utilise l'expansion de Taylor de $\widehat{h(\theta_1,\theta_2)}_{MV}$ autour du point (θ_1,θ_2) pour trouver la distribution asymptotique de $\widehat{h(\theta_1,\theta_2)}_{MV}$.

L'expansion de Taylor de $\widehat{h(\theta_1,\theta_2)}_{MV}$ autour du point (θ_1,θ_2) est donnée par

$$\widehat{h(\theta_1,\theta_2)}_{MV} = h(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV}) \approx h(\theta_1,\theta_2) + (\widehat{\theta}_{1MV} - \theta_1)\frac{\partial h(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1} + (\widehat{\theta}_{2MV} - \theta_2)\frac{\partial h(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2}.$$

On laissera tomber les autres termes de l'expansion car ils sont négligeables au niveau asymptotique. Étant

donné que $h(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV})$ est une fonction linéaire de $\widehat{\theta}_{1MV}$ et $\widehat{\theta}_{2MV}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
h(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV}) &\approx h(\theta_1, \theta_2) + (\widehat{\theta}_{1MV} - \theta_1)\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} + (\widehat{\theta}_{2MV} - \theta_2)\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \\
&= \left(h(\theta_1, \theta_2) - \theta_1 \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} - \theta_2 \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}\right) + \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}\widehat{\theta}_{1MV} + \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}\widehat{\theta}_{2MV} \\
&= c_0 + c_1\widehat{\theta}_{1MV} + c_2\widehat{\theta}_{2MV},
\end{aligned}$$

où $c_0 = h(\theta_1, \theta_2) - \theta_1 \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} - \theta_2 \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}$, $c_1 = \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}$, $c_2 = \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}$et que $(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV})$ est asymptotique normal, on a que la distribution asymptotique de $h(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV})$ est aussi normale. De plus, l'espérance symptotique de $h(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV})$ est

$$\begin{aligned}
E\left[\widehat{h(\theta_1, \theta_2)}_{MV}\right] &\approx E\left[h(\theta_1, \theta_2) + (\widehat{\theta}_{1MV} - \theta_1)\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} + (\widehat{\theta}_{2MV} - \theta_2)\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}\right] \\
&= E\left[h(\theta_1, \theta_2)\right] + E\left[(\widehat{\theta}_{1MV} - \theta_1)\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}\right] + E\left[(\widehat{\theta}_{2MV} - \theta_2)\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}\right] \\
&= h(\theta_1, \theta_2) + \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} E\left[\widehat{\theta}_{1MV} - \theta_1\right] + \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} E\left[\widehat{\theta}_{2MV} - \theta_2\right] \\
&= h(\theta_1, \theta_2)
\end{aligned}$$

car $\widehat{\theta}_{1MV}$ et $\widehat{\theta}_{2MV}$ sont des estimateurs asymptotiquement sans biais et donc $E\left[\widehat{\theta}_{1MV} - \theta_1\right] = E\left[\widehat{\theta}_{2MV} - \theta_2\right] = 0$. Pour la variance asymptotique de $h(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV})$, on a

$$\begin{aligned}
Var\left[\widehat{h(\theta_1, \theta_2)}_{MV}\right] &\approx Var\left[h(\theta_1, \theta_2) + (\widehat{\theta}_{1MV} - \theta_1)\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} + (\widehat{\theta}_{2MV} - \theta_2)\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}\right] \\
&= \left(\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}\right)^2 Var\left(\widehat{\theta}_{1MV}\right) + \left(\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}\right)^2 Var\left(\widehat{\theta}_{2MV}\right) \\
&\quad +2\left(\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}\right)\left(\frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}\right) Cov(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV}) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2_{\widehat{\theta}_{1MV}} & Cov(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV}) \\ Cov(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV}) & \sigma^2_{\widehat{\theta}_{2MV}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial h(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \\
&= \delta\mathbf{h}^T \left[\mathbf{I}(\theta)\right]^{-1} \delta\mathbf{h}
\end{aligned}$$

où $\delta\mathbf{h}$ est le vecteur colonne des dérivées de la fonction h et $\mathbf{I}(\theta)$ est la matrice d'information de Fisher.

Asymptotiquement, on a donc

$$\widehat{h(\theta_1, \theta_2)}_{MV} \simeq N(h(\theta_1, \theta_2), \delta\mathbf{h}^T \left[\mathbf{I}(\theta)\right]^{-1} \delta\mathbf{h}).$$

Pour conclure, un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour $h(\theta_1, \theta_2)$ est

$$h(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\delta\mathbf{h}^T \left[\mathbf{I}(\theta)\right]^{-1} \delta\mathbf{h}}$$

ou

$$h(\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \sqrt{\delta\mathbf{h}^T \left[\mathbf{I}(\theta)\right]^{-1} \delta\mathbf{h}}\Big|_{(\theta_1, \theta_2) = (\widehat{\theta}_{1MV}, \widehat{\theta}_{2MV})}.$$

Exemple :

Soit $X \sim$ *Pareto Généralisée*$(\alpha, \lambda, \tau = 2)$ tel que

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_{MV} &\simeq N(\alpha, 1.74) \\ \widehat{\lambda}_{MV} &\simeq N(\lambda, 884) \\ \rho_{\widehat{\alpha}_{MV}, \widehat{\lambda}_{MV}} &= -0.5275, \end{aligned}$$

où $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ est le coefficient de corrélation linéaire. Avec un grand échantillon, les estimés suivants ont été obtenus :

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_{MV} &= 9 \\ \widehat{\lambda}_{MV} &= 4950. \end{aligned}$$

Avec ces informations, trouver un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour le mode de X.

Solution :

On cherche un intervalle de confiance pour $h(\alpha, \lambda) = \frac{\lambda}{\alpha+1}$ où $h(\alpha, \lambda)$ est le mode de X, soit

$$h(\widehat{\alpha}_{MV}, \widehat{\lambda}_{MV}) \pm t_{\alpha/2, n-1} \sqrt{\delta \mathbf{h}^T \left[\mathbf{I}(\alpha, \lambda)\right]^{-1} \delta \mathbf{h}}.$$

Pour le vecteur des dérivées de la fonction qui nous intéresse, c'est-à-dire

$$\delta \mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} \frac{\delta h(\alpha,\lambda)}{\delta \alpha} & \frac{\delta h(\alpha,\lambda)}{\delta \lambda} \end{bmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\delta h(\alpha, \lambda)}{\delta \alpha} &= \frac{\delta}{\delta \alpha} \frac{\lambda}{\alpha + 1} = -\frac{\lambda}{(\alpha+1)^2} \\ &\Rightarrow \frac{\delta h(\alpha, \lambda)}{\delta \alpha} |_{\alpha = \widehat{\alpha}_{MV}} = -\frac{4950}{(9+1)^2} = -49.5 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\delta h(\alpha, \lambda)}{\delta \lambda} &= \frac{\delta}{\delta \lambda} \frac{\lambda}{\alpha + 1} = \frac{1}{(\alpha+1)} \\ &\Rightarrow \frac{\delta h(\alpha, \lambda)}{\delta \lambda} \Big|_{\lambda = \widehat{\lambda}_{MV}} = \frac{1}{(9+1)} = 0.1. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} Var(\widehat{h(\alpha, \lambda)}_{MV}) &= \left(\frac{\delta h(\alpha, \lambda)}{\delta \alpha}\right)^2 Var(\widehat{\alpha}_{MV}) + \left(\frac{\delta h(\alpha, \lambda)}{\delta \lambda}\right)^2 Var(\widehat{\lambda}_{MV}) + 2\left(\frac{\delta h(\alpha, \lambda)}{\delta \alpha}\right)\left(\frac{\delta h(\alpha, \lambda)}{\delta \lambda}\right) \rho_{\widehat{\alpha}_{MV}, \widehat{\lambda}_{MV}} \sigma_{\widehat{\alpha}_{MV}} \sigma_{\widehat{\lambda}_{MV}} \\ &= (-49.5)^2(1.74) + (0.1)^2(884) + 2(-49.5)(0.1)(-0.5275)\sqrt{1.74}\sqrt{884} \\ &= 4477. \end{aligned}$$

Un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour le mode de X (où n est grand) est

$$495 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{4477}.$$

9.20 Estimation selon l'approche 2

On vise à estimer la distribution de la v.a. X définie par

$$X = \sum_{k=1}^{M} B_k \tag{9.1}$$

avec la convention $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$. Les hypothèses classiques en lien avec la représentation sont les suivantes :

— M : v.a. discrète de fréquence (nombre de sinistres, ou nombre d'évènements, etc.) ;
— B_k : montant du $k$ième sinistre ;
— $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ = suite de v.a. indépendantes ;
— $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ = suite de v.a. identiquements distribuées avec la convention $B_k \sim B$;
— $\underline{B}$ indépendantes de la v.a. M.

Hypothèse additionnelle :

— $B \sim Gamma\,(\alpha, \beta)$.

Il résulte des hypothèses classiques et additionnelle

$$\begin{aligned} F_X\left(x; (\underline{\theta}_M, \alpha, \beta)\right) &= \Pr\left(M = 0; \underline{\theta}_M\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \Pr\left(M = j; \underline{\theta}_M\right) H\left(x; j \times \alpha, \beta\right), \; x \geq 0 \\ f_X\left(x; (\underline{\theta}_M, \alpha, \beta)\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \Pr\left(M = k; \underline{\theta}_M\right) h\left(x; j\times, \beta\right), \; x > 0 \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\Pr\left(X = 0; \underline{\theta}_M\right) = \Pr\left(M = 0; \underline{\theta}_M\right)$$

et

$$\Pr\left(x < X \leq x + dx, M = k; (\underline{\theta}_M, \alpha, \beta)\right) = \Pr\left(M = k; \underline{\theta}_M\right) h\left(x; k \times \alpha, \beta\right), \; k > 0, x > 0$$

On considère deux cas pour le format des données.

Format #1 des données :

— $\{(x_i, k_i), i = 1, 2, ..., n\}$, x_i = montant total des sinistres et k_i = nombre de sinistres.
— La fonction de vraisemblance est de la forme suivante :

$$L\left((\underline{\theta}_M, \alpha, \beta)\right) = \prod_{i=1}^{n} \Pr\left(M = k_i; \underline{\theta}_M\right) \left(h\left(x_i; k \times \alpha, \beta\right)\right)^{1_{\{k_i > 0\}}}.$$

— En raison de l'indépendance entre les montants de sinistres et le nombre de sinistres, on peut estimer indépendamment les paramètres des lois de M et de B.

Format #2 des données :

— $\{(x_i), i = 1, 2, ..., n\}$, x_i = montant total des sinistres et k_i = nombre de sinistres.
— La fonction de vraisemblance est de la forme suivante :

$$L\left((\underline{\theta}_M, \alpha, \beta)\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\Pr\left(X = 0; \underline{\theta}_M\right)\right)^{1_{\{x=0\}}} \left(f_X\left(x; (\underline{\theta}_M, \alpha, \beta)\right)\right)^{1_{\{x>0\}}}.$$

— Comme

$$f_X\left(x; (\underline{\theta}_M, \alpha, \beta)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr\left(M = k; \underline{\theta}_M\right) h\left(x; j\times, \beta\right)$$

la maximisation représente un certain défi. Différentes stratégies ont été proposées.

Une façon simple de procéder est de supposer que le nombre de sinistres est définie sur un support fini $\{0, 1, ..., k_0\}$, k_0 ayant une valeur élevée. Mais, elle doit être utilisée avec prudence.

9.21 Notes bibliographiques

Pour une introduction au méthodes d'estimation en actuariat, on recommande, p. ex., [Cizek et al., 2005] et [Klugman et al., 2012].

Code LaTeX : `chapitre_estima_sinistre.tex`

Chapitre 10

Processus de Poisson et cie

10.1 Introduction

Les processus de comptage sont essentiels pour la modélisation des risques en actuariat.

Définition 10.1 *On dit que* $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ *est un processus de comptage (dénombrement) si*

1. $N(0) = 0$
2. $N(t) \geq 0$
3. *Si* $t > s$, *on a* $N(t) \geq N(s)$
4. *Si* $t > s$, *on a* $N(t) - N(s)$ *correspond au nombres d'évènements (p. ex., sinistres) encourus durant l'intervalle* $(s, t]$

10.2 Processus de Poisson homogène

Définition 10.2 *Le processus de comptage* $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ *est un processus de Poisson si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $N(0) = 0$ *;*
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ *a des accroissements indépendants et stationnaires ;*
3. $N(t) \sim Pois(\lambda t)$ *;*
4. $N(s+t) - N(s) \sim Pois(\lambda t)$ *.*

On définit

$$N(s, s+t] = N(s+t) - N(s), \text{ pour } s \geq 0 \text{ et } t > 0,$$

avec la conviention $N(0, t] = N(t)$, $t > 0$.

Le terme λ correspond au taux (intensité) du processus. On définit l'intensité cumulée par

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda \mathrm{d}s = \lambda t, \text{ pour } t > 0.$$

De plus, on note

$$\Lambda(s, s+t] = \Lambda(s+t) - \Lambda(s), \text{ pour } s \geq 0 \text{ et } t > 0,$$

avec la conviention $\Lambda(0, t] = \Lambda(t)$, $t > 0$.

Ainsi, on a

$$\Pr(N(t) = k) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

De plus, on sait que $N(s, s+t] = N(s+t) - N(s)$ a une distribution de Poisson avec moyenne λt

$$\begin{aligned} \Pr(N(s, s+t] = k) &= \Pr(N(s+t) - N(s) = k) \\ &= e^{-\Lambda(s,s+t]} \frac{\Lambda(s, s+t]^k}{k!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $s \geq 0$.

Les évènements (p. ex., sinistres) se produisent aux durées représentées par les v.a. T_k, $k = 1, 2, ...$ où

$$0 < T_1 < T_2 < ... \tag{10.1}$$

Important : pour le processus de Poisson (et les variantes de ce chapitre), les inégalités en (10.1) sont strictes. Les temps écoulés entre chaque évènements sont définis par

$$\begin{aligned} W_1 &= T_1 \\ W_k &= T_k - T_{k-1} \end{aligned}$$

pour $k = 2, 3, ...$ On sait que $\underline{W} = \{W_k, k = 1, 2, ...\}$ forme une suite de v.a. iid obéissant à une loi exponentielle avec moyenne $\frac{1}{\lambda}$.

Il en résulte que

$$T_k \sim Erlang(k; \lambda)$$

avec $k \in \mathbb{N}^+$.

Une définition alternative pour $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ est

$$N(t) = \sup\{k \geq 1 : T_k \leq t\}, \qquad t \geq 0$$

où $\sup\{\emptyset\} = 0$.

Propriétés 10.3 *Le processus de Poisson $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ possède les propriétés suivantes :*

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ *a des accroissements indépendants et stationnaires*
3. $N(t) \sim Pois(\lambda t)$
4. $N(s, s+t] = N(s+t) - N(s) \sim Pois(\lambda t)$
5. $\Pr(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$ *avec* $h \to 0$
6. $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$ *avec* $h \to 0$
7. $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ *avec* $h \to 0$ *où* $o(h) \to 0$ *avec* $h \to 0$.

On a les résultats suivants.

Proposition 10.4 *Soit un processus de Poisson $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ avec le taux λ. Soit une suite de v.a. iid Bernoulli $\underline{I} = \{I_k, k = 1, 2, ...\}$, avec $E[I_k] = q$. Les processus $\underline{N}$ et $\underline{I}$ sont indépendants. Alors, le processus défini par*

$$\underline{M} = \{M(t), t \geq 0\}$$

où

$$M(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} I_k, N(t) > 0 \\ 0, N(t) = 0 \end{cases},$$

est aussi un processus de Poisson avec un taux λq.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} M_{M(t)}(r) &= E\left[e^{M(t)r}\right] \\ &= M_{N(t)}(\ln M_I(r)) \\ &= \exp\{\lambda t(M_I(r)-1)\} \\ &= \exp\{\lambda t(1+q(e^r-1)-1)\} \\ &= \exp\{\lambda q t(e^r-1)\}, \end{aligned}$$

qui correspond au résultat désiré. ■

Proposition 10.5 *Soit les processus de Poisson indépendants* $\underline{N}_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$ *et* $\underline{N}_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$ *avec des taux* λ_1 *et* λ_2*. Alors, le processus défini par*

$$\underline{M} = \{M(t), t \geq 0\}$$

où

$$M(t) = N_1(t) + N_2(t),$$

est aussi un processus de Poisson process avec un taux $\lambda_1 + \lambda_2$*.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} M_{M(t)}(r) &= E\left[e^{M(t)r}\right] \\ &= E\left[e^{(N_1(t)+N_2(t))r}\right] \\ &= M_{N_1(t)}(r) M_{N_2(t)}(r) \end{aligned} \tag{10.2}$$

puisque les processus Poisson processes $\underline{N}_1$ and $\underline{N}_2$ sont indépendants. De (10.2), on déduit

$$\begin{aligned} M_{M(t)}(r) &= e^{\lambda_1 t(e^r-1)} e^{\lambda_2 t(e^r-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)t(e^r-1)}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

À partir de (10.3), on déduit que $\underline{M}$ est un processus de Poisson avec un taux $\lambda_1 + \lambda_2$. ■

Proposition 10.6 *Soit un processus de Poisson* $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ *avec le taux* λ*. Alors, le processus*

$$\{N(bt), t \geq 0\}$$

est un processus de Poisson avec un taux $b\lambda$ *où* $b > 0$*.*

Preuve. Soit

$$t^* = bt > 0. \tag{10.4}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} M_{N(t^*)}(r) &= E\left[e^{N(t^*)r}\right] \\ &= e^{\lambda t^*(e^r-1)}. \end{aligned} \tag{10.5}$$

À partir de (10.4), (10.5) devient

$$M_{N(bt)}(r) = e^{b\lambda t(e^r-1)}$$

conduisant au résultat désiré. ■

On fournit ci-dessous un algorithme pour simuler les n premières occurrences du parcours j d'un processus de Poisson avec une intensité $\lambda > 0$

Algorithme 10.7 ***Algorithme PP1***

1. *On fixe* $T_0^{(j)} = 0$.
2. *Pour* $i = 1, ..., n$, *on a*
   (a) *On simule* $W_i^{(j)}$;
   (b) *On calcule* $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$.

L'algorithme 10.7 est simple d'application. Toutefois, il n'est pas toujours efficace si l'on souhaite produire des simulations du processus $\underline{N}$ sur un intervalle fixe $(0, t]$.

Avant de présenter l'algorithme 10.11, on fournit brièvement l'intuition qui se tient derrrère.

On sait que

$$T_1 \sim Exp(\lambda).$$

Qu'en est-il de la loi de $(T_1|N(t) = 1)$ du temps d'occurrence du premier sinistre sachant que le premier sinistre est survenu dans l'intervalle $(0, t]$? Pour $s \in (0, t]$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(T_1 \leq s|N(t) = 1) &= \frac{\Pr(T_1 \leq s, N(t) = 1)}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\Pr(T_2 > t)}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\Pr(N(s) = 1, N(s, t] = 0)}{\lambda t e^{-\lambda t}}. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Puisque les accroissements sont indépendants, (10.6) devient

$$\begin{aligned} \Pr(T_1 \leq s|N(t) = 1) &= \frac{\Pr(N(s) = 1, N(s, t] = 0)}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{\Pr(N(s) = 1)\Pr(N(s, t] = 0)}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \times e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{s}{t} \end{aligned}$$

pour $0 < s \leq t$. On constate

$$f_{T_1|N(t)=1}(s) = \frac{1}{t}, \text{ pour } s \in (0, t).$$

Ainsi, on déduit que

$$(T_1|N(t) = 1) \sim Unif(0, t).$$

Maintenant, quelle est la loi de $(T_1, ..., T_n|N(t) = n)$? On vise à identifier l'expression de

$$f_{T_1,T_2,...,T_n|N(t)=n}(s_1, ..., s_n),$$

pour $0 < s_1 < s_2 < ... < s_n \leq n$. Soit des nombres très petits h_1, ..., h_n de telle sorte que les intervalles

$$(s_1, s_1 + h_1], (s_1, s_1 + h_1], ..., (s_n, s_n + h_n]$$

soient disjoints. On sait que

$$\begin{aligned} & \Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], T_2 \in (s_2, s_2 + h_2], ..., T_n \in (s_n, s_n + h_n]|N(t) = n) \\ \simeq\ & f_{T_1,T_2,...,T_n|N(t)=n}(s_1, ..., s_n) h_1 \times h_2 \times ... \times h_n. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
& \Pr\left(T_1 \in (s_1, s_1+h_1], T_2 \in (s_2, s_2+h_2], ..., T_n \in (s_n, s_n+h_n] \,|N(t)=n\right) \\
= & \frac{\Pr\left(T_1 \in (s_1, s_1+h_1], T_2 \in (s_2, s_2+h_2], ..., T_n \in (s_n, s_n+h_n], N(t)=n\right)}{\Pr\left(N(t)=n\right)} \\
= & \frac{\Pr\left(N(s_1)=0, N(s_1, s_1+h_1]=1, N(s_1+h_1, s_2]=0, N(s_2, s_2+h_2]=1..., N(s_n, s_n+h_n]=1, N(s_n+h_n, t]=0\right)}{\frac{(\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}}{n!}}
\end{aligned}$$

Par l'indépendance des accroissements, on déduit

$$\begin{aligned}
& \Pr\left(T_1 \in (s_1, s_1+h_1], T_2 \in (s_2, s_2+h_2], ..., T_n \in (s_n, s_n+h_n] \,|N(t)=n\right) \\
= & \frac{\left(\begin{array}{c} \Pr\left(N(s_1)=0\right)\Pr\left(N(s_1, s_1+h_1]=1\right)\Pr\left(N(s_1+h_1, s_2]=0\right) \\ \times \Pr\left(N(s_2, s_2+h_2]=1\right)...\Pr\left(N(s_n, s_n+h_n]=1\right)\Pr\left(N(s_n+h_n, t]=0\right) \end{array}\right)}{\frac{(\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}}{n!}} \\
= & \frac{\mathrm{e}^{-\lambda s_1} \times \lambda h_1 \mathrm{e}^{-\lambda h_1} \times \mathrm{e}^{-\lambda(s_2-s_1-h_1)} \times \lambda h_2 \mathrm{e}^{-\lambda h_2} \times ... \times \lambda h_n \mathrm{e}^{-\lambda h_n} \times \mathrm{e}^{-\lambda(t-s_n-h_n)}}{\frac{(\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}}{n!}} \\
= & n! \frac{\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda t}}{(\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}} h_1 \times ... \times h_n \\
= & \frac{n!}{t^n} h_1 \times ... \times h_n.
\end{aligned}$$

On conclut que

$$f_{T_1, T_2, ..., T_n | N(t)=n}\left(s_1, ..., s_n\right) = \frac{n!}{t^n}, \tag{10.7}$$

pour $0 < y_1 < y_2 < ... < y_n \leq t$.

Afin de poursuivre, on a recours au prochain lemme, suivi du corrolaire.

Lemme 10.8 *Soit le vecteur de v.a. continues iid $(Y_1..., Y_n)$ où $Y_i \sim Y$ avec la fonction de densité $f_{Y_i} = f_Y$, pour $i = 1, 2, ..., n$. On définit le vecteur de statistiques d'ordre $\left(Y_{[1]}, ..., Y_{[n]}\right)$ à partir de $(Y_1..., Y_n)$. Alors, la fonction de densité de conjointe de $\left(Y_{[1]}, ..., Y_{[n]}\right)$ est donnée par*

$$f_{Y_{[1]}, Y_{[2]}, ..., Y_{[n]}}\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = n! f_Y\left(y_1\right) \times f_Y\left(y_2\right) \times ... \times f_Y\left(y_n\right), \; y_1 < y_2 < ... < y_n. \tag{10.8}$$

Preuve. Voir, p. ex., Ross [Ross, 2014b]. ■

Corollaire 10.9 *Outre les conditions du Lemme 10.8, on suppose que $Y \sim Unif\,(0, t)$ avec $f_Y(t) = \frac{1}{t}$, $t \in (0, t]$. Alors, (10.8) devient*

$$f_{Y_{[1]}, Y_{[2]}, ..., Y_{[n]}}\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = \frac{n!}{t^n}, \text{ pour } 0 < y_1 < y_2 < ... < y_n \leq t. \tag{10.9}$$

Proposition 10.10 *Soit un processus de Poisson $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ avec le taux λ. Soit le vecteur de v.a. continues iid $(Y_1..., Y_n)$ où $Y_i \sim Y \sim Unif\,(0, t)$ avec $f_Y(t) = \frac{1}{t}$, $t \in (0, t]$, pour $i = 1, 2, ..., n$. On définit le vecteur de statistiques d'ordre $\left(Y_{[1]}, ..., Y_{[n]}\right)$ à partir de $(Y_1..., Y_n)$. Alors, on a*

$$\left(T_1, T_2, ..., T_n | N(t) = n\right) \sim \left(Y_{[1]}, Y_{[2]}, ..., Y_{[n]}\right).$$

Preuve. Le résultat découle du fait que l'expression obtenue en (10.7) est identique à celle en (10.9) du Corollaire 10.9. ■

La proposition permet de déduire l'algorithme suivant.

Algorithme 10.11 ***Algorithme PP2***

1. *On fixe $T_0^{(j)} = 0$.*

2. *On simule la réalisation* $N(t)^{(j)}$ *de* $N(t)$.
3. *Sachant* $N(t) = N(t)^{(j)} > 0$,
   (a) *On simule le vecteur de réalisations* $\left(U_1^{(j)}, ..., U_{N(t)^{(j)}}^{(j)}\right)$ *de* $\left(U_1, ..., U_{N(t)^{(j)}}\right)$, *où les v.a.* $U_i \sim U \sim Unif(0,1)$;
   (b) *On trie les réalisations en [3a] et on obtient*
   $$\left(U_{[1]}^{(j)}, ..., U_{\left[N(t)^{(j)}\right]}^{(j)}\right)$$
   où $U_{[1]}^{(j)} < ... < U_{\left[N(t)^{(j)}\right]}^{(j)}$.
   (c) *On calcule* $T_i^{(j)} = t \times U_{[i]}^{(j)}$, *pour* $i = 1, ..., N(t)^{(j)}$.

10.3 Processus de Poisson non-homogène

10.3.1 Motivations

On considère des données danoises de sinistres. Il s'agit de 2167 incendies survenus au Danemark, du 1.1.1980 au 31.12.1990. Ce sont des données très utilisées pour la modélisation des risques en assurance IARD. Elles se trouvent dans le package R `QRM` (voir `danish` ou `danish.df`).

On s'intéresse plus spécifiquement aux dates de survenance des incendies. Les informations fournies dans `danish` sont la date de survenance de l'incendie et le montant total (encouru ou projeté). Il est important de mentionner qu'il advient qu'il y ait plus d'un sinistre le même jour. Bien que cela semble contrenir à l'une des propriétés du processus de Poisson, ce n'est pas le cas. En effet, les données ne sont pas assez fines pour indiquer l'heure précise du déclenchement de l'incendie.

Si l'on suppose que les incendies de cet échantillons sont survenus selon un processus de Poisson et si on utilise la méthode de maximum de vraisemblance, on déduit que

$$\widehat{\lambda}_{ML} = \frac{2167}{11} = 197.$$

Ainsi, l'on estime que le taux annuel (l'intensité du processus de Poisson, où l'échelle de temps t est en année) est de 197. Cela implique que le nombre espéré de sinistres pour une année (intervalle de temps d'une durée de 1 an, $E[N(s, s+1]]$) est de 197, en supposant un processus de Poisson et selon de l'estimation via la méthode du maximum de vraisemblance. En supposant que le modèle adéquat, on supposerait que le nombre espéré d'incendies pour la prochaine année serait de 197. Est-ce que cette prédiction se base sur modèle valide ? Pour répondre à cette question, on procède à une analyse d'adéquation graphique. On considère le graphique de l'illustration 10.1.

Il est clair que le parcours du processus d'avènement des incendies construits à partir des données n'est pas celui d'un processus de Poisson homogène.

Maintenant, on considère le graphique de l'illustration 10.2.

Selon l'illustration 10.2, l'intensité semble constante par intervalle d'année, mais elle varie d'une année à l'autre. On observe que l'intensité semble suivre une tendance croissante. Pour tenir compte de ce type de phénomène et pour procéder à des planifications plus fines, il est adéquat d'introduire les processus de Poisson non-homogènes.

10.3.2 Résultats

On considère le processus de Poisson non-homogène. Selon ce processus, l'intensité du processus peut fluctuer dans le temps. L'intensité est définie par une fonction déterministe.

Définition 10.12 *Le processus de comptage* $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ *est dit un processus de Poisson non-homogène de fonction d'intensité* $\lambda(t) \geq 0$ *pour* $t \geq 0$ *si*

Illustration 10.1 – Processus de Poisson vs donnés danoises d'incendie.

Illustration 10.2 – Processus de Poisson non-homogène vs donnés danoises d'incendie.

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ *possède des accroissements indépendants*
3. $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
4. $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

La condition 3 implique que le processus $\underline{N}$ ne possède pas des accroissements stationnaires, à moins que $\lambda(t) = \lambda > 0$, $\forall t$. Dans ce cas, $\underline{N}$ devient un processus de Poisson homogène de taux λ.

Proposition 10.13 *Soit* $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ *un processus de Poisson non-homogène de fonction d'intensité* $\lambda(t)$. *Alors,*

$$N(t+s) - N(t) \sim Poisson(\Lambda(t+s) - \Lambda(s)),\ \forall t, s \geq 0$$

où

$$\Lambda(t) = int_0^t \lambda(y)dy$$

est appelée fonction de valeur moyenne (ou la fonction d'intensité cumulée) du processus. Ainsi,

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{[m(t+s) - m(s)]^n e^{-[m(t+s)-m(s)]}}{n!}.$$

Preuve. Voir, p. ex., Ross [Ross, 2014b]. ■

Important. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson non-homogène, avec une intensité $\lambda(t)$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$. On définit le processus déterministe $\underline{\Lambda} = \{\Lambda(t), t \geq 0\}$, avec $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s$, $t \geq 0$ (note : $\Lambda(0) = 0$). Bien que les accroissements (sur des intervalles de temps disjoints) soient indépendants et en excluant le cas particulier où $\lambda(t) = \lambda$ $(t \geq 0)$, $\underline{W}$ n'est pas une suite de v.a. indépendantes et $\underline{W}$ n'est pas une suite de v.a. identiquement distribuées.

Pour la suite, on suppose $\lambda(t)$ est une fonction absolument continue (sans saut).

Exemple 10.14 *Exemples de fonction d'intensité :*

1. *fonction linéaire :* $\lambda(t) = a + bt$, $a > 0$, $b \geq 0$ *;*
2. *fonction puissance :* $\lambda(t) = (\beta t)^\tau$, $\beta > 0$, $\tau > 0$ *;*
3. *fonction log-linéaire :* $\lambda(t) = \exp(\alpha + \beta t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *;*
4. *fonction périodique (effet saisonnier) :* $\lambda(t) = a + b\cos(2\pi t)$, $a > 0$, $b \in [0, a]$ *;*
5. *fonction périodique (effet saisonnier) bis :* $\lambda(t) = a + b\cos(2\pi(t + c))$, $a > 0$, $b \in [0, a]$, $c \in [0, 1)$.

□

On définit

$$\Lambda(s, s+t] = \int_s^{s+t} \lambda(u)\,\mathrm{d}u, \text{ pour } s \geq 0,\ t > 0,$$

avec

$$\Lambda(0, t] = \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,\mathrm{d}u, \text{ pour } t > 0.$$

Pour $s \geq 0$ fixé, l'inverse de la fonction $\Lambda(s, s+t] = \Lambda_s(t)$ (note : $\Lambda_0(t) = \Lambda(t)$) est définie par

$$\Lambda_s^{-1}(u) = \inf\{t > 0, \Lambda_s(t) \geq u\},$$

pour $u \geq 0$.

On fait l'hypothèse que la valeur de la fonction $\Lambda_s^{-1}(u)$ est facile à obtenir.

Exemple 10.15 *Soit* $\lambda(t) = a + bt$, $t \geq 0$ *(*$a > 0$, $b \geq 0$*). Alors, on a*

$$\begin{aligned}\Lambda_s(t) &= \Lambda(s, s+t] = \int_s^{s+t} \lambda(u)\,\mathrm{d}u \\ &= at + \frac{b}{2}\left((t+s)^2 - (s)^2\right) \\ &= (a+bs)\,t + \frac{b}{2}t^2, \text{ pour } s \geq 0,\ t > 0.\end{aligned}$$

Puis, pour $b > 0$*, on déduit*

$$\Lambda_s^{-1}(u) = \frac{-(a+bs) + \sqrt{(a+bs)^2 + 4 \times \frac{b}{2}u}}{b},$$

pour $u \in (0,1)$ *et* $s \geq 0$*. Si* $b = 0$*, alors*

$$\Lambda_s^{-1}(u) = \frac{u}{a}, \text{ pour } u \in (0,1).$$

□

La fonction de survie de la v.a. W_1 (premier temps intersinistre) est donnée par

$$\Pr(W_1 > t) = \Pr(N(t) = 0) = \exp(-\Lambda(t)) = \overline{F}_{W_1}(t), \text{ pour } t \geq 0.$$

La fonction de répartition de W_1 est

$$F_{W_1}(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)}, \text{ pour } t \geq 0.$$

Alors, l'expression de la fonction quantile de la v.a. W_1 est

$$F_{W_1}^{-1}(u) = \Lambda^{-1}(-\ln(1-u)),$$

pour $u \in (0,1)$. Soit une v.a. $Z_1 \sim Exp(1)$. Alors, on constate

$$F_{W_1}^{-1}(u) = \Lambda^{-1}\left(F_{Z_1}^{-1}(u)\right), \tag{10.10}$$

pour $u \in (0,1)$. Selon (10.10), la v.a. W_1 admet la représentation suivante :

$$W_1 = \Lambda^{-1}(Z_1).$$

On déduit que

$$\begin{aligned}\Pr(W_2 > t | T_1 = s) &= \Pr(N(s, t+s] = 0) \\ &= \mathrm{e}^{-(\Lambda(s,s+t))} = \mathrm{e}^{-\Lambda_s(t)} \\ &= \overline{F}_{W_2|T_1=s}(t), \text{ pour } t \geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $s > 0$ fixé, on déduit

$$F_{W_2|T_1=s}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\Lambda(s,s+t)} = 1 - \mathrm{e}^{-\Lambda_s(t)}, \text{ pour } t \geq 0,$$

qui est la fonction de répartition de $(W_2|T_1 = s)$. Puis, la fonction quantile de $(W_2|T_1 = s)$ est

$$F_{W_2|T_1=s}^{-1}(u) = \Lambda_s^{-1}(-\ln(1-u)),$$

pour $s > 0$ et $u \in (0,1)$. Soit une v.a. $Z_2 \sim Exp(1)$. On observe

$$F_{W_2|T_1=s}^{-1}(u) = \Lambda_s^{-1}\left(F_{Z_2}^{-1}(u)\right),$$

pour $u \in (0,1)$. Ainsi, la v.a. $(W_2|T_1 = s)$ admet la représentation suivante :

$$(W_2|T_1 = s) = \Lambda_s^{-1}(Z_1).$$

En général, on conclut

$$\begin{aligned}\Pr(W_n > t|T_{n-1} = s) &= \Pr(N(s, t+s] = 0) \\ &= \mathrm{e}^{-(\Lambda(s,s+t))} = \mathrm{e}^{-\Lambda_s(t)} \\ &= \overline{F}_{W_n|T_{n-11}=s}(t), \text{ pour } t \geq 0.\end{aligned}$$

Puis, la fonction de répartition de $(W_n|T_{n-1} = s)$ est

$$F_{W_n|T_{n-1}=s}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\Lambda_s(t)}, \text{ pour } t \geq 0,$$

et la fonction quantile de $(W_n|T_{n-1} = s)$ est

$$F^{-1}_{W_n|T_{n-11}=s}(u) = \Lambda_s^{-1}(-\ln(1-u)),$$

pour $s > 0$ et $u \in (0,1)$. Soit une v.a. $Z_n \sim Exp(1)$. On déduit

$$F^{-1}_{W_n|T_{n-1}=s}(u) = \Lambda_s^{-1}\left(F^{-1}_{Z_n}(u)\right),$$

pour $u \in (0,1)$, et la v.a. $(W_n|T_{n-1} = s)$ possède la représentation suivante :

$$(W_n|T_{n-1} = s) = \Lambda_s^{-1}(Z_n).$$

Les représentations obtenues pour les v.a. W_1, ... , W_n permettent de construire l'algorithme suivant pour simuler les n premières occurrences du parcours j d'un processus de Poisson non-homogène avec une fonction d'intensité $\lambda(t) > 0$.

Algorithme 10.16 ***Algorithme PPNH1***

1. *On fixe* $T_0^{(j)} = 0$.
2. *Pour* $i = 1, ..., n$, *on a*
   (a) *On simule les réalisations* $\left(Z_1^{(j)}, ..., Z_n^{(j)}\right)$ *du vecteur de v.a. iid avec* $Z_i \sim Z \sim Exp(1)$.
   (b) *On simule* $W_i^{(j)} = \Lambda^{-1}_{T_{i-1}^{(j)}}(Z_i)$;
   (c) *On calcule* $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$.

Comme l'algorithme 10.7 et si l'expression Λ_s^{-1} est fermée, l'algorithme 10.16 est simple d'application.

Toutefois, le prochain algorithme est plus rapide si l'on souhaite produire des simulations du processus de Poisson non-homogène $\underline{N}$ sur un intervalle fixe $(0,t]$.

Proposition 10.17 *On a*

$$\begin{aligned}f_{T_1,...,T_n|N(t)=n}(s_1, ..., s_n) &= n!\frac{\lambda(s_1)...\lambda(s_n)}{(\Lambda(t))^n} \\ &= n!\frac{\lambda(s_1)}{\Lambda(t)} \times ... \times \frac{\lambda(s_n)}{\Lambda(t)},\end{aligned}$$

pour $0 < s_1 < ... < s_n < t$.

Preuve. Voir, p. ex., Mikosch [Mikosch, 2009].On vise à identifier l'expression de

$$f_{T_1,T_2,...,T_n|N(t)=n}(s_1, ..., s_n),$$

pour $0 < s_1 < s_2 < ... < s_n \leq n$. Soit des nombres très petits h_1, ..., h_n de telle sorte que les intervalles

$$(s_1, s_1 + h_1], (s_1, s_1 + h_1], ..., (s_n, s_n + h_n]$$

soient disjoints. On sait que

$$\begin{aligned} & \Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], T_2 \in (s_2, s_2 + h_2], ..., T_n \in (s_n, s_n + h_n] | N(t) = n) \\ \simeq \; & f_{T_1, T_2, ..., T_n | N(t)=n}(s_1, ..., s_n) h_1 \times h_2 \times ... \times h_n. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} & \Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], T_2 \in (s_2, s_2 + h_2], ..., T_n \in (s_n, s_n + h_n] | N(t) = n) \\ = \; & \frac{\Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], T_2 \in (s_2, s_2 + h_2], ..., T_n \in (s_n, s_n + h_n], N(t) = n)}{\Pr(N(t) = n)} \\ = \; & \frac{\Pr(N(s_1) = 0, N(s_1, s_1 + h_1] = 1, N(s_1 + h_1, s_2] = 0, N(s_2, s_2 + h_2] = 1..., N(s_n, s_n + h_n] = 1, N(s_n + h_n, t] = 0)}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}} \end{aligned}$$

Par l'indépendance des accroissements, on déduit

$$\begin{aligned} & \Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], T_2 \in (s_2, s_2 + h_2], ..., T_n \in (s_n, s_n + h_n] | N(t) = n) \\ = \; & \frac{\left(\begin{array}{c} \Pr(N(s_1) = 0) \Pr(N(s_1, s_1 + h_1] = 1) \Pr(N(s_1 + h_1, s_2] = 0) \\ \times \Pr(N(s_2, s_2 + h_2] = 1) ... \Pr(N(s_n, s_n + h_n] = 1) \Pr(N(s_n + h_n, t] = 0) \end{array} \right)}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}} \\ = \; & \frac{e^{-\Lambda(s_1)} \times \Lambda(s_1, s_1 + h_1] e^{-\Lambda(s_1, s_1 + h_1]} \times e^{-\Lambda(s_1 + h_1, s_2]} \times \Lambda(s_2, s_2 + h_2] e^{-\Lambda(s_2, s_2 + h_2]} \times ... \times \Lambda(s_n, s_n + h_n] e^{-\Lambda(s_n, s_n + h_n]}}{\frac{\Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}}{n!}} \\ = \; & n! \frac{e^{-\Lambda(t)}}{\Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}} \Lambda(s_1, s_1 + h_1] \times \Lambda(s_2, s_2 + h_2] \times ... \times \Lambda(s_n, s_n + h_n] \\ = \; & n! \frac{1}{\Lambda(t)^n} \Lambda(s_1, s_1 + h_1] \times \Lambda(s_2, s_2 + h_2] \times ... \times \Lambda(s_n, s_n + h_n]. \end{aligned}$$

On conclut que

$$\begin{aligned} f_{T_1, ..., T_n | N(t)=n}(s_1, ..., s_n) &= n! \frac{1}{\Lambda(t)^n} \lim_{h_1 \to 0, ..., h_n \to 0} \frac{\Lambda(s_1, s_1 + h_1]}{h_1} \times ... \times \frac{\Lambda(s_n, s_n + h_n]}{h_n} \\ &= n! \frac{1}{\Lambda(t)^n} \lambda(s_1) \times ... \times \lambda(s_n), \end{aligned}$$

pour $0 < s_1 < ... < s_n \leq t$. ■

Remarque 10.18 *Le résultat de la proposition 10.17 signifie que*

$$(T_1, ..., T_n | N(t) = n) \sim \left(V_{[1]}, ..., V_{[n]}\right)$$

où $\left(V_{[1]}, ..., V_{[n]}\right)$ *le vecteur de v.a. triées à partir du vecteur de v.a. iid* $(V_1, ..., V_n)$ *où* $V_i \sim V$ *avec* $f_V(x) = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t)}$, $0 < x < t$ $(i = 1, 2, ..., n)$. *Note :* $F_V(x) = \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}$, $x \in [0, t]$, *et* $F_V^{-1}(u) = \Lambda^{-1}(u \times \Lambda(t))$, $u \in (0, 1)$ *(pour t fixé).*

Le prochain algorithme est basé sur la proposition 10.17.

Algorithme 10.19 ***Algorithme PPNH2.***

1. *On fixe* $T_0^{(j)} = 0$.
2. *On simule la réalisation* $N(t)^{(j)}$ *de* $N(t) \sim$ *Poisson* $(\Lambda(t))$.

3. *Sachant* $N(t) = N(t)^{(j)} > 0$,

   (a) *On simule le vecteur de réalisations* $\left(V_1^{(j)}, ..., V_{N(t)^{(j)}}^{(j)}\right)$ *du vecteur de v.a. iid* $\left(V_1, ..., V_{N(t)^{(j)}}\right)$, *où* $V_i \sim V$ *avec* $f_V(x) = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t)}$, $0 < x < t$ $(i = 1, 2, ..., N(t)^j)$;

   (b) *On trie les réalisations en [3a] et on obtient*

$$\left(V_{[1]}^{(j)}, ..., V_{\left[N(t)^{(j)}\right]}^{(j)}\right)$$

   où $V_{[1]}^{(j)} < ... < V_{\left[N(t)^{(j)}\right]}^{(j)}$.

   (c) *On calcule* $T_i^{(j)} = V_{[i]}^{(j)}$, *pour* $i = 1, ..., N(t)^{(j)}$.

10.4 Processus de Poisson mixte

Pour le processus de Poisson mixte, l'intensité est une variable aléatoire. Cette variante permet d'introduire de la surdispersion dans le processus de Poisson. L'extension du processus de Poisson à un processus de Poisson mixte est construite d'une façon similaire à l'extention de la loi de Poisson à une loi de Poisson mixte.

Définition 10.20 *Soit* Θ *une variable aléatoire positive (continue ou discrète). Si le processus de comptage* $\underline{N} = \{N(t); t \geq 0\}$ *étant donné que* $\Theta = \theta$ *est un processus de Poisson de taux* θ *alors* $\underline{N} = \{N(t); t \geq 0\}$ *est appelé un processus de Poisson mixte.*

On examine les propriétés du processus de Poisson mixte.
On fait l'hypothèse additionnelle suivante : les paramètres de la loi de Θ sont fixés de telle sorte que

$$E[\Theta] = \lambda \in (0, \infty).$$

L'espérance et la variance du nombre de sinistres sur $(0, t]$ sont donnéee par

$$\begin{aligned} E[N(t)] &= E[E[N(t) \mid \Theta]] \\ &= E[\Theta t] \text{ car } (N(t) \mid \Theta = \theta) \sim Poisson(\theta t) \\ &= tE[\Theta] \\ &= t\lambda \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var(N(t)) &= E[Var(N(t) \mid \Theta)] + Var(E[N(t) \mid \Theta]) \\ &= E[\Theta t] + Var(\Theta t) \\ &= tE[\Theta] + t^2 Var(\Theta) \\ &= t\lambda + t^2 Var(\Theta). \end{aligned}$$

La fgm de $N(t)$ correspond à

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{N(t)}(r) &= E\left[e^{N(t)r}\right] \\ &= E_\Theta\left[E\left[e^{N(t)r} | \Theta\right]\right] \\ &= E_\Theta\left[e^{\Theta t(e^r - 1)}\right] \\ &= \mathcal{M}_\Theta(t(e^r - 1)). \end{aligned}$$

La fgp de $N(t)$ est donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{N(t)}(r) &= E\left[r^{N(t)}\right] \\ &= E_\Theta\left[E\left[r^{N(t)}|\Theta\right]\right] \\ &= E_\Theta\left[e^{\Theta t(r-1)}\right] \\ &= \mathcal{M}_\Theta\left(t(r-1)\right),\end{aligned}$$

pour $r \in [0,1]$.

Proposition 10.21 *Le processus de Poisson mixte* $\underline{N} = \{N(t); t \geq 0\}$ *possède des accroissements stationnaires, mais non indépendants.*

Preuve. Il est possible d'utiliser deux approches pour démontrer cette proposition.

1. Preuve no1 (fgm). Pour montrer que les accroissements sont stationnairesm on observe que la fgm de $N(s, s+t] = N(t+s) - N(s)$ correspond à

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{N(t+s)-N(s)}(r) &= E\left[e^{(N(t+s)-N(s))r}\right] \\ &= E_\Theta\left[E\left[e^{(N(t+s)-N(s))r}|\Theta\right]\right] \\ &= E_\Theta\left[e^{\Theta t(e^r-1)}\right] \\ &= \mathcal{M}_\Theta\left(t(e^r-1)\right)\end{aligned}$$

   qui ne dépend pas de s. Comme l'expression de la fgm ne dépend pas de s, mais seulement de la longueur t de l'intervalle, on conclut que les accroissements sont stationnaires.
   Pour vérifier que les accroissements sont dépendants, on note que

$$\mathcal{M}_{N(t+s)}(r) \neq M_{N(t+s)-N(s)}(r)\,\mathcal{M}_{N(s)}(r). \tag{10.11}$$

   En effet, on a

$$\mathcal{M}_{N(t+s)}(r) = M_\Theta\left((t+s)(e^r-1)\right)$$

   n'est pas égal à

$$\mathcal{M}_{N(t+s)-N(s)}(r)\,M_{N(s)}(r) = \mathcal{M}_\Theta\left(t(e^r-1)\right)\mathcal{M}_\Theta\left(s(e^r-1)\right)$$

   En raison de (10.11), on déduit que les accroissements sur deux intervalles disjoints sont dépendants (et non indépendants).

2. Preuve no2 (fonction de masse de probabilité. Pour simplifier la présentation, on suppose que Θ est continue.
   On commence par montrer que les accroissements sont stationnaires. On a

$$\begin{aligned}P(N(t+s)-N(s) &= n) = int_0^\infty P(N(t+s)-N(s)=n \mid \Theta=\theta)g_\Theta(\theta)d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{(\theta t)^n e^{-\theta t}}{n!} g_\Theta(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

   On constate que $P(N(t+s)-N(s)=n)$ dépend seulement de la longueur t de l'intervalle $(s, s+t]$.
   On montre ensuite que les accroissements ne sont pas indépendants. On a

$$\begin{aligned}P(N(t+s)-N(s) &= n \mid N(s)=m) \\ &= \int_0^\infty P(N(t+s)-N(s)=n \mid N(s)=m, \Theta=\theta)g_{\Theta|N(s)=m}(\theta \mid m)d\theta,\end{aligned}$$

pour $m, n \in \mathbb{N}$.
Pour identifier $g_{\Theta|N(s)=m}(\theta \mid m)$, on débute avec

$$\begin{aligned} G_{\Theta|N(s)=m}(x \mid m) &= P(\Theta \leq x \mid N(s)=m) \\ &= \frac{P(\Theta \leq x, N(s)=m)}{P(N(s)=m)} \\ &= \frac{\int_0^\infty P(\Theta \leq x, N(s)=m \mid \Theta=\theta) g_\Theta(\theta) d\theta}{P(N(s)=m)} \\ &= \frac{\int_0^x P(N(s)=m \mid \Theta=\theta) g_\Theta(\theta) d\theta}{P(N(s)=m)} \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} G_{\Theta|N(s)=m}(x \mid m) &= \frac{\int_0^x \frac{(\theta s)^m e^{-\theta s}}{m!} g_\Theta(\theta) d\theta}{\int_0^\infty \frac{(\theta s)^m e^{-\theta s}}{m!} g_\Theta(\theta) d\theta} \\ &= \frac{\int_0^x (\theta s)^m e^{-\theta s} g_\Theta(\theta) d\theta}{\int_0^\infty (\theta s)^m e^{-\theta s} g_\Theta(\theta) d\theta} \\ &= \frac{\int_0^x \theta^m e^{-\theta s} g_\Theta(\theta) d\theta}{\int_0^\infty \theta^m e^{-\theta s} g_\Theta(\theta) d\theta}. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$g_{\Theta|N(s)}(\theta \mid m) = \frac{\theta^m e^{-\theta s} g_\Theta(\theta)}{\int_0^\infty \theta^m e^{-\theta s} g_\Theta(\theta) d\theta},$$

pour $\theta \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}$.
Ainsi, on a

$$\begin{aligned} P(N(t+s)-N(s) &= n \mid N(s)=m) \\ &= \int_0^\infty P(N(t+s)-N(s)=n \mid N(s)=m, \Theta=\theta) g_{\Theta|N(s)=m}(\theta \mid m) d\theta \\ &= \int_0^\infty P(N(t+s)-N(s)=n \mid N(s)=m, \Theta=\theta) \frac{\theta^m e^{-\theta s} g_\Theta(\theta)}{\int_0^\infty \theta^m e^{-\theta s} g_\Theta(\theta) d\theta} d\theta. \end{aligned}$$

On déduit que

$$P(N(t+s)-N(s)=n \mid N(s)=m) \neq P(N(t+s)-N(s)=n),$$

pour $m, n \in \mathbb{N}$, et que la probabilité dépend de m, démontrant le résultat voulu.

■

Exemple 10.22 *Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson mixte où $\Theta \sim Gamma(\alpha, \beta), \alpha \in \mathbb{R}^+$. Trouver la distribution du nombre d'événements dans un intervalle de longueur t c.-à-d.de $N(t)$. On peut recourir à deux approches pour résoudre cet exemple.*

1. *Selon une approche utilisant la fgm, on a*

$$\begin{aligned} M_\Theta(t(e^r-1)) &= \left(\frac{\beta}{\beta - t(e^r-1)}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{1-\frac{t}{\beta}(e^r-1)}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)e^r}\right)^\alpha \end{aligned}$$

ce qui correspond à la fgm de la loi binomiale négative avec les paramètres α et $q = \frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}$.

2. *En se basant sur une approche avec la fonction de masses de probabilité, on a*

$$\begin{aligned}
\Pr(N(t)=n) &= \int_0^\infty P(N(t)=n \mid \Theta=\theta) g_\Theta(\theta) d\theta \\
&= \int_0^\infty \frac{(\theta t)^n e^{-\theta t}}{n!} \times \frac{\beta^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)} d\theta \\
&= \frac{t^n \beta^\alpha}{n!\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha+n)}{(\beta+t)^{\alpha+n}} \int_0^\infty \frac{(\beta+t)^{\alpha+n}\theta^{(\alpha+n)-1} e^{-(\beta+t)\theta}}{\Gamma(\alpha+n)} d\theta,
\end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned}
\Pr(N(t)=n) &= \frac{t^n \beta^\alpha}{n!\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha+n)}{(\beta+t)^{\alpha+n}} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^\alpha \left(\frac{t}{\beta+t}\right)^n \\
&= \binom{\alpha+n-1}{n} \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^\alpha \left(\frac{t}{\beta+t}\right)^n.
\end{aligned}$$

On déduit que le nombre événement $N(t)$ dans intervalle longueur t obéit à une loi binomiale négative

$$N(t) \sim BinNég.(r=\alpha, q=\frac{\beta}{\beta+t}).$$

□

La simulation d'un parcours d'un processus de Poisson mixte $\underline{N}$ est fort simple. Il suffit de simuler une réalisation $\Theta^{(j)}$ de Θ. Ensuite, on simule le $j$ième parcours de $\left(\underline{N}|\Theta=\Theta^{(j)}\right)$ en utilisant l'algorithme 10.7 ou l'algorithme 10.11 pour un processus de Poisson avec une intensité $\lambda = \Theta^{(j)}$.

Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson mixte où la v.a. strictement positive Θ est la v.a. mélange représentant l'intensité (aléatoire) du processus. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$. On définit les temps d'occurrence des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$.

On observe que la fonction de survie de W_i est

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{W_i}(t) &= E_\Theta\left[\overline{F}_{W_i|\Theta}(t)\right] \\
&= E\left[e^{-\Theta t}\right] \\
&= \mathcal{L}_\Theta(t),\ t \geq 0 \text{ et } i = 1, 2, ..., n,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}_\Theta$ est la TLS de la v.a. Θ.

L'expression de la fonction de survie conjointe du vecteur de v.a. $(W_1, W_2, ..., W_n)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{W_1,W_2,...,W_n}(t_1, t_2, ..., t_n) &= E_\Theta\left[\overline{F}_{W_1,W_2,...,W_n|\Theta}(t_1, t_2, ..., t_n)\right] \\
&= E_\Theta\left[\overline{F}_{W_1|\Theta}(t) \times \overline{F}_{W_2|\Theta}(t) \times ... \times \overline{F}_{W_n|\Theta}(t)\right] \\
&= E\left[e^{-\Theta(t_1+t_2+...+t_n)}\right] \\
&= \mathcal{L}_\Theta(t_1+t_2+...+t_n),\ t_1, ..., t_n \geq 0.
\end{aligned}$$

Clairement, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{W_1,W_2,...,W_n}(t_1, t_2, ..., t_n) &= \mathcal{L}_\Theta(t_1+t_2+...+t_n) \\
&\neq \mathcal{L}_{\Theta_1}(t_1) \times \mathcal{L}_{\Theta_2}(t_2) \times ... \times \mathcal{L}_{\Theta_n}(t_n) \\
&= \overline{F}_{W_1}(t_1) \times \overline{F}_{W_2}(t_2) \times ... \times \overline{F}_{W_n}(t_n).
\end{aligned}$$

Donc, les v.a. W_1, W_2, ..., W_n représentant les temps inter-sinistres ne sont pas indépendantes. Toutefois, elles sont identiquement distribuées. En fait, elles sont échangeables.

10.5 Processus de renouvellement

Le processus de renouvellement est un processus de dénombrement (ou de comptage).

Souvent, il est considéré comme une extension (différente par rapport aux processus de Poisson mixte et non-homogène) du processus de Poisson.

Pour le processus de renouvellement, on propose une alternative au choix de la distribution pour les temps inter-sinistres.

Soit le processus de renouvellement $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ pour le nombre de sinistres, avec $N(0) = 0$. La v.a. W_i est le temps écoulé entre l'arrivée du $(i-1)$e sinistre et du ie sinistre pour $i = 2, 3, ...$ et la v.a. W_1 est le temps écoulé entre 0 et le 1er sinistre.

Les v.a. W_1, W_2, ... sont iid avec $W_k \sim W$. De plus, on définit les v.a. d'occurrence des sinistres par $T_1 = W_1$ et $T_k = \sum_{j=1}^{k} W_j$, pour $k = 2, 3, ...$. Par convention, on définit $T_0 = 0$.

Pour $t > 0$, la valeur de $N(t) = N(0, t]$ est obtenue avec

$$\begin{aligned} N(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} \\ &= \sup\{k \in \mathbb{N}, T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0. \end{aligned}$$

On a relation fondamentale suivante en regard d'évènements :

$$\{N(t) \geq k\} = \{T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}. \tag{10.12}$$

On fixe $t > 0$. Avec (10.12), on a

$$\Pr(N(t) \geq k) = \Pr(T_k \leq t), \text{ pour } t > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}.$$

Alors, la fonction de masse de probabilité de $N(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \Pr(N(t) = k) &= \Pr(\# \text{ de sinistres sur } (0, t] \text{ soit égal à } k) \\ &= \Pr(N(t) \geq k) - \Pr(N(t) \geq k+1) \\ &= F_{T_k}(t) - F_{T_{k+1}}(t), \end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{N}$, avec $F_{T_0}(t) = 1$, pour tout $t > 0$.

Pour calculer les valeurs de $\Pr(N(t) = k)$, il faut être en mesure d'évaluer $F_{T_k}(t)$, pour $k \in \mathbb{N}^+$. Dans le prochain exemple, on traite le cas où l'on l'on peut déterminer les valeurs exactes de F_{T_k}.

Exemple 10.23 *Soit $W \sim Gamma(\alpha, \beta)$ avec $E[W] = \frac{\alpha}{\beta}$ et $F_W(x) = H(x; \alpha, \beta)$. On sait que*

$$F_{T_k}(t) = H(t; \kappa\alpha, \beta), \text{ pour } k \in \mathbb{N}^+ \text{ et } t \geq 0.$$

Alors, l'expression de $\Pr(N(t) = k)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \Pr(N(t) = k) &= \Pr(\# \text{ de sinistres sur } (0, t] \text{ soit égal à } k) \\ &= F_{T_k}(t) - F_{T_{k+1}}(t) \\ &= H(t; k\alpha, \beta) - H(t; (k+1)\alpha, \beta), \end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{N}$, avec $F_{T_0}(t) = 1$, et pour $t > 0$. □

Si on ne peut pas calculer les valeurs exactes de F_{T_k}, on a recours à des approximations, tels que les méthodes de simulation Monte Carlo ou les méthodes numériques (De Pril ou FTT) présentées au chapitre 11.

L'expression de l'espérance de $N(t)$, c.-à-d., le nombre espéré de sinistres sur l'intervalle de temps $(0,t]$, est donnée par

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} E\left[1_{\{T_k \leq t\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} F_{T_k}(t),$$

pour $t > 0$.

La fonction $m(t)$ est appelée la fonction de renouvellement.

Le processus de Poisson est un cas particulier de processus de renouvellement.

Quelle est la forme de $m(t)$ en fonction de t ? Seul le processus de Poisson possède une fonction $m(t)$ linéaire en fonction de t, c.-à-d. $m(t) = \lambda t$, $t \geq 0$.

Exemple 10.24 *Soit $W \sim Gamma(\alpha, \beta)$ avec $E[W] = \frac{\alpha}{\beta}$ et $F_W(x) = H(x; \alpha, \beta)$. On a évalué (numériquement) les valeurs de $m(t)$, pour les 3 hypothèses suivantes :*

- *H1 : $\alpha = \beta = 1$ (processus de Poisson) ;*
- *H2 : $\alpha = \beta = 0.05$ (processus de renouvellement gamma) ;*
- *H3 : $\alpha = \beta = 5$ (processus de renouvellement gamma).*

Les valeurs sont reproduites dans sur les graphiques des illustrations 10.3, 10.4 et 10.5. On observe que $m(t)$ devient linéaire quand t devient grand, pour les hypothèses H2 et H3. En fait, ce résultat est démontrable , pour toute loi de W. De plus, on obtient les valeurs suivantes pour $m(10)$:

H	*1*	*2*	*3*
$m(10)$	*10*	*18.51231*	*9.6*

Toutes les valeurs de l'exemple ont été calculées avec l'approximation suivante :

$$m(t) = E[N(t)] \simeq \sum_{k=1}^{k_0} F_{T_k}(t),$$

avec $k_0 = 2000$. □

Pourquoi utilise-t-on les processus de renouvellement ? Soit $h_W(t) = \frac{f_W(t)}{\overline{F}_W(t)}$ le taux de panne, le taux d'échec, taux d'intensité, etc. Pour $W \sim Exp(\lambda)$, on déduit que le taux de panne est constant avec le temps avec

$$h_W(t) = \frac{f_W(t)}{\overline{F}_W(t)} = \lambda,\ t \geq 0.$$

Peu importe le temps écoulé depuis le dernier sinistre, le prochain sinistre surviendra avec une intensité constante (conséquence de la propriété de sans mémoire de la loi exponentielle).

Autrement, $h_W(t)$ est soit une fonction croissante, soit une fonction décroissante avec le temps t.

Dans un contexte de la modélisation de l'avènement des tremblements de terres, on a observé que $h_W(t)$ est une fonction croissante.

10.6 Processus agrégés

En actuariat, les processus agrégés sont souvent utilisés pour décrire l'évolution dans le temps du montant total des sinistres.

Soit $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ le processus agrégé où

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} B_k, N(t) > 0 \\ 0, N(t) = 0 \end{cases}.$$

Les montants de sinistres $\{B_k, k = 1, 2, ...\}$ forment une suite de v.a. positives iid et aussi independentes du processus de dénombrement des sinistres $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$.

Illustration 10.3 – Fonction de renouvellement $m(t)$ pour un processus de renouvellement avec $W \sim Gamma(1,1)$ (exemple 10.24).

Illustration 10.4 – Fonction de renouvellement $m(t)$ pour un processus de renouvellement avec $W \sim Gamma(0.05, 0.05)$ (exemple 10.24).

Illustration 10.5 – Fonction de renouvellement $m(t)$ pour un processus de renouvellement avec $W \sim Gamma(5, 5)$ (exemple 10.24).

Le processus de comptage des sinistres peut être un processus de Poisson homogène, non-homogène, ou mixte.

La fonction de répartition du montant de sinistre (v.a. B) est notée par F_B. S'ils existent, les moments de la v.a. B by

$$\mu_j = E\left[B^j\right] \qquad (j = 1, 2, ...)$$

and the m.g.f. of B by

$$M_B(r) = E\left[e^{rB}\right].$$

L'espérance et la fgm de $S(t)$ sont donnés par

$$E[S(t)] = E[N(t)]\, E[B]$$

et

$$\begin{aligned} M_{S(t)}(r) &= E\left[e^{S(t)r}\right] \\ &= M_{N(t)}(\ln M_B(r)) \\ &= P_{N(t)}(M_B(r)) \end{aligned}$$

La fonction de répartition de $S(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} F_{S(t)}(y) &= \Pr(S(t) \leq y) \\ &= \Pr(N(t) = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(t) = k) \Pr(B_1 + ... + B_k \leq y) \\ &= \Pr(N(t) = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(t) = k) F_B^{*k}(y). \end{aligned}$$

Notation 10.25 *Dans le cas où $\underline{N}$ est un processus de Poisson alors le processus du montant total des sinistres $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ est appelé un processus de Poisson composé. Les propriétés sont*

$$\begin{aligned} S(t) &\sim PoisComp(\lambda t; F_B) \\ S(s, s+t] &= S(s+t) - S(s) \sim PoisComp(\lambda t; F_B) \end{aligned}$$

pour $s \geq 0$ et $t > 0$.

Notation 10.26 *Dans le cas où $\underline{N}$ est un processus de Poisson mixte alors le processus du montant total des sinistres $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ est appelé un processus de Poisson mixte composé. Les propriétés sont*

$$\begin{aligned} S(t) &\sim PoisMixteComp(\lambda t; F_B) \\ S(s, s+t] &= S(s+t) - S(s) \sim PoisMixteComp(\lambda t; F_B) \end{aligned}$$

pour $s \geq 0$ et $t > 0$. En particulier, si la v.a. mélange Θ, alors $\underline{S}$ est un processus binomiale négative composée et $S(t)$ (et $S(s, s+t]$) obéit à une loi binomiale négative composée.

Si la loi du montant d'un sinistre est discrète, on a recours à l'algorithme de Panjer ou la FFT pour évaluer $F_{S(t)}$ ou $F_{S(s,s+t]}$ (voir le chapitre 11).

Si la v.a. B est continue ou mixte, on a recours aux méthodes de discrétisation avant d'appliquer l'algorithme de Panjer ou la FFT (voir le chapitre 11). Dans ce cas, on obtient une approximation de la vraie valeur de la fonction de répartition de S. On peut aussi avaoir recours aux méthodes fondées sur la simulation stochastique.

Il est aussi mentionner que l'on peut obtenir l'expression exacte de $F_{S(t)}$.

Exemple 10.27 *Soit $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ le processus agrégé où*

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} B_k, N(t) > 0 \\ 0, N(t) = 0 \end{cases}.$$

Les montants de sinistres $\{B_k, k = 1, 2, ...\}$ *forment une suite de v.a. positives iid et aussi independentes du processus de de dénombrement* $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$. *De plus,* $B \sim Gamma(\alpha, \beta)$. *On définit*

$$S(s, s+t] = S(t+s) - S(s) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(s,s+t]} B_k & , N(s, s+t] > 0 \\ 0, & , N(s, s+t] = 0 \end{cases}.$$

Alors, on déduit

$$F_{S(s,s+t]}(x) = \Pr(N(s, s+t] = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(s, s+t] = k) H(x; \alpha k, \beta), \text{ pour } x \geq 0.$$

Les valeurs de $\Pr(N(s, s+t] = k)$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) diffèrent selon le choix du processus pour* $\underline{N}$. □

10.7 Valeur présente et processus agrégés

10.7.1 Valeur présente et rente certaine

Soit δ la force d'intérêt, aussi appelé taux instantanné d'intérêt.

La valeur présente au temps 0 de 1$ versé au temps t est donnée par

$$v^t = e^{-\delta t}$$

pour $t \geq 0$.

On considère une rente continue avec un taux de rente g. Cela signifie que le versement entre t et $t + dt$ est gdt. La valeur présente au temps 0 de cette rente versée depuis le temps 0 jusqu'au temps n est donnée par

$$g\overline{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n v^s g ds = g\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}.$$

Si $n \to \infty$, on obtient

$$g\overline{a}_{\overline{\infty|}} = \int_0^\infty v^s g ds = g\frac{1}{\delta},$$

que l'on appelle rente perpétuité. Interprétation : Pour la rente perpétuité, le paiement commence à 0 et il est versé à perpétuité.

10.7.2 Valeur présente et rente sur la vie

On considère un contrat de rente de temporaire n années où la rente est versée à un taux continue g. La durée de vie de l'individu est représentée par la v.a. continue T avec fonction de masses de probabilité f_T, .fonction de répartition F_T et fonction de survie $\overline{F}_T$. La valeur présente des coûts pour le contrat est définie par la v.a. Z avec

$$Z = \int_0^n g v^t 1_{\{T>t\}} dt.$$

L'espérance de Z est donnée par

$$\begin{aligned} E[Z] &= E\left[\int_0^n g v^t 1_{\{T>t\}} dt\right] \\ &= \int_0^n g v^t E\left[1_{\{T>t\}}\right] dt \\ &= \int_0^n g v^t \overline{F}_T(t) dt \\ &= g\overline{a}_{x:\overline{n|}}. \end{aligned}$$

Si $T \sim Exp(\beta)$ avec

$$\overline{F}_T(t) = e^{-\beta t}$$

on a

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^n gv^t \overline{F}_T(t)\,dt \\ &= \int_0^n gv^t e^{-\beta t} dt \\ &= \frac{1-e^{-(\beta+\delta)n}}{\beta+\delta}. \end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$, le contrat devient un contrat de rente vie entière (viagère) avec

$$Z = \int_0^\infty gv^t 1_{\{T>t\}} dt.$$

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^\infty gv^t \overline{F}_T(t)\,dt \\ &= g\overline{a}_x \end{aligned}$$

et, lorsque $T \sim Exp(\beta)$,

$$\begin{aligned} E[Z] &= g\overline{a}_x \\ &= \int_0^\infty gv^t e^{-\beta t} dt \\ &= \frac{1}{\beta+\delta}. \end{aligned}$$

Interprétration. Pour le contrat de rente vie entière, le paiement de la rente débute au temps 0 et cesse au décès.

10.7.3 Valeur présente et processus Poisson composée

On considère un processus Poisson composée $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ avec

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} B_k, & , N(t) > 0 \\ 0, & , N(t) = 0 \end{cases},$$

avec les hypothèses habituelles et avec $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ qui est un processus de Poisson avec paramètre λ. Cela signifie que les temps écoulés $W_1, W_2, ...$ sont des v.a. iid de loi exponentielle avec espérance $\frac{1}{\lambda}$.

On examine le comportement du processus $\underline{Z} = \{Z(t), t \geq 0\}$ avec

$$\begin{aligned} Z(t) &= \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta(W_1+...+W_k)} B_k, & , N(t) > 0 \\ 0, & , N(t) = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k} B_k, & , N(t) > 0 \\ 0, & , N(t) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

L'expression de l'espérance de $Z(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E[E[Z(t)|N(t)]] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(t)=j)\, E[Z(t)|N(t)=j] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(t)=j)\, E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta(T_k)} B_k | N(t)=j\right]. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k} B_k | N(t)=j\right] &= \sum_{k=1}^{j} E\left[e^{-\delta T_k} B_k | N(t)=j\right] \\ &= \sum_{k=1}^{j} E[B_k]\, E\left[e^{-\delta T_k} | N(t)=j\right] \end{aligned}$$

en raison de l'indépendance entre les sinistres et leurs avènements. Ensuite, on constate

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k} B_k | N(t)=j\right] &= E[B] \sum_{k=1}^{j} E\left[e^{-\delta T_k} | N(t)=j\right] \\ &= E[B] \sum_{k=1}^{j} \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)}{\delta t} \\ &= E[B]\, j \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)}{\delta t} \end{aligned}$$

car, selon la proposition 10.10, $(T_k|N(t)=j) \sim Unif(0,t)$ (c.-à-d. la loi conditionnelle de T_k sachant $N(t)=j$ est une loi uniforme $(0,t)$), pour $k=1,2,...,j$.

On poursuit avec

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(t)=j)\, E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta(T_k)} B_k | N(t)=j\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(t)=j)\, E[B]\, j \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)}{\delta t} \\ &= E[B] \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)}{\delta t} \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(t)=j) \times j \\ &= E[B] \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)}{\delta t} \lambda t = E[B] \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)}{\delta} \lambda, \text{ pour } t>0. \end{aligned}$$

On déduit que

$$E[Z(t)] = \lambda E[B] \frac{1-e^{-\delta t}}{\delta} = \frac{E[B]}{E[W]} \overline{a}_{\overline{t|}}.$$

De plus, lorsque $t \to \infty$, on a

$$E[Z(\infty)] = \lambda E[B] \frac{1}{\delta} = \frac{E[B]}{E[W]} \overline{a}_{\overline{\infty|}}.$$

Le paramètre du processus de Poisson est crucial. Si λ est petit (grand), cela siginifie que le temps écoulé en moyenne entre deux sinistres est élevé (faible), il en résulte que les sinistres surviennent de façon peu (très) fréquente. Il s'en suit que l'espérance de $Z(t)$ et $Z(\infty)$ sera peu (très) élevée. Pour $Z(\infty)$, la protection

commence au temps 0, les paiements sont faits lorsque les sinistres surviennent. La protection est à perpétuité.

Appliquation : réassurance, réserve en assurance IARD, garanties, etc.

10.8 Notes bibliographiques

Pour une introduction aux processus de Poisson et ses variantes, on suggère, p. ex., Ross [Ross, 2014b] et Mikosch [Mikosch, 2009].

Pour des applications de ces processus en actuariat, voir, p. ex., [Albrecher et al., 2017].

Code LaTeX : `chapitre_processus_poisson.tex`

Chapitre 11

Méthodes récursives d'agrégation

11.1 Introduction

En actuariat, en gestion quantitative des risques et en probabilités appliquées, on est confronté à évaluer la distribution d'une somme de v.a., indépendantes ou non. La mutualisation des risques mène l'actuaire à évaluer la distribution des coûts pour un portefeuille. Au chapitre 5, on a présenté quelques méthodes d'approximation fondées sur les moments, alors qu'au chapitre 2 on a introduit les méthodes de simulation stochastique qui peuvent aussi servir pour la distribution de sommes de v.a. Dans le présent chapitre, on s'intéresse à des méthodes récursives d'agrégation offrant ainsi un complément aux notions étudiées aux chapitres 5 et 2.

Le chapitre est construit comme suit. On présente le produit de convolution pour la somme de v.a. discrètes. On présente un algorithme récursif pour le calcul de la fonction de masse de probabilité pour la somme de v.a. discrètes i.i.d. On s'intéresse ensuite à l'algorithme de Panjer pour déterminer la fonction de masse de probabilité d'une v.a. définie selon une loi composée qui satisfait certaines contraintes. On expose la méthode d'agrégation fondée sur la transformée de Fourier rapide. Par la suite, on explique comment appliquer ces méthodes dans un contexte actuariel. Dans la plupart des cas, ces applications requièrent que la distribution du montant des sinistres soit discrétisée. On présente des méthodes de discrétisation permettant d'approximer des distributions continues par des distributions avec support arithmétique. Enfin, on aborde la classe de distributions mélange d'Erlang. On présente aussi des exemples pour illustrer les méthodes étudiées dans le chapitre.

11.2 Motivations

Soit les v.a. indépendantes continues positives X_1 et X_2.
On définit $S = X_1 + X_2$.
On sait que

$$f_S(x) = \int_0^x f_{X_1}(y) f_{X_2}(x-y)dy = f_{X_1} * f_{X_2}(x). \tag{11.1}$$

Comme on l'a vu, l'opération en (11.1) est appelée "produit de convolution".

Exemple :

— $X_1 \sim Gamma(2, 0.2)$
— $X_2 \sim Gamma(3, 0.2)$
— $\implies S \sim Gamma(5, 0.2)$

Observations :

— En général, on n'identifie pas de forme fermée pour f_S.
— Le degré de difficulté augmente avec le nombre de v.a.
— La situation se complique davantage pour une somme aléatoire de v.a. indépendantes.

Illustration 11.1 – Courbe de $f_{X_1}(x)$.

Illustration 11.2 – Courbe de $f_{X_2}(x)$.

Illustration 11.3 – Courbe de $f_S(x)$.

Solution proposée dans ce chapitre : utiliser des méthodes numériques récursives.

La solution repose sur la discrétisation de la distribution de v.a. continues.

Soit les v.a. indépendantes discrètes positives X_1 et X_2 définies sur le support arithmétique $0h, 1h, 2h, ...$ où $h > 0$ est un pas de discrétisation.

Fonction de masse de probabilité :

$$f_{X_i}(kh) = \Pr(X_i = kh),$$

pour $i = 1, 2$.

On définit $S = X_1 + X_2$.

On sait que

$$f_S(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{X_1}(jh) f_{X_2}((k-j)h)) = f_{X_1} * f_{X_2}(kh), \tag{11.2}$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

On vu que l'opération en (11.2) est aussi appelée "produit de convolution".

Exemple :

— $X_1 \sim NBinom(2, 1/6)$

— $X_2 \sim NBinom(3, 1/6)$

— $\implies S \sim NBinom(5, 1/6)$

Exemple :

— $X_1 \sim NBinom(2, 1/6)$

— $X_2 \sim Poisson(10)$

— $\implies S \sim LoiDiscrte$ (sans nom)

11.3 Nombres complexes

Les nombres réels sont une généralisation des nombres réels. En théorie des probabilités, ils sont utilisés pour définir les fonctions génératrices de probabilité et les fonctions caractéristiques. Ils permettent de résoudre les anomalies des nombres réels.

Illustration 11.4 – Valeurs de la fonction de masse de probabilité de X_1.

Illustration 11.5 – Valeurs de la fonction de masse de probabilité de X_2.

Illustration 11.6 – Valeurs de la fonction de masse de probabilité de S.

Illustration 11.7 – Valeurs de la fonction de masse de probabilité de X_1.

Illustration 11.8 – Valeurs de la fonction de masse de probabilité de X_2.

Illustration 11.9 – Valeurs de la fonction de masse de probabilité de S.

Définition 11.1 ***Représentation sous la forme cartésienne.*** *Le nombre complexe $z = x + yi$ peut être représenté sous sa forme cartésienne où*

1. *$i = \sqrt{-1}$ est l'unité imaginaire,*
2. *x désigne la partie réelle de z (notée $\mathrm{Re}\,(\mathrm{z})$), et*
3. *y désigne la partie imaginaire (notée $\mathrm{Im}\,(\mathrm{z})$).*

Définition 11.2 ***Représentation graphique (plan complexe).*** *Les nombres complexes peuvent être représentés sur un plan complexe) où l'axe horizontal (l'abscisse, l'axe des "x") correspond à la partie réelle de z et l'axe vertical (l'ordonnée, l'axe des "y") correspond à sa partie imaginaire.*

Propriété 11.3 ***Propriétés de base.*** *Soit les nombres complexes*

$$z_1 = x_1 + y_1 i \text{ et } z_2 = x_2 + y_2 i.$$

Les nombres complexes satisfont les propriétés suivantes :

1. *règle d'addition : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i$;*
2. *règle de multiplication : $z_1 \times z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i$;*
3. *règle de soustraction : $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\, i$.*

Définition 11.4 ***Représentation sous la forme polaire.*** *Le nombre z peut être représenté sous sa forme polaire*

$$z = r\,(\cos\theta + i \sin\theta)\,,$$

où

1. *$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ = module de z ;*
2. *θ correspond à l'argument de z, soit l'angle du vecteur z dans le plan complexe.*

Définition 11.5 ***Conjugé d'un nombre complexe.*** *Soit un nombre complexe*

$$z = x + yi.$$

Alors, le conjugé complexe de z est défini par

$$\overline{z} = \overline{x + yi} = x - yi.$$

Propriété 11.6 ***Conjugés et opérations.*** *Soit les nombres complexes*

$$z_1 = x_1 + y_1 i \text{ et } z_2 = x_2 + y_2 i.$$

Alors, on a

1. *$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;*
2. *$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$;*
3. *$\overline{(z_1^n)} = (\overline{z_1})^n$.*

Propriété 11.7 ***Division.*** *Soit les nombres complexes*

$$z_1 = x_1 + y_1 i \text{ et } z_2 = x_2 + y_2 i.$$

Alors, la division de z_1 (numérateur) par z_2 est obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugé complexe du dénominateur, comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \times \overline{z_2}}{z_2 \times \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + y_1 i) \times (x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i) \times (x_2 - y_2 i)} \\
&= \frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i}{x_2^2 - y_2^2} \\
&= \frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2)}{x_2^2 - y_2^2} + \frac{(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 - y_2^2} i.
\end{aligned}$$

Définition 11.8 ***Formule d'Euler.*** *Selon la formule d'Euler, la fonction exponentielle est donnée par*

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Alors, la représentation sous forme polaire du nombre complexe z est

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta} = r \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Propriété 11.9 ***Multiplication de nombres complexes sous forme polaire.*** *Soit les nombres complexes*

$$z_1 = r_1\mathrm{e}^{i\theta_1} = r_1 \times (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \text{ et } z_2 = r_2\mathrm{e}^{i\theta_2} = r_2 \times (\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)).$$

Alors, on a

$$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 \times (\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)\, i).$$

Propriété 11.10 ***Formule de DeMoivre.*** *Soit le nombre complexe z représenté sous sa forme polaire*

$$z = r \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Alors, on a

$$z^n = r^n \times (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Propriété 11.11 ***Cercle.*** *En particulier, l'ensemble*

$$A = \{z \in \mathbb{C},\ \}\,|z| \leq 1$$

correspond au cercle (dans le plan complexe) de rayon $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ et dont l'origine est le point $(0, 0)$. Cet ensemble comprend le segment $[0, 1]$ sur l'axe de la partie des réelles.

11.4 Fonction génératrice de probabilités multivariée

11.4.1 Définition

Soit un vecteur de v.a. discrètes $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ définie sur l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$. La fonction de masse de probabilité conjointe est notée par

$$f_{\underline{X}}(k) = \Pr(X_1 = k_1, ..., X_n = k_n),\ (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Définition 11.12 *La fonction génératrice de probabilités conjointe de $\underline{X}$ est définie par*

$$\mathcal{P}_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} ... \sum_{k_n=0}^{\infty} f_{\underline{X}}(k_1, ..., k_n)\, t_1^{k_1} ... t_n^{k_n}$$

pour $(t_1, ..., t_n) \in [0, 1]^n$.

11.4.2 Propriétés

Propriété 11.13 $\mathcal{P}_{\underline{X}}(0, ..., 0) = f_{\underline{X}}(0, ..., 0)$ *et* $\mathcal{P}_{\underline{X}}(1, ..., 1) = 1$.

Propriété 11.14 $\mathcal{P}_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n)\big|_{t_j=1, j=1,...,n, j\neq i} = \mathcal{P}_{X_i}(t_i)$.

Propriété 11.15 *La valeur de $f_{\underline{X}}(k_1, ..., k_n)$ peut être calculée à partir de $\mathcal{P}_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n)$ à l'aide de*

$$f_{\underline{X}}(k_1, ..., k_n) = \frac{1}{k_1!} ... \frac{1}{k_n!} \frac{\partial^{k_1+...+k_n}}{\partial t^{k_1} ... \partial t^{k_n}} \mathcal{P}_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n)\Big|_{t_1=...=t_n=0}.$$

Propriété 11.16 *Soit la v.a.* $S = X_1 + ... + X_n$. *Alors, on a*

$$\mathcal{P}_S(t) = \mathcal{P}_{\underline{X}}(t, ..., t).$$

11.4.3 Exemples

Exemple 11.17 *Soit le couple de v.a.* (X_1, X_2) *avec*

$$\mathcal{P}_{\underline{X}}(t_1, t_2) = (0.5 + 0.3t_1 + 0.05t_2 + 0.15t_1t_2).$$

De $\mathcal{P}_{\underline{X}}$, *on obtient*

$$\mathcal{P}_{X_1}(t_1) = (0.55 + 0.45t_1) \text{ et } \mathcal{P}_{X_2}(t_2) = (0.6 + 0.4t_2)$$

Alors, on conclut que (X_1, X_2) *est un coup de v.a. discrète définie sur* $\{0, 1\}^2$ *de telle sorte que*

$$X_1 \sim Bern(0.45) \text{ et } X_2 \sim Bern(0.4)$$

et

k_1	0	0	1	1
k_2	0	1	0	1
$f_{\underline{X}}(k_1, k_2)$	0.5	0.3	0.05	0.15

Avec

$$\mathcal{P}_S(t) = \mathcal{P}_{\underline{X}}(t, t) = \left(0.5 + 0.3t + 0.05t + 0.15t^2\right),$$

on déduit que S *est une v.a. discrète définie sur* $\{0, 1, 2\}$ *avec*

k	0	1	2
$f_S(k)$	0.5	0.35	0.15

Exemple 11.18 *Soit le couple de v.a.* (X_1, X_2) *avec*

$$\mathcal{P}_{\underline{X}}(t_1, t_2) = \mathrm{e}^{(\lambda_1 - \gamma_0)(t_1 - 1)}\mathrm{e}^{(\lambda_2 - \gamma_0)(t_2 - 1)}\mathrm{e}^{\gamma_0(t_1t_2 - 1)}$$

qui correspond à la fgp de la loi de Poisson bivariée de Teicher.

11.5 Somme de v.a. discrètes

11.5.1 Somme de n v.a. discrètes indépendantes

Soit n v.a. indépendantes discrètes définies sur $\{0, 1h, 2h, ...\}$. On veut évaluer les valeurs de la fonction de masse de probabilité f_{S_n} de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. En 1.19.2, on explique la procédure pour calculer les valeurs de f_{S_2}. On a recours à une procédure récursive pour déterminer les valeurs de f_{S_n} pour $n = 3, 4, ...$ qui requiert de connaître les valeurs de $f_{S_{n-1}}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} f_{S_n}(kh) &= \sum_{j=0}^{k} \Pr(S_{n-1} = (k-j)h) \Pr(X_n = jh) \\ &= \sum_{j=0}^{k} f_{S_{n-1}}((k-j)h) f_{X_n}(jh). \end{aligned} \tag{11.3}$$

Exemple 11.19 *Soit les v.a. indépendantes discrètes* X_1, ..., X_n *avec*

$$X_i \sim BN(2, 1 - 0.01 \times i) \quad (i = 1, 2, ..., 10)$$

et la v.a. $S_{10} = \sum_{i=1}^{10} X_i$. *À l'aide de la relation récursive (11.3) que l'on applique avec* $h = 1$, *on obtient les*

valeurs suivantes de $f_{S_{10}}(k)$*, pour* $k = 0, 1, ..., 11$ *:*

k	0	1	2	3	4	5
$f_{S_{10}}(k)$	0.319610	0.351571	0.205669	0.085080	0.027928	0.007742
k	6	7	8	9	10	11
$f_{S_{10}}(k)$	0.001884	0.000413	0.000083	0.000016	0.000003	0.000000

Avec ces valeurs, on obtient $E[S_{10}] = 1.183605$ *et* $\mathrm{Var}(S_{10}) = 1.274424$ *que l'on vérifie aisément.* □

11.5.2 Somme de n v.a. discrètes i.i.d.

Soit les v.a. $X_1, ..., X_n$ discrètes i.i.d. définies sur $\mathbb{N}$ avec

$$f_{X_i} = f_X \text{ et } \mathcal{P}_{X_i} = \mathcal{P}_X,\ i = 1, 2, ..., n.$$

On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$ avec

$$f_{S_n}(k) = f_{X_1+...+X_n}(k) = f_X^{*n}(k)$$

où f_X^{*n} est le n-ième produit de convolution de f_X avec elle-même.

La fgp de la v.a. S_n est

$$\mathcal{P}_{S_n}(t) = E\left[t^{S_n}\right] = \mathcal{P}_X(t)^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_{S_n}(k) \times t^k.$$

Exemple 11.20 *Soit la v.a.* $X \in \{0, 1, 2\}$ *avec*

$$\mathcal{P}_X(t) = \left(0.3 + 0.5t + 0.2t^2\right).$$

On définit $S_5 = X_1 + ... + X_5$ *(une somme de v.a. i.i.d. avec* $X_i \sim X$*,* $i = 1, 2, ..., 5$*) avec*

$$\mathcal{P}_{S_5}(t) = \mathcal{P}_X(t)^5 = \left(0.3 + 0.5t + 0.2t^2\right)^5.$$

Clairement,

$$f_{S_5}(0) = P_{S_5}(0) = 0.3^5.$$

De la Propriété 1, on déduit

$$\begin{aligned} f_{S_5}(1) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{P}_{S_5}(t)\Big|_{t=0} \\ &= 5 \times \left(\mathcal{P}_X(t)^4\right) \times \mathcal{P}'_X(t)\Big|_{t=0} \\ &= 5 \times f_{S_4}(0) \times f_X(1) \end{aligned}$$

avec

$$f_{S_4}(0) = f_X(0)^4.$$

Toutefois, cette approche, quoique correcte, ne conduit pas à un algorithme satisfaisant.

En effet, il existe une procédure plus rapide pour calculer les valeurs de $f_{S_n}(k) = f_X^{*n}(k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 11.21 ***Algorithme de De Pril.*** *L'algorithme pour calculer* $f_X^{*n}(k)$ *est fourni par la relation récursive suivante :*

$$f_{S_n}(k) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} \left((n+1)\frac{j}{k} - 1\right) f_X(j)\, f_{S_n}((k-j)) \tag{11.4}$$

dont le point de départ est

$$f_{S_n}(0) = f_X(0)^n.$$

Preuve. La démonstration est basée sur quelques étapes et la démarche sera semblable pour identifier l'algorithme de Panjer.

1. On dérive $\mathcal{P}_{S_n}(t)$ par rapport t
$$\mathcal{P}'_{S_n}(t) = n\mathcal{P}_X(t)_X^{n-1}\mathcal{P}'(t). \tag{11.5}$$

2. On multiplie les deux côtés de (11.5) par $t\mathcal{P}_X(t)$
$$t\mathcal{P}_X(t)\,\mathcal{P}'_{S_n}(t) = t\mathcal{P}_X(t)\,n\mathcal{P}_X(t)_X^{n-1}\mathcal{P}'(t). \tag{11.6}$$
La partie de gauche de (11.6) est
$$\mathcal{P}_X(t)\,t\mathcal{P}'_{S_n}(t) = \{\mathcal{P}_X(t)\}\left\{t\mathcal{P}'_{S_n}(t)\right\} = \sum_{j=0}^{\infty} t^j f_X(j)\sum_{k=0}^{\infty} kt^k f_{S_n}(k). \tag{11.7}$$
La partie de droite de (11.6) correspond à
$$\begin{aligned} n\left\{\mathcal{P}_X(t)^n\right\}\left\{t\mathcal{P}_X^{'}(t)\right\} &= n\left\{\mathcal{P}_{S_n}(t)\right\}\left\{t\mathcal{P}_X^{'}(t)\right\} \\ &= n\sum_{k=0}^{\infty} t^k f_{S_n}(k)\sum_{j=0}^{\infty} jt^j f_X(j). \end{aligned} \tag{11.8}$$
On combine (11.7) et (11.8)
$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j f_X(j)\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} kt^k f_{S_n}(k)\right) = n\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k f_{S_n}(k)\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} jt^j f_X(j)\right). \tag{11.9}$$

3. On identifie de part et d'autre de (11.9) les coefficients de t^k pour chaque $k \in \mathbb{N}^+$.Puis, à partir de ces coefficients, il est possible d'identifier la relation récursive voulue.
Le côté gauche de (11.9) est de la forme
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$
Le côté droit de (11.9) est de la forme
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k.$$
Le coefficient a_k de t^k dans le côté gauche de (11.9) est
$$a_k = \sum_{j=0}^{k-1} f_X(j) \times (k-j) \times f_{S_n}(k-j). \tag{11.10}$$
Le coefficient b_k de t^k dans le côté droit de (11.9) correspond à
$$b_k = n\sum_{j=1}^{k} f_X(j) \times j \times f_{S_n}(k-j). \tag{11.11}$$
Comme $a_k = b_k$, on combine (11.10) et (11.11)
$$a_k = \sum_{j=0}^{k} f_X(j) \times (k-j) \times f_{S_n}(k-j) = n\sum_{j=0}^{k} f_X(j) \times j \times f_{S_n}(k-j) = b_k,$$
pour $k = 1, 2, \ldots$.

On isole $f_{S_n}(k)$

$$f_X(0)\,k f_{S_n}(k) + \sum_{j=1}^{k} f_X(j) \times (k-j) \times f_{S_n}(k-j) = n \sum_{j=1}^{k} f_X(j) \times j \times f_{S_n}((k-j)).$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} f_X(0) \times k \times f_{S_n}(k) &= n \sum_{j=1}^{k} f_X(j) \times j \times f_{S_n}(k-j) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k} f_X(j) \times (k-j) \times f_{S_n}(k-j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} f_X(j) \times (nj + j - k) \times f_{S_n}(k-j). \end{aligned}$$

On fait un léger ajustement

$$f_X(0) \times k \times f_{S_n}(k) = \sum_{j=1}^{k} f_X(j) \times ((n+1)\,j - k) \times f_{S_n}(k-j).$$

On obtient la relation récursive voulue suivante :

$$f_{S_n}(k) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} f_X(j) \left((n+1)\frac{j}{k} - 1 \right) f_{S_n}((k-j)),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

■

Remarque 11.22 *Soit une v.a. $X \in \{0, 1h, 2h, ...\}$. Alors, $S_n \in \{0, 1h, 2h, ...\}$, et (11.4) devient*

$$f_{S_n}(kh) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} \left((n+1)\frac{j}{k} - 1 \right) f_X(jh)\, f_{S_n}((k-j)\,h)$$

dont le point de départ est

$$f_{S_n}(0) = f_X(0)^n.$$

Remarque 11.23 ***Application de l'algorithme de De Pril.***

- *L'algorithme de la proposition 11.21 est récursif.*
- *On doit connaître les valeurs de $f_{S_n}(0h)$, ..., $f_{S_n}((k-1)\,h)$ afin de calculer $f_{S_n}(kh)$.*
  - *On commence par calculer $f_{S_n}(0) = f_X(0)^n$.*
  - *On calcule $f_{S_n}(1h) = \frac{1}{f_X(0h)} f_X(1h) \left((n+1)\frac{1}{1} - 1\right) f_{S_n}(0h)$.*
  - *On détermine*
$$f_{S_n}(2h) = \frac{1}{f_X(0h)} \left\{ \begin{array}{c} f_X(1h) \left((n+1)\frac{1}{2} - 1\right) f_{S_n}(1h) \\ +f_X(2h) \left((n+1)\frac{2}{2} - 1\right) f_{S_n}(0h) \end{array} \right\}.$$
  - *On poursuit pour $k \in \{3, 4, ...\}$.*
- *Il est préférable de programmer la procédure dans un langage informatique.*
- *Dans certains cas, l'algorithme peut être instable numériquement et produire des valeurs incohérentes.*

Exemple 11.24 *Soit les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_{10}$ où $X_i \sim Bin(5, 0.2)$ pour $i = 1, 2, ..., 10$. On définit $S_{10} = X_1 + ... + X_{10}$.*

— *Étape #1 :* $f_{S_{10}}(0) = f_X(0)^{10}$.

— *Étape #2 : on obtient les valeurs suivantes pour* $f_{S_{10}}(k)$, $k = 0, 1, ..., 5$ *:*

k	0	1	2	3	4	5
$f_{S_{10}}(k)$	0.000014	0.000178	0.001093	0.004371	0.012840	0.029531

Puisque $S_{10} \sim Bin(50, 0.2)$, *il est possible de vérifier l'exactitude de ces valeurs.* □

Fonction R

...

Autre remarque sur son application

Remarque 11.25 *Soit les v.a. i.i.d.* $X_1, ..., X_n \in \{k_0 h, (k_0+1)h, ...\}$.

— *Cela implique que* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \in \{nk_0 h, (nk_0+1)h, ...\}$.

— *On définit* $Y_i = X_i - k_0 h \in \{0, 1h, 2h, ...\}$, $i = 1, 2, ..., n$ *et* $T = \sum_{i=1}^n Y_i$.

— *Alors, on évalue les valeurs de* $f_T(kh)$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) avec l'algorithme récursif de la proposition 11.21*

— *On obtient celles de* $f_S(kh)$ *avec* $f_S(kh) = f_T((k - nk_0)h)$ *(*$k = k_0 n, k_0 n + 1, ...$*).*

11.5.3 Somme de n v.a. discrètes

Soit le vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ dont la fonction de masse de probabilité conjointe est définie par $f_{X_1,...,X_n}(k_1 h, ..., k_n h)$ pour $k_i \in \{0, 1h, 2h, ...\}$. Pour $n = 3$, on utilise

$$f_{S_3}(kh) = \sum_{k_1=0}^{k} \sum_{k_2=0}^{k_1} f_{X_1,X_2,X_3}(k_1 h, k_2 h, (k - k_1 - k_2)h), \tag{11.12}$$

pour $k \in \{0, 1h, 2h, ...\}$. Pour $n > 3$, il suffit d'adapter (11.12)

$$\begin{aligned} & f_{S_n}(kh) \\ = & \sum_{k_1=0}^{k} ... \sum_{k_{n-1}=0}^{k_{n-2}} f_{X_1,...,X_n}\left(k_1 h, ..., k_{n-1} h, \left(k - \sum_{j=1}^{n-1} k_j\right) h\right). \end{aligned} \tag{11.13}$$

Le temps d'exécution de (11.13) devient rapidement long lorsque le nombre n de v.a. augmente.

La fgp conjointe du vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ est définie par

$$\mathcal{P}_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} ... \sum_{k_n=0}^{\infty} t_1^{k_1 h} ... t_n^{k_n h} f_{X_1,...,X_n}(k_1 h, ..., k_n h). \tag{11.14}$$

Alors, la fgp de $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est donnée par

$$\mathcal{P}_S(t) = \mathcal{P}_{X_1,...,X_n}(t, ..., t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_S(kh) t^{kh} \tag{11.15}$$

à partir de laquelle on peut identifier la f.m.p. de S. Si les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, (11.14) et (11.15) deviennent

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} ... \sum_{k_m=0}^{\infty} t_1^{k_1 h} ... t_n^{k_n h} f_{X_1}(k_1 h) ... f_{X_n}(k_n h) \\ &= \mathcal{P}_{X_1}(t_1) ... \mathcal{P}_{X_n}(t_n) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{P}_S(t) = \mathcal{P}_{X_1}(t) ... \mathcal{P}_{X_n}(t).$$

11.6 Somme aléatoire et algorithme de Panjer

11.6.1 Notions préliminaires

Soit une v.a. X définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_i & , M > 0 \\ 0, & , M = 0 \end{cases}, \tag{11.16}$$

où

— M est une v.a. discrète de fréquence ;

— $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ est une suite de v.a. positives i.i.d. définies sur $\mathbb{N}$, avec $B_k \sim B$; et

— $\underline{B}$ est indépendante de M.

Alors, la v.a. X prend des valeurs dans $\mathbb{N}$ avec

$$f_X(k) = \Pr(X = k),\ k \in \mathbb{N}.$$

La fgp de la v.a. X est

$$\mathcal{P}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t)).$$

L'objectif est de calculer les valeurs de f_X. On considère tout d'abord deux approches "générales" pour y parvenir.

Selon la première approche, on procède comme suit :

$$\begin{aligned} f_X(0) &= f_M(0) + \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_{B_1+...+B_j}(0) \\ &= f_M(0) + \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_B^{*j}(0) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_M(j) (f_B(0))^j = \mathcal{P}_M(f_B(0)) \end{aligned} \tag{11.17}$$

et

$$f_X(kh) = \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_{B_1+...+B_j}(kh) = \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_B^{*j}(kh), \tag{11.18}$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Bien que (11.17) soit aisée à évaluer, (11.18) demande plus de temps de calcul.

Fastidieux ! On doit recourir au résultat de la Proposition 11.21 pour évaluer les valeurs de $f_B^{*j}(kh)$ pour chaque $j \in \mathbb{N}^+$ et chaque $k \in \mathbb{N}^+$. Cette approche exige de tronquer une somme infinie par une somme finie.

[Panjer, 1981] a proposé un algorithme appelé désormais *algorithme de Panjer*.

Il s'agit d'une relation récursive permettant le calcul des valeurs de f_X à la condition que la distribution de la v.a. M doit faire partie de la famille $(a, b, 0)$.

La deuxième approche utilise la Propriété 1 et elle permet de présenter l'intuition derrière l'algorithme de Panjer. On illustre la deuxième approche par le biais de 2 exemples.

Exemple 11.26 *Soit les v.a.* $M \sim Binom(2, q)$ *et* $B \in \{0, 1, 2, 3\}$ *avec*

$$\Pr(B = k) = b_k,\ k = 0, 1, 2, 3,$$

et

$$\mathcal{P}_B(t) = \sum_{k=0}^{3} b_k t^k.$$

La fgp de X est

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_X(t) &= \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t)) \\
&= (1-q+q\mathcal{P}_B(t))^2 \\
&= (1-q)^2 + 2(1-q)q + q^2\mathcal{P}_B(t)^2.
\end{aligned}$$

Ensuite, la fgp de X devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_X(t) &= (1-q)^2 \\
&\quad +2(1-q)q \times \sum_{k=0}^{3} b_k t^k \\
&\quad +q^2 \times \left(\sum_{k=0}^{3} b_k t^k\right)^2.
\end{aligned}$$

Puis, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_X(t) &= (1-q)^2 \\
&\quad +2(1-q)q \times \sum_{k=0}^{3} b_k t^k \\
&\quad +q^2 \times \sum_{k=0}^{6} c_k t^k
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{6} c_k t^k &= b_0^2 + 2b_1b_0t + \left(2b_2b_0 + b_1^2\right)t^2 + (2b_3b_0 + 2b_2b_1)t^3 \\
&\quad + \left(2b_3b_1 + b_2^2\right)t^4 + 2b_3b_2t^5 + b_3^2t^6.
\end{aligned}$$

Finalement, en réarrangeant les termes, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_X(t) &= \sum_{k=0}^{6} f_X(k)\,t^k \\
&= (1-q)^2 + 2(1-q)q \times b_0 + q^2b_0^2 \\
&\quad + \left(2(1-q)q \times b_1 + q^2 \times (2b_1b_0)\right) \times t \\
&\quad + \left(2(1-q)q \times b_2 + q^2 \times \left(2b_2b_0 + b_1^2\right)\right) \times t^2 \\
&\quad + \left(2(1-q)q \times b_3 + q^2 \times (2b_3b_0 + 2b_2b_1)\right) \times t^3 \\
&\quad + q^2 \times \left(2b_3b_1 + b_2^2\right) \times t^4 \\
&\quad + q^2 \times 2b_3b_2 \times t^5 \\
&\quad + q^2 \times b_3^2 \times t^6.
\end{aligned}$$

Cette approche est applicable à la condition que $\mathcal{P}_M$ et $\mathcal{P}_B$ sont des polynômes de degrés qui ne sont pas trop elévés. Il est possible d'établir une procédure plus efficace.

Exemple 11.27 *Soit les v.a.* $M \sim Pois(\lambda)$ *et* $B \in \{0,1,2,3\}$ *avec*

$$\Pr(B = k) = b_k,\ k = 0,1,2,3,$$

et

$$\mathcal{P}_B(t) = \sum_{k=0}^{3} b_k t^k.$$

La fgp de X *est*

$$\mathcal{P}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t)) = e^{\lambda(\mathcal{P}_B(t)-1)}.$$

On ne peut pas recourir à la démarche utilisée dans l'Exemple 11.26. On applique plutôt la Propriété 1. Pour $k = 0$*, on a*

$$f_X(0) = \mathcal{P}_M(\prime).$$

Pour $k = 1$*, on obtient*

$$\begin{aligned} f_X(k) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t))\Big|_{t=0} \\ &= \lambda \times e^{\lambda(\mathcal{P}_B(t)-1)} \times \mathcal{P}'_B(t)\Big|_{t=0} \\ &= \lambda \times \mathcal{P}_X(t) \times \mathcal{P}'_B(t)|_{t=0} \\ &= \lambda \times f_X(0) \times f_B(1). \end{aligned}$$

Quand $k = 2$*, on déduit*

$$\begin{aligned} f_X(k) &= \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2!}\lambda \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{P}_X(t) \times \mathcal{P}'_B(t))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\lambda}{2!} \times \left(\mathcal{P}'_X(t) \times \mathcal{P}'_B(t) + \mathcal{P}_X(t) \times \mathcal{P}^{(2)}_B(t)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\lambda}{2!} \times (f_X(1) \times f_B(1) + f_X(0) \times 2 \times f_B(2)). \end{aligned}$$

On observe l'apparition d'une procédure récursive. Cette relation est formalisée par l'algorithme de Panjer.

11.6.2 Famille (a,b,0) de lois de fréquence

Définition 11.28 *Une distribution de fréquence pour une v.a.* M *appartient à la famille de distributions de fréquence* $(a,b,0)$ *si* f_M *satisfait la relation récursive suivante :*

$$f_M(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Le point de départ est $f_M(0) > 0$ *(d'où le nom).*

Seules les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative sont membres de cette famille.
On indique les valeurs de a et b pour les membres de la famille (a,b,0) :

- loi de Poisson : $a = 0$ et $b = \lambda$;
- loi binomiale négative (avec r, q) : $a = 1 - q$ et $b = (1-q)(r-1)$;
- loi binomiale négative (avec r, β) : $a = \frac{\beta}{1+\beta}$ et $b = \frac{\beta}{1+\beta}(r-1)$;
- loi binomiale : $a = -\frac{q}{1-q}$ et $b = (n+1)\frac{q}{1-q}$.

Pour la loi de Poisson, on observe

$$f_M(k) = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} = \frac{\lambda}{k} \times \frac{\lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{k} \times f_M(k-1),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

La f.g.p . de la v.a. M est

$$\mathcal{P}_M(t) = E\left[t^M\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k)\, t^k. \tag{11.19}$$

La relation récursive suivante pour $\mathcal{P}_M$ est utilisée dans le développement de l'algorithme de Panjer.

Proposition 11.29 ***Relation récursive.*** *Pour le distribution de la famille* $(a, b, 0)$*, on a*

$$\mathcal{P}'_M(t) = a \times t \times \mathcal{P}'_M(t) + (a+b)\,\mathcal{P}_M(t), \tag{11.20}$$

où $\mathcal{P}'_M(t) = \frac{\mathrm{d}\ \mathcal{P}_M(t)}{\mathrm{d}t}$.

Preuve. On prend la dérivée de (11.19) par rapport à t

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}'_M(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, k t^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1)\, k t^{k-1}.
\end{aligned}$$

On réarrange les termes

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}'_M(t) &= a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1)\, k t^{k-1} + b\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1)\, t^{k-1} \\
&= a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) \times k \times t^{k-1} + b\mathcal{P}_M(t).
\end{aligned}$$

On remplace k par $k-1+1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}'_M(t) &= a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) \times (k-1+1) \times t^{k-1} + b\mathcal{P}_M(t) \\
&= a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) \times (k-1) \times t^{k-1} \\
&\quad + a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) \times t^{k-1} + b\mathcal{P}_M(t)
\end{aligned}$$

On réarrange légèrement

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}'_M(t) &= at\sum_{k=2}^{\infty} f_M(k-1) \times (k-1) \times t^{k-2} \\
&\quad + a\mathcal{P}_M(t) + b\mathcal{P}_M(t)
\end{aligned}$$

On observe

$$\sum_{k=2}^{\infty} f_M(k-1) \times (k-1) \times t^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, k t^{k-1} = \mathcal{P}'_M(t)$$

Alors, on obtient

$$\mathcal{P}'_M(t) = at\mathcal{P}'_M(t) + a\mathcal{P}_M(t) + b\mathcal{P}_M(t)$$

qui correspond à (11.20). ■

Exemple 11.30 *Loi de Poisson.*

11.6.3 Algorithme de Panjer

On a recours à la fgp de X qui est donnée par

$$\mathcal{P}_X(t) = E\left[t^X\right] = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t)).$$

On sait que $f_X(0) = \mathcal{P}_M(f_B(0))$, ce qui fournit le point de départ de l'algorithme de Panjer.

L'algorithme de Panjer est une relation qui permet de calculer récursivement la fonction de masse de probabilité de X, lorsque la loi de M fasse partie de la classe (a,b,0).

Algorithme 11.31 ***Panjer.*** *Le point de départ de l'algorithme est*

$$f_X(0) = \mathcal{P}_M\{f_B(0)\}$$

et la relation récursive est donnée par

$$f_X(k) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(a + b\frac{j}{k}\right) f_B(j) f_X(k-j)}{1 - af_B(0)}, \tag{11.21}$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Preuve. La relation récursive en procédant via quelques étapes.

1. On dérive la fgp de X par rapport à t

$$\mathcal{P}'_X(t) = \mathcal{P}'_M(\mathcal{P}_B(t)) \times \mathcal{P}'_B(t). \tag{11.22}$$

2. On remplace la formule récursive (11.20)

$$\mathcal{P}'_M(t) = a \times t \times \mathcal{P}'_M(t) + (a+b)\mathcal{P}_M(t),$$

dans (11.22) et on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'_X(t) &= a \times \mathcal{P}_B(t) \times \mathcal{P}'_M(\mathcal{P}_B(t))\mathcal{P}'_B(t) + (a+b)\mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t))\mathcal{P}'_B(t) \\ &= a \times \mathcal{P}_B(t) \times \mathcal{P}'_X(t) + (a+b)\mathcal{P}_X(t)\mathcal{P}'_B(t)\end{aligned} \tag{11.23}$$

3. On rappelle que

$$\mathcal{P}_B(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_B(j)\, t^j, \qquad \mathcal{P}'_B(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j f_B(j)\, t^{(j-1)}$$

et

$$\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k, \qquad \mathcal{P}'_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k)\, t^{(k-1)}.$$

4. On utilise ces expressions dans (11.23)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k)\, t^{(k-1)} &= a \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_B(j)\, t^j\right) \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} m \times f_X(m)\, t^{(m-1)}\right) \\ &\quad + (a+b)\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_X(j)\, t^j\right) \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} m f_B(m)\, t^{(m-1)}\right)\end{aligned}$$

5. On multiplie par t ($\Longrightarrow$arguments des fmp et exposants de t identiques)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^k &= a \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_B(j) t^j\right) \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} m f_X(m) t^m\right) \\ &\quad + (a+b) \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_X(j) t^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} m f_B(m) t^m\right).\end{aligned} \tag{11.24}$$

6. Les sommes en (11.24) sont de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k$$

où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k &= a \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_B(j) t^j\right) \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} m f_X(m) t^m\right) \\ \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k &= (a+b) \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_X(j) t^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} m f_B(m) t^m\right).\end{aligned}$$

7. On identifie la relation récursive à partir de l'observation que

$$c_k = d_k + e_k$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^+$.

On identifie

$$c_k = k f_X(k). \tag{11.25}$$

On trouve

$$d_k = a \times \sum_{j=0}^{k} f_B(j) \times (k-j) \times f_X(k-j) \tag{11.26}$$

On déduit

$$e_k = (a+b) \times \sum_{j=0}^{k} f_B(j) \times j \times f_X(k-j). \tag{11.27}$$

On combine (11.25), (11.26) et (11.27) :

$$\begin{aligned}k \times f_X(k) &= a \times \sum_{j=0}^{k} f_B(j) \times (k-j) \times f_X(k-j) \\ &\quad + (a+b) \times \sum_{j=0}^{k} f_B(j) \times j \times f_X(k-j)\end{aligned}$$

On réarrange une première fois

$$\begin{aligned} k \times f_X(k) &= a \times k \times f_B(0) \times f_X(k) \\ &\quad + a \sum_{j=1}^{k} f_B(j) \times (k-j) \times f_X(k-j) \\ &\quad + (a+b) \times \sum_{j=1}^{k} f_B(j) \times j \times f_X(k-j) \end{aligned}$$

On réarrange une deuxième fois

$$\begin{aligned} k \times f_X(k) &= akf_B(0) f_X(k) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k} (a(k-j) + (a+b)j) \times f_B(j) \times f_X(k-j). \end{aligned}$$

En isolant $f_X(k)$, on obtient

$$f_X(k) = \frac{1}{1 - af_B(0)} \sum_{j=1}^{k} \left(a + b\frac{j}{k}\right) f_B(j) \times f_X(k-j), \ k \in \mathbb{N}^+.$$

■

Remarque 11.32 *Supposons que la v.a.* $B \in \{0, 1h, 2h, ...\}$. *Alors,* $X \in \{0, 1h, 2h, ...\}$ *et la relation résursive en (11.21) devient*

$$f_X(kh) = \frac{1}{1 - af_B(0)} \sum_{j=1}^{k} \left(a + b\frac{jh}{kh}\right) f_B(jh) \times f_X((k-j)h)$$

et le point de départ demeure inchangé, c.-à-d., $f_X(0) = \mathcal{P}_M(f_X(0))$.

Algorithme 11.33 ***Poisson composée***. *Soit* $M \sim Pois(\lambda)$. *Le point de départ est* $f_X(0) = \mathrm{e}^{\lambda(f_B(0)-1)}$ *et la relation récursive est donnée par*

$$f_X(kh) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j f_B(jh) f_X((k-j)h),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. □

FONCTION R DE L'ALGO DE PANJER

Cas particulier – Binomiale négative composée

Algorithme 11.34 ***Binomiale négative composée*** *(avec* r *et* q*). On suppose que* $M \sim BN(r, q)$. *Le point de départ est*

$$f_X(0) = \left(\frac{q}{1 - (1-q) f_B(0)}\right)^r$$

et la relation récursive est donnée par

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left(1 - q + \frac{(1-q)(r-1)j}{k}\right) f_B(jh) f_X((x-j)h)}{1 - (1-q) f_B(0)},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. □

FONCTION R - ALGO

Algorithme 11.35 ***Binomiale composée***. *On suppose que* $M \sim Bin(n, q)$. *Le point de départ est*

$$f_X(0) = (1 - q + qf_B(0))^n$$

et la relation récursive est donnée par

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left(-q + \frac{(n+1)qj}{k}\right) f_B(j) f_X((k-j)h)}{1 - q + qf_B(0)},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. □

FONCTION R - ALGO
Dans l'exemple suivant, on applique l'algorithme de Panjer pour les lois composées.

Exemple 11.36 *La v.a. X est définie selon (11.16) où*

$$B \in \{1000, 2000, ..., 6000\}$$

avec les valeurs suivantes de $f_B(1000k)$ *:*

k	0	1	2	3	4	5	6
$f_B(1000k)$	0	0.20	0.30	0.20	0.15	0.l0	0.05

On déduit que $E[B] = 2800$ *et* $\mathrm{Var}(B) = 2\ 060\ 000$.

On considère trois hypothèses pour la distribution de la v.a. M.

- *Hypothèse 1 –* $M \sim Pois(\lambda = 1.25)$ *:* $E[X] = 3500$ *et* $\mathrm{Var}(X) = 12\ 375\ 000$.
- *Hypothèse 2 –* $M \sim Bin(n = 10, q = 0.125)$ *:* $E[X] = 3500$ *et* $\mathrm{Var}(X) = 11\ 150\ 000$.
- *Hypothèse 3 –* $M \sim BN(r = 0.5, \beta = 2.5)$ *:* $E[X] = 3500$ *et* $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X) = 36\ 875\ 000$.

Pour l'hypothèse 1, on a :

$$\begin{aligned} f_X(0) &= \mathcal{P}_M(f_B(0)) = \exp(\lambda(f_B(0) - 1)) \\ &= \exp(-\lambda) = \exp(-1.25) = 0.286505 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(1000) &= \frac{\lambda}{1} \sum_{j=1}^{1} j f_B(1000j) f_X(1000(1-j)) \\ &= 1.25(1 \times f_B(1000) \times f_X(0)) \\ &= 1.25(1 \times 0.2 \times 0.286505) = 0.071626 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_X(2000) &= \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{2} j f_B(1000j) f_X(1000(2-j)) \\ &= \frac{1.25}{2}(1 \times f_B(1000) \times f_X(1000) + 2 \times f_B(2000) \times f_X(0)) \\ &= \frac{1.25}{2}(1 \times 0.2 \times 0.071626 + 2 \times 0.3 \times 0.286505) \\ &= 0.116393. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse 2, on obtient :

$$f_X(0) = \mathcal{P}_M(f_B(0)) = (1 - q + qf_B(0))^n = 0.263076$$

$$\begin{aligned} f_X(1000) &= \frac{\sum_{j=1}^{1}\left(-q+\frac{(n+1)qj}{1}\right) f_B(1000j) f_X(1000\,(1-j))}{1-q+qf_B(0)} \\ &= \frac{\left(-0.125+\frac{11\times 0.125\times 1}{1}\right) f_B(1000)\, f_X(0)}{1-0.125} \\ &= 0.075164 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_X(2000) &= \frac{\sum_{j=1}^{2}\left(-q+\frac{(n+1)qj}{2}\right) f_B(1000j) f_X(1000\,(2-j))}{1-q+qf_B(0)} \\ &= \frac{\left(-0.125+\frac{11\times 0.125\times 1}{2}\right) 0.20\times 0.075164}{1-0.125} \\ &\quad + \frac{\left(-0.125+\frac{11\times 0.125\times 2}{2}\right) 0.30\times 0.263076}{1-0.125} \\ &= 0.122411. \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse 3, on calcule :

$$\begin{aligned} f_X(0) &= \mathcal{P}_M(f_B(0)) = \left(\frac{1}{(1-\beta((f_B(0))-1))}\right)^r \\ &= \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r = \left(\frac{1}{1+2.5}\right)^{0.5} = 0.534522 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(1000) &= \frac{\sum_{j=1}^{1}\left(\beta+\frac{\beta(r-1)j}{1}\right) f_B(1000j) f_X(1000\,(1-j))}{1+\beta-\beta f_B(0)} \\ &= \frac{\left(2.5+\frac{2.5(0.5-1)1}{1}\right) 0.2\times 0.534522}{1+2.5-2.5\times 0} \\ &= 0.038180 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_X(2000) &= \frac{\sum_{j=1}^{2}\left(\beta+\frac{\beta(r-1)j}{2}\right) f_B(1000j) f_X(1000\,(2-j))}{1+\beta-\beta f_B(0)} \\ &= \frac{\left(2.5+\frac{2.5(0.5-1)1}{2}\right) 0.2\times 0.038180}{1+2.5-2.5\times 0} \\ &\quad + \frac{\left(2.5+\frac{2.5(0.5-1)2}{2}\right) 0.3\times 0.534522}{1+2.5-2.5\times 0} \\ &= 0.061361. \end{aligned}$$

On reproduit quelques valeurs de $f_X(1000k)$ ci-dessous :

k	0	5	10	20	30
$f_X(1000k)$ *hyp 1*	0.286505	0.083659	0.020898	0.000368	0.000002
$f_X(1000k)$ *hyp 2*	0.263076	0.088471	0.020159	0.000177	0.000000
$f_X(1000k)$ *hyp 3*	0.534522	0.042620	0.016593	0.003770	0.000981

□

Remarque 11.37 *L'algorithme de Panjer produit des valeurs exactes de probabilité.*

Remarque 11.38 *Résumé*

Loi de M	Départ $(f_X(0))$	Relation récursive $(f_X(kh))$
$Pois\,(\lambda)$	$\mathrm{e}^{\lambda(f_B(0)-1)}$	$\frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} j f_B(jh) f_X((k-j)\,h)$
$Bin\,(n,q)$	$(1-q+qf_B\,(0))^n$	$\frac{\sum_{j=1}^{k}\left(-q+\frac{(n+1)qj}{k}\right)f_B(j)f_X((k-j)h)}{1-q+qf_B(0)}$
$BN\,(r,q)$	$\left(\frac{q}{1-(1-q)f_B(0)}\right)^r$	$\frac{\sum_{j=1}^{k}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{k}\right)f_B(jh)f_X((x-j)h)}{1-(1-q)f_B(0)}$

11.7 Méthodes de discrétisation

Soit les v.a. indépendantes continues positives B_1, ..., B_n. On définit la v.a. $S=\sum_{i=1}^{n} B_i$. Afin d'utiliser les algorithmes récursifs de convolution, on approxime la v.a. B_i par une v.a. discrète $\widetilde{B}_i$ définie sur le support

$$A_h=\{0,1h,2h,3h,...\}\,,$$

où $h>0$ est appelé le pas de discrétisation. La fonction de masse de probabilité est $f_{\widetilde{B}}\,(kh)=\Pr\left(\widetilde{B}_i=kh\right)$, $k\in\mathbb{N}$, pour $i=1,2,...,n$. On définit la v.a. $\widetilde{S}=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{B}_i$, qui est aussi définie sur A_h. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de $\widetilde{S}$ peuvent être calculées avec les algorithmes récursifs de convolution. On approxime les quantités relatives à la v.a. S (p. ex., F_S, $VaR_\kappa\,(S)$, $TVaR_\kappa\,(S)$, prime *stop-loss*) par les quantitiés correspondantes qui sont relatives à $\widetilde{S}$.

Soit la v.a. X définie par la somme aléatoire

$$X=\begin{cases}\sum_{j=1}^{M} B_j, M>0\\ 0, M>0\end{cases},$$

où les v.a. $B_1,B_2,...$ sont i.i.d. et continues positives avec une fonction de répartition F_B et la v.a. M appartenant à la classe (a,b,0). Pour appliquer l'algorithme de Panjer ou tout autre algorithme récursif, on approxime les v.a. B_1, B_2, ... par les v.a. les v.a. discrètes $\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2$,... définies sur A_h. On définit la v.a. $\widetilde{X}$ par

$$\widetilde{X}=\begin{cases}\sum_{j=1}^{M}\widetilde{B}_j, M>0\\ 0, M>0\end{cases},$$

en préservant les mêmes hypothèses et on observe que la v.a. $\widetilde{X}$ est définie sur A_h. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de $\widetilde{X}$ sont calculées avec l'algorithme de Panjer ou tout autre algorithme. Ensuite, on approxime les quantités relatives à la v.a. X (p. ex., F_X, $VaR_\kappa\,(X)$, $TVaR_\kappa\,(X)$, prime *stop-loss*) par les quantitiés correspondantes de $\widetilde{X}$.

Un certain nombre de méthodes de discrétisation existent afin de définir la v.a. $\widetilde{B}$ qui approxime la v.a. B. On présente les principales méthodes dans les prochaines sous-sections.

11.7.1 Méthodes *upper* et *lower*

Selon la méthode *upper*, la valeur de la fonction de masse de probabilité à 0 est

$$f_{\widetilde{B}}\,(0)=\Pr\,(B\leq h)=F_B\,(h)$$

et les valeurs de la fonction de masse de probabilité à $1h,2h,3h,...$ sont

$$f_{\widetilde{B}}\,(kh)=\Pr\,(kh\leq B<(k+1)\,h)=F_B\,((k+1)\,h)-F_B\,(kh)$$

pour $k\in\mathbb{N}^+$. La fonction de répartition $F_{\widetilde{B}}\,(x)$ est une fonction en escalier dont les sauts sont à $0h$, $1h$, $2h$, ... et dont la première marche à 0 est d'une hauteur $F_{\widetilde{B}}\,(0)=F_B\,(h)$. On a

$$F_{\widetilde{B}}\,(x)=\begin{cases}F_B\,(h)\,, & 0\leq x<h\\ F_B\,(2h)\,, & h\leq x<2h\\ F_B\,(3h)\,, & 2h\leq x<3h\\ & ...\end{cases}$$

Illustration 11.10 – Valeurs de $F_B(x)$ où $B \sim Exp(1)$ ainsi que de $F_{\widetilde{B}^{(up)}}(x)$ (ligne continue en escalier) et $F_{\widetilde{B}^{(up)}}(x)$ (ligne avec petits traits en escalier).

Selon cette méthode, on a la relation $F_B(x) \leq F_{\widetilde{B}}(x)$, $x \geq 0$.

Pour la méthode *lower*, la valeur de la fonction de masse de probabilité à 0 est $f_{\widetilde{B}}(0) = 0$ et les valeurs de la fonction de masse de probabilité à $1h, 2h, 3h, ...$ sont

$$f_{\widetilde{B}}(kh) = \Pr((k-1)h \leq B < kh) = F_B(kh) - F_B((k-1)h),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. La fonction de répartition $F_{\widetilde{B}}(x)$ est une fonction en escalier dont les sauts sont à $1h$, $2h$, ..., soit

$$F_{\widetilde{B}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < h \\ F_B(h), & h \leq x < 2h \\ F_B(2h), & 2h \leq x < 3h \\ & ... \end{cases}.$$

On observe la relation $F_B(x) \geq F_{\widetilde{B}}(x)$, $x \geq 0$.

Sur le graphique de l'illustration 11.10, on présente les deux méthodes de discrétisation appliquée à la fonction de répartition de la loi exponentielle.

Dans le prochain exemple, on applique les deux méthodes de discrétisation.

Exemple 11.39 *On applique l'algorithme de Panjer conjointement avec les méthodes upper et lower de discrétisation. Soit la v.a.* $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, *avec* $r = 1$, $q = 0.5$ *et* $B \sim Exp(0.2)$. *Pour cet exemple, on connaît la forme explicite de la fonction de répartition de* X *qui est donnée par*

$$F_X(x) = 1 - (1-q)\,\mathrm{e}^{-\beta q x}, \qquad x \geq 0,$$

(voir les exercices du chapitre 4) ce qui permet de comparer les valeurs obtenues avec les approximations. Dans le tableau ci-dessous, on illustre l'application de l'algorithme de Panjer en utilisant les techniques de discrétisation upper *et* lower. *Il est possible de comparer les valeurs obtenues par approximation et les valeurs*

exactes de $F_X(x)$ *:*

x	*Low* $h=1$	*Low* $h=\frac{1}{4}$	*Low* $h=\frac{1}{16}$	*Exacte*	*Up* $h=\frac{1}{16}$	*Up* $h=\frac{1}{4}$	*Up* $h=1$
0	0.50000	0.50000	0.500000	0.5	0.50313	0.51250	0.54983
1	0.54532	0.54702	0.54744	0.54758	0.55055	0.55944	0.59470
2	0.58653	0.58961	0.59038	0.59064	0.59344	0.60186	0.63510
3	0.62400	0.62820	0.62924	0.62959	0.63225	0.64020	0.67147
4	0.65808	0.66316	0.66442	0.66484	0.66735	0.67485	0.70421
5	0.68907	0.69483	0.69626	0.69674	0.69910	0.70616	0.73369
10	0.78737	0.81375	0.81549	0.81606	0.81778	0.82289	0.84246
20	0.92523	0.93062	0.93191	0.93233	0.93317	0.93565	0.94487
30	0.97109	0.97416	0.97487	0.97511	0.97549	0.97662	0.98071
40	0.98882	0.99037	0.99073	0.99084	0.99101	0.99151	0.99325
50	0.99568	0.99641	0.99658	0.99663	0.99670	0.99691	0.99764

On constate que la différence entre les valeurs upper *et* lower *diminue avec* h *qui s'approche de 0. La valeur de* h *choisie dépend de l'échelle de la distribution de* B*. On présente dans le tableau ci-dessous les valeurs exactes et celles obtenues par approximation de* $VaR_\kappa(X)$ *:*

κ	*Up* $h=1$	*Up* $h=\frac{1}{4}$	*Up* $h=\frac{1}{16}$	*Exacte*	*Low* $h=\frac{1}{16}$	*Low* $h=\frac{1}{4}$	*Low* $h=1$
0.5	0	0	0	0	0	0	0
0.95	21	22.5	22.9375	23.02585	23.125	23.5	25
0.995	43	45.875	45.875	46.05167	46.25	46.75	49

□

Les approximations de F_X produites avec la discrétisation *upper* (*lower*) seront toujours supérieures (*inférieures*) aux valeurs exactes de F_X. Cette relation est démontrée dans le chapitre 12 portant sur la comparaison des risques.

Exemple 11.40 *On considère un portefeuille constitué de 100 contrats d'assurance automobile (indépendants). Les coûts pour un contrat sont représentés par la v.a.* $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ *avec* $\lambda = 0.025$ *et* $B \sim Pa(3,10)$*. On veut évaluer* F_S *où* $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$*, les v.a.* X_i $(i = 1,2,...,100)$ *sont i.i.d. et* $X_i \sim X$ $(i = 1,2,...,100)$*. Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs obtenues des approximations de* $F_S(x)$ *en appliquant l'algorithme de Panjer conjointement avec les techniques de discrétisation* upper *et* lower *(avec* $h = 1$ *et* $h = \frac{1}{4}$*) :*

x	$F_{\widetilde{S}^{low,h=1}}(x)$	$F_{\widetilde{S}^{low,h=\frac{1}{4}}}(x)$	$F_{\widetilde{S}^{up,h=\frac{1}{4}}}(x)$	$F_{\widetilde{S}^{up,h=1}}(x)$
0	0.0820850	0.0820850	0.09812643	0.1528517
1	0.1331183	0.1403239	0.16071324	0.2188115
5	0.3320781	0.3545721	0.38149450	0.4391453
10	0.5364597	0.5616138	0.58571454	0.6310597
20	0.7836771	0.7998287	0.81308686	0.8355891
30	0.8962240	0.9045299	0.91096430	0.9214718
40	0.9472100	0.9513226	0.95443381	0.9594453
50	0.9712884	0.9733614	0.97491838	0.9774225

On mentionne que la valeur exacte de $F_S(0)$ *est égale à 0.0820850. On constate que l'écart entre les bornes inférieures et supérieures diminue avec* h *qui décroît. On présente dans le tableau ci-dessous les valeurs obtenues des approximations de* $VaR_\kappa(S)$ *:*

κ	0.5	0.95	0.995
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{up,h=1}\right)$	7	37	84
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{up,h=\frac{1}{4}}\right)$	7.75	38.75	85.25
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{low,h=\frac{1}{4}}\right)$	8.5	39.75	86.25
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{low,h=1}\right)$	9	41	88

□

11.7.2 Méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée

On a besoin du résultat suivant pour la méthode de la dispersion de la masse.

Lemme 11.41 *Soit les scalaires a, b, c, d tels que $a < b$, $p_a \geq 0$, $p_b \geq 0$, $0 \leq c < 1$ et $a < d < b$. La solution au système de deux équations avec deux inconnues suivant*

$$\begin{aligned} p_a + p_b &= c \\ ap_a + bp_b &= d \end{aligned}$$

est $p_a = \frac{bc-d}{b-a}$ *et* $p_b = \frac{d-ac}{b-a}$.

On procède par étape pour déterminer l'expression de la fonction de masse de probabilité $f_{\widetilde{B}}(kh) = \Pr\left(\widetilde{B} = kh\right)$. Pour chaque intervalle, on distribue la masse de cet intervalle à ses extrémités (gauche et droite) tout en conservant l'espérance attribuée à cet intervalle. Comme le point kh se trouve à la fois à la droite de l'intervalle $((k-1)h, kh]$ et à gauche de l'intervalle $(kh, (k+1)h]$, la valeur de la fonction de masse de probabilité $f_{\widetilde{B}}(kh)$ attribuée au point kh est la somme des deux de probabilité p^+_{kh} et p^-_{kh}.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on cherche les valeurs de p^-_{kh} et p^+_{kh+h} telles que les deux relations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} p^-_{kh} + p^+_{kh+h} &= F_B((k+1)h) - F_B(kh) \\ p^-_{kh}kh + p^+_{kh+h}(k+1)h &= \int_{kh}^{(k+1)h} x f_B(x)\,\mathrm{d}x \\ &= E\left[B \times 1_{(-\infty,(k+1)h]}\right] - E\left[B \times 1_{(-\infty,kh]}\right] \end{aligned}$$

À partir du résultat du lemme 11.41, on déduit :

$$\begin{aligned} p^-_{kh} &= \frac{(k+1)h}{h}\left\{F_B((k+1)h) - F_B(kh)\right\} \\ &\quad -\frac{1}{h}\left\{E\left[B \times 1_{(-\infty,(k+1)h]}\right] - E\left[B \times 1_{(-\infty,kh]}\right]\right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p^+_{(k+1)h} &= \frac{1}{h}\left\{E\left[B \times 1_{(-\infty,(k+1)h]}\right] - E\left[B \times 1_{(-\infty,kh]}\right]\right\} \\ &\quad -\frac{kh}{h}\left\{F_B((k+1)h) - F_B(kh)\right\}. \end{aligned}$$

Pour $k = 1, 2, ...$, la valeur de $f_{\widetilde{B}}(kh)$ est la somme de p^+_{kh} et p^-_{kh} :

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{B}}(kh) &= p^+_{kh} + p^-_{kh} \\ &= \frac{1}{h}\left\{\begin{array}{c} 2E\left[B \times 1_{(-\infty,kh]}\right] - E\left[B \times 1_{(-\infty,(k-1)h]}\right] \\ -E\left[B \times 1_{(-\infty,(k+1)h]}\right] \end{array}\right\} \\ &\quad +\frac{1}{h}\left\{\begin{array}{c} -2khF_B(kh) + (k-1)hF_B((k-1)h) \\ +(k+1)hF_B((k+1)h) \end{array}\right\}. \end{aligned}$$

Comme $E[\min(B;a)] = E\left[B \times 1_{(-\infty,a]}\right] + a(1 - F_B(a))$, on obtient

$$f_{\widetilde{B}}(kh) = \frac{1}{h}\left\{\begin{array}{c} 2E[\min(B;kh)] - E[\min(B;(k-1)h)] \\ -E[\min(B;(k+1)h)] \end{array}\right\},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$ et

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{B}}(0) &= p^-_0 = \frac{F_B(h) \times h - E\left[B \times 1_{(-\infty,h]}\right]}{h} \\ &= 1 - \frac{E[\min(B;h)]}{h}, \end{aligned}$$

pour $k = 0$.

Illustration 11.11 – Valeurs exactes (ligne continue) et approximées (ligne avec petits traits) de $F_X(x)$, où $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ avec $\lambda = 3$ et $B \sim Exp(1)$. L'approximation est obtenue avec la méthode de dispersion.

Exemple 11.42 *Soit la v.a.* $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ *représentant les coûts pour un risque avec* $\lambda = 3$ *et* $B \sim Exp(\beta = 1)$. *L'espérance de* X *est égale à 3. Dans le cas présent, on peut évaluer les valeurs exactes de* F_X. *Pour illustrer la méthode de dispersion avec préservation de l'espérance, on utilise un pas* $h = \frac{1}{100}$ *pour discrétiser la loi de* B *sur le support* $\left\{0, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, ...\right\}$ *puis on applique l'algorithme de Panjer pour évaluer les valeurs de* $F_{\widetilde{X}}\left(\frac{k}{100}\right)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$. *Les valeurs sont reportées dans le graphique de l'illustration 11.11.*

Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs exactes et approximées de $VaR_\kappa(X)$ *et* $TVaR_\kappa(X)$ *:*

κ	$VaR_\kappa(X)$ *exacte*	$VaR_\kappa(X)$ *approx.*	$TVaR_\kappa(X)$ *exacte*	$TVaR_\kappa(X)$ *approx.*
0.5	2.48268	2.48	4.86835	4.86836
0.95	7.72886	7.73	9.56856	9.56856
0.995	11.91371	11.91	13.57670	13.57690

On présente aussi les valeurs exactes et approximées de la prime stop-loss $\pi_X(d) = E[\max(X - d; 0)]$ *:*

d	0	1	2	5	10	15
$\pi_X(d)$ *exacte*	3	2.133987	1.454502	0.378085	0.025710	0.001237
$\pi_X(d)$ *approx.*	3	2.133989	1.454504	0.378087	0.025711	0.001237

Les valeurs approximatives de la prime stop-loss *sont équivalentes aux valeurs à 5 décimales près indiquant la très bonne qualité de la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée. La valeur approximative et la valeur exacte de* $E[X]$ *sont identiques, confirmant que l'espérance est préservée. Enfin, on observe que les valeurs approximées de TVaR et de primes* stop-loss *sont supérieures ou égales aux valeurs exactes. Cette relation d'ordre est expliquée au chapitre 12 à l'aide des ordres convexes.* □

11.8 Agrégation et transformée de Fourier rapide

11.8.1 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire

Définition

Soit une v.a. X définie sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction caractérisque associée à la v.a. X par

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = E\left[\cos(tX)\right] + i \times E\left[\sin(tX)\right].$$

La fonction φ_X prend des valeurs dans l'ensemble des nombres complexes.
Si la v.a. X est continue avec une fonction de densité f_X, on a

$$\varphi_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par exemple, si $X \sim Exp(\beta)$, on a

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right).$$

Par exemple, si $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, on a

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha}.$$

Si la v.a. X est discrète et définie sur $\mathbb{N}$ avec une fonction de masses de probabilité f_X, on a

$$\varphi_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{itX}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{itk} f_X(k).$$

Par exemple, si $X \sim Pois(\lambda)$, on a

$$\varphi_X(t) = \exp\left(\lambda\left(\mathrm{e}^{it} - 1\right)\right).$$

Propriétés

La fonction caractéristique existe pour toute v.a. X car

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = E\left[\cos(tX)\right] + i \times E\left[\sin(tX)\right]$$

les deux espérances $E\left[\cos(tX)\right]$ et $E\left[\sin(tX)\right]$ correspondent à des intégrales de fonctions bornées.
La fonction $\varphi_X(t)$ est bornée c.-à-d. $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
Comme la fonction de répartition, la fgm (quand elle existe), la transformée de Laplace-Stieltjes (v.a. positive), la fgp (v.a. discrète), elle identifie la distribution de la v.a. X.
Soit les v.a. indépendantes X_1, ..., X_m avec les fonctions caractéristiques $\varphi_{X_1}(t)$, ..., $\varphi_{X_n}(t)$. On définit $S = X_1 + ... + X_n$. Alors, on a

$$\varphi_S(t) = \varphi_{X_1}(t) \times ... \times \varphi_{X_n}(t).$$

Soit la v.a. X définie par une somme aléatoire c.-à-d.

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k & , M > 0 \\ 0 & , M = 0 \end{cases},$$

avec les hypothèses habituelles. Alors, on a

$$\varphi_X(t) = \mathcal{P}_M\left(\varphi_B(t)\right).$$

Comme les fgm, les fgp, ou les transformées de Laplace-Stieltjes, l'intérêt des fonctions caractéristiques est qu'il possible de procéder à différents opérations (liées aux sommes finie ou aléatoire de v.a., notamment)

avec des fonctions caractéristiques pour obtenir une fonction caractéristique d'une v.a. S et d'inverser le résultat pour obtenir la distribution de cette v.a. S. Lorsqu'on veut trouver la fonction de répartition à partir de la fonction caractéristique, on a recours à une procédure d'inversion.

Dans ce document, on se limite à la procédure d'inversion d'une v.a. discrète définie sur un support fini.

11.8.2 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire discrète avec support fini

Fonction génératrice des probabilités

Soit la v.a. discrète positive X définie sur $\{0, 1, ..., n-1\}$ avec

$$f_X(k) = \Pr(X = k)$$

pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

La fgp est donnée par

$$\mathcal{P}_X(t) = f_X(0) + f_X(1)\, t^1 + ... + f_X(n-1)\, t^n = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\, t^k.$$

Pour identifer la valeur $f_X(k)$ à partir de $\mathcal{P}_X(t)$, on a

$$f_X(k) = \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \mathcal{P}_X(t) \bigg|_{t=0}.$$

Cette méthode est faisable, mais elle peut être longue. Néanmoins, elle a conduit à un algorithme récursif tel que l'algorithme de Panjer.

Il est possible d'utiliser une procédure plus rapide en utilisant la fonction caractéristique de la v.a. X.

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique de la v.a. X est

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\, e^{itk},$$

Selon la formule d'Euler, comme

$$e^{itk} = \cos(tk) + i \times \sin(tk),$$

on a

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\, e^{itk} = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k) \cos(tk) + i \times \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k) \sin(tk).$$

On introduit une procédure qui permet d'idenfier $f_X(k)$ à partir de $\varphi_X(t)$.

Idée : construction et inversion

On définit les vecteurs suivants de n composantes :

$$\underline{f}_X = (f_X(0), f_X(1), ..., f_X(n-1))$$
$$\underline{\varphi}_X = (\varphi_X(t_0), \varphi_X(t_1), ..., \varphi_X(t_{n-1}))$$

où $\varphi_X(t)$ pour $t = t_j = 2\pi\frac{j}{n}$, pour $j = 0, 1, ..., n-1$, c.-à-d.

$$\underline{\phi}_X = \left(\varphi_X\left(2\pi\frac{0}{n}\right), \varphi_X\left(2\pi\frac{1}{n}\right), ..., \varphi_X\left(2\pi\frac{n-1}{n}\right)\right).$$

Pour déterminer les valeurs de $\underline{\phi}_X$ à partir des valeurs de $\underline{f}_X$, on a recours à la relation suivante :

$$\begin{aligned}\varphi_X\left(2\pi\frac{j}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\exp\left(i2\pi\frac{j}{n}k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\cos\left(2\pi\frac{j}{n}k\right) + i\times\sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\sin\left(2\pi\frac{j}{n}k\right),\end{aligned}$$

pour $j = 0, 1, ..., n-1$. Cette opération est appelée "Construction" dans les exemples.

Pour déterminer les valeurs de $\underline{f}_X$ à partir des valeurs de $\underline{\varphi}_X$, on utilise la relation suivante :

$$f_X(k) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi_X\left(2\pi\frac{j}{n}\right)\exp\left(-i2\pi\frac{j}{n}k\right), \text{ par } k = 0, 1, ..., n-1,$$

et, par "magie", on obtient les valeurs désirées. Cette opération correspond à "l'inversion" dans les exermples.

La "magie" est fondée sur des résultats liés aux calculs avec les nombres complexe et au calcul vectoriel.

Les opérations "Construction" et "Inversion" sont valides peu importe la valeur n.

11.8.3 Algorithme FFT

La FFT est un algorithme qui effectue les calculs impliqués dans ces deux opérations de façon efficace. Pour qu'il soit efficace, il faut que $n = 2^r$, $r \in \mathbb{N}^+$.

Comme dans plusieurs logiciels, il y a une fonction `fft` est fournie avec le package de base du logiciel R.

11.8.4 Convolution

Soit les v.a. discrètes indépendantes X_1, ..., X_m où $X_i \in \{0, 1, ..., n_i\}$ et $\Pr(X_i > n_i) = 0$ ou $\leq \varepsilon$ (c.-à-d. $\varepsilon = 10^{-12}$), $i = 1, 2, ..., m$. On définit $S = X_1 + ... + X_n$. Alors, on a $X_i \in \{0, 1, ..., \sum_{i=1}^m n_i\}$. Pour appliquer la procédure, il faut prévoir que $n > \sum_{i=1}^m n_i$.

Étapes :

— Construction : $\underline{f}_{X_i}$ vers $\underline{\varphi}_{X_i}$, pour $i = 1, 2, ..., m$

$$\begin{aligned}\underline{f}_{X_i} &= (f_{X_i}(0), f_{X_i}(1), ..., f_{X_i}(n-1))\\ \underline{\varphi}_{X_i} &= (\varphi_{X_i}(t_0), \varphi_{X_i}(t_1), ..., \varphi_{X_i}(t_{n-1}))\end{aligned}$$

avec $f_{X_i}(k) = 0$, pour $k = n_i + 1, n_i + 2, ..., n-1$.

— **Opération pour obtenir** $\underline{\varphi}_S$:

$$\underline{\varphi}_S = \underline{\varphi}_{X_1} \times \underline{\varphi}_{X_2} \times ... \times \underline{\varphi}_{X_m}.$$

— **Inversion** ($\underline{\varphi}_S$ vers $\underline{f}_S$) : On utilise la fonction R officielle `fft` avec inverse=TRUE (ou la fonction R fftmaison.inv)

— Validation : on doit avoir $\sum_{k=0}^{n-1} f_S(k)\,k = \sum_{j=1}^m E[X_j]$.

11.8.5 Autres applications

Voir les exemples pour les autres applications : somme aléatoire, somme de v.a. dépendantes discrètes, sommes de v.a. obéissant des lois composées multivariées, etc.

Attention : il est important que les vecteurs impliqués soient suffisamment longs (p. ex., $n = 2^{10}$). Il important de vérifier que la relation $\sum_{k=0}^{n-1} f_S(k)\, k = \sum_{j=1}^{m} E[X_j]$ ou similaire est satisfaite.

11.8.6 Un peu de magie – série 1

Soit une v.a. $X \in \{0, 1, 2\}$ avec

$$\begin{aligned} \underline{f}_X &= (f_X(0), f_X(1), f_X(2)) \\ \underline{\varphi}_X &= (\varphi_X(t_0), \varphi_X(t_1), \varphi_X(t_2)) \end{aligned}$$

où $\varphi_X(t)$ pour $t = t_j = 2\pi\frac{j}{n}$, pour $j = 0, 1, ..., n-1$, avec $n = 3$ c.-à-d.

$$\underline{\phi}_X = \left(\varphi_X\left(2\pi\frac{0}{3}\right), \varphi_X\left(2\pi\frac{1}{3}\right), \varphi_X\left(2\pi\frac{2}{3}\right)\right).$$

On construit le vecteur $\underline{\phi}_X$ à partir du vecteur $\underline{f}_X$:

$$\begin{aligned} \varphi_X\left(2\pi\frac{0}{3}\right) &= f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 0\right) + f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 1\right) + f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 2\right) \\ \varphi_X\left(2\pi\frac{1}{3}\right) &= f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 0\right) + f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 1\right) + f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 2\right) \\ \varphi_X\left(2\pi\frac{2}{3}\right) &= f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 0\right) + f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{3}{3}\times 1\right) + f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 2\right) \end{aligned}$$

On inverse le vecteur $\underline{\phi}_X$ pour déterminer les 3 éléments du vecteur $\underline{f}_X$:

— pour $k = 0$: on obtient

$$\begin{aligned} f_X(0) &= \frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 0\right) + f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 1\right) \\ +f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 2\right) \end{array}\right)\exp\left(-i2\pi\frac{0}{3}\times 0\right) \\ &\quad +\frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 0\right) + f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 1\right) \\ +f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 2\right) \end{array}\right)\exp\left(-i2\pi\frac{1}{3}\times 0\right) \\ &\quad +\frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 0\right) + f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 1\right) \\ +f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 2\right) \end{array}\right)\exp\left(-i2\pi\frac{2}{3}\times 0\right) \\ &= \frac{1}{3}\times 3f_X(0) = f_X(0) \end{aligned}$$

car le coefficient de $f_X(1)$ est

$$\begin{aligned} & \exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 1\right)\exp\left(-i2\pi\frac{0}{3}\times 0\right) \\ & +\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 1\right)\exp\left(-i2\pi\frac{1}{3}\times 0\right) \\ & +\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 1\right)\exp\left(-i2\pi\frac{2}{3}\times 0\right) \\ = \; & 1 + \exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 1\right) + \exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 1\right) = 0 \end{aligned}$$

et le coefficient de $f_X(2)$ est

$$\begin{aligned}
& \exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 2\right)\exp\left(-i2\pi\frac{0}{3}\times 0\right) \\
& +\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 2\right)\exp\left(-i2\pi\frac{1}{3}\times 0\right) \\
& +\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 2\right)\exp\left(-i2\pi\frac{2}{3}\times 0\right) \\
= \quad & 1+\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 2\right)+\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 2\right)=0.
\end{aligned}$$

— pour $k=1$: on obtient

$$\begin{aligned}
f_X(1) &= \frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 0\right)+f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 1\right) \\ +f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 2\right)\end{array}\right)\exp\left(-i2\pi\frac{0}{3}\times 1\right) \\
&+\frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 0\right)+f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 1\right) \\ +f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 2\right)\end{array}\right)\exp\left(-i2\pi\frac{1}{3}\times 1\right) \\
&+\frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 0\right)+f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 1\right) \\ +f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 2\right)\end{array}\right)\exp\left(-i2\pi\frac{2}{3}\times 1\right) \\
&= \frac{1}{3}\times 3f_X(1)=f_X(1)
\end{aligned}$$

— pour $k=1$: on obtient

$$\begin{aligned}
f_X(2) &= \frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 0\right)+f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 1\right) \\ +f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 2\right)\end{array}\right)\exp\left(-i2\pi\frac{0}{3}\times 2\right) \\
&+\frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 0\right)+f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 1\right) \\ +f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 2\right)\end{array}\right)\exp\left(-i2\pi\frac{1}{3}\times 2\right) \\
&+\frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} f_X(0)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 0\right)+f_X(1)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 1\right) \\ +f_X(2)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 2\right)\end{array}\right)\exp\left(-i2\pi\frac{2}{3}\times 2\right) \\
&= \frac{1}{3}\times 3f_X(3)=f_X(3)
\end{aligned}$$

11.8.7 Un peu de magie – série 2

Pour $l\in\{0,1,2,...,n-1\}$ fixé, on a

$$\begin{aligned}
f_X(l) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi_X\left(2\pi\frac{j}{n}\right)\exp\left(-i2\pi\frac{j}{n}l\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}f_X(k)\exp\left(i2\pi\frac{j}{n}k\right)\exp\left(-i2\pi\frac{j}{n}l\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f_X(k)\left(\sum_{j=0}^{n-1}\exp\left(i2\pi\frac{j}{n}k\right)\exp\left(-i2\pi\frac{j}{n}l\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}f_X(l)\sum_{j=0}^{n-1}\exp\left(i2\pi\frac{j}{n}l\right)\exp\left(-i2\pi\frac{j}{n}l\right) \\
&\quad +\frac{1}{n}\sum_{k=0,k\neq l}^{n-1}f_X(k)\left(\sum_{j=0}^{n-1}\exp\left(i2\pi\frac{j}{n}k\right)\exp\left(-i2\pi\frac{j}{n}l\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}f_X(l)\times\sum_{j=0}^{n-1}1+\frac{1}{n}\sum_{k=0,k\neq l}^{n-1}f_X(k)(0),
\end{aligned}$$

car

$$\exp\left(i2\pi\frac{j}{n}l\right)\exp\left(-i2\pi\frac{j}{n}l\right)=1$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-1}\exp\left(i2\pi\frac{j}{n}k\right)\exp\left(-i2\pi\frac{j}{n}l\right)=\sum_{j=0}^{n-1}\exp\left(i2\pi\frac{j}{n}(k-l)\right)=0$$

quand $k,l\in\{0,1,2,...,n-1\}$ avec $k\neq l$.

11.8.8 Un peu de magie – série 3

Soit les v.a. indépendantes $X_1,X_2\in\{0,1\}$ et on définit $S=X_1+X_2\in\{0,1,2\}$. Pour cette raison, on définit

$$\begin{aligned}
\underline{f}_{X_i} &= (f_{X_i}(0),f_{X_i}(1),f_{X_i}(2)) \\
\underline{\varphi}_{X_i} &= (\varphi_{X_i}(t_0),\varphi_{X_i}(t_1),\varphi_{X_i}(t_2))
\end{aligned}$$

où $f_{X_i}(2)=0$, $\varphi_X(t)$ pour $t=t_j=2\pi\frac{j}{n}$, pour $j=0,1,...,n-1$, avec $n=3$.

Pour $i=1,2$, on a

$$\varphi_{X_i}\left(2\pi\frac{0}{3}\right)=f_{X_i}(0)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 0\right)+f_{X_i}(1)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\times 1\right)$$

$$\varphi_{X_i}\left(2\pi\frac{1}{3}\right)=f_{X_i}(0)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 0\right)+f_{X_i}(1)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\times 1\right)$$

$$\varphi_{X_i}\left(2\pi\frac{2}{3}\right)=f_{X_i}(0)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 0\right)+f_{X_i}(1)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\times 1\right)$$

Ensuite, le résultat de $\underline{\varphi}_S=\underline{\varphi}_{X_1}\times\underline{\varphi}_{X_2}$ est

$$\underline{\varphi}_S=\underline{\varphi}_{X_1}\times\underline{\varphi}_{X_2}=\left(\varphi_{X_1}\left(2\pi\frac{0}{3}\right)\times\varphi_{X_2}\left(2\pi\frac{0}{3}\right),\varphi_{X_1}\left(2\pi\frac{1}{3}\right)\times\varphi_{X_2}\left(2\pi\frac{1}{3}\right),\varphi_{X_1}\left(2\pi\frac{2}{3}\right)\times\varphi_{X_2}\left(2\pi\frac{2}{3}\right)\right)$$

est

$$\begin{aligned}
\varphi_S\left(2\pi\frac{0}{3}\right) &= \varphi_{X_1}\left(2\pi\frac{0}{3}\right)\times\varphi_{X_2}\left(2\pi\frac{0}{3}\right)\\
&= f_{X_1}(0)\times f_{X_2}(0)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\right)\\
&\quad+\left(f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(1)+f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(0)\right)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\right)\\
&\quad+f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(1)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{2} f_S(k)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}k\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_S\left(2\pi\frac{1}{3}\right) &= \varphi_{X_1}\left(2\pi\frac{1}{3}\right)\times\varphi_{X_2}\left(2\pi\frac{1}{3}\right)\\
&= f_{X_1}(0)\times f_{X_2}(0)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\right)\\
&\quad+\left(f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(1)+f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(0)\right)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}\right)\\
&\quad+f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(1)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{2} f_S(k)\exp\left(i2\pi\frac{1}{3}k\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_S\left(2\pi\frac{2}{3}\right) &= \varphi_{X_1}\left(2\pi\frac{2}{3}\right)\times\varphi_{X_2}\left(2\pi\frac{2}{3}\right)\\
&= f_{X_1}(0)\times f_{X_2}(0)\exp\left(i2\pi\frac{0}{3}\right)\\
&\quad+\left(f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(1)+f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(0)\right)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}\right)\\
&\quad+f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(1)\exp\left(i2\pi\frac{4}{3}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{2} f_S(k)\exp\left(i2\pi\frac{2}{3}k\right).
\end{aligned}$$

En procédant à l'inversion (voir "Un peu de magie – série 1"), on va obtenir comme prévu les valeurs suivantes pour $f_S(k)$:

$$\begin{aligned}
&f_S(0) = f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(0)\\
&f_S(1) = f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(1)+f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(0)\\
&f_S(2) = f_{X_1}(1)\,f_{X_2}(1)
\end{aligned}$$

En résumé, en utilisant les fonctions caractéristiques (avec l'algorithme FFT), on peut faire tous les produits de convolution que l'on désire de manière très rapide et efficace.

11.8.9 Exemples

1. **Est-ce que cela fonctionne vraiment ?** Soit la v.a. discrète X avec les valeurs suivantes de fonction de masses de probabilité :

k	0	1	2	3
$f_X(k)$	0.3	0.5	0.15	0.05

On définit les vecteurs où

$$\begin{aligned}\underline{f}_X &= (f_X(0), f_X(1), f_X(2), f_X(3))\\ \underline{\varphi}_X &= (\varphi_X(t_0), \varphi_X(t_1), \varphi_X(t_2), \varphi_X(t_3)).\end{aligned}$$

On illustre la procédure de construction du vecteur de valeurs de la φ_X à partir du vecteur et la procédure d'inversion :

— **Construction** ($\underline{f}_X$ vers $\underline{\varphi}_X$) : On utilise la fonction R officielle `fft` (ou la fonction R fftmaison) et on obtient :
[1] 1.00+0.00i 0.15+0.45i -0.10+0.00i 0.15-0.45i

— **Inversion** ($\underline{\varphi}_X$ vers $\underline{f}_X$) : On utilise la fonction R officielle `fft` avec inverse=TRUE (ou la fonction R fftmaison.inv) et on obtient :
[1] 0.30 0.50 0.15 0.05

2. **Somme de 2 v.a. iid.** Soit la v.a. discrète X avec les valeurs suivantes de fonction de masses de probabilité :

k	0	1	2	3
$f_X(k)$	0.3	0.5	0.15	0.05

Soit les v.a. i.i.d. X_1 et X_2 avec $X_1 \sim X_2 \sim X$. On définit $S = X_1 + X_2$
On définit les vecteurs

$$\begin{aligned}\underline{f}_X &= (f_X(0), f_X(1), f_X(2), f_X(3), ..., f_X(7))\\ \underline{\varphi}_X &= (\varphi_X(t_0), \varphi_X(t_1), \varphi_X(t_2), \varphi_X(t_3), ..., \varphi_X(t_7))\end{aligned}$$

avec

$$f_X(4) = ... = f_X(7) = 0.$$

On définit aussi les vecteurs

$$\begin{aligned}\underline{f}_S &= (f_S(0), f_S(1), f_S(2), f_S(3), ..., f_S(7))\\ \underline{\varphi}_S &= (\varphi_S(t_0), \varphi_S(t_1), \varphi_S(t_2), \varphi_S(t_3), ..., \varphi_S(t_7))\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\underline{f}_{X_1} = \underline{f}_{X_2} = \underline{f}_X.$$

On sait que

$$\underline{\varphi}_S = \underline{\varphi}_{X_1} \times \underline{\varphi}_{X_2} = \underline{\varphi}_X \times \underline{\varphi}_X = \underline{\varphi}_X^2.$$

On illustre la procédure de construction du vecteur de valeurs de la φ_X à partir du vecteur et la procédure d'inversion :

— **Construction** ($\underline{f}_X$ vers $\underline{\varphi}_X$) : On utilise la fonction R officielle `fft` (ou la fonction R fftmaison) et on obtient :
[1] 1.0000000+0.0000000i 0.6181981+0.5389087i 0.1500000+0.4500000i -0.0181981+0.2389087i -0.1000000+0.0000000i
[6] -0.0181981-0.2389087i 0.1500000-0.4500000i 0.6181981-0.5389087i

— **Opération** sur $\underline{\varphi}_X$ ($\underline{\varphi}_S = \underline{\varphi}_X^2$) :
[1] 1.00000000+0.00000000i 0.09174621+0.66630465i -0.18000000+0.13500000i -0.05674621-0.00869535i 0.01000000-0.00000000i
[6] -0.05674621+0.00869535i -0.18000000-0.13500000i 0.09174621-0.66630465i

— **Inversion** ($\underline{\varphi}_S$ vers $\underline{f}_S$) : On utilise la fonction R officielle `fft` avec inverse=TRUE (ou la fonction R fftmaison.inv) et on obtient :

[1] 0.0900 0.3000 0.3400 0.1800 0.0725 0.0150 0.0025 0.0000

3. **Somme de 2 v.a. indépendantes.** Soit les v.a. discrètes indépendantes X_1 et X_2 avec les valeurs suivantes de leurs fonctions de masses de probabilité :

k	0	1	2	3
$f_{X_1}(k)$	0.3	0.5	0.15	0.05

et

k	0	1	2	3	4	5
$f_{X_2}(k)$	0.1	0.15	0.25	0.30	0.12	0.08

On définit $S = X_1 + X_2$

On définit les vecteurs

$$\begin{aligned}
\underline{f}_{X_1} &= (f_{X_1}(0), f_{X_1}(1), ..., f_{X_1}(15)) \\
\underline{\varphi}_{X_1} &= (\varphi_X(t_0), \varphi_X(t_1), ..., \varphi_X(t_{15})) \\
\underline{f}_{X_2} &= (f_{X_2}(0), f_{X_2}(1), ..., f_{X_2}(15)) \\
\underline{\varphi}_{X_2} &= (\varphi_{X_2}(t_0), \varphi_{X_2}(t_1), ..., \varphi_{X_2}(t_{15}))
\end{aligned}$$

avec

$$f_{X_1}(4) = ... = f_{X_1}(15) = 0 \quad \text{et} \quad f_{X_2}(6) = ... = f_{X2}(15) = 0$$

On définit aussi les vecteurs

$$\begin{aligned}
\underline{f}_S &= (f_S(0), f_S(1), f_S(2), f_S(3), ..., f_S(7)) \\
\underline{\varphi}_S &= (\varphi_S(t_0), \varphi_S(t_1), \varphi_S(t_2), \varphi_S(t_3), ..., \varphi_S(t_7))
\end{aligned}$$

On sait que

$$\underline{\varphi}_S = \underline{\varphi}_{X_1} \times \underline{\varphi}_{X_2}$$

On illustre la procédure de construction du vecteur de valeurs de la φ_X à partir du vecteur et la procédure d'inversion :

— **Construction** ($\underline{f}_{X_1}$ vers $\underline{\varphi}_{X_1}$) : On utilise la fonction R officielle `fft` (ou la fonction R fftmaison) et on obtient :

[1] 1.0000000+0.0000000i 0.8871400+0.3436017i 0.6181981+0.5389087i 0.3390817+0.5488716i 0.1500000+0.4500000i 0.0487862+0.3367396i

[7] -0.0181981+0.2389087i -0.0750079+0.1314697i -0.1000000+0.0000000i -0.0750079-0.1314697i -0.0181981-0.2389087i 0.0487862-0.3367396i

[13] 0.1500000-0.4500000i 0.3390817-0.5488716i 0.6181981-0.5389087i 0.8871400-0.3436017i

— **Construction** ($\underline{f}_{X_2}$ vers $\underline{\varphi}_{X_2}$) : On utilise la fonction R officielle `fft` (ou la fonction R fftmaison) et on obtient :

[1] 1.00000000+0.00000000i 0.49954898+0.70525343i -0.18263456+0.51162951i -0.22262768+0.04993892i -0.03000000-0.07000000i

[6] 0.06907429-0.06361447i 0.14263456+0.01162951i 0.05400441+0.11170004i -0.06000000+0.00000000i 0.05400441-0.11170004i

[11] 0.14263456-0.01162951i 0.06907429+0.06361447i -0.03000000+0.07000000i -0.22262768-0.04993892i -0.18263456-0.51162951i

[16] 0.49954898-0.70525343i

— **Opération** avec $\underline{\varphi}_{X_1}$ et $\underline{\varphi}_{X_2}$ ($\underline{\varphi}_S = \underline{\varphi}_{X_1} \times \underline{\varphi}_{X_2}$) :

[1] 1.00000000+0.00000000i 0.20084357+0.79730438i -0.38862594+0.21786501i -0.10289903-0.10526064i 0.02700000-0.02400000i

[6] 0.02479138+0.02015654i -0.00537406+0.03386501i -0.01873593-0.00127845i 0.00600000-0.00000000i -0.01873593+0.00127845i

[11] -0.00537406-0.03386501i 0.02479138-0.02015654i 0.02700000+0.02400000i -0.10289903+0.10526064i -0.38862594-0.21786501i

[16] 0.20084357-0.79730438i

— **Inversion** ($\underline{\varphi}_S$ vers $\underline{f}_S$) : On utilise la fonction R officielle `fft` avec inverse=TRUE (ou la fonction R fftmaison.inv) et on obtient :

[1] 0.0300 0.0950 0.1650 0.2425 0.2310 0.1415 0.0730 0.0180 0.0040 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

4. **Calcul des valeurs de la fonction de masses de probabilités d'une v.a. discrète à partir de sa fonction caractéristique.** On débute avec un exemple dont on connaît la réponse. Soit la v.a. $M \sim Binom\,(n = 30, q = 0.1)$, avec

$$\varphi\,(t) = \left(1 - q + q\mathrm{e}^{it}\right)^n .$$

On convient que le résultat de $\sum_{i=1}^{0} a_i$ est égal à 0. Soit la v.a. $X = \sum_{k=1}^{M} B_k$ avec les hypothèses habituelles et $\Pr\,(B_k = 1) = \Pr\,(B = 1) = 1$. On observe que

$$f_X\,(k) = f_M\,(k)$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

— **Construction** ($\underline{f}_B$ vers $\underline{\varphi}_B$) : On utilise la fonction R officielle `fft` (ou la fonction R fftmaison) et on obtient :

[1] 1.0000000+0.0000000i 0.9807853+0.1950903i 0.9238795+0.3826834i 0.8314696+0.5555702i 0.7071068+0.7071068i

[6] 0.5555702+0.8314696i 0.3826834+0.9238795i 0.1950903+0.9807853i 0.0000000+1.0000000i -0.1950903+0.9807853i

[11] -0.3826834+0.9238795i -0.5555702+0.8314696i -0.7071068+0.7071068i -0.8314696+0.5555702i -0.9238795+0.3826834i

[16] -0.9807853+0.1950903i -1.0000000+0.0000000i -0.9807853-0.1950903i -0.9238795-0.3826834i -0.8314696-0.5555702i

[21] -0.7071068-0.7071068i -0.5555702-0.8314696i -0.3826834-0.9238795i -0.1950903-0.9807853i 0.0000000-1.0000000i

[26] 0.1950903-0.9807853i 0.3826834-0.9238795i 0.5555702-0.8314696i 0.7071068-0.7071068i 0.8314696-0.5555702i

[31] 0.9238795-0.3826834i 0.9807853-0.1950903i

— **Opération** avec $\underline{\varphi}_B$ ($\underline{\varphi}_X = \left(1 - q + q \times \underline{\varphi}_B\right)^n$) :

[1] 1.000000000+0.000000000i 0.790796677+0.525281437i 0.327456479+0.744207114i -0.077093964+0.625238991i

[5] -0.254475001+0.363573062i -0.245904261+0.146643648i -0.167563300+0.033459578i -0.095479976-0.004421461i

[9] -0.050151204-0.009028824i -0.025971098-0.004898136i -0.013638424-0.000853890i -0.007103398+0.001419038i

[13] -0.003372958+0.002257246i -0.001115171+0.002214689i 0.000254730+0.001681778i 0.001000431+0.000894749i

[17] 0.001237940+0.000000000i 0.001000431-0.000894749i 0.000254730-0.001681778i -0.001115171-0.002214689i

[21] -0.003372958-0.002257246i -0.007103398-0.001419038i -0.013638424+0.000853890i -0.025971098+0.004898136i

[25] -0.050151204+0.009028824i -0.095479976+0.004421461i -0.167563300-0.033459578i -0.245904261-0.146643648i

[29] -0.254475001-0.363573062i -0.077093964-0.625238991i 0.327456479-0.744207114i 0.790796677-0.525281437i

— **Inversion** ($\underline{\varphi}_X$ vers $\underline{f}_X$) : On utilise la fonction R officielle `fft` avec inverse=TRUE (ou la fonction R fftmaison.inv) et on obtient :

[1] 0.0423911583 0.1413038609 0.2276562204 0.2360879322 0.1770659492 0.1023047706 0.0473633197 0.0180431694

[9] 0.0057637902 0.0015654739 0.0003652772 0.0000737934 0.0000129822 0.0000019973 0.0000002695 0.0000000319

[17] 0.0000000033 0.0000000003 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000

[25] 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000

— **Vérification :** > round(dbinom(0 :30,30,0.1),10)

[1] 0.0423911583 0.1413038609 0.2276562204 0.2360879322 0.1770659492 0.1023047706 0.0473633197 0.0180431694

[9] 0.0057637902 0.0015654739 0.0003652772 0.0000737934 0.0000129822 0.0000019973 0.0000002695 0.0000000319

[17] 0.0000000033 0.0000000003 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000

[25] 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000

5. **Calcul des valeurs de la fonction de masses de probabilités d'une v.a. discrète à partir de sa fonction caractéristique.**

Soit les v.a. indépendantes

$$K_{123} \sim Pois\,(\gamma_{123}),\ K_{12} \sim Pois\,(\gamma_{12}),\ K_{23} \sim Pois\,(\gamma_{23})$$
$$K_1 \sim Pois\,(\lambda_1 - \gamma_{12} - \gamma_{123})\ K_2 \sim Pois\,(\lambda_2 - \gamma_{12} - \gamma_{23} - \gamma_{123})\ K_3 \sim Pois\,(\lambda_3 - \gamma_{23} - \gamma_{123})\,.$$

On définit le vecteur de v.a. $\underline{M} = (M_1, M_2, M_3)$ avec

$$\begin{aligned} M_1 &= K_1 + K_{12} + K_{123} \\ M_2 &= K_2 + K_{12} + K_{23} + K_{123} \\ M_3 &= K_3 + K_{23} + K_{123}. \end{aligned}$$

Démontrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\underline{M}}\,(s_1, s_2, s_3) &= \mathrm{e}^{(\lambda_1-\gamma_{12}-\gamma_{123})(s_1-1)}\mathrm{e}^{(\lambda_2-\gamma_{12}-\gamma_{23}-\gamma_{123})(s_2-1)}\mathrm{e}^{(\lambda_3-\gamma_{23}-\gamma_{123})(s_3-1)} \\ &\quad \times \mathrm{e}^{\gamma_{12}(s_1 s_2-1)}\mathrm{e}^{\gamma_{23}(s_2 s_3-1)}\mathrm{e}^{\gamma_{123}(s_1 s_2 s_3-1)}. \end{aligned}$$

On définit $N = M_1 + M_2 + M_3$. On déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N\,(s) &= \mathcal{P}_{\underline{M}}\,(s, s, s) \\ &= \mathrm{e}^{(\lambda_1-\gamma_{12}-\gamma_{123})(s-1)}\mathrm{e}^{(\lambda_2-\gamma_{12}-\gamma_{23}-\gamma_{123})(s-1)}\mathrm{e}^{(\lambda_3-\gamma_{23}-\gamma_{123})(s-1)} \\ &\quad \times \mathrm{e}^{\gamma_{12}\left(s^2-1\right)}\mathrm{e}^{\gamma_{23}\left(s^2-1\right)}\mathrm{e}^{\gamma_{123}\left(s^3-1\right)}. \end{aligned}$$

Hypothèses :

λ_1	λ_1	λ_1	γ_{12}	γ_{23}	γ_{123}
1.5	2.3	1.9	0.4	0.5	0.2

On fixe

$$\underline{f}_B = (f_B\,(0)\,, f_B\,(1)\,, ..., f_S\,(1023))$$

— **Construction** ($\underline{f}_B$ vers $\underline{\varphi}_B$) : On utilise la fonction R officielle `fft` (ou la fonction R fftmaison) et on obtient (premières valeurs) :

[1] 1.0000000+0.0000000i 0.9999812+0.0061359i 0.9999247+0.0122715i 0.9998306+0.0184067i 0.9996988+0.0245412i

[6] 0.9995294+0.0306748i 0.9993224+0.0368072i 0.9990777+0.0429383i 0.9987955+0.0490677i 0.9984756+0.0551952i

— **Opération** avec $\underline{\varphi}_B$ ($\underline{\varphi}_N = \mathcal{P}_N\left(\underline{\varphi}_B\right)$) et on obtient (premières valeurs) :

[1] 1.0000000+0.0000000i 0.9992248+0.0349613i 0.9969016+0.0698418i 0.9930376+0.1045612i 0.9876446+0.1390396i

[6] 0.9807393+0.1731982i 0.9723427+0.2069592i 0.9624807+0.2402467i 0.9511832+0.2729864i 0.9384845+0.3051060i

— **Inversion** ($\underline{\varphi}_X$ vers $\underline{f}_X$) : On utilise la fonction R officielle `fft` avec inverse=TRUE (ou la fonction R fftmaison.inv) et on obtient (premières valeurs) :

[1] 0.01227734 0.04051522 0.07789972 0.11245429 0.13390695 0.13821010 0.12743307 0.10709307 0.08321409 0.06042598

— **Vérification :** $E[N] = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5.7$ vs

sum(fx*((1 :nnX)-1))

[1] 5.7

11.9 Transformée de Fourier rapide

11.9.1 Description de la méthode

La transformée de Fourier rapide (en anglais *Fast Fourier Transform,* avec l'acronyme FFT) est un algorithme performant pour déterminer la transformée de Fourier pour une v.a. discrète. La FFT est programmée dans plusieurs logiciels notamment en `R`.

L'idée de la méthode est assez simple. On doit faire un bref rappel des nombre complexes. Soit le nombre complexe $z = x + yi$ présenté sous sa forme cartésienne où $i = \sqrt{-1}$ est l'unité imaginaire, x désigne la partie réelle de z (notée $\mathrm{Re}(z)$) et y désigne la partie imaginaire (notée $\mathrm{Im}(z)$). Les règles d'addition et de multiplication sont $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i$ et $z_1 \times z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i$. Le nombre z peut être représenté sous sa forme polaire $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, où $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ correspond à l'argument de z, soit l'angle du vecteur z dans le plan complexe. Selon la formule d'Euler, on a la relation $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. Cette relation permet de déduire que $z = r\mathrm{e}^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$.

On sait qu'il est possible d'identifier la loi d'une v.a. à partir de sa fgm Si la v.a. est discrète, on peut aussi identifier sa loi à partir de sa fgp

Soit une v.a. X de loi discrète définie sur $\mathbb{N}$ avec fonction de masse de probabilité f_X. On définit la fonction caractéristique $\widetilde{f}_X$ pour cette v.a. par

$$\widetilde{f}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{itk} f_X(k).$$

La fonction caractéristique est une généralisation de la fgm Elle existe pour toute loi (et même dans le cas des lois où la fgm n'existe pas). La fonction caractéristique est aussi appelée la transformée de Fourier (voir, p. ex., [Klugman et al., 2012]). Les principales propriétés liées aux fgm sont aussi valides pour les fonctions caractéristiques. Si $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où $X_1, ..., X_n$ sont des v.a. indépendantes, alors on a

$$\widetilde{f}_S(t) = \widetilde{f}_{X_1}(t) \times ... \times \widetilde{f}_{X_n}(t).$$

Dans le cas où la v.a. X est définie par

$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases},$$

avec $I \sim Bern(q)$, alors on a

$$\widetilde{f}_X(t) = P_I\left(\widetilde{f}_B(t)\right) = 1 - q + q\widetilde{f}_B(t).$$

Si la v.a. X est définie selon une loi composée avec les hypothèses usuelles

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où la v.a. M obéit à une loi de fréquence, alors on a

$$\widetilde{f}_X(t) = P_M\left(\widetilde{f}_B(t)\right).$$

Soit le vecteur $\underline{f} = (f_0, f_1, ..., f_{n-1})$. Le résultat de la FFT appliquée à $\underline{f}$ est un vecteur $\underline{\widetilde{f}} = \left(\widetilde{f}_0, ..., \widetilde{f}_{n-1}\right)$ où

$$\widetilde{f}_j = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}jk} f_k, \quad j = 0, 1, ..., n-1.$$

La FFT produit aussi l'application inverse, la transformée inverse de Fourier rapide (notée IFFT), sous la forme suivante :

$$f_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{n}jk} \widetilde{f}_k, \quad j = 0, 1, ..., n-1.$$

Généralement, le résultat de la FFT dépend de la longueur n du vecteur. Le qualificatif "rapide" de la FFT vient du fait que l'algorithme sépare le vecteur en deux avant de produire les applications et il additionne les résultats. Pour une utilisation efficiente de la FFT, le vecteur $\underline{\widetilde{f}}$ doit compter un nombre de composantes d'une longueur $n = 2^m$, où m est un entier élevé (ex : $m = 14$, 15, 16 ou plus).

11.9.2 Transformée de Fourier rapide et R

La FFT est programmée dans plusieurs logiciels, dont le logiciel R. Généralement, la fonction FFT programmée dans le logiciel permet de déterminer la fonction caractéristique d'une v.a. X à partir d'un vecteur des valeurs de sa fonction de masse de probabilité. Elle permet aussi de calculer les valeurs de la fonction de masse de probabilité d'une v.a. X à partir de sa fonction caractéristique. On explique comment appliquer la FFT en R dans différents contextes.

11.9.3 Somme de deux v.a. discrètes indépendantes

Soit une v.a. S où $S = X + Y$. Les v.a. X et Y sont des v.a. discrètes indépendantes avec fonctions de masse de probabilité f_X et f_Y. On veut calculer la fonction de masse de probabilité f_S de la v.a. S.

Algorithme 11.43 *Les étapes sont les suivantes :*

1. *Construire les vecteurs $\underline{f}_X$ et $\underline{f}_Y$. Ils doivent être de même longueur 2^m, ce qui est possible en ajoutant suffisamment de 0 à chacun des vecteurs.*
2. *Utiliser la fonction `fft` pour produire les vecteurs $\underline{\widetilde{f}}_X$ et $\underline{\widetilde{f}}_Y$ à partir des vecteurs $\underline{f}_X$ et $\underline{f}_Y$.*
3. *Faire le produit des deux vecteurs $\underline{\widetilde{f}}_X$ et $\underline{\widetilde{f}}_Y$: $\underline{\widetilde{f}}_S = \underline{\widetilde{f}}_X \times \underline{\widetilde{f}}_Y$ (c.-à-d. la composante i de $\underline{\widetilde{f}}_X$ multiplie la composante i de $\underline{\widetilde{f}}_Y$)*
4. *Utiliser la fonction `fft (inverse)` pour produire le vecteur $\underline{f}_S$ à partir du vecteur $\underline{\widetilde{f}}_S$.*

La procédure est illustrée dans le langage R. Les vecteurs $\underline{\widetilde{f}}_X$ et $\underline{\widetilde{f}}_Y$ doivent comporter chacun 2^m éléments où m est fixé de telle sorte que 2^m excède le nombre de valeurs non nulles de la fonction de masse de probabilité de la v.a. S. Par exemple, si $X \in \{0, 1, ..., 10\}$ (11 éléments) et $Y \in \{0, 1, ..., 20\}$ (21 éléments) alors $S \in \{0, 1, ..., 30\}$ (31 éléments). Donc, $\underline{\widetilde{f}}_X$ et $\underline{\widetilde{f}}_Y$ doivent avoir au moins 2^5 éléments. Il faut ajouter 21 " 0 " dans le vecteur de $\underline{\widetilde{f}}_X$ et 11 "0" dans le vecteur de $\underline{\widetilde{f}}_Y$.

Exemple 11.44 ***Exemple de fonction R.*** *On reproduit ci-dessous un exemple de fonction R qui permet de faire ce calcul en ayant recours à la fonction `fft` déjà programmée en R.*

Exemple avec la fonction R.

11.9.4 Somme de n v.a. discrètes indépendantes

Soit une v.a. S où $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les v.a. X_1, ..., X_n sont des v.a. discrètes indépendantes définies sur le support $\{0, 1h, 2h, ...\}$ et avec fonctions de masse de probabilité f_{X_1}, ..., f_{X_n}. On veut calculer la fonction de masse de probabilité f_S de la v.a. S.

Algorithme 11.45 *Les étapes sont les suivantes :*

1. *Construire les vecteurs* $\underline{f}_{X_1}$, ..., $\underline{f}_{X_n}$ *avec un nombre égal à* 2^m *composantes, ce qui est fait en ajoutant suffisamment de 0.*
2. *Utiliser la fonction* `fft` *pour produire les vecteurs* $\underline{\widetilde{f}}_{X_1}$, ..., $\underline{\widetilde{f}}_{X_n}$ *à partir des vecteurs* $\underline{f}_{X_1}$, ...,$\underline{f}_{X_n}$.
3. *Faire le produit des n vecteurs* $\underline{\widetilde{f}}_{X_1}$, ..., $\underline{\widetilde{f}}_{X_n}$: $\underline{\widetilde{f}}_S = \underline{\widetilde{f}}_{X_1} \times ... \times \underline{\widetilde{f}}_{X_n}$.
4. *Utiliser la fonction* `fft (inverse)` *pour produire le vecteur* $\underline{f}_S$ *à partir du vecteur* $\underline{\widetilde{f}}_S$.

On fournit un exemple de fonction R construite pour appliquer cette procédure.

Exemple 11.46 ***Exemple de fonction R.*** *On reproduit ci-dessous un exemple de fonction R qui permet de faire ce calcul en ayant recours à la fonction* `fft` *déjà programmée en* `R` *:*
FONCTION R - ALGO
□

Dans l'exemple suivant, on utilise la fonction de l'exemple 11.46.

Exemple 11.47 *Pour des fins d'illustration, on suppose un portefeuille de 200 contrats et on examine le nombre de sinistres pour l'ensemble du portefeuille. On suppose que* $X_i \sim BN(r_i, q_i)$ *où* $r_i = 2$, $i = 1, 2, ..., 100$, $r_i = 3$, $i = 101, 102, ..., 200$, $q_i = \frac{8}{10}$, $i = 1, 2, ..., 60$, $q_i = \frac{9}{10}$, $i = 61, 62, ..., 100$, $q_i = \frac{8.5}{10}$, $i = 101, 102, ..., 170$, $q_i = \frac{9.5}{10}$, $i = 171, 172, ..., 200$. *On obtient les valeurs suivantes de* f_S *où* $S = \sum_{i=1}^{200} X_i$ *en utilisant la fonction* `R` `fft.nrisks` *de l'exemple 11.46 :*

k	70	80	90	100	110	120
$f_S(k)$	0.023570	0.040784	0.024751	0.006029	0.000656	0.000035

À l'aide des valeurs obtenues pour f_S, *on détermine que* $E[S] = 80.68455$ *et que* $\mathrm{Var}(S) = 95.9613$. *Ces valeurs sont vérifiables car on sait évaluer les valeurs exactes de l'espérance et la variance de* S. □

11.9.5 Somme aléatoire (loi composée)

Soit une v.a. X qui obéit à une loi composée avec $X = B_1 + ... + B_M$ si $M > 0$ ou $X = 0$ si $M = 0$ en supposant les hypothèses usuelles. On suppose que les v.a. B_1, B_2, ... prennent des valeurs définies sur le support $\{0, 1h, 2h, ...\}$. On veut calculer la fonction de masse de probabilité f_X de la v.a. X qui est aussi définie sur le support $\{0, 1h, 2h, ...\}$.

Algorithme 11.48 *Les étapes sont les suivantes :*

1. *Construire le vecteur* $\underline{f}_B$. *Il important d'ajouter suffisamment de 0.*
2. *Utiliser la fonction* `fft` *pour produire le vecteur* $\underline{\widetilde{f}}_B$ *à partir du vecteur* $\underline{f}_B$.
3. *Faire le calcul à l'aide de la fgp de* M *et du vecteur* $\underline{\widetilde{f}}_B$: $\underline{\widetilde{f}}_X = P_M\left(\underline{\widetilde{f}}_B\right)$.
4. *Utiliser la fonction* `fft (inverse)` *pour produire le vecteur* $\underline{f}_X$ *à partir du vecteur* $\underline{\widetilde{f}}_X$.

Une application de cet algorithme est donnée dans le prochain exemple.

Exemple 11.49 ***Exemple de fonction R.*** *On reproduit ci-dessous une fonction* `R` *construite dans le cas de la loi Poisson composée qui permet de faire ce calcul en ayant recours à la fonction* `fft` *déjà programmée en* `R`.
FONCTION R - ALGO
□

Avec les mêmes hypothèses que l'exemple 11.36 illustrant l'application de l'algorithme de Panjer dans le cas de la loi Poisson composée, on obtient des valeurs identiques pour f_X. On traite l'exemple suivant.

Exemple 11.50 *Soit une v.a. X définie par*

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} B_i, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

avec les hypothèses usuelles et $B \sim Pa\,(1.5, 5)$. On teste le résultat asymptotique qui est fourni en (4.23) au chapitre 4 et qui concerne les distributions subexponentielles, soit

$$\overline{F}_X\,(x) \simeq E\,[M]\,\overline{F}_B\,(x)\,,$$

quand $x \to \infty$. À cette fin, deux hypothèses sont considérées pour la distribution de la fréquence : (1) $M \sim Pois\,(\lambda = 10)$ et (2) $M \sim BN\left(r = 0.5, q = \frac{r}{r+\lambda}\right)$ de telle sorte que $E\,[M] = 10$, pour les deux hypothèses. Afin d'évaluer $F_X\,(x)$, on discrétise F_B en appliquant les méthodes lower *et* upper *avec un pas $h = 1$. Les valeurs obtenues des trois approximations pour $F_X\,(x)$ sont les suivantes :*

x	$\overline{F}_X\,(x)$ hyp(1) lower	$\overline{F}_X\,(x)$ hyp(2) lower	$E\,[M]\,\overline{F}_B\,(x)$
1000	0.00412294	0.00774507	0.00350918
5000	0.00032593	0.00035019	0.00031575
10 000	0.00011350	0.00011737	0.00011172
50 000	0.00001003	0.00001009	0.00001000
100 000	0.00000354	0.00000355	0.00000354
500 000	0.00000032	0.00000032	0.00000032

x	$\overline{F}_X\,(x)$ hyp(1) upper	$\overline{F}_X\,(x)$ hyp(2) upper	$E\,[M]\,\overline{F}_B\,(x)$
1000	0.00404723	0.00679330	0.00350918
5000	0.00032483	0.00034628	0.00031575
10 000	0.00011331	0.00011678	0.00011172
50 000	0.00001003	0.00001008	0.00001000
100 000	0.00000354	0.00000355	0.00000354
500 000	0.00000032	0.00000032	0.00000032

De plus, les valeurs obtenues pour l'approximation de $VaR_\kappa\,(X)$ sont fournies dans le tableau suivant :

κ	$VaR_\kappa\,(X)$ hyp(1) lower	$VaR_\kappa\,(X)$ hyp(2) lower	$F_B^{-1}\left(1 - \frac{1-\kappa}{E[M]}\right)$
0.9	181	275	102.7217
0.99	595	899	495
0.999	2 420	2 673	2315.794
0.9999	10 873	11 091	10 767.17
0.99999	50 101	50 313	49 995
0.999999	232 180	232 391	232 074.4

κ	$VaR_\kappa\,(X)$ hyp(1) upper	$VaR_\kappa\,(X)$ hyp(2) upper	$F_B^{-1}\left(1 - \frac{1-\kappa}{E[M]}\right)$
0.9	169	247	102.7217
0.99	584	843	495
0.999	2409	2632	2315.794
0.9999	10 862	11 058	10 767.17
0.99999	50 090	50 281	49 995
0.999999	232 169	232 360	232 074.4

Pour des valeurs très élevées de x, le résultat asymptotique est satisfaisant, c.-à-d. le choix de la loi de M n'affecte par le comportement asymptotique de $\overline{F}_X\,(x)$. Comme approximation de $\overline{F}_X\,(x)$, le résultat asymptotique doit être utilisé avec prudence, notamment pour l'approximation de la mesure VaR, qu'elle a tendance à sous-estimer. Néanmoins, il peut être employé afin de produire une valeur approximative de la VaR pour des valeurs élevées de κ, p. ex., $\kappa > 0.9999$, en particulier quand le paramètre α de la loi de Pareto est entre 1 et 2. □

11.9.6 Pot-pourri

La FFT est notamment très utile pour agréger les coûts de plusieurs risques (notamment des lignes d'affaires). On a recours à l'exemple suivant pour l'expliquer.

Exemple 11.51 *On considère le portefeuille d'une compagnie d'assurance IARD. Le portefeuille est composé de deux lignes d'affaires : assurance habitation aux particuliers et assurance automobile aux particuliers. On suppose que tous les risques individuels sont indépendants.*

— *Assurance habitation (120 contrats). Les coûts pour un contrat sont représentés par la v.a. X où*

$$X = \begin{cases} B, & I = 1, \\ 0, & I = 0, \end{cases}$$

avec $E[I] = 0.008$ et $B = U \times c$. La v.a. U représente le pourcentage de dommage et la constante c représente la valeur de la résidence. Les v.a. U et I sont indépendantes. On suppose que

$$\Pr\left(U = \frac{j}{20}\right) = \frac{0.25 \times 0.75^{j-1}}{1 - 0.75^{20}}, \quad j = 1, 2, ..., 20,$$

et que $c = 200\ 000$. La v.a. S_{TOT}^H représente le montant total des sinistres pour l'ensemble de la ligne d'affaires en assurance habitation.

— *Assurance automobile (100 contrats). Les 100 contrats sont divisés en deux classes A (75 contrats) et B (25 contrats). Les coûts pour un contrat sont représentés par la v.a. X où $X \sim PComp(\lambda; F_C)$:*

  — ***Classe A**. On suppose que $\lambda = 0.036$ et que $f_C(10\ 000j) = \Pr(C = 10\ 000j) = 0.4 \times 0.6^{j-1}$, pour $j \in \mathbb{N}^+$.*

  — ***Classe B**. On suppose que $\lambda = 0.054$ et que $f_C(10\ 000j) = \Pr(C = 10\ 000j) = 0.5 \times 0.5^{j-1}$, pour $j \in \mathbb{N}^+$.*

On définit la v.a. S_{TOT}^A comme étant la somme des coûts pour l'ensemble de la ligne d'affaires en assurance automobile.

Le montant total des sinistres pour l'ensemble du portefeuille est représenté par la v.a. S_{TOT} où $S_{TOT} = S_{TOT}^H + S_{TOT}^A$. On constate que la v.a. S_{TOT}^H obéit à une loi binomiale composée et que S_{TOT}^A obéit à une loi Poisson composée. Avec les méthodes étudiées dans ce chapitre, on peut recourir à deux approches pour évaluer les valeurs de $f_{S_{TOT}^A}$, $f_{S_{TOT}^H}$ et $f_{S_{TOT}}$. Approche 1 : on évalue $f_{S_{TOT}^A}$ et $f_{S_{TOT}^H}$ à l'aide de l'algorithme de Panjer et on calcule en suite les valeurs de $f_{S_{TOT}}$ à l'aide du produit de convolution. Approche 2 : on calcule directement les valeurs de $f_{S_{TOT}^A}$, $f_{S_{TOT}^H}$ et $f_{S_{TOT}}$ à l'aide de la FFT. L'approche 2 est plus rapide que l'approche 1. On obtient les valeurs exactes suivantes de $f_{S_{TOT}^H}(10\ 000k)$, $f_{S_{TOT}^A}(10\ 000k)$ et $f_{S_{TOT}}(10\ 000k)$ pour $k = 0, 1, ..., 5$:

k	$f_{S_{TOT}^A}(10\ 000k)$	$f_{S_{TOT}^H}(10\ 000k)$	$f_{S_{TOT}}(10\ 000k)$
0	0.01742237	0.38141754	0.006645199
1	0.03057627	0.09257200	0.013275149
2	0.04400042	0.08056924	0.021016747
3	0.05554270	0.06966835	0.028935462
4	0.06437072	0.05989944	0.036412691
5	0.07015226	0.05124033	0.042980930

De plus, on déduit que $VaR_{0.995}(S_{TOT}^A) = 300\ 000$, $VaR_{0.995}(S_{TOT}^H) = 240\ 000$ et $VaR_{0.995}(S_{TOT}) = 280\ 000$. □

L'exemple suivant traite d'un portefeuille avec une structure de dépendance fondée sur les chocs communs.

Exemple 11.52 *Soit un portefeuille avec trois lignes d'affaires dont les coûts sont représentés par les v.a. X_1, X_2, X_3 où $X_i \sim PComp(\lambda_i; F_{B_i})$ pour $i = 1, 2, 3$. Soit les v.a. indépendantes $K_i \sim Pois(\alpha_i)$ ($i = 1, 2, 3$), $K_{12} \sim Pois(\alpha_{12})$, $K_{23} \sim Pois(\alpha_{23})$, $K_{13} \sim Pois(\alpha_{13})$, $K_{123} \sim Pois(\alpha_{123})$. Le nombre de sinistres*

pour la ligne d'affaires i est défini par M_i $(i = 1, 2, 3)$ où

$$\begin{aligned} M_1 &= K_1 + K_{12} + K_{13} + K_{123}, \\ M_2 &= K_2 + K_{12} + K_{23} + K_{123}, \\ M_3 &= K_3 + K_{13} + K_{23} + K_{123}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que (M_1, M_2, M_3) obéit à une loi de Poisson multivariée où

$$\begin{aligned} M_1 &\sim Pois\left(\lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{123}\right), \\ M_2 &\sim Pois\left(\lambda_2 = \alpha_2 + \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{123}\right), \\ M_3 &\sim Pois\left(\lambda_3 = \alpha_3 + \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{123}\right). \end{aligned}$$

L'expression de la fgp de (M_1, M_2, M_3) est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{M_1,M_2M_3}(t_1, t_2, t_3) &= \mathrm{e}^{\alpha_1 t_1 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_2 t_2 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_3 t_3 - 1} \\ &\quad \times \mathrm{e}^{\alpha_{12} t_1 t_2 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_{13} t_1 t_3 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_{23} t_2 t_3 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_{123} t_1 t_2 t_3 - 1}. \end{aligned}$$

Les montants de sinistres sont indépendants de (M_1, M_2, M_3). On suppose que $B_1 \sim LN\left(\mu_1 = 4.625, \sigma_1^2 = 1^2\right)$, $B_2 \sim LN\left(\mu_2 = 4, \sigma_2^2 = 1.5^2\right)$ et $B_3 \sim LN\left(\mu_3 = 5, \sigma_3^2 = 0.5^2\right)$. On note que $E[B_i] = 168.1741$, $i = 1, 2, 3$. De plus, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2.5$, $\alpha_3 = 3.5$, $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{13} = 1.2$, $\alpha_{23} = 1.5$ et $\alpha_{123} = 0.4$. On veut évaluer F_S où $S = X_1 + X_2 + X_3$. On déduit que $E[S] = 2791.691$ et $\mathrm{Var}(S) = 2\ 319\ 520$. De plus, on sait que

$$\widetilde{f}_S(t) = P_{M_1,M_2M_3}\left(\widetilde{f}_{B_1}(t), \widetilde{f}_{B_2}(t), \widetilde{f}_{B_3}(t)\right). \tag{11.28}$$

Afin d'utiliser (11.28), on approxime B_1, B_2 et B_3 par les v.a. discrètes B_1', B_2' et B_3' en ayant recours à la méthode de dispersion de la masse avec préservation de l'espérance (avec $h = 100$). Alors, on approxime la v.a. S par la v.a. S' où

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_{S'}(t) &= P_{M_1,M_2M_3}\left(\widetilde{f}_{B_1'}(t), \widetilde{f}_{B_2'}(t), \widetilde{f}_{B_3'}(t)\right). \\ &= \mathrm{e}^{\alpha_1\left(\widetilde{f}_{B_1'}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\alpha_2\left(\widetilde{f}_{B_2'}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\alpha_3\left(\widetilde{f}_{B_3'}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\alpha_{12}\left(\widetilde{f}_{B_1'}(t)\widetilde{f}_{B_2'}(t)-1\right)} \\ &\quad \times \mathrm{e}^{\alpha_{13}\left(\widetilde{f}_{B_1'}(t)\widetilde{f}_{B_3'}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\alpha_{23}\left(\widetilde{f}_{B_3'}(t)\widetilde{f}_{B_3'}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\alpha_{123}\left(\widetilde{f}_{B_1'}(t)\widetilde{f}_{B_2'}(t)\widetilde{f}_{B_3'}(t)-1\right)}. \end{aligned}$$

On utilise la transformée rapide de Fourier pour obtenir $\widetilde{f}_{S'}(t)$ et ensuite l'inverser afin de produire les valeurs de $f_{S'}(kh)$, $k \in \mathbb{N}$. On choisit $h = 1$ pour la discrétisation et on calcule $f_{B_i'}(kh)$ pour $k = 0, 1, ..., 10^6$. Les calculs ont été effectués en `R` *en fixant $2^{22} = 4\ 194\ 304$. Comme prévu, on obtient $E[S'] = 2791.691$ et $\mathrm{Var}(S') = 2\ 319\ 713$, légèrement supérieure à $\mathrm{Var}(S)$. Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de $f_{S'}(kh)$ pour $k = 1000, 2000, ..., 10\ 000$:*

k	$f_{S'}(kh)$	$F_{S'}(kh)$
1000	0.00012552	0.03626635
2000	0.00036790	0.30295692
3000	0.00028575	0.65045957
4000	0.00013118	0.85406644
5000	0.00005080	0.93915836
6000	0.00001995	0.97195940
7000	0.00000864	0.98533744
8000	0.00000420	0.99143206
9000	0.00000227	0.99454508
10 000	0.00000134	0.99629763

On utilise $VaR_\kappa(S')$ et $TVaR_\kappa(S')$ pour produire une approximation de $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ avec

$\kappa = 0.5$, 0.95, 0.99, 0.995, 0.999 :

κ	$VaR_\kappa(S')$	$TVaR_\kappa(S')$
0.5	2534	3791.523
0.95	5239	6984.296
0.99	7694	10 662.34
0.995	9213	12 989.67
0.999	14 622	21 035.57

Il est démonté au chapitre 12 que l'approximation de $TVaR_\kappa(S)$ par $TVaR_\kappa(S')$ est conservatrice pour toute valeur de κ. □

11.9.7 Commentaires

L'évaluation par la FFT est très efficace en termes de temps de calcul. Dans les exemples présentés dans ce chapitre, les temps de calcul obtenus par la FFT ont été plus rapides que ceux obtenus avec les autres méthodes récursives. La méthode est simple d'application.

11.10 Distribution mélange d'Erlang

11.10.1 Définition de base

Soit la v.a. Y obéissant à la loi mélange d'Erlang avec un paramètre d'échelle commun dont la fonction de densité et la fonction de répartition sont

$$f_Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k h(x;k,\beta) \text{ et } F_Y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k H(x;k,\beta),$$

où ζ_i est un poids positif attribué à la i-ème distribution d'Erlang et β est le paramètre d'échelle commun. On peut aussi tenir compte du cas où il y a une masse de probabilité non nulle à 0, ce qui conduit à

$$F_Y(x) = \zeta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k H(x;k,\beta),$$

où $\zeta_0 = \Pr(K=0) \geq 0$.

11.10.2 Le mélange d'Erlang est aussi une somme aléatoire de v.a. obéissant à une loi exponentielle

La loi mélange d'Erlang s'interprète aussi comme une somme aléatoire où

$$Y = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} C_k, & K > 0 \\ 0, & K = 0 \end{cases}, \tag{11.29}$$

avec $C_k \sim Exp(\beta)$ et K est une v.a. discrète dont la fonction de masse de probabilité est $f_K(k) = \Pr(K=k) = \zeta_k$, $k \in \mathbb{N}$, et la fgp est $\mathcal{P}_K(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k s^k$. Aussi, la fgm de la v.a. Y est $\mathcal{M}_Y(r) = \mathcal{P}_K(\mathcal{M}_C(r))$ avec $\mathcal{M}_C(r) = \frac{\beta}{\beta - r}$. On utilise la notation $Y \sim MixErl(\underline{\zeta}, \beta)$ avec $\underline{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1, ...)$. L'interprétation de la distribution mélange d'Erlang sous la forme d'une somme aléatoire permet d'écrire directement l'expression pour la $TVaR_\kappa(Y)$

$$TVaR_\kappa(Y) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \frac{k}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(Y); k+1, \beta).$$

Les autres caractéristiques de la distribution sont fournies en annexe.

11.10.3 La classe des mélanges d'Erlang est dense

La classe des distributions mélange d'Erlang est dense dans la classe des distributions avec support positif comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 11.53 ***Théorème de Tijms***. *Soit une v.a. positive X avec une fonction de répartition F_X. On définit la fonction de répartition F_h par*

$$F_{X^{(\delta)}}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(F_X(jh) - F_X((j-1)h)\right) H\left(x; j, \frac{1}{\delta}\right), \ x \geq 0.$$

Alors, on a

$$\lim_{\delta \to 0} F_{X^{(\delta)}}(x) = F_X(x),$$

en tout point de continuité x de F_X.

Preuve. Ce résultat est démontré dans [Tijms and Tijms, 1994]. Toutefois, la preuve qui suit diffère de celle présentée dans [Tijms and Tijms, 1994]. Soit une v.a. continue strictement positive X avec une fonction de répartition définie par

$$F_X$$

et une TLS définie par

$$\mathcal{L}_X(t) = \int_0^{\infty} f_X(y) e^{-yt} dy$$

Soit

$$F_{X^{(\delta)}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k H\left(x; k, \frac{1}{\delta}\right),$$

où

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^{1} F_X((k-i)\delta) = \int_{\frac{(k-1)}{\beta}\delta}^{\frac{k}{\beta}\delta} f_X(y)\, dy = F_X(k\delta) - F_X((k-1)\delta).$$

Étape #1. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X^{(\delta)}}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{1}{1+\delta t}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{(k-1)}{\beta}\delta}^{\frac{k}{\beta}\delta} f_X(y)\, dy \left(\frac{1}{1+\delta t}\right)^k
\end{aligned}$$

Étape #2. On manipule

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X^{(\delta)}}(t) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{1}{1+\delta t}\right)^k\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{(k-1)}{\beta}\delta}^{\frac{k}{\beta}\delta} f_X(y) \left(\frac{1}{1+\delta t}\right)^k dy\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{(k-1)}{\beta}\delta}^{\frac{k}{\beta}\delta} f_X(y) \left(\frac{1}{1+\delta t}\right)^{\left]\frac{y\beta}{\delta}\right[} dy\right)
\end{aligned}$$

Étape #3. On prend la limite :

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{1}{1+\delta t}\right)^{\left]\frac{y\beta}{\delta}\right[} = e^{-yt}.$$

Étape #4. On prend la limite (bis)

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0}\mathcal{L}_{X^{(\delta)}}(t) &= \lim_{\delta\to 0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{1}{1+\delta t}\right)^k\right)\\
&= \lim_{\delta\to 0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{(k-1)}{\beta}\delta}^{\frac{k}{\beta}\delta} f_X(y)\left(\frac{1}{1+\delta t}\right)^k dy\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{(k-1)}{\beta}\delta}^{\frac{k}{\beta}\delta} f_X(y)\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{1+\delta t}\right)^{\left]\frac{y\beta}{\delta}\right[} dy\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{(k-1)}{\beta}\delta}^{\frac{k}{\beta}\delta} f_X(y)\,e^{-yt}dy\\
&= \int_0^{\infty} f_X(y)\,e^{-yt}dy\\
&= \mathcal{L}_X(t)
\end{aligned}$$

■

Remarque 11.54 *Conclusion de la preuve :*

- $\lim_{\delta\to 0}\mathcal{L}_{X^{(\delta)}}(t) = \mathcal{L}_X(t)$ *;*
- $\Longrightarrow \lim_{\delta\to 0}F_{X^{(\delta)}}(x) = F_X(x)$, *pour* $x \geq 0$ *par le théorème de Levy (continuité) ;*
- $\Longrightarrow X^{(\delta)}$ *converge en distribution vers* X*. La preuve diffère de Tijms mais elle est plus claire.*

Il est donc possible d'approximer toute distribution avec support positif par une distribution mélange d'Erlang.

La classe des distributions mélange d'Erlang contient bien entendu la distribution exponentielle et la distribution Erlang comme cas particulier. La distribution mélange d'exponentielles fait aussi partie de cette classe.

11.10.4 Un mélange d'exponentielles est un mélange d'Erlang

Proposition 11.55 ***Mélange d'exponentielles.*** *Soit une v.a.* Y *obéissant à une loi mélange d'exponentielles avec*

$$f_Y(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i\beta_i \mathrm{e}^{-\beta_i x},$$

où $p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ *et* $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$*. De plus, on suppose que* $\beta_i < \beta_m$ *pour* $i = 1, 2, ..., m-1$ *(sans perte de généralité). Alors, on démontre que* $Y \sim MixErl\left(\underline{\zeta}, \beta_m\right)$ *avec* $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = \sum_{i=1}^{m-1} p_i\left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right) + p_m$*, et*

$$\zeta_k = \sum_{i=1}^{m-1} p_i\left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)\left(1-\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{k-1}, \tag{11.30}$$

pour $k \in \{2, 3, ...\}$*. On cesse de calculer les valeurs de* ζ_k *à* k_0 *de telle sorte que* $\sum_{k=1}^{k_0}\zeta_k = 1$*.*

Preuve. La fgm de Y est donnée par

$$\mathcal{M}_Y(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i\frac{\beta_i}{\beta_i - t}. \tag{11.31}$$

Pour $i = 1, 2, ..., m-1$, on peut écrire (voir l'expression (2.1) dans [Willmot and Woo, 2007])

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_i}{\beta_i - t} &= \frac{\beta_m}{\beta_m - t}\left(\frac{\frac{\beta_i}{\beta_m}}{1-\left(1-\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)\frac{\beta_m}{\beta_m - t}}\right) \\
&= \frac{\beta_m}{\beta_m - t}\frac{\beta_i}{\beta_m}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^k\left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^k \\
&= \frac{\beta_i}{\beta_m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{k-1}\left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^k, \qquad (11.32)
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la fonction de répartition d'une loi mélange d'Erlang dont le paramètre d'échelle est β_m. On remplace (11.32) dans (11.31) en obtient la relation en (11.30). ■

Ce résultat est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 11.56 *Soit la v.a. Y obéissant au mélange d'exponentielles dont la fonction de densité est*

$$f_Y(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{24}\mathrm{e}^{-\frac{1}{24}x} + \frac{2}{3}\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x}, \quad x \geq 0.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
f_Y(x) &= 0.75h\left(x; 1, 6^{-1}\right) + 0.0625h\left(x; 2, 6^{-1}\right) + ... \\
&\quad + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^9 h\left(x; 10, 6^{-1}\right) + ... + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{99} h\left(x; 100, 6^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Pour cet exemple, on observe que $\sum_{k=1}^{100}\zeta_k = 1$. □

11.10.5 La somme aléatoire de v.a. obéissant à un mélange d'Erlang obéit à un mélange d'Erlang

On a aussi le résultat suivant lié à la composition.

Proposition 11.57 ***Distribution composée avec montants de sinistres de loi mélange d'Erlang.*** *Soit une v.a. X qui obéit à une loi composée telle que*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où $B \sim MixErl\left(\underline{\zeta}, \beta\right)$ avec $\underline{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1, ...)$. Alors, on a

$$\mathcal{M}_X(r) = P_M(\mathcal{M}_B(r)) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_K(\mathcal{M}_C(r))) = \mathcal{P}_{M^*}(\mathcal{M}_C(r)),$$

où $\mathcal{P}_{M^*}(s) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_K(s)) = \sum_{k=0}^{\infty}\xi_k s^k$ est la fgp de M^* et $\mathcal{M}_C(r)$ est la fgm de $C \sim Exp(\beta)$. Cela signifie que $X \sim MixErl\left(\underline{\xi}, \beta\right)$ avec $\underline{\xi} = (\xi_0, \xi_1, ...)$ c.-à-d. que l'on peut exprimer la v.a. X sous la forme

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M^*} C_k, & M^* > 1 \\ 0, & M^* = 0 \end{cases}, \qquad (11.33)$$

où la v.a. discrète M^* est définie par

$$M^* = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M > 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases} \qquad (11.34)$$

et K_1, K_2, ... forment une suite de v.a. i.i.d. distribuées comme la v.a. K. La f.m.p. de M^* est désignée par $\Pr(M^* = k) = \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$. Les v.a. C_1, C_2, ... sont i.i.d (avec $C_i \sim C$). Elles sont aussi indépendantes de

M^*. Les valeurs de ξ_k ($k \in \mathbb{N}$) sont calculées avec l'algorithme de Panjer (si la distribution de M appartient à la classe (a,b,0) ou la FFT. □

Preuve. Voir [Willmot and Woo, 2007]. ■

Le résultat de la proposition 11.57 est mis en pratique à l'exemple suivant.

Exemple 11.58 *Soit les v.a. indépendantes $X_i \sim PComp(\lambda_i, F_{B_i})$ avec $\lambda_i = i$ et $B_i \sim Erl\left(6-i, \frac{1}{100}\right)$ pour $i = 1, 2, ..., 5$. La v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim PComp(\lambda = 15, F_D)$ où $F_D(x) = \sum_{i=1}^{5} \frac{\lambda_i}{15} H\left(x; 6-i, \frac{1}{100}\right)$. En appliquant la proposition 11.57, S obéit aussi à une loi $MixErl\left(\underline{\xi}, \beta = \frac{1}{100}\right)$. On indique quelques valeurs de ξ_k pour $k = 0, 1, 2, 20, 21, 22$ dans le tableau suivant :*

k	0	1	2
ξ_k	3.059×10^{-7}	1.5295×10^{-6}	5.0474×10^{-6}
k	20	21	22
ξ_k	0.01444919	0.01693319	0.01952672

On déduit les valeurs suivantes de $VaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5,\ 0.95,\ 0.995$: 3409.363, 5589.821, 7031.789. □

11.10.6 La somme finie de v.a. de lois mélange d'Erlang obéit à un mélange d'Erlang

On présente un dernier résultat lié à la convolution.

Proposition 11.59 ***Somme finie de v.a. obéissant à des mélanges d'Erlang.*** *On considère un portefeuille de n risques indépendants X_1, ..., X_n où $X_i \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta_i\right)$ avec $\underline{\zeta}^{(i)} = \left(\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}, ...\right)$ et $\zeta_k^{(i)} = \Pr(K_i = k)$, $\beta_i = \beta$ pour $i = 1, 2, ..., n$. On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors, $S \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$ avec $\underline{\nu} = (\nu_0, \nu_1, ...)$ c.-à-d. la v.a. S obéit aussi à un mélange d'Erlang avec $\nu_k = \Pr(K_1 + ... + K_n = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En effet, on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(r) &= E\left[\mathrm{e}^{rS}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[\mathrm{e}^{rX_i}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}_{K_i}(\mathcal{M}_C(r)) = \mathcal{P}_{K_1+...+K_n}(\mathcal{M}_C(r)),
\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}_{K_1+...+K_n}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k s^k$ est la fgp de $K_1 + ... + K_n$. Les valeurs de ν_k sont obtenues, soit avec l'algorithme de produit de convolution, soit avec la FFT. □

Preuve. Voir [Willmot and Woo, 2007]. ■

On illustre le résultat de la proposition 11.59 dans le prochain exemple.

Exemple 11.60 *Soit les deux v.a.*

$$X_1 \sim BNComp(r_1 = 2, q_1 = 0.25; F_{B_1})$$

et

$$X_2 \sim BNComp(r_2 = 1.5, q_2 = 0.5; F_{B_2}),$$

où les v.a. B_1 et B_2 obéissent à des lois mélanges d'exponentielles dont les fonctions de densité sont

$$\begin{aligned}
f_{B_1}(x) &= \frac{1}{5}\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}x} + \frac{4}{5}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x},\ x \geq 0, \\
f_{B_2}(x) &= \frac{1}{10}\frac{1}{20}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}x} + \frac{9}{10}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x},\ x \geq 0.
\end{aligned}$$

On montre que $S = X_1 + X_2 \sim MixErl\left(\underline{\nu}, \beta = \frac{1}{2}\right)$. Afin d'obtenir les valeurs de $\underline{\nu}$, on procède par étapes.

En premier lieu, on utilise le résultat de la proposition (11.55) pour représenter les distributions de B_1 et B_2 sous forme de mélange d'Erlang c.-à-d. $B_i \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta = \frac{1}{2}\right)$ où il faut calculer les valeurs des composantes de $\underline{\zeta}^{(i)}$ pour $i = 1, 2$.

Ensuite, on applique le résultat de la proposition (11.57) afin de représenter les distributions de X_1 et X_2 sous forme de mélange d'Erlang ($X_i \sim MixErl\left(\underline{\xi}^{(i)}, \beta = \frac{1}{2}\right)$) et de calculer les valeurs des composantes de $\underline{\zeta}^{(i)}$ pour $i = 1, 2$.

Finalement, on a recours à la proposition (11.59) pour représenter la distribution de S sous la forme d'un mélange d'Erlang ($S \sim MixErl\left(\underline{\nu}, \beta = \frac{1}{2}\right)$) et pour calculer les valeurs des composantes de $\underline{\nu}$. Les premières valeurs de ν_k pour $k = 0, 1, ..., 4$ sont fournies dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
ν_k	0.022097	0.042924	0.055101	0.059488	0.058952

Il est alors possible de calculer les valeurs de $VaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5, 0.95, 0.995$: 19.7584, 78.6563, 133.2851. □

11.10.7 Développement détaillé – La somme aléatoire de v.a. obéissant à un mélange d'Erlang obéit à un mélange d'Erlang

On fournit une présentation plus détaillée concernant la Proposition 11.57 sur les mélanges d'Erlang et les sommes aléatoires.

Contexte et objectif

Contexte. On définit une v.a. X par

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}, \tag{11.35}$$

où $\{B_j, j = 1, 2, ...\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. et indépendante de la v.a. discrète M. De plus, on a

$$B_j \sim B$$

et

$$f_M(k) = \gamma_k$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

Objectif. On suppose que la v.a. B obéit à une loi mélange d'Erlang. On veut montrer que la v.a X obéit aussi une loi mélange d'Erlang (avec une masse de probabilité à 0).

La v.a. B obéit à une loi mélange d'Erlang

Soit la v.a. B qui obéit à une mélange d'Erlang c.-à-d. la v.a. B est définie par

$$B = \sum_{j=1}^{K} C_j,$$

où $\{C_j, j = 1, 2, ...\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. et indépendante de la v.a. discrète K. De plus, on a

$$C_j \sim C \sim \exp(\beta)$$

et

$$f_K(j) = \alpha_j$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Cela signifie que

$$\mathcal{M}_B(t) = \mathcal{P}_K(\mathcal{M}_B(t)) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \{\mathcal{M}_C(t)\}^j . \tag{11.36}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} F_B(x) &= \Pr(K=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(K=k) H(x;k,\beta) \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k H(x;k,\beta), \end{aligned}$$

où $H(x;n,\beta)$ est la fonction de répartition d'une loi Erlang de paramètres n et β.

Précision sur la notation

On précise la notation par rapport à la définition donnée en (11.35).

En effet, si B_j obéit à un mélange d'Erlang, on convient que

$$B_j = \sum_{l=1}^{K_j} C_{j,l},$$

où $\{C_{j,l}, l = 1, 2, ...\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. et indépendante de la v.a. discrète K_j.

De plus, on a

$$C_{j,l} \sim C_j \sim C \sim \exp(\beta)$$

et

$$K_j \sim K.$$

On démontre que X obéit à un mélange d'Erlang

On sait que

$$\mathcal{M}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{M}(t)) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \{\mathcal{M}_B(t)\}^k . \tag{11.37}$$

Après avoir remplacé (11.36) dans (11.37), on obtient

$$\mathcal{M}_X(t) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \{\mathcal{M}_C(t)\}^j \right\}^k$$

qui devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_X(t) &= \gamma_0 \\
&\quad +\gamma_1 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left\{ \mathcal{M}_C(t) \right\}^j \right\}^1 \\
&\quad +\gamma_2 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left\{ \mathcal{M}_C(t) \right\}^j \right\}^2 \\
&\quad +\gamma_3 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left\{ \mathcal{M}_C(t) \right\}^j \right\}^3 \\
&\quad +\gamma_4 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left\{ \mathcal{M}_C(t) \right\}^j \right\}^4 \\
&\quad +...
\end{aligned}$$

Maintenant, comme il est important de mettre les fgm $\mathcal{M}_C(t)$, $\{\mathcal{M}_C(t)\}^2$, $\{\mathcal{M}_C(t)\}^3$, ...en évidence, on obtient

$$M_X(t) = \tau_0 \{\mathcal{M}_C(t)\}^0 + \tau_1 \{\mathcal{M}_C(t)\}^1 + \tau_2 \{\mathcal{M}_C(t)\}^2 + ... = \sum_{j=0}^{\infty} \tau_k \{\mathcal{M}_C(t)\}^k \tag{11.38}$$

où

$$\tau_0 = \gamma_0 = \Pr(M = 0)$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \gamma_1 \alpha_1 \\
&= \Pr(M = 1) \times \Pr(K_1 = 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= \gamma_1 \alpha_2 + \gamma_1 \alpha_1 \alpha_1 \\
&= \Pr(M = 1) \times \Pr(K_1 = 2) + \Pr(M = 2) \times \Pr(K_1 = 1) \times \Pr(K_2 = 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= \gamma_1 \alpha_3 + \gamma_2 (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) + \gamma_3 (\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1) \\
&= \Pr(M = 1) \times \Pr(K_1 = 3) \\
&\quad + \Pr(M = 2) \times \Pr(K_1 = 2) \times \Pr(K_2 = 1) \\
&\quad + \Pr(M = 2) \times \Pr(K_1 = 1) \times \Pr(K_2 = 2) \\
&\quad + \Pr(M = 3) \times \Pr(K_1 = 1) \times \Pr(K_2 = 1) \times \Pr(K_3 = 1)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tau_4 &= \gamma_1\alpha_4 + \gamma_2\left(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2\right) \\
&\quad + \gamma_3\left(\alpha_2\alpha_1\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_1\alpha_2\right) + \gamma_4\left(\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1\right) \\
&= \Pr\left(M=1\right)\times\Pr\left(K_1=4\right) \\
&\quad + \Pr\left(M=2\right)\times\Pr\left(K_1=3\right)\times\Pr\left(K_2=1\right) \\
&\quad + \Pr\left(M=2\right)\times\Pr\left(K_1=1\right)\times\Pr\left(K_2=3\right) \\
&\quad + \Pr\left(M=2\right)\times\Pr\left(K_1=2\right)\times\Pr\left(K_2=2\right) \\
&\quad + \Pr\left(M=3\right)\times\Pr\left(K_1=2\right)\times\Pr\left(K_2=1\right)\times\Pr\left(K_3=1\right) \\
&\quad + \Pr\left(M=3\right)\times\Pr\left(K_1=1\right)\times\Pr\left(K_2=2\right)\times\Pr\left(K_3=1\right) \\
&\quad + \Pr\left(M=3\right)\times\Pr\left(K_1=1\right)\times\Pr\left(K_2=1\right)\times\Pr\left(K_3=2\right) \\
&\quad + \Pr\left(M=4\right)\times\Pr\left(K_1=1\right)\times\Pr\left(K_2=1\right)\times\Pr\left(K_3=1\right)\times\Pr\left(K_4=1\right)
\end{aligned}$$

...

Bref, les valeurs de τ_k que l'on obtient correspondent en fait aux valeurs de la fonction de masse de probabilité d'une v.a. L dont la représentation est donnée par

$$L = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses usuelles.

On précise que

$$\tau_k = \Pr\left(L = k\right)$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

De plus, le développement en (11.38) signifie que

$$\mathcal{M}_X\left(t\right) = \mathcal{P}_L\left(\mathcal{M}_C\left(t\right)\right)$$

et que la v.a. X peut être représentée sous la forme suivante :

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{L} C_j, & L > 0 \\ 0, & L = 0 \end{cases}.$$

On conclut (avec une démonstration plus brève) et on résume

En résumé, on a

$$\mathcal{M}_X\left(t\right) = \mathcal{P}_M\left(\mathcal{M}_B\left(t\right)\right) = \mathcal{M}_M\left(\mathcal{P}_K\left(\mathcal{M}_C\left(t\right)\right)\right). \tag{11.39}$$

Remplaçons $\mathcal{M}_C\left(t\right)$ par s. Alors, on a

$$\mathcal{P}_M\left(\mathcal{P}_K\left(\mathcal{M}_C\left(t\right)\right)\right) = \mathcal{M}_M\left(\mathcal{P}_K\left(s\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\tau_k s^k,$$

qui correspond à la fgp d'une v.a. discrète L, que l'on représente par

$$L = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses usuelles.

On note

$$f_L\left(k\right) = \Pr\left(L = k\right) = \tau_k$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Les valeurs de τ_k peuvent être obtenues avec la FFT, si on connaît l'expression de la fgp $P_M(t)$ de la v.a. M. De plus, si la distribution de M appartient à la famille $(a, b, 0)$, on peut utiliser l'algorithme de Panjer.

Puisque l'on a

$$\mathcal{P}_L(s) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_K(s)) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k s^k,$$

alors (11.39) devient

$$\mathcal{M}_X(t) = \mathcal{P}_L(\mathcal{M}_C(t))$$

ce qui conduit à

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{L} C_j, & L > 0 \\ 0, & L = 0 \end{cases}. \tag{11.40}$$

De (11.40), on déduit

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(L = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(L = k) H(x; k, \beta) \\ &= \tau_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k H(x; k, \beta), \end{aligned}$$

ce qui correpond à la fonction de répartition d'une loi mélange Erlang avec masse à 0.

On termine par le dessert : un exemple

En utilisant la notation ci-dessus, on a

k	1	2	3	4
α_k	0.3	0.4	0.2	0.1

$\beta = 0.1$, et

$$M \sim NBin(r = 2.5, q = 0.8).$$

On obtient

k	1	2	3	4
α_k	0.3	0.4	0.2	0.1

Les valeurs de $\tau_k = \Pr(L = k)$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 20$ sont fournies ci-dessous :

k	τ_k	k	τ_k
0	0.572433	11	0.001302
1	0.085865	12	0.000739
2	0.123503	13	0.000415
3	0.082097	14	0.000234
4	0.059984	15	0.000130
5	0.028351	16	0.000072
6	0.020011	17	0.000040
7	0.011689	18	0.000022
8	0.006905	19	0.000012
9	0.003876	20	0.000007
10	0.002304		

On indique ci-dessous quelques valeurs de $F_X(x)$:

x	20	50	100
$F_X(x)$	0.7570376	0.9197882	0.989448

Le code R est reproduit ci-dessous de la fonction panjer :FONCTION R - ALGO
On applique le code :
FONCTION R - ALGO

11.11 Approximation Poisson composée

On examine maintenant l'application de l'approximation Poisson composée dans l'évaluation de la distribution des coûts totaux pour un portefeuille dont les risques sont modélisés selon l'approche indemnitaire (ex : risques vie ou de crédit) ou l'approche forfaitaire (ex : risques IARD ou soins médicaux).

L'approche pour évaluer la distribution de S selon l'approximation Poisson composée se fait en deux temps. On approxime la v.a. discrète S par une v.a. T qui obéit à une loi Poisson composée. Le calcul de f_T (et, par le fait même, de F_T) est réalisé avec l'algorithme de Panjer ou la FFT. On utilise F_T pour évaluer approximativement F_S . On présente l'approximation Poisson composée dans le cas particulier de l'approche indemnitaire et le cas général des approches indemnitaire ou forfaitaire.

11.11.1 Cas particulier

On considère un portefeuille composé de m contrats d'assurance vie sur une période fixe (p. ex., un an). Pour le contrat i, on note le montant de prestation par b_i $(i = 1, 2, ..., m)$ que l'on suppose entier. La probabilité de décès de l'assuré est représentée par q_i $(i = 1, 2, ..., m)$. La valeur attribuée à q_i dépend de divers facteurs liés à la tarification notamment l'âge, le sexe, etc. On définit la v.a. $X_i = b_i \times I_i$, où I_i est une v.a. de Bernoulli telle que

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{si l'assuré } i \text{ décède} \\ 0, & \text{si l'assuré } i \text{ survit} \end{cases},$$

avec $\Pr(I_i = 1) = q_i = 1 - \Pr(I_i = 0) = 1 - p_i$. La v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ désigne le montant total des sinistres pour le portefeuille. Pour l'ensemble de la section, on suppose que les coûts individuels des assurés sont indépendants. On procède selon les deux étapes suivantes pour définir la v.a. T de loi Poisson composée.

À la première étape, on approxime chaque $X_i = b_i I_i$ $(i = 1, ..., m)$ par une v.a. Y_i définie par $Y_i = b_i \times M_i$, où la v.a. $M_i \sim Pois(\lambda_i)$, $(i = 1, 2, ..., m)$. On peut faire deux choix pour définir λ_i :

— **choix 1 :** on définit λ_i de telle sorte que $E[N_i] = \lambda_i = E[I_i] = q_i \quad (i = 1, ..., m)$;

— **choix 2 :** on définit λ_i de telle sorte que $\Pr(N_i = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda_i} = \Pr(I_i = 0) = 1 - q_i \quad (i = 1, ..., m)$, ce qui implique que $\lambda_i = -\ln(1 - q_i)$, pour $i = 1, ..., m$.

Cette approximation est possible parce que la valeur de q_i est relativement petite, ce qui implique que la probabilité que N_i prenne des valeurs supérieures à 1 est presque nulle c.-à-d. $\Pr(N_i > 1) \cong 0$. Cela est illustré dans le prochain exemple.

Exemple 11.61 *Soit la v.a. $M \sim Pois(\lambda)$. Dans le tableau suivant, on présente les valeurs de* $\Pr(M > 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}$ *dans les cas où λ est défini selon les choix 1 et 2 avec des valeurs plausibles de probabilités de décès :*

q	$\lambda = q$	$\lambda = -\ln(1-q)$
0.0001	*0.000000*	*0.000000*
0.0005	*0.000000*	*0.000000*
0.0010	*0.000000*	*0.000001*
0.0050	*0.000012*	*0.000013*
0.0100	*0.000050*	*0.000050*
0.0500	*0.001209*	*0.001271*
0.1000	*0.004679*	*0.005176*
0.2000	*0.017523*	*0.021485*

Les probabilités de décès pour une personne de 20, 40, 60 et 80 ans sont de l'ordre de 0.0004, 0.0013, 0.0092, 0.0741. Dans le contexte des risques de crédit, les probabilités de défaut sont généralement inférieures à 10 %.
□

Dans une deuxième étape, on définit la v.a. T comme étant la somme des v.a. $Y_1, ..., Y_n$, soit $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. En appliquant la proposition 5.28, il en résulte que la v.a. $T \sim PComp(\lambda, F_C)$, avec $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} 1_{[b_1,\infty)}(x) + ... + \frac{\lambda_m}{\lambda} 1_{[b_m,\infty)}(x).$$

Ensuite, on approxime la v.a. S par la v.a. T. On utilise l'algorithme de Panjer ou la FFT pour calculer les valeurs de la f_T. Si on définit les λ_i selon le choix 1, il en résulte que $E[T] = E[S]$. Par contre, si l'on fixe les λ_i selon le choix 2, on a $\Pr(T = 0) = \Pr(S = 0)$.

Dans le prochain exemple, on présente une application élaborée de l'approximation Poisson composée permettant de comparer les valeurs résultant de l'approximation avec les valeurs exactes qui ont été obtenues en utilisant directement la FFT.

Exemple 11.62 *On considère un portefeuille d'assurance vie temporaire 1 an de 100 participants. Les montants de prestation (exprimés en multiples de 10 000) sont 1, 2, 3, 4 et 5. Les participants peuvent être âgés de 25, 35 ou 45 ans. Les taux de décès proviennent de la table de mortalité GAM-83. La répartition des participants par âge et montant de prestation est présentée dans le tableau suivant :*

montant	$q_{25} = 0.000464$	$q_{35} = 0.00086$	$q_{45} = 0.002183$	*Total*
10 000	*4*	*5*	*8*	*17*
20 000	*8*	*10*	*6*	*24*
30 000	*7*	*9*	*5*	*21*
40 000	*4*	*7*	*10*	*21*
50 000	*5*	*6*	*6*	*17*
Total	*28*	*37*	*35*	*100*

On déduit que le montant total des sinistres S peut prendre des valeurs dans l'ensemble $\{0, 10\ 000, 20\ 000, ..., 2\ 970\ 000\}$. *L'espérance et l'écart type de S sont $E[S] = 3600$ et $\sqrt{\mathrm{Var}(S)} = 11\ 445.26$. On présente dans le tableau suivant les valeurs exactes de F_S obtenues avec la FFT et les valeurs de F_T produites avec l'algorithme de Panjer où on suppose que $\lambda_i = q_i$ pour $i = 1, 2, ..., 100$) :*

k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$	k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$
0	*0.88575*	*0.88584*	*9*	*0.99972*	*0.99970*
1	*0.90671*	*0.90677*	*10*	*0.99993*	*0.99992*
2	*0.92948*	*0.92952*	*11*	*0.99996*	*0.99996*
3	*0.94945*	*0.94946*	*12*	*0.99998*	*0.99998*
4	*0.97654*	*0.97652*	*13*	*0.99999*	*0.99999*
5	*0.99593*	*0.99588*	*14*	*1.00000*	*1.00000*
6	*0.99725*	*0.99721*	*15*	*1.00000*	*1.00000*
7	*0.99832*	*0.99828*	*..*	*...*	*...*
8	*0.99913*	*0.99911*	*297*	*1.00000*	*1.00000*

On constate que les valeurs de F_T sont très près de F_S, ce qui justifie fortement l'utilisation de l'approximation Poisson composée.

On suppose que le nombre de participants dans chaque classe du régime est multiplié par 5, c'est-à-dire que le nombre total de participants est de 500. Le montant total des sinistres S peut prendre des valeurs dans l'ensemble $\{0, 10\ 000, 20\ 000, ..., 14\ 850\ 000\}$. *L'espérance et l'écart type de S sont $E[S] = 18\ 100$ et $\sqrt{\mathrm{Var}(S)} = 25\ 592.4$. Les valeurs exactes de F_S obtenues avec la FFT et les valeurs de F_T produites avec l'algorithme de Panjer selon l'approche où $\lambda_i = q_i$ pour $i = 1, 2, ..., 500$ sont présentées dans le tableau suivant :*

k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$	k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$
0	*0.54521*	*0.54548*	*15*	*0.99951*	*0.99950*
1	*0.60971*	*0.60990*	*20*	*0.99998*	*0.99998*
2	*0.68284*	*0.68301*	*21*	*0.99999*	*0.99999*
3	*0.75099*	*0.75108*	*22*	*0.99999*	*0.99999*
4	*0.84404*	*0.84405*	*23*	*1.00000*	*1.00000*
5	*0.91838*	*0.91829*	*...*	*...*	*...*
10	*0.99211*	*0.99205*	*1485*	*1.00000*	*1.00000*

La qualité de l'approximation de F_S par F_T demeure excellente. □

11.11.2 Cas général

La présente sous-section est une extension du contenu de la sous-section précédente. On définit les coûts du portefeuille par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases},$$

$(i = 1, ..., m)$. À nouveau, on procède en deux étapes pour définir la v.a. T de la loi Poisson composée qui approxime la v.a. S. La première étape réside à approximer chaque v.a. X_i par une v.a. Y_i définie par

$$Y_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N_i} B_{i,j}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases},$$

où la v.a. $M_i \sim Pois(\lambda_i)$, $(i = 1, 2, ..., m)$ et $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, ... est une suite de v.a. i.i.d. (convention : $B_{i,j} \sim B_i$) indépendantes de M_i. Comme précédemment, on peut faire les choix 1 et 2 pour définir λ_i $(i = 1, 2, ..., m)$. À la deuxième étape, on définit la v.a. T comme étant la somme des v.a. Y_i $(i = 1, 2, ..., m)$ de la loi Poisson composée, soit $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. En vertu de la proposition 5.28, il en résulte que $T \sim PComp(\lambda, F_C)$ avec $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} F_{B_1}(x) + ... + \frac{\lambda_m}{\lambda} F_{B_m}(x).$$

On utilise l'algorithme de Panjer ou la FFT pour évaluer f_T. Dans le cas où les v.a. B_1, ..., B_m sont continues, il en résulte que la v.a. C est aussi continue. Il suffit de discrétiser F_C et d'appliquer l'algorithme de Panjer ou la FFT pour une loi Poisson composée.

Exemple 11.63 *Les coûts pour un portefeuille composé de 200 titres avec risques de défaut répartis en 8 classes sont définis par la v.a. S où*

$$S = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{i,j,k}.$$

La v.a. $X_{i,j,k}$ représente les pertes éventuelles pour le titre k de la classe (i, j), avec $k = 1, 2, ..., n_{ij}$, $i = 1$, 2, 3, 4 et $j = 1$, 2. On définit $X_{i,j,k} = B_{i,j,k} \times I_{i,j,k}$ avec $I_{i,j,k} \sim Bern(q_j)$ et $B_{i,j,k} \sim B_i$, $k = 1, 2, ..., n_{ij}$, $i = 1$, 2, 3, 4 et $j = 1$, 2. Selon les caractéristiques du titre, la probabilité de défaut est q_j, où $q_j = 0.01$ ou 0.05. De plus, les coûts résultants d'un défaut B_i prennent des valeurs qui n'excèdent par leur capital en vigueur $m_i \in \{1000, 2000, 5000, 10\ 000\}$. La fonction de masse de probabilité de B_j est désignée par f_{B_i} $(i = 1, 2, 3, 4)$. Les informations à propos du portefeuille sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

i	j	q_j	m_i	n_{ij}	i	j	q_j	m_i	n_{ij}
1	1	0.01	1000	30	1	2	0.05	1000	10
2	1	0.01	2000	40	2	2	0.05	2000	20
3	1	0.01	5000	25	3	2	0.05	5000	35
4	1	0.01	10 000	25	4	2	0.05	10 000	15

De plus, on a les informations suivantes :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{B_1}(1000k)$	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$f_{B_2}(1000k)$	0.6	0.4	–	–	–	–	–	–	–	–
$f_{B_3}(1000k)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	–	–	–	–	–
$f_{B_4}(1000k)$	0.05	0.05	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05

On construit l'approximation Poisson composée en définissant les paramètres de la loi de Poisson selon le choix 1. On déduit que $\lambda = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} n_{ij} q_j = 5.2$ et

$$\begin{aligned} f_C(1000k) &= \frac{0.8}{5.2} f_{B_1}(1000k) + \frac{1.4}{5.2} f_{B_2}(1000k) \\ &\quad + \frac{2}{5.2} f_{B_3}(1000k) + \frac{0.95}{5.2} f_{B_4}(1000k), \end{aligned}$$

pour $k = 1, 2, ..., 10$ et $f_C(k) = 0$ ailleurs. Dans le tableau ci-dessous, on reproduit les valeurs de $F_S(k)$ et

$F_T(k)$, ce qui nous permet d'apprécier la qualité de l'approximation Poisson composée :

0	$F_S(1000k)$	$F_T(1000k)$
0	0.004944	0.005517
10	0.345661	0.350454
20	0.804856	0.802274
30	0.969703	0.967215
40	0.997156	0.996545
50	0.999822	0.999744

À partir des valeurs obtenues, on détermine que $E[T] = 14.26$, qui est égale à $E[S]$ puisque l'approximation est bâtie sur le choix 1. Au chapitre 12, on compare le comportement de S et T (en fonction des choix 1 et 2). □

11.12 Notes bibliographiques

L'algorithme de Panjer, initialement proposé dans [Panjer, 1981], est très populaire en actuariat. On peut trouver des détails concernant l'algorithme de Panjer dans [Klugman et al., 2012], ainsi que dans, p. ex., [Panjer and Willmot, 1992] et [Rolski et al., 2009]. Voir aussi [Sundt and Vernic, 2009] pour un exposé récent et complet sur les méthodes récursives. Les méthodes de discrétisation sont discutées dans, p. ex., [Dickson, 2016], [Klugman et al., 2012] et [Panjer and Willmot, 1992]. L'algorithme de convolution pour une somme de v.a. i.i.d. est présenté dans, p. ex., [Dickson, 2016] , [Klugman et al., 2012] et [Rolski et al., 2009]. La transformée rapide de Fourier est pr[Klugman et al., 2012] et [Rolski et al., 2009]. Une comparaison de l'algorithme de Panjer et la transformée rapide de Fourier est faite dans [Embrechts and Frei, 2009]. On lira [Willmot and Lin, 2011] et [Willmot and Woo, 2007] pour une introduction à la distribution mélange d'Erlang. L'approximation Poisson composée est aussi traitée dans, p. ex., [Klugman et al., 2012] et [Rolski et al., 2009]. Voir aussi, p. ex., [Barbour et al., 1992] pour un exposé général sur l'approximation Poisson.

Code LaTeX : `chapitre_agregation.tex`

Chapitre 12

Comparaison des risques et ordres stochastiques

12.1 Introduction

Dans plusieurs situations, on est confronté à comparer des risques selon leur degré de *dangerosité*. La comparaison entre des risques (v.a.) est basée sur des résultats qui portent sur les ordres stochastiques. La théorie des ordres stochastiques est utilisée, notamment, pour comparer des mesures de risque, pour établir des bornes sur des mesures de risque ou des quantités liées aux risques. En fait, les ordres stochastisques permettent de démontrer des relations observées dans des applications pratiques en actuariat.

L'idée se présente comme suit. On veut identifier les conditions pour comparer deux v.a. X et Y permettant de conclure, p. ex., $E[X] \leq E[Y]$, $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(Y)$, $\pi_X(d) \leq \pi_Y(d)$, $VaR_\kappa(X) \leq VaR_\kappa(Y)$, $TVaR_\kappa(X) \leq TVaR_\kappa(Y)$ ou $\Pi^{\mathrm{Var}}(X) \leq \Pi^{\mathrm{Var}}(Y)$. Dans ce chapitre, on considère uniquement les ordres stochastiques univariés.

On commence par définir les ordres partiels et présenter les propriétés désirables des ordres stochastiques. Par la suite, on présente deux cas d'ordres stochastiques : l'ordre en dominance stochastique et les ordres convexes. L'ordre en dominance stochastique permet de comparer l'ampleur de deux v.a. et l'ordre convexe compare leur variabilité.

12.2 Ordres partiels

L'ordre en dominance stochastique et les ordres convexes sont des ordres partiels.

Définition 12.1 *Soit A un ensemble de fonctions de répartition ainsi que F_X, F_Y, F_Z des éléments de A. Une relation binaire $\preceq$ définie sur A est un ordre partiel si cet ordre satisfait les trois propriétés suivantes :*

1. ***Transitivité.*** *Si $F_X \preceq F_Y$ et $F_Y \preceq F_Z$, alors $F_X \preceq F_Z$.*
2. ***Réflexivité.*** *$F_X \preceq F_X$.*
3. ***Anti-symétrie.*** *Si $F_X \preceq F_Y$ et $F_Y \preceq F_X$, alors $F_X \equiv F_Y$.*

Sur le plan de la notation, la relation d'ordre est établie entre fonctions de répartition ou entre v.a. On écrit indifféremment $X \preceq Y$ et $F_X \preceq F_Y$.

Les propriétés désirables pour les ordres partiels sont indiquées dans la remarque suivante.

Les propriétés désirables sont la fermeture sous le mélange, la fermeture sous la convolution et la fermeture sous la composition.

Propriété 12.2 ***Fermeture sous le mélange***. *Soit les v.a. X, X' et Θ. On dit que l'ordre stochastique $\preceq$ est fermé sous le mélange si $X|\Theta = \theta \preceq X'|\Theta = \theta$ pour tout θ implique $X \preceq X'$.*

Propriété 12.3 ***Fermeture sous la convolution***. *Soit deux suites de v.a. indépendantes* $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ *et* $\underline{X}' = \{X'_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ *avec* $X_i \preceq X'_i$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}^+$. *On dit que l'ordre stochastique* $\preceq$ *est fermé sous la convolution si* $\sum_{i=1}^n X_i \preceq \sum_{i=1}^n X'_i$ *est satisfait.*

Propriété 12.4 ***Fermeture sous la composition***. *Soit deux suites de v.a. indépendantes* $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ *et* $\underline{X}' = \{X'_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ *avec* $X_i \preceq X'_i$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}^+$. *Si l'ordre est fermé sous le mélange et sous la convolution alors l'ordre satisfait la relation* $\sum_{i=1}^N X_i \preceq \sum_{i=1}^N X'_i$ *où* N *est une v.a. discrète. On dit alors que l'ordre est fermé sous la composition. D'autre part, si la relation suivante est satisfaite* $\sum_{i=1}^N X_i \preceq \sum_{i=1}^{N'} X_i$ *pour* $N \preceq N'$ *on dit aussi que l'ordre est fermé sous la composition.*

12.3 Ordre en dominance stochastique

12.3.1 Définition

L'ordre en dominance stochastique est défini comme suit.

Définition 12.5 *Soit les v.a.* X *et* X' *telles que* $E[X] < \infty$ *et* $E[X'] < \infty$. *Alors,* X *est inférieure à* X' *sous l'ordre en dominance stochastique, notée* $X \preceq_{sd} X'$, *si* $F_X(x) \geq F_{X'}(x)$ *(ou de façon équivalente* $\overline{F}_X(x) \leq \overline{F}_{X'}(x)$*) pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Dans les sous-sections qui suivent, on présente un certain nombre de résultats de base qui découlent de l'ordre en dominance stochastique et qui sont pertinents pour l'actuariat.

12.3.2 Mesure VaR

Si on établit l'ordre en dominance stochastique entre deux risques, alors on déduit la relation suivante pour leurs mesures VaR.

Proposition 12.6 *Soit deux v.a.* X *et* X' *telles que* $X \preceq_{sd} X'$. *Alors, on a* $VaR_\kappa(X) \leq VaR_\kappa(X')$ *pour tout* $0 < \kappa < 1$.

Preuve. Voir [Denuit et al., 2006]. ■

En effet, puisque $F_X(x) \geq F_{X'}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $VaR_\kappa(X) \leq VaR_\kappa(X')$ pour tout $0 < \kappa < 1$.

12.3.3 Espérance

Selon le théorème suivant, l'ordre en dominance stochastique mène à ordonner les espérances de deux v.a.

Théorème 12.7 *Soit les v.a.* X *et* X' *telles que* $E[X] < \infty$ *et* $E[X'] < \infty$.

1. *Si* $X \preceq_{sd} X'$ *alors* $E[X] \leq E[X']$.
2. *Si* $X \preceq_{sd} X'$ *et* $E[X] = E[X']$ *alors* X *et* X' *ont la même distribution.*

Preuve. Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. ■

Par conséquent, si X est inférieure à X' selon l'ordre en dominance stochastique, alors l'espérance de X est inférieure à l'espérance de X'. Cette relation se généralise pour l'espérance de fonctions croissantes univariées.

Théorème 12.8 *Soit les deux v.a.* X *et* X'. *Alors, on a* $X \preceq_{sd} X'$ *si et seulement si* $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$ *pour toute fonction croissante* ϕ.

Preuve. Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller, 2000] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. ■

Pour comparer les moments d'ordre m, on a recours au théorème suivant qui découle du théorème 12.8.

Théorème 12.9 *Soit les v.a. X et X' telles que $E[X^m] < \infty$ et $E[X'^m] < \infty$, pour $m \in \mathbb{N}^+$. Si on a $X \preceq_{sd} X'$, alors*

1. $E[X^m] \leq E[X'^m]$, *pour* $m = 1, 3, 5, ...$;
2. $E[X^m] \leq E[X'^m]$, *pour* $m = 1, 2, 3, ...$ *si les v.a. X et Y sont positives.*

Preuve. Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. ■

12.3.4 Fonctions croissantes univariées

Le résultat suivant a plusieurs applications en actuariat.

Théorème 12.10 *Soit les deux v.a. X et X'. Si $X \preceq_{sd} X'$ alors on a $\phi(X) \preceq_{sd} \phi(X')$ pour toute fonction croissante ϕ.*

Preuve. Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. ■

Des exemples d'application en actuariat et en gestion quantitative des risques du théorème 12.10 sont fournis dans la remarque suivante.

Remarque 12.11 *En vertu du théorème 12.10, si $X \preceq_{sd} X'$, alors ...*

1. $\exp(X) \preceq_{sd} \exp(X')$;
2. $\min(X; d) \preceq_{sd} \min(X'; d)$, *pour toute limite d* ;
3. $\max(X - d; 0) \preceq_{sd} \max(X' - d; 0)$, *pour toute franchise d* ;
4. $X \times 1_{\{X>d\}} \preceq_{sd} X' \times 1_{\{X'>d\}}$, *pour toute franchise d* ;
5. $cX \preceq_{sd} cX'$, *pour tout scalaire $c \in \mathbb{R}^+$.*

12.3.5 Fonctions croissantes multivariées

Le prochain théorème permet de comparer les résultats de fonctions de deux ensembles de v.a.

Théorème 12.12 *Soit $X_1, ..., X_n$ et $X'_1, ..., X'_n$ des v.a. indépendantes avec $X_i \preceq_{sd} X'_i$ pour $i = 1, 2, ..., n$. On suppose que $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante. Alors, on a $\psi(X_1, ..., X_n) \preceq_{sd} \psi(X'_1, ..., X'_n)$.*

Preuve. Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. ■

Des exemples de fonctions croissantes sont indiqués dans la remarque suivante.

Remarque 12.13 *Des exemples de fonctions croissantes ψ pour le théorème 12.12 sont :*

1. $\psi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$;
2. $\psi(x_1, ..., x_n) = \max(x_1; ...; x_n)$;
3. $\psi(x_1, ..., x_n) = \min(x_1; ...; x_n)$.

12.3.6 Propriétés de fermeture

L'ordre en dominance stochastique est fermé sous la convolution, le mélange et la composition. Les preuves des théorèmes suivants se trouvent dans, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007].

Théorème 12.14 ***Fermeture sous la convolution.*** *Soit $X_1, ..., X_n$ et $X'_1, ..., X'_n$ des v.a. indépendantes avec $X_i \preceq_{sd} X'_i$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Alors, on a $\sum_{i=1}^n X_i \preceq_{sd} \sum_{i=1}^n X'_i$.*

Théorème 12.15 ***Fermeture sous le mélange.*** *Soit les v. a. X, X' et Θ définies de telle sorte que $X|\Theta = \theta \preceq_{sd} X'|\Theta = \theta$ pour tout θ sur le support de Θ. Alors, on a $X \preceq_{sd} X'$.*

Théorème 12.16 ***Fermeture sous la composition.*** *Soit les v.a. X et X' définies par*

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} B_i, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

et

$$X' = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M'} B'_i, & M' > 0 \\ 0, & M' = 0 \end{cases} .$$

Si $B_i \preceq_{sd} B'_i$, si $M \preceq_{sd} M'$ et si toutes les v.a. sont indépendantes, alors, on a $X \preceq_{sd} X'$.

12.3.7 Condition suffisante

On dispose aussi d'une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour déterminer l'ordre en dominance stochastique.

Critère 12.17 ***Condition suffisante.*** *Soit deux v.a. X et Y ayant la propriété qu'il existe un nombre réel $a \geq 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_X(x) &\geq \mathrm{d}F_Y(x) \ \textit{pour } x \in (-\infty, a) \\ \mathrm{d}F_X(x) &\leq \mathrm{d}F_Y(x) \ \textit{pour } x \in (a, \infty) \end{aligned}$$

Alors $X \preceq_{sd} Y$.

12.3.8 Lois paramétriques

Dans les 2 remarques suivantes, on indique sous quelles conditions l'ordre en dominance stochastique est satisfait pour certaines lois paramétriques.

Remarque 12.18 *Soit deux v.a. X et X' obéissant à la même loi continue mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que $X \preceq_{sd} X'$:*

1. $X \sim Exp(\beta)$ *et* $X' \sim Exp(\beta')$ *avec* $\beta \geq \beta'$;
2. $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ *et* $X' \sim Ga(\alpha, \beta')$ *avec* $\beta \geq \beta'$;
3. $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ *et* $X' \sim Ga(\alpha', \beta)$ *avec* $\alpha \leq \alpha'$;
4. $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ *et* $X' \sim Pa(\alpha, \lambda')$ *avec* $\lambda \leq \lambda'$;
5. $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ *et* $X' \sim Pa(\alpha', \lambda)$ *avec* $\alpha \geq \alpha'$;
6. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim N(\mu', \sigma^2)$ *avec* $\mu \leq \mu'$;
7. $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim LN(\mu', \sigma^2)$ *avec* $\mu \leq \mu'$;
8. $X \sim U(a, b)$ *et* $X' \sim U(a', b')$ *avec* $a \leq a'$ *et* $b \leq b'$.

Remarque 12.19 *Soit deux v.a. X et X' obéissant à la même loi discrète mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que $X \preceq_{sd} X'$:*

1. $X \sim Pois(\lambda)$ *et* $X' \sim Pois(\lambda')$ *avec* $\lambda \leq \lambda'$;
2. $X \sim Bin(n, q)$ *et* $X' \sim Bin(n, q')$ *avec* $q \leq q'$;
3. $X \sim Bin(n, q)$ *et* $X' \sim Bin(n', q)$ *avec* $n \leq n'$;
4. $X \sim BN(r, q)$ *et* $X' \sim BN(r, q')$ *avec* $q \leq q'$.

On considère les exemples suivants.

Exemple 12.20 *Soit* $X \sim Exp\,(0.002)$ *et* $X' \sim Exp\,(0.001)$. *On obtient*

$$VaR_{95\ \%}\,(X) = 1497.87 \leq VaR_{95\ \%}\,(X') = 2995.73.$$

Pour confirmer que cette inégalité est valide pour tout $\kappa \in (0,1)$, *on constate que* $X \preceq_{sd} X'$ *selon la remarque 12.18. Puis, on a* $VaR_\kappa\,(X) \leq VaR_\kappa\,(X')$ *pour* $\kappa \in (0,1)$ *en appliquant la proposition 12.6.* □

Exemple 12.21 *Soit* $X \sim PComp\,(\lambda = 1, F_B)$, $X' \sim PComp\,(\lambda = 1, F_{B'})$ *avec* $B \sim Exp\,(0.002)$ *et* $B' \sim Exp\,(0.001)$. *On a calculé*

$$VaR_{95\ \%}\,(X) = 1959.02 \leq VaR_{95\ \%}\,(X') = 3918.04.$$

On vérifie que cette inégalité est valide pour tout $\kappa \in (0,1)$. *Selon la remarque 12.18,* $B_i \preceq_{sd} B_i'$ *pour* $i \in \mathbb{N}^+$. *En utilisant la propriété de fermeture sous la composition (théorème 12.16), on déduit que* $X \preceq_{sd} X'$. *Enfin, il résulte de la proposition 12.6 que* $VaR_\kappa\,(X) \leq VaR_\kappa\,(X')$ *pour* $\kappa \in (0,1)$. □

12.3.9 Lois de Bernoulli et de Poisson

Il est aussi possible de comparer des v.a. dont les lois paramétriques diffèrent.

Proposition 12.22 *Soit les v.a.* $M \sim Bern\,(q)$ *et* $M' \sim Pois\,(\lambda)$ *où* $\lambda = -\ln(1-q)$. *Alors, on a* $M \preceq_{sd} M'$.

Preuve. Comme $\lambda = -\ln(1-q)$, on a $F_M\,(0) = F_{M'}\,(0) = (1-q)$. Puisque $F_M\,(k) = 1 \geq F_{M'}\,(k)$, pour $k \in \mathbb{N}^+$, il en découle le résultat désiré. ■

On applique la proposition 12.22 pour justifier le choix de la définition du paramètre $\lambda = -\ln(1-q)$ dans l'approximation Poisson composée décrite au chapitre 11.

Proposition 12.23 *Soit la v.a.* X *définie par*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M > 0 \end{cases},$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, ...$ *sont i.i.d. (avec* $B_k \sim B$*) et indépendantes de la v.a. de fréquence* $M \sim Bern\,(q)$.

Soit la v.a. correspondante X' *définie par*

$$X' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M'} B_j, & M' > 0 \\ 0, & M' > 0 \end{cases},$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, ...$ *sont i.i.d. (avec* $B_k \sim B$*) et indépendantes de la v.a. de fréquence* $M' \sim Pois\,(\lambda)$ *où* $\lambda = -\ln(1-q)$. *Alors, on a* $X \preceq_{sd} X'$.

Preuve. Le résultat découle de l'application combinée de la proposition 12.22 et du théorème 12.16. ■

12.3.10 Méthodes de discrétisation *upper* et *lower*

En appliquant les résultats liés à l'ordre en dominance stochastique, on examine l'intérêt d'utiliser les méthodes de discrétisation *upper* et *lower* qui sont expliquées au chapitre 11.

Soit la v.a. X définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M > 0 \end{cases}, \tag{12.1}$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, ...$ sont i.i.d. (avec $B_k \sim B$) et indépendantes de la v.a. de fréquence M. Soit la v.a. $\widetilde{X}^{(u,h)}$ définie à la suite de l'application de la méthode de discrétisation *upper* avec un pas de

discrétisation h pour approximer la v.a. B_j par la v.a. $\widetilde{B}_j^{(u,h)}$ où

$$\widetilde{X}^{(u,h)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \widetilde{B}_j^{(u,h)}, \ M > 0 \\ 0, \ M > 0 \end{cases}, \tag{12.2}$$

où les v.a. $\widetilde{B}_j^{(u,h)}, \widetilde{B}_j^{(u,h)}, ...$ sont des v.a. i.i.d. concentrées sur le support $\{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$. Soit la v.a. $\widetilde{X}^{(l,h)}$ définie de façon similaire en appliquant la méthode de discrétisation *lower* où

$$\widetilde{X}^{(l,h)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \widetilde{B}_j^{(l,h)}, \ M > 0 \\ 0, \ M > 0 \end{cases}, \tag{12.3}$$

où les v.a. $\widetilde{B}_j^{(l,h)}, \widetilde{B}_j^{(l,h)}, ...$ sont des v.a. i.i.d. concentrées sur le support $\{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$. Dans les deux cas, $\widetilde{X}^{(u,h)}$ et $\widetilde{X}^{(l,h)} \in \{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$.

On a les deux propositions suivantes qui démontrent l'intérêt d'utiliser ces deux méthodes de discrétisation.

Proposition 12.24 *Soit les v.a.* $\widetilde{X}^{(u,h')}$, $\widetilde{X}^{(u,h)}$, X, $\widetilde{X}^{(l,h)}$ *et* $\widetilde{X}^{(l,h')}$ *définies selon (12.1), (12.2) et (12.3). Alors, on a*

$$\widetilde{X}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{X}^{(u,h)} \preceq_{sd} X \preceq_{sd} \widetilde{X}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{X}^{(l,h')} \tag{12.4}$$

pour $0 < h \leq h'$.

Preuve. Selon les deux méthodes et pour $0 < h \leq h'$, on a

$$F_{\widetilde{B}^{(u,h')}}(x) \geq F_{\widetilde{B}^{(u,h)}}(x) \geq F_B(x) \geq F_{\widetilde{B}^{(l,h)}}(x) \geq F_{\widetilde{B}^{(l,h')}}(x),$$

pour $x \geq 0$. Il en résulte que

$$\widetilde{B}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(u,h)} \preceq_{sd} B \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h')}.$$

En appliquant le théorème 12.16, on obtient (12.4). ■

Proposition 12.25 *Soit les v.a.* $\widetilde{S}^{(u,h')}$, $\widetilde{S}^{(u,h)}$, S, $\widetilde{S}^{(l,h)}$ *et* $\widetilde{S}^{(l,h')}$ *définies par* $\widetilde{S}^{(u,h)} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B_i}^{(u,h)}$, $S = \sum_{i=1}^{n} B_i$ *et* $\widetilde{S}^{(l,h)} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B_i}^{(l,h)}$ *avec* $0 < h \leq h'$. *Alors, on a*

$$\widetilde{S}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{S}^{(u,h)} \preceq_{sd} S \preceq_{sd} \widetilde{S}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{S}^{(l,h')}. \tag{12.5}$$

Preuve. Dans la preuve de la proposition 12.24,

$$\widetilde{B}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(u,h)} \preceq_{sd} B \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h')}.$$

On déduit (12.5) en se basant sur le théorème 12.14. ■

Ces deux propositions expliquent l'intérêt d'utiliser les méthodes de discrétisation *upper* et *lower* pour évaluer différentes quantités de risque. Selon ces deux propositions, ces méthodes permettent de déduire des bornes inférieures et supérieures pour F_X (ou $\overline{F}_X$) et pour F_S (ou $\overline{F}_S$). De plus, en appliquant la proposition 12.6, on obtient aussi des bornes pour $VaR_k(X)$ et $VaR_k(S)$. En diminuant la longueur de l'intervalle de discrétisation h, la valeur approximative $VaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{(l,h)}\right)$ (et $VaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{(u,h)}\right)$) va s'approcher de la valeur exacte $VaR_\kappa(X)$ tout en lui restant supérieure (inférieure). Il n'est pas possible d'obtenir de telles bornes lorsque l'on utilise une approximation basée sur la méthode des moments ou une méthode basée sur la simulation stochastique.

Exemple 12.26 *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs exactes de* $VaR_{0.995}(X)$ *et les valeurs approximatives de* $VaR_{0.995}(X)$ *obtenues avec les méthodes de discrétisation upper et lower qui ont été*

produites à l'exemple 11.39 :

κ	$Up_{h=1}$	$Up_{h=\frac{1}{4}}$	$Up_{h=\frac{1}{16}}$	*Exacte*	$Low_{h=\frac{1}{16}}$	$Low_{h=\frac{1}{4}}$	$Low_{h=1}$
0.995	*43*	*45.875*	*45.875*	*46.05167*	*46.25*	*46.75*	*49*

On observe

$$\begin{aligned} VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{(u,1)}\right) &\leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{\left(u,\frac{1}{4}\right)}\right) \\ &\leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{\left(u,\frac{1}{16}\right)}\right) \leq VaR_{0.995}\left(X\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} VaR_{0.995}\left(X\right) &\leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{\left(l,\frac{1}{16}\right)}\right) \\ &\leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{\left(l,\frac{1}{4}\right)}\right) \leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{(l,1)}\right). \end{aligned}$$

Ces relations d'ordre sont confirmées pour toute valeur $\kappa \in (0,1)$ en appliquant conjointement la proposition 12.24 avec la proposition 12.6. □

12.3.11 Stochastiquement croissante

On ajoute l'indice θ à une v.a., notée X_θ, lorsque l'on veut indiquer explicitement que sa distribution dépend d'un paramètre unique θ.

Définition 12.27 *Une v.a. X_θ est dite stochastiquement croissante si et seulement si $X_\theta \preceq_{sd} X_{\theta'}$, quand $\theta \leq \theta'$.*

Dans les exemples suivants, on présente quelques cas de v.a. stochastiquement croissantes.

Exemple 12.28 *Soit une v.a. positive W. La v.a. X_θ définie par $X_\theta = \theta W$ ($\theta \in \mathbb{R}$) est stochastiquement croissante.*

Exemple 12.29 *Soit une suite de v.a. i.i.d. positives B_1, B_2, ... La v.a. X_θ définie par $X_\theta = \sum_{k=1}^{\theta} B_k$ ($\theta \in \mathbb{N}$) est stochastiquement croissante.*

Exemple 12.30 *La v.a. $M_\theta \sim Pois\left(\theta\lambda\right)$, pour $\theta \in \mathbb{R}^+$, est stochastiquement croissante.*

Exemple 12.31 *La v.a. $X_\theta \sim Exp\left(\frac{\beta}{\theta}\right)$, pour $\theta \in \mathbb{R}^+$, est stochastiquement croissante.*

Exemple 12.32 *La v.a. $X_\theta \sim N\left(\theta, \sigma^2\right)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$, est stochastiquement croissante.*

Soit les v.a. indépendantes Θ et la v.a. X_θ. On utilise la notation X_Θ pour désigner une v.a. dont la fonction de répartition est définie par

$$\begin{aligned} F_X\left(x\right) &= \int_{\theta \in A_\Theta} F_{X|\Theta=\theta}\left(x\right) \mathrm{d}F_\Theta\left(\theta\right) \\ &= \int_{\theta \in A_\Theta} F_{X_\theta}\left(x\right) \mathrm{d}F_\Theta\left(\theta\right), \end{aligned}$$

où $A_\Theta \subseteq \mathbb{R}$ est le support de la v.a. de mélange Θ.

Le résultat suivant est important lorsque l'on doit travailler avec des lois définies par un mélange.

Proposition 12.33 *Si $\Theta \preceq_{sd} \Theta'$, alors $X_\Theta \preceq_{sd} X_{\Theta'}$.*

Preuve. Voir [Denuit et al., 2006]. ■

Exemple 12.34 *Soit la v.a.* $X_\theta \sim Exp\left(\frac{\beta}{\theta}\right)$, *avec* $\beta = 1/1000$. *On définit les v.a.* Θ, $\Theta' \in \{1, ..., 5\}$ *avec* $(\Theta - 1) \sim Bin\,(4, 0.2)$ *et* $(\Theta' - 1) \sim Bin\,(4, 0.3)$. *La v.a.* X_θ *est indépendante des v.a.* Θ *et* Θ'. *Alors,* X_Θ *et* $X_{\Theta'}$ *obéissent à la distribution mélange d'exponentielles. On observe que* $VaR_{0.99}\,(X_\Theta) = 10\ 156.609$ *est inférieure à* $VaR_{0.99}\,(X_{\Theta'}) = 12\ 116.566$. *En vertu de la remarque 12.19,* $\Theta \preceq_{sd} \Theta'$. *Selon la proposition 12.33 et avec la proposition 12.6, il en résulte que* $VaR_\kappa\,(X_\Theta) \leq VaR_\kappa\,(X_{\Theta'})$ *pour tout* $\kappa \in (0, 1)$. □

12.3.12 Variance et ordre en dominance stochastique

On peut se demander si $X \preceq_{sd} Y$ permet de déduire que $\mathrm{Var}\,(X) \leq \mathrm{Var}\,(Y)$. On examine cette question dans l'exemple suivant.

Exemple 12.35 *Soit les v.a.* X *et* X' *où* $X \sim U\,(0, b)$ *et* $Pr(X' = b) = 1$. *Comme* $F_X\,(x) \geq F_{Y'}\,(x)$, $x \geq 0$, *alors* $X \preceq_{sd} Y$ *ce qui implique* $E\,[X^m] \leq E\,[X'^m]$ *pour* $m \in \mathbb{N}^+$. *Toutefois,* $\mathrm{Var}\,(X) = \frac{b^2}{12} > \mathrm{Var}\,(X') = 0$. □

Bref, l'ordre en dominance stochastique n'est pas suffisant pour comparer les variances. La raison est que $\mathrm{Var}\,(X) = E\left[(X - E\,[X])^2\right]$ et $\phi\,(x) = (x - a)^2$ n'est pas une fonction croissante.

Comme $\max\,(x - d; 0)$ et $x \times 1_{\{x>d\}}$ sont des fonctions croissantes, si $X \preceq_{sd} X'$, alors $\pi_X\,(d) \leq \pi_{X'}\,(d)$ et $TVaR_\kappa\,(X) \leq TVaR_\kappa\,(X')$.

12.4 Ordres convexes

12.4.1 Définitions

Dans certaines situations, l'actuaire doit comparer des risques qui ont des espérances identiques mais dont les ■variabilités■ sont différentes. Comme l'ordre en dominance stochastique n'est d'aucun secours, on doit recourir aux ordres convexes.

Définition 12.36 *Une fonction* ϕ *est dite convexe si* $\phi\,(\alpha x + (1 - \alpha)\,y) \leq \alpha\phi\,(x) + (1 - \alpha)\,\phi\,(y)$ *pour tout* x *et* y *et pour tout* $0 < \alpha < 1$.

Une fonction ϕ est dite concave si $-\phi$ est convexe.

Définition 12.37 *Soit les v.a.* X *et* X' *telles que* $E\,[X] < \infty$ *et* $E\,[X'] < \infty$. *Alors,* X *est inférieure à* X' *sous l'ordre convexe, noté* $X \preceq_{cx} X'$, *si* $E\,[\phi(X)] \leq E\,[\phi(X')]$, *pour toute fonction réelle convexe* ϕ *et en supposant que les espérances existent.*

Définition 12.38 *Soit les v.a.* X *et* X' *telles que* $E\,[X] < \infty$ *et* $E\,[X'] < \infty$. *Alors,* X *est inférieure à* X' *sous l'ordre convexe croissant, noté* $X \preceq_{icx} X'$, *si* $E\,[\phi(X)] \leq E\,[\phi(X')]$, *pour toute fonction réelle convexe croissante* ϕ *et en supposant que les espérances existent.*

Définition 12.39 *Soit les v.a.* X *et* X' *telles que* $E\,[X] < \infty$ *et* $E\,[X'] < \infty$. *Alors,* X *est inférieure à* X' *sous l'ordre concave croissant, noté* $X \preceq_{icv} X'$, *si* $\mathbb{E}\,[\phi(X)] \leq \mathbb{E}\,[\phi(X')]$, *pour toute fonction réelle concave croissante* ϕ *et en supposant que les espérances existent.*

En actuariat, l'ordre suivant a aussi été défini.

Définition 12.40 *Soit les v.a.* X *et* X' *telles que* $E\,[X] < \infty$ *et* $E\,[X'] < \infty$. *Alors,* X *est inférieure à* X' *sous l'ordre* stop-loss, *noté* $X \preceq_{sl} X'$, *si* $E\,[(X - d)_+] \leq E\,[(X' - d)_+]$, *pour tout* $d \in \mathbb{R}$, *où* $(u)_+ = \max(u; 0)$.

En actuariat, l'ordre convexe correspond à l'ordre *stop-loss* avec moyenne égale. La fonction $\phi\,(x) = \max\,(x - d; 0) = (x - d)_+$ est convexe croissante. La fonction $\phi\,(x) = (x - a)^2$ est convexe mais elle n'est pas croissante. On a $X \preceq_{icv} Y$ si et seulement si $-X \succeq_{icx} -Y$.

12.4.2 Résultats

Pour les démonstrations des résultats suivants, on peut se référer à, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007].

Théorème 12.41 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $X \preceq_{cx} X'$;
2. $X \preceq_{icx} X'$ *et* $E[X] = E[X']$.

Preuve. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), il est clair que $X \preceq_{cx} X'$ mène à $X \preceq_{icx} X'$. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. ■

L'ordre *stop-loss* et l'ordre convexe croissant sont équivalents.

Théorème 12.42 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $X \preceq_{icx} X'$;
2. $X \preceq_{sl} X'$.

Preuve. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) découle du fait que la fonction $\phi(x) = \max(x-d;0)$ est convexe croissante. Pour (b) $\Rightarrow$ (a), voir, p. ex., [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. ■

Ainsi, $X \preceq_{cx} X'$ implique, p. ex., $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(X')$ et $\pi_d(X) \leq \pi_d(X')$ pour tout $d \geq 0$. De plus, $X \preceq_{icx} X'$ implique $\pi_d(X) \leq \pi_d(X')$ pour tout $d \geq 0$ mais n'implique pas $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(X')$ car la fonction $\phi(x) = (x-a)^2$ est convexe mais elle n'est pas croissante. Enfin, $X \preceq_{icx} X'$ avec $E[X] = E[X']$ implique $\pi_d(X) \leq \pi_d(X')$ pour tout $d \geq 0$ et $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(X')$.

On considère les relations entre les ordres convexes et l'ordre en dominance stochastique.

Remarque 12.43 *Si* $X \preceq_{sd} X'$ *alors cela implique* $X \preceq_{icx} X'$ *mais cela n'implique pas* $X \preceq_{cx} X'$.

12.4.3 Propriétés de fermeture

Les ordres $\preceq_{cx}$,$\preceq_{icx}$ et $\preceq_{sl}$ sont fermés sous le mélange, la convolution et la composition. Dans les trois théorèmes suivants, $\preceq_v$ désigne $\preceq_{cx}$,$\preceq_{icx}$ ou $\preceq_{sl}$. On trouve les preuves des théorèmes suivants dans, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007].

Théorème 12.44 ***Fermeture sous la convolution.*** *Soit les v.a. indépendantes* $X_1, ..., X_n$ *et* $X'_1, ..., X'_n$ *avec* $X_i \preceq_v X'_i$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$. *Alors, on a* $\sum_{i=1}^n X_i \preceq_v \sum_{i=1}^n X'_i$.

Théorème 12.45 ***Fermeture sous le mélange.*** *Soit les v. a.* X, X' *et* Θ *définies de telle sorte que* $X|\Theta = \theta \preceq_v X'|\Theta = \theta$ *pour tout* θ *sur le support de* Θ. *Alors, on a* $X \preceq_v X'$.

Théorème 12.46 ***Fermeture sous la composition.*** *Soit les v.a.* S *et* S' *définies par*

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^M X_i, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases} \quad \text{et } S' = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M'} X'_i, & M' > 0 \\ 0, & M' = 0 \end{cases}.$$

Si $X_i \preceq_v X'_i$, *si* $M \preceq_v M'$ *et si toutes les v.a. sont indépendantes, alors, on a* $S \preceq_v S'$.

12.4.4 Condition suffisante

Une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour établir l'ordre convexe croissant (ou *stop-loss*) s'énonce comme suit.

Critère 12.47 ***Critère de Karlin-Novikoff.*** *Soit deux v.a.* X *et* X' *telles que* $E[X] \leq E[X'] < \infty$. *S'il existe un nombre* $c > 0$ *tel que*

$$\begin{aligned} F_X(x) &\leq F_{X'}(x), \qquad x < c \\ F_X(x) &\geq F_{X'}(x), \qquad x \geq c \end{aligned}$$

alors $X \preceq_{icx} X'$ *ou* $X \preceq_{sl} X'$.

Preuve. Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. ■

On considère les exemples suivants.

Exemple 12.48 *Soit les v.a. X et X' où $X \sim Exp\left(\beta = \frac{1}{\mu}\right)$ et $X' = \mu$ avec probabilité 1. Comme $E[X] = E[X'] = \mu$, $F_X(x) > F_{X'}(x)$, $0 \leq x < \mu$ et $F_X(x) \leq F_{X'}(x)$, $x \geq \mu$, on déduit du critère de Karlin-Novikoff que $X' \preceq_{icx} X$ avec $E[X] = E[X']$ ce qui est équivalent à $X' \preceq_{cx} X$. Par conséquent, $\mathrm{Var}(X') \leq \mathrm{Var}(X)$, ce qui est en effet le cas puisque $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$ et $\mathrm{Var}(X') = 0$. Pour confirmer, on a $E[\max(X-d;0)] = \mu \mathrm{e}^{-\frac{d}{\mu}}$ et $E[\max(X'-d;0)] = \mu - d$, $0 \leq d < \mu$, et $E[\max(X'-d;0)] = 0$, $d \geq \mu$.* □

Exemple 12.49 *Soit les v.a. X, Y et Z où $X \sim U(a,b)$, $\Pr\left(Y = \frac{a+b}{2}\right) = 1$, $\Pr(Z = a) = \Pr(Z = b) = \frac{1}{2}$. Comme*

$$\begin{aligned}
F_X(x) &> F_Y(x), \quad x < \frac{a+b}{2}, \text{ et } F_X(x) \leq F_Y(x), \quad x \geq \frac{a+b}{2}, \\
F_Z(x) &> F_Y(x), \quad x < \frac{a+b}{2}, \text{ et } F_Z(x) \leq F_Y(x), \quad x \geq \frac{a+b}{2}, \\
F_Z(x) &> F_X(x), \quad x < \frac{a+b}{2}, \text{ et } F_Z(x) \leq F_X(x), \quad x \geq \frac{a+b}{2},
\end{aligned}$$

on déduit que $Y \preceq_{icx} X \preceq_{icx} Z$ selon le critère de Karlin-Novikoff. Puis, comme $E[X] = E[Y] = E[Z] = \frac{a+b}{2}$, il résulte du théorème 12.41 que $Y \preceq_{cx} X \preceq_{cx} Z$. □

12.4.5 Mesure TVaR

On indique la relation entre l'ordre convexe croissant et la mesure de risque $TVaR$.

Proposition 12.50 *Soit les v.a. X et X'. Alors, on a $X \preceq_{icx} X'$ si et seulement si $TVaR_\kappa(X) \leq TVaR_\kappa(X')$, pour tout $0 < \kappa < 1$.*

Preuve. Voir [Denuit et al., 2006]. ■

12.4.6 Lois paramétriques

On indique sous quelles conditions les relations d'ordre convexe et d'ordre convexe croissant sont satisfaites pour certaines distributions univariées connues.

Remarque 12.51 *Soit deux v.a. X et X' obéissant à la même loi continue mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que $X \preceq_{icx} X'$:*

- $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ *et* $X' \sim Ga(\alpha', \beta')$ *avec* $\alpha \geq \alpha'$ *et* $\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\alpha'}{\beta'}$;
- $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ *et* $X' \sim Pa(\alpha', \lambda')$ *avec* $\alpha \geq \alpha'$ *et* $\frac{\lambda}{\alpha-1} \leq \frac{\lambda'}{\alpha'-1}$;
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim N\left(\mu', (\sigma')^2\right)$ *avec* $\mu \leq \mu'$ *et* $\sigma \leq \sigma'$;
- $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim LN\left(\mu', (\sigma')^2\right)$ *avec* $\mu \leq \mu'$ *et* $\sigma = \sigma'$.

Remarque 12.52 *Soit deux v.a. X et X' obéissant à la même loi continue mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que $X \preceq_{cx} X'$:*

- $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ *et* $X' \sim Ga(\alpha', \beta')$ *avec* $E[X] = E[X']$ *et* $\alpha \geq \alpha'$;
- $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ *et* $X' \sim Pa(\alpha', \lambda')$ *avec* $E[X] = E[X']$ *et* $\alpha \geq \alpha'$;
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim N\left(\mu, (\sigma')^2\right)$ *avec* $\sigma \leq \sigma'$;
- $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim LN\left(\mu', (\sigma')^2\right)$ *avec* $\sigma \leq \sigma'$, $\mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2$ *et* $\mu' = a - \frac{1}{2}(\sigma')^2$ *($a \in \mathbb{R}$), tels que* $E[X] = E[X'] = \mathrm{e}^a$.

12.4.7 Lois de Bernoulli et de Poisson

On a la proposition suivante concernant les lois de Bernoulli et de Poisson.

Proposition 12.53 *Soit les v.a. $M \sim Bern(q)$ et $M' \sim Pois(\lambda)$ où $\lambda = q$. Alors, on a $M \preceq_{cx} M'$.*

Preuve. Comme $F_M(0) = 1 - q \leq F_{M'}(0) = \mathrm{e}^{-q}$ et $F_M(k) = 1 \geq F_{M'}(k)$, pour $k \in \mathbb{N}^+$, on applique le critère de Karlin-Novikov pour obtenir le résultat désiré. ■

La proposition 12.53 sert à justifier le choix de la définition du paramètre $\lambda = q$ dans l'approximation Poisson composée expliquée au chapitre 11.

Proposition 12.54 *Soit les v.a. X et X' définies par*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M > 0 \end{cases} \quad \text{et } X' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M'} B_j, & M' > 0 \\ 0, & M' > 0 \end{cases},$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, \ldots$ sont i.i.d. (avec $B_k \sim B$), indépendantes de la v.a. de fréquence $M \sim Bern(q)$ et indépendantes de la v.a. de fréquence $M' \sim Pois(\lambda)$ où $\lambda = q$. Alors, on a $X \preceq_{cx} X'$.

Preuve. L'application combinée de la proposition 12.53 et du théorème 12.16 mène au résultat désiré. ■

12.4.8 Lois Poisson - mélange

Soit une v.a. X_Θ obéissant à une loi Poisson-mélange. On examine l'impact de la v.a. de mélange Θ sur le comportement de la v.a. X_Θ.

Proposition 12.55 *Soit la v.a. positive Θ et la v.a. $X_\theta \sim Pois(\lambda\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}^+$. Les v.a. Θ et X_θ sont indépendantes. Alors, $\Theta \preceq_{icx} \Theta'$ implique $X_\Theta \preceq_{icx} X_{\Theta'}$.*

Preuve. La preuve est due à [Kaas et al., 2008]. Il faut montrer que $\Theta \preceq_{sl} \Theta'$ implique $X_\Theta \preceq_{sl} X_{\Theta'}$, ce qui est équivalent à $X_\Theta \preceq_{icx} X_{\Theta'}$ en raison du théorème 12.42. Soit une v.a. $Y_\theta \sim Pois(\lambda\theta)$. Pour simplifier la présentation, on pose $\lambda = 1$. On introduit la fonction $\pi_d(\theta) = E[\max(Y_\theta - d; 0)]$. On a $X_\Theta \preceq_{sl} X_{\Theta'}$ si et seulement si $E[\pi_d(\Theta)] \leq E[\pi_d(\Theta')]$ pour tout d. Pour y parvenir, on démontre que $\pi_d(\theta)$ est convexe croissante. On a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\pi_d(\theta)}{\mathrm{d}\theta} &= \sum_{k=1}^{\infty} \max(k-d;0) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \max(k-d;0)\left(\frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^k}{k!}\right) \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\pi_d(\theta)}{\mathrm{d}\theta} &= \sum_{k=1}^{\infty} \max(k-1-(d-1);0) \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^{k-1}}{(k-1)!} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \max(k-d;0) \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^k}{k!} \\ &= \pi_{d-1}(\theta) - \pi_d(\theta) \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que la dérivée $\frac{\mathrm{d}\pi_d(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ est positive. De plus, $\frac{\mathrm{d}\pi_d(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ est croissante car $Y_\theta \preceq_{sd} Y_{\theta'}$ quand $\theta \leq \theta'$. Puisque $\frac{\mathrm{d}\pi_d(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ est croissante et positive, alors $\pi_d(\theta)$ est convexe croissante et on déduit le résultat désiré. ■

Corollaire 12.56 *Dans la proposition 12.55, si $E[\Theta] = E[\Theta'] = 1$, alors $E[X] = E[X'] = \lambda$ et, par le théorème 12.41, $\Theta \preceq_{cx} \Theta'$ implique $X_\Theta \preceq_{cx} X_{\Theta'}$.*

En actuariat, la loi Poisson-mélange est souvent utilisée pour justifier la présence d'hétérogénéité dans les données d'assurance dommage. Soit deux contrats d'assurance dont les coûts sont définis par les v.a. X et X' avec

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j, \ M > 0 \\ 0, \ M > 0 \end{cases} \quad \text{et } X' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M'} B_j, \ M' > 0 \\ 0, \ M' > 0 \end{cases},$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, ...$ sont i.i.d. (avec $B_k \sim B$) et indépendantes des v.a. M et M' de loi Poisson-mélange qui sont définies comme dans la proposition 12.55. Alors, on a $X \preceq_{cx} X'$ en appliquant la proposition 12.55 et le théorème 12.16. Par exemple, les primes calculées selon le principe de la variance sont ordonnées c.-à-d. $\Pi^{\text{Var}}(X) \leq \Pi^{\text{Var}}(X')$. De même, on a $TVaR_\kappa(X) \preceq_{cx} TVaR_\kappa(X')$. Par conséquent, une plus grande hétérogénéité dans la définition de la loi de fréquence conduit notamment à des valeurs plus élevées dans la prime selon le principe de la variance et de la TVaR.

Exemple 12.57 *À l'exemple 4.18, on traite du comportement de la v.a. $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $B \sim Exp(\beta = 1)$ et $q = \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right)^{-1}$. Les paramètres r et q de la v.a. de fréquence M sont fixés de telle sorte que $E[M] = 200$. On obtient les valeurs suivantes de $VaR_{0.5}(X)$, $VaR_{0.995}(X)$, $TVaR_{0.5}(X)$, $TVaR_{0.995}(X)$ pour 4 couples de valeurs pour (r, q) :*

r	q	$VaR_{0.5}(X)$	$VaR_{0.995}(X)$	$TVaR_{0.5}(X)$	$TVaR_{0.995}(X)$
1	$\frac{1}{201}$	138.320	1063.959	339.320	1264.959
2	$\frac{1}{101}$	167.509	748.435	306.217	861.415
5	$\frac{1}{41}$	186.499	511.316	271.108	567.148
25	$\frac{1}{9}$	196.973	332.139	235.481	352.004

Notamment, on observe que

$$TVaR_{0.995}\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right) \leq TVaR_{0.995}\left(X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}\right), \tag{12.6}$$

pour $r \geq r'$. La loi binomiale négative de paramètres r et $q = \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right)^{-1}$ correspond à la loi Poisson-gamma de paramètres λ et r où la v.a. de mélange Θ obéit à une loi gamma de paramètres $\alpha = r$ et $\beta = r$. Dans cet exemple, $\lambda = 200$. Ainsi, selon la remarque 12.51, l'inégalité $r \geq r'$ implique la relation d'ordre $\Theta^{(r)} \preceq_{cx} \Theta^{(r')}$. Avec la proposition 12.55, on déduit $M^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)} \preceq_{cx} M^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}$. Puis, d'après le théorème 12.46, on a $X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)} \preceq_{cx} X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}$, ce qui conduit à

$$TVaR_\kappa\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right) \leq TVaR_\kappa\left(X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}\right)$$

pour tout $\kappa \in (0, 1)$ en raison de la proposition 12.50 et ce qui confirme (12.6). De plus, on a

$$\text{Var}\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right) \leq \text{Var}\left(X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}\right).$$

En effet, pour les 4 couples de valeurs pour (r, q), on a les valeurs suivantes de variance :

r	q	$\text{Var}\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right)$
1	$\frac{1}{201}$	40 200
2	$\frac{1}{101}$	20 200
5	$\frac{1}{41}$	8200
25	$\frac{1}{9}$	1800

On constate aussi que le résultat concernant la loi Poisson-mélange ne conduit pas à un résultat équivalent pour la VaR, car

$$VaR_{0.5}\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right) \geq VaR_{0.5}\left(X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}\right)$$

et

$$VaR_{0.995}\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right) \leq VaR_{0.995}\left(X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}\right),$$

pour $r \geq r'$. □

12.4.9 Méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée

On examine la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée, décrite au chapitre 11, conjointement avec les résultats sur l'ordre convexe.

Soit la v.a. X définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M > 0 \end{cases}, \tag{12.7}$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, ...$ sont i.i.d. (avec $B_k \sim B$) et indépendantes de la v.a. de fréquence M. Soit la v.a. $\widetilde{X}^{(d,h)}$ définie à la suite de l'application de la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée avec un pas de discrétisation h pour approximer la v.a. B_j par la v.a. $\widetilde{B}_j^{(d,h)}$ où

$$\widetilde{X}^{(d,h)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \widetilde{B}_j^{(d,h)}, & M > 0 \\ 0, & M > 0 \end{cases}, \tag{12.8}$$

où les v.a. $\widetilde{B}_j^{(d,h)}, \widetilde{B}_j^{(d,h)}, ...$ sont des v.a. i.i.d. concentrées sur le support $\{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$. On sait que $E\left[\widetilde{X}^{(d,h)}\right] = E[X]$.

Les deux prochaines propositions expliquent l'intérêt d'utiliser la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée.

Proposition 12.58 *Soit les v.a.* X, $\widetilde{X}^{(d,h)}$ *et* $\widetilde{X}^{\left(d,h'\right)}$ *définies selon (12.7) et (12.8) avec* $0 < h \leq h'$. *Alors, on a*

$$X \preceq_{cx} \widetilde{X}^{(d,h)} \preceq_{cx} \widetilde{X}^{\left(d,h'\right)}. \tag{12.9}$$

Preuve. Dans [Müller and Stoyan, 2002], il est montré que

$$B \preceq_{cx} \widetilde{B}^{(d,h)} \preceq_{cx} \widetilde{B}^{\left(d,h'\right)}. \tag{12.10}$$

Puis, par le théorème 12.46, on déduit (12.9). ■

Proposition 12.59 *Soit les v.a.* S, $\widetilde{S}^{(d,h)}$ *et* $\widetilde{S}^{\left(d,h'\right)}$ *définies par* $S = \sum_{i=1}^{n} B_i$ *et* $\widetilde{S}^{(d,h)} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B_i}^{(d,h)}$ *avec* $0 < h \leq h'$. *Alors, on a*

$$S \preceq_{cx} \widetilde{S}^{(d,h)} \preceq_{cx} \widetilde{S}^{\left(d,h'\right)}. \tag{12.11}$$

Preuve. En utilisant conjointement (12.10) et le théorème 12.44, on obtient (12.11). ■

On illustre la pertinence d'utiliser la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée dans l'exemple suivant.

Exemple 12.60 *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de* $VaR_\kappa(X)$, $VaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{\left(d,\frac{1}{100}\right)}\right)$, $TVaR_\kappa(X)$ *et* $TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{\left(d,\frac{1}{100}\right)}\right)$ *obtenues à l'exemple 11.42 :*

κ	$VaR_\kappa(X)$	$VaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{\left(d,\frac{1}{100}\right)}\right)$	$TVaR_\kappa(X)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{\left(d,\frac{1}{100}\right)}\right)$
0.5	*2.48268*	*2.48*	*4.86835*	*4.86836*
0.95	*7.72886*	*7.73*	*9.56856*	*9.56856*
0.995	*11.91371*	*11.91*	*13.57670*	*13.57690*

On présente ci-dessous aussi les valeurs $\pi_d(X)$ *et* $\pi_d\left(\widetilde{X}^{\left(d,\frac{1}{100}\right)}\right)$ *:*

d	0	1	2	5	10	15
$\pi_d(X)$	3	2.133987	1.454502	0.378085	0.025710	0.001237
$\pi_d\left(\widetilde{X}^{\left(d,\frac{1}{100}\right)}\right)$	3	2.133989	1.454504	0.378087	0.025711	0.001237

Par exemple, on constate que

$$TVaR_{0.995}(X) \leq TVaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{\left(d,\frac{1}{100}\right)}\right).$$

Cette inégalité est valide pour tout $\kappa \in (0,1)$*, en vertu de la proposition 12.58 et de la proposition 12.50. De plus, on a*

$$\pi_{10}(X) \leq \pi_{10}\left(\widetilde{X}^{\left(d,\frac{1}{100}\right)}\right).$$

Cette inégalité est valide pour tout $d \geq 0$ *en raison de la proposition 12.58 et du fait que* $\max(x-d;0)$ *est une fonction convexe. Toutefois, on observe que*

$$VaR_{0.995}(X) \leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{\left(d,\frac{1}{100}\right)}\right)$$

n'est pas vérifée pour tout $\kappa \in (0,1)$ *puisque la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée n'est pas valide pour construire une borne pour la VaR. Dans ce contexte, il a été expliqué qu'il faut recourir aux méthodes de discrétisation upper et lower.* □

12.4.10 Mutualisation des risques

Soit un portefeuile composé de n risques représentés par les v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n. On définit la v.a. $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. La prochaine proposition est intéressante du point de vue de la mutualisation des risques.

Proposition 12.61 *On a*

$$W_{n+1} \preceq_{icx} W_n,$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$*.*

Preuve. Voir [Denuit et al., 2006]. ■

En appliquant conjointement (12.61) et (12.50), on déduit que

$$TVaR_{\kappa}(W_{n+1}) \leq TVaR_{\kappa}(W_n),$$

pour toute valeur de $\kappa \in (0,1)$.

12.5 Notes bibliographiques

Le domaine des ordres stochastiques univariés est vaste et d'autres ordres stochastiques univariés ont été étudiés, notamment l'ordre exponentiel, l'ordre du ratio de vraisemblance, l'ordre de Laplace, l'ordre de la fonction de hasard, etc. Pour un exposé complet sur le sujet, on recommande [Müller and Stoyan, 2002] et [Shaked and Shanthikumar, 2007].

Plusieurs chercheurs en actuariat ont démontré l'intérêt des ordres stochastiques en actuariat. Pour une présentation concernant les ordres stochastiques univariés dans le contexte de l'actuariat, on suggère [Denuit et al., 2006], [Denuit et al., 2004], [Kaas et al., 2008] et [Kaas et al., 1994].

Code LaTeX : `chapitre_ordres.tex`

Chapitre 13

Distributions multivariées et agrégation des risques

13.1 Introduction

Depuis le milieu des années 1990, on observe en actuariat et en gestion quantitative des risques un intérêt croissant pour la modélisation de la dépendance entre les risques. Il est devenu essentiel pour l'actuaire de connaître des modèles multivariés et des méthodes pour en construire. La dépendance a un impact sur la mutualisation des risques. Désormais, il est devenu crucial de tenir compte de la dépendance dans les modélisations d'un portefeuille de risques.

Dans un cours de base en probabilité, l'exemple le plus fréquemment présenté de distribution multivariée est la distribution normale multivariée. En fait, il existe pour chaque loi paramétrique, continue ou discrète, plusieurs extensions multivariées. Des lois multivariées peuvent aussi être créées en se basant sur la théorie des copules. Il existe aussi différentes approches pour construire des modèles multivariés de risque : modèles avec chocs communs, modèles avec mélange commun, etc.

Au chapitre 1, on présente les notions de base relatives aux distributions multivariées. Dans ce chapitre, on aborde un certain nombre de lois multivariées dont on présente les principales caractéristiques. Ainsi, on considère des lois exponentielles, gamma, de Pareto, de Poisson, binomiale négative, de Bernoulli multivariées. Ensuite, on examine les cas où il est possible de trouver une expression exacte pour les fonctions de répartition de la somme des risques. On suggère aussi des méthodes adéquates d'évaluation dans les autres cas. On présente aussi les méthodes avec chocs communs et avec mélange commun pour construire des modèles multivariés de risque afin d'incorporer une relation de dépendance entre les risques. On s'intéresse aussi à la notion de la comonotonicité et à ses principales propriétés. Enfin, il est impossible de traiter de la modélisation de la dépendance sans aborder la théorie des copules. Étant donné son importance, ce sujet fait l'objet du chapitre 14 au complet.

13.2 Classes de Fréchet

Soit $F_1, ..., F_n$ des fonctions de répartition univariées (pas nécessairement identiques).

Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ dont la fonction de répartition est $F_{\underline{X}}$.

Définition 13.1 *On définit la classe de Fréchet $\mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$ par l'ensemble de toutes les fonctions de répartition multivariées $F_{\underline{X}}$ ayant pour marginales $F_1, ..., F_n$.*

On a le résultat suivant pour la classe de Fréchet $\mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$.

Théorème 13.2 *Soit $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$. Alors, on a*

$$W(x_1, ..., x_n) \leq F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) \leq M(x_1, ..., x_n), \quad (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{13.1}$$

où

$$W(x_1, ..., x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - (n-1); 0\right),$$
$$M(x_1, ..., x_n) = \min(F_1(x_1); ...; F_n(x_n)).$$

Preuve. On a

$$F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = \Pr\left(\bigcap_i = 1^n \{X_i \leq x_i\}\right).$$

Comme

$$\bigcap_i = 1^n \{X_i \leq x_i\} \subset \{X_i \leq x_i\}$$

pour tout $i = 1, 2, ..., n$, alors $F_{\underline{X}}(\underline{x}) \leq F_{X_i}(x_i) = F_i(x_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, ce qui mène à la seconde inégalité. La première inégalité découle de

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right) &= 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i > x_i\}\right) \\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \Pr(X_i > x_i) = 1 - n + \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) \\
&= 1 - n + \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i).
\end{aligned}$$

■

Important ! Peu importe la structure de dépendance qui relie les v.a. $X_1, ..., X_n$, la fonction de répartition conjointe du vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ satisfait (13.1).

La borne M correspond à la borne supérieure de Fréchet et elle est une fonction de répartition.

La borne W est appelée la borne inférieure de Fréchet.

— Pour $n = 2$, W est une fonction de répartition.

— Pour $n > 2$, W n'est pas une fonction de répartition (voir [Joe, 1997]).

13.3 Comonotonicité

13.3.1 Définition

Un cas particulier de relation de dépendance est la comonotonicité

Depuis la fin des années 1990, cette notion est fréquemment évoquée en actuariat.

Définition 13.3 *Un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ est comonotonique si et seulement si il existe une v.a. Z et des fonctions non décroissantes ϕ_1,...,ϕ_n telles que*

$$\underline{X} = (X_1, ..., X_n) =_d \quad (\phi_1(Z), ..., \phi_n(Z)).$$

13.3.2 Représentation intéressante

Par exemple, on définit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$, où les composantes sont données par

$$X_i = F_{X_i}^{-1}(U), \tag{13.2}$$

pour $i = 1, 2, ..., n$ et $U \sim Unif(0, 1)$.

Alors, par la définition 13.3, les composantes de $\underline{X}$ sont dites comonotones.

La relation en (13.2) est importante pour l'agrégation des risques que l'on suppose comonotones.

13.3.3 Comonotonicité et simulation

Soit un vecteur de v.a. comonotones $\underline{X} = (X_1, .., X_n)$.

Algorithme 13.4 ***Simulation des réalisations de*** $\underline{X}$.

1. *On simule une réalisation* $U^{(j)}$ *de la v.a.* $U \sim U(0,1)$.
2. *On calcule* $X_1^{(j)} = F_{X_1}^{-1}\left(U^{(j)}\right)$, ..., $X_n^{(j)} = F_{X_n}^{-1}\left(U^{(j)}\right)$.

13.3.4 Comonotonicité et borne supérieure de Fréchet

La proposition suivante fait le lien entre un vecteur de v.a. $\underline{X}$ dont les composantes sont comonotones et la borne supérieure de Fréchet.

Proposition 13.5 *Le vecteur de v.a.* $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ *a des composantes comonotones si, et seulement si, sa fonction de répartition conjointe est la borne supérieure de Fréchet* M.

Preuve. Pour le vecteur de v.a. $\underline{X}$ définie en (13.2), on a

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) &= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U) \leq x_1, ..., F_{X_n}^{-1}(U) \leq x_n\right) \\ &= \Pr\left(U \leq F_{X_1}(x_1), ..., U \leq F_{X_n}(x_n)\right) \\ &= \Pr\left(U \leq \min\left(F_{X_1}(x_1); ...; F_{X_n}(x_n)\right)\right) \\ &= F_{\underline{X}}^{+}(\underline{x}), \end{aligned}$$

telle que définie au théorème 13.2. ■

La relation de comonotonicité correspond à la dépendance positive parfaite ou à la dépendance extrême positive.

13.3.5 Toutes les composantes du vecteur dépendent d'une seule v.a.

Proposition 13.6 *Soit un vecteur de v.a. continues* $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ *dont les marginales sont* $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$. *Les composantes de* $\underline{X}$ *sont comonotones si, et seulement si,*

$$X_i = F_{X_i}^{-1}\left(F_{X_j}(X_j)\right), \tag{13.3}$$

pour $j \in \{1, 2, ..., n\}$ *et tous les* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *avec* $i \neq j$.

Preuve. Pour simplifier la présentation, on fixe $i = 1$ sans perte de généralisation. Si les composantes sont comonotones, on utilise (13.2) conjointement avec le théorème 1.53

$$X_i = F_{X_i}^{-1}(U) = F_{X_i}^{-1}(F_{X_1}(X_1))$$

pour $i = 2, ..., n$. L'implication inverse se démontre de façon similaire. ■

13.3.6 Comonotonicité et agrégation

Soit un vecteur v.a. comonotones $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$.

On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. À partir de (13.2), on a

$$S = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) = \varphi(U), \tag{13.4}$$

où $\varphi(y)$ est une fonction croissante pour $y \in (0,1)$.

Le résultat suivant est fondamental pour la somme de v.a. comonotones.

Proposition 13.7 ***(Additivité des VaR et des TVaR).*** *Alors, on a*

$$VaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} VaR_\kappa(X_i). \tag{13.5}$$

et

$$TVaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_\kappa(X_i). \tag{13.6}$$

Preuve. La preuve se fait en 2 parties.

1. À partir de (13.4), on a

$$S = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) = \varphi(U).$$

Alors, avec la proposition 3.24, on a

$$VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(\varphi(U)) = \varphi(VaR_\kappa(U)).$$

Comme

$$VaR_\kappa(U) = \kappa,$$

on déduit

$$VaR_\kappa(S) = \varphi(\kappa) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(\kappa) = \sum_{i=1}^{n} VaR_\kappa(X_i),$$

2. On remplace (13.5) dans la définition de base de $TVaR_\kappa(S)$ et on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(S)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \sum_{i=1}^{n} VaR_u(X_i)\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{i=1}^{n} TVaR_\kappa(X_i). \end{aligned}$$

■

Dans le prochain exemple, on constate qu'il est plus aisé d'agréger des v.a. continues comonotones que d'agréger des v.a. continues indépendantes.

Exemple 13.8 *Soit le triplet de v.a. comonotones* (X_1, X_2, X_3) *où* $X_1 \sim U(0,200)$, $X_2 \sim Pa(3,200)$ *et* $X_3 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$.

— *On définit* $S = X_1 + X_2 + X_3$.

— *Comme* $E[X_i] = 100$, $i = 1,2,3$, *on a* $E[S] = 300$.

— *On déduit les expressions suivantes de* $VaR_\kappa(S)$ *et de* $TVaR_\kappa(S)$ *:*

$$VaR_\kappa(S) = 200\kappa + 200\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{3}} - 1\right) + (-100)\ln(1-\kappa)$$

et

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= 200\frac{(1+\kappa)}{2} + (-100)(\ln(1-\kappa)+1) \\ &\quad +200\left(\frac{3}{3-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{3}} - 1\right), \end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

— *On note que* $TVaR_0(S) = E[S]$. □

Dans certains cas, il est possible d'identifier la loi de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, comme il est illustré dans les trois exemples suivants.

Exemple 13.9 *Soit un vecteur de v.a. où les composantes sont comonotones et identiquement distribuées* ($F_{X_i} = F_X$ *et* $X_i \sim X$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$). *À partir de (13.2), on a*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} X_i = F_X^{-1}(U) + ... + F_X^{-1}(U) \\ &= nF_X^{-1}(U) = nX. \end{aligned}$$

Si les v.a. X_i *sont comonotones et identiquement distribuées, cela revient à dire qu'elles prennent toutes la même valeur.* □

Exemple 13.10 *Soit les v.a. comonotones* $X_i \sim Exp(\beta_i)$ *avec* $\overline{F}_{X_i}(x) = \exp(-\beta_i x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. *Pour* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, *on a*

$$\begin{aligned} S &= \left(-\frac{1}{\beta_1}\ln(1-U)\right) + ... + \left(-\frac{1}{\beta_n}\ln(1-U)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{\beta_1} + ... + \frac{1}{\beta_n}\right)\ln(1-U), \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que $S \sim Exp\left(\frac{1}{\frac{1}{\beta_1}+...+\frac{1}{\beta_n}}\right)$. □

Exemple 13.11 *Soit les v.a. comonotones* $X_i \sim Pa(\alpha, \lambda_i)$ *avec* $F_{X_i}(x) = 1 - \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + x}\right)^{\alpha}$ *et* $F_{X_i}^{-1}(u) = \frac{\lambda_i}{(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. *Pour* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, *on a*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} X_i = \left(\frac{\lambda_1}{(1-U)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_1\right) + ... + \left(\frac{\lambda_n}{(1-U)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_n\right) \\ &= \frac{\lambda^*}{(1-U)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda^*, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $S \sim Pa(\alpha, \lambda^*)$ *où* $\lambda^* = \lambda_1 + ... + \lambda_n$. □

Exemple 13.12 *On considère un portefeuille de 10 risques individuels.*

— *Les coûts associés au risque i sont modélisés par la v.a.* $X_i = b_i I_i$ *où* I_i *obéit à une loi de Bernoulli de moyenne* q_i *et* b_i *est une constante positive* $(i = 1, 2, ..., 10)$.

— *Les caractéristiques des risques du portefeuille sont données dans le tableau suivant :*

i	q_i	b_i	i	q_i	b_i
1	0.091	100	6	0.031	300
2	0.064	100	7	0.014	400
3	0.049	200	8	0.023	400
4	0.019	200	9	0.058	500
5	0.027	300	10	0.065	500

— *Les v.a.* I_1,..., I_{10} *sont comonotones. La v.a. S représente les coûts totaux pour le portefeuille.*

— *On représente la v.a. S par* $S = \sum_{i=1}^{10} b_i F_{I_i}^{-1}(U)$ *où* $U \sim U(0, 1)$.

— *On déduit que*

i	q_i	$1-q_i$	b_i	*ordre de* $1-q_i$
1	0.091	0.809	100	1
2	0.064	0.936	100	3
3	0.049	0.951	200	5
4	0.019	0.981	200	9
5	0.027	0.973	300	7
6	0.031	0.969	300	6
7	0.014	0.986	400	10
8	0.023	0.977	400	8
9	0.058	0.942	500	4
10	0.065	0.935	500	2

et on obtient

x	$\Pr(S=x)$	$\Pr(S\leq x)$
0	0.809	0.809
100	0.126	0.935
600	0.001	0.936
700	0.006	0.942
1200	0.009	0.951
1400	0.018	0.969
1700	0.004	0.973
2000	0.004	0.977
2400	0.004	0.981
2600	0.005	0.986
3000	0.014	1.000

□

On peut aussi développer des expressions intéressantes.

Par exemple, on a

$$\begin{aligned} E\left[S\times 1_{\{S>d\}}\right] &= E\left[(X_1+...+X_n)\times 1_{\{(X_1+...+X_n)>d\}}\right] \\ &= E\left[\varphi(U)\times 1_{\{\varphi(U)>d\}}\right] \\ &= E\left[\varphi(U)\times 1_{\{U>\varphi^{-1}(d)\}}\right] \\ &= \int_{\varphi^{-1}(d)}^{1}\varphi(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Ensuite, on déduit

$$\begin{aligned} E\left[S\times 1_{\{S>d\}}\right] &= \int_{\varphi^{-1}(d)}^{1}\varphi(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\varphi^{-1}(d)}^{1}\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\varphi^{-1}(d)}^{1}F_{X_i}^{-1}(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Pour une v.a. continue Y, on rappelle que

$$TVaR_{\kappa}(Y)=\frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1}F_Y^{-1}(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{1-\kappa}E\left[Y\times 1_{\left\{Y>F_Y^{-1}(\kappa)\right\}}\right].$$

Si $\kappa=F_Y(d)$, on a

$$TVaR_{F_Y(d)}(Y)=\frac{1}{1-F_Y(d)}E\left[Y\times 1_{\{Y>d\}}\right].$$

Si les v.a. X_1, ..., X_n sont continues, la v.a. S est aussi continue. Il en suit que

$$\begin{aligned} E\left[S \times 1_{\{S>d\}}\right] &= (1 - F_S(d)) \times TVaR_{F_S(d)}(S) \\ &= \left(1 - \varphi^{-1}(d)\right) TVaR_{F_S(d)}(S) \\ &= \left(1 - \varphi^{-1}(d)\right) \left(\sum_{i=1}^{n} TVaR_{F_S(d)}(X_i)\right) \\ &= \left(1 - \varphi^{-1}(d)\right) \left(\sum_{i=1}^{n} TVaR_{\varphi^{-1}(d)}(X_i)\right). \end{aligned}$$

Bref, pour des v.a. comonotones X_1, ... ,X_n, on a

$$TVaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_\kappa(X_i).$$

Mais, la relation

$$E\left[S \times 1_{\{S>d\}}\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i \times 1_{\{X_i>d\}}\right]$$

n'est pas valide

Aussi, la relation

$$E\left[S \times 1_{\{S\leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i \times 1_{\{X_i\leq d\}}\right]$$

n'est pas valide.

Également, la relation

$$E\left[\max(S - d; 0)\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[\max(X_i - d; 0)\right]$$

n'est pas valide.

En fait, on a

$$\begin{aligned} E\left[S \times 1_{\{S>d\}}\right] &= \int_{\varphi^{-1}(d)}^{1} \varphi(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi^{-1}(d)}^{1} F_{X_i}^{-1}(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} E\left[S \times 1_{\{S>d\}}\right] &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi^{-1}(d)}^{1} F_{X_i}^{-1}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i \times 1_{\left\{X_i > F_{X_i}^{-1}(\varphi^{-1}(d))\right\}}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i \times 1_{\left\{X_i > F_{X_i}^{-1}(F_S(d))\right\}}\right]. \end{aligned}$$

Puisque

$$E\left[\max(Y - c; 0)\right] = E\left[Y \times 1_{\{Y>c\}}\right] - d\left(1 - F_Y(c)\right),$$

on déduit

$$E\left[\max\left(S-d;0\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}E\left[X_i\times 1_{\left\{X_i>F_{X_i}^{-1}(F_S(d))\right\}}\right]-F_{X_i}^{-1}\left(F_S\left(d\right)\right)\left(1-F_S\left(d\right)\right).$$

13.3.7 Somme v.a. comonotones de loi lognormales

Soit les v.a. comonotones $X_i\sim LNorm\left(\mu_i,\sigma_i\right)$, $i=1,2,...,n$. On définit $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$.
Soit la v.a. $U\sim Unif\left(0,1\right)$. On définit

$$Z=\Phi^{-1}\left(u\right)\sim Norm\left(0,1\right).$$

On déduit

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1}\left(U\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\exp\left(\mu_i+\sigma_i\Phi^{-1}\left(Z\right)\right)\\ &= \varphi\left(Z\right)\end{aligned}$$

où φ est une fonction croissante en Z.

Questions :

— Évaluer $F_S\left(x\right)$.

— On sait que

$$F_S\left(s\right)=F_Z\left(\varphi^{-1}\left(s\right)\right).$$

— Identifier une condition permettant d'voir une expression fermée pour $\varphi^{-1}\left(s\right)$?

Essayons ceci :

— Fixons $\sigma_i=\sigma$, pour $i=1,2,...,n$.

— Alors, on déduit

$$\begin{aligned}\varphi\left(Z\right) &= \sum_{i=1}^{n}\exp\left(\mu_i+\sigma_i\Phi^{-1}\left(Z\right)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\mu_i}\mathrm{e}^{\sigma\Phi^{-1}(Z)}\\ &= \mathrm{e}^{\mu_S+\sigma\Phi^{-1}(Z)}\end{aligned}$$

où

$$\mu_S=\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\mu_i}\right).$$

— On conclut que

$$S\sim LNorm\left(\mu_S,\sigma\right).$$

— Par exemple, on a

$$F_S\left(y\right)=\Phi\left(\frac{\ln\left(y\right)-\mu_S}{\sigma}\right).$$

— Épilogue : comme on a

$$\varphi\left(z\right)=\mathrm{e}^{\mu_S+\sigma\Phi^{-1}(z)},$$

alors on obtient

$$\varphi^{-1}(y) = \Phi\left(\frac{\ln(y) - \mu_S}{\sigma}\right).$$

13.3.8 Conséquences

Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ où $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$. Soit $F_{\underline{X}^{\max}} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$ où

$$F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) \leq F_{\underline{X}^{\max}}(x_1, ..., x_n)$$

avec

$$F_{\underline{X}^{\max}}(x_1, ..., x_n) = \min(F_{X_1}(x), ..., F_{X_n}(x_n)).$$

Notation : on a

$$\underline{X}^{\max} = (X_1^{\max}, ..., X_n^{\max})$$

avec $X_i^{\max} \sim X_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Clairement, $F_{\underline{X}^{\max}}$ correspond à la borne supérieur de Fréchet et les composantes de $\underline{X}^{\max}$ sont comonotones.

On définit

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad S^{\max} = \sum_{i=1}^n X_i^{\max}.$$

Bien entendu, on a

$$E[S] = E[S^{\max}].$$

Mais, mais, on a

$$\begin{aligned} Var(S) &\leq Var(S^{\max}) \\ TVaR_\kappa(S) &\leq TVaR_\kappa(S^{\max}) \ \ (\kappa \in (0,1)) \\ E[\max(S-d;0)] &\leq E[\max(S^{\max}-d;0)] \ \ (d \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

pour tout $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$.

On rappelle que

$$TVaR_\kappa(S^{\max}) = \sum_{i=1}^n TVaR_\kappa(X_i^{\max}).$$

Pour l'actuaire, ces relations sont importantes (Voir commentaires en classe)

Important : comme on a

$$E[S] = E[S^{\max}]$$

alors la relation

$$VaR_\kappa(S) \leq VaR_\kappa(S^{\max})$$

n'est pas vérifiée pour tout $\kappa \in (0,1)$. En effet, on a

$$E[S] = \int_0^1 VaR_u(S)\,\mathrm{d}u$$

et

$$E[S^{\max}] = \int_0^1 VaR_u(S^{\max})\,\mathrm{d}u.$$

Si les v.a. S et $S^{\max}$ n'ont pas la même distribution, alors, forcément, il existe $\kappa_0 \in (0,1)$ tel que

$$VaR_\kappa(S) \geq VaR_\kappa(S^{\max})$$

pour $\kappa \in (0, \kappa_0)$ et

$$VaR_\kappa(S) \leq VaR_\kappa(S^{\max})$$

pour $\kappa \in (\kappa_0, 1)$.

13.4 Antimonotonicité

13.4.1 Définition

Alors que la comonotonicité correspond à la relation de dépendance positive parfaite, on définit l'antimonotonicité comme étant la relation de dépendance négative parfaite.

Cette notion de dépendance est définie pour des paires de v.a.

Définition 13.13 *Les composantes du couple de v.a.* $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *sont antimonotones si, et seulement si, il existe une v.a.* Z*, une fonction croissante* ϕ_1 *et une fonction décroissante* ϕ_2 *telles que*

$$(X_1, X_2) =_d \quad (\phi_1(Z), \phi_2(Z)).$$

13.4.2 Représentation intéressante

Ainsi, un couple de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2)$ dont les composantes sont définies par

$$X_1 = F_{X_1}^{-1}(U) \text{ et } X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U) \tag{13.7}$$

est antimonotone en vertu de la définition 13.3.

13.4.3 Antimonotonicité et simulation

Soit un couple de v.a. antimonotones (X_1, X_2).

Algorithme 13.14 ***Simulation des réalisations de*** (X_1, X_2)

1. *On simule une réalisation* $U^{(j)}$ *de la v.a.* $U \sim U(0,1)$.
2. *On calcule* $X_1^{(j)} = F_{X_1}^{-1}\left(U^{(j)}\right)$, $X_2^{(j)} = F_{X_2}^{-1}\left(1-U^{(j)}\right)$.

13.4.4 Antimonotonicité et borne inférieure de Fréchet

L'expression de la fonction de répartition conjointe d'un couple de v.a. $\underline{X}$ antimonotones est fournie dans la prochaine proposition.

Proposition 13.15 *Le couple de v.a.* $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *a des composantes antimonotones si, et seulement si, sa fonction de répartition conjointe est la borne inférieure de Fréchet* F_{X_1,X_2}^{-}.

Preuve. Pour le couple de v.a. $\underline{X}$ définie en (13.7), on a

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, x_2) &= \Pr\left(F_1^{-1}(U) \le x_1, F_2^{-1}(1-U) \le x_2\right) \\ &= \Pr\left(U \le F_1(x_1), 1-U \le F_2(x_2)\right). \end{aligned}$$

Puis, on observe

$$\Pr\left(U \le F_1(x_1), 1-U \le F_2(x_2)\right) = \Pr\left(U \le F_1(x_1), U > 1-F_2(x_2)\right)$$

qui correspond à $F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1$, si $F_1(x_1) \ge 1 - F_2(x_2)$, ou à 0, si $F_1(x_1) < 1 - F_2(x_2)$. Alors, on déduit

$$\begin{aligned} \Pr\left(U \le F_1(x_1), 1-U \le F_2(x_2)\right) &= \max\left(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1; 0\right) \\ &= F_{X_1,X_2}^{-}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

telle que définie au théorème 13.2. ■

13.4.5 Antimonotonicité et un autre résultat

Pour un couple de v.a. continues $\underline{X}$ dont les marginales sont F_{X_1} et F_{X_2}, on peut aussi montrer que les composantes de $\underline{X}$ sont antimonotones si, et seulement si,

$$(X_1, X_2) =_d \left(X_1, F_{X_2}^{-1}\left(\overline{F}_{X_1}(X_1)\right)\right).$$

13.4.6 Antimonotonicité et agrégation des risques

Soit la v.a. $S = X_1 + X_2$ où $\underline{X}$ est un couple de v.a. antimonotones.
Alors, avec (13.7), on a

$$S = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(1-U). \tag{13.8}$$

Exemple 13.16 *Soit les v.a. $X_1 \sim Unif(0,1)$ et $X_2 \sim Unif(0,1)$.*

— *On définit $S = 10X_1 + 6X_2$ où les v.a. X_1 et X_2 sont comonotones. Alors, on a*

$$\begin{aligned} S &= 10F_{X_1}^{-1}(U) + 6F_{X_2}^{-1}(U) \\ &= 10U + 6U \\ &= 16U. \end{aligned}$$

L'expression de $F_S(x)$ est

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr(16U \leq x) \\ &= \frac{x}{16},\ x \in [0,16]. \end{aligned}$$

— *On définit $S = 10X_1 + 6X_2$ où les v.a. X_1 et X_2 sont antimonotones. Avec (13.8), on sait que*

$$\begin{aligned} S &= 10F_{X_1}^{-1}(U) + 6F_{X_2}^{-1}(1-U) \\ &= 10U + 6(1-U) \\ &= 6 + 4U. \end{aligned}$$

Cela signifie que

$$S \in [6,10].$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr(6 + 4U \leq x) \\ &= \frac{x-6}{4},\ x \in [6,10]. \ \square \end{aligned}$$

On formalise davantage dans l'exemple suivant.

Exemple 13.17 *Soit un couple de v.a. antimonotones (X_1, X_2) avec $X_1 \sim Unif(0,a)$ et $X_2 \sim Unif(0,b)$, avec $a > b > 0$.*

Alors, on a

$$\begin{aligned} S &= aF_{X_1}^{-1}(U) + bF_{X_2}^{-1}(1-U) \\ &= aU + b(1-U) \\ &= b + (a-b)U \end{aligned}$$

et on obtient

$$F_S(x) = \frac{x-b}{(a-b)},\ x \in [b,a]. \ \square$$

Exemple 13.18 *Soit un couple de v.a. antimonotones (X_1, X_2) avec $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, avec $\sigma_1 > \sigma_2$.*

Alors, on a

$$\begin{aligned} S &= F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(1-U) \\ &= \mu_1 + \sigma_1 \Phi^{-1}(U) + \mu_2 + \sigma_2 \Phi^{-1}(1-U) \end{aligned}$$

Si on définit la v.a. $Z \sim N(0,1)$*, alors on a*

$$\Phi^{-1}(U) = Z$$

et

$$\Phi^{-1}(1-U) = -Z$$

On déduit

$$\begin{aligned} S &= F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(1-U) \\ &= \mu_1 + \sigma_1 Z + \mu_2 - \sigma_2 Z \\ &= \mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) Z. \end{aligned}$$

On obtient

$$F_S(x) = \Phi\left(\frac{x - (\mu_1 + \mu_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)}\right), \ x \in \mathbb{R}.$$

Note : Si $\sigma_1 = \sigma_2$*, alors la v.a.* S *a une distribution dégénérée à* $(\mu_1 + \mu_2)$*, c.-à-d.* $\Pr(S = (\mu_1 + \mu_2)) = 1$.

On applique (13.8) pour un couple de v.a. (X_1, X_2) ayant des marginales identiques.

Exemple 13.19 *Soit un couple de v.a.* (X_1, X_2) *antimonotones où* $X_1 \sim X_2 \sim Exp(\beta)$*. Alors, on a*

$$VaR_\kappa(X_1 + X_2) = \left(-\frac{1}{\beta}\right) \ln\left(1 - \frac{1-\kappa}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) \ln\left(\frac{1-\kappa}{2}\right).$$

On déduit l'expression de F_S

$$F_{X_1+X_2}(s) = \sqrt{1 - 4e^{-\beta x}}, \ x \geq \frac{1}{\beta} \ln 4.$$

L'expression de la TVaR est donnée par

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X_1 + X_2) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 VaR_u(X_1 + X_2)\, \mathrm{d}u \\ &= 2\left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) \ln\left(\frac{1-\kappa}{2}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{\beta}\right) \ln\left(1 - \frac{1-\kappa}{2}\right) \\ &\quad + \frac{2}{1-\kappa}\left(\frac{1}{\beta}\right) \ln\left(1 - \frac{1-\kappa}{2}\right). \ \square \end{aligned}$$

13.5 Antimonotonicité

On commence doucement.

13.5.1 Introduction

Soit un couple de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2)$ avec $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ (classe de Fréchet) où $F_i = F_{X_1}$, $i = 1, 2$. On sait que

$$W(x_1, x_2) \leq F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \leq M(x_1, x_2), \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

où

$$W(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1; 0)$$

et

$$M(x_1, x_2) = \min(F_1(x_1); F_2(x_2))$$

sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de Fréchet. La fonction bivariée $M(x_1, x_2)$ correspond à la fonction de répartition d'une paire de v.a. comonotones $\underline{X}^+ = \left(X_1^+, X_2^+\right)$ où

$$F_{\underline{X}^+}(x_1, x_2) = M(x_1, x_2).$$

Dans le cas bivarié, la fonction $W(x_1, x_2)$ est aussi une fonction de répartition, c.-à-d., elle correpond à la fonction de répartition d'une paire de v.a. antimonotones $\underline{X}^- = \left(X_1^-, X_2^-\right)$ où

$$F_{\underline{X}^-}(x_1, x_2) = W(x_1, x_2).$$

On a démontré les résultats suivants :

1. Coefficient de corrélation de Pearson (si les espérances et les variances existent) :

$$-1 \leq \rho_P\left(X_1^-, X_2^-\right) \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P\left(X_1^+, X_2^+\right) \leq 1. \tag{13.9}$$

2. Additivité de la VaR et de la TVaR (si les espérances existent dans le cas de la TVaR) pour la somme de v.a. comonotones :

$$\begin{aligned} & VaR_\kappa\left(X_1^+ + X_2^+\right) = VaR_\kappa\left(X_1^+\right) + VaR_\kappa\left(X_2^+\right) \\ \text{et} \quad & \\ & TVaR_\kappa\left(X_1^+ + X_2^+\right) = TVaR_\kappa\left(X_1^+\right) + TVaR_\kappa\left(X_2^+\right),\ \kappa \in (0,1). \end{aligned} \tag{13.10}$$

Les relations en (13.9) et (13.10) sont valides que les v.a. soit discrètes, continues ou mixtes et peu importe le choix des distributions (en tenant compte des contraintes sur les moments quand elles sont mentionnées).

Dans cette note, on vise à identifier des relations semblables à celles en (13.10) pour $\underline{X}^- = \left(X_1^-, X_2^-\right)$. Il est important de souligner que les relations présentées dans cette note sont obtenues au prix de conditions additionnelles. Il est impossible de développer de telles relations qui seraient valides les v.a. X_1^- et X_2^- soient discrètes, continues ou mixtes et peu importe le choix des distributions de ces v.a..

13.5.2 Somme de v.a antimonotones continues positives

On supposes les conditions additionnelles suivantes.

Condition 13.20 *Soit la paire de v.a.* $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *avec* $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$*, où les v.a.* X_1 *et* X_2 *sont continues et* $F_1(0) = 0$ *et* $F_2(0) = 0$*.*

On rappelle la définition d'une fonction convexe.

Définition 13.21 *Une fonction* $\varphi(u)$ *définie pour* $u \in [a, b]$ *est dite convexe si*

$$\varphi((1-t) \times u_1 + t \times u_2) \leq (1-t) \times \varphi(u_1) + t \times \varphi(u_2) \tag{13.11}$$

pour $t \in [0, 1]$ *et* $a \leq u_1 < u_2 \leq b$*.*

On aura besoin du lemme qui suit.

Lemme 13.22 *Soit les fonctions convexes* $\varphi_1(u)$ *et* $\varphi_2(u)$ *définies pour* $u \in [a, b]$*. Alors, la fonction* $\zeta(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$ *est convexe pour* $u \in [a, b]$*.*

Preuve. En effet, on a

$$\zeta((1-t) \times u_1 + t \times u_2) = \varphi_1((1-t) \times u_1 + t \times u_2) + \varphi_2((1-t) \times u_1 + t \times u_2), \tag{13.12}$$

pour $t \in [0,1]$ et $a \leq u_1 < u_2 \leq b$. Comme les fonction φ_1 et φ_2 sont convexes, on adapte (13.11) dans (13.12) comme suit :

$$\begin{aligned}
\zeta\left((1-t)\times u_1 + t\times u_2\right) &= \varphi_1\left((1-t)\times u_1 + t\times u_2\right) + \varphi_2\left((1-t)\times u_1 + t\times u_2\right) \\
&\leq (1-t)\times\varphi_1(u_1) + t\times\varphi_1(u_2) + (1-t)\times\varphi_2(u_1) + t\times\varphi_2(u_2) \\
&= (1-t)\times\left(\varphi_1(u_1)+\varphi_2(u_1)\right) + t\times\left(\varphi_1(u_2)+\varphi_2(u_2)\right) \\
&= (1-t)\times\zeta(u_1) + t\times\zeta(u_2)
\end{aligned}$$

pour $t \in [0,1]$ et $a \leq u_1 < u_2 \leq b$, ce qui correspond à l'inégalité souhaitée. ■

Le prochain lemme sera aussi utile.

Lemme 13.23 *Soit la fonction convexe $\varphi(u)$ définie pour $u \in [a,b]$, avec $-\infty < a < b < \infty$. Alors, $\zeta(u) = \varphi(b-u)$ est convexe pour $u \in [a,b]$.*

Preuve. On définit $u' = b - u$. Puisque $u' \in [a,b]$, alors $\zeta(u) = \varphi(u')$ est aussi convexe. ■

On a le résultat suivant.

Proposition 13.24 *Outre les hypothèses indiquées dans la Condition 13.20, on suppose que $F_1 = F_2 = F$ (c.-à-d., $X_1 \sim X_2 \sim X$) et la fonction de répartition F est définie de telle sorte que*

$$\varphi(u) = F^{-1}(u) + F^{-1}(1-u) \tag{13.13}$$

est convexe pour $u \in (0,1)$. Alors, on a

$$VaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) = VaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X) + VaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X) \tag{13.14}$$

et

$$TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) = LVaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X) + TVaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X). \tag{13.15}$$

Preuve. La démonstration se fait plusieurs étapes.

1. D'après la Condition 13.20, X est une v.a. continue strictement positive avec $F(0) = 0$, alors $\varphi(u)$ est une fonction continue avec $\varphi(0) \geq 0$, $u \in (0,1)$.
2. Par les Lemme 13.22 et Lemme 13.23, $\varphi(u)$ est une fonction convexe.
3. D'après (13.13), $\varphi(u)$ est symétrique et on a

   $$\lim_{u\downarrow 0}\varphi(u) = \lim_{u\uparrow 1}\varphi(u) = x_{\max}$$

   où $x_{\max} = \inf\left(x \in \mathbb{R}^+, F(x) = 1\right)$. Il est possible que $x_{\max} = \infty$.
4. La fonction φ admet un minimum à $u = \frac{1}{2}$, c.-à-d., on définit

   $$x_0 = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$$

   avec

   $$F_{X_1^- + X_2^-}(x_0) = 0$$

   car X_1^- et X_2^- sont des v.a. continues.
5. Par la convexité de φ sur $(0,1)$, pour $x > x_0$, il existe $0 < u_1 < \frac{1}{2} < u_2$ avec

   $$\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = x.$$

   Alors, on a

   $$F_{X_1^- + X_2^-}(x) = \Pr\left(X_1^- + X_2^- \leq x\right) = u_2 - u_1.$$

6. Soit $\kappa \in (0,1)$. Puisque φ est une fonction continue, $F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}(\kappa)$ correspond à la solution de

$$F_{X_1^- + X_2^-}(x) = u_2 - u_1 = \kappa. \tag{13.16}$$

Comme φ est symétrique par rapport à $u = \frac{1}{2}$, il y a $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ où

$$u_1 = \frac{1}{2} - \gamma \text{ et } u_2 = \frac{1}{2} + \gamma.$$

Clairement, on a

$$u_2 = \frac{1}{2} + \gamma = 1 - u_1.$$

Ainsi, (13.16) devient

$$F_{X_1^- + X_2^-}(x) = \frac{1}{2} + \gamma - \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) = \kappa,$$

de laquelle on déduit $\gamma = \frac{\kappa}{2}$. Alors, on déduit

$$F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}(\kappa) = \varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) \text{ ou } F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}(\kappa) = \varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2}\right).$$

Alors, à partir de la première égalité ou de la deuxième égalité, on obtient

$$F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}(\kappa) = \varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) = F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) + F^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2}\right). \tag{13.17}$$

7. Soit $\kappa \in (0,1)$. D'après (13.17), déduit

$$\begin{aligned} VaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) &= F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) + F^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2}\right) \\ &= VaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X) + VaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X), \end{aligned}$$

qui correspond à (13.14).

8. Soit $\kappa \in (0,1)$. Par définition de la TVaR, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u\left(X_1^- + X_2^-\right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \left(VaR_{\frac{1-u}{2}}(X) + VaR_{\frac{1+u}{2}}(X)\right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_{\frac{1-u}{2}}(X)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_{\frac{1+u}{2}}(X)\,\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{13.18}$$

En définissant $s = \frac{1-u}{2}$ et $t = \frac{1+u}{2}$, (13.18) devient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\frac{1-\kappa}{2}}^0 VaR_s(X)(-2)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{1-\kappa}\int_{\frac{1+\kappa}{2}}^1 VaR_t(X)(2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\frac{1-\kappa}{2}}\int_0^{\frac{1-\kappa}{2}} VaR_s(X)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\frac{1-\kappa}{2}}\int_{\frac{1+\kappa}{2}}^1 VaR_t(X)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\frac{1-\kappa}{2}}\int_0^{\frac{1-\kappa}{2}} VaR_s(X)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{1-\frac{1+\kappa}{2}}\int_{\frac{1+\kappa}{2}}^1 VaR_t(X)\,\mathrm{d}t \\ &= LTVaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X) + TVaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X) \end{aligned}$$

qui est la relation en et (13.15).

■

Une condition suffisante permettant de vérifier si la fonction φ en (13.13) est convexe, est établie si la fonction quantile F^{-1} est convexe (note : *en effet, la phrase boiteuse est boiteuse*). La fonction quantile (continue) est convexe si la fonction de survie (continue) $\overline{F}$ ($\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$) est elle-même convexe. Puisque $\overline{F}$ est continue, $\overline{F}$ est convexe si la seconde dérivée de $\overline{F}$ est positive, c.-à-d.,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}(x) \geq 0, \text{ pour } x \in \mathbb{R}^+.$$

Condition 13.25 ***(Condition suffisante).*** *La fonction φ en (13.13) soit convexe si la fonction de survie (continue) est convexe, c.-à-d.,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}(x) \geq 0, \textit{ pour } x \in \mathbb{R}^+.$$

13.6 Covariance et coefficient corrélation de Pearson

Soit une paire de v.a. continues positives $\underline{X} = (X_1, X_2)$ où $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, F_{X_n})$, la classe de Fréchet générée par les marginales F_{X_1} et F_{X_2}.

Soit $F_{\underline{X}^{\max}}, F_{\underline{X}^{\min}} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, F_{X_2})$ et où

$$F_{\underline{X}^{\min}}(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}}(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2)$$

avec

$$F_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2) = \min(F_{X_1}(x), F_{X_2}(x_n))$$

et

$$F_{\underline{X}^{\min}}(x_1, x_2) = \max(F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x_n) - 1; 0).$$

Alors, on a

$$Cov\left(X_1^{\min}, X_2^{\min}\right) \leq Cov(X_1, X_2) \leq Cov(X_1^{\max}, X_2^{\max})$$

et

$$-1 \leq \rho_P\left(X_1^{\min}, X_2^{\min}\right) \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P(X_1^{\max}, X_2^{\max}) \leq 1.$$

Pour valider ces deux inégalités, on a recours aux ingrédients suivants :

— Ingrédient #1 :

$$Cov(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2].$$

— Ingrédient #2 :

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 x_2 f_{\underline{X}}(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \end{aligned}$$

— Ingrédient #3 :

$$\overline{F}_{\underline{X}^{\min}}(x_1, x_2) \leq \overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) \leq \overline{F}_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2)$$

En effet, on a

$$\overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{\underline{X}}(x_1, x_2).$$

— On combine les 3 ingrédients, on laisse reposer 30 min, on enfourne 15 min et on obtient

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &= E[X_1^{\max} X_2^{\max}] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E\left[X_1X_2\right] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}}\left(x_1,x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &\geq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}^{\min}}\left(x_1,x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &= E\left[X_1^{\min}X_2^{\min}\right] \end{aligned}$$

qui mène aux résultats désirés.

13.7 Lois multivariées et agrégation

13.7.1 Approche générale pour des v.a. continues

Pour simplifier, on considère un couple de v.a. continues positives (X_1, X_2) dont la fonction de densité conjointe est donnée par f_{X_1,X_2}. On veut examiner le comportement de $S = X_1+X_2$, en évaluant notamment $f_S(s)$ et $F_S(s) = \Pr(X_1 + X_2 \leq s)$ pour $s \in \mathbb{R}^+$. Alors, la fonction de densité de S s'exprime en termes de f_{X_1,X_2} sous la forme suivante :

$$f_S(s) = \int_0^s f_{X_1,X_2}\left(x_1, s - x_1\right)\mathrm{d}x_1. \tag{13.19}$$

La généralisation de (13.19) pour $n > 2$ risques se fait comme suit. Soit le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)^t$ avec fonction de densité $f_{\underline{X}}$. La fonction de densité de $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est obtenue avec

$$\begin{aligned} & f_S(s) \\ = & \int_0^s \int_0^{s-x_1} \cdots \int_0^{s-\sum_{i=1}^{n-2} x_i} f_{\underline{X}}\left(x_1, x_2, \ldots, s - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)\mathrm{d}x_{n-1}...\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1. \end{aligned}$$

Dans certaines circonstances, on a recours à la fgm multivariée de S, donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = E\left[\mathrm{e}^{t(X_1+...+X_n)}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{tX_1}...\mathrm{e}^{tX_n}\right] = \mathcal{M}_{X_1,...,X_n}(t,...,t), \end{aligned} \tag{13.20}$$

pour identifier sa distribution.

13.7.2 Approche générale pour des v.a. discrètes

Soit une paire de v.a. discrètes (X_1, X_2) avec support arithmétique, c.-à-d. où $X_i \in \{0, 1h, 2h, ...\}$ avec un pas $h > 0$ et dont la fonction de masse de probabilité conjointe est donnée par $f_{X_1,X_2}(m_1h, m_2h)$. La fonction de masse de probabilité de S est déterminée avec

$$f_S(kh) = \sum_{m_1=0}^{k} f_{X_1,X_2}\left(m_1h, kh - m_1h\right). \tag{13.21}$$

La version généralisée de (13.21) pour $n > 2$ risques est fournie en (11.13), que l'on reproduit ci-dessous :

$$\begin{aligned} & f_{S_n}(kh) \\ = & \sum_{k_1=0}^{k}\sum_{k_2=0}^{k_1}...\sum_{k_{n-1}=0}^{k_{n-2}} f_{\underline{X}}\left(k_1h, k_2h, ..., k_{n-1}h, \left(k - \sum_{j=1}^{n-1} k_j\right)h\right). \end{aligned}$$

Dans le cas où la fgm $\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n) = E\left[\mathrm{e}^{t_1X_1}...\mathrm{e}^{t_nX_n}\right]$ de $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ existe, alors la fgm de $S =$

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ est donnée par

$$\mathcal{M}_S(t) = E\left[\mathrm{e}^{t(X_1+...+X_n)}\right] = E\left[\mathrm{e}^{tX_1}...\mathrm{e}^{tX_n}\right] = \mathcal{M}_{\underline{X}}(t,...,t). \tag{13.22}$$

Le résultat en (13.22) permet dans certains cas d'identifier la distribution de S. L'atout de ce résultat est que l'on peut l'appliquer conjointement avec la FFT. En effet, soit un vecteur de v.a. discrètes $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$. Alors, pour $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, on a

$$\widetilde{f}_S(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX_1}...\mathrm{e}^{tX_n}\right].$$

Ce résultat sera illustré dans les prochaines sections.

13.8 Lois continues bivariées et multivariées

Un nombre impressionnant de lois multivariées continues existent et sont proposées encore actuellement. Seuls quelques exemples sont présentés dans cette section.

13.8.1 Loi exponentielle bivariée Eyraud - Farlie - Gumbel - Morgenstern (EFGM)

La fonction de répartition de la loi exponentielle bivariée EFGM est donnée par

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) \\ &\quad + \theta\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}, \end{aligned} \tag{13.23}$$

avec un paramètre de dépendance $-1 \leq \theta \leq 1$ et avec $\beta_i > 0$. On déduit que les lois marginales de X_1 et X_2 sont exponentielles c.-à-d. $X_i \sim Exp(\beta_i)$ $(i = 1, 2)$. Cette loi inclut l'indépendance comme cas particulier avec $\theta = 0$. La fonction de densité conjointe est

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= (1+\theta)\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} + \theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2} \\ &\quad - \theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} - \theta\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2}. \end{aligned}$$

Cette distribution bivariée admet une relation de dépendance modérée, qui peut être positive ou négative. Elle peut être interprétée sous la forme d'une perturbation de la loi exponentielle bivariée avec indépendance. Le coefficient de corrélation de Pearson est $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\theta}{4}$. De plus, la fgm conjointe de (X_1, X_2) est

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= (1+\theta)\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t_2}\right) \\ &\quad - \theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t_2}\right) \\ &\quad - \theta\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2-t_2}\right) \\ &\quad + \theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2-t_2}\right). \end{aligned}$$

On définit $S = X_1 + X_2$. En utilisant (13.19) avec

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x,s-x) &= (1+\theta)\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2(s-x)} \\ &\quad + \theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2(s-x)} \\ &\quad - \theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2(s-x)} \\ &\quad - \theta\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2(s-x)}, \end{aligned}$$

on déduit l'expression de $F_S(s)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} F_S(s) &= (1+\theta)\, G(s;\beta_1;\beta_2) + \theta G(s;2\beta_1;2\beta_2) \\ &\quad - \theta G(s;2\beta_1;\beta_2) - \theta G(s;\beta_1;2\beta_2), \end{aligned}$$

où

$$G(s;\gamma_1,\gamma_2) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\gamma x} \sum_{j=0}^{1} \frac{(\gamma x)^j}{j!}, \ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \\ \sum_{i=1}^{2} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{2} \frac{\gamma_j}{\gamma_j - \gamma_i} \right) (1 - \mathrm{e}^{-\gamma_i x}), \ \gamma_1 \neq \gamma_2 \end{cases}.$$

Ainsi, la distribution de S est une combinaison linéaire de lois Erlang ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$) ou de lois Erlang généralisées ($\gamma_1 \neq \gamma_2$). On déduit aisément l'expression de $TVaR_\kappa(S)$

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= \frac{1}{1-\kappa}(1+\theta)\,\zeta(VaR_\kappa(S);\beta_1,\beta_2) \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa}\theta\zeta(VaR_\kappa(S);2\beta_1,2\beta_2) \\ &\quad - \frac{1}{1-\kappa}\theta\zeta(VaR_\kappa(S);2\beta_1,\beta_2) \\ &\quad - \frac{1}{1-\kappa}\theta\zeta(VaR_\kappa(S);\beta_1,2\beta_2), \end{aligned}$$

où

$$\zeta(b;\gamma_1,\gamma_2) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\gamma b} \sum_{j=0}^{2} \frac{(\gamma b)^j}{j!}, \ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \\ \sum_{i=1}^{2} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{2} \frac{\gamma_j}{\gamma_j - \gamma_i} \right) \mathrm{e}^{-\gamma_i b} \left(b + \frac{1}{\gamma_i} \right), \ \gamma_1 \neq \gamma_2 \end{cases}.$$

13.8.2 Loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin

On considère trois v.a. indépendantes de loi exponentielle $Y_i \sim Exp(\lambda_i)$ pour $i = 0,1,2$. On définit les v.a. X_1 et X_2 par $X_i = \min(Y_i;Y_0)$ pour $i = 1,2$. Pour $i = 1,2$, on observe que

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_i}(x_i) &= \Pr(X_i > x_i) \\ &= \Pr(\min(Y_i;Y_0) > x_i) = \Pr(Y_i > x_i, Y_0 > x_i) \\ &= \Pr(Y_i > x_i)\Pr(Y_0 > x_i) \\ &= \overline{F}_{Y_i}(x_i)\,\overline{F}_{Y_0}(x_i) = \exp(-(\lambda_i + \lambda_0)\,x_i), \end{aligned}$$

ce qui implique $X_i \sim Exp(\lambda_i + \lambda_0)$, $i = 1,2$. La fonction de survie de (X_1, X_2) est donnée par

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\ &= \Pr(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, Y_0 > \max(x_1;x_2)) \\ &= \Pr(Y_1 > x_1)\Pr(Y_2 > x_2)\Pr(Y_0 > \max(x_1;x_2)) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x_2}\mathrm{e}^{-\lambda_0 \max(x_1;x_2)} \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_0)x_1}\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_0)x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)}. \end{aligned}$$

On fixe $\beta_i = \lambda_i + \lambda_0$ $(i = 1,2)$ et $0 \leq \lambda_0 \leq \min(\beta_1;\beta_2)$. Alors, l'expression de la fonction de survie de (X_1, X_2) devient

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} \\ &= \overline{F}_{X_1}(x_1)\,\overline{F}_{X_2}(x_2)\,\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)}, \end{aligned}$$

qui permet de déduire que la loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin est une forme de perturbation de la loi exponentielle bivariée supposant l'indépendance. Cette loi incorpore une relation de dépendance positive seulement.

La fonction de densité de (X_1, X_2) est

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}(\beta_2-\lambda_0)\mathrm{e}^{-(\beta_2-\lambda_0)x_2}, & x_1 > x_2, \\ (\beta_1-\lambda_0)\mathrm{e}^{-(\beta_1-\lambda_0)x_1}\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}, & x_1 < x_2, \\ \lambda_0 \mathrm{e}^{-\beta_1 x}\mathrm{e}^{-\beta_2 x}\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, & x_1 = x_2 = x, \end{cases}$$

avec une singularité sur la diagonale $x_1 = x_2 = x$. Le coefficient de corrélation de Pearson est $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\lambda_0}{\beta_1+\beta_2-\lambda_0}$.

La méthode utilisée pour construire la loi bivariée exponentielle Marshall-Olkin est appelée la méthode *choc commun* et elle s'adapte aisément afin de construire des lois exponentielles multivariées.

13.8.3 Loi gamma bivariée Cheriyan - Ramabhadran - Mathai - Moschopoulos (CRMM)

La loi gamma bivariée CRMM est construite comme suit. Soit trois v.a. indépendantes Y_0, Y_1 et Y_2 où $Y_0 \sim Ga(\gamma_0, \beta_0)$, $Y_1 \sim Ga(\alpha_1-\gamma_0, \beta_1)$ et $Y_2 \sim Ga(\alpha_2-\gamma_0, \beta_2)$, avec $0 \le \gamma_0 \le \min(\alpha_1; \alpha_2)$. On définit les v.a. X_1 et X_2 par $X_i = \frac{\beta_0}{\beta_i}Y_0 + Y_i$ pour $i = 1, 2$. Il en résulte que (X_1, X_2) obéit à une loi gamma bivariée avec $X_i \sim Ga(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$, et $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}$. Le paramètre γ_0 correspond au paramètre de dépendance. L'expression de la fgm de (X_1, X_2) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= E\left[\mathrm{e}^{t_1X_1}\mathrm{e}^{t_2X_2}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{t_1Y_1}\right]E\left[\mathrm{e}^{t_2Y_2}\right]E\left[\mathrm{e}^{\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}t_1+\frac{\beta_0}{\beta_2}t_2\right)Y_0}\right] \\ &= \left(1-\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{-(\alpha_1-\gamma_0)}\left(1-\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2-\gamma_0)} \\ &\quad \times \left(1-\frac{t_1}{\beta_1}-\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0}. \end{aligned}$$

On définit $S = X_1 + X_2$. En utilisant la relation $\mathcal{M}_S(t) = \mathcal{M}_{X_1,X_2}(t,t)$, la fgm de S est donnée par

$$\mathcal{M}_S(t) = \left(1-\frac{t}{\beta_1}\right)^{-(\alpha_1-\gamma_0)}\left(1-\frac{t}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2-\gamma_0)}\left(1-\frac{t}{\beta_1}-\frac{t}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0},$$

ce qui correspond à la fgm d'une somme de 3 v.a. indépendantes de loi gamma dont les paramètres d'échelle diffèrent, impliquant que la v.a. S n'obéit pas à une loi gamma.

On utilise le résultat fourni à la proposition 1.73 pour déduire que la v.a. S obéit à un mélange de lois gamma dont la fonction de densité est donnée par

$$f_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k h(x; \alpha+k, \beta),$$

où $\beta = \max\left(\beta_1; \beta_2; \left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)^{-1}\right)$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_0$. Les probabilités p_k, $k \in \mathbb{N}$, sont définies par $p_k = \sigma \times \xi_k$ où

$$\sigma = \beta^{-\gamma_0}\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0}\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^{\alpha_i-\gamma_0},$$

et

$$\xi_0 = 1,\ \xi_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i\zeta_i\xi_{k-i},\ k \in \mathbb{N}^+,$$

avec

$$\zeta_k = \frac{\gamma_0}{k}\left(1-\left(\beta\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)\right)^{-1}\right)^k + \sum_{i=1}^{2}\frac{(\alpha_i-\gamma_0)}{k}\left(1-\frac{\beta_i}{\beta}\right)^k,$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

On déduit que $F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x;\alpha+k,\beta)$ et

$$E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{\alpha+k}{\beta}\overline{H}(x;\alpha+k+1,\beta).$$

Exemple 13.26 *Soit le couple de v.a.* (X_1, X_2) *obéissant à une loi gamma bivariée CRMM avec* $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.2$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$. *On définit* $S = X_1 + X_2$. *On obtient les valeurs suivantes :*

γ_0	κ	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$
0	0.95	72.2301	84.5060
0	0.995	100.2088	111.6268
0.5	0.95	75.0652	89.2894
0.5	0.995	107.6104	121.4649
1	0.95	77.7790	93.4458
1	0.995	113.6537	128.8391

Les valeurs de $\mathrm{Var}(S)$ *sont de 300, 350 et 400 pour* $\gamma_0 =$ *0, 0.5 et 1.* □

13.8.4 Loi normale multivariée

On considère la loi normale multivariée pour le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)^t$ avec le vecteur des moyennes $\underline{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)^t$ et la matrice variance-covariance

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix},$$

où $\underline{\Sigma}$ est une matrice semi-définie positive et $()^t$ désigne la transposée d'une matrice ou d'un vecteur. En outre, $E[X_i] = \mu_i$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ $(i = 1, 2, ..., n)$ et $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i'}) = \sigma_{ii'} = \rho_{ii'}\sigma_i\sigma_{i'}$, $(i,\ i' = 1, 2, ..., n)$, où $\rho_{ii'}$ est le coefficient de corrélation de Pearson de la paire $(X_i, X_{i'})$.

En outre, $E[X_i] = \mu_i$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ $(i = 1, 2, ..., n)$ et

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{i'}) = \sigma_{i,i'} = \rho_{i,i'}\sigma_i\sigma_{i'},$$

$(i,\ i' = 1, 2, ..., n)$, où

$$\rho_{i,i'} = \rho(X_i, X_{i'}) = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_{i'})}{\sigma_i\sigma_{i'}} \in [-1, 1]$$

est le coefficient de corrélation de Pearson de la paire $(X_i, X_{i'})$.

Remarques importantes :

— $n = 2, 3, 4, ...$: pour tout (i, i'), les valeurs maximales de $\rho_{i,i'} = 1$ (comotonone) ;

— $n = 2$: pour tout (i, i'), les valeurs minimales de $\rho_{i,i'} = -1$ (antimotonone) ;

— $n = 3, 4, ...$: pour tout (i, i'), les valeurs minimales de $\rho_{i,i'}$ dépend des valeurs de σ_1, ..., σ_n ;

— $n = 3, 4, ...$: il est impossible que $\rho_{i,i'} = -1$ pour tout couple (i, i') car la matrice $\underline{\Sigma}$ n'est plus semi-définie positive.

L'expression de la fonction de densité de $\underline{X}$ est

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,|\underline{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)^t\underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $|\underline{\Sigma}|$ est le déterminant de $\underline{\Sigma}$. De plus, la fgm multivariée de $\underline{X}$ est

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}(\underline{s}) = \mathrm{e}^{\underline{s}^t \underline{\mu} + \frac{1}{2} \underline{s}^t \underline{\Sigma} \underline{s}}.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{X_1,...,X_n}(s_1,...,s_n) &= \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n s_i \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n s_i s_{i'} \sigma_{i,i'}} \\ &= \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n s_i \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n s_i s_{i'} \rho_{i,i'} \sigma_i \sigma_{i'}}. \end{aligned}$$

Dans le cas univarié, pour une v.a. $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, on a la relation $X = \mu + \sigma Z$, où $Z \sim N(0,1)$. Dans le cas multivarié, la relation devient

$$\underline{X} = \underline{\mu} + \underline{\sigma}^t \underline{Z}, \tag{13.24}$$

où $\underline{\sigma}^t = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ et $\underline{Z}$ obéit à une loi normale multivariée standard avec un vecteur de moyenne $(0,...,0)^t$ et une matrice variance-covariance

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

La fonction de répartition conjointe de $\underline{Z}$ est désignée par le symbole $\overline{\Phi}_{\underline{\rho}}$ de telle sorte que

$$\overline{\Phi}_{\underline{\rho}}(x_1,...,x_n) = F_{Z_1,...,Z_n}(x_1,...,x_n).$$

De plus, pour $\underline{X} = \underline{\mu} + \underline{\sigma}^t \underline{Z}$, l'expression de la fonction de répartition conjointe de $\underline{X}$ est donnée par

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \overline{\Phi}_{\underline{\rho}}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}, ..., \frac{x_n - \mu_n}{\sigma_n}\right).$$

L'algorithme de simulation de réalisations pour la loi normale multivariée standard se décrit comme suit.

Algorithme 13.27 ***Algorithme de simulation pour la loi normale multivariée standard.*** *Soit un vecteur de v.a. $(Z_1,...,Z_n)$ de loi normale multivariée avec $Z_i \sim N(0,1)$ $(i = 1,2,...,n)$ et une matrice de corrélation (supposée définie positive)*

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut écrire $\underline{\rho} = \underline{B}\ \underline{B}^t$ où $\underline{B}^t$ est la matrice transposée de la matrice $\underline{B}$. La matrice $\underline{B}$ est obtenue à l'aide de la décomposition de Choleski

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

où

$$bij = \frac{\rho_{ij} - \sum_{l=1}^{j-1} b_{il} b_{jl}}{\sqrt{1 - \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl}^2}},$$

où 1$\leq j \leq i \leq n$ et $\sum_{l=1}^{0}() = 0$.

1. *On génère des réalisations $Y_1^{(j)}, ..., Y_n^{(j)}$ des v.a. $Y_1, ..., Y_n$ indépendantes de loi normale standard.*
2. *On calcule $\underline{Z}^{(j)} = \underline{B}\ \underline{Y}^{(j)}$ où $\underline{Z}^{(j)} = \left(Z_1^{(j)}, ..., Z_n^{(j)}\right)^T$ et $\underline{Y}^{(j)} = \left(Y_1^{(j)}, ..., Y_n^{(j)}\right)^T$.*

Soit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors, à l'aide de la fgm de $\underline{X}$, on déduit que $S \sim N\left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$ où $\mu_S = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ et

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i'=1, i' \neq i}^{n} \sigma_{ii'}.$$

13.8.5 Loi normale mélange multivariée

On considère une généralisation de la loi normale multivariée. Soit un vecteur de v.a. $\underline{Z} = (Z_1, ..., Z_n)^t$ qui obéit à la loi normale multivariée standard dont le vecteur espérance est $(0, ..., 0)^t$ et dont la matrice variance-covariance est

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)^t$ en adaptant la relation en (13.24)

$$\underline{X} = \underline{\mu} + \sqrt{\Theta} \underline{\sigma}^t \underline{Z}, \tag{13.25}$$

où Θ est une v.a. mélange positive indépendante de $\underline{Z}$. D'après (13.25), $(\underline{X}|\Theta = \theta)$ obéit à une loi normale multivariée avec un vecteur des moyennes $\underline{\mu}$ et avec une matrice variance-covariance $\sqrt{\theta}\underline{\Sigma}$

$$\sqrt{\theta}\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{\theta}\sigma_1^2 & \sqrt{\theta}\sigma_{12} & \cdots & \sqrt{\theta}\sigma_{1n} \\ \sqrt{\theta}\sigma_{21} & \sqrt{\theta}\sigma_2^2 & \cdots & \sqrt{\theta}\sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\theta}\sigma_{n1} & \sqrt{\theta}\sigma_{n2} & \cdots & \sqrt{\theta}\sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $\underline{X}$ obéit à une loi normale mélange multivariée.

Par exemple, si la v.a. Θ est discrète avec $f_\Theta(\theta_j) = \Pr(\Theta = \theta_j)$, $j = 1, 2, ..., n$, alors

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{m} f_\Theta(\theta_j) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\theta_j^n} \left|\underline{\Sigma}\right|^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta_j}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)^t \underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}(\underline{s}) = \sum_{j=1}^{m} f_\Theta(\theta_j) \mathrm{e}^{\underline{s}^t \underline{\mu} + \frac{1}{2}\theta_i \underline{s}^t \underline{\Sigma} \underline{s}}.$$

De plus, on déduit que

$$\mathcal{M}_S(t) = \sum_{j=1}^{n} f_\Theta(\theta_j) \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} \mu_i t + \frac{1}{2}\theta_j\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i'=1, i' \neq i}^{n} \sigma_{ii'}\right)t^2},$$

ce qui correspond à la fgm d'un mélange de loi normale univariée.

Dans la prochaine sous-section, on considère un autre cas particulier de loi normale mélange multivariée.

13.8.6 Loi de Student multivariée

On suppose que la v.a. $\frac{\nu}{\Theta}$ obéit à une loi du khi-deux avec un degré de liberté $\nu > 2$ (c.-à-d. $\frac{\nu}{\Theta} \sim Ga\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$). Il en résulte que le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)^t$ obéit à une loi de Student multivariée. La fonction de densité de $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)^t$ est

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{(\nu\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left|\underline{\Sigma}\right|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{\nu}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)^t \underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right)^{-\frac{(\nu+n)}{2}},$$

pour $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Le vecteur moyenne et la matrice variance-covariance de $\underline{X}$ sont $\underline{\mu}$ et $\frac{\nu}{\nu-2}\underline{\Sigma}$. Si $\underline{\mu} = (0, ..., 0)$ et $\underline{\Sigma} = \underline{\rho}$, on dit que $\underline{X}$ obéit à une loi de Student standard multivariée où la matrice de corrélation est $\underline{\rho}$, avec une fonction de répartition désignée par $t_{\nu,\underline{\rho}}$. Par conséquent, si $\underline{X}$ obéit à une loi de Student multivariée avec un vecteur moyenne $\underline{\mu}$ et une matrice variance-covariance $\frac{\nu}{\nu-2}\underline{\Sigma}$ et si $\underline{X}'$ obéit à une loi de Student standard multivariée, alors on a la relation suivante :

$$\underline{X} = \underline{\mu} + \underline{\sigma}^t \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} \underline{X}'.$$

L'algorithme pour simuler des réalisations à partir d'une loi de Student standard multivariée se décrit comme suit.

Algorithme 13.28 ***Algorithme de simulation pour la loi de Student standard multivariée.***

1. *On simule une réalisation* $\left(Y_1^{(j)}, ..., Y_n^{(j)}\right)$ *du vecteur de v.a.* $(Y_1, ..., Y_n)$ *de loi normale multivariée standard avec une matrice de corrélation* $\underline{\rho}$.
2. *On simule une réalisation* $W^{(j)}$ *de la v.a.* W *de loi du khi-deux avec un degré de liberté* ν *(c.-à-d.* $W \sim Ga\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$*).*
3. *On calcule* $Z_i^{(j)} = \frac{Y_i^{(j)}}{\sqrt{W^{(j)}/\nu}}$, $i = 1, 2, ..., n$.

13.8.7 Lois multivariées construites par mélange commun

La méthode de construction de lois multivariées par mélange commun est due à [Marshall and Olkin, 1988] et [Oakes, 1989]. On peut aussi consulter [Joe, 1997] sur cette méthode. On considère une v.a. discrète ou continue Θ avec support positif A_Θ. Pour fins de simplifications, on suppose que la fgm de Θ, notée $\mathcal{M}_\Theta(t)$, existe. On considère deux v.a. X_1 et X_2. On suppose que leur comportement aléatoire est influencé par la v.a. Θ de mélange. En conditionnant sur Θ, les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes avec des fonctions de survie conditionnelles données par

$$\overline{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i) = \Pr(X_i > x_i|\Theta = \theta) = \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\theta \tag{13.26}$$

pour $i = 1, 2$ où Y_1 et Y_2 sont des v.a. indépendantes. Alors, la fonction de survie conditionnelle bivariée de (X_1, X_2) est

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2|\Theta=\theta}(x_1, x_2) &= \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2|\Theta = \theta) \\ &= \left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)\overline{F}_{Y_2}(x_2)\right)^\theta. \end{aligned} \tag{13.27}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_i}(x_i) &= \int_{\theta\in A_\Theta} \overline{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i)\,\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \int_{\theta\in A_\Theta} \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\theta \mathrm{d}F_\Theta(\theta) = M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \int_{\theta\in A_\Theta} \overline{F}_{X_1,X_2|\Theta=\theta}(x_1, x_2)\,\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \int_{\theta\in A_\Theta} \left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)\overline{F}_{Y_2}(x_2)\right)^\theta \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)\overline{F}_{Y_2}(x_2)\right)\right). \end{aligned} \tag{13.28}$$

D'après (13.26) et (13.27), on observe les relations suivantes :

— si $\theta \leq \theta'$, alors $\overline{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i) \geq \overline{F}_{X_i|\Theta=\theta'}(x_i)$, pour tout $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$;

— si $\theta \leq \theta'$, alors $\overline{F}_{X_1,X_2|\Theta=\theta}(x_1, x_2) \geq \overline{F}_{X_1,X_2|\Theta=\theta'}(x_1, x_2)$, pour tout x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$.

Dans la sous-section 13.8.8, on considère le cas où $Y_i \sim Exp(1)$, pour $i = 1, 2$. La méthode de construction décrite ci-dessus est aussi appelée *common frailties*.

13.8.8 Lois exponentielles bivariée mélange

Dans l'approche décrite à la sous-section 13.8.7, on suppose que $Y_i \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$, pour $i = 1, 2$, ce qui amène à

$$\overline{F}_{X_i}(x_i) = \int_{\theta \in A_\Theta} \mathrm{e}^{-\theta \frac{x_i}{\lambda_i}} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) = M_\Theta(-x_i)$$

et

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \int_{\theta \in A_\Theta} \mathrm{e}^{-\theta \frac{x_1}{\lambda_1}} \mathrm{e}^{-\theta \frac{x_2}{\lambda_2}} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) = M_\Theta\left(-\left(\frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}\right)\right).$$

On observe que

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \int_{\theta \in A_\Theta} \frac{\theta}{\lambda_1} \mathrm{e}^{-\theta \frac{x_1}{\lambda_1}} \frac{\theta}{\lambda_2} \mathrm{e}^{-\theta \frac{x_2}{\lambda_2}} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 M_\Theta(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=-\left(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}. \end{aligned}$$

Soit la v.a. $S = X_1 + X_2$. On déduit que la distribution conditionnelle de $S|\Theta = \theta$ est une loi Erlang généralisée (voir en annexe pour les détails sur cette loi), ce qui implique que

$$\begin{aligned} f_{S|\Theta=\theta}(x) &= \frac{\frac{\theta}{\lambda_2}}{\frac{\theta}{\lambda_2} - \frac{\theta}{\lambda_1}} \frac{\theta}{\lambda_1} \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\lambda_1} x} + \frac{\frac{\theta}{\lambda_1}}{\frac{\theta}{\lambda_1} - \frac{\theta}{\lambda_2}} \frac{\theta}{\lambda_2} \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\lambda_2} x} \\ &= \frac{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}{\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-1}} \theta \mathrm{e}^{-\theta \frac{x}{\lambda_1}} + \frac{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}{\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}} \theta \mathrm{e}^{-\theta \frac{x}{\lambda_2}}, \end{aligned}$$

pour $x \geq 0$. Ensuite, on obtient l'expression de f_S

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_{\theta \in A_\Theta} f_{S|\Theta=\theta}(x) \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \frac{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}{\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-1}} \left.\frac{\mathrm{d}M_\Theta(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-\frac{x}{\lambda_1}} + \frac{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}{\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}} \left.\frac{\mathrm{d}M_\Theta(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-\frac{x}{\lambda_2}}, \end{aligned}$$

pour $x \geq 0$.

Grâce à cette méthode, on déduit la loi de Pareto bivariée décrite à la prochaine sous-section.

13.8.9 Loi Pareto bivariée

En suivant l'approche décrite aux sous-sections 13.8.7 et 13.8.8, on suppose que $Y_i \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$, pour $i = 1, 2$, et que $\Theta \sim Ga(\alpha, 1)$. Alors, il en résulte que la fonction de survie bivariée de (X_1, X_2) est

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \left(\frac{1}{1 + \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}}\right)^\alpha, \tag{13.29}$$

et l'on déduit que la fonction de densité bivariée de (X_1, X_2) est

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda_1 \lambda_2} \left(\frac{1}{1 + \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}}\right)^{\alpha+2}, \ x_1, x_2 > 0.$$

La loi résultante est la loi de Pareto bivariée. On observe aussi que $X_i \sim Pa(\alpha, \lambda_i)$, $i = 1, 2$. Pour $\alpha > 2$, l'expression de la covariance est

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\alpha - 2} - \frac{1}{\alpha - 1}\right),$$

pour $\alpha > 2$.

On définit $S = X_1 + X_2$. En supposant $\lambda_2 > \lambda_1$ sans perte de généralité, l'expression de f_S est

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_0^x f_{X_1,X_2}(y, x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{1}{1+\frac{y}{\lambda_1}+\frac{x-y}{\lambda_2}}\right)^{\alpha+2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha}{\lambda_2-\lambda_1}\left\{\left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda_2}}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda_1}}\right)^{\alpha+1}\right\} \end{aligned}$$

et celle de F_S correspond à

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \int_0^x f_S(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(1-\left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda_2}}\right)^{\alpha}\right) \\ &\quad -\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(1-\left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda_1}}\right)^{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Comme on a

$$\frac{x_i}{\lambda_i} = \overline{F}_{X_i}(x_i)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1,$$

on peut réécrire la fonction de survie de (X_1, X_2) en termes des fonctions de survie marginales de X_1 et X_2

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \left(1+\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{-\alpha} \\ &= \left(\overline{F}_{X_1}(x_1)^{-\frac{1}{\alpha}} + \overline{F}_{X_2}(x_2)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha} \\ &= \left(\overline{F}_{X_1}(x_1)^{-\frac{1}{\alpha}} + \overline{F}_{X_2}(x_2)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

La loi Pareto bivariée n'a pas de paramètre de dépendance. On voit au chapitre 14 que cette loi bivariée est importante afin de déduire l'expression de la copule de Clayton.

13.9 Lois discrètes bivariées et multivariées

Il existe un grand nombre de versions bivariées et multivariées des lois discrètes présentées au chapitre 1. Dans cette section, on traite de quelques exemples pouvant être pertinents en actuariat.

13.10 Loi de Poisson bivariée Teicher

La loi de Poisson bivariée Teicher (voir [Teicher, 1954]) est la loi bivariée la plus simple pour le couple de v.a. (M_1, M_2) dont les marginales sont Poisson avec paramètres λ_1 et λ_2. Le paramètre de dépendance

est $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; \lambda_2)$. Elle est construite comme suit. Soit les v.a. indépendantes K_0, K_1, K_2 avec $K_i \sim Pois(\alpha_i)$, $i = 0, 1, 2$ et $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; \lambda_2)$, $\alpha_1 = \lambda_1 - \alpha_0$ et $\alpha_2 = \lambda_2 - \alpha_0$. On définit

$$M_1 = K_1 + K_0 \text{ et } M_2 = K_2 + K_0.$$

Clairement, $M_i \sim Pois(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. De plus, les expressions de la f.m.p. conjointe et de la fgp conjointe de (M_1, M_2) sont

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2+\alpha_0} \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \frac{\alpha_0^j}{j!} \frac{(\lambda_1 - \alpha_0)^{m_1-j}}{(m_1 - j)!} \frac{(\lambda_2 - \alpha_0)^{m_2-j}}{(m_2 - j)!}, \tag{13.30}$$

et

$$P_{M_1,M_2}(t_1, t_2) = E\left[t_1^{M_2} t_2^{M_1}\right] = \mathrm{e}^{(\lambda_1-\alpha_0)(t_1-1)} \mathrm{e}^{(\lambda_2-\alpha_0)(t_2-1)} \mathrm{e}^{\alpha_0(t_1 t_2-1)}.$$

Enfin, on a

$$\mathrm{Cov}(M_1, M_2) = \mathrm{Var}(M_0) = \alpha_0.$$

On déduit que $0 \leq corr(M_1, M_2) \leq \frac{\min(\lambda_1;\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}$. Cette loi introduit seulement une dépendance positive au sein de (M_1, M_2). En utilisant les propriétés de la loi de Poisson, on peut aussi montrer que

$$E[M_1|M_2 = m_2] = (\lambda_1 - \alpha_0) + \frac{\alpha_0}{\lambda_2} m_2.$$

On utilise la notation $(M_1, M_2) \sim PBiv(\lambda_1, \lambda_2, \alpha_0)$ avec λ_1, $\lambda_2 > 0$, $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; \lambda_2)$.

Exemple 13.29 *Soit* $(M_1, M_2) \sim PBiv(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \alpha_0 = 1)$. *On définit* $N = M_1 + M_2$ *où* $E[N] = 5$ *et* $\mathrm{Var}(N) = 7$. *De plus,* $N \sim PComp(\lambda = 4, F_B)$ *où* $f_B(1) = 0.75$, $f_B(2) = 0.25$ *et* $f_B(k) = 0$ *pour* $k \neq 1$ *ou 2. Avec la FFT, on trouve les valeurs exactes suivantes de la f.m.p. de* N *:* $f_N(0) = 0.01831564$, $f_N(5) = 0.14698300$ *et* $f_N(10) = 0.02644007$. □

On peut adapter cette méthode de construction afin de construire des lois multivariées Poisson, comme il est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 13.30 *On considère un portefeuille avec 10 lignes d'affaires, où le nombre de sinistres pour la ligne d'affaires i est défini par la v.a.* M_i *(*$i = 1, 2, ..., 10$*). On suppose que* $(M_1, M_2, ..., M_{10})$ *obéit à une loi de Poisson multivariée dont les paramètres des marginales Poisson sont* λ_1, ..., λ_{10} *et dont la distribution conjointe est construite comme suit. Soit les v.a. indépendantes*

$$\begin{aligned} K_1 &\sim P(\alpha_1), ..., K_{10} \sim P(\alpha_{10}), \\ K_{11} &\sim P(\alpha_{11}),\ K_{12} \sim P(\alpha_{12}),\ K_{13} \sim P(\alpha_{13}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_{13} \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_{10}), \\ 0 &\leq \alpha_{11} \leq \min(\lambda_1 - \alpha_{13}; ...; \lambda_5 - \alpha_{13}), \\ 0 &\leq \alpha_{12} \leq \min(\lambda_6 - \alpha_{13}; ...; \lambda_{10} - \alpha_{13}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_1 - \alpha_{11} - \alpha_{13},\ ...,\ \alpha_5 = \lambda_5 - \alpha_{11} - \alpha_{13}, \\ \alpha_6 &= \lambda_6 - \alpha_{12} - \alpha_{13},\ ...,\ \alpha_{10} = \lambda_{10} - \alpha_{12} - \alpha_{13}. \end{aligned}$$

On définit les v.a. M_1, ..., M_{10} *par*

$$\begin{aligned} M_i &= K_i + K_{11} + K_{13},\ i = 1, 2, ..., 5 \\ M_i &= K_i + K_{12} + K_{13},\ i = 6, 7, ..., 10. \end{aligned}$$

L'expression de la fgp de $\underline{M} = (M_1, ..., M_{10})$ *est*

$$\begin{aligned} P_{\underline{M}}(t_1, ..., t_{10}) &= \mathrm{e}^{\alpha_1 t_1 - 1} ... \mathrm{e}^{\alpha_{10} t_{10} - 1} \mathrm{e}^{\alpha_{11} t_1 ... t_5 - 1} \\ &\quad \times \mathrm{e}^{\alpha_{12} t_6 ... t_{10} - 1} \mathrm{e}^{\alpha_{13} t_1 ... t_{10} - 1} \end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1 + \alpha_{11} + \alpha_{13}, \ ..., \ \lambda_5 = \alpha_5 + \alpha_{11} + \alpha_{13}, \\ \lambda_6 &= \alpha_6 + \alpha_{12} + \alpha_{13}, \ ..., \ \lambda_{10} = \alpha_{10} + \alpha_{12} + \alpha_{13}. \end{aligned}$$

On définit $N = \sum_{i=1}^{10} M_i$ *dont l'espérance et la variance sont* $E[N] = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i$ *et*

$$\mathrm{Var}(N) = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i + 2 \times 5 \times \alpha_{11} + 2 \times 5 \times \alpha_{12} + 2 \times 10 \times \alpha_{13}.$$

On observe que $N \sim PComp(\lambda, F_B)$ *où*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i - 4\alpha_{11} - 4\alpha_{12} - 9\alpha_{13}$$

et $f_B(1) = \frac{\sum_{i=1}^{10} \lambda_i - 5\alpha_{11} - 5\alpha_{12} - 10\alpha_{13}}{\lambda}$, $f_B(5) = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{12}}{\lambda}$, $f_B(10) = \frac{\alpha_{13}}{\lambda}$, *et* $f_B(k) = 0$, *pour* $k \in \mathbb{N} \backslash \{1, 5, 10\}$. *On suppose que* $\lambda_1 = ... = \lambda_5 = 2$, $\lambda_6 = ... = \lambda_{10} = 3$, $\alpha_{11} = 0.8$, $\alpha_{12} = 1$ *et* $\alpha_{13} = 0.4$. *Alors,* $E[N] = 25$, $\mathrm{Var}(N) = 51$. *Bien que* $N \in \mathbb{N}$, *on indique les valeurs exactes de* $f_N(k)$ *pour* $k = 10$, *20 et 30 qui ont été obtenues avec la FFT :* $f_N(10) = 0.01415874$, $f_N(20) = 0.04136522$ *et* $f_N(30) = 0.03032717$. □

Cette méthode de construction est simple. Toutefois, elle introduit uniquement une dépendance positive.

13.11 Loi binomiale bivariée Marshall-Olkin

13.11.1 Définition et propriétés

On construit la loi binomiale bivariée Marshall-Olkin comme suit.

Soit une paire de v.a. (I_1, I_2) avec

$$f_{I_1, I_2}(i_1, i_2) = p_{i_1, i_2}$$

pour

$$(i_1, i_2) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}.$$

La fgp de (I_1, I_2) est

$$\mathcal{P}_{I_1, I_2}(s_1, s_2) = E\left[s_1^{I_1} s_2^{I_2}\right] = (p_{00} + p_{10} s_1 + p_{01} s_2 + p_{11} s_1 s_2).$$

On déduit

$$I_j \sim Bern(q_j)$$

pour $j = 1, 2$ et avec

$$\begin{aligned} q_1 &= p_{10} + p_{11} \\ q_2 &= p_{01} + p_{11}. \end{aligned}$$

La covariance est

$$Cov(I_1, I_2) = p_{11} - q_1 q_2.$$

Soit une suite de vecteur de v.a. i.i.d.

$$\{(I_{1,i}, I_{2,i}), i = 1, 2, ..., n\}$$

où

$$(I_{1,i}, I_{2,i}) \sim (I_1, I_2)$$

Soit le couple de v.a. (M_1, M_2) où

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{i=1}^{n} I_{1,i} \\ M_2 &= \sum_{i=1}^{n} I_{2,i}. \end{aligned}$$

Clairement, on observe que

$$M_i \sim Bin\,(n, q_i)$$

pour $i = 1, 2$.

La fonction de masse de probabilité conjointe est définie par

$$\begin{aligned} & f_{M_1,M_2}(k_1, k_2) \\ = & \sum_{l=\max(k_1+k_2-n;0)}^{\min(k_1;k_2)} \frac{n! \times p_{11}^{l} p_{10}^{k_1-l} p_{01}^{k_2-l} p_{00}^{n-k_1-k_2+l}}{l!\,(k_1-l)!\,(k_2-l)!\,(n-k_1-k_2+l)!} \end{aligned}$$

pour $k_1, k_2 \in \{0, 1, ..., n\}$.

La fgp conjointe est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{M_1,M_2}(s_1, s_2) &= E\left[s_1^{M_1} s_2^{M_2}\right] \\ &= E\left[s_1^{I_{1,1}+...+I_{1,n}} s_2^{I_{2,1}+...+I_{2,n}}\right] \\ &= E\left[\left(s_1^{I_{1,1}} s_2^{I_{2,1}}\right) \times ... \times \left(s_1^{I_{1,n}} s_2^{I_{2,n}}\right)\right] \\ &= E\left[\left(s_1^{I_{1,1}} s_2^{I_{2,1}}\right)\right] \times ... \times E\left[\left(s_1^{I_{1,n}} s_2^{I_{2,n}}\right)\right] \\ &= E\left[s_1^{I_1} s_2^{I_2}\right]^n \\ &= (p_{00} + p_{10}s_1 + p_{01}s_2 + p_{11}s_1s_2)^n. \end{aligned}$$

La covariance est

$$\begin{aligned} Cov\,(M_1, M_2) &= Cov\left(\sum_{i=1}^{n} I_{1,i}, \sum_{i=1}^{n} I_{2,i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Cov\,(I_{1,i}, I_{i,2}) \\ &= nCov\,(I_1, I_2) \\ &= n\,(p_{11} - q_1q_2). \end{aligned}$$

13.11.2 Simulation

Algorithme 13.31 ***Algorithme de simulation pour la loi de binomiale bivariée Marshall-Olkin.***

1. *Produire les réalisations*

$$\left(I_{1,1}^{(j)}, I_{2,1}^{(j)}\right), ..., \left(I_{1,n}^{(j)}, I_{2,n}^{(j)}\right)$$

de

$$(I_{1,1}, I_{2,1}), ..., (I_{1,n}, I_{2,n}).$$

2. *Calculer la réalisation* $\left(M_1^{(j)}, M_2^{(j)}\right)$ *de* (M_1, M_2) *avec* $M_l^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} I_{l,i}$, *pour* $l = 1, 2$.

13.11.3 Agrégation

On définit

$$N = M_1 + M_2.$$

La fgp de la v.a. N est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(s) &= \mathcal{P}_{M_1,M_2}(s_1, s_2) \\ &= \left(p_{00} + p_{10}s + p_{01}s + p_{11}s^2\right)^n \\ &= \left(p_{00} + (p_{10} + p_{01})s + p_{11}s^2\right)^n. \end{aligned}$$

On peut utiliser l'algorithme de Panjer, l'algorithme de DePril, ou la FFT pour calculer les valeurs de $f_N(k)$.

On explique l'approche avec l'algorithme de DePril.

À partir de l'expression de $P_N(s)$, la v.a. N peut être aussi représentée sous la forme

$$N = K_1 + ... + K_n$$

où les v.a. K_1, ..., K_n sont i.i.d. avec

$$K_i \sim K \in \{0, 1, 2\}$$

telle que

$$\begin{aligned} f_K(0) &= p_{00} \\ f_K(1) &= p_{10} + p_{01} \\ f_K(2) &= p_{11} \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} P_N(s) &= \left(p_{00} + (p_{10} + p_{01})s + p_{11}s^2\right)^n \\ &= (P_K(s))^n. \end{aligned}$$

On a recours à l'algorithme de DePril (Chapitre 6) pour évaluer les valeurs de $f_N(k)$, $k = 0, 1, 2, ..., 2n$:

— point de départ :

$$f_N(0) = f_K(0)^n;$$

— relation récursive :

$$f_N(k) = \frac{1}{f_K(0)} \sum_{j=1}^{k} \left((n+1)\frac{j}{k} - 1\right) f_K(j) f_N((k-j))$$

pour $k = 1, 2, ..., 2n$.

Exemple 13.32 *Soit* $(M_1, M_2) \sim PBiv(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \alpha_0 = 1)$. *On définit* $N = M_1 + M_2$ *où* $E[N] = 5$ *et* $\mathrm{Var}(N) = 7$. *De plus,* $N \sim PComp(\lambda = 4, F_B)$ *où* $f_B(1) = 0.75$, $f_B(2) = 0.25$ *et* $f_B(k) = 0$ *pour* $k \neq 1$ *ou 2. Avec la FFT, on trouve les valeurs exactes suivantes de la f.m.p. de* N *:* $f_N(0) = 0.01831564$, $f_N(5) = 0.14698300$ *et* $f_N(10) = 0.02644007$. □

13.12 Loi Poisson mélange bivariée

Soit une v.a. Θ positive, continue ou discrète. On considère un couple de v.a. (M_1, M_2) tel que $(M_1|\Theta = \theta)$ et $(M_2|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes et $(M_i|\Theta = \theta) \sim Pois(\theta\lambda_i)$ pour $i = 1, 2$. On suppose

que la v.a. Θ est définie de telle sorte que $E[\Theta]=1$. Alors, on a

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= E\left[t_1^{M_1}t_2^{M_2}\right] = E_\Theta\left[E\left[t_1^{\Theta}t_2^{\Theta}|\Theta\right]\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{\Theta\lambda_1(t_1-1)}\mathrm{e}^{\Theta\lambda_2(t_2-1)}\right] = E\left[\mathrm{e}^{\Theta(\lambda_1(t_1-1)+\lambda_2(t_2-1))}\right] \\ &= M_\Theta\left(\left(\lambda_1(t_1-1)+\lambda_2(t_2-1)\right)\right). \end{aligned}$$

À la prochaine sous-section, on traite le cas particulier quand Θ obéit à une loi gamma.

13.12.1 Loi Poisson-gamma bivariée

On suppose que $\Theta \sim Ga(r,r)$ tel que $E[\Theta]=1$. Alors, on déduit

$$P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) = \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda_1}{r}(t_1-1)-\frac{\lambda_2}{r}(t_2-1)}\right)^r$$

et les lois marginales de M_1 et M_2 sont des lois binomiales négatives. La fonction de masse de probabilité conjointe de (M_1,M_2) est donnée par

$$\begin{aligned} & f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) \\ = & \int_0^\infty \Pr(M_1=m_1|\Theta=\theta)\Pr(M_2=m_2|\Theta=\theta) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ = & \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta\lambda_1}\mathrm{e}^{-\theta\lambda_2}\frac{(\theta\lambda_1)^{m_1}(\theta\lambda_2)^{m_2}}{m_1!m_2!}\mathrm{e}^{-r\theta}\frac{r^r(\theta)^{r-1}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) &= \int_0^\infty \frac{\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}r^r}{m_1!m_2!}\frac{(\theta)^{m_1+m_2+r-1}\mathrm{e}^{-\theta(\lambda_1+\lambda_2+r)}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}r^r\Gamma(m_1+m_2+r)}{(\lambda_1+\lambda_2+r)^{(m_1+m_2+r)}m_1!m_2!\Gamma(r)}, \end{aligned}$$

pour $m_1 \in \mathbb{N}$ et $m_2 \in \mathbb{N}$. Cette définition d'une loi Poisson-gamma (ou binomiale négative) bivariée pose problème car une seule relation de dépendance est possible pour les paramètres des marginales (λ_1,λ_2,r) fixés. On note l'absence de paramètre de dépendance. Cela est vrai quelle que soit la loi choisie pour Θ.

13.12.2 Loi Poisson mélange bivariée prise 2

Le problème soulevé dans la sous-section précédente est résolu en procédant comme suit. Soit un couple de v.a. (Θ_1,Θ_2). Le couple de v.a. (M_1,M_2) est défini de telle sorte que $(M_1|\Theta_1=\theta_1)$ et $(M_2|\Theta_2=\theta_2)$ sont conditionnellement indépendantes et $(M_i|\Theta_i=\theta_i) \sim Pois(\theta_i\lambda_i)$ pour $i=1,2$. À nouveau, on suppose que $E[\Theta_i]=1$, pour $i=1$, 2. Alors, on a

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= E\left[t_1^{M_1}t_2^{M_2}\right] = E_{\Theta_1,\Theta_2}\left[E\left[t_1^{\Theta_1}t_2^{\Theta_2}|\Theta_1,\Theta_2\right]\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{\Theta_1\lambda_1(t_1-1)}\mathrm{e}^{\Theta_2\lambda_2(t_2-1)}\right] \\ &= M_{\Theta_1,\Theta_2}\left(\lambda_1(t_1-1),\lambda_2(t_2-1)\right). \end{aligned}$$

On déduit aussi que

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(M_1,M_2) &= E_{\Theta_1,\Theta_2}\left[\mathrm{Cov}(M_1,M_2|\Theta_1,\Theta_2)\right] \\ &\quad + \mathrm{Cov}_{\Theta_1,\Theta_2}\left(E[M_1|\Theta_1],E[M_2|\Theta_2]\right) \\ &= 0+\mathrm{Cov}(\Theta_1\lambda_1,\Theta_2\lambda_2) = \lambda_1\lambda_2\mathrm{Cov}(\Theta_1,\Theta_2), \end{aligned}$$

ce qui implique que la covariance entre M_1 et M_2 est négative ou positive si la covariance entre Θ_1 et Θ_2 est négative ou positive.

13.12.3 Loi Poisson-gamma bivariée CRMM

On construit une loi Poisson-gamma bivariée en supposant que (Θ_1, Θ_2) obéit à la loi gamma bivariée CRMM.

À cette fin, on suppose que (Θ_1, Θ_2) obéit à la loi gamma bivariée avec une fgm définie par

$$\mathcal{M}_{\Theta_1,\Theta_2}(t_1,t_2) = \left(1-\frac{t_1}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)}\left(1-\frac{t_2}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)}\left(1-\frac{t_1}{r_1}-\frac{t_2}{r_2}\right)^{-\gamma_0},$$

de telle sorte que $\Theta_i \sim Ga(r_i, r_i)$ pour $i = 1, 2$ et le paramètre de dépendance γ_0 est fixé de telle sorte que $0 \leq \gamma_0 \leq \min(r_1; r_2)$. Il en résulte que la fgp de (M_1, M_2) est

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= \mathcal{M}_{\Theta_1,\Theta_2}(\lambda_1(t_1-1), \lambda_2(t_2-1)) \\ &= \left(1-\frac{\lambda_1(t_1-1)}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)} \\ &\quad \times\left(1-\frac{\lambda_2(t_2-1)}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)} \\ &\quad \times\left(1-\frac{\lambda_1(t_1-1)}{r_1}-\frac{\lambda_2(t_2-1)}{r_2}\right)^{-\gamma_0}, \end{aligned} \tag{13.31}$$

ce qui correspond à la fgp d'une loi binomiale négative bivariée de paramètres r_1, r_2, γ_0, $\beta_1 = \frac{\lambda_1}{r_1}$ et $\beta_2 = \frac{\lambda_2}{r_2}$. Les marginales de M_1 et M_2 sont des distributions binomiales négatives de paramètres r_i et $\beta_i = \frac{\lambda_i}{r_i}$ pour $i = 1, 2$.

De (13.31), on déduit que

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) &= \left(\frac{\lambda_1}{r_1}\right)^{m_1}\left(\frac{\lambda_2}{r_2}\right)^{m_2} \\ &\quad \times\left(1+\frac{\lambda_1}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)}\left(1+\frac{\lambda_2}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)} \\ &\quad \times\sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{j_2=0}^{m_2}\frac{\Gamma(j_1+j_2+\gamma_0)\prod_{i=1}^{2}\omega_{(r_i,\lambda_i,\gamma_0,m_i,j_i)}}{\Gamma(\gamma_0)j_1!j_2!\left(1+\frac{\lambda_1}{r_1}+\frac{\lambda_2}{r_2}\right)^{\gamma_0+j_1+j_2}}, \end{aligned}$$

où

$$\omega_{(r_i,\lambda_i,\gamma_0,m_i,j_i)} = \frac{\Gamma(r_i-\gamma_0+m_i-j_i)}{\Gamma(r_i-\gamma_0)\Gamma(m_i-j_i+1)}\left(1+\frac{\lambda_i}{r_i}\right)^{-(m_i-j_i)},$$

pour $j_i = 0, ..., m_i$, $m_i = 0, 1, ...$ et $i = 1, 2$.

On définit la v.a. $N = M_1 + M_2$. La fgp de N est obtenue à partir de la fgp de (M_1, M_2)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_N(t) &= \left(1-\frac{\lambda_1(t-1)}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)}\left(1-\frac{\lambda_2(t-1)}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)} \\ &\quad \times\left(1-\left(\frac{\lambda_1}{r_1}+\frac{\lambda_2}{r_2}\right)(t-1)\right)^{-\gamma_0},\end{aligned}$$

qui correspond au produit des fgp de 3 v.a. indépendantes de loi binomiale négative avec les paramètres suivants : $\left(r_1-\gamma_0, \frac{\lambda_1}{r_1}\right)$, $\left(r_2-\gamma_0, \frac{\lambda_2}{r_2}\right)$ et $\left(\gamma_0, \left(\frac{\lambda_1}{r_1}+\frac{\lambda_2}{r_2}\right)\right)$. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de N sont obtenues avec la FFT (aisément) ou avec le produit de convolution.

Exemple 13.33 ***Loi Poisson-gamma bivariée CRRM.*** *On fixe* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $r_1 = 4$ *et* $r_2 = 3$. *On déduit que* $M_1 \sim BN\left(r = 4, \beta = \frac{1}{4}\right)$ *et* $M_2 \sim BN\left(r = 3, \beta = \frac{2}{3}\right)$. *Pour* $N = M_1 + M_2$, *on a* $E[N] = 3$. *Pour* $\gamma_0 = 0$ *et 2, on détermine les valeurs de* $\mathrm{Var}(N)$ *comme étant 4.5833 et 9.2974. De plus, on obtient les valeurs suivantes de* f_{M_1,M_2} *:*

γ_0	$f_{M_1,M_2}(0,0)$	$f_{M_1,M_2}(0,1)$	$f_{M_1,M_2}(1,0)$	$f_{M_1,M_2}(1,1)$
0	0.0884736	0.1061683	0.0707888	0.0849347
2	0.1045293	0.1145278	0.0690802	0.0851726

Enfin, on fournit les valeurs obtenues de $VaR_\kappa(N)$ *et* $TVaR_\kappa(N)$ *pour* $\gamma_0 = 0$ *et* 2 *:*

γ_0	κ	$VaR_\kappa(N)$	$TVaR_\kappa(N)$
0	0.95	7	8.4546
0	0.995	10	11.7585
2	0.95	7	9.0237
2	0.995	11	12.7468

On observe l'impact du paramètre de dépendance γ_0 *sur les mesures de risque* $VaR_\kappa(N)$ *et* $TVaR_\kappa(N)$. *En fait on peut démontrer en utilisant les ordres stochastiques multivariés que* $TVaR_\kappa$ *augmente quand la relation positive de dépendance s'intensifie entre les composantes de la paire* (M_1, M_2). □

13.13 Loi de Bernoulli multivariée Cossette - Gaillardetz - Marceau - Rioux (CGMR)

On procède comme suit pour construire la loi de Bernoulli CGMR. Soit les v.a. indépendantes J_0, J_1, ..., J_n où $J_i \sim Bern(r_i)$ $(i = 0, 1, ..., n)$. On définit le vecteur de v.a. $(I_1, ..., I_n)$ où

$$I_i = \min(J_0 + J_i; 1), \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

On déduit que $I_i \sim Bern(q_i)$ avec

$$\overline{q}_i = 1 - q_i = (1 - r_i)(1 - r_0) = \overline{r}_i \overline{r}_0, \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

On suppose que les paramètres q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ sont fixés. Ainsi, le paramètre de dépendance r_0 doit satisfaire la contrainte $\max(\overline{q}_1; ...; \overline{q}_n) \leq \overline{r}_0 \leq 1$ ou $0 \leq r_0 \leq \min(q_1; ...; q_n)$. La fgp est définie par

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{I_1,...,I_n}(s_1, ..., s_n) &= r_0 s_1 ... s_n + \overline{r}_0 \prod_{\iota=1}^{n} (\overline{r}_i + r_i s_i) \\
&= r_0 s_1 ... s_n + \overline{r}_0^{-(n-1)} \prod_{\iota=1}^{n} (\overline{q}_i + (q_i - r_0) s_i).
\end{aligned}$$

On observe que

$$\begin{aligned}
f_{I_i,I_{i'}}(i_i, i_{i'}) &= r_0 1_{\{i_i i_{i'} = 1\}} \\
&\quad + \overline{r}_0 r_i^{i_i} \overline{r}_i^{1-i_i} \; r_{i'}^{i_{i'}} \overline{r}_{i'}^{1-i_{i'}} \\
&= r_0 1_{\{i_i i_{i'} = 1\}} \\
&\quad + \overline{r}_0^{-1} (q_i - r_0)^{i_i} (\overline{q}_i)^{1-i_i} \; (q_{i'} - r_0)^{i'_i} (\overline{q}_{i'})^{1-i_{i'}},
\end{aligned}$$

pour $i \neq i' \in \{1, 2, ..., n\}$. Il en découle que l'expression de la covariance entre I_i et $I_{i'}$ est

$$\mathrm{Cov}(I_i, I_{i'}) = r_0 + \overline{r}_0^{-1} (q_i - r_0)(q_{i'} - r_0) - q_i q_{i'},$$

pour $i \neq i' \in \{1, 2, ..., n\}$.

Enfin, on a

$$f_{I_1,...,I_n}(i_1,...,i_n) = r_0 1_{\{\prod_{i=1}^n i_i=1\}} + \overline{r}_0^{-(n-1)} \prod_{i=1}^n (q_i - r_0)^{i_i} (\overline{q}_i)^{1-i_i},$$

pour $i_i \in \{0,1\}$ et $i = 1,2,...,n$. Comme il est expliqué dans [Cossette et al., 2002b], il est possible d'ajouter des variantes à la présente version de la loi de Bernoulli multivariée.

13.14 Lois composées multivariées

13.14.1 Notions préliminaires

Au chapitre 4, on modélise les risques d'assurance par des sommes aléatoires. On présente dans cette section une extension multivariée de cette modélisation. On considère un portefeuille de n risques dont les coûts sont représentés par les v.a. X_1, ..., X_n. La v.a. X_i est définie par

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}, \tag{13.32}$$

où la f.m.p. conjointe de $(M_1,...,M_n)$ est donnée par

$$f_{M_1,...,M_n}(m_1,...,m_n) = \Pr(M_1 = m_1,...,M_n = m_n) = q_{m_1,...,m_n},$$

pour m_1, ..., $m_n \in \mathbb{N}$. Pour chaque i, les v.a. $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, ... forment une suite de v.a. i.i.d. Les suites $\{B_{1,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$, ..., $\{B_{n,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$ sont indépendantes entre elles et elles sont indépendantes du vecteur de v.a. $(M_1,...,M_n)$. La covariance entre X_i et X_j est

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E[B_i] E[B_j] \mathrm{Cov}(M_i, M_j), \quad \text{pour } i \neq j.$$

Il est à la fois intéressant d'évaluer le comportement aléatoire de la v.a. $S = \sum_{i=1}^n X_i$ et le comportement aléatoire conjoint du vecteur de v.a. $(X_1,...,X_n)$. La relation de dépendance entre les v.a. X_1,...,X_n est introduite via les v.a. $(M_1,...,M_n)$. La fgm de $(X_1,...,X_n)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{X_1,...,X_n}(t_1,...,t_n) &= E\left[\mathrm{e}^{t_1 X_1} ... \mathrm{e}^{t_n X_n}\right] \\ &= \mathcal{P}_{M_1,...,M_n}(\mathcal{M}_{B_1}(t_1),...,\mathcal{M}_{B_n}(t_n)). \end{aligned} \tag{13.33}$$

Ensuite, la fgm de S est obtenue avec (13.20). On peut utiliser (13.20) avec la FFT pour évaluer la distribution de S. Pour déterminer le comportement aléatoire conjoint du vecteur de v.a. $(X_1,...,X_n)$, il est nécessaire d'apporter plus de précision dans la modélisation.

L'expression de la fonction de répartition conjointe de $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ est

$$\begin{aligned} & F_{\underline{X}}(x_1,...,x_n) \\ = \; & q_{0,...,0} \\ & + \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,...,m_n=0\}}}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,...,m_n} \Pr\left(\bigcap_{j=1}^n \left\{\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{1,i_j} \leq x_j\right\}\right), \end{aligned}$$

pour x_1, ..., $x_n \geq 0$.

En conditionnant sur les différentes valeurs de $(M_1,...,M_n)$, l'expression générale pour la fonction de

répartition de S est

$$\begin{aligned} F_S(x) &= q_{0,\ldots,0} \\ &\quad + \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \Pr\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j} \leq x\right), \end{aligned} \tag{13.34}$$

où $\sum_{j=1}^{0} u_j = 0$ par convention.

L'expression de l'espérance tronquée de S est

$$\begin{aligned} E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right] &= \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \times \\ &\quad E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right) \times 1_{\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right)>b\right\}}\right]. \end{aligned} \tag{13.35}$$

Avec (13.35), on déduit que l'expression de la $TVaR_\kappa(S)$ est donnée par

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \times \\ &\quad E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right) \times 1_{\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right)>VaR_\kappa(S)\right\}}\right]. \end{aligned} \tag{13.36}$$

Les expressions (13.34) et (13.36) sont intéressantes lorsque les v.a. représentant la sévérité des sinistres appartiennent à une famille de distribution qui est fermée sous la convolution, comme les familles gamma et mélange d'Erlang.

Il est possible de considérer plusieurs structures de dépendance pour $(M_1, ..., M_n)$, notamment les versions bivariées des distributions discrètes communes comme les lois de Poisson et binomiale négative présentées plus tôt. Les distributions bivariées pour (M_1, M_2) peuvent également être construites avec des copules, comme il est expliqué au chapitre 14.

13.14.2 Montants de sinistres de distributions gamma

Dans la proposition suivante, on présente les expressions de F_S et de $TVaR_\kappa(S)$ quand les montants de sinistres obéissent à des lois gamma avec des paramètres de forme différents et des paramètres d'échelle identiques.

Proposition 13.34 ***Loi composée avec montants de sinistres de loi gamma****. On suppose que, dans l'équation (15.23), les montants de sinistres $B_i \sim Ga(\alpha_i, \beta)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. On obtient les expressions suivantes pour F_S et $TVaR_\kappa(S)$:*

$$F_S(x) = q_{0,\ldots,0} + \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} H\left(x; \sum_{j=1}^{n} m_j\alpha_j; \beta\right) \tag{13.37}$$

et

$$\begin{aligned} & TVaR_{\kappa}(S) \\ = & \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{q_{m_1,\ldots,m_n} \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j}{(1-\kappa)\beta} \overline{H}\left(b; \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j + 1; \beta\right), \end{aligned} \tag{13.38}$$

où $b = VaR_{\kappa}(S)$.

Preuve. Les expressions en (13.37) et (13.38) se déduisent à partir de (13.34) et (13.36) en sachant que $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j} \sim Ga\left(\sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j; \beta\right)$. ■

Les résultats de la proposition 13.34 sont illustrés numériquement dans le prochain exemple.

Exemple 13.35 *Dans la proposition 13.34, on suppose que* $n = 2$, $B_i \sim Ga\left(2, \frac{1}{10}\right)$ *pour* $i = 1, 2$. *De plus,* (M_1, M_2) *obéit à la loi Poisson-gamma bivariée CRRM, avec les paramètres fournis à l'exemple 13.33, soit* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $r_1 = 4$ *et* $r_2 = 3$. *On calcule* $E[S] = 60$. *Pour des fins calculatoires, on constate que* $S = X_1 + X_2$ *obéit à une loi composée et que l'on peut exprimer* S *sous la forme*

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} C_i, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases},$$

où $C \sim Ga\left(2, \frac{1}{10}\right)$ *et la fonction de masse de probabilité de* $N = M_1 + M_2$ *a été calculée à l'exemple 13.33. Pour* $\gamma_0 = 0, 1, 2$, *on déduit les valeurs suivantes de* F_S *et* π_S *:*

γ_0	$F_S(100)$	$F_S(200)$	$F_S(300)$	$\pi_S(100)$	$\pi_S(200)$	$\pi_S(300)$
0	*0.8137*	*0.9850*	*0.9992*	*44.8639*	*6.5150*	*0.5212*
1	*0.8110*	*0.9829*	*0.9989*	*45.8663*	*7.4981*	*0.7211*
2	*0.8082*	*0.9807*	*0.9985*	*46.8707*	*8.4607*	*0.9296*

Pour une valeur d fixée, la valeur de $\pi_S(d)$ *augmente quand le paramètre de dépendance* γ_0 *de la distribution conjointe de* (M_1, M_2) *devient plus élevé.* □

13.14.3 Montants de sinistres de distributions mélanges d'Erlang

Dans la prochaine proposition, on obtient les expressions de F_S, $E\left[S \times 1_{\{S>d\}}\right]$ et de $TVaR_{\kappa}(S)$ lorsque les montants de sinistres obéissent à des distributions mélanges d'Erlang.

Proposition 13.36 ***Loi composée avec montants de sinistres de loi mélange d'Erlang***. *On suppose que, dans l'équation (15.23),* $B_i \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta\right)$ *avec* $\underline{\zeta}^{(i)} = \left(\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}, \ldots\right)$, $\zeta_k^{(i)} = \Pr(K_i = k)$ $(k \in \mathbb{N})$. *Alors, les expressions de* $F_S(x)$, *de* $E\left[S \times 1_{\{S>d\}}\right]$ *et* $TVaR_{\kappa}(S)$ *sont respectivement :*

$$F_S(x) = \xi_{0,\ldots,0} + \sum_{\substack{j_1=0 \\ \setminus\{j_1=0,\ldots,j_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,\ldots,j_n} H\left(x; \sum_{i=1}^{n} j_i; \beta\right),$$

$$E\left[S \times 1_{\{S>d\}}\right] = \sum_{\substack{j_1=0 \\ \setminus\{j_1=0,\ldots,j_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,\ldots,j_n} \frac{\sum_{i=1}^{n} j_i}{\beta} \overline{H}\left(d; \sum_{i=1}^{n} j_i + 1; \beta\right),$$

et

$$TVaR_{\kappa}(S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{\substack{j_1=0 \\ \setminus\{j_1=0,\ldots,j_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,\ldots,j_n} \frac{\sum_{i=1}^{n} j_i}{\beta} \overline{H}\left(b; \sum_{i=1}^{n} j_i + 1; \beta\right),$$

où $b = VaR_{\kappa}(S)$ *et les valeurs de* $\xi_{j_1,\ldots,j_n}$ *sont calculées avec (13.40).*

Preuve. On a $\mathcal{M}_{B_i}(t) = \mathcal{P}_{K_i}(\mathcal{M}_C(r))$, où $P_{K_i}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^{(i)} s^k$. On trouve l'expression de F_S à partir de la fgm de S donnée par

$$\mathcal{M}_S(t) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,...,m_n} \mathcal{M}_{B_1}(t)^{m_1} \mathcal{M}_{B_2}(t)^{m_2} ... \mathcal{M}_{B_n}(t)^{m_n}. \tag{13.39}$$

Comme dans l'équation (11.34), on définit les v.a. M_1^*, M_2^*, ..., M_n^* par

$$M_i^* = \begin{cases} \sum_{j_i=1}^{M_i} K_{i,j_i}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases},$$

où $K_{i,j_i} \sim K_i$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Alors, chaque composante X_i de $(X_1, ..., X_n)$ s'exprime sous la forme

$$X_i = \begin{cases} \sum_{j_i=1}^{M_i^*} C_{i,j_i}, & M_i^* > 0 \\ 0, & M_i^* = 0 \end{cases},$$

où la f.m.p. conjointe de $(M_1^*, M_2^*, ..., M_n^*)$ est

$$f_{M_1^*,...,M_n^*}(j_1, ..., j_n) = \Pr(M_1^* = j_1, ..., M_n^* = j_n) = \xi_{j_1,...,j_n},$$

pour j_1, j_2, ..., $j_n \in \mathbb{N}$. Les v.a. $C_{i,j_i} \sim Exp(\beta)$ pour tout i et j_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Alors, l'expression (13.39) de $\mathcal{M}_S(t)$ devient

$$\mathcal{M}_S(t) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} ... \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,...,j_n} \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\sum_{i=1}^{n} j_i},$$

à partir de laquelle on déduit les trois résultats désirés de la propostion. Les valeurs de $\xi_{j_1,...,j_n}$ sont calculées avec la relation suivante :

$$\xi_{j_1,...,j_n} = \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,...,m_n} \prod_{i=1}^{n} \zeta_{j_i}^{(i)*m_i}, \tag{13.40}$$

pour j_1, ..., $j_n \in \mathbb{N}$, où $\zeta_j^{(i)*m_i} = \Pr(K_{i,1} + ... + K_{i,m_i} = j)$ $(j \in \mathbb{N})$, $\zeta_0^{(i)*0} = 1$, et $\zeta_k^{(i)*0} = 0$, pour $k \neq 0$. Les valeurs de $\xi_j^{(i)*m_i}$ sont calculées avec les algorithmes récursifs présentés au chapitre 11. ■

13.14.4 Montants de sinistres avec support arithmétique

On considère un portefeuille de n risques dont les coûts sont représentés par les v.a. X_1, ..., X_n. La v.a. X_i est définie par

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}.$$

Pour chaque i, les v.a. $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, ... forment une suite de v.a. i.i.d. Les suites $\{B_{1,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$, ...,$\{B_{n,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$ sont indépendantes entre elles et elles sont indépendantes du vecteur de v.a. $(M_1, ..., M_n)$. Les montants de sinistres B_1, ..., B_n sont définis sur le support $\{0, 1h, 2h, ...\}$. Il en résulte que les v.a. X_1, ..., X_n et S sont aussi définies sur $\{0, 1h, 2h, ...\}$. La fonction de masse de probabilité conjointe de $(X_1, ..., X_n)$ est donnée par

$$\begin{aligned} & f_{X_1,...,X_n}(k_1h, ..., k_nh) \\ = & \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_m=0}^{\infty} f_{M_1,...,M_n}(m_1, ..., m_n) f_{B_1}^{*m_1}(k_1h) ... f_{B_n}^{*m_n}(k_nh), \end{aligned} \tag{13.41}$$

pour k_1, ..., $k_n \in \mathbb{N}$, avec $f_{B_i}^{*0}(0) = 1$ et $f_{B_i}^{*0}(k_ih) = 0$, si $k_i \in \mathbb{N}^+$. Pour évaluer (13.41), différentes stratégies sont possibles. Une première stratégie est de calculer les valeurs $f_{B_i}^{*m_i}(k_ih)$ pour $i = 1, 2, ..., n$ et $m_i \in \mathbb{N}^+$ avec les outils récursifs appris au chapitre 11. En `R`, l'utilisation de la FFT s'avère utile car elle permet

d'accélérer considérablement les calculs.

Exemple 13.37 *On suppose que* (M_1, M_2) *obéit à une loi Poisson-gamma bivariée CRMM définie en 13.12.3. On fixe* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $r_1 = 4$, $r_2 = 3$ *et* $\gamma_0 = 1$. *Ainsi,* $M_1 \sim BN\left(r = 4, \beta = \frac{1}{4}\right)$ *et* $M_2 \sim BN\left(r = 3, \beta = \frac{2}{3}\right)$. *De plus, on suppose que* $f_{B_1}(10\ 000j) = 0.4 \times 0.6^{j-1}$, *pour* $j = 1, 2, ...$, *et que* $f_{B_2}(10\ 000j) = 0.5 \times 0.5^{j-1}$, *pour* $j \in \mathbb{N}^+$. *Les espérances de* X_1, X_2 *et* S *sont* $E[X_1] = 25\ 000$, $E[X_2] = 40\ 000$ *et* $E[S] = 65\ 000$. *On obtient* $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 5\ 965\ 758\ 777$ *et* $\mathrm{Var}(S) = 4\ 082\ 735\ 088$.

On calcule les valeurs de $f_{B_1}^{*m_1}(k_1 h)$ *et* $f_{B_2}^{*m_2}(k_2 h)$ *avec la FFT. Les valeurs obtenues de* $f_{X_1,X_2}(10\ 000k_1, 10\ 000k_2)$ *sont indiquées dans le tableau suivant :*

$k_1 \vert k_2$	0	1	2
0	0.09616696	0.05519147	0.04873429
1	0.02809748	0.01699810	0.01532773
2	0.02201725	0.01346002	0.01211938

On obtient les résultats suivants :

κ	$VaR_\kappa(X_1)$	$VaR_\kappa(X_2)$	$TVaR_\kappa(X_1)$	$TVaR_\kappa(X_2)$
95 %	100 000	120 000	126 184.2	157 515.2
99 %	150 000	180 000	166 508.4	209 591.7

et

κ	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$
95 %	170 000	215 188.9
99 %	240 000	282 509.1

□

13.14.5 Poisson composée bivariée

En 13.10, on présente les caractériques de la loi de Poisson bivariée Teicher pour le couple de v.a. (M_1, M_2). L'expression de la f.m.p. conjointe de (M_1, M_2) est

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2+\alpha_0} \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \frac{\alpha_0^j}{j!} \frac{(\lambda_1-\alpha_0)^{m_1-j}}{(m_1-j)!} \frac{(\lambda_2-\alpha_0)^{m_2-j}}{(m_2-j)!},$$

dont les paramètres sont $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; \lambda_2)$.

À la proposition 11.29, on fournit une relation récursive pour la fonction de masse de probabilité d'une loi de Poisson. Dans la proposition suivante, on fournit une relation analogue pour la fonction de masse de probablité conjointe $f_{M_1,M_2}(m_1, m_2)$.

Proposition 13.38 *La fonction de masse de probabilité de la loi de Poisson bivariée Teicher satisfait les relations récursives décrites comme suit. Le point de départ est* $f_{M_1,M_2}(0,0) = \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2+\alpha_0}$. *Pour* $m_1 \in \mathbb{N}^+$ *et* $m_2 = 0$, *on a*

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = \frac{(\lambda_1-\alpha_0)}{m_1} f_{M_1,M_2}(m_1-1, 0).$$

Pour $m_1 = 0$ *et* $m_2 \in \mathbb{N}^+$, *on a*

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = \frac{(\lambda_1-\alpha_0)}{m_1} f_{M_1,M_2}(m_1-1, 0).$$

Pour $m_1 \in \mathbb{N}^+$ *et* $m_2 \in \mathbb{N}^+$, *on a*

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) &= \frac{(\lambda_1-\alpha_0)}{m_1} f_{M_1,M_2}(m_1-1, m_2) \\ &\quad + \frac{\alpha_0}{m_1} f_{M_1,M_2}(m_1-1, m_2-1) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) &= \frac{(\lambda_2-\alpha_0)}{m_2} f_{M_1,M_2}(m_1,m_2-1) \\ &\quad + \frac{\alpha_0}{m_2} f_{M_1,M_2}(m_1-1,m_2-1). \end{aligned}$$

Preuve. Voir [Hesselager, 1996]. ■

Dans la proposition qui suit, on présente une extension de l'algorithme de Panjer pour calculer de façon récursive la fonction de masse de probabilité conjointe de (X_1, X_2), dans le cas où B_1 et B_2 sont définis sur le support arithmétique $\{0, 1h, 2h, ...\}$ et (M_1, M_2) obéit à une loi Poisson bivariée Teicher.

Proposition 13.39 ***Algorithme de Hesselager.*** *Le point de départ est* $f_{X_1,X_2}(0,0) = P_{M_1,M_2}(f_{B_1}(0), f_{B_2}(0))$.

Pour $k_1 \in \mathbb{N}^+$ *et* $k_2 = 0$, *on a*

$$\begin{aligned} & f_{X_1,X_2}(k_1h,0) \\ = & \frac{\lambda_1-\alpha_0}{k_1}\sum_{j_1=1}^{k_1} j_1 f_{B_1}(j_1h) f_{X_1,X_2}((k_1-j_1)h,0) \\ & + \frac{\alpha_0}{k_1}\sum_{j_1=1}^{k_1} j_1 f_{B_1}(j_1h) f_{B_2}(0) f_{X_1,X_2}((k_1-j_1)h,0). \end{aligned}$$

Pour $k_1 = 0$ *et* $k_2 \in \mathbb{N}^+$, *on a*

$$\begin{aligned} & f_{X_1,X_2}(0,k_2h) \\ = & \frac{\lambda_2-\alpha_0}{k_2}\sum_{j_2=1}^{k_2} j_2 f_{B_2}(j_2h) f_{X_1,X_2}(0,(k_2-j_2)h) \\ & + \frac{\alpha_0}{k_2}\sum_{j_2=1}^{k_2} j_2 f_{B_1}(0) f_{B_2}(j_2h) f_{X_1,X_2}(0,(k_2-j_2)h). \end{aligned}$$

Pour $k_1 \in \mathbb{N}^+$ *et pour* $k_2 \in \mathbb{N}^+$, *on a*

$$\begin{aligned} & f_{X_1,X_2}(k_1h,k_2h) \\ = & \frac{\lambda_1-\alpha_0}{k_1}\sum_{j_1=1}^{k_1} j_1 f_{B_1}(j_1h) f_{X_1,X_2}((k_1-j_1)h,k_2h) \\ & + \frac{\alpha_0}{k_1}\sum_{j_1=1}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2} j_1 f_{B_1}(j_1h) f_{B_2}(j_2h) f_{X_1,X_2}((k_1-j_1)h,(k_2-j_2)h) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & f_{X_1,X_2}(k_1h,k_2h) \\ = & \frac{\lambda_2-\alpha_0}{k_2}\sum_{j_2=1}^{k_2} j_2 f_{B_2}(j_2h) f_{X_1,X_2}(k_1h,(k_2-j_2)h) \\ & + \frac{\alpha_0}{k_2}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=1}^{k_2} j_2 f_{B_1}(j_1h) f_{B_2}(j_2h) f_{X_1,X_2}((k_1-j_1)h,(k_2-j_2)h). \end{aligned}$$

Preuve. Voir [Hesselager, 1996]. ■

Les relations récursives de la proposition 13.39 sont intéressantes mais elles peuvent devenir coûteuses en temps de calcul.

13.15 Poisson composée multivariée

On suppose que $(M_1, ..., M_n)$ obéit à une loi de Poisson multivariée construite avec un choc commun selon la même approche que la loi de Poisson bivariée décrite à la sous-section 13.10. Soit les v.a. indépendantes K_0, K_1, ..., K_n avec $K_0 \sim Pois(\alpha_0)$, avec $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_n)$, et $K_i \sim Pois(\alpha_i = \lambda_i - \alpha_0)$, pour $i = 1, 2, ..., n$. Les éléments du vecteur de v.a. de fréquence $(M_1, ..., M_n)$ sont définis par $M_i = K_i + K_0$, ce qui implique que $M_i \sim Pois(\lambda_i)$ $(i = 1, ..., n)$. De plus, la fonction de masse de probabilité conjointe et la fgp conjointe de $(M_1, ..., M_n)$ sont respectivement données par

$$q_{m_1,...,m_n} = \sum_{j=0}^{\min(m_1;...;m_n)} \mathrm{e}^{-\alpha_0} \frac{\alpha_0^j}{j!} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-(\lambda_i - \alpha_0)} \frac{(\lambda_i - \alpha_0)^{(m_i - j)}}{(m_i - j)!},$$

pour m_1, ..., $m_n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{M_1,...,M_n}(s_1, ..., s_n) &= E\left[s_1^{M_1} ... s_n^{M_n}\right] \\ &= \mathrm{e}^{\alpha_0(s_1 ... s_n - 1)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(\lambda_i - \alpha_0)(s_i - 1)}, \end{aligned} \tag{13.42}$$

où α_0 correspond au paramètre de dépendance. Quand $\alpha_0 = 0$, cela signifie que les composantes de $(M_1, ..., M_n)$ sont indépendantes.

Quand $(M_1, ..., M_n)$ obéit à une loi de Poisson multivariée, cela implique que $(X_1, ..., X_n)$ obéit à une loi Poisson composée multivariée.

Dans la prochaine proposition qui est une généralisation de la proposition 5.28, on identifie la distribution de $S = \sum_{l=1}^{n} X_l$.

Proposition 13.40 *Étant donné les définitions de $(M_1, ..., M_n)$ et $(X_1, ..., X_n)$, la v.a. $S = \sum_{l=1}^{n} X_l$ obéit à une loi Poisson composée avec les paramètres $\lambda_S = \lambda_1 + ... + \lambda_n - (n-1)\alpha_0$ et*

$$F_D(x) = \frac{\lambda_1 - \alpha_0}{\lambda_S} F_{B_1}(x) + ... + \frac{\lambda_n - \alpha_0}{\lambda_S} F_{B_n}(x) + \frac{\alpha_0}{\lambda_S} F_{B_1 + ... + B_n}(x), \tag{13.43}$$

c.-à-d. on a

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} D_j, & N > 1 \\ 0, & N = 0 \end{cases},$$

où $N \sim Pois(\lambda_S = \lambda_1 + ... + \lambda_n - (n-1)\alpha_0)$ et la fonction de répartition de D_j $(j = 1, 2, ...)$ est F_D.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_S(r) &= E\left[\mathrm{e}^{rS}\right] = M_{X_1,...,X_n}(r, ..., r) \\ &= P_{M_1,...M_n}(M_{B_1}(r), ..., M_{B_n}(r)). \end{aligned} \tag{13.44}$$

En remplaçant (13.42) dans (13.44), on obtient l'expression suivante pour la fgm de S

$$\mathcal{M}_S(r) = \mathrm{e}^{\alpha_0\left(M_{B_1}(r) ... M_{B_n}(r) - 1\right)} \prod_{l=1}^{n} \mathrm{e}^{(\lambda_l - \alpha_0)\left(M_{B_l}(r) - 1\right)} = \mathrm{e}^{\lambda_S(M_D(r) - 1)},$$

où $\lambda_S = \lambda_1 + ... + \lambda_n - (n-1)\alpha_0$ et

$$M_D(r) = \frac{\alpha_0}{\lambda_S} \prod_{l=1}^{n} M_{B_l}(r) + \sum_{l=1}^{n} \frac{(\lambda_l - \alpha_0)}{\lambda_S} M_{B_l}(r). \tag{13.45}$$

L'expression de F_D découle de la fgm en (13.45). ■

En se basant sur la proposition 13.40, les expressions de F_S et $TVaR_\kappa(S)$ sont

$$F_S(x) = \Pr(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N=k) \Pr(D_1 + ... + D_k \leq x), \tag{13.46}$$

et

$$TVaR_\kappa(S) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N=k) E\left[\left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) \times 1_{\left\{\sum_{j=1}^{k} D_j > VaR_\kappa(S)\right\}}\right]}{1-\kappa}. \tag{13.47}$$

Pour produire les résultats du prochain exemple, il est possible d'utiliser les relations récursives de la proposition 13.39. Toutefois, on a appliqué les résultats de la proposition 13.40 et une méthode de discrétisation présentée au chapitre 11 pour les obtenir.

Exemple 13.41 *On considère un portefeuille constitué de deux lignes d'affaires dont les coûts sont définis par le couple de v.a.* (X_1, X_2) *obéissant à la loi Poisson composée bivariée décrite ci-dessus. Les paramètres de la loi de Poisson bivariée sont* $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ *et* $\alpha_0 = 1$. *Le montant d'un sinistre de la ligne i, représenté par la v.a.* B_i, *est défini par* $B_i = 100U_i$ *où* U_i *obéit à une loi bêta de paramètres* $a_i = 3 - i$ *et* $b_i = i$ *pour* $i = 1, 2$. *On définit* $S = X_1 + X_2$. *On déduit que* $E[X_1] = 133.33$, $E[X_2] = 100$ *et* $E[S] = 233.33$. *La valeur de* $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ *est 13 333.33 et la variance de S est 43 888.89. Afin d'effectuer les prochains calculs, on a recours à une approximation des v.a.* U_1 *et* U_2 *par les v.a.* $\widetilde{U}_1$ *et* $\widetilde{U}_2$ *en utilisant la méthode de dispersion de la masse avec préservation de l'espérance et avec un pas de discrétisation* $h = 1$. *Cela conduit à une approximation des v.a.* B_1 *et* B_2 *par les v.a.* $\widetilde{B}_1$ *et* $\widetilde{B}_2$, *puis de la paire de v.a.* (X_1, X_2) *par la paire de v.a.* $\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right)$ *et enfin de la v.a. S par la v.a.* $\widetilde{S}$. *Dans le tableau ci-dessous, on présente les valeurs obtenues de* $VaR_\kappa\left(\widetilde{X}_i\right)$ $(i = 1, 2)$, $TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_i\right)$ $(i = 1, 2)$, *de* $VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ *et de* $TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ *servant d'approximation aux mesures* $VaR_\kappa(X_i)$ $(i = 1, 2)$, $TVaR_\kappa(X_i)$ $(i = 1, 2)$, *de* $VaR_\kappa(S)$ *et de* $TVaR_\kappa(S)$ *:*

κ	$VaR_\kappa\left(\widetilde{X}_1\right)$	$VaR_\kappa\left(\widetilde{X}_2\right)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_1\right)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_2\right)$
95 %	320	230	380.5665	277.1934
99.5 %	460	330	510.7144	372.353

et

κ	$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$
95 %	490	573.1105
99.5 %	680	750.0120

□

13.16 Modèles avec chocs communs

Les modèles avec chocs communs sont construits en s'inspirant de la définition de la loi Poisson composée multivariée décrite à la section 13.15. Dans la définiton suivante, on présente un exemple assez général de modèles avec chocs communs.

Définition 13.42 ***Modèle général avec choc communs.*** *Un portefeuille d'assurance est exposé à m types de risque et il est composé de n lignes d'affaires. Les coûts pour les lignes d'affaires sont définis par les v.a.* X_1, ...,X_n *où*

$$X_i = \sum_{k_1=1}^{M^{(1)}} I_{i,k_1}^{(1)} \times B_{i,k_1}^{(1)} + ... + \sum_{k_m=1}^{M^{(m)}} I_{i,k_m}^{(m)} \times B_{i,k_m}^{(m)}$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. *Les hypothèses du modèle sont données comme suit.*

Les v.a. $M^{(1)}$, ..., $M^{(m)}$, *qui représentent le nombre d'événements pour le type j de risque, sont indépendantes avec* $M^{(j)} \sim Pois(\gamma_j)$, $j = 1, 2, ..., m$. *Pour un type j fixé de risque,* $\left(B_{1,k_j}^{(j)}, ..., B_{n,k_j}^{(j)}\right)$ *forment une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. où*

$$\left(B_{1,k_j}^{(j)}, ..., B_{n,k_j}^{(j)}\right) \sim \left(B_1^{(j)}, ..., B_n^{(j)}\right),$$

pour $k_j \in \mathbb{N}^+$. *Pour un type* j *fixé de risque,* $\left(I_{1,k_j}^{(j)}, ..., I_{n,k_j}^{(j)}\right)$ *forment une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. où*

$$\left(I_{1,k_j}^{(j)}, ..., I_{n,k_j}^{(j)}\right) \sim \left(I_1^{(j)}, ..., I_n^{(j)}\right),$$

pour $k_j \in \mathbb{N}^+$. *On a*

$$\Pr\left(I_1^{(j)} = i_1^{(j)}, ..., I_n^{(j)} = i_n^{(j)}\right) = f_{I_1^{(j)},...,I_n^{(j)}}\left(i_1^{(j)}, ..., i_n^{(j)}\right),$$

pour $i_1^{(j)}, ..., i_n^{(j)} \in \{0,1\}$. *De plus,* $I_i^{(j)} \sim Bern\left(q_i^{(j)}\right)$. *Les suites*

$$\left\{\left(B_{1,k_1}^{(1)}, ..., B_{n,k_1}^{(1)}\right), k_1 \in \mathbb{N}^+\right\}, ..., \left\{\left(B_{1,k_m}^{(m)}, ..., B_{n,k_m}^{(m)}\right), k_m \in \mathbb{N}^+\right\},$$
$$\left\{\left(I_{1,k_1}^{(1)}, ..., I_{n,k_1}^{(1)}\right), k_1 \in \mathbb{N}^+\right\}, ..., \left\{\left(I_{1,k_m}^{(m)}, ..., I_{n,k_m}^{(m)}\right), k_m \in \mathbb{N}^+\right\}$$

et les v.a. $M^{(1)}$,...,$M^{(m)}$ *sont indépendantes.*

Lorsque le k_j*-ième choc de type* j *survient, il entraîne des coûts d'un montant* $B_{i,k_j}^{(j)}$, *si* $I_{i,k_j}^{(j)} = 1$, *pour la ligne d'affaires* i $(i = 1, 2, ..., n)$. *Clairement,* $(X_1, ..., X_n)$ *forme un vecteur de v.a. dont les composantes sont dépendantes.*

Les principaux résultats associés au modèle décrit à la définition 13.42 sont résumés dans la proposition suivante.

Proposition 13.43 *Pour le modèle décrit à la définition 13.42, on a les résultats suivants :*

1. *Chaque composante obéit à une loi Poisson composée c.-à-d.* $X_i \sim PComp\left(\lambda_i, F_{C_i}\right)$ *où* $\lambda_i = \sum_{j=1}^m q_i^{(j)}\gamma_j$ *et*

$$F_{C_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_i^{(j)}\gamma_j}{\lambda_i} F_{B_i^{(j)}}(x), \tag{13.48}$$

   pour $i = 1, 2, ..., n$.

2. *La covariance de* $(X_i, X_{i'})$ *est*

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(X_i, X_{i'}\right) &= \sum_{j=1}^m E\left[M^{(j)}\right] \mathrm{Cov}\left(I_i^{(j)}B_i^{(j)}, I_{i'}^{(j)}B_{i'}^{(j)}\right) \\ &+ \sum_{j=1}^m \mathrm{Var}\left(M^{(j)}\right) E\left[I_i^{(j)}B_i^{(j)}\right] E\left[I_{i'}^{(j)}B_{i'}^{(j)}\right].\end{aligned}$$

3. *On définit* $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

   (a) *Pour* $n = 2$, *l'expression de* $\mathcal{M}_S(t)$ *est*

$$\mathcal{M}_S(t) = \prod_{j=1}^3 \mathrm{e}^{\gamma_j\left(M_{D^{(j)}}(t)-1\right)}, \tag{13.49}$$

   où

$$\begin{aligned}M_{D^{(j)}}(t) &= f_{I_1^{(j)},I_2^{(j)}}(0,0) + f_{I_1^{(j)},I_2^{(j)}}(1,0)\, M_{B_1^{(j)}}(t) \\ &+ f_{I_1^{(j)},I_2^{(j)}}(0,1)\, M_{B_2^{(j)}}(t) \\ &+ f_{I_1^{(j)},I_2^{(j)}}(1,1)\, M_{B_1^{(j)}B_2^{(j)}}(t,t),\end{aligned}$$

   pour $j = 1, 2, 3$.

(b) Pour $n = 2$, on déduit de (13.49) que $S \sim PComp(\lambda, F_D)$ avec $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ et

$$\begin{aligned} F_D(x) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(0,0) \\ &+ \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,1) F_{B_1^{(j)}+B_2^{(j)}}(x) \\ &+ \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,0) F_{B_1^{(j)}}(x) \\ &+ \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(0,1) F_{B_2^{(j)}}(x), \end{aligned}$$

pour $x \geq 0$.

(c) Pour $n > 2$, l'expression de $\mathcal{M}_S(t)$ se développe aisément mais elle devient trop lourde pour être présentée.

Preuve. Le résultat en 1 découle de l'application de 1.47. Le résultat en 2 suit des propriétés de la covariance. Pour obtenir les résultats en 3, on applique 13.20. ■

Dans le prochain exemple, on applique les notions présentées à la proposition 13.43.

Exemple 13.44 *Avec la notation utilisée à la proposition 13.43, on suppose $n = 2$ lignes d'affaires, $m = 3$ types de risques, $\gamma_j = 0.6 \times j$,*

$$I_i^{(j)} \sim Bern\left(q_i^{(j)} = 0.9 - 0.02i \times j\right),$$

$$f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,1) = 0.84 - 0.04 \times j, i = 1,2,\ j = 1,2,3$$

et l'expression de

$$F_{B_1^{(j)}, B_2^{(j)}}(100k_1, 100k_2) = \mathrm{e}^{-\left\{\sum_{l=1}^{2}\left(-\ln\left(1-\left(\frac{200}{200+100k_l}\right)^{2.4+0.1j}\right)\right)^{2+j}\right\}^{(1/(2+j))}},$$

pour $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^+$. On définit $S = X_1 + X_2$. Les espérances de X_1, X_2 et S sont 562.5502, 495.0654 et 1057.616. La valeur de $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ est 333 939.8. Comme $\mathrm{Var}(X_1) = 283\ 668.3$ et $\mathrm{Var}(X_2) = 196\ 594.8$, on obtient $\mathrm{Var}(S) = 1\ 148\ 143$.

En raison de la définition du modèle, on déduit que $S \sim PComp(\lambda, F_D)$ avec $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ et

$$\begin{aligned} f_D(0) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(0,0), \\ f_D(100k) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,0) f_{B_1^{(j)}}(100k) \\ &+ \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(0,1) f_{B_2^{(j)}}(100k) \\ &+ \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,1) f_{B_1^{(j)}+B_2^{(j)}}(100k), \end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. Les valeurs de $f_S(100k)$ pour $k = 0,1,2$ sont 0.02732372, 0.01493067 et 0.06926792. On obtient $VaR_{0.95}(S) = 2800$ et $TVaR_{0.95}(S) = 3177.407$ □

13.17 Modèles avec mélange commun

Dans les modèles avec mélange commun, la dépendance entre des risques est induite via une v.a. commune ou plusieurs v.a. communes représentant des conditions économiques communes, des conditions climatiques communes ou tout autre facteur externe commun. Ce mécanisme externe peut être représenté par une v.a. Θ positive, pouvant être discrète ou continue, dont la fonction de répartition est notée par G_Θ.

La méthode de construction basée sur les mélanges communs, aussi appelée *common frailties*, est due à [Marshall and Olkin, 1988]. Elle a été déjà utilisée aux sous-sections 13.8.7, 13.8.8, 13.8.9, 13.12, 13.12.1, 13.12.2 et 13.12.3. On traite aussi de cette méthode à la section 5.7. Dans la présente section, on utilise cette méthode afin de construire une loi de Bernoulli multivariée. La méthode peut être adaptée aisément.

On définit

$$\Pr\left(I_i = 1 \mid \Theta = \theta\right) = 1 - {r_i}^\theta \text{ et } \Pr\left(I_i = 0 \mid \Theta = \theta\right) = {r_i}^\theta, \tag{13.50}$$

où $(I_i \mid \Theta = \theta)$ $(i = 1, ..., n)$ sont des v.a. de loi de Bernoulli et r_i est le paramètre de base de la distribution conditionnelle de $(I_i \mid \Theta = \theta)$. Chaque v.a. I_i $(i = 1, ..., n)$ est influencée par les valeurs possibles de la v.a. Θ. Pour une valeur fixée de r_i, la probabilité conditionnelle de non-occurrence sachant que $\Theta = \theta$ est une fonction décroissante de θ. On suppose aussi que $(I_1 = 1 \mid \Theta = \theta)$, ..., $(I_n = 1 \mid \Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes. Étant donné la distribution G_Θ de la v.a. Θ et les marginales fixées pour I_1, ..., I_n, on a $r_i = \mathrm{e}^{M_\Theta^{-1}(p_i)}$, puisque

$$\Pr\left(I_i = 0\right) = 1 - q_i = p_i = \int_0^\infty \left(r_i\right)^\theta \ \mathrm{d}G_\Theta(\theta) = M_\Theta(\ln r_i),$$

où $M_\Theta\left(t\right)$ est la fgm de la v.a. Θ. On suppose que $M_\Theta\left(t\right)$ existe pour certaines valeurs de $t \neq 0$.

Compte tenu de la méthode de construction, la fonction de masse de probabilité conjointe correspond à

$$f_{I_1,...,I_n}\left(i_1, ..., i_n\right) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \left(\left(r_i^{\theta(1-i_i)} \times \left(1 - r_i^\theta\right)^{i_i}\right)\right) \mathrm{d}G_\Theta\left(\theta\right),$$

pour $i_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, ..., n$. La fgp conjointe de $\underline{I} = (I_1, ..., I_n)$ est donnée par

$$\mathcal{P}_{\underline{I}}(\underline{t}) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \left(r_i^\theta + \left(1 - r_i^\theta\right) t_i\right) \ \mathrm{d}G_\Theta(\theta).$$

La covariance entre I_i et I_j est donnée par

$$\mathrm{Cov}\left(I_i, I_j\right) = E\left[I_i I_j\right] - E\left[I_i\right] E\left[I_j\right] = \int_0^\infty (1 - r_i^\theta)(1 - r_j^\theta)\mathrm{d}G_\Theta(\theta) - q_i q_j,$$

pour $i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Soit un portefeuille de risques X_1, ..., X_n définis selon une loi composée multivariée comme en (13.32),

$$X_i = \begin{cases} B_i, \ I_i = 1 \\ 0, \ I_i = 0 \end{cases},$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. Les composantes du vecteur aléatoire $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ sont dépendantes en raison de la dépendance entre les v.a. I_i $(i = 1, 2, ..., n)$. À partir de (13.33), on a

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}(\underline{t}) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \left(r_i^\theta + \left(1 - r_i^\theta\right) \mathcal{M}_{B_i}\left(t_i\right)\right) \mathrm{d}G_\Theta(\theta),$$

qui peut être réécrit sour la forme

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}(\underline{t}) = \int_0^\infty \mathcal{M}_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{t})\mathrm{d}G_\Theta(\theta). \tag{13.51}$$

Il résulte de (13.51) que la fgm de la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_S(t) &= M_{\underline{X}}(t,...,t) = \int_0^\infty M_{\underline{X}|\Theta=\theta}(t,...,t)\,\mathrm{d}G_\Theta(\theta) \\ &= \int_0^\infty \mathcal{M}_{S|\Theta=\theta}(t)\ \mathrm{d}G_\Theta(\theta), \end{aligned} \tag{13.52}$$

où $(S \mid \Theta = \theta)$ est la somme des v.a. $(X_i \mid \Theta = \theta)$ $(i = 1, ..., n)$ conditionnellement indépendantes. Alors, il est clair que

$$F_S(s) = \int_0^\infty F_{S|\Theta=\theta}(s)\ \mathrm{d}G_\Theta(\theta). \tag{13.53}$$

Certains choix de distribution pour Θ conduisent à des résultats intéressants. Dans le cas où Θ est une v.a. discrète, alors on a

$$F_S(s) = \sum_{k=1}^{m} \Pr(\Theta = \theta_k)\, F_{S|\Theta=\theta_k}(s).$$

Quand $m = 1$, on a une distribution dégénérée pour Θ qui correspond au cas où les v.a. $I_1, ..., I_n$ sont indépendantes. Dans le cas où Θ est une v.a. discrète, on utilise les méthodes d'agrégation de v.a. indépendantes pour évaluer $F_{S|\Theta=\theta}(s)$ pour chaque valeur de θ. Si Θ est continue, il suffit de l'approximer par une v.a. discrète, comme on l'a vu au chapitre 11.

Étant donné la construction du modèle, la prime *stop-loss* avec une limite de rétention d s'exprime sous la forme d'un mélange de prime *stop-loss*

$$\pi_S(d) = E[\max(S - d; 0)] = \int_0^\infty \pi_{S|\Theta=\theta}(s)\,\mathrm{d}G_\Theta(\theta).$$

Des expressions semblables peuvent se déduire pour d'autres espérances de fonctions de S. Par exemple, on a

$$E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right] = \int_0^\infty E\left[S \times 1_{\{S>b\}} | \Theta = \theta\right] \mathrm{d}G_\Theta(\theta).$$

On s'intéresse au cas où les v.a. I_i $(i = 1, ..., n)$ sont identiquement distribuées et les v.a. B_i $(i = 1, ..., n)$ sont identiquement distribuées. Pour la v.a. $N = I_1 + ... + I_n$, on déduit sa fonction de masse de probabilité

$$\begin{aligned} \Pr(N = k) &= \int_0^\infty \Pr(N = k \mid \Theta = \theta) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\infty \binom{n}{k} \left(1 - r^\theta\right)^k r^{\theta(n-k)} f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{13.54}$$

En utilisant la relation $(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$, (13.54) devient

$$\begin{aligned} &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \int_0^\infty r^{\theta j} r^{\theta(n-k)} f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \int_0^\infty r^{\theta(n+j-k)} f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j M_\Theta((n+j-k)\ln r), \end{aligned} \tag{13.55}$$

pour $k = 0, 1, ..., n$. Comme les v.a. $B_1, ..., B_n$ sont i.i.d. et indépendantes de la v.a. N, alors la forme explicite

de S est donnée par

$$F_S(x) = f_N(0) + \sum_{k=1}^{n} f_N(k) F_B^{*k}(x),$$

où F_B^{*k} est le k-ième produit de convolution de F_B avec elle-même.

Exemple 13.45 *On examine les courbes des valeurs de $VaR_\kappa(S)$ et des primes $TVaR_\kappa(S)$ pour 3 portefeuilles de 20 risques identiquement distribués. Les hypothèses suivantes tiennent pour les trois portefeuilles : $B_i \sim Exp(1)$, $i = 1, 2, ..., 20$; $I_i \sim Bern(0.1)$, $i = 1, ..., 20$; Θ obéit à une loi logarithmique de paramètre $\gamma \in]0, 1[$ avec une fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(\Theta = k) = \frac{\gamma^k}{-k \ln(1-\gamma)}, k = 1, 2, ...,$$

et une fgp

$$\mathcal{P}_\Theta(t) = M_\Theta(\ln t) = \frac{\ln(1-\gamma t)}{\ln(1-\gamma)}, \quad |t| < 1. \tag{13.56}$$

On déduit que $r = \frac{1-(1-\gamma)^{1-q}}{\gamma}$. En combinant (13.55) et (13.56), on obtient

$$f_N(k) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \frac{\ln(1-\gamma r^{n+j-k})}{\ln(1-\gamma)},$$

$k = 0, 1, ..., n$. Pour les trois portefeuilles, on a $E[S] = 2$. Dans le tableau ci-dessous, on fournit les valeurs exactes de VaR et TVaR pour γ = 0.5, 0.95 et 0.999999 :

(γ, r)	κ	0.5	0.95	0.99	0.995
(0.5,0.92823)	$VaR_\kappa(S)$	1.33136	6.43860	9.77851	11.18750
(0.5,0.92823)	$TVaR_\kappa(S)$	3.58875	8.50638	11.78524	13.16668
(0.95,0.98162)	$VaR_\kappa(S)$	0.69271	8.42254	13.90466	16.03086
(0.95,0.98162)	$TVaR_\kappa(S)$	3.90516	11.77061	16.80402	18.75002
(0.9999,0.99985)	$VaR_\kappa(S)$	0.00015	12.23754	19.92491	22.27512
(0.9999,0.99985)	$TVaR_\kappa(S)$	4.00000	16.96255	23.02277	25.05146

De plus, les valeurs correspondantes de $\mathrm{Var}(S)$ sont 4.93929, 11.27882 et 18.56217. Il est clair d'après les valeurs produites dans le tableau que le comportement de Θ a un impact significatif sur les valeurs de $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$. On observe que la TVaR est croissante en fonction du paramètre γ de la distribution logarithmique. □

13.18 Notes bibliographiques

Un exposé complet sur les lois multivariées continues est fourni dans [Kotz et al., 2004]. On recommande [Kocherlakota and Kocherlakota, 1992] et [Johnson et al., 1997], une monographie semblable sur les lois multivariées discrètes. Concernant les méthodes de construction de lois bivariées et multivariées, on suggère, p. ex., [Balakrishnan and Lai, 2009], [Joe, 1997] et [Wang, 1998].

Différentes versions multivariées de la loi exponentielle univariée ont été proposées dans la littérature au cours des dernières années. La loi exponentielle bivariée de EFGM a été proposée notamment par [Gumbel, 1960]. La loi gamma bivariée a été étudiée, notamment par [Mathai and Moschopoulos, 1991].

La méthode utilisée pour définir la loi bivariée exponentielle Marshall-Olkin est due à [Marshall and Olkin, 1967b] et [Marshall and Olkin, 1967a]. Elle peut être adaptée pour construire des lois exponentielles multivariées. La loi gamma bivariée et sa version multivariée ont été suggérées par [Cherian, 1941] et [Ramabhadran, 1951].

La loi de Poisson multivariée a été suggérée pour la première fois en actuariat par [Teicher, 1954]. Voir aussi [Kocherlakota and Kocherlakota, 1992] et [Wang, 1998]. La modélisation pour des lois composées multivariées a été considérée par [Cossette and Marceau, 2000], [Cossette et al., 2012] et [Wang, 1998].

On peut consulter [Joe, 1997] et [Nelsen, 2007] pour une introduction générale aux notions de la dépendance. Pour un traitement de la dépendance dans le contexte de l'actuariat et de la gestion quantitative des risques, on mentionne [Denuit et al., 2006] et [McNeil et al., 2015] ainsi que les références citées dans la bibliographie de ces ouvrages.

Pour les modèles avec mélanges communs, on suggère [Cossette et al., 2002a], [Joe, 1997], [McNeil et al., 2015], [Marshall and Olkin, 1988] et [Oakes, 1989]. Le modèle avec choc commun est étudié dans, p. ex., [Cossette and Marceau, 2000], [Lindskog and McNeil, 2003] et [Wang, 1998]. Des suggestions pour adapter les méthodes d'agrégation dans le cadre de modèles avec chocs communs et avec mélanges communs sont fournies dans [Cossette et al., 2002a] et [Genest and Nešlehová, 2007].

Des extensions des algorithmes récursifs, tels que l'algorithme de Panjer, pour des vecteurs de v.a. ont été tout d'abord proposées par [Hesselager, 1996]. Un ouvrage de référence sur le sujet est [Sundt and Vernic, 2009].

Pour des applications de la notion de la comonotonicité en actuariat, on renvoie le lecteur à, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Dhaene et al., 2002b], [Dhaene et al., 2002a] et [Kaas et al., 2008].

Code LaTeX : `chapitre_multi.tex`

Chapitre 14

Théorie des copules

14.1 Introduction

14.1.1 D'où vient le mot *copule* ?

Quelques citations de dictionnaires

Copule (logique) : Verbe d'un jugement en tant qu'il exprime une relation entre le sujet et le prédicat. L'assertion réside dans la copule ([Rey-Debove and Rey, 2015]).

Copule (linguistique) : Mot qui relie le sujet au prédicat. Le verbe "être" est une copule ([Rey-Debove and Rey, 2015]).

Copule (linguistique, un peu plus détaillé) : 1. Le verbe *être* est appelé *copule* quand, dans une phrase de base, il constitue avec un attribut (adjectif, syntagme nominal ou syntagme prépositionnel) le prédicat d'un syntagme nominal. La copule sert à énoncer les propriétés qui définissent le sujet dans des phrases prédicatives (ex : Pierre est heureux, Pierre sera un ingénieur, Pierre était à la maison). On distingue la copule *être* et l'auxiliaire *être* des phrases passives ou l'auxilaire être des verbes intransitifs. On étend parfois le terme de copule à des verbes comme *devenir*, *sembler*, *paraître*, *rester*. 2. La conjonction *et* est dite *copule* quand elle lie deux (ou plus de deux) phrases ou contiuant de phrases ([Dubois et al., 2012]).

Histoire du mot (en linguistique) : Nom féminin (1482) emprunté au latin classique *copula* "lien, union" spécialement "liaison de mots "et, en latin chrétien, "lien moral", "union dans le mariage", issu par composition d'un *co-apula* dérivé de *cum* "avec" de *apere* "attacher" ([Rey, 1994]).

Naissance du mot

Histoire de la naissance du mot *copule* en probabilité, statistique et mathématique par celui qui l'a "inventé" (ou "emprunté" plutôt) : "*Having worked out the basic properties of these functions, I wrote about them to Fréchet, in English. He asked me to write a note about them in French. While writing this, I decided I needed a name for these functions. Knowing the word "copula" as a grammatical term for a word or expression that links a subject and predicate, I felt that this would make an appropriate name for a function that links a multidimensional distribution to its one-dimensional margins, and used it as such. Fréchet received my note, corrected one mathematical statement, made some minor corrections to my French, and had the note published by the Statistical Institute of the University of Paris as Sklar (1959).*" (Sklar (1996)).

14.1.2 Copules et actuariat

Depuis le milieu des années 1990, la théorie des copules a connu un essor important.

D'un thème confidentiel de recherche qui intéressait un groupe restreint de chercheurs en mathématiques, en théorie des probabilités et en statistique, la théorie des copules est devenue aujourd'hui un thème important de recherche.

Désormais, elle intéresse les chercheurs en actuariat, en finance quantitative, en statistique, en économétrie, etc.

La théorie des copules est devenue un thème incontournable dans le contexte de la modélisation des risques en actuariat et en gestion quantitative des risques.

Elle permet d'analyser les relations de dépendance entre les v.a. et de construire une large variété de modèles multivariés incorporant des relations de dépendance spécifiques.

14.2 Structure du chapitre

— Définitions
— Théorème de Sklar
— Méthodes de simulation
— Exemples de copules

14.3 Copules

14.3.1 Définition pour d'une copule bivariée

La notion de copule a été introduite par [Sklar, 1959].

Une copule C est la fonction de répartition sur $[0,1]^2$ d'un vecteur de v.a. $\underline{U} = (U_1, U_2)$ dont toutes les composantes U_i $(i = 1, 2)$ obéissent à la loi uniforme $(0, 1)$.

Définition 14.1 *Une copule $C(u_1, u_2)$ est une application $[0,1]^2 \to [0,1]$ ayant les propriétés suivantes (celles d'une fonction de répartition conjointe en fait) :*

— *$C(u_1, u_2)$ est non décroissante sur $[0,1]^2$;*
— *$C(u_1, u_2)$ est continue à droite sur $[0,1]^2$;*
— $\lim\limits_{u_i \longrightarrow 0} C(u_1, u_2) = 0$ *pour* $i = 1, 2$ *;*
— $\lim\limits_{u_1 \longrightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_2$ *et* $\lim\limits_{u_2 \longrightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_1$ *;*
— ***Inégalité du rectangle*** *: pour tout $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$, on a*

$$C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2) \geq 0.$$

Selon cette propriété, C est une copule à la condition qu'elle place une masse positive sur tout rectangle $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ inclus dans $[0,1]^2$.

Notation 14.2 *Soit la copule C et soit le vecteur de v.a. $\underline{U} = (U_1, U_2)$, où $U_1 \sim U_2 \sim Unif(0,1)$ et*

$$F_{\underline{U}}(u_1, u_2) = C(u_1, u_2)$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$. Alors, on note $\underline{U} \sim C$.

Remarque 14.3 *Soit $\underline{U} \sim C$. Alors, l'inégalité du rectangle signifie*

$$\begin{aligned} C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2) &= \Pr(a_1 < U_1 \leq b_1, a_2 < U_2 \leq b_2) \\ &= \Pr(U_1 \in (a_1, b_1], U_2 \in (a_2, b_2]) \\ &= \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{2} \{U_i \in (a_i, b_i]\}\right) \\ &= \Pr(\underline{U} \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]), \end{aligned}$$

ce qui correspond à la probabilité que le couple $\underline{U} = (U_1, U_2)$ prenne des valeurs dans le rectangle $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$.

Remarque 14.4 *Inégalité du triangle et copule continue. Soit C une copule continue. L'inégalité du rectangle est satisfaite si*

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2) \geq 0,$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$.

14.3.2 Définition pour d'une copule multivariée

Une copule C est la fonction de répartition sur $[0,1]^n$ d'un vecteur de v.a. $\underline{U} = (U_1, ..., U_n)$ dont toutes les composantes U_i $(i = 1, ..., n)$ obéissent à la loi uniforme $(0,1)$.

Définition 14.5 *Une copule multivariée $C(u_1, ..., u_n)$ est une application $[0,1]^n \to [0,1]$ ayant les propriétés suivantes :*

- *$C(u_1, ..., u_n)$ est non décroissante sur $[0,1]^n$;*
- *$C(u_1, ..., u_n)$ est continue à droite sur $[0,1]^n$;*
- *au moins une composantes est égale à 0 : $\lim_{u_i \longrightarrow 0} C(u_1, ..., u_n) = 0$ pour $i = 1, ..., n$;*
- *toutes les composantes, sauf u_i, sont égales à 1 : $\lim_{u_j \longrightarrow 1, j \neq i} C(u_1, ..., u_n) = u_i$;*
- *inégalité de l'hyperrectangle : pour tout $a_1 \leq b_1$, ..., $a_n \leq b_n$, on a*

$$\sum_{i_1=1}^{2} ... \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1 + ... + i_n} C(u_{1,i_1}, ..., u_{n,i_n}) \geq 0,$$

avec $u_{j,1} = a_j$ et $u_{j,2} = b_j$ pour $j \in \{1, 2, ..., n\}$.
Selon cette propriété, C est une copule à la condition qu'elle place une masse positive sur tout hyperrectangle $(a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]$ inclus dans $[0,1]^n$.

Définition 14.6 *Hyperrectangle = généralisation à une dimension supérieure ($n > 2$) d'un rectangle de dimension deux*

Notation 14.7 *Soit la copule C et soit le vecteur de v.a. $\underline{U} = (U_1, U_2)$, où $U_1 \sim ... \sim U_n \sim Unif(0,1)$ et*

$$F_{\underline{U}}(u_1, ..., u_n) = C(u_1, ..., u_n),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, ..., n$. Alors, on note $\underline{U} \sim C$.

Remarque 14.8 *Soit $\underline{U} \sim C$. Alors, l'inégalité de l'hyperrectangle signifie*

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^{2} ... \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1 + ... + i_n} C(u_{1,i_1}, ..., u_{n,i_n}) &= \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{U_i \in (a_i, b_i]\}\right) \\ &= \Pr(\underline{U} \in (a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]) \geq 0, \end{aligned}$$

pour tout hyperrectangle $(a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n] \subseteq [0,1]^n$.

Si $n = 3$, on déduit

$$\begin{aligned} \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{3} \{U_i \in (a_i, b_i]\}\right) &= C(b_1, b_2, b_3) - C(a_1, b_2, b_3) - C(b_1, a_2, b_3) - C(b_1, b_2, a_3) \\ &\quad + C(a_1, a_2, b_3) + C(a_1, b_2, a_3) + C(b_1, a_2, a_3) \\ &\quad - C(a_1, a_2, a_3). \end{aligned}$$

Remarque 14.9 *Inégalité de l'hyperrectangle et copule continue. Soit C une copule continue. L'inégalité de l'hyperrectangle est satisfaite si*

$$\frac{\partial^n}{\partial u_1 ... \partial u_n} C(u_1, ..., u_n) \geq 0,$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, ..., n$.

14.4 Théorème de Sklar

14.4.1 Énoncé du théorème

Le résultat fondamental de la théorie des copules est le théorème de Sklar.

Théorème 14.10 ***Théorème de Sklar***

— *Soit $F \in \mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$ ayant des fonctions de répartition marginales F_1, ..., F_n.*

— *Volet #1. Alors, il existe une copule C telle que pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$*

$$F(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)).$$

Si F_1, ..., F_n sont continues, alors C est unique. Sinon, C est uniquement déterminée sur $RanF_1 \times ... \times RanF_n$.

— *Volet #2. Inversement, si C est une copule et F_1 ... F_n sont des fonctions de répartition, alors la fonction définie par*

$$F(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$$

est une fonction de répartition multivariée avec les fonctions de répartition marginales F_1 ... F_n.

14.4.2 Démonstration du théorème

On effectue la démontration dans le cas où les marginales F_1, ..., F_n sont continues. Pour une preuve détaillée du théorème, on peut voir, p. ex., [Joe, 1997], [Joe, 2015] ou [Nelsen, 2007],

— Volet #1. Soit un vecteur de v.a. continues $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ avec une fonction de répartition $F_{\underline{X}}$ dont les marginales continues sont F_1, ..., F_n. Alors, on a

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) \\ &= \Pr(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(X_n) \leq F_{X_n}(x_n)), \end{aligned}$$

pour $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$. Par le théorème de la transformation de probabilité (probability integral transform or probability transformation), on sait que

$$F_{X_i}(X_i) = U_i \sim Unif(0,1)$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. Alors,

$$\Pr(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(X_n) \leq F_{X_n}(x_n))$$

correspond à la fonction de répartition de

$$(F_{X_1}(X_1), .., F_{X_n}(X_n)) = (U_1, ..., U_n).$$

On introduit la fonction multivariée C tel que

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) &= \Pr(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(X_n) \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &= \Pr(U_1 \leq F_{X_1}(x_1), ..., U_n \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &= C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)) \end{aligned}$$

Selon la Définition 14.5, la fonction C est une copule.

— Volet #2. Soit $\underline{U} \sim C$. On définit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$, ù

$$X_i = F_i^{-1}(U_i)$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. Alors, l'expression de la fonction de répartition de $\underline{X}$ est donnée par

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) \\ &= \Pr\left(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, ..., F_n^{-1}(U_n) \leq x_n\right) \\ &= \Pr(U_1 \leq F_{X_1}(x_1), ..., U_n \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &= C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)). \end{aligned}$$

14.5 Conséquences pratiques du théorème de Sklar

Les conséquences pratiques du théorème de Sklar sont les suivantes :

1. extraire la copule associée à la fonction de répartition pour toute distribution continue multivariée ;
2. construire une distribution multivariée en reliant les marginales (continues ou discrètes) par le biais d'une copule.

14.5.1 Extraire une copule grâce au théorème de Sklar

Soit $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$, dont les marginales $F_1, ..., F_n$ sont continues.

Corollaire 14.11 *Soit $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$, dont les marginales $F_1, ..., F_n$ sont continues. Alors, la copule C associée à $F_{\underline{X}}$ est donnée par*

$$C(u_1, ..., u_n) = F_{\underline{X}}\left(F_1^{-1}(u_1), ..., F_n^{-1}(u_n)\right).$$

Preuve. D'après le démontration du volet#1 de théorème de Sklar, la copule C associée à $F_{\underline{X}}$ est donnée par

$$\begin{aligned} C(u_1, ..., u_n) &= \Pr(U_1 \leq u_1, ..., U_n \leq u_n) \\ &= \Pr(F_1(X_1) \leq u_1, ..., F_n(X_n) \leq u_n) \\ &= \Pr\left(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), ..., X_n \leq F_n^{-1}(u_n)\right) \\ &= F_{\underline{X}}\left(F_1^{-1}(u_1), ..., F_n^{-1}(u_n)\right). \end{aligned}$$

■

Exemple - Copule EFGM

Soit la fonction de répartition de la loi exponentielle bivariée EFGM est donnée par

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) \\ &\quad + \theta\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}, \end{aligned} \tag{14.1}$$

avec un paramètre de dépendance $-1 \leq \theta \leq 1$ et avec $\beta_i > 0$.

En remplaçant x_i par $-\frac{1}{\beta_i}\ln(1 - u_i)$ $(i = 1, 2)$ dans (14.1), on déduit

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2)$$

pour $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$.

14.5.2 Construire une distribution multivariée grâce au théorème de Sklar

En se basant sur la seconde partie du théorème de Sklar, une copule permet de combinée différentes lois marginales afin de créer une loi multivariée.

La copule $C(u_1, ..., u_n)$ décrit la relation de dépendance entre les v.a. X_1, ..., X_n alors que les marginales décrivent le comportement de chacune des v.a.

Dans le cas de v.a. continues, la copule contient toute l'information relative à la relation de dépendance entre les v.a.

On peut dès lors étudier les marginales et la copule séparément.

Le cas de marginales discrètes est traité à la section 14.20.

14.5.3 Avantages de l'approche via les copules

Les avantages sont les suivants :

— Identifier la structure de dépendance pour les vecteurs de v.a. continies ;

— Construire des lois multivariées à l'aide d'une variété de copules et de marginales continues, discrètes ou mixtes ;

— Faciliter l'estimation et la calibration de modèles multivariés.

14.6 Bornes de Fréchet

Soit C une copule définie sur $[0,1]^n$. Puisque C est une fonction de répartition, on a

$$W(u_1, ..., u_n) \leq C(u_1, ..., u_n) \leq M(u_1, ..., u_n),$$

où

$$W(u_1, u_2) = \max(u_1 + ... + u_n - (n-1); 0)$$

et

$$M(u_1, ..., u_n) = \min(u_1; ...; u_n)$$

correspondent aux borne inférieure et borne supérieure de Fréchet.

Pour tout $n = 2, 3, ...$,

$$C^+(u_1, ..., u_n) = M(u_1, ..., u_n)$$

correspond à la copule borne supérieure de Fréchet.

Pour tout $n = 2$,

$$C^-(u_1, u_2) = W(u_1, u_2)$$

correspond à la copule borne inérieure de Fréchet.

14.7 Copule et fonction de densité

Soit C une copule continue. La fonction de densité associée à la copule par

$$c(u_1, ..., u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 ... \partial u_n} C(u_1, ..., u_n).$$

Soit un vecteur de v.a. continues $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ dont la fonction de répartition est

$$F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)),$$

Alors, la fonction de densité est donnée par

$$\begin{aligned} f_{\underline{X}}(x_1,...,x_n) &= \frac{\partial^n}{\partial x_1...\partial x_n} F_{\underline{X}}(x_1,...,x_n) \\ &= c\left(F_{X_1}(x_1),...,F_{X_n}(x_n)\right) f_{X_1}(x_1)...f_{X_n}(x_n), \end{aligned}$$

où $f_{X_i}(x_i)$ est la fonction de densité de X_i c.-à-d. $f_{X_i}(x_i) = \frac{\mathrm{d}F_{X_i}(x_i)}{\mathrm{d}x_i}$ pour $i = 1,...,n$.

14.8 Simulation

Les copules sont très pratiques lorsque l'on veut recourir à la simulation.
Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ dont la fonction de répartition est

$$F_{\underline{X}}(x_1,...,x_n) = C\left(F_{X_1}(x_1),...,F_{X_n}(x_n)\right),$$

On veut produire une réalisation $\underline{X}^{(j)} = \left(X_1^{(j)},...,X_n^{(j)}\right)$ de $\underline{X}$.
Les marginales de $F_{\underline{X}}$ peuvent être continues ou discrètes.

Algorithme 14.12 *Simulation à partir d'une copule.*

1. *Simuler une réalisation* $\underline{U}^{(j)} = \left(U_1^{(j)},...,U_n^{(j)}\right)$ *de* $\underline{U} \sim C$.
2. *Simuler une réalisation* $\underline{X}^{(j)}$ *avec*

$$X_1^{(j)} = F_{X_1}^{-1}\left(U_1^{(j)}\right) \quad ... \quad X_n^{(j)} = F_{X_n}^{-1}\left(U_n^{(j)}\right).$$

14.9 Copules associées

Soit une copule C et $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$. À partir de C, il est possible de créer 3 copules pour les paires de v.a. suivantes :

$$(U_1, 1-U_2), (1-U_1, U_2), (1-U_1, 1-U_2).$$

La copule pour le couple $(U_1, 1-U_2)$ est

$$\begin{aligned} F_{U_1,1-U_2}(u_1,u_2) &= \Pr(U_1 \le u_1, 1-U_2 \le u_2) \\ &= \Pr(U_1 \le u_1, U_2 > 1-u_2) \\ &= u_1 - C(u_1, 1-u_2). \end{aligned}$$

La copule pour le couple $(1-U_1, U_2)$ est

$$\begin{aligned} F_{1-U_1,U_2}(u_1,u_2) &= \Pr(1-U_1 \le u_1, U_2 \le u_2) \\ &= \Pr(U_1 > 1-u_1, U_2 \le u_2) \\ &= u_2 - C(1-u_1, u_2). \end{aligned}$$

La copule pour le couple $(1-U_1, 1-U_2)$ est appelée copule de survie, notée $\widehat{C}(u_1,u_2)$, et elle donnée par

$$\begin{aligned} F_{1-U_1,1-U_2}(u_1,u_2) &= \Pr(1-U_1 \le u_1, 1-U_2 \le u_2) \\ &= \Pr(U_1 > 1-u_1, U_2 > 1-u_2) \\ &= 1-(1-u_1)-(1-u_2)+C(1-u_1,1-u_2) \\ &= C(1-u_1,1-u_2)+u_1+u_2-1. \end{aligned}$$

Les 3 copules associées C satisfont les propriétées suivantes :

$$C^{-}(u_1,u_2) \leq F_{U_1,1-U_2}(u_1,u_2) = u_1 - C(u_1,1-u_2) \leq C^{+}(u_1,u_2)$$

$$C^{-}(u_1,u_2) \leq F_{1-U_1,U_2}(u_1,u_2) = u_2 - C(1-u_1,u_2) \leq C^{+}(u_1,u_2)$$

$$C^{-}(u_1,u_2) \leq F_{1-U_1,1-U_2}(u_1,u_2) = \widehat{C}(u_1,u_2) = C(1-u_1,1-u_2) + u_1 + u_2 - 1 \leq C^{+}(u_1,u_2).$$

Soit un couple de (X_1,X_2) dont les marginales sont F_{X_1} et F_{X_2} :

— Soit $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ et $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$. Alors, on a

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_{U_1,1-U_2}(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)) = F_{X_1}(x_1) - C(F_{X_1}(x_1),1-F_{X_2}(x_2)).$$

— Soit $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ et $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$. Alors, on a

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_{1-U_1,U_2}(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)) = F_{X_2}(x_2) - C(1-F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)).$$

— Soit $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ et $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= F_{1-U_1,1-U_2}(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)) \\ &= \widehat{C}(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)) \\ &= C(1-F_{X_1}(x_1),1-F_{X_2}(x_2)) + F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1. \end{aligned}$$

14.10 Copule de survie et théorème de Sklar

Soit une copule C et $\underline{U} = (U_1,U_2) \sim C$. Soit un couple de (X_1,X_2) dont les marginales sont F_{X_1} et F_{X_2}. Alors, on a

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\ &= C(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)) + 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) \\ &= C\left(1-\overline{F}_{X_1}(x_1),1-\overline{F}_{X_2}(x_2)\right) + \overline{F}_{X_1}(x_1) + \overline{F}_{X_2}(x_2) - 1. \end{aligned}$$

Comme

$$\widehat{C}(u_1,u_2) = C(1-u_1,1-u_2) + u_1 + u_2 - 1,$$

on déduit

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \widehat{C}\left(\overline{F}_{X_1}(x_1),\overline{F}_{X_2}(x_2)\right).$$

Dès lors, il est possible d'adapter le théorème de Sklar dans le contexte des fonctions de survie.

Pour $n = 2,3,4,...$, on a

$$\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \widehat{C}\left(\overline{F}_{X_1}(x_1),...,\overline{F}_{X_n}(x_n)\right)$$

permettant d'extraire une copule $\widehat{C}$ à partir de la fonction de survie conjointe d'une loi continue multivariée avec

$$\widehat{C}(u_1,...,u_n) = \overline{F}_{X_1,...,X_n}\left(\overline{F}_{X_1}^{-1}(u_1),...,\overline{F}_{X_n}^{-1}(u_n)\right).$$

Puisque $\widehat{C}$ est une copule, on laissera tomber la décoration "$\widehat{\ }$". On utilisera cette méthode pour générer les copules appartenant à la classe Archimédienne de copules, qui comprend notamment les copules de Clayton, de Frank et Gumbel.

Il est aussi possible de construire une fonction de survie multivariée en combinant des fonctions marginales de survie à l'aide d'une copule.

14.10.1 Fonction de densité

La fonction de densité associée à $\widehat{C}(u_1, u_2)$ est

$$\widehat{c}(u_1, u_2) = c(1 - u_1, 1 - u_2),$$

où c est la fonction de densité associée à la copule C.

14.11 Propriété d'invariance

14.11.1 Importante propriété

Un des intérêts de l'utilisation des copules découle de la propriété d'invariance.

Propriétés 14.13 *Soit X_1 et X_2 des v.a. continues dont la structure de dépendance est définie avec la copule C. Soit ϕ_1 et ϕ_2 des fonctions continues monotones. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si ϕ_1 et ϕ_2 sont non décroissantes, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule C.*
2. *Si ϕ_1 est non décroissante et ϕ_2 est non croissante, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule $u_1 - C(u_1, 1 - u_2)$.*
3. *Si ϕ_1 est non croissante et ϕ_2 est non décroissante, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule $u_2 - C(1 - u_1, u_2)$.*
4. *Si ϕ_1 et ϕ_2 sont non croissantes, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule $\widehat{C}$.*

On souligne que la forme de la copule ne dépend pas de la forme de ϕ_1 et ϕ_2, ce qui est important pour l'estimation.

14.11.2 Exemple

On suppose que les rendements instantanés sur les titres 1 et 2 sont définis par les v.a. R_1 et R_2.

De plus, la copule associée au couple (R_1, R_2) est C.

La valeur au temps 1 du titre i par la v.a. $S_i(1) = S_i(0)\exp(R_i)$, où le scalaire $S_i(0)$ est la valeur du titre i au temps 0.

Alors, la copule associée au couple $(S_1(1), S_2(1))$ est aussi C.

14.12 Fonction de répartition conditionnelle

14.12.1 Définition

Soit la copule C pour laquelle les dérivées partielles par rapport à u_1 et u_2

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \text{ et } C_{1|2}(u_1|u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$$

existent. Ainsi, les expressions des fonctions de répartition conditionnelles de $X_2|X_1 = x_1$ et de $X_1|X_2 = x_2$ pour un couple de v.a. continues (X_1, X_2) sont données par

$$F_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = C_{2|1}(F_{X_2}(x_2)|F_{X_1}(x_1))$$

et

$$F_{X_1|X_2=x_2}(x_1) = C_{1|2}(F_{X_1}(x_1)|F_{X_2}(x_2)).$$

14.12.2 Simulation et fonction de répartition conditionnelle

Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par les marginales F_{X_1} et F_{X_2} ainsi que la copule C. On veut produire les m réalisations $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$, ..., $\left(X_1^{(m)}, X_2^{(m)}\right)$ de la paire (X_1, X_2). À cette fin, il suffit de produire m réalisations $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$, ..., $\left(U_1^{(m)}, U_2^{(m)}\right)$ du couple (U_1, U_2) dont la fonction de répartition est la copule C et de calculer $X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right)$ pour $i = 1, 2$ en appliquant la méthode inverse. Une approche générale pour produire la réalisation $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ de (U_1, U_2) est d'utiliser la fonction de répartition conditionnelle en appliquant la procédure décrite ci-dessous.

Algorithme 14.14 ***Procédure générale***

1. *On simule les réalisations $V_1^{(j)}$ et $V_2^{(j)}$ des v.a. indépendantes V_1 et V_2 où $V_i \sim U(0,1)$ pour $i = 1, 2$.*
2. *On calcule $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$ et $U_2^{(j)} = C_{2|1}^{-1}\left(V_2^{(j)} | U_1^{(j)}\right)$ où $C_{2|1}^{-1}(v|u_1)$ est la fonction inverse de $C_{2|1}(u_2|u_1)$, obtenue en trouvant la solution de $C_{2|1}(u_2|u_1) = v$.*
3. *On répète pour $j = 1, 2, ..., m$.*

Il y a aussi des méthodes spécifiques de simulation associées à certaines copules. Elles sont décrites à la section suivante.

14.13 Copule complète

Dans le cas où $n = 2$, on dit qu'une copule est *complète* si elle inclut la copule borne supérieure de Fréchet, la copule d'indépendance et la copule borne inférieure de Fréchet comme cas particuliers ou cas limites.

14.14 Familles de copules

Pour simplifier la présentation des copules, nous les avons regroupées selon certaines familles : archimédiennes et elliptiques. Autrement, nous avons regroupé de façon arbitraire ou selon la méthode de construction.

14.15 Copules de bases

Dans cette section, on présente brièvement les copules fréquemment utilisées, leurs principales caractéristiques et, dans certains cas, un algorithme de simulation spécifique pour la copule.

14.15.1 Copule d'indépendance

Définition

La copule indépendance est définie par

$$C^I(u_1, ..., u_n) = u_1 ... u_n,$$

pour $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, ..., n$.

Simulation

Algorithme 14.15 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1, ..., U_n)$

1. *On simule les réalisations $V_1^{(j)}$, ..., $V_n^{(j)}$ des v.a. indépendantes V_1, ..., V_n où $V_i \sim U(0,1)$ pour $i = 1, 2, ..., n$.*
2. *On calcule $U_i^{(j)} = V_i^{(j)}$, $i = 1, 2, ..., n$.*

Illustration 14.1 – Les graphiques (a), (b) et (c) reproduisent 1000 réalisations de (U_1, U_2) provenant de la copule indépendance, borne supérieure de Fréchet et borne inférieure de Fréchet.

Pour $n = 2$, les réalisations produites par la copule sont uniformément réparties sur la surface $[0,1] \times [0,1]$ (voir illustration 14.1).

14.15.2 Copule borne supérieure de Fréchet

La copule borne supérieure de Fréchet est représentée par

$$C^{+}(u_1, ..., u_n) = \min(u_1; ...; u_n),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, ..., n$.

Algorithme 14.16 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1, ..., U_n)$

1. *On simule la réalisation* $V^{(j)}$ *de la v.a.* V *où* $V \sim U(0,1)$.
2. *On calcule* $U_i^{(j)} = V^{(j)}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Pour $n = 2$, les réalisations se trouvent uniformément distribuées sur la diagonale $u_1 = u_2$ dans $[0,1] \times [0,1]$ (voir illustration 14.1).

14.15.3 Copule bivariée de la borne inférieure de Fréchet

La copule borne supérieure de Fréchet correspond à $C^{-}(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0)$.

Algorithme 14.17 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. *On simule une réalisation* $V^{(j)}$ *de la v.a.* $V \sim U(0,1)$.
2. *On calcule* $U_1^{(j)} = V^{(j)}$ *et* $U_2^{(j)} = 1 - V^{(j)}$.

Les réalisations se trouvent uniformément distribuées sur la diagonale $u_1 = 1 - u_2$ dans $[0,1] \times [0,1]$ (voir illustration 14.1).

14.15.4 Copule bivariée de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM)

La copule EFGM est déduite à partir de la loi exponentielle bivariée EFGM en utilisant la relation

$$C(u_1, u_2) = F_{X_1, X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right),$$

pour $u_1, u_2 \in [0,1]$.

La copule de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM) se présente comme une forme de pertubation de la copule indépendance

Illustration 14.2 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de EFGM et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2), \tag{14.2}$$

pour $\alpha \in [-1, 1]$.

Le cas particulier est $C_0(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$.

La fonction de densité est

$$c(u_1, u_2) = 1 + \alpha(1 - 2u_1)(1 - 2u_2).$$

L'algorithme suivant de simulation est basée sur la méthode de la fonction de répartition conditionnelle.

Algorithme 14.18 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. *On simule les réalisations* $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* V_1 *et* V_2 *où* $V_i \sim U(0,1)$ *pour* $i = 1, 2$.
2. *On pose* $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$.
3. *On définit* $W_1^{(j)} = \alpha\left(2U_1^{(j)} - 1\right) - 1$ *et*

$$W_2^{(j)} = \left(1 - \alpha\left(2U_1^{(j)} - 1\right)\right)^2 + 4\alpha V_2^{(j)}\left(2U_1^{(j)} - 1\right).$$

4. *On calcule* $U_2^{(j)} = \frac{2V_2^{(j)}}{\left(\sqrt{W_2^{(j)}} - W_1^{(j)}\right)}$.

Dans l'illustration 14.2, on présente un graphique avec des réalisations de la copule de EFGM et un graphique représentant sa fonction de densité.

La copule introduit une relation de dépendance modérée qui peut être positive ($\alpha > 0$) ou négative ($\alpha < 0$).

Pour $\alpha > 0$, on observe une concentration modérée des réalisations de la copule autour de la diagonale $u_1 = u_2$ ($u_1 = 1 - u_2$) de la surface $[0, 1] \times [0, 1]$.

14.16 Copules archimédiennes

14.16.1 Préliminaires

Les copules archimédiennes est une importante classe de copules.

Une copule C est dite archimédienne si elle s'écrit sous la forme

$$C(u_1, ..., u_n) = \psi\left(\psi^{-1}(u_1) + ... + \psi^{-1}(u_n)\right)$$

où la fonction ψ est appelée un générateur.

La fonction ψ doit satisfaire les propriétés suivantes :

— $\psi : [0, \infty) \to [0, 1]$ avec $\psi(0) = 1$ et $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$;

— ψ est une fonction continue ;

— ψ est une fonction strictement décroissante sur $[0, \infty)$;

— ψ^{-1} est la fonction inverse, c.-à-d.

$$\psi^{-1}(x) = \inf\{u, \psi(u) \leq x\}.$$

Quelle est la fonction ψ ? Quelles sont les fonctions qui satisfont ces propriétés ?

La fonction ψ va générer une copule archimédienne pour tout dimension n si et seulement ψ est complètement monotone c.-à-d.

$$(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k \psi(x)}{\mathrm{d}x^k} \geq 0.$$

Une fonction est complètement monotone si et seulement si elle est une transformée de Laplace Stieltjes d'une v.a. strictement positive.

On présente ci-dessous une méthode générale de construction de copules archimédiennes par le biais de transformées de Laplace-Stieltjes de v.a. strictement positives..

À partir de fonctions ψ dites $d-$monotones, on peut générer des copules archimédiennes qui vont exister pour des dimensions $n = 2, ...d$ seulement. Pour l'instant, on n'aborde pas les copules générées par le biais de telles fonctions.

14.16.2 Construction des copules archimédiennes - Étape #1

Une copule de la famille archimédienne peut être déduite de la fonction de survie multivariée d'une loi exponentielle-mélange multivariée.

Selon une loi exponentielle-mélange multivariée, les v.a. $Y_1, ..., Y_n$ obéissent à des lois exponentielles univariées dont les paramètres correspondent à une v.a. Θ mélange.

Soit une v.a. **strictement positive** Θ avec une fonction de répartition F_Θ et une transformée de Laplace-Stietljes $\mathcal{L}_\Theta$.

La v.a. Θ peut être discrète ou continue.

Soit un vecteur de v.a. $\underline{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ où

— $(Y_1|\Theta = \theta)$, ..., $(Y_n|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes ;

— $(Y_i|\Theta = \theta) \sim Exp(\theta)$, $i = 1, 2, ..., n$.

La fonction de survie de la v.a. Y_i est

$$\overline{F}_{Y_i}(x_i) = E\left[\mathrm{e}^{-\Theta x_i}\right] = \mathcal{L}_\Theta(x_i)$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.

La fonction de survie de $\underline{Y}$ est

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\underline{Y}}(x_1,...,x_n) &= \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{Y}|\Theta=\theta}(x_1,...,x_n)\,\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int_0^\infty \overline{F}_{Y_1|\Theta=\theta}(x_1)\times...\times\overline{F}_{Y_n|\Theta=\theta}(x_n)\,\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta x_1}\times...\times\mathrm{e}^{-\theta x_n}\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-\Theta x_1}\times...\times\mathrm{e}^{-\Theta x_n}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-\Theta(x_1+...+x_n)}\right] \\
&= \mathcal{L}_\Theta(x_1+...+x_n)
\end{aligned}$$

pour $i=1,2,...,n$.

14.16.3 Construction des copules archimédiennes - Étape #2

On applique la partie du théorème de Sklar.

Allons-y !

L'expression de la copule est

$$C(u_1,...,u_n)=\overline{F}_{\underline{Y}}\left(\overline{F}_{Y_1}^{-1}(u_1),...,\overline{F}_{Y_i}^{-1}(u_n)\right).$$

Bon, euh, on a

$$x_i=\overline{F}_{Y_1}^{-1}(u_1)=\mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_i)$$

pour $i=1,2,...,n$.

On remplace les arguments x_1, ..., x_n de

$$\overline{F}_{\underline{Y}}(x_1,...,x_n)=\mathcal{L}_\Theta(x_1+...+x_n)$$

par

$$x_i=\overline{F}_{Y_1}^{-1}(u_1)=\mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_i)$$

pour $i=1,2,...,n$.

Alors, l'expression de la copule est

$$C(u_1,...,u_n)=\mathcal{L}_\Theta\left(\mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_1)+...+\mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_n)\right)$$

pour $0\leq u_1,...,u_n\leq 1$.

La fonction ψ correspond à la transformée de Laplace-Stieltjes de Θ.

Exemple 14.19 *Soit* $\Theta\sim Gamma\left(\frac{1}{\alpha},1\right)$ *avec*

$$\mathcal{L}_\Theta(t)=\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'expression de $\mathcal{L}_\Theta^{-1}$ *est la solution de*

$$\mathcal{L}_\Theta(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=u.$$

On obtient

$$x=\mathcal{L}_\Theta^{-1}(u)=u^{-\alpha}-1$$

pour $u \in [0,1]$. *On conclut*

$$\begin{aligned} C(u_1,...,u_n) &= \left(\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\left(u_i^{-\alpha}-1\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\alpha}-(n-1)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

pour $0 \leq u_1,...,u_n \leq 1$. *Le résultat est appelée la copule de Clayton.* □

14.16.4 Simulation pour les copules archimédiennes

Rappel : On sait

$$C(u_1,...,u_n) = \overline{F}_{\underline{Y}}\left(\overline{F}_{Y_1}^{-1}(u_1),...,\overline{F}_{Y_i}^{-1}(u_n)\right).$$

Objectif : simuler des réalisations $\underline{U}^{(j)}$ de $\underline{U} = (U_1,...,U_n)$ où

$$F_{\underline{U}}(u_1,...,u_n) = C(u_1,...,u_n).$$

Méthode générale :

1. Simulation de $\underline{Y}^{(j)}$ de $\underline{Y} = (Y_1,...,Y_n)$.
2. Simulation de $\underline{U}^{(j)}$ de $\underline{U} = (U_1,...,U_n)$ avec

$$U_i^{(j)} = \overline{F}_{Y_i}\left(Y_i^{(j)}\right)$$

pour $i = 1,2,...,n$.

Méthode générale appliquée à une copule archimédienne :

1. Simulation de $\underline{Y}^{(j)}$ de $\underline{Y} = (Y_1,...,Y_n)$ (déduite de la construction de la distribution multivariée de $\underline{Y}$) :
   (a) Simulation de $\Theta^{(j)}$ de Θ.
   (b) Simulation de $\underline{V}^{(j)}$ de $\underline{V} = (V_1,...,V_n)$ qui est un vecteur de v.a. iid de loi $Unif(0,1)$.
   (c) Simulation de $Y_i^{(j)}$ avec

$$\left(Y_i|\Theta = \Theta^{(j)}\right) = F_{Y_i|\Theta=\Theta^{(j)}}^{-1}\left(V_i^{(j)}\right) = -\frac{1}{\Theta^{(j)}}\ln\left(1-V_i^{(j)}\right)$$

   pour $i = 1,2,...,n$.
2. Simulation de $\underline{U}^{(j)}$ de $\underline{U} = (U_1,...,U_n)$ avec

$$U_i^{(j)} = \overline{F}_{Y_i}\left(Y_i^{(j)}\right) = \mathcal{L}_{\Theta}\left(Y_i^{(j)}\right),$$

pour $i = 1,2,...,n$.

On applique l'algorithme pour la copule de Clayton.
Méthode générale appliquée à une copule archimédienne :

1. Simulation de $\underline{Y}^{(j)}$ de $\underline{Y} = (Y_1,...,Y_n)$ (déduite de la construction de la distribution multivariée de $\underline{Y}$) :
   (a) Simulation de $\Theta^{(j)}$ de $\Theta \sim Gamma\left(\frac{1}{\alpha},1\right)$.
   (b) Simulation de $\underline{V}^{(j)}$ de $\underline{V} = (V_1,...,V_n)$ qui est un vecteur de v.a. iid de loi $Unif(0,1)$.

(c) Simulation de $Y_i^{(j)}$ avec

$$\left(Y_i|\Theta=\Theta^{(j)}\right)=F^{-1}_{Y_i|\Theta=\Theta^{(j)}}\left(V_i^{(j)}\right)=-\frac{1}{\Theta^{(j)}}\ln\left(1-V_i^{(j)}\right)$$

pour $i=1,2,...,n$.

2. Simulation de $\underline{U}^{(j)}$ de $\underline{U}=(U_1,...,U_n)$ avec

$$U_i^{(j)}=\overline{F}_{Y_i}\left(Y_i^{(j)}\right)=\mathcal{L}_\Theta\left(Y_i^{(j)}\right)=\left(\frac{1}{1+Y_i^{(j)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

pour $i=1,2,...,n$.

14.16.5 Copule bivariée de Ali-Mikhail-Haq

L'expression de la copule de Ali-Mikhail-Haq est donnée par

$$\begin{aligned} C_\alpha(u_1,u_2) &= \frac{u_1u_2}{1-\alpha(1-u_1)(1-u_2)} \\ &= u_1u_2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha(1-u_1)(1-u_2)\right)^k, \end{aligned} \tag{14.3}$$

pour $\alpha\in[-1,1]$. Le cas particulier est $C_0(u_1,u_2)=C^\perp(u_1,u_2)$.

La fonction de densité est

$$c(u_1,u_2)=\frac{1-\alpha+2\alpha\frac{u_1u_2}{1-\alpha(1-u_1)(1-u_2)}}{\left(1-\alpha(1-u_1)(1-u_2)\right)^2}.$$

On fournit deux algorithmes de simulation pour la copule AMH.

Le premier algorithme est plus intéssant.

La méthode de simulation du premier algorithme est basée sur la méthode de simulation de la loi exponentielle-géométrique et l'application de la méthode d'inversion de création des copules (selon la première partie du théorème de Sklar).

La méthode de simulation du premier algorithme se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

— On simule une réalisation de la loi continue bivariée à laquelle est associée la copule.

— On applique la première partie du théorème de Sklar.

Algorithme 14.20 ***Simulation des réalisations de*** (U_1,U_2)

1. ***(Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle-géométrique bivariée).***

   (a) On simule la réalisation $\Theta^{(j)}$ de Θ qui obéit à une loi géométrique de type 2.

   (b) On simule les réalisations $\left(W_1^{(j)},W_2^{(j)}\right)$ de (W_1,W_2) avec

$$W_1^{(j)}=-\frac{1}{\Theta^{(j)}}\ln\left(1-V_1^{(j)}\right)$$

$$W_2^{(j)}=-\frac{1}{\Theta^{(j)}}\ln\left(1-V_2^{(j)}\right)$$

   où $V_1^{(j)}$ et $V_2^{(j)}$ sont des réalisations indépendantes de $V_1\sim Unif(0,1)$ et $V_2\sim Unif(0,1)$.

2. ***(Application de la première partie du théorème de Sklar).*** *On simule les réalisations $U_1^{(j)}$ et $U_2^{(j)}$ avec*

$$U_1^{(j)}=\overline{F}_{W_1}\left(W_1^{(j)}\right)=\frac{(1-\alpha)}{\left(e^{W_1^{(j)}}-\alpha\right)}$$

Illustration 14.3 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de AMH et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

$$U_2^{(j)} = \overline{F}_{W_2}\left(W_2^{(j)}\right) = \frac{(1-\alpha)}{\left(e^{W_2^{(j)}} - \alpha\right)}.$$

L'algorithme suivant de simulation est basée sur la méthode de la fonction de répartition conditionnelle.

Algorithme 14.21 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2).

1. *On simule les réalisations* $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* V_1 *et* V_2 *où* $V_i \sim U(0,1)$ *pour* $i = 1, 2$.
2. *On pose* $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$.
3. *On définit* $A = 1 - U_1^{(j)}$, $B = -\alpha\left(2AV_2^{(j)} + 1\right) + 2\alpha^2 A^2 \times V_2^{(j)} + 1$ *et*

$$C = 1 + \alpha^2\left(4A^2V_2^{(j)} - 4AV_2^{(j)} + 1\right) + \alpha\left(4AV_2^{(j)} - 4V_2^{(j)} + 2\right).$$

4. *On calcule* $U_2^{(j)} = \frac{2\times V_2^{(j)}(A\alpha-1)^2}{\left(B+\sqrt{C}\right)}$.

On présente un graphique avec des réalisations de la copule de EFGM et un graphique représentant sa fonction de densité sont reproduits dans l'illustration 14.3.

La copule permet d'introduire une relation de dépendance modérée qui peut être positive ou négative.

Pour $\alpha > 0$, on observe une concentration modérée des réalisations de la copule autour de la diagonale $u_1 = u_2$ ($u_1 = 1 - u_2$) de la surface $[0,1] \times [0,1]$.

14.16.6 Copule bivariée de Clayton

La copule de Clayton est représentée par

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$ et $\alpha > 0$.

Les cas limites sont

$$\lim_{\alpha\to 0} C_\alpha(u_1, u_2) = C^{\perp}(u_1, u_2)$$

et

$$\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha(u_1, u_2) = C^{+}(u_1, u_2).$$

L'expression de la fonction de densité est

$$c(u_1, u_2) = \frac{1+\alpha}{(u_1 u_2)^{\alpha+1}} \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}}.$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{1}{u_1^{\alpha+1}} \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}}.$$

La première approche de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

— On simule une réalisation de la loi continue bivariée à laquelle est associée la copule.

— On applique la première partie du théorème de Sklar.

Algorithme 14.22 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. ***(Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle-gamma bivariée).***
   (a) *On simule la réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de la v.a.* $\Theta \sim Ga\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$.
   (b) *On simule les réalisations* $\left(W_1^{(j)}, W_2^{(j)}\right)$ *de* (W_1, W_2) *où* $\left(W_i|\Theta = \Theta^{(j)}\right) \sim Exp\left(\Theta^{(j)}\right)$, *pour* $i = 1, 2$, *c.-à-d.*

$$W_1^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln\left(1 - V_1^{(j)}\right)$$

$$W_2^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln\left(1 - V_2^{(j)}\right)$$

   où $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *sont des réalisations indépendantes de* $V_1 \sim Unif(0,1)$ *et* $V_2 \sim Unif(0,1)$.

2. ***(Application de la première partie du théorème de Sklar).*** *On simule les réalisations* $U_1^{(j)}$ *et* $U_2^{(j)}$ *avec*

$$U_1^{(j)} = \overline{F}_{W_1}\left(W_1^{(j)}\right) = \left(1 + W_1^{(j)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$U_2^{(j)} = \overline{F}_{W_2}\left(W_2^{(j)}\right) = \left(1 + W_2^{(j)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Les illustrations 14.4 et 14.5 reproduisent des graphiques des réalisations de la copule de Clayton et des graphiques de sa fonction de densité.

Telle que définie ci-dessus, la copule induit uniquement une relation de dépendance positive entre les composantes de $\underline{U}$.

La copule introduit une relation de dépendance forte aux valeurs extrêmes de la queue à gauche et faible aux valeurs extrêmes de la queue à droite.

Il est aussi possible d'utiliser l'algorithme basée sur la copule conditionnelle

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{1}{u_1^{\alpha+1}} \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}}.$$

En effet, pour $v \in]0, 1[$, on identifie l'expression de u_2 qui satisfait

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{1}{u_1^{\alpha+1}} \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}} = v.$$

On a

$$\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{(1+\alpha)}{\alpha}} = v \times u_1^{\alpha+1}$$

qui devient

$$\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right) = \left(v \times u_1^{\alpha+1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Illustration 14.4 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Clayton et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

Illustration 14.5 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Clayton et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.6).

On obtient

$$u_2 = \left(\left(v \times u_1^{\alpha+1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} - u_1^{-\alpha} + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Algorithme 14.23 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2).

1. *On simule les réalisations* $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* V_1 *et* V_2 *où* $V_i \sim U(0,1)$ *pour* $i = 1, 2$.
2. *On pose* $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$.
3. *On calcule*

$$U_2^{(j)} = \left(\left(V_2^{(j)} \times \left(U_1^{(j)}\right)^{\alpha+1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} - \left(U_1^{(j)}\right)^{-\alpha} + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

La version multivariée de la copule de Clayton est représentée par

$$C_\alpha(u_1, ..., u_n) = \left(u_1^{-\alpha} + ... + u_n^{-\alpha} - (n-1)\right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, ..., n$ et $\alpha > 0$.

Algorithme 14.24 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1, ..., U_n)$

1. ***(Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle-gamma bivariée).***
   (a) *On simule la réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de la v.a.* $\Theta \sim Ga\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$.
   (b) *On simule les réalisations* $\left(W_1^{(j)}, ..., W_n^{(j)}\right)$ *de* $(W_1, ..., W_n)$ *où* $\left(W_i | \Theta = \Theta^{(j)}\right) \sim Exp\left(\Theta^{(j)}\right)$, *c.-à-d.*

$$W_i^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln\left(1 - V_1^{(j)}\right)$$

   pour $i = 1, ..., n$, *où* $V_1^{(j)}$ ... $V_n^{(j)}$ *sont des réalisations indépendantes de* $V_1 \sim Unif(0,1)$ ... $V_n \sim Unif(0,1)$.

2. ***(Application de la première partie du théorème de Sklar).*** *On simule les réalisations* $U_1^{(j)}$ ... $U_n^{(j)}$ *avec*

$$U_1^{(j)} = \overline{F}_{W_1}\left(W_1^{(j)}\right) = \left(1 + W_1^{(j)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad ... \quad U_n^{(j)} = \overline{F}_{W_n}\left(W_n^{(j)}\right) = \left(1 + W_n^{(j)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

14.16.7 Copule bivariée de Frank

Définition

L'expression de la copule de Frank est

$$C_\alpha(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\alpha u_1} - 1\right)\left(e^{-\alpha u_2} - 1\right)}{\left(e^{-\alpha} - 1\right)}\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$ et $\alpha \neq 0$.

Les cas limites sont $\lim_{\alpha \to -\infty} C_\alpha(u_1, u_2) = C^-(u_1, u_2)$, $\lim_{\alpha \to 0} C_\alpha(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$ et $\lim_{\alpha \to \infty} C_\alpha(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$.

La fonction de densité est

$$c(u_1, u_2) = \frac{\alpha e^{-\alpha(u_1+u_2)}\left(1 - e^{-\alpha}\right)}{\left(e^{-\alpha(u_1+u_2)} - e^{-\alpha u_1} - e^{-\alpha u_2} + e^{-\alpha}\right)^2}.$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{e^{-\alpha u_1}\left(e^{-\alpha u_2} - 1\right)}{\left(e^{-\alpha} - 1\right) + \left(e^{-\alpha u_1} - 1\right)\left(e^{-\alpha u_2} - 1\right)}.$$

La copule de Frank est complète.

Illustration 14.6 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Frank et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

Simulation

La méthode de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

— On simule une réalisation de la loi continue bivariée à laquelle est associée la copule.

— On applique la première partie du théorème de Sklar.

Algorithme 14.25 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2) *($\alpha > 0$)*

1. ***(Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle-logarithmique bivariée).***

   (a) On simule la réalisation $\Theta^{(j)}$ *de la v.a.* Θ *de loi logarithmique avec paramètre* $\gamma = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha}$.

   (b) On simule les réalisations $\left(W_1^{(j)}, W_2^{(j)}\right)$ *de* (W_1, W_2) *où* $\left(W_i | \Theta = \Theta^{(j)}\right) \sim Exp\left(\Theta^{(j)}\right)$, *pour* $i = 1, 2$, *c.-à-d.*

$$W_1^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln\left(1 - V_1^{(j)}\right)$$

$$W_2^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln\left(1 - V_2^{(j)}\right)$$

   où $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *sont des réalisations indépendantes de* $V_1 \sim Unif\,(0,1)$ *et* $V_2 \sim Unif\,(0,1)$.

2. ***(Application de la première partie du théorème de Sklar).*** *On simule les réalisations* $U_1^{(j)}$ *et* $U_2^{(j)}$ *avec*

$$U_1^{(j)} = \overline{F}_{W_1}\left(W_1^{(j)}\right) = \frac{\ln(1 - \gamma \mathrm{e}^{-W_1^{(j)}})}{\ln(1-\gamma)}$$

$$U_2^{(j)} = \overline{F}_{W_2}\left(W_2^{(j)}\right) = \frac{\ln(1 - \gamma \mathrm{e}^{-W_2^{(j)}})}{\ln(1-\gamma)}$$

Un aperçu des réalisations de la copule de Frank et de sa fonction de densité est fourni dans les illustrations 14.6 et 14.7.

Lorsque $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$), la copule introduit une relation de dépendance positive (négative) entre les composantes de $\underline{U}$.

Les réalisations se concentrent autour de la diagonale $u_1 = u_2$ ($u_1 = 1 - u_2$) sur la surface $[0,1] \times [0,1]$.

La dépendance est modérée aux valeurs extrêmes de la queue à gauche et de la queue à droite.

Illustration 14.7 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Frank et de sa fonction de densité (tau de Kendall = -0.6).

Simulation – approche via la copule conditionnelle

Il est aussi possible d'utiliser l'algorithme basée sur la copule conditionnelle dont l'expression est

$$C_{2|1}\left(u_2|u_1\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha u_1}\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)}.$$

En effet, pour $v \in]0,1[$, on identifie l'expression de u_2 qui satisfait

$$C_{2|1}\left(u_2|u_1\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha u_1}\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)} = v.$$

On a

$$\mathrm{e}^{-\alpha u_1}\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right) = v \times \left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right) + v \times \left(\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)$$

qui devient

$$\mathrm{e}^{-\alpha u_1}\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right) - v \times \left(\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right) = v \times \left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right)$$

et

$$\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right) = \frac{v \times \left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right)}{\mathrm{e}^{-\alpha u_1}\left(1-v\right)+v}.$$

On obtient

$$u_2 = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{v \times \left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right)}{\mathrm{e}^{-\alpha u_1}\left(1-v\right)+v}\right).$$

Algorithme 14.26 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2).

1. *On simule les réalisations* $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* V_1 *et* V_2 *où* $V_i \sim U\left(0,1\right)$ *pour* $i = 1, 2$.
2. *On pose* $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$.
3. *On calcule*

$$U_2^{(j)} = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{V_2^{(j)} \times \left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right)}{\mathrm{e}^{-\alpha U_1^{(j)}}\left(1-V_2^{(j)}\right)+V_2^{(j)}}\right).$$

Version multivariée

On définit par la copule de Frank par

$$C_\alpha(u_1,...,u_n) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{-\alpha u_i}-1)}{(\mathrm{e}^{-\alpha}-1)^{n-1}}\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2,...,n$ et $\alpha > 0$.

Algorithme 14.27 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1,...,U_n)$

1. *On simule les réalisations* $Z_1^{(j)}$, ..., $Z_n^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* Z_1, ..., Z_n *où* $Z_i \sim Exp(1)$ *pour* $i = 1,2,...,n$.
2. *On simule la réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de la v.a.* Θ *de loi logarithmique avec paramètre* $\gamma = 1-\mathrm{e}^{-\alpha}$.
3. *On calcule* $U_i^{(j)} = \frac{\ln(1-\gamma \mathrm{e}^{-\frac{Z_i^{(j)}}{\Theta^{(j)}}})}{\ln(1-\gamma)}$, $i = 1,...,n$.

14.16.8 Copule bivariée de Gumbel

Définition

On définit la copule de Gumbel par

$$C_\alpha(u_1,u_2) = \exp\left(-\left\{(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right\}^{(1/\alpha)}\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2$ et $\alpha \geq 1$.

Les cas limites sont

— $\lim_{\alpha\to 1} C_\alpha(u_1,u_2) = C^\perp(u_1,u_2)$

— et $\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha(u_1,u_2) = C^+(u_1,u_2)$.

La fonction de densité est

$$\begin{aligned} & c(u_1,u_2) \\ = \; & C_\alpha(u_1,u_2) \times \frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}(-\ln u_2)^{\alpha-1}}{u_1 u_2} \\ & \times \left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-2}\left(\alpha - 1 + \left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = C_\alpha(u_1,u_2)\frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}}{u_1}\left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

Simulation

La méthode de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

— On simule une réalisation de la loi continue bivariée à laquelle est associée la copule.

— On applique la première partie du théorème de Sklar.

Algorithme 14.28 ***Simulation des réalisations de*** (U_1,U_2)

1. ***(Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle-stable bivariée, aussi appelée loi Weibull bivariée).***

(a) *On simule la réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de la v.a.* Θ *de loi Stable* $(\varphi, 1, \gamma, 0)$ *où* $\varphi = \frac{1}{\alpha}$ *et* $\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)^{\alpha}$ $(\alpha > 1)$.

(b) *On simule les réalisations* $\left(W_1^{(j)}, W_2^{(j)}\right)$ *de* (W_1, W_2) *où* $\left(W_i | \Theta = \Theta^{(j)}\right) \sim Exp\left(\Theta^{(j)}\right)$, *pour* $i = 1, 2$, *c.-à-d.*

$$W_1^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln\left(1 - V_1^{(j)}\right)$$

$$W_2^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln\left(1 - V_2^{(j)}\right)$$

où $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *sont des réalisations indépendantes de* $V_1 \sim Unif\,(0,1)$ *et* $V_2 \sim Unif\,(0,1)$.

2. ***(Application de la première partie du théorème de Sklar).*** *On simule les réalisations* $U_1^{(j)}$ *et* $U_2^{(j)}$ *avec*

$$U_1^{(j)} = \overline{F}_{W_1}\left(W_1^{(j)}\right) = \exp\left(-\left(W_1^{(j)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

$$U_2^{(j)} = \overline{F}_{W_2}\left(W_2^{(j)}\right) = \exp\left(-\left(W_2^{(j)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

Comme il est expliqué dans [Nolan, 2003], il existe plusieurs paramétrisation de la loi stable.
Dans le présent contexte, la loi *Stable* $(\varphi, 1, \gamma, 0)$, avec les paramètres indiqués, est définie sur $\mathbb{R}^+$.
La transformée de Laplace associée à la loi *Stable* $(\varphi, 1, \gamma, 0)$ est $\mathrm{e}^{-t^{\varphi}}$.

Algorithme 14.29 ***Simulation d'une réalisation*** $W^{(j)}$ ***d'une v.a.*** W ***obéissant à une loi*** *Stable* $(\varphi, 1, \gamma, 0)$ ***avec*** $\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\varphi}}$

1. *On simule une réalisation* $R^{(j)}$ *de la v.a.* $R \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. *On simule une réalisation* $V^{(j)}$ *de la v.a.* $V \sim Exp\,(1)$.
3. *On calcule*

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin\left(\varphi\left(R^{(j)} + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\left(\cos\left(R^{(j)}\right)\right)^{\frac{1}{\varphi}}} \\ B &= \left(\frac{\cos\left(\varphi\frac{\pi}{2} + (\varphi - 1)\,R^{(j)}\right)}{V^{(j)}}\right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}}. \end{aligned}$$

4. *On calcule* $W^{(j)} = A \times B$.

On peut exprimer $W = \gamma Y$ *où* Y *obéit à une loi stable standard Stable* $(\varphi, 1, 1, 0)$ *et* $\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\varphi}}$.
Le présent algorithme est une adaptation d'un algorithme fourni dans [Nolan, 2003] permettant de simuler une réalisation de Y.

Des réalisations de la copule de Gumbel et sa fonction de densité sont représentées dans les illustrations 14.8 et 14.9.
La copule introduit uniquement une relation de dépendance positive entre les composantes de $\underline{U}$.
La copule introduit une relation de dépendance plus forte entre les valeurs extrêmes de la queue à droite et plus faible entre les valeurs extrêmes de la queue à gauche.
La copule est aussi appelée "Gumbel-Hougard".

Simulation – approche via la copule conditionnelle

On peut aussi voir recours à lapproche basée pour sur la copule conditionnelle pour simuler des réalisations de (U_1, U_2).

Illustration 14.8 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Gumbel et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

Illustration 14.9 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Gumbel et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.6).

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}\left(u_2|u_1\right) = C_\alpha(u_1,u_2)\frac{\left(-\ln u_1\right)^{\alpha-1}}{u_1}\left(\left(-\ln u_1\right)^\alpha + \left(-\ln u_2\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

En effet, pour $v \in]0,1[$, on identifie l'expression de u_2 qui satisfait

$$C_{2|1}\left(u_2|u_1\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha u_1}\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)} = v.$$

Contrairement aux copules de Clayton et de Frank, l'inversion doit être réalisée par optimisation numérique.

Version multivariée

La copule de Gumbel est définie par

$$C_\alpha\left(u_1,...,u_n\right) = \exp\left(-\left\{\sum_{i=1}^n\left(-\ln u_i\right)^\alpha\right\}^{(1/\alpha)}\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2,...,n$ et $\alpha \geq 1$.

Algorithme 14.30 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1,...,U_n)$

1. *On simule les réalisations* $Z_1^{(j)}$, ..., $Z_n^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* Z_1, ..., Z_n *où* $Z_i \sim Exp\,(1)$ *pour* $i = 1,2,...,n$.
2. *On simule la réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de la v.a.* Θ *de loi Stable* $(\varphi,1,\gamma,0)$ *où* $\varphi = \frac{1}{\alpha}$ *et* $\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)^\alpha$ *(*$\alpha > 1$*).*
3. *On calcule* $U_i^{(j)} = \exp\left(-\left(\frac{Z_i^{(j)}}{\Theta^{(j)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, $i = 1,...,n$.

14.17 Copules elliptiques

La famille des copules elliptiques comprend notamment la copule normale et la copule de Student. Elles sont couramment utilisées en finance. Elles se caractérisent par des graphiques en points de forme elliptique. L'étude des propriétés de cette famille n'est pas abordée dans cet ouvrage.

14.17.1 Copule normale bivariée

Définition

La copule normale est définie par

$$C_\alpha^N\left(u_1,u_2\right) = \overline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}\left(u_1\right),\Phi^{-1}\left(u_2\right)\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2$, et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in [-1,1]$.

Contrairement aux copules présentées précédemment, la copule normale n'a pas de forme analytique.

Les cas particuliers sont

— $C_0\left(u_1,u_2\right) = C^\perp\left(u_1,u_2\right)$
— $C_1\left(u_1,u_2\right) = C^+\left(u_1,u_2\right)$
— $C_{-1}\left(u_1,u_2\right) = C^-\left(u_1,u_2\right)$.

Illustration 14.10 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule normale (gaussienne) et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

L'expression de la fonction de densité $c(u_1, u_2)$ est

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(u_1)^2 - 2\alpha\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2) + \Phi^{-1}(u_2)^2\right)}{2(1-\alpha^2)}} \mathrm{e}^{\frac{\left(\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2\right)}{2}}.$$

On a

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \alpha\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right).$$

Lorsque $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$), la copule introduit une relation de dépendance positive (négative) entre les composantes de $\underline{U}$.

La copule normale est complète.

Simulation

La méthode de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

— On simule une réalisation de la loi continue bivariée à laquelle est associée la copule.

— On applique la première partie du théorème de Sklar.

Algorithme 14.31 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. ***(Simulation d'une réalisation de la loi normale standard bivarieé).*** *On simule une réalisation* $\left(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}\right)$ *de la paire de v.a.* (Z_1, Z_2) *où* (Z_1, Z_2) *obéit à une loi normale bivariée standard avec un coefficient de corrélation* α.

2. ***(Application de la première partie du théorème de Sklar).*** *On calcule* $U_i^{(j)} = \Phi\left(Z_i^{(j)}\right)$, $i = 1, 2$.

Dans les illustrations 14.10 et 14.11, on présente des graphiques avec des réalisations de la copule normale et avec sa fonction de densité.

Les réalisations de la copule normale prennent la forme d'une ellipse.

Pour $\alpha > 0$, cette ellipse se concentre (faiblement, modérément ou fortement selon la valeur du paramètre α) autour de la diagonale entre le point inférieur gauche et le point supérieur droit de la surface $[0, 1] \times [0, 1]$.

Pour $\alpha < 0$, l'ellipse de points se concentre (faiblement, modérément ou fortement selon la valeur du paramètre α) autour de la diagonale entre le point supérieur gauche et le point inférieur droit de la surface $[0, 1] \times [0, 1]$.

Illustration 14.11 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule normale (gaussienne) et de sa fonction de densité (tau de Kendall = -0.6).

Version multivariée

On définit la copule normale par

$$C_{\underline{\alpha}}(u_1, ..., u_n) = \underline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}(u_1), ..., \Phi^{-1}(u_n)\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, ..., n$ et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & 1 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

où $\alpha_{ij} \in [0,1]$, $i < j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Algorithme 14.32 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1, ..., U_n)$

1. *On simule une réalisation* $\left(Z_1^{(j)}, ..., Z_n^{(j)}\right)$ *du vecteur de v.a.* $(Z_1, ..., Z_n)$ *où* $(Z_1, ..., Z_n)$ *obéit à une loi normale multivariée standard avec une matrice de coefficients de corrélation* $\underline{\alpha}$.
2. *On calcule* $U_i^{(j)} = \Phi\left(Z_i^{(j)}\right)$, $i = 1, ..., n$.

14.17.2 Copule de Student bivariée

Définition

L'expression de la copule de Student est

$$C_{\nu,\alpha}^S(u_1, u_2) = t_{\nu,\underline{\alpha}}\left(t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2)\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$, et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in [-1, 1]$.

Les cas limites sont

— $\lim\limits_{\alpha \to 0} C_{\nu,\alpha}^S(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$ et

— $\lim_{\alpha\to\infty} C^S_{\nu,\alpha} = C^+(u_1, u_2)$.

La fonction de densité est

$$\begin{aligned} & c(u_1, u_2) \\ = \; & \alpha^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\Gamma(\frac{\nu}{2})\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right)^2} \left(1 + \frac{t_\nu^{-1}(u_1)^2 - 2\alpha t_\nu^{-1}(u_1)t_\nu^{-1}(u_2) + t_\nu^{-1}(u_2)^2}{\nu(1-\alpha^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \\ & \times \left(1 + \frac{t_\nu^{-1}(u_1)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \left(1 + \frac{t_\nu^{-1}(u_2)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}. \end{aligned}$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = t_{\nu+1}\left(\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu + \left(t_\nu^{-1}(u_1)\right)^2}} \frac{t_\nu^{-1}(u_2) - \alpha t_\nu^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right).$$

La copule de Student tend vers la copule normale quand $\nu \to \infty$.
Comme la copule normale, la copule de Student n'a pas de forme explicite.
La copule de Student est complète.

Simulation

La méthode de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

— On simule une réalisation de la loi continue bivariée à laquelle est associée la copule.

— On applique la première partie du théorème de Sklar.

Algorithme 14.33 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. ***(Simulation d'une réalisation de la loi Student standard bivarieé).*** *On simule une réalisation* $\left(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}\right)$ *de la paire de v.a.* (Z_1, Z_2) *où* (Z_1, Z_2) *obéit à une loi de Student bivariée standard avec un coefficient de corrélation* α *et un degré de liberté* ν.
2. ***(Application de la première partie du théorème de Sklar).*** *On calcule* $U_i^{(j)} = t_\nu\left(Z_i^{(j)}\right)$, $i = 1, 2$ *où* t_ν *est la fonction de répartition d'une loi de Student.*

Dans les illustrations 14.12 et 14.13, on présente des graphiques avec des réalisations de la copule Student et avec sa fonction de densité.

Version multivariée

La copule de Student est définie par

$$C_{\nu,\underline{\alpha}}(u_1, ..., u_n) = t_{\nu,\underline{\alpha}}\left(t_\nu^{-1}(u_1), ..., t_\nu^{-1}(u_n)\right),$$

pour $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, ..., n$ et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & 1 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha_{ij} \in [0, 1]$, $i < j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Algorithme 14.34 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1, ..., U_n)$

Illustration 14.12 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule Student et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

Illustration 14.13 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule Student et de sa fonction de densité (tau de Kendall = -0.6).

1. *On simule une réalisation* $\left(Z_1^{(j)}, ..., Z_n^{(j)}\right)$ *du vecteur de v.a.* $(Z_1, ..., Z_n)$ *où* $(Z_1, ..., Z_n)$ *obéit à une loi de Student multivariée standard avec une matrice de coefficients de corrélation* $\underline{\alpha}$.
2. *On calcule* $U_i^{(j)} = t_\nu\left(Z_i^{(j)}\right),\ i = 1, ..., n.$

Si $\underline{\alpha}$ est égale à la matrice identité, cela n'implique pas l'indépendance comme c'est le cas pour la copule normale.

14.18 Copules avec singularité

Dans cette section, on présente brièvement des copules ayant une composante singulière.

14.18.1 Copule bivariée de Fréchet

Définition

La copule de Fréchet est une combinaison convexe des copules borne inférieure de Fréchet, indépendance et borne supérieure de Fréchet avec

$$C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \alpha C^+(u_1, u_2) + \beta C^-(u_1, u_2) + (1 - \alpha - \beta) C^\perp(u_1, u_2),$$

pour $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha + \beta \leq 1$.

Les cas particuliers sont

— $C_{0,0}(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$,
— $C_{1,0}(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$
— $C_{0,1}(u_1, u_2) = C^-(u_1, u_2)$.

La copule de Fréchet est complète.

Simulation

Algorithme 14.35 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. *On simule une réalisation* $\left(V_1^{\perp(j)}, V_2^{\perp(j)}\right)$ *de la copule indépendance.*
2. *On simule une réalisation* $\left(V_1^{+(j)}, V_2^{+(j)}\right)$ *de la copule borne supérieure de Fréchet.*
3. *On simule une réalisation* $\left(V_1^{-(j)}, V_2^{-(j)}\right)$ *de la copule borne supérieure de Fréchet.*
4. *On simule une réalisation* $J^{(j)}$ *de la v.a. discrète* J *où* $f_J(0) = \alpha$, $f_J(1) = \beta$ *et* $f_J(2) = 1 - \alpha - \beta$.
5. *On calcule* $U_i^{(j)} = 1_{\{J=0\}} \times V_i^{+(j)} + 1_{\{J=1\}} \times V_i^{-(j)} + 1_{\{J=2\}} \times V_i^{\perp(j)}$, *pour* $i = 1, 2$.

La copule de Fréchet comprend une portion continue avec des réalisations qui se trouvent distribuées uniformément sur la surface $[0, 1] \times [0, 1]$ et deux portions singulières avec réalisations distribuées uniformément sur les diagonales $u_1 = u_2$ et $u_1 = 1 - u_2$ dans $[0, 1] \times [0, 1]$.

En posant $\beta = 0$, on obtient la copule de Spearman dont l'expression est

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \alpha C^+(u_1, u_2) + (1 - \alpha) C^\perp(u_1, u_2),$$

pour $\alpha \in [0, 1]$.

La copule de Spearman introduit une relation de dépendance positive entre les composantes de $\underline{U}$.

Cette copule comprend une portion continue avec des réalisations qui se trouvent distribuées uniformément sur la surface $[0, 1] \times [0, 1]$ et une portion singulière avec réalisations distribuées uniformément sur la diagonale $u_1 = u_2$ dans $[0, 1] \times [0, 1]$.

14.18.2 Copule bivariée de Cuadras-Augé

Définition

La copule de Cuadras-Augé se présente sous la forme d'une moyenne géométrique des copules indépendance et borne supérieure de Fréchet

$$\begin{aligned} C_\alpha(u_1,u_2) &= C^+(u_1,u_2)^\alpha C^\perp(u_1,u_2)^{1-\alpha} \\ &= \begin{cases} u_1 u_2^{1-\alpha}, \text{ si } u_1 \le u_2 \\ u_1^{1-\alpha} u_2, \text{ si } u_1 \ge u_2 \end{cases}, \end{aligned}$$

pour $\alpha \in [0,1]$.

Les cas particuliers sont

— $C_0(u_1,u_2) = C^\perp(u_1,u_2)$

— $C_1(u_1,u_2) = C^+(u_1,u_2)$.

Simulation

Algorithme 14.36 ***Simulation des réalisations de*** (U_1,U_2) ***pour*** $\alpha \in (0,1)$

1. ***(Simulation de la loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin (voir copule Marshal-Olkin))***.
   (a) *On simule les réalisations* $Y_0^{(j)}$, $Y_1^{(j)}$ *et* $Y_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* $Y_0 \sim Exp(\alpha)$ *et* $Y_1 \sim Y_2 \sim Exp(1-\alpha)$.
   (b) *On calcule la réalisation* $W_i^{(j)} = \min\left(Y_i^{(j)}; Y_0^{(j)}\right)$ *de la v.a.* W_i *pour* $i = 1,2$. *Note : on a*
   $$W_1 \sim W_2 \sim Exp(1)$$
   avec $F_W(x) = 1 - \exp(-x)$.
2. ***(Application de la première partie du théorème de Sklar).***
   On calcule
   $$U_i^{(j)} = F_{W_i}\left(W_i^{(j)}\right) = 1 - \exp\left(-W_i^{(j)}\right),$$
   pour $i = 1,2$.

Dans l'illustration 14.14, on reproduit deux graphiques de réalisations de (U_1,U_2) provenant de la copule de Cuadras-Augé.

La copule introduit une relation de dépendance positive entre les composantes de $\underline{U}$.

La copule comporte une portion continue avec

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{\alpha,\beta}(u_1,u_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\, u_2^{-\alpha}, \text{ si } u_1 < u_2 \\ (1-\beta)\, u_1^{-\alpha}, \text{ si } u_1 > u_2 \end{cases}$$

et une portion singulière dont la masse se trouve concentrée sur la diagonale $u_1 = u_2$ dans la surface $[0,1] \times [0,1]$.

14.18.3 Copule bivariée de Marshall-Olkin

Définition

La copule de Marshall-Olkin est définie par

$$C_{\alpha,\beta}(u_1,u_2) = \min\left(u_1^{1-\alpha} u_2; u_1 u_2^{1-\beta}\right) = \begin{cases} u_1^{1-\alpha} u_2, \text{ si } u_1^\alpha \ge u_2^\beta \\ u_1 u_2^{1-\beta}, \text{ si } u_1^\alpha \le u_2^\beta \end{cases},$$

pour $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Les cas particuliers sont

Illustration 14.14 – Les graphiques (a) et (b) reproduisent 1000 réalisations de (U_1, U_2) provenant de la copule de Cuadras-Augé pour α égal à 0.2 (a) et 0.8 (b).

— $C_{0,0}(u_1, u_2) = C^{\perp}(u_1, u_2)$
— $C_{1,1}(u_1, u_2) = C^{+}(u_1, u_2)$
— Avec $\beta = \alpha$, la copule de Marshall-Olkin devient la copule de Cuadras-Augé.

En fait, la copule de Marshall-Olkin est aussi appelée copule de Cuadras-Augé généralisée.

Simulation

La méthode de simulation est basée sur la méthode de simulation de la loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin et l'application de la méthode d'inversion de création des copules (selon la première partie du théorème de Sklar).

La méthode de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

— On simule une réalisation de la loi continue bivariée à laquelle est associée la copule.
— On applique la première partie du théorème de Sklar.

Algorithme 14.37 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2) ***pour*** $\alpha, \beta \in (0, 1)$

1. ***(Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin).***
   (a) *On simule les réalisations* $Y_0^{(j)}$, $Y_1^{(j)}$ *et* $Y_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* $Y_0 \sim Exp(1)$, $Y_1 \sim Exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$ *et* $Y_2 \sim Exp\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$.
   (b) *On calcule* $X_i^{(j)} = \min\left(Y_i^{(j)}; Y_0^{(j)}\right)$ *pour* $i = 1, 2$.
2. ***(Application de la première partie du théorème de Sklar).*** *On calcule* $U_1^{(j)} = 1 - \exp\left(-\frac{X_1^{(j)}}{\alpha}\right)$ *et* $U_2^{(j)} = 1 - \exp\left(-\frac{X_2^{(j)}}{\beta}\right)$.

On représente des réalisations de (U_1, U_2) provenant de la copule de Marshall-Olkin à l'illustration 14.15.
La copule introduit une relation de dépendance positive entre les composantes de $\underline{U}$.
Comme la copule de Cuadras-Augé, la copule a une portion continue et une portion singulière :

Illustration 14.15 – Les graphiques (a) et (b) reproduisent 1000 réalisations de (U_1, U_2) provenant de la copule de Cuadras-Augé pour des valeurs pour (α, β) de $(0.6, 0.3)$ (a) et $(0.2, 0.8)$ (b).

— la portion continue est

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\, u_1^{-\alpha}, & \text{si } u_1^{\alpha} > u_2^{\beta} \\ (1-\beta)\, u_2^{-\beta}, & \text{si } u_1^{\alpha} < u_2^{\beta} \end{cases}$$

— la portion singulière correspond à la masse qui se trouve concentrée sur la courbe $u_1^{\alpha} = u_2^{\beta}$ dans la surface $[0,1] \times [0,1]$.

14.19 Illustrations

14.19.1 Lois bivariées avec marginales exponentielles

Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) avec $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, F_{X_2})$ avec $F_{X_i}(x_i) = 1 - \exp(\beta_i x_i)$, $i = 1, 2$. En combinant ces marginales à l'aide de copules, on crée les exemples suivants de $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, F_{X_2})$:

— copule de Clayton :

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \left(\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)^{-\alpha} + \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad , x_1, x_2 \geq 0;$$

— copule de Frank :

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\left(\mathrm{e}^{-\alpha\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{-\alpha\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)} - 1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha} - 1\right)}\right) \quad , x_1, x_2 \geq 0;$$

— copule de Gumbel :

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-\left\{\left(-\ln\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\right)^{\alpha} + \left(-\ln\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\right)^{\alpha}\right\}^{(1/\alpha)}} \quad , x_1, x_2 \geq 0;$$

— copule normale (gaussienne) :

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \overline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}\left(\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\right), \Phi^{-1}\left(\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\right)\right) \quad , x_1, x_2 \geq 0;$$

14.19.2 Lois multivariées avec marginales gamma

Soit un couple de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ avec $F_{X_1,...,X_n} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$ avec $F_{X_i}(x_i) = H(x_i; \gamma_i, \beta_i)$, $i = 1, ..., n$. En combinant ces marginales à l'aide de copules, on crée les exemples suivants de $F_{X_1,...,X_n} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$:

— copule de Clayton :

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} H(x_i; \gamma_i, \beta_i)^{-\alpha} - (n-1)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad , x_1, ..., x_n \geq 0;$$

— copule de Frank :

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{-\alpha H(x_i;\gamma_i,\beta_i)} - 1\right)}{(\mathrm{e}^{-\alpha} - 1)}\right) \quad , x_1, ..., x_n \geq 0;$$

— copule de Gumbel :

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \mathrm{e}^{-\{(-\ln H(x_1;\gamma_1,\beta_1))^{\alpha} + ... + (-\ln H(x_n;\gamma_n,\beta_n))^{\alpha}\}^{(1/\alpha)}} \quad , x_1, ..., x_n \geq 0;$$

— copule normale (gaussienne) :

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \overline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}(H(x_1; \gamma_1, \beta_1)), ..., \Phi^{-1}(H(x_n; \gamma_n, \beta_n))\right) \quad , x_1, ..., x_n \geq 0;$$

14.19.3 Exemple – Copule de Frank et marginales de loi exponentielle

On considère un conglomérat de deux contrats représentés par les v.a. X_1 et X_2 où $X_1 \sim X_2 \sim Exp(1)$. Les coûts pour le conglomérat sont définis par la v.a. $S = X_1 + X_2$.

On suppose que la loi conjointe de (X_1, X_2) est définie par la copule de Frank avec un paramètre de dépendance α et les deux marginales de X_1 et X_2.

On connaît les informations suivantes :

— $E[S] = 2$,

— $VaR_{0.995}(X_1) = VaR_{0.995}(X_2) = 5.298317$

— $TVaR_{0.995}(X_1) = TVaR_{0.995}(X_2) = 6.298317$.

Le bénéfice de la mutualisation en se basant sur la mesure $TVaR$ est

$$B_{0.995}^{TVaR}(S) = \sum_{i=1}^{2} TVaR_{0.995}(X_i) - TVaR_{0.995}(S).$$

Dans le tableau ci-dessous, on a produit les valeurs suivantes pour $\alpha = -10$ et 10 et pour les cas où (X_1, X_2) sont indépendants et comonotones :

α	$VaR_{0.995}(S)$	$TVaR_{0.995}(S)$	$B_{0.995}^{TVaR}(S)$
-10	6.1173	7.1165	5.4801
indépendance	7.4301	8.5488	4.0479
10	9.0802	10.3011	2.2955
comonotonicité	10.5966	12.5966	0

Pour κ fixé, on constate que $TVaR_{\kappa}(S)$ augmente lorsque la valeur du paramètre de dépendance α croît. Il en résulte que le bénéfice de mutualisation augmente lorsque α dimimue.

14.20 Copules et lois discrètes

14.20.1 Mise en place

Soit le couple de v.a. (M_1, M_2) dont la structure de dépendance est définie par une copule C et leurs marginales.

La fonction de répartition conjointe F_{M_1,M_2} de (M_1, M_2) avec les marginales F_{M_1} et F_{M_2} est définie par

$$F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = C(F_{M_1}(m_1), F_{M_2}(m_2)), \tag{14.4}$$

pour $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$.

La f.m.p. conjointe de (M_1, M_2) est donnée par

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) - F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2) - F_{M_1,M_2}(m_1, m_2 - 1) + F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2 - 1), \tag{14.5}$$

pour $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ et avec $F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = 0$ si $m_1 < 0$ ou $m_2 < 0$.

Modéliser la dépendance avec des copules comme dans l'équation (14.4) est une approche adéquate et intéressante pour construire une distribution bivariée.

Plusieurs propriétés de dépendance stochastique d'une copule sont également valides pour la distribution bivariée obtenue avec l'équation (14.4).

Par exemple, les relations d'ordres stochastiques sont préservées. Il est important de rappeler que la copule déduite à partir d'une loi discrète bivariée n'est pas unique.

Dans le prochain exemple, on illustre l'impact du choix d'une copule sur la distribution de la somme de v.a.

14.20.2 Exemple – Copule de Clayton avec marginales de loi binomiale

On veut illustrer le choix d'une copule sur la distribution d'un couple de v.a. (M_1, M_2) où $M_i \sim Bin(n_i, q_i)$, $i = 1, 2$.

Les paramètres sont fournis dans le tableau suivant :

i	n_i	q_i
1	5	0.2
2	5	0.3

On considère la copule de Clayton

On définit $N = M_1 + M_2$.

Pour $\alpha = 5$, on obtient les valeurs suivantes de f_{M_1,M_2} :

0.166906 0.155288 0.005132 0.000312 0.000039 0.000003
0.001148 0.190529 0.179227 0.033420 0.004887 0.000390
0.000015 0.012838 0.103802 0.071440 0.015396 0.001309
0.000001 0.001347 0.018351 0.023877 0.006991 0.000632
0.000000 0.000142 0.002085 0.003095 0.000987 0.000091
0.000000 0.000007 0.000103 0.000155 0.000050 0.000005

Pour $\alpha = 5$, on calcule les valeurs suivantes de $f_S(k)$ pour $k = 0, 1, 2, ..., 10$:

0.166906 0.156436 0.195676 0.192378 0.138608 0.094823 0.041755 0.011498
0.001775 0.000141 0.000005

Pour $\alpha = 5$, le coefficient de corrélation linéaire de Pearson est

$$\begin{aligned} \rho_P(M_1, M_2) &= \frac{Cov(M_1, M_2)}{\sqrt{Var(M_1, M_2)}} \\ &= 0.7369852. \end{aligned}$$

On utilise l'optimisation numérique pour identifier la valeur du paramètre de dépendance α fournissant une valeur fixée de $\rho_P(M_1, M_2)$.

Par exemple, on obtient les valeurs suivantes de α pour des valeurs fixées de $\rho_P(M_1, M_2)$:

$\rho_P(M_1, M_2)$	α
0.02	0.034857
0.5	1.600301
0.8	8.712199

14.20.3 Exemple – Copules de Frank, Clayton et de Gumbel avec marginales de loi négative binomiale

On veut illustrer l'impact du choix d'une copule sur la distribution d'un couple de v.a. (M_1, M_2) où

$$M_i \sim NB(\alpha_i, q_i), i = 1, 2.$$

On considère les copules de Frank, de Clayton et de Gumbel.

On définit $N = M_1 + M_2$.

On fixe $\alpha_1 = 3$, $q_1 = \frac{1}{6}$, $\alpha_2 = 2$ et $q_2 = \frac{1}{9}$.

En utilisant l'optimisation numérique, on fixe le paramètre de dépendance des trois copules de telle sorte que

$$Cov(M_1, M_2) = 0.5 \times \sqrt{\mathrm{Var}(M_1)\,\mathrm{Var}(M_2)}.$$

On obtient $E[N] = 31$ et $\mathrm{Var}(N) = 379.1206$.

Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de $VaR_\kappa(N)$ et $TVaR_\kappa(N)$ pour $\kappa = 0.95$ et 0.995 :

Copule	Frank	Clayton	Gumbel
θ	4.118	1.774	1.410
$VaR_{0.95}(N)$	67	65	66
$VaR_{0.995}(N)$	93	91	104
$TVaR_{0.95}(N)$	78.40738	76.63825	82.74425
$TVaR_{0.995}(N)$	103.3001	100.8877	119.8066

On constate que le choix de la copule a un impact non négligeable sur le comportement de N.

14.20.4 Proposition – Copule EFGM et marginales discrètes

Dans la proposition suivante, on a fourni l'expression simple de la fonction de masse de probabilité conjointe du couple (M_1, M_2) lorsque la structure de dépendance est définie par la copule EFGM.

Proposition 14.38 *Soit le couple de v.a. discrètes (M_1, M_2) dont la fonction de répartition est définie par les marginales F_{M_1} et F_{M_2} ainsi que la copule EFGM. Alors, la fonction de masse de probabilité conjointe de (M_1, M_2) est donnée par*

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(k_1, k_2) &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\ &\quad + \theta \prod_{i=1}^{2} f_{M_i}(k_i)\left(1 - 2F_{M_i}(k_i) + f_{M_i}(k_i)\right), \end{aligned}$$

où f_{M_1} et f_{M_2} sont les fonctions de masse de probabilité univariées de M_1 et M_2.

Preuve. L'expression est déduite de (14.5). On a

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(k_1, k_2) &= F_{M_1,M_2}(k_1, k_2) - F_{M_1,M_2}(k_1 - 1, k_2) \\ &\quad - F_{M_1,M_2}(k_1, k_2 - 1) + F_{M_1,M_2}(k_1 - 1, k_2 - 1) \\ &= F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) + \alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2)\left(1 - F_{M_1}(k_1)\right)\left(1 - F_{M_2}(k_2)\right) \\ &\quad - F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2) - \alpha F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2)\left(1 - F_{M_1}(k_1 - 1)\right)\left(1 - F_{M_2}(k_2)\right) \\ &\quad - F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1) - \alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1)\left(1 - F_{M_1}(k_1)\right)\left(1 - F_{M_2}(k_2 - 1)\right) \\ &\quad + F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2 - 1) + \alpha F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2 - 1)\left(1 - F_{M_1}(k_1 - 1)\right)\left(1 - F_{M_2}(k_2 - 1)\right). \end{aligned}$$

Ensuite, on déduit

$$\begin{aligned}
f_{M_1,M_2}(k_1,k_2) &= F_{M_2}(k_2) f_{M_1}(k_1) - F_{M_2}(k_2-1) f_{M_1}(k_1) \\
&\quad +\alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2)\left(1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_2}(k_2) + F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2)\right) \\
&\quad -\alpha F_{M_1}(k_1-1) F_{M_2}(k_2)\left(1 - F_{M_1}(k_1-1) - F_{M_2}(k_2) + F_{M_1}(k_1-1) F_{M_2}(k_2)\right) \\
&\quad -\alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2-1)\left(1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_2}(k_2-1) + F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2-1)\right) \\
&\quad +\alpha F_{M_1}(k_1-1) F_{M_2}(k_2-1)\left(1 - F_{M_1}(k_1-1) - F_{M_2}(k_2-1) + F_{M_1}(k_1-1) F_{M_2}(k_2-1)\right) \\
&= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\
&\quad +\alpha f_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2)\left(\begin{array}{c} 1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1-1) - F_{M_2}(k_2) \\ +F_{M_2}(k_2)\left(F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1-1)\right) \end{array}\right) \\
&\quad -\alpha f_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2-1)\left(\begin{array}{c} 1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1-1) - F_{M_2}(k_2-1) \\ +F_{M_2}(k_2-1)\left(F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1-1)\right) \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Puis, on réarrange les termes

$$\begin{aligned}
f_{M_1,M_2}(k_1,k_2) &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\
&\quad +\alpha f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \times \left(\begin{array}{c} 1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1-1) - F_{M_2}(k_2) - F_{M_2}(k_2-1) \\ +\left(F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1-1)\right)\left(F_{M_2}(k_2) + F_{M_2}()(k_2-1)\right) \end{array}\right) \\
&= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\
&\quad +\alpha f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \times \left(\begin{array}{c} 1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1) \\ -F_{M_1}(k_1-1) - F_{M_2}(k_2) - F_{M_2}(k_2-1) \\ +\left(F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1-1)\right)\left(F_{M_2}(k_2) + F_{M_2}(k_2-1)\right) \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
f_{M_1,M_2}(k_1,k_2) &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\
&\quad +\alpha f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2)\left(\begin{array}{c} 1 - 2F_{M_1}(k_1) + f_{M_1}(k_1) - 2F_{M_2}(k_2) + f_{M_2}(k_2) \\ +4F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) - 2F_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\ -2f_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) + f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \end{array}\right) \\
&= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) + \alpha \prod_{i=1}^{2} f_{M_i}(k_i)\left(1 - 2F_{M_1}(k_1) + f_{M_i}(k_i)\right).
\end{aligned}$$

■

14.21 Méthodes d'agrégation de risques dépendants

14.21.1 Introduction

Les méthodes d'agrégation se regroupent en quelques catégories :

— bornes inférieures et supérieures,

— expressions exactes,

— méthodes basées sur la simulation et

— méthodes numériques.

On a déjà présenté les méthodes de simulation.

Dans cette section, on aborde l'évaluation de bornes minimale et maximale pour la VaR, la méthode fondée sur la discrétisation et la méthode des carrés.

14.21.2 Méthode avec discrétisation

Description de la méthode

On considère un couple de v.a. continues (X_1, X_2) dont la structure de dépendance est définie par une copule C et les marginales continues F_{X_1} et F_{X_2} c.-à-d.

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right).$$

On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut évaluer $F_S(s)$ pour $s \in \mathbb{R}$.

La fonction de densité conjointe est donnée par

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = c\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2).$$

On sait que la fonction de densité de S s'exprime en termes de f_{X_1,X_2} avec

$$f_S(s) = \int_0^s f_{X_1,X_2}(x_1, s - x_1)\,\mathrm{d}x_1.$$

De plus, on déduit que $F_S(s) = \int_0^s f_S(t)\,\mathrm{d}t$.

Néanmoins, la tâche est impossible pour la majorité des copules à moins de recourir à l'intégration numérique.

On explique une méthode basée sur la discrétisation des marginales F_{X_1} et F_{X_2}.

L'idée est d'évaluer approximativement les v.a. continues X_1 et X_2 par des v.a. discrètes $\widetilde{X}_1$ et $\widetilde{X}_2$ où

$$\widetilde{X}_i \in \{0h, 1h, 2h, ...\},$$

pour $i = 1, 2$ et pour un pas de discrétisation $h > 0$.

On choisit une méthode de discrétisation parmi celles qui sont expliquées au chapitre 11.

La fonction de répartition conjointe $F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}$ de $\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right)$ est définie en fonction de la même copule C que celle qui est associée à F_{X_1,X_2} et des fonctions de répartition marginales $F_{\widetilde{X}_i}(x_i)$ de $\widetilde{X}_i$ $(i = 1, 2)$:

$$F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1h, k_2h) = C\left(F_{\widetilde{X}_1}(k_1h), F_{\widetilde{X}_2}(k_2h)\right),$$

pour k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$.

Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de $\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right)$,

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1h, k_2h) = \Pr\left(\widetilde{X}_1 = k_1h, \widetilde{X}_2 = k_2h\right),$$

sont déterminées comme suit.

Pour $k_1 = 0, k_2 = 0$, on a

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0,0) = F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0,0).$$

Pour $k_1 \in \mathbb{N}^+$ et $k_2 = 0$, on a

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1h, 0) = F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1h, 0) - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}((k_1 - 1)h, 0).$$

Pour $k_1 = 0$ et $k_2 \in \mathbb{N}^+$, on a

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0, k_2h) = F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0, k_2h) - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0, (k_2 - 1)h).$$

Enfin, pour $k_1 \in \mathbb{N}^+$ et $k_2 \in \mathbb{N}^+$, on a

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1h, k_2h) \quad = \quad & F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1h, k_2h) \\ & - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1h, (k_2 - 1)h) \\ & - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}((k_1 - 1)h, k_2h) \\ & + F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}((k_1 - 1)h, (k_2 - 1)h). \end{aligned}$$

On approxime la v.a. S par la $\widetilde{S} = \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 \in \{0h, 1h, 2h, ...\}$.

La fonction de masse de probabilité de $\widetilde{S}$ est donnée par

$$f_{\widetilde{S}}(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(jh,(k-j)h),$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

Ensuite, il est aisé de calculer $F_{\widetilde{S}}(kh)$ et toutes fonctions de $\widetilde{S}$, notamment les mesures de risque $VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ et $TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$.

Exemple

On suppose que $X_i \sim Pa(\alpha_i, \lambda_i)$ avec $\lambda_1 = 11,\ \lambda_2 = 12,\ \alpha_1 = 2.1,\ \alpha_2 = 2.2$.

On définit $S = X_1 + X_2$.

La fonction de répartition conjointe de (X_1, X_2) est

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)),$$

où $C(u_1, u_2)$ est une copule de Clayton avec paramètre de dépendance $\alpha = 10$.

On discrétise les variables aléatoires X_1 et X_2 jusqu'à 5000 avec les trois méthodes de discrétisation et un pas de $h = 1$ pour évaluer la fonction de répartition de S.

Le tableau suivant présente les valeurs des VaR obtenues avec les trois méthodes d'arithmétisation :

κ	$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ *upper*	$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ dispersion	$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ *lower*
0.95	72	73	74
0.995	215	216	217

14.21.3 Méthode des carrés

Description de la méthode

Soit le couple de v.a. positives continues (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est F_{X_1,X_2}.

On présente la méthode des carrés pour évaluer F_S où $S = X_1 + X_2$.

Cette méthode est une variante simplifiée de la méthode AEP proposée par [Arbenz et al., 2011].

Évaluer $F_S(s)$ revient à évaluer la probabilité que (X_1, X_2) prenne valeur dans le triangle dont les coordonnées dans le plan cartésien sont $(0,0)$, $(0,s)$ et $(s,0)$.

L'idée de la méthode des carrés est de recouvrir la surface triangulaire par des carrés.

On définit la probabilité attribuée au carré $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ par

$$\begin{aligned}\zeta_{(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]} &= \triangle_{a_1,b_1} \triangle_{a_2,b_2} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\\ &= \Pr(a_1 < X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2).\end{aligned}$$

À la première étape, on commence par évaluer approximativement $F_S(s)$ par $\varphi_1(s) = \zeta_{\left(0,\frac{s}{2}\right]\times\left(0,\frac{s}{2}\right]}$, la probabilité que (X_1, X_2) se trouve dans le carré $\left(0,\frac{s}{2}\right] \times \left(0,\frac{s}{2}\right]$.

À la deuxième étape, on ajoute la probabilité que (X_1, X_2) prenne valeur dans

$$\left(0,\frac{1s}{4}\right] \times \left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}+\frac{s}{4}\right] \cup \left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}+\frac{s}{4}\right] \times \left(0,\frac{1s}{4}\right]$$

et l'approximation devient

$$\varphi_2(s) = \varphi_1(s) + \zeta_{\left(0,\frac{1s}{4}\right]\times\left(\frac{2s}{4},\frac{2s}{4}+\frac{1s}{4}\right]} + \zeta_{\left(\frac{2s}{4},\frac{2s}{4}+\frac{1s}{4}\right]\times\left(0,\frac{1s}{4}\right]}.$$

Illustration 14.16 – La méthode des carrés est illustrée pour les étapes 1 (graphique b), 2 (graphique c) et 3 (graphique d).

À la troisième étape, on a

$$\begin{aligned}\varphi_3(s) &= \varphi_2(s) + \zeta_{\left(0,\frac{1s}{8}\right]\times\left(\frac{6s}{8},\frac{6s}{8}+\frac{1s}{8}\right]} + \zeta_{\left(\frac{2s}{8},\frac{2s}{8}+\frac{1s}{8}\right]\times\left(\frac{4s}{8},\frac{4s}{8}+\frac{1s}{8}\right]} \\ &\quad + \zeta_{\left(\frac{4s}{8},\frac{4s}{8}+\frac{1s}{8}\right]\times\left(\frac{2s}{8},\frac{2s}{8}+\frac{1s}{8}\right]} + \zeta_{\left(\frac{6s}{8},\frac{6s}{8}+\frac{1s}{8}\right]\times\left(\frac{0s}{8},\frac{0s}{8}+\frac{1s}{8}\right]}.\end{aligned}$$

Bref, on déduit la relation récursive

$$\varphi_m(s) = \varphi_{m-1}(s) + \sum_{j=0}^{2^{m-1}-1} \zeta_{\left(\frac{2js}{2^m},\frac{2js}{2^m}+\frac{s}{2^m}\right]\times\left(\frac{2(2^{m-1}-1-j)s}{2^m},\frac{2(2^{m-1}-1-j)s}{2^m}+\frac{s}{2^m}\right]},$$

pour $m = 1, 2, \ldots$ avec $\varphi_0(s) = 0$.

Il est aussi possible d'écrire

$$\varphi_m(s) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \zeta_{\left(\frac{2js}{2^k},\frac{2js}{2^k}+\frac{s}{2^k}\right]\times\left(\frac{2(2^{k-1}-1-j)s}{2^k},\frac{2(2^{k-1}-1-j)s}{2^k}+\frac{s}{2^k}\right]}.$$

La contruction des carrés est présentée à l'illustration 14.16

Pour tout s, $\varphi_m(s)$ va tendre vers $F_S(s)$, lorsque $m \longrightarrow \infty$.

On évalue approximativement $F_S(s)$ par $\varphi_m(s)$ pour m élevé, en choisissant m de telle sorte que la différence $\varphi_m(s) - \varphi_{m-1}(s)$ soit inférieure au degré de précision choisi ε.

La valeur de m dépend de s et ε.

Étant donné la construction de l'approximation, on mentionne que $\varphi_m(s) \leq F_S(s)$ et qu'il en résulte que $VaR_\kappa(S) \leq \phi_m^{-1}(\kappa)$.

Exemple – Copule de Frank et marginales de loi exponentielle

On considère le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la loi conjointe est définie par la copule de Frank avec un paramètre de dépendance α et les deux marginales de X_1 et X_2 où $X_1 \sim X_2 \sim Exp(1)$.

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

On sait que $E[S] = 2$, $VaR_{0.995}(X_1) = VaR_{0.995}(X_2) = 5.298317$.

Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs *exactes* de $VaR_{0.995}(S)$ et les valeurs obtenues de $\varphi_m(VaR_{0.995}(S))$ avec la méthode des carrés :

α	$VaR_{0.995}(S)$	$m=1$	$m=10$	$m=19$	$m=20$
-10	6.11728655	0.9060989	0.9949849	0.995	0.995
10	9.08023745	0.9796857	0.9949826	0.995	0.995

On constate que la convergence est fort satisfaisante.

Exemple – Copule de Frank et marginales de loi Pareto

On considère le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la loi conjointe est définie par la copule de Frank avec un paramètre de dépendance α et les deux marginales de X_1 et X_2 où

$$X_1 \sim Pa(1.5, 0.5)$$

et

$$X_2 \sim Pa(1.8, 0.8).$$

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

On déduit que $E[S] = 2$.

Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs obtenues $\varphi_m(VaR_{0.995}(S))$ avec la méthode des carrés et en fixant $VaR_{0.995}(S) \simeq \phi_{20}^{-1}(0.995)$:

α	$VaR_{0.995}(S)$	$m=1$	$m=10$	$m=19$	$m=20$
-10	23.99940	0.9851983	0.9949958	0.995	0.995
10	27.86633	0.9885939	0.9949958	0.995	0.995

À nouveau, la convergence de l'approximation est satisfaisante.

14.21.4 Méthodes des rectangles

Description de la méthode

Soit le couple de v.a. positives continues (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est F_{X_1,X_2}. On définit $S = X_1 + X_2$. Deux approximations de $F_S(s)$, que l'on appelle les méthodes *lower* et *upper* des rectangles, sont aussi construites en recouvrant la surface triangulaire par des rectangles (voir l'illustration 14.17).

Selon la méthode *lower* des rectangles, on additionne les masses de probabilité associées aux $2^m - 1$ rectangles se trouvant en-dessous de la diagonale $x_1 + x_2 = s$ et on produit l'approximation $A_S^{(l,m)}(s)$ de $F_S(s)$ donnée par

$$\begin{aligned} & A_S^{(l,m)}(s) \\ = & \sum_{i=1}^{2^m-1} \left(F_{X_1,X_2}\left(\frac{i}{2^m}s, \frac{2^m-i}{2^m}s\right) - F_{X_1,X_2}\left(\frac{(i-1)}{2^m}s, \frac{2^m-i}{2^m}s\right)\right). \end{aligned}$$

Illustration 14.17 – Illustration des méthodes *lower* et *upper* des rectangles pour $m = 1$ et $m = 2$.

De même, pour la méthode *upper* des rectangles, on fait la somme des masses de probabilité associées aux 2^m rectangles se trouvant en-dessus de la diagonale $x_1 + x_2 = s$ menant à l'approximation $A_S^{(u,m)}(s)$ de $F_S(s)$ qui est définie par

$$\begin{aligned} & A_S^{(u,m)}(s) \\ = & \sum_{i=1}^{2^m} \left(F_{X_1,X_2}\left(\frac{i}{2^m}s, \frac{2^m+1-i}{2^m}s\right) - F_{X_1,X_2}\left(\frac{i-1}{2^m}s, \frac{2^m+1-i}{2^m}s\right)\right). \end{aligned}$$

Les méthodes *lower* et *upper* des rectangles sont représentées à l'illustration 14.17 pour $m = 1$ et $m = 2$. Clairement, on a

$$A_S^{(l,m)}(s) \leq A_S^{(l,m+k)}(s) \leq F_S(s) \leq A_S^{(u,m+k)}(s) \leq A_S^{(u,m)}(s), \tag{14.6}$$

pour $s \geq 0$ et $m, k \in \mathbb{N}^+$.

De plus, on a

$$\lim_{m\to\infty} A_S^{(l,m)}(s) \to F_S(s) \text{ et } \lim_{m\to\infty} A_S^{(u,m)}(s) \to F_S(s).$$

Si on définit

$$\widetilde{VaR}_\kappa^{(l,m)}(S) = \inf\left\{s \in \mathbb{R}^+, A_S^{(l,m)}(s) \geq \kappa\right\}$$

et

$$\widetilde{VaR}_\kappa^{(u,m)}(S) = \inf\left\{s \in \mathbb{R}^+, A_S^{(u,m)}(s) \geq \kappa\right\},$$

alors l'inégalité

$$\widetilde{VaR}_\kappa^{(u,m)}(S) \leq VaR_\kappa(S) \leq \widetilde{VaR}_\kappa^{(l,m)}(S) \tag{14.7}$$

est satisfaite pour $0 < \kappa < 1$.

Exemple – Copule de Clayton et marginales de loi exponentielle

On considère le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la loi conjointe est définie par la copule de Clayton avec un paramètre de dépendance $\alpha = 4$ et les deux marginales de X_1 et X_2 où $X_1 \sim Exp(0.1)$ et $X_2 \sim Exp(0.2)$.

Les valeurs obtenues pour les deux approximations (avec $m = 20$) de $F_S(s)$ où $S = X_1 + X_2$ sont présentées dans le tableau suivant :

s	$A_S^{(l,m)}(s)$	$A_S^{(u,m)}(s)$
5	0.2713069	0.2713072
10	0.4656194	0.4656197
20	0.7184929	0.7184933
30	0.8632002	0.8632005
50	0.9753317	0.9753318
100	0.9998158	0.9998158

Exemple – Copule de Clayton et marginales de loi Pareto

On considère le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la loi conjointe est définie par la copule de Clayton avec un paramètre de dépendance $\alpha = 4$ et les deux marginales de X_1 et X_2 où $X_1 \sim Pareto(0.9, 1)$ et $X_2 \sim Pareto(1.8, 1)$.

On reproduit dans le tableau suivant les valeurs des deux approximations (avec $m = 20$) de $F_S(s)$ où $S = X_1 + X_2$:

s	$A_S^{(l,m)}(s)$	$A_S^{(u,m)}(s)$
1	0.3158349	0.3158351
100	0.9836904	0.9836904
10000	0.9997487	0.9997487
1000000	0.9999960	0.9999960

Cet exemple est suggéré par [Arbenz et al., 2011].

Pour m et s fixés, la méthode des carrés et la méthode *lower* des rectangles produisent des valeurs identiques.

Les deux méthodes des rectangles sont très simples d'application.

Comme l'indiquent (14.6) et (14.7), ces méthodes permettent d'encadrer la valeur exacte de $F_S(s)$ et $VaR_\kappa(S)$.

Commentaires supplémentaires

La méthode avec discrétisation permet d'évaluer toute fonction de (X_1, X_2) alors que, dans sa forme actuelle, la méthode des carrés sert à évaluer F_S et de déduire la $VaR_\kappa(S)$.

Pour les deux méthodes, il est possible de s'approcher de la valeur exacte avec un degré voulu de précision.

Dans [Arbenz et al., 2011], on présente la méthode AEP, une généralisation plus performante de la méthode des carrés, améliorant la vitesse de convergence de l'approximation.

Décrites dans [Cossette et al., 2014], les deux méthodes des rectangles ont l'avantage d'approcher de la valeur exacte avec le degré voulu de précision tout en produisant des bornes inférieure et supérieure pour cette valeur.

On peut adapter les 2 méthodes des rectangles dans les cas où le nombre de risques est 3, 4 et 5.

En l'adaptant de façon appropriée, ces 2 méthodes sont aussi utilisées évaluer la fonction de répartition du produit et du quotient de v.a. (voir [Cossette et al., 2014]).

14.21.5 Bornes minimale et maximale pour la VaR

Mise en place et Kolmogorov

On examine les bornes stochastiques pour une somme finie de v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 2$.

On se limite au cas $n = 2$.

En pratique, il advient qu'on puisse modéliser de façon adéquate les comportements marginaux de deux risques mais qu'il soit difficile de spécifier la relation de dépendance entre deux risques en raison d'un manque d'information.

Cela peut survenir dans le contexte de risques environnementaux notamment.

Dans cette section, on présente les bornes minimale et maximale de F_S sans spécifier la relation de dépendance entre les v.a. X_1 et X_2. L'intérêt de ces bornes est qu'elles permettent d'obtenir des bornes pour $VaR_\kappa(S)$, pour $\kappa \in]0, 1[$.

Ce problème aurait été formulé par Kolmogorov.

Résultat

Soit une v.a. X avec fonction de répartition F_X. On définit la limite à gauche par $F_X^-(x) = \Pr(X < x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 14.39 *Soit deux v.a. X_1 et X_2 avec fonctions de répartition F_{X_i} et limite à gauche $F_{X_i}^-$, $i = 1, 2$. Alors, on a*

$$F_S^{\min}(s) \leq F_S(s) \leq F_S^{\max}(s),$$

où

$$\begin{aligned} F_S^{\min}(s) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \max\left(F_{X_1}^-(x) + F_{X_2}^-(s-x) - 1; 0\right) \\ F_S^{\max}(s) &= \inf_{x \in \mathbb{R}} \min\left(F_{X_1}(x) + F_{X_2}(s-x); 1\right), \end{aligned}$$

pour $s \in \mathbb{R}$.

Ces bornes sont les meilleures pour chaque point s.

Preuve. Voir, p. ex., [Denuit et al., 1999] ou [Williamson and Downs, 1990]. ■

Preuve heuristique pour la somme de v.a. continues positives

On procéde par étapes.
On suppose que les marginales F_{X_1} et F_{X_2} sont continues.
On considère le cas où les v.a. X_1 et X_2 sont positives.
Pour la borne supérieure, on a

$$\begin{aligned}
F_S(s) &= \Pr(S \leq s) \\
&= \Pr(X_1 + X_2 \leq s) \\
&\leq \Pr(X_1 \leq x \cup X_2 \leq s - x) \\
&= \Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - \Pr(X_1 \leq x, X_2 \leq s - x) \\
&\leq \Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - \max(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - 1; 0) \\
&= \min(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x); 1),
\end{aligned}$$

pour $0 \leq x \leq s$.
Note :

— si $\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) < 1$, on a

$$\max(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - 1; 0) = 0$$

et

$$\begin{aligned}
& \Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - \max(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - 1; 0) \\
= \; & \Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x);
\end{aligned}$$

— si $\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x)$, on a

$$\max(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - 1; 0) = \Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - 1$$

et

$$\begin{aligned}
& \Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - \max(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - 1; 0) \\
= \; & 1;
\end{aligned}$$

— alors

$$\begin{aligned}
& \Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - \max(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - 1; 0) \\
= \; & \min(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x); 1).
\end{aligned}$$

Bref, l'inéqualité

$$F_S(s) \leq \min(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x); 1)$$

est valide pour $0 \leq x \leq s$.
Alors, on obtient

$$F_S(s) \leq \inf_{x \in [0,s]} \min(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x); 1).$$

Pour la borne inférieure, on a

$$\begin{aligned}
F_S(s) &= \Pr(S \leq s) \\
&= \Pr(X_1 + X_2 \leq s) \\
&\geq \Pr(X_1 \leq x \cap X_2 \leq s - x) \\
&\geq \max(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - 1; 0),
\end{aligned}$$

pour $0 \leq x \leq s$.

L'inéqualité

$$F_S(s) \geq \max\left(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - 1; 0\right)$$

est valide pour $0 \leq x \leq s$.

Alors, on obtient

$$F_S(s) \geq \sup_{x \in [0,s]} \max\left(\Pr(X_1 \leq x) + \Pr(X_2 \leq s - x) - 1; 0\right).$$

Dualité

On rappelle les bornes stochastiques inférieures et supérieures :

$$F_S(s) \geq \sup_{x \in [0,s]} \max\left(F_{X_1}(s) + F_{X_2}(s - x) - 1; 0\right)$$

et

$$F_S(s) \leq \inf_{x \in [0,s]} \min\left(F_{X_1}(s) + F_{X_2}(s - x); 1\right).$$

Soit la copule borne supérieure

$$W(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0)$$

Soit la dual associée à W

$$W^d(u_1, u_2) = \min(u_1 + u_2; 1).$$

Alors, on a

$$F_S(s) \geq \sup_{x \in [0,s]} W\left(F_{X_1}(s), F_{X_2}(s - x)\right) = F_S^{\min}(s)$$

et

$$F_S(s) \leq \inf_{x \in [0,s]} W^d\left(F_{X_1}(s), F_{X_2}(s - x)\right) = F_S^{\max}(s).$$

Frank, Nelsen et Schweiser (1987) représente les deux bornes sous la forme de quantiles.

La borne supérieure de $VaR_\kappa(S)$ est déterminée à partir de la borne inférieure de $F_S(s)$ et la borne inférieure de $VaR_\kappa(S)$ est déterminée à partir de la borne supérieure de $F_S(s)$:

$$VaR_\kappa^{\min}(S) = F_S^{\max\,-1}(s) \leq VaR_\kappa(S) \leq F_S^{\min\,-1}(s) = VaR_\kappa^{\max}(S)$$

On a

$$\begin{aligned}
\underline{VaR}_\kappa(S) &= VaR_\kappa^{\min}(S) \\
&= \sup_{W(u_1,u_2)=\kappa} \left\{F_{X_1}^{-1}(u_1) + F_{X_2}^{-1}(u_2)\right\} \\
&= \sup_{\max(u_1+u_2-1;0)=\kappa} \left\{F_{X_1}^{-1}(u_1) + F_{X_2}^{-1}(u_2)\right\} \\
&= \sup_{u \in [0,\kappa]} \left\{F_{X_1}^{-1}(u) + F_{X_2}^{-1}(\kappa - u)\right\}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{VaR}_\kappa(S) &= VaR_\kappa^{\max}(S) \\
&= \inf_{W^d(u_1,u_2)=\kappa} \left\{F_{X_1}^{-1}(u_1) + F_{X_2}^{-1}(u_2)\right\} \\
&= \inf_{\min(u_1+u_2;1)=\kappa} \left\{F_{X_1}^{-1}(u_1) + F_{X_2}^{-1}(u_2)\right\} \\
&= \inf_{u \in [\kappa,1]} \left\{F_{X_1}^{-1}(u) + F_{X_2}^{-1}(1 - (\kappa - u))\right\} \\
&= \inf_{u \in [\kappa,1]} \left\{F_{X_1}^{-1}(u) + F_{X_2}^{-1}(\kappa - u + 1)\right\}.
\end{aligned}$$

Expressions fermées – Marginales exponentielles

On obtient des expressions fermées pour $F_S^{\min}(s)$ et $F_S^{\max}(s)$ lorsque les marginales sont des lois exponentielles.

Soit les v.a. $X_i \sim Exp\left(\frac{1}{\gamma_i}\right)$, $i = 1, 2$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$. Alors, on a

$$\underline{VaR}_\kappa(S) \leq VaR_\kappa(S) \leq \overline{VaR}_\kappa(S)$$

pour $\kappa \in]0, 1[$ où

$$\begin{aligned} \underline{VaR}_\kappa(S) &= -\max(\gamma_1; \gamma_2)\ln(1-\kappa), \\ \overline{VaR}_\kappa(S) &= -(\gamma_1+\gamma_2)\ln(1-\kappa) + (\gamma_1+\gamma_2)\ln(\gamma_1+\gamma_2) \\ &\quad -\gamma_1\ln(\gamma_1) - \gamma_2\ln(\gamma_2). \end{aligned}$$

Les détails des calculs sont fournis dans [Denuit et al., 1999].

Exemple – Marginales exponentielles

L'exemple suivant applique les résultats de l'exemple 14.21.5.

Soit le couple de (X_1, X_2) dont la structure de dépendance est inconnue et dont les marginales sont $X_i \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$, $i = 1, 2$. Soit les couples de v.a. $\left(X_1^-, X_2^-\right)$, $\left(X_1^\perp, X_2^\perp\right)$ et $\left(X_1^+, X_2^+\right)$ où les composantes sont respectivement antimonotones, indépendantes et comonotones et où les marginales sont identiques à celles de X_1 et X_2. On définit les v.a. $S = X_1 + X_2$, $S^- = X_1^- + X_2^-$, $S^\perp = X_1^\perp + X_2^\perp$ et $S^+ = X_1^+ + X_2^+$. Selon l'exemple 13.19, on a

$$VaR_\kappa\left(S^-\right) = -10\ln\left(1 - \frac{1-\kappa}{2}\right) + -10\ln\left(\frac{1-\kappa}{2}\right).$$

D'après l'exemple 13.10, on a

$$VaR_\kappa\left(S^+\right) = -2 \times 10\ln(1-\kappa).$$

Comme $S^\perp \sim Erl\left(2, \frac{1}{10}\right)$, on a $VaR_\kappa\left(S^\perp\right) = H^{-1}\left(\kappa; 2, \frac{1}{10}\right)$.

À l'illustration 14.18, on représente sur graphiques les valeurs $\underline{VaR}_\kappa(S)$, $\overline{VaR}_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(S^-)$, $VaR_\kappa\left(S^\perp\right)$ et $VaR_\kappa(S^+)$ dont quelques unes sont aussi fournies dans le tableau ci-dessous :

κ	$\underline{VaR}_\kappa(S)$	$\overline{VaR}_\kappa(S)$	$VaR_\kappa(S^-)$	$VaR_\kappa\left(S^\perp\right)$	$VaR_\kappa(S^+)$
0.5	6.9315	27.7259	16.7398	16.7835	13.8629
0.95	29.9573	73.7776	37.1420	47.4386	59.9146
0.99	46.0517	105.9663	53.0333	66.3835	92.1034
0.995	52.9832	119.8293	59.9397	74.3013	105.9663
0.999	69.0776	152.0180	76.0140	92.3341	138.1551

.

Expressions fermées – Marginales Pareto

Des expressions explicites pour $F_S^{\min}(s)$ et $F_S^{\max}(s)$ sont aussi produites quand les marginales sont des lois de Pareto.

Lois de Pareto. Soit les v.a. $X_i \sim Pa(\alpha, \lambda_i)$, $i = 1, 2$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$. Alors, on a $\underline{VaR}_\kappa(S) \leq VaR_\kappa(S) \leq \overline{VaR}_\kappa(S)$ pour $\kappa \in]0, 1[$ où

$$\begin{aligned} \underline{VaR}_\kappa(S) &= \max(\lambda_1; \lambda_2)\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \\ \overline{VaR}_\kappa(S) &= \widetilde{\lambda}\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) + \widetilde{\lambda} - \lambda_1 - \lambda_2, \end{aligned}$$

où $\widetilde{\lambda} = \left(\lambda_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \lambda_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$. À nouveau, les détails des calculs sont présentés dans [Denuit et al., 1999]. □

Illustration 14.18 – Valeurs $\underline{VaR}_\kappa(S)$, $\overline{VaR}_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(S^-)$, $VaR_\kappa\left(S^\perp\right)$ et $VaR_\kappa(S^+)$.

Exemple – Marginales Pareto

On met en application dans le prochain exemple les résultats en 14.21.5.

Soit les v.a. $X_i \sim Pa(1.5, 1)$, $i = 1, 2$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$. Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de $\underline{VaR}_\kappa(S)$ et $\overline{VaR}_\kappa(S)$. De plus, on présente les valeurs de $VaR_\kappa(S)$ en supposant la comonotonicité entre les 2 v.a. :

κ	$\underline{VaR}_\kappa(S)$	$\overline{VaR}_\kappa(S)$	$VaR_\kappa(S)$ comon.
0.5	0.5874	3.0397	1.1748
0.95	6.3681	21.3921	12.7361
0.99	20.5443	66.3990	41.0887
0.995	33.1995	106.5767	66.3990
0.999	99.0000	315.4802	198.0000

Bornes et méthode numérique

Il est rare que l'on puisse obtenir des expressions explicites pour $F_S^{\min}(s)$, $F_S^{\max}(s)$, $\underline{VaR}_\kappa(S)$ et $\overline{VaR}_\kappa(S)$.

Il est toutefois possible de recourir à la méthode numérique suivante pour évaluer approximativement $F_S^{\min}(s)$, $F_S^{\max}(s)$, $\underline{VaR}_\kappa(S)$ et $\overline{VaR}_\kappa(S)$.

Pour simplifier la présentation, on suppose que F_{X_1} et F_{X_2} sont continues.

On fixe un entier n (très grand de préférence) et $\varepsilon > 0$ (très petit de préférence). Alors, on a

$$\underline{VaR}_{\frac{k}{n}}^{(n)}(S) = \sup_{j=0,1,\ldots,k} \left\{ F_{X_1}^{-1}\left(\frac{j}{n}\right) + F_{X_2}^{-1}\left(\frac{k-j}{n}\right) \right\}$$

et

$$\overline{VaR}_{\frac{k}{n}}^{(n)}(S) = \inf_{j=k,k+1,\ldots,n} \left\{ F_{X_1}^{-1}\left(\frac{j}{n}\right) + F_{X_2}^{-1}\left(1 - \frac{(j-k)}{n}\right) \right\}.$$

Dans le cas où la distribution de X_i est définie sur un support borné $[a_i, b_i]$, alors $F_{X_i}^{-1}(0) = a_i$ et $F_{X_i}^{-1}(1) = b_i$ pour $i = 1, 2$.

Par contre, si le support de la distribution de X_i n'est pas borné, alors on fixe $F_{X_i}^{-1}(0) \simeq F_{X_i}^{-1}(0 + \varepsilon)$ et $F_{X_i}^{-1}(1) \simeq F_{X_i}^{-1}(1 - \varepsilon)$.

Exemple – Marginales Exponentielles Soit les v.a. $X_i \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$, $i = 1, 2$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$ avec $E[S] = 10$. Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs exactes de $\underline{VaR}_\kappa(S)$ et $\overline{VaR}_\kappa(S)$ ainsi que les valeurs de $\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ et $\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ pour $n = 10^6$:

κ	$\underline{VaR}_\kappa(S)$	$\overline{VaR}_\kappa(S)$	$\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$	$\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$
0.5	6.9315	27.7259	6.9315	27.7259
0.95	29.9573	73.7776	29.9573	73.7776
0.99	46.0517	105.9663	46.0517	105.9663
0.995	52.9833	119.8293	52.9832	119.8293
0.999	69.0776	152.0180	69.0776	152.0180

On constate que les valeurs approximatives sont identiques aux valeurs exactes à la 4e décimale près. De plus, il est important de mentionner que les valeurs de $\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ et $\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ sont très faciles à calculer en R.

Exemple – Marginales Pareto Soit les v.a. $X_i \sim Pa(\alpha_i, 10(\alpha_i - 1))$, $i = 1, 2$, avec $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.8$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$ avec $E[S] = 10$. Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de $\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ et $\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ pour $n = 10^6$:

κ	$\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$	$\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$
0.5	3.7579	16.8553
0.95	34.2556	107.4999
0.99	102.7217	308.4762
0.995	165.9976	478.3064
0.999	495.0000	1307.0970

Exemple – Marginales lognormales Soit les v.a. $X_i \sim LN\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$, $i = 1, 2$ (avec $\mu_1 = 0.06$, $\mu_2 = 0.07$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$) où X_i représente la valeur à la fin d'une période d'un montant 1 investi au début de la période dans le titre i, pour $i = 1, 2$. La valeur totale du portefeuille à la fin de la période est représentée par la v.a. $S = X_1 + X_2$, où $E[S] = 2.2052$. Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de $\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ et $\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ pour $n = 10^6$:

κ	$\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$	$\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$
0.0001	0.8215	2.0898
0.001	0.9496	2.0906
0.01	1.1299	2.0984
0.5	1.8187	2.5089
0.99	2.7082	4.0802
0.999	3.1924	4.9054

Par exemple, les valeurs approximatives des bornes inférieure et supérieure de la $VaR_{0.01}(S)$ sont 1.1299 et 2.0984. □

14.22 Méthodes de construction des copules

Les méthodes de construction de copules sont décrites avec beaucoup de détails notamment dans [Nelsen, 2007] : inversion, algébrique, mélange et géométrique. Dans cette section, on traite des trois premières méthodes.

14.22.1 Méthode d'inversion

Présentation

La méthode d'inversion se base sur la première partie du théorème de Sklar.

On génère la copule à partir d'une distribution continue bivariée donnée.

Soit un couple de v.a. contiues (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est F_{X_1,X_2} et les marginales sont F_{X_1} et F_{X_2}.

Alors, l'unique copule correspondante C est obtenue en utilisant la transformation inverse $x_1 = F_{X_1}^{-1}(u_1)$ et $x_2 = F_{X_2}^{-1}(u_2)$

$$C(u_1, u_2) = F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right) = \Pr(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2),$$

où (U_1, U_2) est un couple de v.a. de loi uniforme standard et dont la fonction de répartition (sur $[0,1] \times [0,1]$) est la copule C.

On peut aussi appliquer la même approche pour générer une copule de survie.

En effet, à partir de $\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$, $\overline{F}_{X_1}(x_1)$ et $\overline{F}_{X_2}(x_2)$, on obtient la copule de survie

$$\widehat{C}(u_1, u_2) = \overline{F}_{X_1,X_2}\left(\overline{F}_{X_1}^{-1}(u_1), \overline{F}_{X_2}^{-1}(u_2)\right).$$

Exemples

Plusieurs exemples de la méthode d'inversion sont fournies en sous-section 14.5.1.

— La copule EFGM en (14.2) est générée en remplaçant x_i dans la fonction de répartition conjointe de la loi bivariée exponentielle EFGM en (13.23) par $-\ln(1-u_i)$, $i = 1, 2$.

— La copule Marshall-Olkin est aussi obtenue à partir de la fonction de survie conjointe de la loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin.

— La copule normale est générée par la fonction de répartition conjointe de la loi bivariée normale

— La copule de Student est générée par la fonction de répartition conjointe de la loi bivariée de Student.

14.22.2 Méthode algébrique

Selon la méthode algébrique, on génère la copule comme une perturbation de la copule d'indépendance.

Cette méthode est traitée en détail dans [Nelsen, 2007].

La copule de Plackett est construite par la méthode algrébrique.

Les copule EFGM, Calyton, et AMH peuvent aussi être obtenues par cette méthode.

Selon (14.3), l'expression de la copule Ali-Mikhail-Haq est donnée par

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha(1-u_1)(1-u_2)\right)^k,$$

où le premier terme correspond à la copule d'indépendance et le second terme est interprété comme une pertubation de la copule d'indépendance.

14.22.3 Méthode géométrique

Présentation

La méthode géométrique de construction de copules est basée notamment sur des formes particulières de support dans $[0,1] \times [0,1]$.

Cette méthode est traitée en détail dans [Nelsen, 2007].

Exemple – Copule en forme de "$\vee$"

Soit la v.a. $U \sim Unif(0,1)$.

On définit le couple de v.a. (U_1, U_2) avec

$$U_1 = U$$

et

$$U_2 = |2U - 1|.$$

Clairement, la v.a. U_2 est une fonction déterministe de U_1.

On vérifie que les marginales sont uniformes c.-à-d.

$$U_1 \sim Unif\,(0,1)$$

et

$$U_2 \sim Unif\,(0,1)\,.$$

En effet, pour $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} F_{U_2}(x) &= \Pr\left(|2U-1| \leq x\right) \\ &= \Pr\left(-x < 2U-1 \leq x\right) \\ &= \Pr\left(2U-1 \leq x\right) - \Pr\left(2U-1 \leq -x\right) \\ &= \Pr\left(U \leq \frac{1+x}{2}\right) - \Pr\left(U \leq \frac{1-x}{2}\right) \end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} F_{U_2}(x) &= \Pr\left(U \leq \frac{1+x}{2}\right) - \Pr\left(U \leq \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \frac{1+x}{2} - \frac{1-x}{2} \\ &= x, \end{aligned}$$

pour $x \in [0,1]$, ce qui permet de conclure

$$U_2 \sim Unif\,(0,1)\,.$$

Comme U_2 ne correspond pas à une fonction monotone croissante ou décroissante de U_1, les composantes ne sont pas comonotones ou antimonotones.

Cette copule est singulière et son support est composée de deux diagonales :

— diagonale #1 décroissante de $(0,1)$ à $\left(\frac{1}{2},0\right)$;

— diagonale #2 croissante de $\left(\frac{1}{2},0\right)$ à $(1,1)$.

L'expression de $C(u_1,u_2)$ est donnée par

$$\begin{aligned} C(u_1,u_2) &= \Pr\left(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2\right) \\ &= \Pr\left(U \leq u_1, |2U-1| \leq u_2\right) \\ &= \Pr\left(U \leq u_1, 2U-1 \leq u_2, 2U-1 > -u_2\right) \\ &= \Pr\left(U \leq u_1, U \leq \frac{1+u_2}{2}, U > \frac{1-u_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Il a trois cas possibles :

— $0 \leq u_1 \leq \frac{1-u_2}{2} \leq \frac{1}{2}$ (triangle rectangle avec les coins $(0,0)$, $(0,1)$ et $\left(\frac{1}{2},0\right)$) :

$$\Pr\left(U \leq u_1, U \leq \frac{1+u_2}{2}, U > \frac{1-u_2}{2}\right) = 0\,;$$

— $0 \leq \frac{1-u_2}{2} \leq u_1 \leq \frac{1+u_2}{2} \leq 1$ (triangle isocèle avec pointe vers le bas, avec base vers le haut et avec les $(0,1)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et $(1,1)$) :

$$\begin{aligned} \Pr\left(U \leq u_1, U \leq \frac{1+u_2}{2}, U > \frac{1-u_2}{2}\right) &= u_1 - \left(\frac{1-u_2}{2}\right) \\ &= u_1 + \frac{u_2}{2} - \frac{1}{2}\,; \end{aligned}$$

— $\frac{1}{2} \leq \frac{1+u_2}{2} \leq u_1 \leq 1$ (triangle rectangle avec les coins $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(1,0)$ et $(1,1)$) :

$$\begin{aligned} \Pr\left(U \leq u_1, U \leq \frac{1+u_2}{2}, U > \frac{1-u_2}{2}\right) &= \frac{1+u_2}{2} - \frac{1-u_2}{2} \\ &= u_2. \end{aligned}$$

On obtient

$$C(u_1, u_2) = \begin{cases} u_2 & , \ 0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq u_2 \leq 2u_1 \\ u_1 & , \ 0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } 2u_1 \leq u_2 \leq 1 \\ u_1 + u_2 - 1 & , \ \frac{1}{2} \leq u_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq u_2 \leq 2 - 2u_1 \\ u_1 + u_2 - 1 & , \ \frac{1}{2} \leq u_1 \leq 1 \text{ et } 2 - 2u_1 \leq u_2 \leq 1 \end{cases}.$$

Cette copule n'est pas symétrique.

En effet, c'est un exemple de couple de v.a. (U_1, U_2) où les v.a. U_1 et U_2 sont identiquement distribuées mais qui ne sont pas échangeables c.-à-d. il existe des couples (u_1, u_2) tel que

$$F_{U_1,U_2}(u_1, u_2) \neq F_{U_1,U_2}(u_2, u_1).$$

Elle fournit aussi (et surtout) un exemple de copule où les v.a. U_1 et U_2 sont non corrélées (linéairement) mais dépendantes (en effet, la v.a. U_2 est une fonction déterministe de la v.a. U_1).

En effet, on observe

$$Cov(U_1, U_2) = E[U_1 U_2] - E[U_1] E[U_2]$$

où

$$\begin{aligned} E[U_1 U_2] &= E[U \times |2U - 1|] \\ &= E\left[U \times (-(2U-1)) \times 1_{\{(2U-1) \leq 0\}}\right] \\ &\quad + E\left[U \times (2U-1) \times 1_{\{(2U-1) \geq 0\}}\right] \\ &= E\left[U \times (1-2U) \times 1_{\left\{U \leq \frac{1}{2}\right\}}\right] + E\left[U \times (2U-1) \times 1_{\left\{U > \frac{1}{2}\right\}}\right]. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} E\left[U \times (1-2U) \times 1_{\left\{U \leq \frac{1}{2}\right\}}\right] &= \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-2x)\, dx \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E\left[U \times (2U-1) \times 1_{\left\{U > \frac{1}{2}\right\}}\right] &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(2x-1)\, dx \\ &= 1 - \frac{1}{8} - 1 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

On déduit

$$E[U_1 U_2] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Alors, on conclut

$$\begin{aligned} Cov\left(U_1, U_2\right) &= E\left[U_1 U_2\right] - E\left[U_1\right] E\left[U_2\right] \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On définit $S = U_1 + U_2$.
L'expression de $F_S(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr\left(U_1 + U_2 \leq x\right) \\ &= \Pr\left(U + |2U - 1| \leq x\right) \\ &= \Pr\left(|2U - 1| \leq x - U\right) \\ &= \Pr\left(U - x < 2U - 1 \leq x - U\right) \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \max\left(\Pr\left(2U - 1 \leq x - U\right) - \Pr\left(2U - 1 \leq U - x\right); 0\right) \\ &= \max\left(\Pr\left(3U \leq 1 + x\right) - \Pr\left(U \leq 1 - x\right); 0\right) \end{aligned}$$

Il y a trois cas possibles :

— $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$: on a

$$F_S(x) = 0;$$

— $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$: on a

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr\left(3U \leq 1 + x\right) - \Pr\left(U \leq 1 - x\right) \\ &= \frac{1 + x}{3} - (1 - x) \\ &= \frac{4x - 2}{3}; \end{aligned}$$

— $1 \leq x \leq 2$: on a

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr\left(3U \leq 1 + x\right) - 0 \\ &= \frac{1 + x}{3}. \end{aligned}$$

En résumé, on obtient

$$F_S(x) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4x-2}{3}, \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \frac{1+x}{3}, \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Exemple – Copule en forme de "$\wedge$"

Soit la v.a. $U \sim Unif(0, 1)$.
On définit le couple de v.a. (U_1, U_2) avec

$$U_1 = U$$

et

$$U_2 = 1 - |2U - 1|.$$

La v.a. U_2 est une fonction déterministe de U_1.
En exercice :

— On vérifie que les marginales sont uniformes c.-à-d.

$$U_1 \sim Unif\,(0,1)$$

et

$$U_2 \sim Unif\,(0,1)\,.$$

— On dessine le support de la copule.
— On développe l'expression de la copule.
— On démontre que $Cov\,(U_1, U_2) = 0$.
— On définit $S = U_1 + U_2$. On démontre que

$$F_S\,(x) = \begin{cases} \frac{x}{3},\ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4x-3}{3},\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 1,\ \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Exemple – Copule en forme de "<"

Soit la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$.
On définit le couple de v.a. (U_1, U_2) avec

$$U_2 = U$$

et

$$U_1 = |2U - 1|\,.$$

La v.a. U_1 est une fonction déterministe de U_2.
En exercice :

— On vérifie que les marginales sont uniformes c.-à-d.

$$U_1 \sim Unif\,(0,1)$$

et

$$U_2 \sim Unif\,(0,1)\,.$$

— On dessine le support de la copule.
— On développe l'expression de la copule.
— On démontre que $Cov\,(U_1, U_2) = 0$.
— On définit $S = U_1 + U_2$. On démontre que

$$F_S\,(x) = \begin{cases} \frac{x}{3},\ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4x-3}{3},\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 1,\ \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Exemple – Copule en forme de ">"

Soit la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$.
On définit le couple de v.a. (U_1, U_2) avec

$$U_2 = U$$

et

$$U_1 = 1 - |2U - 1|\,.$$

La v.a. U_1 est une fonction déterministe de U_2.
En exercice :

— On vérifie que les marginales sont uniformes c.-à-d.

$$U_1 \sim Unif\,(0,1)$$

et

$$U_2 \sim Unif\,(0,1)\,.$$

— On dessine le support de la copule.

— On développe l'expression de la copule.

— On démontre que $Cov\,(U_1, U_2) = 0$.

— On définit $S = U_1 + U_2$. On démontre que

$$F_S\,(x) = \begin{cases} \frac{x}{3},\ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4x-3}{3},\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 1,\ \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

14.22.4 Méthode par mélange

Présentation

On peut générer une copule en prenant une combinaison convexe de plusieurs copules.

Par exemple, la copule de Fréchet est une combinaison convexe des copules $C^{\perp}$, C^{-} et C^{+}.

Généralement, on a

$$C_M\,(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_{\theta_i}\,(u_1, u_2)\,,$$

où C_{θ_1}, ..., C_{θ_n} sont différentes copules et α_1, ..., α_n sont des masses de probabilité telles que α_1, ..., $\alpha_n \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Selon Nelsen (2006), la méthode par mélange est un cas particulier de la méthode géométrique.

Exemple – Mélange des copules Gumbel et Clayton

Pour tenir compte à la fois de la dépendance aux extrémités des queues à gauche et à droite, on construit une copule à partir des copules de Clayton et de Gumbel par le biais d'un mélange

$$C\,(\alpha, \beta) = \alpha C_{\theta_1}^{Clayton}\,(u_1, u_2) + (1-\alpha)\,C_{\theta_2}^{Gumbel}\,(u_1, u_2)$$

avec $\alpha \in [0, 1]$.

Exemple – Copule EFGM et marginales de loi Bêta

Comme la copule EFGM est une perturbation de la copule d'indépendance, il est possible dans certains cas d'obtenir des résultats explicites pour F_S où $S = X_1 + X_2$ ou pour l'espérance de fonctions intégrables de (X_1, X_2).

On considère un couple de v.a. (X_1, X_2) dont la structure de dépendance est définie par la copule EFGM et $X_1 \sim X_2 \sim Bêta\,(2, 1)$.

Alors, on obtient la fonction de densité pour la v.a. $S = X_1 + X_2$ qui correspond à

$$f_S(s) = \begin{cases} \int_0^s f_{X_1,X_2}(x, s-x)\mathrm{d}x, & 0 < s \leq 1, \\ \int_{s-1}^1 f_{X_1,X_2}(x, s-x)\mathrm{d}x, & 1 < s \leq 2, \end{cases}.$$

On trouve

$$f_S(s) = \begin{cases} (1+\alpha)\frac{2s^3}{3} - \alpha\frac{4s^5}{5} + \alpha\frac{4s^7}{35}, & 0 < s \leq 1, \\ (1+\alpha)\left(2sy + \frac{2}{3}(1-y^3)\right) & \\ -\alpha\left(4s(1-y^4) - \frac{16}{5}(1-y^5)\right) & \\ +4\alpha\left(\frac{1}{35} + \frac{y}{5} + \frac{3y^2}{5} + y^4 - y^4 - \frac{3y^5}{5} - \frac{y^6}{5} - \frac{y^7}{35}\right), & 1 < s \leq 2, \end{cases}$$

avec $y = s - 1$.

L'expression de $F_S(s)$ est donnée par

$$F_S(s)\begin{cases} (1+\alpha)\frac{s^4}{6}-\alpha\frac{2s^6}{15}+\alpha\frac{s^8}{70}, & 0<s\leq 1 \\ \frac{1}{6}+\frac{\alpha}{21}+(1+\alpha)\left(y^2-\frac{2y^3}{3}+\frac{2y}{3}-\frac{y^6}{6}\right) & \\ -2\alpha\left(s^2-1-\frac{2sy^5}{5}-\frac{8y}{5}+\frac{y^6}{3}\right) & \\ +4\alpha\left(\frac{y}{35}+\frac{y^2}{10}+\frac{y^3}{5}+\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}-\frac{y^6}{10}-\frac{y^7}{35}-\frac{y^8}{280}\right), & 1<s\leq 2 \end{cases},$$

avec $y=s-1$.

14.23 Mesures de dépendance

Un couple de v.a. (X_1, X_2) sont dépendantes si

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\neq F_{X_1}(x_1)\,F_{X_2}(x_2).$$

Il existe différentes mesures pour quantifier la relation de la dépendance ou l'association entre deux v.a. X_1 et X_2.

Dans les sections qui suivent, on présente brièvement la mesure de corrélation linéaire, deux mesures de corrélation de rangs et deux mesures de dépendance de queue.

14.24 Propriétés désirables pour un mesure de dépendance

On débute en indiquant les propriétés souhaitables pour une mesure de dépendance.

Propriétés 14.40 *Les propriétés désirables pour une mesure de dépendance $\pi(X_1, X_2)$ sont les suivantes :*

1. *Symétrie :*
$$\pi(X_1,X_2)=\pi(X_2,X_1)\ ;$$
2. *Normalisation :*
$$-1\leq\pi(X_1,X_2)\leq 1\ ;$$
3. *Comonotonicité :*
$$\pi(X_1,X_2)=1$$
si et seulement si X_1 et X_2 sont comonotones ;
4. *Antimonotonicité :*
$$\pi(X_1,X_2)=-1$$
si et seulement si X_1 et X_2 sont antimonotones ;
5. *Invariance : pour toute fonction strictement monotone $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on a*
$$\pi(\phi(X_1),X_2)=\begin{cases}\pi(X_1,X_2)\text{, si } \phi \text{ est croissante}\\ -\pi(X_1,X_2)\text{, si } \phi \text{ est décroissante}\end{cases}.$$

14.25 Coefficient de corrélation de Pearson

14.25.1 Définition

Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) dont les espérances et les variances existent.

La définition du coefficient de corrélation de Pearson est

$$\rho_P(X_1,X_2)=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\,\mathrm{Var}(X_2)}}.$$

14.25.2 Est-ce que le coefficient de corrélation de Pearson satisfait les propriétés désirables pour un mesure de dépendance

Le coefficient de corrélation de Pearson ne satisfait pas à toutes les propriétés désirables.

— Symétrie : Le coefficient ρ_P est symétrique c.-à-d.

$$\rho_P(X_1, X_2) = \rho_P(X_2, X_1).$$

— Normalisation : Le coefficient ρ_P prend des valeurs entre -1 et 1 c.-à-d.

$$-1 \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq 1.$$

Mais, il n'est pas assuré d'atteindre les valeurs -1 et 1.

— Comonotonicité : Si X_1 et X_2 sont comonotones, cela n'implique pas

$$\pi(X_1, X_2) = 1.$$

— Antimonotonicité : Si X_1 et X_2 sont antimonotones, cela n'implique pas

$$\pi(X_1, X_2) = -1.$$

— Invariance : Le coefficient n'est pas invariant pour toute transformation strictement monotone $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\pi(\phi(X_1), X_2) = \begin{cases} \pi(X_1, X_2), \text{ si } \phi \text{ est croissante} \\ -\pi(X_1, X_2), \text{ si } \phi \text{ est décroissante} \end{cases}.$$

14.25.3 Mesure de relation de dépendance linéaire

Le coefficient de corrélation de Pearson mesure la relation de dépendance linéaire entre les v.a. X_1 et X_2.

— (Cas particulier d'un couple de v.a. comonotones = relation linéaire avec pente positive).
Si $X_2 = a + bX_1$ et $b > 0$, alors

$$\begin{aligned} \rho_P(X_1, X_2) &= \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\,\mathrm{Var}(X_2)}} \\ &= \frac{b\mathrm{Var}(X_1)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\,b^2\mathrm{Var}(X_1)}} = 1. \end{aligned}$$

— (Cas particulier d'un couple de v.a. antimonotones = relation linéaire avec pente négative).
Si l'on suppose que $X_2 = a + bX_1$ avec $b = -c$ où $c > 0$, il en résulte que

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\,\mathrm{Var}(X_2)}} = \frac{-c\mathrm{Var}(X_1)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\,c^2\mathrm{Var}(X_1)}} = -1.$$

14.25.4 Invariance aux transformations linéaires

Le coefficient de corrélation de Pearson est invariant par rapport aux transformations linéaires.
Soit deux scalaires b_1, $b_2 > 0$.
Soit le couple de v.a. (Y_1, Y_2) définies par

$$Y_1 = a_1 + b_1 X_1$$

et

$$Y_2 = a_2 + b_2 X_2.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\rho_P(Y_1, Y_2) &= \rho_P(a_1 + b_1 X_1, a_2 + b_2 X_2) \\ &= \rho_P(X_1, X_2).\end{aligned}$$

14.25.5 Problèmes

Comme il ne satisfait pas aux 5 propriétés désirables, le coefficient de corrélation de Pearson ne permet pas de mesurer adéquatement la concordance (ou l'association) entre deux v.a.

Il existe des mesures qui satisfont aux 5 propriétés, dont les deux plus populaires sont le tau de Kendall et le rho de Spearman.

Problèmes de perception

Il y a des problèmes de perception liés au coefficient de corrélation de Pearson.

— **Problème #1. Coefficient de corrélation de Pearson et marginales.**

  — Il est faux de croire que les marginales et le coefficient de corrélation linéaire pour un couple de v.a. déterminent leur distribution conjointe.

  — Il est possible de construire différentes distributions pour le couple (X_1, X_2) à partir des mêmes marginales F_{X_1} et F_{X_2} et de différentes copules.

  — De plus, il est important de souligner que la valeur du coefficient de corrélation de Pearson dépend des marginales.

— **Problème #2. Coefficient de corrélation de Pearson et valeurs atteignables (-1 et 1).**

  — Il est aussi erroné de croire que, pour toutes marginales F_{X_1} et F_{X_2} et pour tout coefficient de corrélation $\rho_P(X_1, X_2) \in [-1, 1]$, il est toujours possible de construire une fonction de répartition conjointe dont les marginales sont F_{X_1} et F_{X_2} et la corrélation $\rho_P(X_1, X_2)$.

— **Problème #3**. Le coefficient de corrélation de Pearson ne satisfait pas aux propriétés désirables suivantes pour une mesure de dépendance :

  — comonotonicité (voir exemples plus loin)

  — antimonotonicité (voir exemples plus loin)

  — invariance pour toute transformation monotones

  Bref, le coefficient de corrélation de Pearson satisfait uniquement à la propriété de symétrie.

Valeurs minimale et maximale du coefficient de corrélation de Pearson

Proposition 14.41 *Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) dont les marginales ont des espérances et des variances finies ainsi qu'une fonction de répartition non spécifiée. Alors, on a*

1. *les valeurs atteignables de $\rho_P(X_1, X_2)$ sont comprises dans l'intervalle*

$$\left[\rho_P^{\min}, \rho_P^{\max}\right] \subseteq [-1, 1] \ ;$$

2. *la valeur $\rho_P^{\min}$ est atteinte si et seulement si les v.a. X_1 et X_2 sont antimonotones ;*
3. *la valeur $\rho_P^{\max}$ est atteinte si et seulement si les v.a. X_1 et X_2 sont comonotones.*

Preuve. Voir, p. ex., [Embrechts et al., 2002] et [McNeil et al., 2015]. ■

Exemples – valeurs minimale et maximale

L'exemple suivant fournit une illustration d'un cas où $\rho_P(X_1, X_2)$ est strictement inférieur à 1 bien que X_1 et X_2 soit comonotones.

Exemple 14.42 ***Marginales exponentielle et uniforme.***

— *Soit le couple de v.a. comonotones* (X_1, X_2) *où* $X_1 \sim Exp(1)$ *et* $X_2 \sim Unif(0,1)$.

— *On a* $X_1 = -\ln(1-U)$ *et* $X_2 = U = 1 - \exp(-X_1)$.

— *Tout d'abord, on déduit*

$$E[X_1X_2] = E[X_1(1-\exp(-X_1))] = E[X_1] - E[X_1\exp(-X_1)],$$

où

$$E[X_1\exp(-X_1)] = \int_0^\infty x\exp(-x)\exp(-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

— *Il en résulte que* $E[X_1X_2] = \frac{3}{4}$.

— *Ensuite, on a*

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] \\ &= \frac{3}{4} - 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

— *Alors, on obtient*

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{1}{4}\sqrt{12} = 0.866.$$

— *Soit le couple de v.a. antimonotones* (X_1, X_2) *où* $X_1 \sim Exp(1)$ *et* $X_2 \sim Unif(0,1)$.

— *On a* $X_1 = -\ln(U)$ *et* $X_2 = U = \exp(-X_1)$.

— *Tout d'abord, on déduit*

$$E[X_1X_2] = E[X_1\exp(-X_1)] = E[X_1\exp(-X_1)],$$

où

$$E[X_1\exp(-X_1)] = \int_0^\infty x\exp(-x)\exp(-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

— *Il en résulte que* $E[X_1X_2] = \frac{1}{4}$.

— *Ensuite, on déduit*

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

— *Enfin, on conclut*

$$\rho_P(X_1, X_2) = -\frac{1}{4}\sqrt{12} = -0.866.$$

□

Exemple 14.43 ***Marginales lognormales.***

— *Soit les v.a.* $X_i \sim LN(\mu_i, \sigma_i^2)$ *pour* $i = 1, 2$.

— *Si* (X_1, X_2) *forme un couple de v.a. comonotones, on déduit que*

$$\rho_P^+(X_1, X_2) = \frac{(\mathrm{e}^{\sigma_1\sigma_2} - 1)}{\sqrt{(\mathrm{e}^{\sigma_1^2} - 1)(\mathrm{e}^{\sigma_2^2} - 1)}}.$$

— *On définit*

$$X_1 = \exp(\mu_1 + \sigma_1 Z)$$

et

$$X_2 = \exp(\mu_2 + \sigma_2 Z)$$

où

$$Z \sim Norm(0,1).$$

On y va

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= E[\exp(\mu_1 + \sigma_1 Z)\exp(\mu_2 + \sigma_2 Z)] \\ &= E[\exp(\mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) Z)] \\ &= \exp\left((\mu_1 + \mu_2) + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{2}\right). \end{aligned}$$

— *Ensuite, on a*

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] \\ &= \exp\left((\mu_1 + \mu_2) + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{2}\right) - \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right) \times \exp\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right) \end{aligned}$$

— *Puis, on a*

$$\begin{aligned} \rho_P(X_1, X_2) &= \frac{\mathrm{e}^{\mu_1+\mu_2}\mathrm{e}^{\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2}{2}\right)} - \mathrm{e}^{\mu_1+\mu_2}\mathrm{e}^{\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\right)}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2\mu_1+\sigma_1^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)\mathrm{e}^{2\mu_2+\sigma_2^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mu_1+\frac{1}{2}\sigma_1^2}\mathrm{e}^{\mu_2+\frac{1}{2}\sigma_2^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_1\sigma_2}-1\right)}{\mathrm{e}^{\mu_1+\frac{1}{2}\sigma_1^2}\mathrm{e}^{\mu_2+\frac{1}{2}\sigma_2^2}\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\sigma_1\sigma_2}-1}{\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)}}. \end{aligned}$$

— *Si* (X_1, X_2) *forme un couple de v.a. antimonotones, on déduit que*

$$\rho_P^-(X_1, X_2) = \frac{\left(\mathrm{e}^{-\sigma_1\sigma_2}-1\right)}{\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)}}.$$

— *On définit*

$$X_1 = \exp(\mu_1 + \sigma_1 Z)$$

et

$$X_2 = \exp(\mu_2 - \sigma_2 Z)$$

où

$$Z \sim Norm(0,1).$$

On y va

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= E[\exp(\mu_1 + \sigma_1 Z)\exp(\mu_2 - \sigma_2 Z)] \\ &= E[\exp(\mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) Z)] \\ &= \exp\left((\mu_1 + \mu_2) + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{2}\right). \end{aligned}$$

— *Ensuite, on a*

$$\begin{aligned} Cov\left(X_1, X_2\right) &= E\left[X_1 X_2\right] - E\left[X_1\right] E\left[X_2\right] \\ &= \exp\left((\mu_1+\mu_2) + \frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2}{2}\right) - \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right) \times \exp\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right) \end{aligned}$$

— *Puis, on a*

$$\begin{aligned} \rho_P\left(X_1, X_2\right) &= \frac{\mathrm{e}^{\mu_1+\mu_2}\mathrm{e}^{\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2}{2}\right)} - \mathrm{e}^{\mu_1+\mu_2}\mathrm{e}^{\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\right)}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2\mu_1+\sigma_1^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)\mathrm{e}^{2\mu_2+\sigma_2^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mu_1+\frac{1}{2}\sigma_1^2}\mathrm{e}^{\mu_2+\frac{1}{2}\sigma_2^2}\left(\mathrm{e}^{-\sigma_1\sigma_2}-1\right)}{\mathrm{e}^{\mu_1+\frac{1}{2}\sigma_1^2}\mathrm{e}^{\mu_2+\frac{1}{2}\sigma_2^2}\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\sigma_1\sigma_2}-1}{\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)}}. \end{aligned}$$

— *Pour* $\sigma_1 = 2$ *et* $\sigma_2 = 3$, *on obtient* $\rho_P^+\left(X_1, X_2\right) = 0.6107$ *et* $\rho_P^-\left(X_1, X_2\right) = -0.0015$.

— *Pour* $\sigma_1 = 0.2$ *et* $\sigma_2 = 0.3$, *on obtient*

$$\begin{aligned} \rho_P^+\left(X_1, X_2\right) &= \frac{\mathrm{e}^{0.2\times 0.3}-1}{\sqrt{\left(\mathrm{e}^{0.2^2}-1\right)\left(\mathrm{e}^{0.3^2}-1\right)}} \\ &= 0.997\,45 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \rho_P^-\left(X_1, X_2\right) &= \frac{\mathrm{e}^{-0.2\times 0.3}-1}{\sqrt{\left(\mathrm{e}^{0.2^2}-1\right)\left(\mathrm{e}^{0.3^2}-1\right)}} \\ &= -0.93936 \end{aligned}$$

□

Exemple 14.44 ***Marginales exponentielles.***

— *Soit les v.a.* $X_i \sim Exp\left(1\right)$ *pour* $i = 1, 2$.

— *Soit* $\left(X_1, X_2\right)$ *un couple de v.a. comonotones*

  — *On a*

$$X_1 = X$$

  et

$$X_2 = X,$$

  où

$$X \sim Exp\left(1\right).$$

  — *On déduit que*

$$E\left[X_1 X_2\right] = E\left[X^2\right] = 2.$$

  — *On calcule que*

$$Cov\left(X_1 X_2\right) = 1.$$

  — *On obtient*

$$\rho_P^+\left(X_1, X_2\right) = 1.$$

— *Soit* (X_1, X_2) *un couple de v.a. antimonotones.*

  — *Soit une v.a.* $U \sim Unif(0,1)$.

  — *On a*

$$X_1 = -\ln(1-U)$$

  et

$$X_1 = -\ln(U).$$

  — *Selon les tables d'intégration (à préciser), on déduit que*

$$E[X_1X_2] = \int_0^1 \ln(u)\ln(1-u)\,du = 2 - \frac{1}{6}\pi^2.$$

  — *On calcule que*

$$\begin{aligned} Cov(X_1X_2) &= E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] \\ &= 2 - \frac{1}{6}\pi^2 - 1 \\ &= 1 - \frac{1}{6}\pi^2. \end{aligned}$$

  — *On obtient*

$$\rho_P^-(X_1, X_2) = 1 - \frac{1}{6}\pi^2 = -0.64493.$$

□

Corrélation linéaire nulle et indépendance

Si les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes, $\rho_P(X_1, X_2) = 0$ c.-à-d. elles ne sont pas corrélées linéairement (elles sont non-corrélées linéairement).

Si les v.a. (X_1, X_2) sont non corrélées linéairement c.-à-d. $\rho_P(X_1, X_2) = 0$, cela n'implique pas qu'elles soient indépendantes.

Dans l'exemple suivant, on considère des lois conjointes où la corrélation est nulle et on les compare à la loi conjointe avec indépendance.

Exemple 14.45 ***Couples de v.a. non-corrélées.***

— *Soit une couple de v.a.* (U_1, U_2) *où* $U_i \sim U(0,1)$ *(*$i = 1, 2$*) et avec* $Cov(U_1, U_2) = 0$.

— *On définit* $S = U_1 + U_2$.

— *Quatre hypothèses considérées pour la loi conjointe de* (U_1, U_2) *:*

  — *hypothèse 1 (copule de Fréchet) :*

$$F_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\max(u_1 + u_2 - 1; 0) + \frac{1}{2}\min(u_1; u_2) \ ;$$

  — *hypothèse 2 (indépendance) :*

$$F_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = u_1u_2 \ ;$$

  — *hypothèse 3 :*

$$U_1 = U$$

  et

$$U_2 = |2U - 1|$$

  où $U \sim U(0,1)$ *;*

— *hypothèse 4 :*

$$U_1 = U$$

et

$$U_2 = 1 - |2U - 1|$$

où $U \sim U(0,1)$.

— *Pour les 4 hypothèses, la valeur de* $\rho_P(U_1, U_2)$ *est nulle.*

— *Les expressions de* F_S *pour chaque hypothèse sont les suivantes (à faire en exercice) :*

— *hypothèse 1* : $F_S(x) = \begin{cases} \frac{x}{4},\ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4},\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$;

— *hypothèse 2* : $F_S(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2},\ 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1,\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$;

— *hypothèse 3* : $F_S(x) = \begin{cases} 0,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}(2x-1),\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \frac{x+1}{3},\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$;

— *hypothèse 4* : $F_S(x) = \begin{cases} \frac{x}{3},\ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}(4x-3),\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 1,\ \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$.

— *Bien que les v.a.* U_1 *et* U_2 *soient non-corrélées pour les 4 hypothèses, on constate dans l'illustration 14.19 que les valeurs de* F_S *diffèrent clairement.* □

14.26 Mesures de corrélation des rangs et concordance

On considère une paire de v.a. continues (X_1, X_2).
Les deux principales mesures de corrélation des rangs sont le rho de Spearman et le tau de Kendall.
Le traitement de mesures de rang pour les v.a. discrètes n'est pas considérées dans le présent chapitre.
Comme (X_1, X_2) est une paire de v.a. continue, il existe une unique copule telle que

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)).$$

Selon Nelsen (2006), il est convenu d'utiliser le terme "mesure de corrélation" pour le coefficience de corrélation (linéaire) de Pearson et le terme (plus moderne selon Nelsen (2006) "mesure d'association" pour le rho de Spearman et le tau de Kendall.

14.27 Rho de Spearman

14.27.1 Définition

Le rho de Spearman est une mesure de rang.
Il est possible d'établir un lien entre rho de Spearman et le coefficient de corrélation linéaire de Pearson.
(Note historique : Charles Spearman était un collègue de Karl Pearson.)

Définition 14.46 *Le rho de Spearman associé au couple* (X_1, X_2) *est défini par*

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho_P(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)).$$

Le rho de Spearman correspond au coeffcient de corrélation linéaire entre les fonctions de répartition des v.a. X_1 et X_2.

Illustration 14.19 – Courbes de $F_S(s)$ (hypothèse 1 = ligne avec traits et points ; hypothèse 2 = ligne pointillée ; hypothèse 3 = ligne continue ; hypothèse 4 = ligne avec traits).

Comme

$$\begin{aligned} U_1 &= F_{X_1}(X_1) \\ U_2 &= F_{X_2}(X_2), \end{aligned}$$

le rho de Spearman est aussi représenté sous la forme

$$\begin{aligned} \rho_S(X_1, X_2) &= \rho_P(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)) && (14.8) \\ &= \frac{E[U_1U_2] - E[U_1]E[U_2]}{\sqrt{\mathrm{Var}(U_1)\mathrm{Var}(U_2)}} \\ &= 12\left(E[U_1U_2] - \frac{1}{4}\right), && (14.9) \end{aligned}$$

car

$$\sqrt{\mathrm{Var}(U_1)\mathrm{Var}(U_2)} = \frac{1}{12}$$

et

$$E[U_1]E[U_2] = \frac{1}{4}.$$

On mentionne que

$$\begin{aligned} E[U_1U_2] &= E[F_{X_1}(X_1)F_{X_2}(X_2)] \\ &= \int\int F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \end{aligned}$$

14.27.2 Rho de Spearman et propriétés désirables

Le rho de Spearman satisfait aux 5 propriétés désirables.

— Symétrie
— Normalisation
— Comonotonicité
— Antimonotonicité
— Invariance

14.27.3 Rho de Spearman et valeurs possibles

Les valeurs possibles du rho de Spearman sont $-1 \leq \rho_S(X_1, X_2) \leq 1$.
Voir les détails dans les 2 sous-sections qui suivent.

14.27.4 Rho de Spearman et comonotonicité

Remarque 14.47 *Si X_1 et X_2 sont comonotones, cela implique que $\rho_S(X_1, X_2) = 1$.*

Si X_1 et X_2 sont comonotones, alors les v.a. correspondantes U_1 et U_2 sont définies par

$$U_1 = U$$

et

$$U_2 = U$$

Il en résulte que

$$E[U_1U_2] = E\left[U^2\right] = \frac{1}{3}$$

et

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1.$$

14.27.5 Rho de Spearman et antimonotonicité

Remarque 14.48 *Si X_1 et X_2 sont anti-monotones, cela implique que $\rho_S(X_1, X_2) = -1$ (.*

Si X_1 et X_2 sont antimonotones, alors les v.a. correspondantes U_1 et U_2 sont définies par

$$U_1 = U$$

et

$$U_2 = 1 - U$$

Il en résulte que

$$E[U_1U_2] = E[U] - E\left[U^2\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

et

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = -1.$$

14.27.6 Rho de Spearman et indépendance

Remarque 14.49 *Dans le cas où les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes, cela implique que $\rho_S(X_1, X_2) = 0$.*

Si les v.a. (X_1, X_2) sont indépendantes, alors

$$E[U_1U_2] = E[U_1]E[U_2] = \frac{1}{4}$$

et

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0.$$

14.27.7 Rho de Spearman et représentation alternative

On mentionne que (14.9) est équivalent à

$$\begin{aligned} & \rho_S(X_1, X_2) \\ = \; & 12\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) - F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\right)f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \end{aligned}$$

La transformation en (14.8) permet de tenir compte des rangs en éliminant l'effet des marginales.

— Si la v.a. X_1 a tendance à augmenter quand X_2 augmente, alors le rho de Spearman prendra une valeur positive.

— Si la v.a. X_1 a tendance à décroître quand X_2 augmente, alors le rho de Spearman prendra une valeur négative.

14.28 Tau de Kendall

14.28.1 Définition

Le tau de Kendall est mesure la concordance entre les v.a. (X_1, X_2).

Définition 14.50 *Le tau de Kendall associé au couple* (X_1, X_2) *est défini par*

$$\begin{aligned}\tau(X_1, X_2) &= \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) \\ &\quad - \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0), \end{aligned} \tag{14.10}$$

où (X_1', X_2') *est indépendant de* (X_1, X_2) *et possède les mêmes marginales que* (X_1, X_2).

L'interprétation de (14.10) est donnée par

$$\tau(X_1, X_2) = \Pr(\text{concordance}) - \Pr(\text{discordance}).$$

14.28.2 Propriétés du tau de Kendall

Les valeurs possibles du tau de Kendall sont $-1 \leq \tau(X_1, X_2) \leq 1$.
Si X_1 et X_2 sont comonotones (antimonotones), cela implique que $\tau(X_1, X_2) = 1$ (-1).
De plus, si les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes, cela implique que $\tau(X_1, X_2) = 0$.
La valeur du tau de Kendall ne dépend pas des marginales du couple (X_1, X_2).
Le premier (deuxième) terme mesure la probabilité d'observer des valeurs concordantes (discordantes).
Ainsi, plus la relation de dépendance entre (X_1, X_2) est positive (négative) plus la valeur s'approchera de 1 (-1).

14.29 Remarques sur le rho de Spearman et tau de Kendall

Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont invariants aux transformations monotones.

— Si ϕ_1, ϕ_2 sont deux fonctions croissantes, alors

$$\tau(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)) = \tau(X_1, X_2)$$

et

$$\rho_S(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)) = \rho_S(X_1, X_2).$$

— Si ϕ_1, ϕ_2 sont deux fonctions décroissantes, alors

$$\tau(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)) = \tau(X_1, X_2)$$

et

$$\rho_S(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)) = \rho_S(X_1, X_2).$$

Le tau de Kendall et le rho de Spearman satisfont les 5 propriétés désirables d'une mesure de dépendance.
Cela signifie que le tau de Kendall et le rho de Spearman sont des mesures de concordance.

— Les v.a. X et Y sont concordantes si les valeurs élevées de l'une tendent à être associées aux valeurs élevées de l'autre et si les valeurs petites de l'une tendent à être associées aux valeurs petites de l'autre.

— Les v.a. X et Y sont discordantes si les valeurs élevées de l'une tendent à être associées aux valeurs petites de l'autre et si les valeurs petites de l'une tendent à être associées aux valeurs élevées de l'autre.

Relation entre le rho de Spearman et tau de Kendall

Il existe une relation entre le tau de Kendall et le rho de Spearman donnée dans la proposition suivante.

Proposition 14.51 *Soit un couple de v.a. continues* (X_1, X_2).

1. *Pour* $0 \leq \tau(X_1, X_2) \leq 1$, *on a*

$$\frac{3\tau(X_1, X_2) - 1}{2} \leq \rho_S(X_1, X_2) \leq \frac{1 + 2\tau(X_1, X_2) - \tau(X_1, X_2)^2}{2}.$$

2. Pour $-1 \leq \tau(X_1, X_2) \leq 0$*, on a*

$$\frac{\tau(X_1, X_2)^2 + 2\tau(X_1, X_2) - 1}{2} \leq \rho_S(X_1, X_2) \leq \frac{3\tau(X_1, X_2) + 1}{2}.$$

Preuve. Voir, p. ex., [Joe, 1997] ou [Nelsen, 2007]. ■

14.30 Mesures de corrélation des rangs (mesures d'association) et copule

Soit une paire de v.a. continues (X_1, X_2).

14.30.1 Rho de Spearman

En appliquant (14.9), l'expression du rho de Spearman peut aussi s'écrire en fonction de la copule associée

$$\begin{aligned}
\rho_S(X_1, X_2) &= 12\left(\int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 - \frac{1}{4}\right) \\
&= 12E[C(U_1, U_2)] - 3 \\
&= 12\int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 \mathrm{d}C(u_1, u_2) - 3.
\end{aligned}$$

Exercice 14.52 *Développer l'expression du rho de Spearman pour la copule FGM.*

14.30.2 Tau de Kendall

L'expression en (14.10) du tau de Kendall devient

$$\tau(X_1, X_2) = 2\Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) - 1.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) &= \Pr(X_1 > X_1', X_2 > X_2') \\
&\quad + \Pr(X_1 \leq X_1', X_2 \leq X_2').
\end{aligned}$$

On peut montrer que

$$\Pr(X_1 > X_1', X_2 > X_2') = \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2)\,\mathrm{d}C(u_1, u_2)$$

et

$$\Pr(X_1 \leq X_1', X_2 \leq X_2') = \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2)\,\mathrm{d}C(u_1, u_2)$$

Il en résulte que l'on peut s'exprimer le tau de Kendall en fonction de la copule associée à leur distribution conjointe

$$\begin{aligned}
\tau(X_1, X_2) &= 4\int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2)\,\mathrm{d}C(u_1, u_2) - 1 \\
&= 4\int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2)\,c(u_1, u_2)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 - 1 \\
&= 4E[C(U_1, U_2)] - 1.
\end{aligned}$$

14.30.3 Quelques expressions

On indique dans le tableau ci-dessous les expressions du tau de Kendall et du rho de Spearman associées à certaines copules :

Copule	$\tau(X_1, X_2)$	$\rho_S(X_1, X_2)$
Clayton	$\frac{\alpha}{\alpha+2}$	–
Normale	$\frac{2}{\pi}\arcsin(\alpha)$	$\frac{6}{\pi}\arcsin(\alpha)$
Gumbel	$\frac{\alpha-1}{\alpha}$	–
Fréchet	$\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2)}{3}$	$(\alpha-\beta)$
EFGM	$\frac{2\alpha}{9}$	$\frac{\alpha}{3}$
Marshall-Olkin	$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}$	$\frac{3\alpha\beta}{2\alpha+\beta-2\alpha\beta}$

Le tau de Kendall et le rho de Spearman pour une copule donnée sont identiques à ceux de la copule de survie qui lui est associée.

14.30.4 Mesures d'association et paramètres des copules

Copules gaussiennes

— $\rho(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi}\arcsin\frac{\alpha}{2}$

— $\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi}\arcsin\alpha$

Dans le tableau ci-dessous, on fournit les valeurs des deux mesures d'associations dans le cas de la copule de normale (gaussienne).

INSERER GRAPHIQUE ou TABLEAU

En observant le tableau des valeurs, on constate que $\rho_S(X_1, X_2) \simeq \alpha$.

Autres exemples – Rho de Spearman

— Copule de Clayton. Forme compliquée.

— Copule de Frank. On a

$$\rho_S(X_1, X_2) = 1 + \frac{12}{\alpha}\left(D_2(\alpha) - D_1(\alpha)\right)$$

où $D_k(x)$ est la fonction dite Debye

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k}\int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1}dt.$$

— Copule de Gumbel. Forme non explicite.

— Copule Normale. On a

$$\rho_S(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}\alpha$$

— Copule de Fréchet. On a

$$\rho_S(X_1, X_2) = \alpha - \beta$$

— Copule de FGM. On a

$$\rho_S(X_1, X_2) = \frac{\alpha}{3}$$

— Copule de Marshall-Olkin. On a

$$\rho_S(X_1, X_2) = \frac{3\alpha\beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta}$$

Autres exemples – Tau de Kendall

— Copule de Clayton. On a

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{\alpha}{\alpha + 2}$$

— Copule de Frank. On a

$$\tau(X_1, X_2) = 1 + \frac{4}{\alpha}(D_1(\alpha) - 1)$$

où $D_k(x)$ est la fonction dite Debye

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k}\int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1}dt.$$

— Copule de Gumbel. On a

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

— Copule de Fréchet. On a

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 2)}{3}$$

— Copule de FGM. On a

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{2\alpha}{9}$$

— Copule de Marshall-Olkin. On a

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \alpha\beta + \beta}$$

14.31 Estimation du rho de Spearman et du tau de Kendall

14.31.1 Mise en place

On dispose d'une suite de n vecteurs d'observations

$$\{(x_{1,j}, x_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}$$

de la suite de vecteurs aléatoires (dimension 2) i.i.d.

$$\{(X_{1,j}, X_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}.$$

On note

$$\begin{aligned} \underline{x}_j &= (x_{1,j}, x_{2,j}) \\ \underline{X}_j &= (X_{1,j}, X_{2,j}) \end{aligned}$$

14.31.2 Rho de Spearman

On considère la suite de n vecteurs d'observations

$$\{(x_{1,j}, x_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}.$$

Le rang d'une observation $x_{i,j}$, noté $rank(x_{i,j})$, correspond à la position ("rang") dans les observations $\{x_{i,1}, ..., x_{i,n}\}$ pour $i = 1, 2$.

Pour la composante j de la suite, on calcule la valeur de la fonction de répartition empirique

$$\{(F_{1,n}(x_{1,j}), F_{1,n}(x_{2,j})), j = 1, 2, ..., n\}.$$

où

$$F_{1,n}(x_{1,j}) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n} 1_{\{x_{1,j} \leq x_{1,j}\}} = \frac{rank(x_{1,j})}{n+1}$$

et

$$F_{2,n}\left(x_{2,j}\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n}1_{\{x_{2,j}\leq x_{2,j}\}}=\frac{rank\left(x_{2,j}\right)}{n+1}.$$

Pour $i=1,2$, les moyennes empiriques sont

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_1 &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}F_{1,n}\left(x_{1,j}\right)\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}\left(1+....+n\right)\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}\frac{\left(n\times\left(n+1\right)\right)}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_2 &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}F_{2,n}\left(x_{2,j}\right)\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}\frac{\left(n\times\left(n+1\right)\right)}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

L'estimateur empirique du rho de Spearman est l'estimateur empirique du coefficient de corrélation de Pearson

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}_S\left(X_1,X_2\right) &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{1,n}\left(x_{1,j}\right)-\widetilde{F}_1\right)\left(F_{2,n}\left(x_{2,j}\right)-\widetilde{F}_2\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{1,n}\left(x_{1,j}\right)-\widetilde{F}_1\right)^2\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{2,n}\left(x_{1,j}\right)-\widetilde{F}_2\right)^2}}\\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(F_{1,n}\left(x_{1,j}\right)-\frac{1}{2}\right)\left(F_{2,n}\left(x_{2,j}\right)-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(F_{1,n}\left(x_{1,j}\right)-\frac{1}{2}\right)^2\sum_{j=1}^{n}\left(F_{2,n}\left(x_{1,j}\right)-\frac{1}{2}\right)^2}}\\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{rank(x_{1,j})}{n+1}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{rank(x_{1,j})}{n+1}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(F_{1,n}\left(x_{1,j}\right)-\frac{1}{2}\right)^2\sum_{j=1}^{n}\left(F_{2,n}\left(x_{1,j}\right)-\frac{1}{2}\right)^2}}\end{aligned}$$

En retravaillant les termes, on obtient

$$\widehat{\rho}_S\left(X_1,X_2\right)=\frac{12}{n\left(n+1\right)\times\left(n-1\right)}\times\sum_{j=1}^{n}rank\left(x_{1,j}\right)rank\left(x_{2,j}\right)-3\frac{n+1}{n-1}$$

(voir Favre et Genest (2007).

14.31.3 Tau de Kendall

On compare les $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ paires de vecteurs d'observations au sein de la suite de n vecteurs d'observations

$$\left\{\left(x_{1,j},x_{2,j}\right),j=1,2,...,n\right\}.$$

Soit la paire d'observations $(x_{1,j},x_{2,j})$ et $(x_{1,k},x_{2,k})$.

— La paire est concordante si

$$x_{1,j}>x_{1,k}\text{ et }x_{2,j}>x_{2,k}$$

ou

$$x_{1,j}<x_{1,k}\text{ et }x_{2,j}<x_{2,k}.$$

— La paire est discordante si

$$x_{1,j} > x_{1,k} \text{ et } x_{2,j} < x_{2,k}$$

ou

$$x_{1,j} < x_{1,k} \text{ et } x_{2,j} > x_{2,k}.$$

On définit les quantités suivantes :

— c_n = nombre de paires concordantes ;

— d_n = nombre de paires concordantes.

L'estimateur empirique du tau de Kendall correspond

$$\begin{aligned}\widehat{\tau}(X_1, X_2) &= \frac{\text{nb de paires concordantes - nb de paires disconcordantes}}{\text{nb total de combinaison de paires}} \\ &= \frac{c_n - d_n}{\binom{n}{2}}.\end{aligned}$$

Si toutes les paires sont concordantes, alors

$$c_n = \binom{n}{2}$$

et

$$d_n = 0$$

ce qui mène à

$$\widehat{\tau}(X_1, X_2) = 1.$$

Si toutes les paires sont discordantes, alors

$$c_n = 0$$

et

$$d_n = \binom{n}{2}$$

ce qui mène à

$$\widehat{\tau}(X_1, X_2) = -1.$$

On utilise aussi la représentation suivante :

$$\widehat{\tau}(X_1, X_2) = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} sign\left((x_{1,j} - x_{1,k})(x_{2,j} - x_{2,k})\right)}{\binom{n}{2}},$$

où

$$sign(a) = \begin{cases} -1 & , a < 0 \\ 1 & , a > 0 \end{cases}.$$

14.32 Mesures de dépendance et indépendance

Si les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes, on a $\rho_P(X_1, X_2) = 0$, $\tau(X_1, X_2) = 0$ et $\rho_S(X_1, X_2) = 0$. Toutefois, $\rho_P(X_1, X_2) = 0$, $\tau(X_1, X_2) = 0$ ou $\rho_S(X_1, X_2) = 0$, n'implique pas l'indépendance.

14.33 Mesures de corrélation des rangs et v.a. discrètes

Il n'est pas possible d'appliquer directement le tau de Kendall et le rho de Spearman pour mesurer la dépendance entre deux v.a. discrètes.

Ce sujet n'est pas traité dans le présent ouvrage.

14.34 Coefficients de dépendance de queue

14.34.1 Définitions

Afin d'examiner la dépendance de queue d'un couple de v.a. continues (X_1, X_2), on a recours aux coefficients de dépendance de queue.

Définition 14.53 *Le coefficient de dépendance de queue supérieure est défini par*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{\kappa \to 1^-} \Pr\left(X_1 > F_{X_1}^{-1}(\kappa) \,|X_2 > F_{X_2}^{-1}(\kappa)\right),$$

si cette limite existe.

Définition 14.54 *Le coefficient de dépendance de queue inférieure est défini par*

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{\kappa \to 0^+} \Pr\left(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(\kappa) \,|X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(\kappa)\right),$$

si cette limite existe.

14.34.2 Remarques

Les coefficients de dépendance de queue sont des mesures locales alors que le tau de Kendall et le rho de Spearman mesurent la dépendance sur l'ensemble de la distribution conjointe de la paire (X_1, X_2).

Elles sont intéressantes pour analyser l'avènement simultané de valeurs très élevées ou très faibles de (X_1, X_2).

— Si $\lambda_U(X_1, X_2) \in (0, 1]$, on dit que les v.a. X_1 et X_2 sont asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de la distribution.

— Si $\lambda_U(X_1, X_2) = 0$, les v.a. X_1 et X_2 sont dites asymptotiquement indépendantes au niveau supérieur de la queue de la distribution.

De même, si $\lambda_L(X_1, X_2) \in (0, 1]$, les v.a. X_1 et X_2 sont asymptotiquement dépendantes au niveau inférieur de la queue de la distribution.

Si $\lambda_L(X_1, X_2) = 0$, les v.a. X_1 et X_2 sont dites asymptotiquement indépendantes au niveau inférieur de la queue de la distribution.

14.34.3 Contexte de l'assurance

Dans le contexte de l'assurance, le concept de dépendance de queue supérieure se révèle important.

Soit un portefeuille avec deux lignes d'affaires dont les coûts sont définis par les v.a. X_1 et X_2 avec $\lambda_U(X_1, X_2) \in (0, 1]$.

Si un sinistre d'un montant élevé survient dans une ligne d'affaires alors la probabilité est non nulle qu'un sinistre avec un montant élevé survienne dans l'autre ligne d'affaires.

14.34.4 Contexte de la finance quantitative

Le concept de dépendance de queue inférieure est aussi important dans le contexte des risques financiers où les v.a. X_1 et X_2 correspondent aux rendements des titres 1 et 2.

Si le titre 1 obtient un rendement fortement négatif au cours d'une période et si $\lambda_L(X_1, X_2) \in (0, 1]$, alors la probabilité est non négligeable que le titre 2 enregistre aussi un rendement fortement négatif au cours de la même période.

14.34.5 Copules

En fait, pour un couple de v.a. continues (X_1, X_2), les coefficients de dépendance de queue dépendent uniquement de la copule C associée à leur distribution conjointe.

Ainsi, on a

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_U = \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u,u)}{1-u},$$

et

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lambda_L = \lim_{u \to 0^+} \frac{C(u,u)}{u},$$

si les limites existent.

Pour les principales copules archimédiennes, les expressions des coefficients de dépendance de queue sont :

Famille	λ_L	λ_U
Clayton	$2^{-\frac{1}{\alpha}}$	0
Frank	0	0
Gumbel	0	$2-2^{\frac{1}{\alpha}}$
Ali-Mikhail-Haq	0	0

Pour la copule de survie associée à la copule C, les valeurs des coefficients de dépendance de queue λ_L et λ_U sont interchangées.

Ainsi, pour la copule de survie associée à la copule de Clayton, le coefficient de dépendance de queue inférieure est nul et le coefficient de dépendance de queue supérieure est $2^{-\frac{1}{\alpha}}$.

Pour la copule normale avec $\alpha \in]0,1[$, les coefficients de dépendance de queue sont nuls, c.-à-d. $\lambda_L = \lambda_U = 0$.

En revanche, pour la copule de Student de paramètres ν et α, on a

$$\lambda_L = \lambda_U = 2t_{\nu+1}\left(-\frac{\sqrt{1+\nu}\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}\right).$$

Pour $\alpha \in]0,1[$, on observe que $\lambda_L = \lambda_U$ tend vers 0 lorsque ν tend vers ∞.

14.35 Dépendance positive par quadrant

On considère le couple (X_1, X_2) avec fonction de répartition $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, F_{X_2})$.

Définition 14.55 *On dit que le couple (X_1, X_2) est positivement dépendant par quadrant (PQD) si*

$$\Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \geq \Pr(X_1 > x_1)\Pr(X_2 > x_2),$$

pour x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi, la probabilité que les v.a. X_1 et X_2 prennent simultanément des valeurs élevées est supérieure si elles sont positivement dépendantes par quadrant que si elles sont indépendantes.

On a aussi une définition équivalente pour la dépendance positive par quadrant.

Définition 14.56 *Le couple (X_1, X_2) est PQD si*

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \geq \overline{F}_{X_1}(x_1)\overline{F}_{X_2}(x_2).$$

ou

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \geq F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2).$$

Dans la proposition suivante, on compare le comportement aléatoire conditionnel de X_1 sachant le comportement aléatoire de X_2 et le comportement aléatoire marginal de X_1.

Proposition 14.57 *La paire* (X_1, X_2) *est PQD si et seulement si on a*

$$\Pr(X_1 > x_1 | X_2 > x_2) \geq \Pr(X_1 > x_1).$$

Dans la proposition suivante, on indique que la mesure de corrélation de Pearson, le tau de Kendall et le rho de Spearman sont positifs si l'on sait que le couple (X_1, X_2) est PQD.

Proposition 14.58 *Si la paire* (X_1, X_2) *est PQD alors*

$$\begin{aligned} \rho_P(X_1, X_2) &\geq 0, \\ \tau(X_1, X_2) &\geq 0, \\ \rho_S(X_1, X_2) &\geq 0. \end{aligned}$$

Preuve. Voir, p. ex., [Joe, 1997] ou [Nelsen, 2007]. ■

Comme il est indiqué dans la proposition suivante, la propriété PQD est conservée à la suite de transformations continues non décroissantes.

Proposition 14.59 *Si* (X_1, X_2) *est PQD, alors* $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ *est PQD pour des fonctions* ϕ_1 *et* ϕ_2 *continues non décroissantes.*

Preuve. Voir, p. ex., [Joe, 1997] ou [Nelsen, 2007]. ■

La relation entre la propriété PQD pour un couple de v.a. continues et la copule associée à leur distribution conjointe est fournie dans la proposition suivante.

Proposition 14.60 *Soit un couple de v.a. continues* (X_1, X_2) *possédant la copule* C*. Alors* (X_1, X_2) *est PQD si et seulement si*

$$C(u_1, u_2) \geq u_1 u_2,$$

pour tout $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$.

Preuve. Voir, p. ex., [Joe, 1997] ou [Nelsen, 2007]. ■

Exemple 14.61 *La copule de Gumbel et de Clayton impliquent une dépendance positive par quadrant. De plus, la copule de Frank implique une dépendance positive par quadrant si* $\alpha \geq 0$.

La proposition tisse le lien entre la notion de dépendance positive par quadrant et la covariance.

Proposition 14.62 *Le couple* (X_1, X_2) *est PQD si et seulement si*

$$\mathrm{Cov}(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)) \geq 0,$$

pour des fonctions ϕ_1, ϕ_2 *non décroissantes.*

On peut aussi définir la notion de dépendance négative par quadrant.

Définition 14.63 *On considère un couple de v.a.* (X_1, X_2) *avec fonction de répartition* $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, F_{X_2})$*. On dit que* (X_1, X_2) *est négativement dépendant par quadrant (NQD) si*

$$\Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \leq \Pr(X_1 > x_1) \Pr(X_2 > x_2),$$

pour x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$.

La notion NQD s'interprète comme suit. La probabilité que les v.a. X_1, X_2 prennent simultanément des valeurs élevées est inférieure si elles sont négativement dépendantes par quadrant que si elles sont indépendantes.

14.36 Échangeabilité

Un vecteur de v.a. $X = (X_1, ..., X_n)$ est échangeable si

$$(X_1, ..., X_n) \stackrel{d}{=} \left(X_{p(1)}, ..., X_{p(n)}\right),$$

pour toute permutation $(p(1), ..., p(n))$ de $(1, ..., n)$. Une copule est dite échangeable si elle est la fonction de répartition de v.a. échangeables de loi $U(0,1)$. Les copules de Clayton, de Frank et de Gumbel sont des exemples de copules multivariées avec composantes échangeables. En fait, les copules archimédiennes définies par le biais d'un seul générateur ϕ : $C(u_1, ..., u_n) = \phi^{-1}\{\phi(u_1) + ... + \phi(u_n)\}$ ont des composantes échangeables.

Exemple 14.64 *On considère un portefeuille de m titres avec risques de défaut. Pour le titre i ($i = 1, 2, ..., m$), le montant en vigueur est m et la durée jusqu'au défaut est représentée par la v.a. T_i ($i = 1, 2, ..., m$). On suppose une perte totale du montant en vigueur en cas de défaut. On examine le comportement aléatoire du nombre de défauts pour l'ensemble du portefeuille $N = \sum_{i=1}^{m} 1(T_i \leq 1)$ où*

$$1(T_i \leq 1) = \begin{cases} 1, \text{ si } T_i \leq 1 \text{ (le défaut survient durant l'année)} \\ 0, \text{ si } T_i > 1 \text{ (sinon)} \end{cases}.$$

La fonction de répartition de $(T_1, ..., T_m)$ est définie par la copule multivariée et les marginales

$$F_{T_1,...,T_m}(t_1, ..., t_m) = C_\alpha\left(F_{T_1}(t_1), ..., F_{T_m}(t_m)\right).$$

Le vecteur de v.a. $(T_1, ..., T_m)$ est échangeable. On calcule les valeurs exactes de la fonction de masse de probabilité $\Pr\left(N^{PTF} = k\right)$ (pour $k = 0, 1, ..., m$) en procédant selon l'approche décrite comme suit. On définit l'événement E_k^m comme étant l'ensemble de toutes les permutations comptant k titres faisant défaut et $m-k$ titres ne faisant pas défaut. L'ensemble $E^{(k,m)}$ comporte $\binom{m}{k}$ éléments

$$E^{(k,m)} = \left\{e_i^{(k,m)}, i = 1, ..., \binom{m}{k}\right\},$$

où $e_i^{(k,m)}$ est le i-ème élément. Puisque les v.a. $T_1, ..., T_m$ sont identiquement distribuées, on a

$$\Pr\left(\left\{e_i^{(k,m)}\right\}\right) = \Pr\left(\left\{e_{i'}^{(k,m)}\right\}\right),$$

pour $i \neq i'$. On peut voir $e_i^{(k,m)}$ comme un vecteur avec k "1" et $m-k$ "0". Par exemple, pour $m = 3$, on a

$$\begin{aligned} E^{(0,3)} &= \{(0,0,0)\} \\ E^{(1,3)} &= \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \\ E^{(2,3)} &= \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\} \\ E^{(3,3)} &= \{(1,1,1)\}. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\Pr(N = k) = \Pr\left(E^{(k,m)}\right) = \binom{m}{k} \Pr\left(\left\{e_1^{(k,m)}\right\}\right). \tag{14.11}$$

On évalue $\Pr\left(\left\{\mathrm{e}_1^{(k,m)}\right\}\right)$ avec

$$\Pr\left(\left\{e_1^{(k,m)}\right\}\right) = \sum_{i=k}^{m} (-1)^{i-k} \binom{m}{k} \Pr\left(\cap_{j=1}^{i}\{T_j \leq 1\}, \cap_{j=i+1}^{m}\{T_j \leq \infty\}\right), \tag{14.12}$$

où l'on convient que

$$\begin{aligned}\Pr\left(\cap_{j=1}^{m}\{T_j \leq 1\}, \cap_{j=m+1}^{m}\{T_j \leq \infty\}\right) &= \Pr\left(\cap_{j=1}^{m}\{T_j \leq 1\}\right), \\ \Pr\left(\cap_{j=1}^{0}\{T_j \leq 1\}, \cap_{j=0+1}^{m}\{T_j \leq \infty\}\right) &= \Pr\left(\cap_{j=1}^{m}\{T_j \leq \infty\}\right).\end{aligned}$$

□

Dans le prochain exemple, on fournit une illustration numérique de l'exemple 14.64.

Exemple 14.65 *Dans l'exemple 14.64, on fixe* $m = 20$, $T_i \sim Exp\left(\frac{1}{8}\right)$ *avec* $F_{T_i}(1) = 0.117503097$ *(pour* $i = 1, 2, ..., 20$*) et on considère la copule de Clayton avec* $\alpha = 1$ *et 3. Peu importe la valeur du paramètre de dépendance* α, $E[N] = 2.350062$. *À partir des relations de l'exemple 14.64, on a obtenu les valeurs suivantes :*

α	*1*	*3*
$\mathrm{Var}(N)$	*20.54639*	*32.27652*
$\Pr(N = 0)$	*0.62766*	*0.80112*
$\Pr(N = 1)$	*0.08357*	*0.01980*
$\Pr(N = m)$	*0.00661*	*0.04331*
$VaR_{0.95}(N)$	*14*	*19*
$TVaR_{0.95}(N)$	*17.01131*	*19.86622*

Comme l'indiquent les résultats obtenus, lorsque la relation de dépendance augmente, la probabilié d'avoir un nombre élevé de défauts augmente de façon significative. Le phénomène devient plus marquant quand le nombre de titres du portefeuille augmente. □

14.37 Impact de la dépendance et ordre supermodulaire

Afin d'examiner l'impact de la dépendance sur le comportement aléatoire des coûts d'un portefeuille, on a recours à l'ordre supermodulaire. Ce dernier est un ordre stochastique multivarié qui permet de comparer les structures de dépendance de vecteurs de v.a. qui ont les mêmes distributions marginales. Dans cette section, on se limite à présenter les résultats en indiquant les références pour les détails dans les notes à la fin du chapitre.

14.37.1 Définitions

On introduit la notion de fonction supermodulaire.

Définition 14.66 *Une fonction* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *est dite supermodulaire si*

$$\begin{aligned} & g(x_1, ..., x_i + \varepsilon, ..., x_j + \delta, ..., x_m) - g(x_1, ..., x_i + \varepsilon, ..., x_j, ..., x_m) \\ \geq\ & g(x_1, ..., x_i, ..., x_j + \delta, ..., x_m) - g(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_m)\end{aligned}$$

est vraie pour tout $\underline{x} = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq i \leq j \leq m$ *et tout* ε, $\delta > 0$.

Proposition 14.67 *Si une fonction g est dérivable deux fois, alors g est dite supermodulaire si et seulement si*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g(\mathbf{x}) \geq 0,$$

pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ *and* $1 \leq i \leq j \leq m$.

Preuve. Voir, p. ex., [Bäuerle and Müller, 2006] et [Marshall and Olkin, 1988]. ■

Par exemple, les fonctions $g(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i$, $g(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - d)^2$ et $g(x_1, ..., x_m) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i - d\right)_+$ sont supermodulaires.

Définition 14.68 *Soit les vecteurs aléatoires* $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ *et* $\underline{X}' = \left(X_1', ..., X_n'\right)$ *où, pour chaque i,* X_i *et* X_i' *ont les mêmes distributions marginales (c.-à-d.* $X_i \sim X_i'$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$*). Alors,* $\underline{X}$ *est inférieur à* $\underline{X}'$ *selon l'ordre supermodulaire, noté* $\underline{X} \preceq_{sm} \underline{X}'$, *si on a* $E[g(\underline{X})] \leq E\left[g(\underline{X}')\right]$ *pour toutes les fonctions supermodulaires g, quand les espérances existent.*

Dans le cas où $n = 2$, l'ordre supermodulaire correspond à l'ordre en concordance ou à l'ordre en corrélation.

14.37.2 Ordre supermodulaire et ordre convexe univarié

Soit deux vecteurs de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ et $\underline{X}' = \left(X_1', ..., X_n'\right)$ où, pour chaque i, les v.a. X_i et X_i' ont la même distribution marginale F_i (c.-à-d. $X_i \sim X_i'$ pour $i = 1, 2, ..., n$). On définit $S = \sum_{i=1}^n X_i$ et $S' = \sum_{i=1}^n X_i'$. En raison des hypothèses concernant $\underline{X}$ et $\underline{X}'$, on a $E[S] = E[S']$. La proposition suivante permet de déduire la relation entre S et S' en se basant sur la relation d'ordre entre $\underline{X}$ et $\underline{X}'$.

Proposition 14.69 *Si $\underline{X} \preceq_{sm} \underline{X}'$, alors on a $S \preceq_{cx} S'$.*

Preuve. Voir, p. ex., [Bäuerle and Müller, 2006]. ■

Par conséquent, si on parvient à établir l'ordre supermodulaire entre $\underline{X}$ et $\underline{X}'$ alors on a $S \preceq_{cx} S'$. Cela implique que $\pi_d(S) \leq \pi_d(S')$ pour tout niveau de rétention $d \geq 0$ et $TVaR_\kappa(S) \leq TVaR_\kappa(S')$ pour tout $0 < \alpha < 1$.

14.37.3 Ordre supermodulaire et comonotonicité

On présente certains cas où il est possible d'établir l'ordre supermodulaire entre deux vecteurs de v.a. $\underline{X}$ et $\underline{X}'$. La proposition suivante correspond à l'inégalité de Lorentz. La proposition permet de comparer selon l'ordre supermodulaire un vecteur de v.a. avec une relation de dépendance quelconque et un vecteur de v.a. comonotones.

Proposition 14.70 *Soit les vecteurs aléatoires $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ et $\underline{X}^{cm} = (X_1^{cm}, ..., X_n^{cm})$ où, pour chaque i, X_i et X_i^{cm} ont les mêmes distributions marginales (c.-à-d. $X_i \sim X_i^{cm}$ pour $i = 1, 2, ..., n$) et les composantes $X_1^{cm}, ..., X_n^{cm}$ sont comonotoniques. Alors, on a $\underline{X} \preceq_{sm} \underline{X}^{cm}$.*

Preuve. Voir, p. ex., [Bäuerle and Müller, 2006]. ■

Selon la proposition précédente, la comonotonicité correspond à la plus forte relation de dépendance selon l'ordre supermodulaire.

14.37.4 Ordre supermodulaire et indépendance

La proposition suivante permet de comparer selon l'ordre supermodulaire un vecteur de v.a. dont les composantes sont indépendantes avec un vecteur de v.a. ayant une relation de dépendance quelconque entre les composantes.

Proposition 14.71 *Soit les vecteurs aléatoires $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ et $\underline{X}^{ind} = \left(X_1^{ind}, ..., X_n^{ind}\right)$ où, pour chaque i, X_i et X_i^{ind} ont les mêmes distributions marginales (c.-à-d. $X_i \sim X_i^{ind}$ pour $i = 1, 2, ..., n$) et les composantes $X_1^{ind}, ..., X_n^{ind}$ sont indépendantes. De plus, on suppose que les composantes de $\underline{X}$ sont positivement corrélées. Alors, on a $\underline{X}^{ind} \preceq_{sm} \underline{X}$.*

Preuve. Voir [Müller and Stoyan, 2002]. ■

14.37.5 Ordre supermodulaire et copules

Il est possible de relier l'ordre supermodulaire au paramètre de dépendance d'une copule multivariée.

Proposition 14.72 *Soit les vecteurs aléatoires $\underline{X}^\alpha = (X_1^\alpha, ..., X_n^\alpha)$ et $\underline{X}^{\alpha'} = (X_1^{\alpha'}, ..., X_n^{\alpha'})$ où $X_i^\alpha \sim X_i^{\alpha'}$, pour $i = 1, 2, ..., n$. La structure de dépendance de $\underline{X}^\alpha$ (et de $\underline{X}^{\alpha'}$) est définie par la copule C_α (et la copule $C_{\alpha'}$). On a les résultats suivants :*

- *Si C_α et $C_{\alpha'}$ sont des copules de Frank et si $\alpha \leq \alpha'$, alors, on a $\underline{X}^\alpha \preceq_{sm} \underline{X}^{\alpha'}$.*
- *Si C_α et $C_{\alpha'}$ sont des copules de Clayton et si $\alpha \leq \alpha'$, alors, on a $\underline{X}^\alpha \preceq_{sm} \underline{X}^{\alpha'}$.*

— *Si C_α et $C_{\alpha'}$ sont des copules de Gumbel et si $\alpha \leq \alpha'$, alors, on a $\underline{X}^{\alpha} \preceq_{sm} \underline{X}^{\alpha'}$.*

Preuve. Voir, p. ex., [Denuit et al., 1999]. ■

Remarque 14.73 *Dans les exemples 14.19.3, 14.20.3 et 14.65, l'impact du paramètre de dépendance α sur la TVaR se vérifie en utilisant les propositions 14.72, 14.69 et 12.50.*

14.37.6 Ordre supermodulaire et loi de Poisson multivariée

Dans la proposition suivante, on cite un résultat relativement à la loi de Poisson multivariée définie via les chocs communs.

Proposition 14.74 *Soit les v.a. indépendantes K_0, K_1, ..., K_n avec $K_i \sim P(\alpha_i)$, $i = 0, 1, ..., n$ et $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_n)$, $\alpha_1 = \lambda_1 - \alpha_0$, ... $\alpha_n = \lambda_n - \alpha_0$. On définit $M_1 = K_1 + K_0$, ..., $M_n = K_n + K_0$. Ainsi $\underline{M}^{(\alpha_0)} = \left(M_1^{(\alpha_0)}, ..., M_n^{(\alpha_0)}\right)$ obéit à la loi de Poisson multivariée avec $M_i^{(\alpha_0)} \sim Pois(\lambda_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, et avec un paramètre de dépendance $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_n)$. Alors, on a $\underline{M}^{(\alpha_0)} \preceq_{sm} \underline{M}^{(\alpha_0')}$ quand $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_0' \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_n)$.*

Preuve. Voir [Müller and Stoyan, 2002]. ■

14.37.7 Ordre supermodulaire et lois composées multivariées

Dans la prochaine proposition, on compare deux vecteurs de v.a. obéissant à des lois composées multivariées.

Proposition 14.75 *Soit les vecteurs de v.a. $\underline{N}$ et $\underline{N}'$. On définit $X_i = \sum_{k=1}^{N_i} B_{i,k}$ où $B_{i,1}, ..., B_{i,N_i}$ sont i.i.d. (on note $B_{i,k} \sim B_i$) et indépendants de N_i. On définit aussi $X_i' = \sum_{k=1}^{N_i} B_{i,k}'$ où $B_{i,1}', ..., B_{i,N_i'}'$ sont i.i.d. (on note $B_{i,k}' \sim B_i'$) et indépendants de N_i. On suppose que $B_i \sim B_i'$, $(i = 1, 2, ..., n)$. Si $\underline{N} \preceq_{sm} \underline{N}'$, alors $\underline{X} \preceq_{sm} \underline{X}'$.*

Preuve. Voir, p. ex., [Denuit et al., 1999]. ■

Remarque 14.76 *Pour l'exemple 13.34, l'impact du paramètre de dépendance α_0 sur la TVaR est démontré en appliquant successivement les propositions 14.74, 14.75, 14.69 et 12.50.*

14.37.8 Ordre supermodulaire et bornes de Fréchet

Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) où F_{X_1,X_2} appartient à la classe de Fréchet générée à partir des marginales F_{X_1} et F_{X_2}. On définit les deux paires de v.a. $\left(X_1^-, X_2^-\right)$ et $\left(X_1^+, X_2^+\right)$ où

$$\begin{aligned} X_1^- &= F_{X_1}^{-1}(U), \; X_2^- = F_{X_2}^{-1}(1-U), \\ X_1^+ &= F_{X_1}^{-1}(U), \; X_2^+ = F_{X_2}^{-1}(1-U), \end{aligned}$$

où $U \sim U(0,1)$. Les fonctions de répartition conjointes de $\left(X_1^-, X_2^-\right)$ et $\left(X_1^+, X_2^+\right)$ correspondent respectivement aux bornes inférieure et supérieure de Fréchet, c.-à-d.

$$\begin{aligned} F_{X_1^-,X_2^-}(x_1, x_2) &= \max\left(F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1; 0\right), \\ F_{X_1^+,X_2^+}(x_1, x_2) &= \min\left(F_{X_1}(x_1); F_{X_2}(x_2)\right). \end{aligned}$$

Proposition 14.77 *Pour tout couple (X_1, X_2), on a*

$$\left(X_1^-, X_2^-\right) \preceq_{sm} (X_1, X_2) \preceq_{sm} \left(X_1^+, X_2^+\right).$$

Preuve. Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006]. ■

En appliquant simultanément la proposition 14.77 et la proposition 14.69, on déduit que

$$X_1^- + X_2^- \preceq_{cx} X_1 + X_2 \preceq_{cx} X_1^+ + X_2^+,$$

ce qui implique notamment

$$TVaR_\kappa \left(X_1^- + X_2^-\right) \leq TVaR_\kappa \left(X_1 + X_2\right) \leq TVaR_\kappa \left(X_1^+ + X_2^+\right),$$

pour $\kappa \in (0,1)$, et

$$\pi_{X_1^- + X_2^-}(d) \leq \pi_{X_1+X_2}(d) \leq \pi_{X_1^+ + X_2^+}(d),$$

pour $d \geq 0$.

14.38 Estimation procedures and copulas

14.38.1 Introduction

Let $\underline{X} = (X_1, X_2)$ be a pair of continuous rvs with cdf

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right).$$

Let

$$\{(X_{1,j}, X_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}.$$

be a finite sequence of iid pairs of rvs where $\underline{X}_j = (X_{1,j}, X_{2,j}) \sim \underline{X} = (X_1, X_2)$.

Let

$$\{(x_{1,j}, x_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}$$

be the empirical observations of

$$\{(X_{1,j}, X_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}.$$

Notation : $\underline{x}_j = (x_{1,j}, x_{2,j})$

14.38.2 Fully Maximum Likelihood Estimation

Notations :

- $\underline{\theta}_i = (\theta_{i,1}, ..., \theta_{i,n_i})$, $i = 1, 2$;
- α = dependence parameter (sometimes there are 2 ou 3 parameters, even more) ;
- $\underline{\theta} = (\alpha, \underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2)$
- number of parameters $= n_1 + n_2 + 1$
- $F_{X_i}(x; \underline{\theta}_i)$
- $f_{X_i}(x; \underline{\theta}_i)$
- $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2; \underline{\theta})$
- $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2; \underline{\theta})$

Note :

- $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2; \underline{\theta}) = C\left(F_{X_1}(x_1; \underline{\theta}_1), F_{X_2}(x_2; \underline{\theta}_2); \alpha\right)$
- $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2; \underline{\theta}) = c\left(F_{X_1}(x_1; \underline{\theta}_1), F_{X_2}(x_2; \underline{\theta}_2); \alpha\right) \times f_{X_1}(x_1; \underline{\theta}_1) \times f_{X_2}(x_2; \underline{\theta}_2)$

Likelihood function :

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_1,X_2}(x_{1,j}, x_{2,j}; \underline{\theta})$$

Log-likelihood function :

$$l\left(\underline{\theta}\right)=\sum_{j=1}^{n}\ln\left(f_{X_1,X_2}\left(x_{1,j},x_{2,j};\underline{\theta}\right)\right)$$

ML estimator of $\underline{\theta}$ is $\widehat{\underline{\theta}}^{ML}$ where

$$\widehat{\underline{\theta}}^{ML}=\arg\max\left(l\left(\underline{\theta}\right)\right)$$

Remark : It can become very difficult to perform.

14.38.3 Variant to Maximum Likelihood Estimation : Semi-parametric method (Genest & Rivest)

The method relies on the first part of Sklar's theorem.
We have the set of pairs of observations :

$$\left\{\left(x_{1,j},x_{2,j}\right),j=1,2,...,n\right\}$$

Notation : $\underline{x}_j=\left(x_{1,j},x_{2,j}\right)$
We define the sequence of pairs of pseudo-observations :

$$\left\{\left(u_{1,j},u_{2,j}\right),j=1,2,...,n\right\}$$

where

$$\left(u_{1,j},u_{2,j}\right)=\left(F_{1,n}\left(x_{1,j}\right),F_{2,n}\left(x_{2,j}\right)\right),j=1,2,...,n.$$

Estimation procedure :

— Step 1 : Estimate the marginal cdf of X_i, for each $i=1,2$, separately. (Find the appropriate cdf of X_i)

— Step 2 : Use the sequence of pairs of pseudo-observations :

$$\left\{\left(u_{1,j},u_{2,j}\right),j=1,2,...,n\right\}$$

to estimate the copula itself. (find the appropriate copula)

Likelihood function :

$$L\left(\alpha\right)=\prod_{j=1}^{n}c\left(u_{1,j},u_{2,j};\alpha\right)$$

Log-likelihood function :

$$l\left(\alpha\right)=\sum_{j=1}^{n}\ln\left(c\left(u_{1,j},u_{2,j};\alpha\right)\right)$$

ML estimator of α is $\widehat{\alpha}^{ML}$ where

$$\widehat{\alpha}^{ML}=\arg\max\left(l\left(\alpha\right)\right)$$

14.38.4 Variant to Maximum Likelihood Estimation : IFM Method (Joe's method)

The method relies on the first part of Sklar's theorem.
We have the set of pairs of observations :

$$\left\{\left(x_{1,j},x_{2,j}\right),j=1,2,...,n\right\}$$

Notation : $\underline{x}_j=\left(x_{1,j},x_{2,j}\right)$

We define the sequence of pairs of pseudo-observations :

$$\{(u_{1,j}, u_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}$$

where

$$(u_{1,j}, u_{2,j}) = \left(F_{X_1}\left(x_{1,j}; \underline{\theta}_1^{MV}\right), F_{X_2}\left(x_{2,j}; \underline{\theta}_2^{MV}\right)\right), j = 1, 2, ..., n.$$

Estimation procedure :

— Step 1 : Estimate the marginal cdf of X_i, for each $i = 1, 2$, separately. (Find the appropriate cdf of X_i)

— Step 2 : Use the sequence of pairs of pseudo-observations :

$$\{(u_{1,j}, u_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}$$

to estimate the copula itself. (find the appropriate copula)

Likelihood function :

$$L(\alpha) = \prod_{j=1}^{n} c(u_{1,j}, u_{2,j}; \alpha)$$

Log-likelihood function :

$$l(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \ln(c(u_{1,j}, u_{2,j}; \alpha))$$

ML estimator of α is $\widehat{\alpha}^{ML}$ where

$$\widehat{\alpha}^{ML} = \arg\max(l(\alpha))$$

14.39 Estimation et lois multivariées continues

14.39.1 Mise en place

On dispose d'une suite de n vecteurs d'observations $\{(x_{1,j}, ..., x_{d,j}), j = 1, 2, ..., n\}$ de la suite de vecteurs de v.a. continues (dimension du vecteur d).i.i.d. $\{(X_{1,j}, ..., X_{d,j}), j = 1, 2, ..., n\}$.

On note

$$\begin{aligned} \underline{x}_j &= (x_{1,j}, ..., x_{d,j}) \\ \underline{X}_j &= (X_{1,j}, ..., X_{d,j}). \end{aligned}$$

Notation : on a

$$\underline{X}_j \sim \underline{X} = (X_1, ..., X_d),$$

pour $j = 1, 2, ..., n$.

La distribution commune de $\underline{X}$ est

$$F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_d) = F_{X_1,...,X_d}(x_1, ..., x_d)$$

et $F_{X_1}, ..., F_{X_d}$ sont les marginales.

Les paramètres de $F_{\underline{X}}$ sont représentés par $\underline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, où m est le nombre de paramètres.

Exemples :

— Pour la loi exponentielle bivariée EFGM, il y a $m = 3$ paramètres.

— Pour la loi normales bivariée, il y a $m = 5$ paramètres.

14.39.2 Méthode du maximum de vraisemblance

On définit la fonction de vraisemblance par

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_1,...,X_d}(x_{1,i},...,x_{d,i};\underline{\theta})$$

où

$$f_{X_1,...,X_d}(x_{1,i},...,x_{d,i};\underline{\theta})$$

est la fonction de densité conjointe de

$$\underline{X} = (X_1,...,X_d)$$

avec les paramètres $\underline{\theta} = (\theta_1,...,\theta_m)$.

Par la suite, on a applique les étapes habituelles pour estimer les paramètres $\underline{\theta} = (\theta_1,...,\theta_m)$.

Dès que le nombre m devient élevé, l'estimation des paramètres peut devenir ardu.

Comme on le verra, la représentation sous la forme de copule permet de décomposer l'estimation en deux étapes.

14.40 Estimation et copules

14.40.1 Données et objectif

On dispose d'une suite de n vecteurs d'observations $\{(x_{1,j},...,x_{d,j}), j = 1,2,...,n\}$ de la suite de vecteurs de v.a. continues (dimension du vecteur d).i.i.d. $\{(X_{1,j},...,X_{d,j}), j = 1,2,...,n\}$.

On note

$$\begin{aligned} \underline{x}_j &= (x_{1,j},...,x_{d,j}) \\ \underline{X}_j &= (X_{1,j},...,X_{d,j}). \end{aligned}$$

Notation : on a

$$\underline{X}_j \sim \underline{X} = (X_1,...,X_d),$$

pour $j = 1,2,...,n$.

La fonction de répartition de $\underline{X}$ est

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1,...,x_d) &= F_{X_1,...,X_d}(x_1,...,x_d) \\ &= C(F_{X_1}(x_1),...,F_{X_d}(x_d)), \end{aligned}$$

où $F_{X_1},...,F_{X_d}$ sont les marginales.

La fonction de densité de $\underline{X}$ est

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = f_{X_1}(x_1)...f_{X_d}(x_d)\, c(F_{X_1}(x_1),...,F_{X_d}(x_d))$$

Les paramètres de $F_{\underline{X}}$ sont représentés par $\underline{\theta} = (\theta_1,...,\theta_m)$, où m est le nombre de paramètres.

L'objectif est à la fois d'estimer les paramètres de la copule et des marginales.

Exemple :

— Copule bivariée de Clayton, marginale gamma et marginale lognormale $\Rightarrow$ 5 paramètres

14.40.2 Méthode des moments avec corrélation par les rangs

La méthode des moments requiert de calculer les statistiques de rang (rho de Spearman et tau de Kendall) et d'identifier les paramètres de la copule à partit de ces structures.

Matrice des rho de Spearman

On utilise cette information sur le rang pour déterminer l'estimateur non-paramétrique du rho de Spearman

$$\widehat{\rho}_S\left(X_i, X_{i'}\right) = \frac{12}{n\left(n^2-1\right)} \sum_{j=1}^{n} \left(rank\left(x_{i,j}\right) - \frac{1}{2}\left(n+1\right)\right)\left(rank\left(x_{i',j}\right) - \frac{1}{2}\left(n+1\right)\right)$$

On peut construire une matrice comportant tous les estimés du rho de Spearman pour toutes les paires possibles du vecteur aléatoire.

$$\widehat{\underline{\underline{\sum}}}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\rho}\left(X_1, X_2\right) & \ldots & \widehat{\rho}\left(X_1, X_d\right) \\ \widehat{\rho}\left(X_2, X_1\right) & 1 & & \widehat{\rho}\left(X_2, X_d\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\rho}\left(X_d, X_1\right) & \widehat{\rho}\left(X_d, X_2\right) & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Si les estimés du rho de Spearman proviennent du même échantillon, alors la matrice $\widehat{\underline{\underline{\sum}}}(\rho)$ est semi-définie positive.

Matrice des tau de Kendall

L'estimateur non-paramétrique du tau de Kendall est donné par

$$\widehat{\tau}\left(X_i, X_{i'}\right) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq j < k \leq n} sign\left(\left(x_{i,j} - x_{i,k}\right)\left(x_{i',j} - x_{i',k}\right)\right)$$

On peut construire une matrice comportant tous les estimés du tau de Kendall pour toutes les paires possibles du vecteur aléatoire.

$$\widehat{\underline{\underline{\sum}}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\tau}\left(X_1, X_2\right) & \ldots & \widehat{\tau}\left(X_1, X_d\right) \\ \widehat{\tau}\left(X_2, X_1\right) & 1 & & \widehat{\tau}\left(X_2, X_d\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\tau}\left(X_d, X_1\right) & \widehat{\tau}\left(X_d, X_2\right) & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Si les estimés du tau de Kendall proviennent du même échantillon, alors la matrice $\widehat{\underline{\underline{\sum}}}(\tau)$ est semi-définie positive.

Remarque : On traite du cas où les estimés du rho de Spearman ne sont établis à partir du même échantillon.

14.40.3 Méthodes moments

On considère différents exemples.

Exemple – Cas bivarié

À partir d'un échantillon, on estime $\widehat{\tau}\left(X_1, X_2\right)$.

On veut estimer le paramètre de dépendance α d'une copule C_α.

On sait que la mesure d'association $\tau\left(X_1, X_2\right) = g\left(\alpha\right)$, où $g\left(\alpha\right)$ est une fonction de α.

L'estimateur $\widehat{\alpha}$ de α est la solution de $\widehat{\tau}\left(X_1, X_2\right) = g\left(\alpha\right)$. Cela est assez aisé à produire.

Exemple – Cas multivarié.

On suppose la copule normale avec sa matrice de paramètres de dépendance

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & ... & \alpha_{1,d} \\ \alpha_{2,1} & 1 & ... & \alpha_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d,1} & \alpha_{d,2} & ... & 1 \end{pmatrix}$$

On a vu que

$$\rho\left(X_i, X_j\right) \simeq \alpha_{i,j}$$

pour tous les couples (X_i, X_j), $i \neq j$.

Supposons que l'on a construit la matrice $\widehat{\underline{\sum}}(\rho)$.

Alors, on a l'estimateur $\widehat{\alpha}_{i,j}$ de $\widehat{\alpha}_{i,j}$ qui est

$$\widehat{\alpha}_{i,j} = \widehat{\rho}\left(X_i, X_j\right)$$

La mesure $\rho\left(X_i, X_j\right)$ n'a pas de forme explicite pour la copule de Student.

On ne peut par recourir à l'approximation mentionnée ci-dessus.

Exemple – Cas multivarié.

On suppose la copule normale avec sa matrice de paramètres de dépendance

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & ... & \alpha_{1,d} \\ \alpha_{2,1} & 1 & ... & \alpha_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d,1} & \alpha_{d,2} & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons que l'on a construit la matrice $\widehat{\underline{\sum}}(\tau)$.

Alors, on a l'estimateur $\widehat{\alpha}_{i,j}$ de $\alpha_{i,j}$ est la solution de la relation

$$\frac{2}{\pi} \arcsin \alpha_{i,j} = \widehat{\tau}\left(X_i, X_j\right)$$

Il arrive que la matrice de $\widehat{\alpha}_{i,j}$ ne soit pas semi-définie positive.

On peut utiliser la procédure expliquée plus loin pour la modifier afin de la rendre semi-definie positive.

Comme la mesure $\tau\left(X_i, X_j\right)$ a une forme explicite pour la copule de Student $\tau\left(X_i, X_j\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \alpha_{i,j}$.

Il reste à estimer le paramètre τ par la méthode du maximum de vraisemblance. □

14.40.4 Copule non-paramétrique

On considère un échantillon de n observations multivariées d'un vecteur de v.a. de longueur d, noté $\{(x_{1,j}, ..., x_{d,j}), j = 1, 2, ..., n\}$ d'un vecteur.

Pour $d = 2$, la copule non-paramétrique est définie par

$$C_n\left(u_1, u_2\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1_{\left\{\frac{rang\left(x_{1,j}\right)}{n+1} \leq u_1, \frac{rang\left(x_{2,j}\right)}{n+1} \leq u_2\right\}}$$

L'expression générale de la copule non-paramétrique est

$$C_n\left(u_1, ..., u_d\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1_{\left\{\frac{rang\left(x_{1,j}\right)}{n+1} \leq u_1, ..., \frac{rang\left(x_{d,j}\right)}{n+1} \leq u_d\right\}}$$

14.40.5 Maximum de vraisemblance

Mise en place

La fonction de répartition de $\underline{X}$ est

$$F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_d) = F_{X_1,...,X_d}(x_1, ..., x_d)$$

où $F_{X_1}, ..., F_{X_d}$ sont les marginales.

En raison du théorème de Sklar, on a la représentation unique suivante

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_d) &= F_{X_1,...,X_d}(x_1, ..., x_d) \\ &= C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_d}(x_d)), \end{aligned}$$

La fonction de densité de $\underline{X}$ est

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = f_{X_1}(x_1) ... f_{X_d}(x_d)\, c(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_d}(x_d))$$

On examine trois variantes de méthode du maximum de vraisemblance dans l'estimation des paramètres de la copule et des marginales.

Méthode exacte

On établit la fonction de densité de $f(\underline{x})$ à partir de la copule où

$$f(\underline{x}) = f_1(x_1) ... f_d(x_d)\, c(F_1(x_1), ..., F_n(x_d))$$

Le vecteur des paramètres $\underline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$ est constitué des paramètres des marginales et des paramètres de la copule, pour un total de m paramètres.

On rappelle que

$$c(u_1, ..., u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 ... \partial u_n} C(u_1, ... u_n).$$

La fonction de vraisemblance est donnée par

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(\underline{x_i}; \underline{\theta})$$

Le log de la fonction de vraisemblance correspond à

$$\ln(L(\underline{\Theta})) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(f(\underline{x_i}; \underline{\Theta})\right).$$

On applique la procédure habituelle pour estimer les paramètres $\underline{\theta}$

Exemple. On suppose que

$$\begin{aligned} C_\alpha(u_1, u_2) &= \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{\frac{-1}{\alpha}} \\ X_1 &\sim Exp(\beta_1) \\ X_2 &\sim Exp(\beta_2) \end{aligned}$$

avec

$$c_\alpha(u_1, u_2) = \frac{1+\alpha}{(u_1 u_2)^{\alpha+1}} \left(u_1^{-\alpha} + u_1^{-\alpha} - 1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}}$$

On sait que

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \left(\left(1 - e^{-\beta_1 x_1}\right)^{-\alpha} + \left(1 - e^{-\beta_2 x_2}\right)^{-\alpha} - 1\right)^{\frac{-1}{\alpha}}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
& f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\
= \; & f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \frac{1+\alpha}{(F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2))^{\alpha+1}} \left(F_{X_1}(x_1)^{-\alpha} + F_{X_2}(x_2)^{-\alpha} - 1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}} \\
= \; & \beta_1 e^{-\beta_1 x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2} \frac{1+\alpha}{((1-e^{-\beta_1 x_1})(1-e^{-\beta_2 x_2}))^{\alpha+1}} \left(\left(1-e^{-\beta_1 x_1}\right)^{-\alpha} + \left(1-e^{-\beta_2 x_2}\right)^{-\alpha} - 1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

□

Méthode IFM (Joe)

Notation. IFM = Inference functions for margins
Idée. On estime séparément les paramètres des marginales et les paramètres de la copule.
Procédure.

— On estime les paramètres θ_1, ..., θ_d des marginales $F_{X_1}, ..., F_{X_d}$.

— On remplace les observations

$$\begin{aligned}
& (x_{1,1}, ..., x_{1,d}) \\
& ... \\
& (x_{n,1}, ..., x_{n,d})
\end{aligned}$$

par

$$\begin{aligned}
& (F_{X_1}(x_{1,1};\theta_1), ..., F_{X_d}(x_{1,d};\theta_d)) \\
& ... \\
& (F_{X_1}(x_{n,1};\theta_1), ..., F_{X_d}(x_{n,d};\theta_d))
\end{aligned}$$

— On définit les pseudo-observations

$$u_{i,1} = F_{X_1}(x_{i,1};\theta_1), ..., u_{i,d} = F_{X_d}(x_{i,d};\theta_d)$$

pour $i = 1, 2, ..., n$

— On estime le(s) paramètre(s) α de la copule selon la méthode du maximum de vraisemblance avec

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} c(u_{i,1}, ..., u_{i,d};\alpha)$$

— Log de la fonction de vraisemblance

$$l(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \ln(c(u_{i,1}, ..., u_{i,d};\alpha))$$

Méthode semi-paramétrique (Genest-Rivest)

Appelée aussi méthode de la pseudo-vraisemblance.
Idée. Méthode semblable à la méthode IFM à l'exception que l'on remplace les marginales paramétriques par les marginales non-paramétriques.
Raison : Éviter que les marginales affectent (influencent) la structure de dépendance.
Procédure.

— On estime les paramètres θ_1, ..., θ_d de la mraginales $F_1, ..., F_d$

— On remplace les observations

$$\begin{array}{l}(x_{1,1},...,x_{1,d})\\ ...\\ (x_{n,1},...,x_{n,d})\end{array}$$

par

$$\begin{array}{l}(F_{n,1}(x_{1,1}),...,F_{n,d}(x_{1,d}))\\ ...\\ (F_{n,1}(x_{n,1}),...,F_{n,d}(x_{n,d}))\end{array}$$

avec

$$F_{n,j}(y)=\frac{1}{1+n}\sum_{i=1}^{n}1_{(-\infty,y]}(x_{i,j})$$

où

$$1_{(-\infty,x]}(x_{i,j})=\left\{\begin{array}{ll}1, & x_{i,j}\leq y\\ 0 & x_{i,j}>y\end{array}\right. .$$

— On définit les pseudo-observations

$$u_{i,1}=F_{n,1}(x_{i,1}),...,u_{i,1}=F_{n,d}(x_{i,1})$$

pour $i=1,2,...,n$

— On estime les paramètres α de la copule selon la méthode du maximum de vraisemblance avec

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}c(u_{i,1},...,u_{i,d};\alpha)$$

— Log de la fonction de vraisemblance

$$l(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\ln(c(u_{i,1},...,u_{i,d};\alpha))$$

14.41 Compléments sur l'estimation avec les copules

Dans les pages précédentes, faute de temps, on n'a pas abordé les tests d'adéquation, la sélection de modèles, la construction d'intervalles de confiance, et autres outils d'analyse de statistique.

Pour des informations additionnelles avec les copules, on peut consulter notamment les références suivantes (et les références) :

— Genest, C., Favre, A.-C. 2007. Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. Journal of hydrologic engineering, 12, 347–3

— Kim, G., Silvapulle, M. J., and Silvapulle, P. 2007 . "Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas." Comp. Stat. Data Anal., 51 6 , 2836–2850.

— Etc.

14.42 Estimation copules et lois discrètes

Les méthodes expliquées dans les sections précédentes portent sur l'estimation des paramètres de lois bivariées et multivariées avec marginales continues.

On considère le cas bivariée.

Let (M_1, M_2) be a pair of rvs with

$$F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = C(F_{M_1}(m_1), F_{M_2}(m_2)), \; m_1, m_2 \in \mathbb{M},$$

where C is a copula and $F_{M_i}(m_i) = \Pr(M \leq m_i)$ are the marginal cdfs of M_i, $i = 1, 2$.

We can not apply the method due to Genest & Rivest and the method due to Joe.

However, we can apply the ML method.

Recall that the joint pmf of (M_1, M_2) is

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) &= F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) - F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2) \\ &\quad - F_{M_1,M_2}(m_1, m_2 - 1) + F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2 - 1), \end{aligned} \tag{14.13}$$

for $(m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ with $F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = 0$ if $m_1 < 0$ or $m_2 < 0$.

Any copula can be chosen : Archimedean, Normal, Student, etc.

Here, we recall a result for the EFGM copula.

Dans la proposition suivante, on a fourni l'expression simple de la fonction de masse de probabilité conjointe du couple (M_1, M_2) lorsque la structure de dépendance est définie par la copule EFGM.

Proposition 14.78 *Soit le couple de v.a. discrètes (M_1, M_2) dont la fonction de répartition est définie par les marginales F_{M_1} et F_{M_2} ainsi que la copule EFGM. Alors, la fonction de masse de probabilité conjointe de (M_1, M_2) est donnée par*

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(k_1, k_2) &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\ &\quad + \theta \prod_{i=1}^{2} f_{M_i}(k_i)\left(1 - 2F_{M_i}(k_i) + f_{M_i}(k_i)\right), \end{aligned}$$

où f_{M_1} et f_{M_2} sont les fonctions de masse de probabilité univariées de M_1 et M_2.

Preuve. L'expression est déduite de (14.13).

On a

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(k_1, k_2) &= F_{M_1,M_2}(k_1, k_2) - F_{M_1,M_2}(k_1 - 1, k_2) \\ &\quad - F_{M_1,M_2}(k_1, k_2 - 1) + F_{M_1,M_2}(k_1 - 1, k_2 - 1) \\ &= F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) + \alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2)\left(1 - F_{M_1}(k_1)\right)\left(1 - F_{M_2}(k_2)\right) \\ &\quad - F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2) - \alpha F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2)\left(1 - F_{M_1}(k_1 - 1)\right)\left(1 - F_{M_2}(k_2)\right) \\ &\quad - F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1) - \alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1)\left(1 - F_{M_1}(k_1)\right)\left(1 - F_{M_2}(k_2 - 1)\right) \\ &\quad + F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2 - 1) + \alpha F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2 - 1)\left(1 - F_{M_1}(k_1 - 1)\right)\left(1 - F_{M_2}(k_2 - 1)\right). \end{aligned}$$

Ensuite, on déduit

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(k_1, k_2) &= F_{M_2}(k_2) f_{M_1}(k_1) - F_{M_2}(k_2 - 1) f_{M_1}(k_1) \\ &\quad + \alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2)\left(1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_2}(k_2) + F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2)\right) \\ &\quad - \alpha F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2)\left(1 - F_{M_1}(k_1 - 1) - F_{M_2}(k_2) + F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2)\right) \\ &\quad - \alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1)\left(1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_2}(k_2 - 1) + F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1)\right) \\ &\quad + \alpha F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2 - 1)\left(1 - F_{M_1}(k_1 - 1) - F_{M_2}(k_2 - 1) + F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2 - 1)\right) \\ &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\ &\quad + \alpha f_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2)\left(\begin{array}{c} 1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1 - 1) - F_{M_2}(k_2) \\ + F_{M_2}(k_2)\left(F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1 - 1)\right) \end{array}\right) \\ &\quad - \alpha f_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1)\left(\begin{array}{c} 1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1 - 1) - F_{M_2}(k_2 - 1) \\ + F_{M_2}(k_2 - 1)\left(F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1 - 1)\right) \end{array}\right). \end{aligned}$$

Puis, on réarrange les termes

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(k_1,k_2) &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\ &\quad +\alpha f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \times \left(\begin{array}{c} 1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1-1) - F_{M_2}(k_2) - F_{M_2}(k_2-1) \\ +\left(F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1-1)\right)\left(F_{M_2}(k_2) + F_{M_2}()(k_2-1)\right) \end{array} \right) \\ &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\ &\quad +\alpha f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \times \left(\begin{array}{c} 1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1) \\ -F_{M_1}(k_1-1) - F_{M_2}(k_2) - F_{M_2}(k_2-1) \\ +\left(F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1-1)\right)\left(F_{M_2}(k_2) + F_{M_2}(k_2-1)\right) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(k_1,k_2) &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\ &\quad +\alpha f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \left(\begin{array}{c} 1 - 2F_{M_1}(k_1) + f_{M_1}(k_1) - 2F_{M_2}(k_2) + f_{M_2}(k_2) \\ +4F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) - 2F_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\ -2f_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) + f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \end{array} \right) \\ &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) + \alpha \prod_{i=1}^{2} f_{M_i}(k_i) \left(1 - 2F_{M_1}(k_1) + f_{M_i}(k_i)\right). \end{aligned}$$

■

Recall the notation :

— $\underline{\theta}_i = (\theta_{i,1}, ..., \theta_{i,n_i})$, $i = 1, 2$;

— α = dependence parameter (sometimes there are 2 ou 3 parameters, even more) ;

— $\underline{\theta} = (\alpha, \underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2)$

— number of parameters $= n_1 + n_2 + 1$

— $F_{X_i}(x; \underline{\theta}_i)$

— $f_{X_i}(x; \underline{\theta}_i)$

— $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2; \underline{\theta})$

— $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2; \underline{\theta})$

— $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2; \underline{\theta}) = C\left(F_{X_1}(x_1; \underline{\theta}_1), F_{X_2}(x_2; \underline{\theta}_2); \alpha\right)$

— $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2; \underline{\theta})$ is

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1, m_2; \underline{\theta}) &= F_{M_1,M_2}(m_1, m_2; \underline{\theta}) - F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2; \underline{\theta}) \\ &\quad - F_{M_1,M_2}(m_1, m_2 - 1; \underline{\theta}) + F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2 - 1; \underline{\theta}), \end{aligned}$$

for $(m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ with $F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = 0$ if $m_1 < 0$ or $m_2 < 0$.

The loglikelihood function is given by

$$l(\underline{\theta}) = \sum_{j=1}^{m} \ln\left(f_{M_1,M_2}(m_{1,j}, m_{2,j}; \underline{\theta})\right).$$

Then, we apply the usual steps for the ML method to estimate the parameters $\underline{\theta}$.

14.43 Estimation et copules

14.43.1 Données et objectif

On dispose d'une suite de n vecteurs d'observations $\{(x_{1,j}, ..., x_{d,j}), j = 1, 2, ..., n\}$ de la suite de vecteurs de v.a. continues (dimension du vecteur d).i.i.d. $\{(X_{1,j}, ..., X_{d,j}), j = 1, 2, ..., n\}$.

On note

$$\begin{aligned} \underline{x}_j &= (x_{1,j}, ..., x_{d,j}) \\ \underline{X}_j &= (X_{1,j}, ..., X_{d,j}). \end{aligned}$$

Notation : on a

$$\underline{X}_j \sim \underline{X} = (X_1, ..., X_d),$$

pour $j = 1, 2, ..., n$.

La fonction de répartition de $\underline{X}$ est

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_d) &= F_{X_1,...,X_d}(x_1, ..., x_d) \\ &= C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_d}(x_d)), \end{aligned}$$

où $F_{X_1}, ..., F_{X_d}$ sont les marginales.

La fonction de densité de $\underline{X}$ est

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = f_{X_1}(x_1) ... f_{X_d}(x_d)\, c(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_d}(x_d))$$

Les paramètres de $F_{\underline{X}}$ sont représentés par $\underline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, où m est le nombre de paramètres.

L'objectif est à la fois d'estimer les paramètres de la copule et des marginales.

Exemple :

— Copule bivariée de Clayton, marginale gamma et marginale lognormale $\Rightarrow$ 5 paramètres

14.43.2 Méthode des moments avec corrélation par les rangs

La méthode des moments requiert de calculer les statistiques de rang (rho de Spearman et tau de Kendall) et d'identifier les paramètres de la copule à partit de ces structures.

Matrice des rho de Spearman

On utilise cette information sur le rang pour déterminer l'estimateur non-paramétrique du rho de Spearman

$$\widehat{\rho}_S(X_i, X_{i'}) = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{j=1}^{n} \left(rank(x_{i,j}) - \frac{1}{2}(n+1) \right) \left(rank(x_{i',j}) - \frac{1}{2}(n+1) \right)$$

On peut construire une matrice comportant tous les estimés du rho de Spearman pour toutes les paires possibles du vecteur aléatoire.

$$\widehat{\underline{\underline{\sum}}}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\rho}(X_1, X_2) & ... & \widehat{\rho}(X_1, X_d) \\ \widehat{\rho}(X_2, X_1) & 1 & & \widehat{\rho}(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\rho}(X_d, X_1) & \widehat{\rho}(X_d, X_2) & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Si les estimés du rho de Spearman proviennent du même échantillon, alors la matrice $\widehat{\underline{\underline{\sum}}}(\rho)$ est semi-définie positive.

Matrice des tau de Kendall

L'estimateur non-paramétrique du tau de Kendall est donné par

$$\widehat{\tau}(X_i, X_{i'}) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \le j < k \le n} sign\left((x_{i,j} - x_{i,k})(x_{i',j} - x_{i',k}) \right)$$

On peut construire une matrice comportant tous les estimés du tau de Kendall pour toutes les paires

possibles du vecteur aléatoire.

$$\widehat{\underline{\sum}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\tau}(X_1, X_2) & ... & \widehat{\tau}(X_1, X_d) \\ \widehat{\tau}(X_2, X_1) & 1 & & \widehat{\tau}(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\tau}(X_d, X_1) & \widehat{\tau}(X_d, X_2) & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Si les estimés du tau de Kendall proviennent du même échantillon, alors la matrice $\widehat{\underline{\sum}}(\tau)$ est semi-définie positive.

Remarque : On traite du cas où les estimés du rho de Spearman ne sont établis à partir du même échantillon.

14.43.3 Méthodes moments

On considère différents exemples.

Exemple – Cas bivarié

À partir d'un échantillon, on estime $\widehat{\tau}(X_1, X_2)$.
On veut estimer le paramètre de dépendance α d'une copule C_α.
On sait que la mesure d'association $\tau(X_1, X_2) = g(\alpha)$, où $g(\alpha)$ est une fonction de α.
L'estimateur $\widehat{\alpha}$ de α est la solution de $\widehat{\tau}(X_1, X_2) = g(\alpha)$. Cela est assez aisé à produire.

Exemple – Cas multivarié.

On suppose la copule normale avec sa matrice de paramètres de dépendance

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & ... & \alpha_{1,d} \\ \alpha_{2,1} & 1 & ... & \alpha_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d,1} & \alpha_{d,2} & ... & 1 \end{pmatrix}$$

On a vu que

$$\rho(X_i, X_j) \simeq \alpha_{i,j}$$

pour tous les couples (X_i, X_j), $i \neq j$.

Supposons que l'on a construit la matrice $\widehat{\underline{\sum}}(\rho)$.
Alors, on a l'estimateur $\widehat{\alpha}_{i,j}$ de $\widehat{\alpha}_{i,j}$ qui est

$$\widehat{\alpha}_{i,j} = \widehat{\rho}(X_i, X_j)$$

La mesure $\rho(X_i, X_j)$ n'a pas de forme explicite pour la copule de Student.
On ne peut par recourir à l'approximation mentionnée ci-dessus.

Exemple – Cas multivarié.

On suppose la copule normale avec sa matrice de paramètres de dépendance

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & ... & \alpha_{1,d} \\ \alpha_{2,1} & 1 & ... & \alpha_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d,1} & \alpha_{d,2} & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons que l'on a construit la matrice $\widehat{\underline{\sum}}(\tau)$.

Alors, on a l'estimateur $\widehat{\alpha}_{i,j}$ de $\alpha_{i,j}$ est la solution de la relation

$$\frac{2}{\pi}\arcsin\alpha_{i,j}=\widehat{\tau}\left(X_i,X_j\right)$$

Il arrive que la matrice de $\widehat{\alpha}_{i,j}$ ne soit pas semi-définie positive.
On peut utiliser la procédure expliquée plus loin pour la modifier afin de la rendre semi-definie positive.
Comme la mesure $\tau\left(X_i,X_j\right)$ a une forme explicite pour la copule de Student $\tau\left(X_i,X_j\right)=\frac{2}{\pi}\arcsin\alpha_{i,j}$.
Il reste à estimer le paramètre τ par la méthode du maximum de vraisemblance. □

14.43.4 Copule non-paramétrique

On considère un échantillon de n observations multivariées d'un vecteur de v.a. de longueur d, noté $\{(x_{1,j},...,x_{d,j}),j=1,2,...,n\}$ d'un vecteur.
Pour $d=2$, la copule non-paramétrique est définie par

$$C_n\left(u_1,u_2\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}1_{\left\{\frac{rang\left(x_{1,j}\right)}{n+1}\leq u_1,\frac{rang\left(x_{2,j}\right)}{n+1}\leq u_2\right\}}$$

L'expression générale de la copule non-paramétrique est

$$C_n\left(u_1,...,u_d\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}1_{\left\{\frac{rang\left(x_{1,j}\right)}{n+1}\leq u_1,...,\frac{rang\left(x_{d,j}\right)}{n+1}\leq u_d\right\}}$$

14.43.5 Maximum de vraisemblance

Mise en place

La fonction de répartition de $\underline{X}$ est

$$F_{\underline{X}}\left(x_1,...,x_d\right)=F_{X_1,...,X_d}\left(x_1,...,x_d\right)$$

où $F_{X_1},...,F_{X_d}$ sont les marginales.
En raison du théorème de Sklar, on a la représentation unique suivante

$$\begin{aligned}F_{\underline{X}}\left(x_1,...,x_d\right)&=F_{X_1,...,X_d}\left(x_1,...,x_d\right)\\&=C\left(F_{X_1}\left(x_1\right),...,F_{X_d}\left(x_d\right)\right),\end{aligned}$$

La fonction de densité de $\underline{X}$ est

$$f_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)=f_{X_1}\left(x_1\right)...f_{X_d}\left(x_d\right)c\left(F_{X_1}\left(x_1\right),...,F_{X_d}\left(x_d\right)\right)$$

On examine trois variantes de méthode du maximum de vraisemblance dans l'estimation des paramètres de la copule et des marginales.

Méthode exacte

On établit la fonction de densité de $f\left(\underline{x}\right)$ à partir de la copule où

$$f\left(\underline{x}\right)=f_1\left(x_1\right)...f_d\left(x_d\right)c\left(F_1\left(x_1\right),...,F_n\left(x_d\right)\right)$$

Le vecteur des paramètres $\underline{\theta}=\left(\theta_1,...,\theta_m\right)$ est constitué des paramètres des marginales et des paramètres de la copule, pour un total de m paramètres.
On rappelle que

$$c\left(u_1,...,u_n\right)=\frac{\partial^n}{\partial u_1...\partial u_n}C\left(u_1,...u_n\right).$$

La fonction de vraisemblance est donnée par

$$L\left(\underline{\theta}\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(\underline{x_i};\underline{\theta}\right)$$

Le log de la fonction de vraisemblance correspond à

$$\ln\left(L\left(\underline{\Theta}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(f\left(\underline{x_i};\underline{\Theta}\right)\right).$$

On applique la procédure habituelle pour estimer les paramètres $\underline{\theta}$
Exemple. On suppose que

$$\begin{array}{rcl} C_\alpha\left(u_1,u_2\right) & = & \left(u_1^{-\alpha}+u_2^{-\alpha}-1\right)^{\frac{-1}{\alpha}} \\ X_1 & \sim & Exp\left(\beta_1\right) \\ X_2 & \sim & Exp\left(\beta_2\right) \end{array}$$

avec

$$c_\alpha\left(u_1,u_2\right)=\frac{1+\alpha}{\left(u_1u_2\right)^{\alpha+1}}\left(u_1^{-\alpha}+u_1^{-\alpha}-1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}}$$

On sait que

$$F_{X_1,X_2}\left(x_1,x_2\right)=\left(\left(1-e^{-\beta_1x_1}\right)^{-\alpha}+\left(1-e^{-\beta_2x_2}\right)^{-\alpha}-1\right)^{\frac{-1}{\alpha}}$$

Il en résulte

$$\begin{array}{rl} & f_{X_1,X_2}\left(x_1,x_2\right) \\ = & f_{X_1}\left(x_1\right)f_{X_2}\left(x_2\right)\dfrac{1+\alpha}{\left(F_{X_1}\left(x_1\right)F_{X_2}\left(x_2\right)\right)^{\alpha+1}}\left(F_{X_1}\left(x_1\right)^{-\alpha}+F_{X_2}\left(x_2\right)^{-\alpha}-1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}} \\ = & \beta_1e^{-\beta_1x_1}\beta_2e^{-\beta_2x_2}\dfrac{1+\alpha}{\left(\left(1-e^{-\beta_1x_1}\right)\left(1-e^{-\beta_2x_2}\right)\right)^{\alpha+1}}\left(\left(1-e^{-\beta_1x_1}\right)^{-\alpha}+\left(1-e^{-\beta_2x_2}\right)^{-\alpha}-1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}}. \end{array}$$

□

Méthode IFM (Joe)

Notation. IFM = Inference functions for margins
Idée. On estime séparément les paramètres des marginales et les paramètres de la copule.
Procédure.

— On estime les paramètres θ_1, ..., θ_d des marginales $F_{X_1},...,F_{X_d}$.

— On remplace les observations

$$\begin{array}{l} \left(x_{1,1},...,x_{1,d}\right) \\ ... \\ \left(x_{n,1},...,x_{n,d}\right) \end{array}$$

par

$$\begin{array}{l} \left(F_{X_1}\left(x_{1,1};\theta_1\right),...,F_{X_d}\left(x_{1,d};\theta_d\right)\right) \\ ... \\ \left(F_{X_1}\left(x_{n,1};\theta_1\right),...,F_{X_d}\left(x_{n,d};\theta_d\right)\right) \end{array}$$

— On définit les pseudo-observations

$$u_{i,1} = F_{X_1}\left(x_{i,1};\theta_1\right), ..., u_{i,d} = F_{X_d}\left(x_{i,d};\theta_d\right)$$

pour $i = 1, 2, ..., n$

— On estime le(s) paramètre(s) α de la copule selon la méthode du maximum de vraisemblance avec

$$L\left(\alpha\right) = \prod_{i=1}^{n} c\left(u_{i,1}, ..., u_{i,d};\alpha\right)$$

— Log de la fonction de vraisemblance

$$l\left(\alpha\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(c\left(u_{i,1}, ..., u_{i,d};\alpha\right)\right)$$

Méthode semi-paramétrique (Genest-Rivest)

Appelée aussi méthode de la pseudo-vraisemblance.

Idée. Méthode semblable à la méthode IFM à l'exception que l'on remplace les marginales paramétriques par les marginales non-paramétriques.

Raison : Éviter que les marginales affectent (influencent) la structure de dépendance.

Procédure.

— On estime les paramètres θ_1, ..., θ_d de la mraginales $F_1, ..., F_d$

— On remplace les observations

$$\begin{array}{l} \left(x_{1,1}, ..., x_{1,d}\right) \\ ... \\ \left(x_{n,1}, ..., x_{n,d}\right) \end{array}$$

par

$$\begin{array}{l} \left(F_{n,1}\left(x_{1,1}\right), ..., F_{n,d}\left(x_{1,d}\right)\right) \\ ... \\ \left(F_{n,1}\left(x_{n,1}\right), ..., F_{n,d}\left(x_{n,d}\right)\right) \end{array}$$

avec

$$F_{n,j}\left(y\right) = \frac{1}{1+n}\sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,y]}\left(x_{i,j}\right)$$

où

$$1_{(-\infty,x]}\left(x_{i,j}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x_{i,j} \leq y \\ 0 & x_{i,j} > y \end{array} \right. .$$

— On définit les pseudo-observations

$$u_{i,1} = F_{n,1}\left(x_{i,1}\right), ..., u_{i,1} = F_{n,d}\left(x_{i,1}\right)$$

pour $i = 1, 2, ..., n$

— On estime les paramètres α de la copule selon la méthode du maximum de vraisemblance avec

$$L\left(\alpha\right) = \prod_{i=1}^{n} c\left(u_{i,1}, ..., u_{i,d};\alpha\right)$$

— Log de la fonction de vraisemblance

$$l(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(c\left(u_{i,1}, ..., u_{i,d}; \alpha\right)\right)$$

14.44 Compléments sur l'estimation avec les copules

Dans les pages précédentes, faute de temps, on n'a pas abordé les tests d'adéquation, la sélection de modèles, la construction d'intervalles de confiance, et autres outils d'analyse de statistique.

Pour des informations additionnelles avec les copules, on peut consulter notamment les références suivantes (et les références) :

— Genest, C., Favre, A.-C. 2007. Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. Journal of hydrologic engineering, 12, 347–3

— Kim, G., Silvapulle, M. J., and Silvapulle, P. 2007 . "Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas." Comp. Stat. Data Anal., 51 6 , 2836–2850.

— Etc.

14.45 Estimation copules et lois discrètes

Les méthodes expliquées dans les sections précédentes portent sur l'estimation des paramètres de lois bivariées et multivariées avec marginales continues.

On considère le cas bivariée.

Let (M_1, M_2) be a pair of rvs with

$$F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = C\left(F_{M_1}(m_1), F_{M_2}(m_2)\right), \; m_1, m_2 \in \mathbb{M},$$

where C is a copula and $F_{M_i}(m_i) = \Pr(M \leq m_i)$ are the marginal cdfs of M_i, $i = 1, 2$.

We can not apply the method due to Genest & Rivest and the method due to Joe.

However, we can apply the ML method.

Recall that the joint pmf of (M_1, M_2) is

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) &= F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) - F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2) \\ &\quad - F_{M_1,M_2}(m_1, m_2 - 1) + F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2 - 1), \end{aligned} \tag{14.14}$$

for $(m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ with $F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = 0$ if $m_1 < 0$ or $m_2 < 0$.

Any copula can be chosen : Archimedean, Normal, Student, etc.

14.46 Indépendance ?

On considère une famille de copules trivariée.

Soit un vecteur de v.a. $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3)$ avec

$$F_{\underline{U}}(u_1, u_2, u_2) = C(u_1, u_2, u_3),$$

pour $(u_1, u_2, u_3) \in [0, 1]^3$.

La copule C est construite comme un cas limite d'une suite de vecteurs (à 3 dimensions) de v.a..

Ces v.a. sont définies à partir d'une somme de vecteurs (à 3 dimensions) i.i.d. de v.a. qui se comporte

comme le vecteur de v.a. $\underline{I} = (I_1, I_2, I_2)$ avec

$$\begin{aligned}
\Pr(I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 0) &= \frac{1}{4} \\
\Pr(I_1 = 0, I_2 = 1, I_3 = 0) &= \frac{1}{4} \\
\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 1) &= \frac{1}{4} \\
\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 1) &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

On observe :

— les composantes de (I_1, I_2) sont indépendantes ;

— les composantes de (I_1, I_3) sont indépendantes ;

— les composantes de (I_2, I_3) sont indépendantes ;

— les composantes de (I_1, I_2, I_3) ne sont pas mutuellement indépendantes.

On définit une suite de vecteurs v.a.

$$\mathbf{I} = \left\{\underline{I}_j, j \in \mathbb{N}^+\right\}$$

où

$$\underline{I}_j \sim \underline{I}$$

pour $i \in \mathbb{N}^+$.

Soit le vecteur de v.a.

$$\underline{V}_n = (V_{1,n}, V_{2,n}, V_{3,n}),$$

où

$$V_{i,n} = \sum_{j=1}^{n} I_{i,j} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{j \times I_{i,j}}.$$

On observe :

— les composantes de $(V_{1,n}, V_{2,n})$ sont indépendantes ;

— les composantes de $(V_{1,n}, V_{3,n})$ sont indépendantes ;

— les composantes de $(V_{2,n}, V_{3,n})$ sont indépendantes ;

— les composantes de $(V_{1,n}, V_{2,n}, V_{3,n})$ ne sont pas mutuellement indépendantes.

On démontre :

— $V_{1,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} U_1$;

— $V_{2,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} U_2$;

— $V_{3,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} U_3$.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$\begin{aligned}
L_{V_{i,n}}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{-tV_{i,n}}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-t\sum_{j=1}^{n} I_{i,j}\left(\frac{1}{2}\right)^{j \times I_{i,j}}}\right] \\
&= \prod_{j=1}^{n} E\left[\mathrm{e}^{-tI_{i,j}\left(\frac{1}{2}\right)^{j \times I_{i,j}}}\right] \\
&= \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}\right).
\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} L_{V_{i,n}}(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \quad (t \geq 0)$$

qui corresponds à la TLS de la v.a. $U_j \sim Unif\,(0,1)$.

Ensuite, on déduit

$$\begin{aligned}
L_{V_{i,n},V_{i',n}}(t_i,t_{i'}) &= E\left[\mathrm{e}^{-t_i V_{i,n}}\mathrm{e}^{-t_{i'}V_{i',n}}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-t_i\sum_{j=1}^n I_{i,j}\left(\frac{1}{2}\right)^{j\times I_{i,j}}}\mathrm{e}^{-t_{i'}\sum_{j'=1}^n I_{i',j}\left(\frac{1}{2}\right)^{j\times I_{i',j}}}\right] \\
&= \prod_{j=1}^n\prod_{j'=1}^n E\left[\mathrm{e}^{-t_i I_{i,j}\left(\frac{1}{2}\right)^{j\times I_{i,j}}}\mathrm{e}^{-t_{i'}I_{i',j}\left(\frac{1}{2}\right)^{j\times I_{i',j}}}\right] \\
&= \prod_{j=1}^n E\left[\mathrm{e}^{-t_i I_{i,j}\left(\frac{1}{2}\right)^{j\times I_{i,j}}}\right]\times\prod_{j'=1}^n E\left[\mathrm{e}^{-t_{i'}I_{i',j}\left(\frac{1}{2}\right)^{j\times I_{i',j}}}\right] \\
&= \prod_{j=1}^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t\left(\frac{1}{2}\right)^j}\right)\times\prod_{j'=1}^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t\left(\frac{1}{2}\right)^j}\right).
\end{aligned}$$

La fonction de répartition empirique univariée produite à partir de réalisations de U_1 (ou U_2, ou U_3) est fournie à l'illustration 14.20.

Les graphiques en nuages de points produits à partir de réalisations de (U_1,U_2), (U_1,U_3) et (U_2,U_3) sont fournis aux illustrations 14.21, 14.22, et 14.23.

Le graphique en nuages de points produits à partir de réalisations de (U_1,U_2,U_3) est présenté à l'illustration 14.24.

14.47 Compléments sur l'estimation avec les copules

Dans les pages précédentes, faute de temps, on n'a pas abordé les tests d'adéquation, la sélection de modèles, la construction d'intervalles de confiance, et autres outils d'analyse de statistique.

Pour des informations additionnelles avec les copules, on peut consulter notamment les références suivantes (et les références) :

— Genest, C., Favre, A.-C. 2007. Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. Journal of hydrologic engineering, 12, 347–3

— Kim, G., Silvapulle, M. J., and Silvapulle, P. 2007 . "Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas." Comp. Stat. Data Anal., 51 6 , 2836–2850.

— Etc.

14.48 Notes bibliographiques

On recommande [Joe, 1997] et [Nelsen, 2007] pour un exposé général sur les copules, sur les mesures de dépendance et les notions de PQD. De plus, pour un traitement de la dépendance dans le contexte de l'actuariat et de la gestion quantitative des risques, on mentionne [Bouyé et al., 2000], [Cherubini et al., 2004], [Denuit et al., 2006], [McNeil et al., 2015] et [Wang, 1998] ainsi que les références mentionnées dans la bibliographie de ces ouvrages. Une excellente introduction aux copules dans le contexte de l'actuariat, ayant fortement contribué à la diffusion de la théorie des copules hors des cercles restreints des passionnés, est présentée dans [Frees and Valdez, 1998]. De plus, [Embrechts et al., 2002] a aussi servi à faire connaître la modélisation via les copules en gestion quantitative des risques. On peut aussi consulter [Trivedi et al., 2007] pour une introduction à la modélisation des copules. On mentionne aussi [Genest and Favre, 2007] et [Kolev et al., 2006] pour une brève introduction à la théorie des copules. De plus, il est aussi intéressant de consulter [Genest et al., 2013] concernant une étude sur les progrès de la recherche dans la théorie des copules en mathématiques, en statistique, en actuariat et en finance. Pour obtenir plus de détails sur la famille de

Illustration 14.20 – Fonction de répartition empirique univariée de U_1 (ou U_2, ou U_3).

Illustration 14.21 – Nuages de points de réalisations de (U_1, U_2).

Illustration 14.22 – Nuages de points de réalisations de (U_1, U_3).

Illustration 14.23 – Nuages de points de réalisations de (U_2, U_3).

Illustration 14.24 – Nuages de points en 3-D de réalisations de (U_1, U_2, U_3).

copules archimédiennes, on peut consulter, p. ex., [Frees and Valdez, 1998], [Joe, 1997], [Joe, 2015], [McNeil et al., 2015] et [Nelsen, 2007], où l'on traite aussi des copules archimédiennes non échangeables.

Une excellente synthèse sur l'utilisation des copules avec des distributions de fréquence est réalisée dans [Genest and Nešlehová, 2007].

Dans [Bargès et al., 2009] et [Cossette et al., 2002b], on développe des expressions analytiques de la fonction de répartition et de la TVaR de la somme de v.a. dont la distribution conjointe est définie par une copule. Pour un traitement général des bornes inférieure et supérieure de la VaR, on recommande [Williamson and Downs, 1990] qui poursuit et développe les résultats obtenus par [Frank and Schweizer, 1975], [Frank et al., 1987] et [Makarov, 1982]. Cette méthode a été introduite en actuariat par [Denuit et al., 1999] et elle a été aussi examinée en profondeur par [Embrechts et al., 2003] et [Embrechts and Puccetti, 2006]. La méthode est aussi présentée dans [Denuit et al., 2006] et [McNeil et al., 2015]. La méthode d'agrégation avec discrétisation est décrite dans [Bargès et al., 2009]. La méthode des carrés est une version simplifiée de la méthode AEP qui est présentée dans [Arbenz et al., 2011].

Le concept de dépendance positive par quadrant a été introduit par [Lehmann, 1966]. Les deux principaux ouvrages généraux sur les ordres multivariés sont [Müller and Stoyan, 2002] et [Shaked and Shanthikumar, 2007]. L'ordre supermodulaire a été défini par [Shaked and Shanthikumar, 1997] et il a été introduit en actuariat par [Bäuerle and Müller, 1998] et [Müller, 1997]. Pour des applications en actuariat, on peut consulter, p. ex., [Denuit et al., 2002] et [Hu and Wu, 1999].

Le concept de dépendance positive par quadrant a été introduit par [Lehmann, 1966]. Les deux principaux ouvrages généraux sur les ordres multivariés sont [Müller and Stoyan, 2002] et [Shaked and Shanthikumar, 2007]. L'ordre supermodulaire a été défini par [Shaked and Shanthikumar, 1997] et il a été introduit en actuariat par [Bäuerle and Müller, 1998] et [Müller, 1997]. Pour des applications en actuariat, on peut consulter, p. ex., [Denuit et al., 2002] et [Hu and Wu, 1999].

Code LaTeX : `chapitre_copules.tex`

Chapitre 15

Méthodes d'allocation volet 2

15.1 Introduction

Le présent chapitre est une suite du chapitre 6.

15.2 Règles d'Euler et mesures VaR et TVaR

Soit un portefeuille de n risques X_1, ..., X_n.

Dans les sections précédentes, on a considéré le cas où les v.a. sont continues (et souvent indépendantes).

Dans les prochaines sections, on considères des v.a. continues ou discrètes, dépendantes ou indépendantes.

La contribution au risque X_i selon la règle basée sur la VaR est

$$C_i = VaR_\kappa\left(X_i; S\right) = E\left[X_i | S = VaR_\kappa\left(S\right)\right]. \tag{15.1}$$

On vérifie que la relation

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} C_i &= \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i | S = VaR_\kappa\left(S\right)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | S = VaR_\kappa\left(S\right)\right] \\ &= E\left[S | S = VaR_\kappa\left(S\right)\right] = VaR_\kappa\left(S\right)\end{aligned}$$

est satisfaite.

Selon la règle basée sur la mesure TVaR, la contribution au risque X_i est donnée par

$$C_i = TVaR_\kappa\left(X_i; S\right) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] + E\left[X_i \times 1_{\{S = VaR_\kappa(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa}, \tag{15.2}$$

avec

$$\beta = \begin{cases} \frac{(\Pr(S \leq VaR_\kappa(S)) - \kappa)}{\Pr(S = VaR_\kappa(S))}, \text{ si } \Pr\left(S = VaR_\kappa\left(S\right)\right) > 0 \\ 0, \text{ si } \Pr\left(S = VaR_\kappa\left(S\right)\right) = 0 \end{cases}.$$

On déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} TVaR_{\kappa}\left(X_i;S\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S>VaR_{\kappa}(S)\}}\right] + E\left[X_i \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[S \times 1_{\{S>VaR_{\kappa}(S)\}}\right] + E\left[S \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[S \times 1_{\{S>VaR_{\kappa}(S)\}}\right] + VaR_{\kappa}\left(S\right)\Pr\left(S=VaR_{\kappa}\left(S\right)\right)\beta}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[S \times 1_{\{S>VaR_{\kappa}(S)\}}\right] + VaR_{\kappa}\left(S\right)\left(\Pr\left(S\leq VaR_{\kappa}\left(S\right)\right)-\kappa\right)}{1-\kappa} \\
&= TVaR_{\kappa}\left(S\right),
\end{aligned}$$

confirmant que la relation $C_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} C_i$ est satisfaite.

Les deux règles tiennent compte de la structure de dépendance du vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$. Au premier abord, elles semblent difficiles d'application. À cette fin, on examine en détail l'application de ces deux règles. En premier lieu, on va identifier quelques cas où il est possible d'obtenir l'expression analytique de la contribution de X_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Ensuite, on va traiter des méthodes pour évaluer les contributions lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir des expressions analytiques. De plus, on verra qu'il est beaucoup plus aisé d'appliquer la règle basée sur la TVaR (et sur la VaR) que la règle basée sur la covariance dans le contexte de portefeuille avec un grand nombre de risques comme c'est souvent le cas en pratique.

15.3 Lois multivariées avec support arithmétique

15.3.1 Mise en place

On considère le cas où $X_1, ..., X_n, S \in \{0, 1h, 2h, ...\}$ et on pose $VaR_{\kappa}\left(S\right) = k_0 h$.

Alors, on a

$$E\left[X_i | S = VaR_{\kappa}\left(S\right)\right] = \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right]}{\Pr\left(S = k_0 h\right)},$$

avec

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} jh \Pr\left(X_i = jh, \sum_{l=1, l\neq i}^{n} X_l = \left(k_0 - j\right)h\right),$$

permettant le calcul de la contribution selon la règle basée sur la VaR.

La part allouée au risque X_i correspond à la somme pondérée des valeurs que prend la v.a. X_i de telle sorte que la v.a. S prenne la valeur $k_0 h$.

La contribution du risque X_i selon la règle basée sur la TVaR est donnée par

$$TVaR_{\kappa}\left(X_i;S\right) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S>k_0 h\}}\right] + E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right]\beta}{1-\kappa},$$

où

$$\beta = \begin{cases} \frac{(\Pr(S\leq k_0 h)-\kappa)}{\Pr(S=k_0 h)}, \text{ si } \Pr\left(S = k_0 h\right) > 0 \\ 0, \text{ si } \Pr\left(S = k_0 h\right) = 0 \end{cases}.$$

On déduit

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>k_0 h\}}\right] = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} E\left[X_i \times 1_{\{S=kh\}}\right]$$

ou

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S>k_0h\}}\right] &= E\left[X_i\right] - E\left[X_i \times 1_{\{S\leq k_0h\}}\right] \\ &= E\left[X_i\right] - \sum_{k=0}^{k_0} E\left[X_i \times 1_{\{S=kh\}}\right]. \end{aligned}$$

Bref, la difficulté revient à évaluer $E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0h\}}\right]$.

En définissant $S_{-i} = \sum_{l=1,l\neq i}^{n} X_l$, on obtient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0h\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} jh \Pr\left(X_i = jh, S_{-i} = (k_0 - j)\, h\right). \tag{15.3}$$

Selon (15.3), $E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0h\}}\right]$ correspond à la somme des valeurs que prend la v.a. X_i de telle sorte que la v.a. S soit égale à k_0h.

15.3.2 Variables aléatoires indépendantes

Pour le cas où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, (15.3) devient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0h\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} jh f_{X_i}(jh)\, f_{S_{-i}}\left((k_0 - j)\, h\right). \tag{15.4}$$

On constate que (15.4) est le produit de convolution de $\{jhf_{X_i}(jh), j \in \mathbb{N}\}$ et $\left\{f_{S_{-i}}(jh)\, j \in \mathbb{N}\right\}$, ce qui est intéressant d'un point de vue pratique puisque l'on peut utiliser les outils déjà étudiés aux chapitres 1 et 11 sur les produits de convolution.

On applique l'expression en (15.4) dans les deux prochains exemples.

Note : À partir (15.4), on observe

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0h\}}\right] &= \sum_{j=0}^{k_0} jh f_{X_i}(jh)\, f_{S_{-i}}\left((k_0 - j)\, h\right) \\ &= E\left[X_i\right] \sum_{j=0}^{k_0} \frac{jh f_{X_i}(jh)}{E\left[X_i\right]} f_{S_{-i}}\left((k_0 - j)\, h\right) \\ &= E\left[X_i\right] \sum_{j=0}^{k_0} f_{X_i'}(jh)\, f_{S_{-i}}\left((k_0 - j)\, h\right) \\ &\leq E\left[X_i\right]. \end{aligned}$$

Le terme

$$\sum_{j=0}^{k_0} f_{X_i'}(jh)\, f_{S_{-i}}\left((k_0 - j)\, h\right)$$

est facile à calculer en utilisant les outils pour les produits de convolution.

15.3.3 Exemple – variables aléatoires indépendantes de loi Poisson

Soit les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ où $X_i \sim Pois(\lambda_i)$ $i = 1, 2, ..., n$.

On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, ce qui implique $S \sim Pois(\lambda_S)$ et $S_{-i} \sim Pois(\lambda_S - \lambda_i)$.

Alors, avec $h = 1$, (15.4) devient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} j \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_i}\lambda_i^j}{j!} \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_S-\lambda_i)}\left(\lambda_S-\lambda_i\right)^{k_0-j}}{(k_0-j)!}.$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0\}}\right] &= \sum_{j=0}^{k_0} j \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_i}\lambda_i^j}{j!} \frac{\lambda_S^{k_0}}{\lambda_S^{k_0}} \frac{k_0!}{k_0!} \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_S-\lambda_i)}\left(\lambda_S-\lambda_i\right)^{k_0-j}}{(k_0-j)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_S}\lambda_S^{k_0}}{k_0!} \sum_{j=0}^{k_0} j \frac{k_0!}{j!\,(k_0-j)!} \frac{1}{\lambda_S^j} \frac{1}{\lambda_S^{k_0-j}} \left(\lambda_i\right)^j \left(\lambda_S-\lambda_i\right)^{k_0-j} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_S}\lambda_S^{k_0}}{k_0!} \sum_{j=0}^{k_0} j \underbrace{\frac{k_0!}{j!\,(k_0-j)!} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right)^j \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right)^{k_0-j}}_{\text{fonction de masses de prob. loi binomiale}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_S}\lambda_S^{k_0}}{k_0!} k_0 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right) \\
&= \Pr\left(S=k_0\right) k_0 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right).
\end{aligned}$$

15.3.4 Exemple – variables aléatoires indépendantes de loi Poisson composée

Soit les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ où $X_i \sim PComp\left(\lambda_i, F_i\right)$, $i = 1, 2, ..., n$.

On considère le risque #1.

On sait que

$$S_{-1} \sim PComp\left(\lambda_S - \lambda_1; F_{C_{-1}}\right),$$

avec

$$F_{C_{-1}}\left(kh\right) = \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_S - \lambda_1} F_i\left(kh\right).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
E\left[X_1 \times 1_{\{S=k_0\}}\right] &= \sum_{j=0}^{k_0} hj \Pr\left(X_1 = hj, X_2 + ... + X_n = hk_0 - hj\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k_0} hj \Pr\left(X_1 = hj\right) \Pr\left(S_{-1} = k_0 - hj\right),
\end{aligned}$$

où $\Pr\left(X_1 = hj\right)$ et $\Pr\left(S_{-1} = k_0 - hj\right)$ sont calculées avec l'algorithme de Panjer ou la FFT. □

Pour le cas où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, on a

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} jh f_{X_i}\left(jh\right) f_{S_{-i}}\left(\left(k_0 - j\right)h\right)$$

qui devient

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0h\}}\right] &= \sum_{j=0}^{k_0} jh \frac{E[X_i]}{E[X_i]} f_{X_i}(jh) f_{S_{-i}}((k_0-j)h) \\ &= E[X_i] \sum_{j=0}^{k_0} \left(\frac{jh}{E[X_i]} f_{X_i}(jh)\right) f_{S_{-i}}((k_0-j)h) \\ &= E[X_i] \sum_{j=0}^{k_0} f_{X_i'}(jh) f_{S_{-i}}((k_0-j)h) \end{aligned}$$

On définit

$$f_{X'}(jh) = \frac{jh}{E[X_i]} f_{X_i}(jh)$$

pour $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Alors, on conclut

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0h\}}\right] = E[X_i] \times \Pr\left(X_i' + S_{-i} = k_0h\right)$$

pour $k_0 = 0, 1, 2, \ldots$

Pourquoi cette représentation peut-elle être intéressante ?

On peut calculer les valeurs de $\Pr\left(X_i' + S_{-i} = k_0h\right)$ avec FFT ou la fonction de convolution maison.

15.3.5 Exemple – variables aléatoires dépendantes

Dans l'exemple suivant, on considère un couple de v.a. discrètes dépendantes.

Exemple 15.1 ***(Suite de l'exemple 13.33).*** *Pour le couple (M_1, M_2) obéissant à une loi Poisson-gamma bivariée CRMM, le capital total pour le portefeuille est $TVaR_\kappa(N)$. On détermine les contributions suivantes pour M_1 et M_2 en se basant sur les règles de la covariance et de la TVaR :*

γ_0	κ	$TVaR_\kappa(M_1;N)$	$TVaR_\kappa(M_2;N)$	$C_\kappa^{cov}(M_1;N)$	$C_\kappa^{cov}(M_2;N)$
0	0.95	2.2432	6.2114	2.4876	5.9670
0	0.995	2.6536	9.1049	3.3887	8.3698
2	0.95	2.7023	6.3215	3.3370	5.6867
2	0.995	3.6509	9.0959	4.7814	7.9654

□

15.3.6 Exemples – Règles basées sur les mesures VaR et TVaR

La contribution au risque X_i selon la règle basée sur la VaR est

$$C_i = VaR_\kappa(X_i;S) = E[X_i|S = VaR_\kappa(S)]. \tag{15.5}$$

On vérifie que la relation

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i &= \sum_{i=1}^n E[X_i|S = VaR_\kappa(S)] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i|S = VaR_\kappa(S)\right] \\ &= E[S|S = VaR_\kappa(S)] = VaR_\kappa(S) \end{aligned}$$

est satisfaite.

Selon la règle basée sur la mesure TVaR, la contribution au risque X_i est donnée par

$$C_i = TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S>VaR_\kappa(S)\}}\right] + E\left[X_i \times 1_{\{S=VaR_\kappa(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa}, \tag{15.6}$$

avec

$$\beta = \begin{cases} \frac{(\Pr(S \leq VaR_\kappa(S)) - \kappa)}{\Pr(S = VaR_\kappa(S))}, \text{ si } \Pr(S = VaR_\kappa(S)) > 0 \\ 0, \text{ si } \Pr(S = VaR_\kappa(S)) = 0 \end{cases}.$$

On déduit

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} TVaR_\kappa(X_i; S) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] + E\left[X_i \times 1_{\{S = VaR_\kappa(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa} \\ = & \frac{E\left[S \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] + E\left[S \times 1_{\{S = VaR_\kappa(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa} \\ = & \frac{E\left[S \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] + VaR_\kappa(S)\Pr(S = VaR_\kappa(S))\beta}{1-\kappa} \\ = & \frac{E\left[S \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] + VaR_\kappa(S)(\Pr(S \leq VaR_\kappa(S)) - \kappa)}{1-\kappa} \\ = & TVaR_\kappa(S), \end{aligned}$$

confirmant que la relation $C_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} C_i$ est satisfaite.

Les deux règles tiennent compte de la structure de dépendance du vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$. Au premier abord, elles semblent difficiles d'application.

Exemple 15.2 *Soit le couple de v.a.* (X_1, X_2) *dont les valeurs de* f_{X_1,X_2} *sont fournies dans le tableau ci-dessous :*

$k_1 \backslash k_2$	0	1	2
0	0.30	0.10	0.05
1	0.04	0.20	0.06
2	0.12	0.05	0.08

On déduit les valeurs suivantes de f_{X_1} *et* f_{X_2} *:*

k	$f_{X_1}(k)$	$f_{X_2}(k)$
0	0.45	0.46
1	0.30	0.35
2	0.25	0.19

On obtient aisément les valeurs de f_S *:*

k	$f_S(k)$	$F_S(k)$
0	0.30	0.30
1	0.14	0.44
2	0.37	0.81
3	0.11	0.92
4	0.08	1.00

La valeur de $VaR_{0.9}(S)$ *est 3. Ensuite, on déduit*

$$E\left[S \times 1_{\{S>3\}}\right] = 4 \times 0.08 = 0.32$$

à partir de laquelle on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_{0.9}(S) &= \frac{1}{1-\kappa}\left(E\left[S \times 1_{\{S>3\}}\right] + 3 \times (F_S(3) - \kappa)\right) \\ &= \frac{1}{1-0.9}(0.32 + 3 \times (0.92 - 0.9)) \\ &= 3.8. \end{aligned}$$

Les valeurs de $E\left[X_1 \times 1_{\{S=3\}}\right]$ *et* $E\left[X_2 \times 1_{\{S=3\}}\right]$ *sont*

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \times 1_{\{S=3\}}\right] &= \sum_{k=0}^{3} k f_{X_1,X_2}(k, 3-k) \\ &= 0 \times 0 + 1 \times 0.06 + 2 \times 0.05 + 3 \times 0 \\ &= 0.16 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E\left[X_2 \times 1_{\{S=3\}}\right] &= \sum_{k=0}^{3} k f_{X_1,X_2}(3-k, k) \\ &= 0 \times 0 + 1 \times 0.05 + 2 \times 0.06 + 3 \times 0 \\ &= 0.17. \end{aligned}$$

Alors, les valeurs des contributions selon la VaR sont

$$\begin{aligned} C_{0.9}^{VaR}(X_1) &= E[X_1 | S = 3] \\ &= \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{S=3\}}\right]}{\Pr(S=3)} \\ &= \frac{0.16}{0.11} \\ &= 1\frac{5}{11} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C_{0.9}^{VaR}(X_2) &= E[X_2 | S = 3] \\ &= \frac{E\left[X2 \times 1_{\{S=3\}}\right]}{\Pr(S=3)} \\ &= \frac{0.17}{0.11} \\ &= 1\frac{6}{11}. \end{aligned}$$

On observe

$$C_{0.9}^{VaR}(X_1) + C_{0.9}^{VaR}(X_2) = \frac{16}{11} + \frac{17}{11} = 3.$$

Les valeurs de $E\left[X_1 \times 1_{\{S=4\}}\right]$ *et* $E\left[X_2 \times 1_{\{S=4\}}\right]$ *sont*

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \times 1_{\{S=4\}}\right] &= \sum_{k=0}^{4} k f_{X_1,X_2}(k, 4-k) \\ &= 2 \times 0.08 \\ &= 0.16 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E\left[X_2 \times 1_{\{S=4\}}\right] &= \sum_{k=0}^{4} k f_{X_1,X_2}(4-k,k) \\ &= 2 \times 0.16 \\ &= 0.16. \end{aligned}$$

Alors, on obtient les valeurs des contributions selon la TVaR

$$\begin{aligned} C_{0.9}^{TVaR}(X_1) &= \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{S>3\}}\right] + E\left[X_1 \times 1_{\{S=3\}}\right] \frac{(F_S(3)-0.9)}{\Pr(S=3)}}{1-0.9} \\ &= \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{S=4\}}\right] + E\left[X_1 \times 1_{\{S=3\}}\right] \frac{(F_S(3)-0.9)}{\Pr(S=3)}}{1-0.9} \\ &= \frac{0.16 + 0.16\frac{(0.92-0.9)}{0.11}}{1-0.9} \\ &= 1.8\overline{90} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C_{0.9}^{TVaR}(X_1) &= \frac{E\left[X_2 \times 1_{\{S>3\}}\right] + E\left[X_2 \times 1_{\{S=3\}}\right] \frac{(F_S(3)-0.9)}{\Pr(S=3)}}{1-0.9} \\ &= \frac{E\left[X_2 \times 1_{\{S=4\}}\right] + E\left[X_2 \times 1_{\{S=3\}}\right] \frac{(F_S(3)-0.9)}{\Pr(S=3)}}{1-0.9} \\ &= \frac{0.16 + 0.17\frac{(0.92-0.9)}{0.11}}{1-0.9} \\ &= 1.\overline{90}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} C_{0.9}^{TVaR}(X_1) + C_{0.9}^{TVaR}(X_2) &= 1.8\overline{90} + 1.\overline{90} \\ &= 1.8909091 + 1.9090909 \\ &= 3.8. \end{aligned}$$

□

15.3.7 Lois multivariées avec support arithmétique

On considère le cas où $X_1, ..., X_n, S \in \{0, 1h, 2h, ...\}$ et on pose $VaR_\kappa(S) = k_0 h$. Alors, on a

$$E\left[X_i | S = VaR_\kappa(S)\right] = \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right]}{\Pr(S = k_0 h)},$$

avec

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} jh \Pr\left(X_i = jh, \sum_{l=1, l\neq i}^{n} X_l = (k_0 - j)h\right),$$

permettant le calcul de la contribution selon la règle basée sur la VaR. La part allouée au risque X_i correspond à la somme pondérée des valeurs que prend la v.a. X_i de telle sorte que la v.a. S prenne la valeur $k_0 h$.

La contribution du risque X_i selon la règle basée sur la TVaR est donnée par

$$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S>k_0 h\}}\right] + E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right]\beta}{1-\kappa},$$

où

$$\beta = \begin{cases} \frac{(\Pr(S \leq k_0 h) - \kappa)}{\Pr(S = k_0 h)}, \text{ si } \Pr(S = k_0 h) > 0 \\ 0, \text{ si } \Pr(S = k_0 h) = 0 \end{cases}.$$

On déduit

$$E\left[X_i \times 1_{\{S > k_0 h\}}\right] = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} E\left[X_i \times 1_{\{S = kh\}}\right]$$

ou

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S > k_0 h\}}\right] &= E\left[X_i\right] - E\left[X_i \times 1_{\{S \leq k_0 h\}}\right] \\ &= E\left[X_i\right] - \sum_{k=0}^{k_0} E\left[X_i \times 1_{\{S = kh\}}\right]. \end{aligned}$$

Bref, la difficulté revient à évaluer $E\left[X_i \times 1_{\{S = k_0 h\}}\right]$. En définissant $S_{-i} = \sum_{l=1, l \neq i}^{n} X_l$, on obtient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S = k_0 h\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} jh \Pr\left(X_i = jh, S_{-i} = (k_0 - j)\, h\right). \tag{15.7}$$

Selon (15.7), $E\left[X_i \times 1_{\{S = k_0 h\}}\right]$ correspond à la somme des valeurs que prend la v.a. X_i de telle sorte que la v.a. S soit égale à $k_0 h$.

Pour le cas où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, (15.7) devient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S = k_0 h\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} jh f_{X_i}(jh)\, f_{S_{-i}}\left((k_0 - j)\, h\right). \tag{15.8}$$

On constate que (15.8) est le produit de convolution de $\{jh f_{X_i}(jh), j \in \mathbb{N}\}$ et $\left\{f_{S_{-i}}(jh)\, j \in \mathbb{N}\right\}$, ce qui est intéressant d'un point de vue pratique puisque l'on peut utiliser les outils déjà étudiés aux chapitres 1 et 11 sur les produits de convolution.

On applique l'expression en (15.4) dans les deux prochains exemples.

Exemple 15.3 *Soit les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ où $X_i \sim Pois(\lambda_i)$ $i = 1, 2, ..., n$. On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, ce qui implique $S \sim Pois(\lambda_S)$ et $S_{-i} \sim Pois(\lambda_S - \lambda_i)$. Alors, avec $h = 1$, (15.4) devient*

$$E\left[X_i \times 1_{\{S = k_0\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} j \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_i} \lambda_i^j}{j!} \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_S - \lambda_i)} (\lambda_S - \lambda_i)^{k_0 - j}}{(k_0 - j)!}.$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S = k_0\}}\right] &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_S} \lambda_S^{k_0}}{k_0!} \sum_{j=0}^{k_0} j \frac{k_0!}{j!\,(k_0 - j)!} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right)^j \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right)^{k_0 - j} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_S} \lambda_S^{k_0}}{k_0!} k_0 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right) = \Pr(S = k_0)\, k_0 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right). \end{aligned}$$

□

Exemple 15.4 *Soit les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ où $X_i \sim PComp(\lambda_i, F_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. On sait que*

$$S_{-1} \sim PComp\left(\lambda_S - \lambda_1; F_{C_{-1}}\right),$$

avec

$$F_{C_{-1}}(kh) = \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_S - \lambda_i} F_i(kh).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \times 1_{\{S=k_0\}}\right] &= \sum_{j=0}^{k_0} hj \Pr\left(X_1 = hj, X_2 + ... + X_n = hk_0 - hj\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k_0} hj \Pr\left(X_1 = hj\right) \Pr\left(S_{-1} = k_0 - hj\right), \end{aligned}$$

où $\Pr\left(X_1 = hj\right)$ *et* $\Pr\left(S_{-1} = k_0 - hj\right)$ *sont calculées avec l'algorithme de Panjer ou la FFT.* □

Dans l'exemple suivant, on considère un couple de v.a. discrètes dépendantes.

Exemple 15.5 ***(Suite de l'exemple 13.33).*** *Pour le couple* (M_1, M_2) *obéissant à une loi Poisson-gamma bivariée CRMM, le capital total pour le portefeuille est* $TVaR_\kappa(N)$*. On détermine les contributions suivantes pour* M_1 *et* M_2 *en se basant sur les règles de la covariance et de la TVaR :*

γ_0	κ	$TVaR_\kappa(M_1;N)$	$TVaR_\kappa(M_2;N)$	$C_\kappa^{cov}(M_1;N)$	$C_\kappa^{cov}(M_2;N)$
0	0.95	2.2432	6.2114	2.4876	5.9670
0	0.995	2.6536	9.1049	3.3887	8.3698
2	0.95	2.7023	6.3215	3.3370	5.6867
2	0.995	3.6509	9.0959	4.7814	7.9654

□

15.4 Lois multivariées continues

15.4.1 Mise en place

On considère un portefeuille où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont continues ce qui implique que $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est aussi continue.

En posant $VaR_\kappa(S) = s_0$, l'expression de la contribution selon la règle basée sur la VaR de X_i $(i = 1, ..., n)$ devient

$$VaR_\kappa(X_i; S) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S=s_0\}}\right]}{f_S(s_0)},$$

où

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] = \int_0^s x f_{X_i, S_{-i}}(x, s-x)\,\mathrm{d}x. \tag{15.9}$$

avec $S_{-i} = \sum_{l=1, l\neq i}^n X_l$.

De même, selon la règle basée sur la TVaR, la contribution du risque X_i est donnée par

$$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right]}{1-\kappa}, \tag{15.10}$$

où

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = \int_{s_0}^\infty E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]\mathrm{d}s.$$

On a aussi

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = E\left[X_i\right] - E\left[X_i \times 1_{\{S\leq s_0\}}\right],$$

avec

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = \int_0^{s_0} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]\mathrm{d}s. \tag{15.11}$$

15.4.2 Exemple – variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle

Dans le prochain exemple, on traite un portefeuille constitué de deux risques indépendants.

Soit les v.a. indépendantes $X_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1, 2$, avec $\beta_1 > \beta_2$.

On définit $S = X_1 + X_2$
La fonction de répartition de la v.a. S est

$$F_S(x) = H(x;\beta_1,\beta_2) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}\sum_{j=0}^{2-1}\frac{(\beta x)^j}{j!}, & \beta_1 = \beta_2 = \beta \quad \text{(Erlang)} \\ \sum_{i=1}^{2}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{2}\frac{\beta_j}{\beta_j-\beta_i}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_i x}\right), & \beta_1 \neq \beta_2 \quad \text{(Erlang généralisée)} \end{cases}, \tag{15.12}$$

L'espérance tronquée de la v.a. S correspond à

$$E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right] = \zeta(b;\beta_1,\beta_2) = \begin{cases} \frac{2}{\beta}\overline{H}(b;\beta,\beta) = \frac{2}{\beta}\left(\mathrm{e}^{-\beta b}\sum_{j=0}^{2}\frac{(\beta b)^j}{j!}\right), & \beta_1 = \beta_2 = \beta \\ \sum_{i=1}^{2}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{2}\frac{\beta_j}{\beta_j-\beta_i}\right)\left(b\mathrm{e}^{-\beta_i b} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta_i b}}{\beta_i}\right), & \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}, \tag{15.13}$$

L'expression en (15.17) devient

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \times 1_{\{S=s\}}\right] &= \int_0^s x f_{X_1,X_2}(x, s-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^s x f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x)\,\mathrm{d}x \text{ (indépendance)} \\ &= \int_0^s x\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2(s-x)}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

et on obtient

$$E\left[X_1 \times 1_{\{S=s\}}\right] = \begin{cases} \frac{1}{\beta}h(x;3,\beta), & \beta_1 = \beta_2 = \beta \\ \beta_1\beta_2\left(\frac{e^{-\beta_2 s}}{(\beta_1-\beta_2)^2} - \frac{e^{-\beta_1 s}}{(\beta_1-\beta_2)^2} - \frac{s}{(\beta_1-\beta_2)}e^{-\beta_1 s}\right), & \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}, \tag{15.14}$$

Ensuite, on remplace (15.14) dans (15.19)

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \times 1_{\{S>b\}}\right] &= \xi_1(b;\beta_1,\beta_2) \\ &= \int_0^{s_0} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]\mathrm{d}s \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\beta}\overline{H}(b;3,\beta), & \beta_1 = \beta_2 = \beta \\ \frac{\beta_2 e^{-\beta_1 b}\left(b+\frac{1}{\beta_1}\right)}{(\beta_2-\beta_1)} - \left(\frac{\beta_2 e^{-\beta_1 b}}{(\beta_1-\beta_2)^2} - \frac{\beta_1 e^{-\beta_2 b}}{(\beta_1-\beta_2)^2}\right), & \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}, \end{aligned}$$

15.4.3 Exemple – variables aléatoires indépendantes de loi gamma

On considère un exemple constitué de n risques indépendants obéissant à des lois gamma de paramètres de forme différents et de paramètres d'échelle identiques.

Soit les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ avec $X_i \sim Ga(\alpha_i, \beta)$. Alors, $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Ga(\alpha_S, \beta)$ avec $\alpha_S = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Pour établir la contribution de X_i, on a besoin de trouver $E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]$ où

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] &= \int_0^s x f_{X_i}(x) f_{S_{-i}}(s-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^s x h(x;\alpha_i,\beta)\, h(s-x;\alpha_S-\alpha_i,\beta)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^s x\frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha_i)}\beta^{\alpha_i}\left(x^{\alpha_i-1}\right)\frac{e^{-\beta(s-x)}}{\Gamma(\alpha_S-\alpha_i)}\beta^{\alpha_S-\alpha_i}\left((s-x)^{\alpha_S-\alpha_i-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^s \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha_i)}\frac{\alpha_i}{\alpha_i}\frac{\beta}{\beta}\beta^{\alpha_i}\left(x^{\alpha_i+1-1}\right)\frac{e^{-\beta(s-x)}}{\Gamma(\alpha_S-\alpha_i)}\beta^{\alpha_S-\alpha_i}\left((s-x)^{\alpha_S-\alpha_i-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha_i}{\beta}\int_0^s \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha_i+1)}\beta^{\alpha_i+1}\left(x^{\alpha_i+1-1}\right)\frac{e^{-\beta(s-x)}}{\Gamma(\alpha_S-\alpha_i)}\beta^{\alpha_S-\alpha_i}\left((s-x)^{\alpha_S-\alpha_i-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha_i}{\beta}h(s;\alpha_S+1,\beta). \end{aligned}$$

Alors, on a

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>b\}}\right] = \int_b^\infty E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] \mathrm{d}s = \int_b^\infty \frac{\alpha_i}{\beta} h\left(s; \alpha_S + 1, \beta\right) \mathrm{d}s$$

qui devient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>b\}}\right] = \frac{\alpha_i}{\beta} \overline{H}\left(b; \alpha_S + 1, \beta\right). \tag{15.15}$$

En remplaçant (15.15) dans (15.18), il en résulte que

$$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{\alpha_i}{\beta} \frac{\overline{H}\left(VaR_\kappa\left(S\right); \alpha_S + 1, \beta\right)}{1-\kappa}, \tag{15.16}$$

fournissant un rare cas où le montant alloué selon la règle basée sur la TVaR coïncide avec celui déterminé selon la règle simple basée sur l'espérance.

15.4.4 Exemple – variables aléatoires dépendantes de loi bivariée exponentielle EFGM

Dans le prochain exemple, on considère le cas d'une paire de v.a. dépendantes (X_1, X_2).

Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) obéissant à la loi bivariée exponentielle EFGM. On définit $S = X_1 + X_2$. Les expressions de f_S, F_S et $TVaR_\kappa\left(S\right)$ sont fournies à la sous-section 13.8.1.

On a

$$\begin{aligned}
E\left[X_1 \times 1_{\{S=s\}}\right] &= \int_0^s x f_{X_1,X_2}\left(x, s-x\right) \mathrm{d}x \\
&= (1+\theta) \int_0^s x\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x} \beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2(s-x)} \mathrm{d}x \\
&\quad +\theta \int_0^s x 2\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_1 x} 2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_2(s-x)} \mathrm{d}x \\
&\quad -\theta \int_0^s x 2\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_1 x} \beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2(s-x)} \mathrm{d}x \\
&\quad -\theta \int_0^s x\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x} 2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_2(s-x)} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Supposons $\beta_1 \neq \beta_2 \neq 2\beta_1 \neq 2\beta_2$.

On utilise le résultat obtenu à l'exemple 9999.

On définit

$$\zeta\left(s; \gamma_1, \gamma_2\right) = \gamma_1\gamma_2 \left(\frac{s\mathrm{e}^{-\gamma_1 s}}{\gamma_1 - \gamma_2} + \frac{\mathrm{e}^{-\gamma_2 s} - \mathrm{e}^{-\gamma_1 s}}{\left(\gamma_1 - \gamma_2\right)^2} \right)$$

pour $s \geq 0$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

On a

$$\begin{aligned}
E\left[X_1 \times 1_{\{S=s\}}\right] &= (1+\theta)\beta_1\beta_2 \left(\frac{s\mathrm{e}^{-\beta_1 s}}{\beta_1 - \beta_2} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta_2 s} - \mathrm{e}^{-\beta_1 s}}{(\beta_1 - \beta_2)^2} \right) \\
&\quad +\theta 2\beta_1 2\beta_2 \left(\frac{s\mathrm{e}^{-2\beta_1 s}}{2\beta_1 - 2\beta_2} + \frac{\mathrm{e}^{-2\beta_2 s} - \mathrm{e}^{-2\beta_1 s}}{(2\beta_1 - 2\beta_2)^2} \right) \\
&\quad -\theta 2\beta_1\beta_2 \left(\frac{s\mathrm{e}^{-2\beta_1 s}}{2\beta_1 - \beta_2} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta_2 s} - \mathrm{e}^{-2\beta_1 s}}{(2\beta_1 - \beta_2)^2} \right) \\
&\quad -\theta\beta_1 2\beta_2 \left(\frac{s\mathrm{e}^{-\beta_1 s}}{\beta_1 - 2\beta_2} + \frac{\mathrm{e}^{-2\beta_2 s} - \mathrm{e}^{-\beta_1 s}}{(\beta_1 - 2\beta_2)^2} \right).
\end{aligned}$$

En fait, on conclut directement

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \times 1_{\{S=s\}}\right] &= (1+\theta)\,\zeta\left(s;\beta_1,\beta_2\right)+\theta\zeta\left(s;2\beta_1,2\beta_2\right) \\ &\quad -\theta\zeta\left(s;2\beta_1,\beta_2\right)-\theta\zeta\left(s;\beta_1,2\beta_2\right). \end{aligned}$$

De plus, avec (15.18), on obtient le montant alloué au risque 1 selon la règle d'allocation basée sur la $TVaR$ qui est donnée par

$$\begin{aligned} & TVaR_\kappa\left(X_1;S\right) \\ = \; & \frac{1+\theta}{1-\kappa}\left(-\frac{\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}\left(s_0+\frac{1}{\beta_1}\right)}{\beta_1-\beta_2}+\frac{\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_2 s_0}-\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}}{\left(\beta_1-\beta_2\right)^2}\right) \\ & +\frac{\theta}{1-\kappa}\left(-\frac{2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_1 s_0}\left(s_0+\frac{1}{2\beta_1}\right)}{2\beta_1-2\beta_2}+\frac{2\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_2 s_0}-2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_1 s_0}}{\left(2\beta_1-2\beta_2\right)^2}\right) \\ & -\frac{\theta}{1-\kappa}\left(-\frac{\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_1 s_0}\left(s_0+\frac{1}{2\beta_1}\right)}{2\beta_1-\beta_2}+\frac{2\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_2 s_0}-\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_1 s_0}}{\left(2\beta_1-\beta_2\right)^2}\right) \\ & -\frac{\theta}{1-\kappa}\left(-\frac{2\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}\left(s_0+\frac{1}{\beta_1}\right)}{\beta_1-2\beta_2}+\frac{\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_2 s_0}-2\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}}{\left(\beta_1-2\beta_2\right)^2}\right), \end{aligned}$$

où $s_0 = VaR_\kappa\left(S\right)$.

15.4.5 Méthode numérique

Dans les exemples précédents, on a traité de cas spécifiques où il est possible d'obtenir une expression analytique pour les contributions calculées selon la règle basée sur la TVaR.

Souvent, il n'est pas possible d'y parvenir.

On peut alors utiliser la méthode numérique basée sur la discrétisation expliquée au chapitre 14 pour évaluer $TVaR_\kappa\left(S\right)$ et les contributions selon la règle de la TVaR.

Cette méthode est expliquée en détail dans [Bargès et al., 2009].

15.4.6 Autres lois multivariées continues

On considère un portefeuille où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont continues ce qui implique que $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est aussi continue. En posant $VaR_\kappa\left(S\right) = s_0$, l'expression de la contribution selon la règle basée sur la VaR de X_i $(i = 1, ..., n)$ devient

$$VaR_\kappa\left(X_i;S\right) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S=s_0\}}\right]}{f_S\left(s_0\right)},$$

où

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] = \int_0^s x f_{X_i,S_{-i}}\left(x, s-x\right)\mathrm{d}x. \tag{15.17}$$

avec $S_{-i} = \sum_{l=1,l\neq i}^n X_l$.

De même, selon la règle basée sur la TVaR, la contribution du risque X_i est donnée par

$$TVaR_\kappa\left(X_i;S\right) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right]}{1-\kappa}, \tag{15.18}$$

où

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = \int_{s_0}^\infty E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]\mathrm{d}s.$$

On a aussi

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = E\left[X_i\right] - E\left[X_i \times 1_{\{S\leq s_0\}}\right],$$

avec

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = \int_0^{s_0} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]\mathrm{d}s. \tag{15.19}$$

Dans le prochain exemple, on traite un portefeuille constitué de deux risques indépendants.

Exemple 15.6 *Soit les v.a. indépendantes $X_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1, 2$, avec $\beta_1 > \beta_2$. On sait que $S = X_1 + X_2$ obéit à une loi Erlang généralisée avec*

$$F_S(x) = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x}\right) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x}\right).$$

L'expression en (15.17) devient

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] &= \int_0^s x f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^s x\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x}\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2(s-x)}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

et on obtient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] = \beta_1\beta_2\left(\frac{s\mathrm{e}^{-\beta_1 s}}{\beta_1 - \beta_2} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta_2 s} - \mathrm{e}^{-\beta_1 s}}{(\beta_1 - \beta_2)^2}\right). \tag{15.20}$$

Ensuite, on remplace (15.20) dans (15.19)

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \times 1_{\{S \le s_0\}}\right] &= \int_0^{s_0} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]\mathrm{d}s \\ &= \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{s_0\mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}}{\beta_1} + \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}\right)}{\beta_1^2}\right) \\ &\quad - \left(\frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_s s_0}\right)}{\beta_2(\beta_1 - \beta_2)^2} - \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}\right)}{\beta_1(\beta_1 - \beta_2)^2}\right). \end{aligned}$$

□

On considère un exemple constitué de n risques indépendants obéissant à des lois gamma de paramètres de forme différents et de paramètres d'échelle identiques.

Exemple 15.7 *Soit les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ avec $X_i \sim Ga(\alpha_i, \beta)$. Alors, $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim Ga(\alpha_S, \beta)$ avec $\alpha_S = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Pour établir la contribution de X_i, on a besoin de trouver $E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]$ où*

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] &= \int_0^s x f_{X_i}(x) f_{S_{-i}}(s-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^s x h(x; \alpha_i, \beta)\, h(s-x; \alpha_S - \alpha_i, \beta)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha_i}{\beta} h(s; \alpha_S + 1, \beta). \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>b\}}\right] = \int_b^\infty E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]\mathrm{d}s = \frac{\alpha_i}{\beta}\overline{H}(b; \alpha_S + 1, \beta). \tag{15.21}$$

En remplaçant (15.21) dans (15.18), il en résulte que

$$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{\alpha_i}{\beta}\frac{\overline{H}(VaR_\kappa(S); \alpha_S + 1, \beta)}{1 - \kappa}, \tag{15.22}$$

fournissant un rare cas où le montant alloué selon la règle basée sur la TVaR coïncide avec celui déterminé selon la règle simple basée sur l'espérance. □

Dans les exemples précédents, on a traité de cas spécifiques où il est possible d'obtenir une expression analytique pour les contributions calculées selon la règle basée sur la TVaR. Souvent, il n'est pas possible d'y parvenir. On peut alors utiliser la méthode numérique basée sur la discrétisation expliquée au chapitre 14 pour évaluer $TVaR_\kappa(S)$ et les contributions selon la règle de la TVaR. Cette méthode est expliquée en détail dans [Bargès et al., 2009].

15.4.7 Lois multivariées composées

On considère maintenant un vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ obéissant à une loi composée multivariée où

$$X_i = \begin{cases} \sum_{j_i=0}^{M_i} B_{i,j_i}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}, \tag{15.23}$$

dont la fonction de masse de probabilité de $(M_1, ..., M_n)$ est donnée par

$$f_{M_1,...,M_n}(m_1, ..., m_n) = \Pr(M_1 = m_1, ..., M_n = m_n) = q_{m_1,...,m_n},$$

pour m_1, ..., $m_n \in \mathbb{N}$. Pour chaque i, $(B_{i,1}, B_{i,2}, ...)$ forme une suite de v.a. i.i.d. Enfin, les suites de v.a. $(B_{1,1}, B_{1,2}, ...)$, $(B_{2,1}, B_{2,2}, ...)$, ..., $(B_{n,1}, B_{n,2}, ...)$ sont indépendantes entre elles et indépendantes du vecteur de v.a. $(M_1, ..., M_n)$. Les v.a. $B_1, B_2, ..., B_n$ sont supposées continues et strictement positives. Les expressions de F_S et $TVaR_\kappa(S)$ sont données par les relations (13.34) et (13.36). Selon la règle basée sur la TVaR, la contribution $TVaR_\kappa(X_i; S)$ du risque X_i est donnée par

$$\frac{1}{1-\kappa} \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,...,m_n=0\}}}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,...,m_n} \times$$
$$E\left[\left(\sum_{i_i=1}^{m_i} B_{i,i_i}\right) \times 1_{\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j} > VaR_\kappa(S)\right\}}\right]. \tag{15.24}$$

L'expression (15.24) est intéressante dans le cas où les distributions des v.a. représentant les montants des sinistres appartiennent à une famille de distributions fermées sous la convolution.

Corollaire 15.8 ***Loi composée multivariée avec montants de sinistres de loi gamma.*** *Soit les conditions de la proposition 13.34. L'expression de la contribution $TVaR_\kappa(X_1; S)$ au risque X_1 selon la règle basée sur la TVaR est*

$$\frac{1}{1-\kappa} \sum_{m_1=1}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,...,m_n} \frac{m_i\alpha_i}{\beta} \overline{H}\left(VaR_\kappa(S); \sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i + 1; \beta\right).$$

□

Corollaire 15.9 ***Loi composée avec montants de sinistres de distribution mélanges d'Erlang.*** *Soit les conditions de la proposition 13.36. On obtient*

$$E\left[X_1 \times 1_{\{S>b\}}\right] = \sum_{\substack{j_1=0 \\ \setminus\{j_1=0,...,j_n=0\}}}^{\infty} ... \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,...,j_n} \frac{j_1}{\beta} \overline{H}\left(b; \sum_{i=1}^{n} j_i + 1; \beta\right),$$

qui conduit à l'expression de la contribution à X_1 selon la règle basée sur la TVaR

$$TVaR_\kappa(X_1; S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{j_1=1}^{\infty} ... \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,...,j_n} \frac{j_1}{\beta} \overline{H}\left(VaR_\kappa(S); \sum_{i=1}^{n} j_i + 1; \beta\right).$$

L'exemple suivant est une application de la proposition 13.34 du chapitre 13 et du corollaire 15.8.

Exemple 15.10 *On considère une loi composée bivariée pour* (X_1, X_2) *où la distribution bivariée de* (M_1, M_2) *est définie à l'aide de la copule de Frank et en supposant que* $M_1 \sim Pois\,(4)$ *et* $M_2 \sim NB\left(r = 4, q = \frac{1}{2}\right)$. *On suppose que* $B_1 \sim Ga\,(0.5, 0.1)$ *et* $B_2 \sim Ga\,(0.25, 0.1)$. *On déduit que* $E\,[X_1] = 20$, $E\,[X_2] = 10$ *et* $E\,[S] = 30$. *De plus, on a* $\mathrm{Var}(X_1) = 300$ *et* $\mathrm{Var}\,(X_2) = 150$. *Dans le tableau suivant, on fournit les valeurs de* $\rho_P\,(M_1, M_2)$, $\rho_P\,(X_1, X_2)$ *et* $\mathrm{Var}\,(S)$ *pour* $\alpha = -20,\ 0,\ 20$ *:*

α	$\rho_P\,(M_1, M_2)$	$\rho_P\,(X_1, X_2)$	$\mathrm{Var}\,(S)$
-20	-0.8544	-0.2848	329.1742
0	0	0	450
20	0.8949	-0.2981	576.5658

Les valeurs de $VaR_\kappa(X_i)$ *et* $TVaR_\kappa(X_i)$ $(i = 1, 2)$ *sont fournies pour* $\kappa = 0.25,\ 0.5,\ 0.95,\ 0.99$ *et* 0.995 *dans le tableau ci-dessous :*

κ	$VaR_\kappa(X_1)$	$VaR_\kappa(X_2)$	$\sum_{i=1}^{2} VaR_\kappa(X_i)$
0.25	6.9217	1.0908	8.0125
0.50	15.7603	5.6480	21.4083
0.95	53.9412	34.8943	88.8355
0.99	76.9342	54.8506	131.7848
0.995	86.4245	63.3218	149.7463

κ	$TVaR_\kappa(X_1)$	$TVaR_\kappa(X_2)$	$\sum_{i=1}^{2} TVaR_\kappa(X_i)$
0.25	25.6606	13.2490	38.9096
0.50	32.8983	16.6516	49.5499
0.95	68.1707	47.2722	115.4429
0.99	90.4176	66.9989	157.4165
0.995	99.6833	75.3916	175.0749

Dans le tableau suivant, on présente les valeurs de $VaR_\kappa\,(S)$, $TVaR_\kappa\,(S)$, *ainsi que les contributions calculées selon les règles basées sur la TVaR* ($C_\kappa^{TVaR}\,(X_i) = TVaR_\kappa\,(X_i; S)$, $i = 1, 2$) *et sur la covariance* ($C_\kappa^{cov}\,(X_i)$, $i = 1, 2$) *pour* $\alpha = -20,\ 0$ *et* 20 *:*

α	κ	$VaR_\kappa\,(S)$	$TVaR_\kappa\,(S)$	$TVaR_\kappa\,(X_1; S)$	$TVaR_\kappa\,(X_2; S)$
-20	0.25	16.6480	36.3532	24.4554	11.8978
-20	0.50	26.4895	43.7817	29.8411	13.9406
-20	0.95	64.6230	78.4609	56.4538	22.0071
-20	0.99	86.9787	100.0683	73.9654	26.1029
-20	0.995	96.1888	109.0645	81.4277	27.6368

α	κ	$VaR_\kappa\,(S)$	$TVaR_\kappa\,(S)$	$TVaR_\kappa\,(X_1; S)$	$TVaR_\kappa\,(X_2; S)$
0	0.25	14.1330	37.3878	24.9954	12.4341
0	0.50	25.7459	46.1640	30.8236	15.3404
0	0.95	70.6887	86.6448	57.5097	29.1350
0	0.99	96.4965	111.3889	73.5011	37.8878
0	0.995	107.0218	121.5988	80.0301	41.5687

α	κ	$VaR_\kappa\,(S)$	$TVaR_\kappa\,(S)$	$TVaR_\kappa\,(X_1; S)$	$TVaR_\kappa\,(X_2; S)$
20	0.25	11.6701	38.2026	25.3437	12.8590
20	0.50	24.7506	48.2819	31.6894	16.5925
20	0.95	76.5806	94.5817	59.6693	34.9124
20	0.99	105.7425	122.2356	75.9766	46.2590
20	0.995	117.4702	133.5039	82.5761	50.9278

Les valeurs de $TVaR_\kappa(S)$ *augmentent lorsque le paramètre* α *de dépendance de la copule augmente comme il est prévu par l'application successive des propositions 14.72, 14.75, 14.69 et 12.50. On observe aussi que* $VaR_\kappa\,(X_1) + VaR_\kappa\,(X_2) \leq VaR_\kappa\,(S)$ *pour* $\kappa = 0.25,\ 0.5$ *et pour* $\alpha = -20, 0, 20$. *Pour chaque* $i = 1, 2$, *pour toutes les valeurs de* κ *et pour toutes les valeurs de* α, *les contributions* $TVaR_\kappa\,(X_i; S)$ *calculées selon la règle basée sur la TVaR sont inférieures aux valeurs de* $TVaR_\kappa\,(X_i)$ $(i = 1, 2)$. *On remarque, pour* $\kappa = 0.995$, *que les bénéfices d'agrégation sont* $175.0749 - 109.0645 = 66.0104$, $175.0749 - 121.5988 = 53.4761$ *et* $175.0749 - 133.5039 = 41.5710$. □

Dans l'exemple suivant, on traite du cas de lois composées multivariées avec des montants de sinistres définis sur un support arithmétique.

Exemple 15.11 ***Suite de l'exemple 13.37***. *Dans le tableau suivant, on fournit les valeurs des*

contributions déterminées selon la règle basée sur la TVaR :

κ	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(X_1;S)$	$TVaR_\kappa(X_1;S)$
95 %	170 000	215 188.9	87 427.8	127 761.1
99 %	240 000	282 509.1	116 337.9	166 171.2

□

On poursuit en considérant dans le prochain exemple un cas de lois composées multivariées avec des montants des sinistres continus que l'on a approximés par des v.a. définies sur un support arithmétique.

Exemple 15.12 ***(Suite de l'exemple 13.41).*** *Pour le portefeuille de 2 lignes d'affaires décrit à l'exemple 13.41), on a obtenu les résultats suivants :*

κ	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_1\right)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_2\right)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$
95 %	380.5665	277.1934	573.1105
99.5 %	510.7144	372.3530	750.0120

Le capital pour le portefeuille correspond à l'approximation $TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$. *Les contributions calculées selon les règles basées sur la TVaR et sur la covariance sont fournies dans le tableau suivant :*

κ	$C_\kappa^{TVaR}\left(\widetilde{X}_1\right)$	$C_\kappa^{TVaR}\left(\widetilde{X}_2\right)$	$C_\kappa^{cov}\left(\widetilde{X}_1\right)$	$C_\kappa^{cov}\left(\widetilde{X}_2\right)$
95 %	348.3879	224.7226	326.1799	246.9307
99.5 %	460.5728	289.4393	426.5834	323.4287

où $C_\kappa^{TVaR}\left(\widetilde{X}_i\right) = TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_i;\widetilde{S}\right)$ *et* $C_\kappa^{cov}\left(\widetilde{X}_i;\widetilde{S}\right)$, $i=1,2$. □

15.4.8 Loi Poisson composée multivariée

Pour déterminer la contribution $TVaR_\kappa(X_i;S)$ pour chaque risque, la relation en (15.24) peut devenir difficile d'application quand le nombre n de risques devient grand. Néanmoins, dans le cas où $(X_1,...,X_n)$ obéit à la loi Poisson composée multivariée décrite en 13.15, il est possible de miser sur la construction expliquée en 13.10 de la loi de $(M_1,...,M_n)$ pour déterminer l'expression de la contribution $TVaR_\kappa(X_i;S)$. On doit établir la distribution conjointe de (X_i,S_{-i}) dont les composantes sont définies par

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k_i=0}^{M_i} B_{i,j_i}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}, \tag{15.25}$$

et $S_{-i} = \sum_{l=1,l\neq i}^{n} X_l$. La fgm $\mathcal{M}_{S_{-i}}(r)$ de S_{-i} est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{S_{-i}}(r) &= \mathrm{e}^{\alpha_0\left(\prod_{l=1,l\neq i}^{n}\left(\mathcal{M}_{B_l}(r)-1\right)\right)} \prod_{l=1,l\neq i}^{n} \mathrm{e}^{(\lambda_l-\alpha_0)\left(\mathcal{M}_{B_l}(r)-1\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha_0\left(\mathcal{M}_{C_{-i}}(r)-1\right)}\mathrm{e}^{\lambda_{-i}\left(\mathcal{M}_{D_{-i}}(r)-1\right)}, \end{aligned} \tag{15.26}$$

où $\mathcal{M}_{C_{-i}}(r) = \prod_{l=1,l\neq i}^{n}\mathcal{M}_{B_l}(r)$, $\mathcal{M}_{D_{-i}}(r) = \sum_{l=1,l\neq i}^{n}\frac{\lambda_l-\alpha_0}{\lambda_{-i}}\mathcal{M}_{B_l}(r)$ et $\lambda_{-i} = \sum_{l=1,l\neq i}^{n}\lambda_l - \alpha_0$.

L'expression en (15.26) implique que les fonctions de répartition de C_{-i} et D_{-i} sont

$$F_{C_{-i}}(x) = F_{\sum_{l=1,l\neq i}^{n} B_l}(x) \tag{15.27}$$

et

$$F_{D_{-i}}(x) = \sum_{l=1,l\neq i}^{n} \frac{\lambda_l-\alpha_0}{\sum_{l=1,l\neq i}^{n}(\lambda_l-\alpha_0)} F_{B_l}(x). \tag{15.28}$$

Soit la v.a. $J_{-i} = \sum_{l=1,l\neq i}^{n} K_l \sim Pois(\lambda_{-i})$, où J_{-i} est interprétée comme la somme des chocs individuels provenant de tous les risques à l'exception du $i-$ième risque. Alors, la v.a. S_{-i} peut être écrite comme la somme de deux composantes. La première d'entre elles est associée aux sinistres liés aux chocs individuels

alors que la deuxième composante correspond aux sinistres liés au choc commun. Il en résulte que

$$S_{-i} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{J_0} C_{-i,j}, & J_0 > 0 \\ 0, & J_0 = 0 \end{cases} + \begin{cases} \sum_{j_{-i}=1}^{J_{-i}} D_{-i,j_{-i}}, & J_{-i} > 0 \\ 0, & J_{-i} = 0 \end{cases}, \tag{15.29}$$

où $C_{-i,1} \sim ... \sim C_{-i,j} \sim C_{-i}$ et $D_{-i,1} \sim ... \sim D_{-i,n_{-i}-j} \sim D_{-i}$.

Ensuite, on définit la paire (M_i, N_{-i}) avec les composantes

$$\begin{aligned} M_i &= K_i + K_0, \\ N_{-i} &= J_{-i} + K_0, \end{aligned}$$

où J_{-i}, K_i et K_0 sont indépendantes. La fonction de masse de probabilité conjointe de (M_i, N_{-i}) est donnée par

$$f_{M_i,N_{-i}}(k_i, n_{-i}) = \sum_{j=0}^{\min(k_i;n_{-i})} f_{J_i}(k_i - j) f_{J_{-i}}(n_i - j) f_{J_0}(j), \tag{15.30}$$

pour k_i, $n_{-i} \in \mathbb{N}$.

Enfin, nous avons tous les ingrédients pour développer l'expression de la contribution $TVaR_\kappa(X_i; S)$.

Proposition 15.13 *L'expression de la contribution $TVaR_\kappa(X_i; S)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ est*

$$\frac{1}{1-\kappa} \sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{n_{-i}=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\min(k_i,n_{-i})} \vartheta_1(k_i - j, n_{-i} - j, j) \vartheta_2(k_i - j, n_{-i} - j, j), \tag{15.31}$$

où

$$\vartheta_1(k_i - j, n_{-i} - j, j) = f_{K_i}(k_i - j) f_{J_{-i}}(n_{-i} - j) f_{K_0}(j)$$

et

$$\begin{aligned} & \vartheta_2(k_i - j, n_{-i} - j, j) \\ = \; & E\left[\left(\sum_{l=1}^{k_i} B_{i,l}\right) \times 1_{\left\{\sum_{l=1}^{k_i} B_{i,l} + \sum_{m=1}^{n_{-i}-j} D_{-i,m} + \sum_{r=1}^{j} C_{-i,r} > VaR_\kappa(S)\right\}}\right] \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant (15.30), (15.25) et (15.29), on obtient (15.31). ■

Les résultats de la proposition 13.40 et de la proposition 15.13 sont mis en pratique dans l'exemple suivant.

Exemple 15.14 *On considère un portefeuille de $n_1 + n_2$ risques $X_1, ..., X_{n_1+n_2}$. On définit $S = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i$ où $X_i \sim PComp(\lambda_i, F_{B_i})$, $\lambda_i = 0.003$ pour $i = 1, ..., n_1$ et $\lambda_i = 0.004$, pour $i = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2$. Aussi, on suppose que $B_i \sim Ga\left(\gamma_i, \frac{1}{1000}\right)$, $\gamma_i = 2$ pour $i = 1, ..., n_1$ et $\gamma_i = 1$, pour $i = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2$. Les valeurs de $E[X_i]$, $\mathrm{Var}(X_i)$, $VaR_{0.995}(X_i)$ et $TVaR_{0.995}(X_i)$ sont fournies dans le tableau suivant pour $i = 1, ..., n_1 + n_2$:*

i	$E[X_i]$	$\mathrm{Var}(X_i)$	$VaR_{0.995}(X_i)$	$TVaR_{0.995}(X_i)$
$1, ..., n_1$	6	18 000	0	1200
$n_1 + 1, ..., n_1 + n_2$	4	8000	0	800

On sait que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \alpha_0 E[B_i] E[B_j]$ pour $i \neq j$. Alors, $E[S] = n_1 6 + n_2 4$ et

$$\mathrm{Var}(S) = n_1 18\ 000 + n_2 8000 + n_1(n_1 - 1)\alpha_0 6^2 + n_2(n_2 - 1)\alpha_0 4^2 + n_1 n_2 6 \times 4.$$

Les valeurs de $VaR_\kappa(S)$, $TVaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(X_i; S)$ $(i = 1, n_1 + 1)$ pour $\kappa = 0.995$ sont fournies dans le

tableau suivant :

$\alpha_0 = 0$					
n_1	n_2	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(X_1;S)$	$TVaR_\kappa(X_{n_1+1};S)$
10	10	3652.76	4878.43	376.61	111.23
100	100	8139.83	9683.90	73.48	23.36
500	500	17 492.66	19 695.98	27.90	11.49
$\alpha_0 = 0.001$					
10	10	3435.55	9730.09	678.48	294.53
100	100	7386.39	67 204.62	453.85	218.20
500	500	14 831.62	314 154.66	419.58	208.73
$\alpha_0 = 0.002$					
10	10	3018.49	14 541.84	971.43	482.76
100	100	6392.17	124 789.34	883.89	414.00
500	500	11 685.90	608 843.80	811.43	406.26

On observe que $\sum_{i=1}^{n_1+n_2} VaR_{0.995}(X_i) = 0$ *pour toute valeur de* n_1, $n_2 \in \mathbb{N}^+$; $\sum_{i=1}^{n_1+n_2} TVaR_{0.995}(X_i) = n_1 1200 + n_2 800$ *pour toute valeur de* n_1 *et* n_2. *De plus, on mentionne que* $VaR_{0.995}(S) > 0 = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} VaR_{0.995}(X_i)$ *pour toute valeur de* n_1, $n_2 \in \mathbb{N}^+$, *ce qui met en évidence le problème d'incohérence de la mesure VaR. Aussi, on observe* $TVaR_{0.995}(S) \leq \sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}(X_i) = n_1 1200 + n_2 800$ *pour toute valeur de* n_1, $n_2 \in \mathbb{N}^+$. *On constate que la contribution de chaque risque calculée selon la règle de la TVaR décroît en fonction de* n_1 *et de* n_2. *Le bénéfice d'agrégation des risques augmente avec* n_1 *et* n_2 *mais il décroît lorsque le paramètre de dépendance* α_0 *augmente.* □

15.5 Euler, fgp et FFT

Soit le couple de v.a. discrètes (M_1, M_2) $(M_1, M_2 \in \mathbb{N})$ avec

$$\mathcal{P}_{M_1,M_2}(t_1,t_2) \quad = E\left[t_1^{M_1} t_2^{M_2}\right] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} \times f_{M_1,M_2}(k_1,k_2)$$

On définit $N = M_1 + M_2$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(t) \quad &= E\left[t^N\right] = E\left[t_1^{M_1} t_2^{M_2}\right] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} t^{k_1} t^{k_2} \times f_{M_1,M_2}(k_1,k_2) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \times \sum_{j=0}^{k} f_{M_1,M_2}(j,k-j) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \times f_N(k), \end{aligned}$$

On illustre comment isoler les valeurs de $E\left[M_1 \times 1_{\{N=k\}}\right]$ et $E\left[M_2 \times 1_{\{N=k\}}\right]$ à partir de la fgp conjointe $\mathcal{P}_{M_1,M_2}$ de (M_1, M_2).

À cette fin, on définit

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_1,t_2) &= t_1 \times \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{M_1,M_2}(t_1,t_2)}{\mathrm{d}t_1} = E\left[M_1 t_1^{M_1} t_2^{M_2}\right] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} \times k_1 \times f_{M_1,M_2}(k_1,k_2) \\ \varphi_2(t_1,t_2) &= t_2 \times \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{M_1,M_2}(t_1,t_2)}{\mathrm{d}t_2} = E\left[t_1^{M_1} \times M_2 t_2^{M_2}\right] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} \times k_2 \times f_{M_1,M_2}(k_1,k_2). \end{aligned}$$

De plus, on définit

$$\begin{aligned} \psi_1(t) \quad &= \varphi_1(t,t) = E\left[M_1 t^{M_1} t^{M_2}\right] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} t^{k_1} t^{k_2} \times k_1 \times f_{M_1,M_2}(k_1,k_2) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \times \sum_{j=0}^{k} j \times f_{M_1,M_2}(j,k-j) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \times E\left[M_1 \times 1_{\{N=k\}}\right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_2(t) \quad &= \varphi_2(t,t) = E\left[t^{M_1} M_2 t^{M_2}\right] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} t^{k_1} t^{k_2} \times k_2 \times f_{M_1,M_2}(k_1,k_2) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \times \sum_{j=0}^{k} j \times f_{M_1,M_2}(k-j,j) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \times E\left[M_2 \times 1_{\{N=k\}}\right]. \end{aligned}$$

Les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions génératrices. Pour $i = 1, 2$, on déduit que

$$E\left[M_i \times 1_{\{N=0\}}\right] = \psi_i(0) = 0$$

et

$$E\left[M_i \times 1_{\{N=k\}}\right] = \frac{1}{k!}\left.\frac{\mathrm{d}^k \psi_i(t)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}^+$$

On définit

$$g_i(k) = \frac{E\left[M_i \times 1_{\{N=k\}}\right]}{E[M_i]}$$

pour $k \in \mathbb{N}$ et $i = 1, 2$. Comme $\sum_{k=0}^{\infty} E\left[M_1 \times 1_{\{N=k\}}\right] = E[M_1]$ (pour $i = 1,\ 2$), alors $g_i(k)$ est une probabilité pour $k \in \mathbb{N}$ et $i = 1, 2$. Clairement,

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_i(k) = 1.$$

Alors, pour $i = 1, 2$, la fonction

$$\zeta_i(t) = \frac{\psi_i(t)}{E[M_i]}$$

est une fgp d'une v.a., notée $M_i^{(c)}$, c.-à-d.,

$$g_i(k) = \Pr\left(M_i^{(c)} = k\right), \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

On a recour à cet articifice uniquement pour calculer les valeurs de $g_i(k)$ et, à partir de celles-ci, de retrouver les valeurs de $E\left[M_i \times 1_{\{N=k\}}\right]$ avec

$$E\left[M_i \times 1_{\{N=k\}}\right] = E[M_i] \times g_i(k), \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

D'après le contenu du chapitre 11, on peut alors utiliser FFT pour calculer les valeurs de $g_i(k)$, pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

Des illustrations de cette approche sont fournies dans le document d'exercices.

15.6 Allocation et positions financières

On considère un investisseur avec un portefeuille composé de positions financières. On a $L_{TOT} = \sum_{i=1}^{m} L_i$ où la v.a. L_i correspond à la perte que l'investisseur peut encourir pour la position i sur une courte période h. La perte pour la position i est définie par la v.a. $L_i = V_i(0) - V_i(1)$ où $V_i(0)$ est la valeur de la position i au temps 0 (connue au temps 0 et donc une constante) et la v.a. $V_i(1)$ est la valeur de la position à la durée 1. La durée h dépend du contexte. Elle peut être d'une journée, d'une semaine, d'un mois, etc. L'investisseur détermine le capital associé à l'ensemble du portefeuille et la part allouée à chaque position. Il suffit d'utiliser les règles d'allocation en remplaçant la v.a. S par la v.a. L_{TOT} et les v.a. X_i par les v.a. L_i $(i = 1, ..., n)$.

15.7 Notes bibliographiques

Pour une introduction aux notions concernant l'allocation de capital, on recommande [Albrecht, 2014], [McNeil et al., 2015] et [Tasche, 1999]. Pour des applications en actuariat et en gestion quantitative des risques de la règle d'allocation basée sur la TVaR, on peut consulter, p. ex., [Bargès et al., 2009], [Cherian, 1941], [Chiragiev and Landsman, 2007], [Cossette et al., 2012], [Dhaene et al., 2008], [Furman and Landsman, 2005], [Furman and Landsman, 2008] et [Landsman and Valdez, 2003].

Code LaTeX : `chapitre_allocation_partie2.tex`

Annexe A

Annexes pour les examens

1.1 Symboles, abréviations et limites

1.1.1 Symboles

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ = ensemble des entiers naturels (incluant $\{0\}$)
2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2...\}$
3. $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
4. $\mathbb{R}^+$ = ensemble des nombres réels positifs (incluant $\{0\}$)
5. $i = \sqrt{-1}$ = unité imaginaire
6. $\mathbb{C} = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ = ensemble des nombres complexes
7. $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$
8. $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$
9. $\Phi(x)$ = fonction de répartition de la loi normale standard
10. $\Phi^{-1}(u)$ = fonction quantile de la loi normale standard

1.1.2 Abréviations

1. v.a. = variable(s) aléatoire(s)
2. i.i.d. = indépendant(e)s et identiquement distribué(e)s
3. fmp = fonction de masses de probabilité
4. fgp = fonction génératrice des probabilités
5. fgm = fonction génératrice des moments
6. TLS = transformée de Laplace-Stieltjes
7. MMV = méthode du maximum de vraisemblance

1.1.3 Limites

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$
2. $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{m\times n} = \mathrm{e}^{mt}$
3. $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$
4. $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-t}$

1.1.4 Séries de Taylor connues

1. Développement : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $(x \in \mathbb{R})$
   — approximation du premier ordre (intéressante pour des petites valeurs de $|x|$) :
   $$e^x \simeq 1 + x$$
   — exemples :
   $$\begin{array}{lcl} 1.1 & \simeq & \mathrm{e}^{0.1} = 1.105171 \\ 1.01 & \simeq & \mathrm{e}^{0.01} = 1.010050 \\ 0.9 & \simeq & \mathrm{e}^{-0.1} = 0.904837 \\ 0.99 & \simeq & \mathrm{e}^{-0.01} = 0.990050 \end{array}$$
2. Développement : $\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \frac{x^k}{k!}$ $(|x| < 1)$

1.2 Définitions utiles

1. Fonction quantile : Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F_X. La fonction quantile F_X^{-1} de X est définie par
$$F_X^{-1}(u) = \inf(x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq u)$$
pour $u \in (0,1)$.
2. Mesure TVaR (pour "Tail-VaR") : Soit une v.a. X, où $E[X] < \infty$, avec une fonction de répartition F_X et une fonction quantile F_X^{-1}. Le mesure TVaR de X est définie par
$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u,$$
pour $u \in (0,1)$.
3. Mesure LTVaR (pour "Left Tail -VaR") : Soit une v.a. X, où $E[X] < \infty$, avec une fonction de répartition F_X et une fonction quantile F_X^{-1}. Le mesure LTVaR de X est définie par
$$LTVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u,$$
pour $u \in (0,1)$. On utilise parfois la notation "$ES_\kappa(X)$" au lieu de "$LTVaR_\kappa(X)$", où "ES" est un acronyme pour "Expected-Shortfall".

1.3 Lois continues à support positif

1.3.1 Loi uniforme

— Notation : $X \sim Unif(a,b)$

— Paramètres : $-\infty < a < b < \infty$

— Support : $x \in [a,b]$

— Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{b-a} \times 1_{\{x \in [a,b]\}}$

— Fonction de répartition : $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$

— Espérance : $E[X] = \frac{a+b}{2}$

— Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{(b-a)t}$

— Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$

— Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{d^2 - a^2}{2(b-a)}$

— Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = a + (b-a)\kappa$

— Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = a + \frac{(b-a)}{2}(1+\kappa)$

— Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{(b-d)^2}{2(b-a)}$

— Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{b-d}{2}$

— Espérance limitée : $E[\min(X;d)] = \frac{d^2 - a^2}{2(b-a)} + d\frac{b-d}{b-a}$

1.3.2 Loi exponentielle

- Notation : $X \sim Exp(\beta)$
- Paramètre : $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \beta \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Fonction de répartition : $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Espérance : $E[X] = \frac{1}{\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$, $t < \beta$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \left(\frac{1}{\beta}\right)^k k!$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d}\right) - d\mathrm{e}^{-\beta d}$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = -\frac{1}{\beta}\ln(1-\kappa)$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + E[X]$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_X(d) = \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d} = E[X]\,\overline{F}(d)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_X(d) = \frac{1}{\beta}$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d}\right)$

1.3.3 Loi gamma

- Notation : $X \sim Ga(\alpha, \beta)$
- Paramètres : $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$
- Fonction de répartition : notée $H(x; \alpha, \beta)$, forme non explicite pour $\alpha \notin \mathbb{N}^+$
- Fonction de survie : notée $\overline{H}(x; \alpha, \beta)$, forme non explicite pour $\alpha \notin \mathbb{N}^+$
- Espérance : $E[X] = \frac{\alpha}{\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$
- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$, $t < \beta$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+i)}{\beta^k}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\alpha}{\beta} H(d; \alpha+1, \beta)$
- Mesure VaR : outil d'optimisation si $\alpha \neq 1$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \frac{\alpha}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(X); \alpha+1, \beta)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{\alpha}{\beta} \overline{H}(d; \alpha+1, \beta) - d\overline{H}(d; \alpha, \beta)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\overline{H}(d;\alpha+1,\beta)}{\overline{H}(d;\alpha,\beta)} - d$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{\alpha}{\beta} H(d; \alpha+1, \beta) + d\overline{H}(d; \alpha, \beta)$
- Lois associées :
  - la loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma (avec $\alpha = 1$) ;
  - la loi du khi-deux avec paramètre $\nu \in \mathbb{N}^+$ (nombre de degrés de liberté) correspond à une loi gamma de paramètres $\alpha = \frac{\nu}{2}$ et $\beta = 2$;
  - la loi Erlang avec paramètre $n \in \mathbb{N}^+$ correspond à une loi gamma de paramètres $\alpha = n$ et β.

1.3.4 Loi béta

— Notation : $X \sim Bêta(\alpha, \beta)$

— Paramètres : $\alpha > 0$, $\beta > 0$

— Support : $x \in [0, 1]$

— Fonction bêta incomplète : $I(x; \alpha, \beta) = \int_0^x u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} \, \mathrm{d}u$, $x \in [0, 1]$

— Fonction bêta complète : $I(\alpha, \beta) = I(1; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

— Fonction de densité : $f_X(x) = \frac{1}{I(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \times 1_{\{x \in [0,1]\}}$

— Fonction de répartition : $F_X(x) = \frac{I(x;\alpha,\beta)}{I(\alpha,\beta)}$, notée $B(x; \alpha, \beta)$

  — Si $\beta = 1$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^\alpha, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

  — Si $\alpha = 1$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - (1-x)^\beta, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

  — Si α, $\beta \in \mathbb{N}^+$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum\limits_{j=\alpha}^{\alpha+\beta-1} \frac{(\alpha+\beta-1)!}{j!(\alpha+\beta-1-j)!} x^j (1-x)^{\alpha+\beta-1-j}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

— Espérance : $E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

— Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

— Fonction génératrice des moments :

$$\mathcal{M}_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha+j}{\alpha+\beta+j} \right) \frac{t^k}{k!}$$

— Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+k)}$

— Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(d; \alpha+1, \beta)$, $\alpha \leq d \leq \beta$

  — Si $\beta = 1$, $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\alpha d^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

  — Si $\alpha = 1$, $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = -d(1-d)^\beta + \frac{1-(1-d)^{\beta+1}}{\beta+1}$

— Mesure VaR : outil d'optimisation

  — Si $\beta = 1$, $VaR_\kappa(X) = \kappa^{\frac{1}{\alpha}}$

  — Si $\alpha = 1$, $VaR_\kappa(X) = 1 - (1-\kappa)^{\frac{1}{\beta}}$

— Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{(1-\kappa)} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} (1 - B(VaR_\kappa(X); \alpha+1, \beta))$

  — Si $\beta = 1$, $TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{(1-\kappa)} \frac{\alpha}{\alpha+1} (1 - \kappa^{(\alpha+1)/\alpha})$

  — Si $\alpha = 1$, $TVaR_\kappa(X) = 1 - \frac{\beta}{\beta+1} (1-\kappa)^{\frac{1}{\beta}}$

— Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1 - B(d; \alpha+1, \beta)) - d(1 - B(d; \alpha, \beta))$, $d \in [0, 1]$

  — Si $\beta = 1$, $\pi_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+1}(1 - d^{\alpha+1}) - d(1 - d^\alpha)$

  - Si $\alpha = 1$, $\pi_d(X) = \frac{(1-d)^{\beta+1}}{1+\beta}$

- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{1-B(d;\alpha+1,\beta)}{1-B(d;\alpha,\beta)} - d$, $d \in [0,1]$
  - Si $\beta = 1$, $e_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{1-d^{\alpha+1}}{1-d^{\alpha}} - d$
  - Si $\alpha = 1$, $e_d(X) = \frac{(1-d)}{1+\beta}$
- Espérance limitée : $E[\min(X;d)] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(d;\alpha+1,\beta) + \beta(1 - B(d;\alpha,\beta))$, $d \in [0,1]$
  - Si $\beta = 1$, $E[\min(X;d)] = \frac{\alpha}{\alpha+1}d^{\alpha+1} + d(1-d^{\alpha})$
  - Si $\alpha = 1$, $E[\min(X;d)] = \frac{1-(1-d)^{\beta+1}}{\beta+1}$
- Loi associée : la loi uniforme avec $a = 0$ et $b = 1$ est un cas particulier de la loi bêta avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

1.3.5 Loi Erlang

— Notation : $X \sim Erl(n, \beta)$

— Paramètres : $n \in \mathbb{N}^+$, $\beta > 0$

— Support : $x \in \mathbb{R}^+$

— Fonction de densité : $f(x) = \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} \mathrm{e}^{-\beta x}$

— Fonction de répartition : $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}$

— Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \mathrm{e}^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}$

— Espérance : $E[X] = \frac{n}{\beta}$

— Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{\beta^2}$

— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^n$, $t < \beta$

— Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n+i)}{\beta^k}$

— Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{n}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\beta d)^j}{j!}\right)$

— Mesure VaR : outil d'optimisation si $n \neq 1$

— Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{n}{\beta}\left(\mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\beta VaR_\kappa(X))^j}{j!}\right)$

— Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{n}{\beta}\overline{H}(d; n+1, \beta) - d\overline{H}(d; n, \beta)$

— Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{n}{\beta}\frac{\overline{H}(d;n+1,\beta)}{\overline{H}(d;n,\beta)} - d$

— Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{n}{\beta} H(d; n+1, \beta) + d\overline{H}(d; n, \beta)$

1.3.6 Loi Erlang généralisée

— Notation : $X \sim ErlG\left(\beta_1, ..., \beta_n\right)$

— Paramètres : β_1, ..., $\beta_n > 0$ et $\beta_1, ..., \beta_n$ distincts

— Support : $x \in \mathbb{R}^+$

— Fonction de densité de X :

$$f_X\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \beta_i \mathrm{e}^{-\beta_i x}$$

— Fonction de répartition de X :

$$F_X\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x}\right)$$

— Fonction de survie de X : $\overline{F}_X\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \mathrm{e}^{-\beta_i x}$

— Espérance de X : $E\left[X\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i}$

— Variance de X : $\mathrm{Var}\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i^2}$

— Fonction génératrice des moments de X : $\mathcal{M}_X\left(t\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - t}\right)$

— Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(k+1)}{\beta_i^k}$

— Espérance tronquée :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(-d\mathrm{e}^{-\beta_i d} + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i} \right)$$

— Mesure VaR : outil d'optimisation

— Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(VaR_\kappa(X)\mathrm{e}^{-\beta_i VaR_\kappa(X)} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta_i VaR_\kappa(X)}}{\beta_i} \right)$$

— Espérance limitée : $E\left[\min\left(X; d\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i}\right)$

— Fonction *stop-loss* : $\pi_d\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\frac{\mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i}\right)$

— Fonction d'excès-moyen : $e_d\left(X\right) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\frac{\mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\mathrm{e}^{-\beta_i d}\right)}$

— Remarques :

— les termes $\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i}\right)$ sont négatifs ou positifs et $\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i}\right) = 1$;

— la loi Erlang généralisée de la v.a. X est l'équivalent de la loi d'une somme de n v.a. indépendantes Y_1, ..., Y_n de lois exponentielles indépendantes avec paramètres β_1, ..., β_n, e.g. $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ où $Y_i \sim Exp\,(\beta_i)$ pour $i = 1, ..., n$.

1.3.7 Loi de Weibull

— Notation : $X \sim We\,(\tau, \beta)$
— Paramètres : $\tau > 0$, $\beta > 0$
— Support : $x \in \mathbb{R}^+$
— Fonction de densité : $f\,(x) = \beta\tau\,(\beta x)^{\tau-1}\,\mathrm{e}^{-(\beta x)^\tau}$
— Fonction de répartition : $F\,(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(\beta x)^\tau}$
— Fonction de survie : $\overline{F}\,(x) = \mathrm{e}^{-(\beta x)^\tau}$
— Espérance : $E\,[X] = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)$
— Variance : $\mathrm{Var}\,(X) = \frac{1}{\beta^2}\Gamma\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) - \left(\frac{1}{\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)\right)^2$
— Fonction génératrice des moments (pour $\alpha > 1$) :

$$\mathcal{M}_X\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\beta^k k!}\Gamma\left(1 + \frac{k}{\tau}\right)$$

— Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{1}{\beta^k}\Gamma\left(1 + \frac{k}{\tau}\right)$
— Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{1}{\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})H(d^\tau; 1 + \frac{1}{\tau}, \beta^\tau)$
— Mesure VaR : $VaR_\kappa\,(X) = \frac{1}{\beta}(-\ln\,(1-\kappa))^{\frac{1}{\tau}}$
— Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa\,(X) = \frac{1}{\beta(1-\kappa)}\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})\overline{H}(-\ln(1-\kappa); 1 + \frac{1}{\tau}, 1)$
— Fonction *stop-loss* : $\pi_d\,(X) = \frac{1}{\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})\overline{H}(d^\tau; 1 + \frac{1}{\tau}, \beta^\tau) - d\mathrm{e}^{-(\beta d)^\tau}$
— Fonction d'excès-moyen : $e_d\,(X) = \frac{e^{(\beta d)^\tau}}{\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})\overline{H}(d^\tau; 1 + \frac{1}{\tau}, \beta^\tau) - d$
— Espérance limitée : $E\,[\min\,(X; d)] = \frac{1}{\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})H(d^\tau; 1 + \frac{1}{\tau}, \beta^\tau) + d\mathrm{e}^{-(\beta d)^\tau}$
— Cas particuliers :

  — la loi exponentielle est un cas cas particulier de la loi Weibull avec $\tau = 1$;
  — la loi Raleigh est un cas cas particulier de la loi Weibull avec $\tau = 2$.

1.3.8 Loi lognormale

— Notation : $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$

— Paramètres : $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$

— Support : $x \in \mathbb{R}^+$

— Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$

— Fonction de répartition : $F(x) = \Phi(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma})$

— Espérance : $E[X] = \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

— Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$

— Fonction génératrice des moments : forme non analytique

— Moments d'ordre k : $E[X^k] = \mathrm{e}^{k\mu + k^2 \frac{\sigma^2}{2}}$

— Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \exp(\mu + \sigma^2/2)\Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})$

— Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \exp(\mu + \sigma VaR_\kappa(Z))$

— Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}(1 - \Phi(VaR_\kappa(Z) - \sigma))$$

— Fonction *stop-loss* :

$$\pi_d(X) = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}(1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})) - d[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]$$

— Fonction d'excès-moyen :

$$e_d(X) = \frac{1}{[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]}\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}(1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})) - d$$

— Espérance limitée :

$$E[\min(X; d)] = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}\Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma}) + d[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]$$

— Loi associée : $X = \mathrm{e}^Y$, où $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, impliquant $E[X^k] = M_Y(k)$

1.3.9 Loi inverse gaussienne

— Notation : $X \sim IG(\mu, \beta)$

— Paramètres : μ, $\beta \in \mathbb{R}^+$

— Support : $x \in \mathbb{R}^+$

— Fonction de densité : $f_X(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\beta x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta x}(x-\mu)^2\right)$

— Fonction de répartition :

$$F_X(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(x-\mu)\right) + \mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(x+\mu)\right)$$

— Espérance : $E[X] = \mu$

— Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mu\beta$

— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = e^{\frac{\mu}{\beta}\left(1-\sqrt{(1-2\beta t)}\right)}$

— Espérance tronquée :

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= d - (2d-\mu)\Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \\ &\quad -(2d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \end{aligned}$$

— Mesure VaR : outil d'optimisation

— Mesure $TVaR$:

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\left(\mu - d + (2d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa}\left((2d-\mu)\Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right)\right), \end{aligned}$$

avec $d = VaR_\kappa(X)$

— Fonction *stop-loss* :

$$\begin{aligned} \pi_d(X) &= (\mu - d)\left(1 - \Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right)\right) \\ &\quad + (d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \end{aligned}$$

— Fonction d'excès-moyen :

$$\begin{aligned} e_d(X) &= \frac{(\mu-d)\left(1-\Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right)\right)}{1-\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d-\mu)\right) + \mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d+\mu)\right)\right)} \\ &\quad + \frac{+(d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right)}{1-\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d-\mu)\right) + \mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d+\mu)\right)\right)} \end{aligned}$$

— Espérance limitée :

$$\begin{aligned} E\left[\min\left(X;d\right)\right] &= d-(d-\mu)\Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \\ &\quad -(d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \end{aligned}$$

1.3.10 Loi Pareto

— Notation : $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$
— Paramètres : $\alpha > 0$, $\lambda > 0$
— Support : $x \in \mathbb{R}^+$
— Fonction de densité : $f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}$
— Fonction de répartition : $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$
— Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$
— Espérance (pour $\alpha > 1$) : $E[X] = \frac{\lambda}{\alpha-1}$
— Variance (pour $\alpha > 2$) : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$
— Fonction génératrice des moments : n'existe pas
— Moments d'ordre k (pour $\alpha > k \in \mathbb{N}^+$) : $E\left[X^k\right] = \frac{\lambda^k k!}{\prod_{i=1}^{k}(\alpha-i)}$
— Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\lambda^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}$, si $-1 < k < \alpha$
— Espérance tronquée (pour $\alpha > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\lambda}{\alpha-1}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+d)^{\alpha-1}}\right) - d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha$$

— Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \lambda\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$
— Mesure $TVaR$ (pour $\alpha > 1$) : $TVaR_\kappa(X) = \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$
— Fonction *stop-loss* (pour $\alpha > 1$) : $\pi_d(X) = \frac{\lambda}{\alpha-1}(\frac{\lambda}{\lambda+d})^{\alpha-1}$
— Fonction d'excès-moyen (pour $\alpha > 1$) : $e_d(X) = \frac{\lambda+d}{\alpha-1}$, si $\alpha > 1$
— Espérance limitée (pour $\alpha > 1$) : $E[\min(X; d)] = \frac{\lambda}{\alpha-1}[1 - (\frac{\lambda}{\lambda+d})^{\alpha-1}]$

1.3.11 Loi F-généralisée

— Notation : $X \sim FG(\alpha, \lambda, \tau)$

— Paramètres : $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\tau > 0$

— Support : $x \in \mathbb{R}^+$

— Fonction de densité : $f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\tau)\lambda^\alpha x^{\tau-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)(\lambda+x)^{\alpha+\tau}}$

— Fonction de répartition : $F_X(x) = B(\frac{x}{\lambda+x}; \tau, \alpha)$

— Espérance (pour $\alpha > 1$) : $E[X] = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}$

— Variance (pour $\alpha > 2$) : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\lambda^2\tau(\tau-\alpha+1)}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

— Fonction génératrice des moments : n'existe pas

— Moments d'ordre k (pour $\alpha > k$) : $E\left[X^k\right] = \lambda^k \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\tau+i)}{\prod_{i=1}^{k}(\alpha-i)}$

— Espérance tronquée (pour $\alpha > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1} B\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau+1, \alpha-1\right)$$

— Mesure VaR : outil d'optimisation

— Mesure $TVaR$ (pour $\alpha > 1$) :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{\lambda\tau}{\alpha-1}\overline{B}\left(\frac{VaR_\kappa(X)}{\lambda+VaR_\kappa(X)}; \tau+1, \alpha-1\right)$$

— Fonction *stop-loss* (pour $\alpha > 1$) :

$$\pi_d(X) = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}\overline{B}\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau+1, \alpha-1\right) - d\overline{B}(\frac{d}{\lambda+d}; \tau, \alpha)$$

— Fonction d'excès-moyen (pour $\alpha > 1$) :

$$e_d(X) = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}\frac{\overline{B}\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau+1, \alpha-1\right)}{\overline{B}\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau, \alpha\right)} - d$$

— Espérance limitée (pour $\alpha > 1$) :

$$E[\min(X; d)] = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1} B\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau+1, \alpha-1\right) + d\overline{B}(\frac{d}{\lambda+d}; \tau, \alpha)$$

— Loi associée : la loi de Pareto est un cas particulier de la loi F-généralisée avec $\tau = 1$.

— Remarque : la loi F-généralisée est parfois appelée la loi de Pareto généralisée.

1.3.12 Loi Burr

— Notation : $X \sim Burr\,(\alpha, \lambda, \tau)$
— Paramètres : $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\tau > 0$
— Support : $x \in \mathbb{R}^+$
— Fonction de densité : $f_X\,(x) = \frac{\alpha\tau\lambda^\alpha x^{\tau-1}}{(\lambda+x^\tau)^{\alpha+1}}$
— Fonction de répartition : $F_X\,(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x^\tau}\right)^\alpha$
— Espérance : $E\,[X] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})$
— Variance : $\mathrm{Var}\,(X) = \frac{\lambda^{2/\tau}}{\Gamma(\alpha)}\left(\Gamma(1+\frac{2}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{2}{\tau}) - \frac{(\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau}))^2}{\Gamma(\alpha)}\right)$
— Fonction génératrice des moments : n'existe pas
— Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{k/\tau}\Gamma(1+\frac{k}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{k}{\tau})$, $-\tau < k < \alpha\tau$
— Espérance tronquée :

$$E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})B(\frac{d^\tau}{\lambda+d^\tau};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau})$$

— Mesure VaR : $VaR_\kappa\,(X) = (\lambda\left\{(1-\kappa)^{-1/\alpha}-1\right\})^{1/\tau}$
— Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa\,(X) = \frac{1}{(1-\kappa)\Gamma(\alpha)}\left(\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})\overline{B}\left(\frac{VaR_\kappa(X)^\tau}{\lambda+VaR_\kappa(X)^\tau};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

— Fonction *stop-loss* :

$$\pi_d\,(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})\overline{B}(\frac{d^\tau}{\lambda+d^\tau};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}) - d(\frac{\lambda}{\lambda+d^\tau})^\alpha$$

— Fonction d'excès-moyen :

$$e_d\,(X) = \frac{(\lambda+d^\tau)^\alpha\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})}{\lambda^{\alpha-1/\tau}\Gamma(\alpha)}\overline{B}(\frac{d^\tau}{\lambda+d^\tau};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}) - d$$

— Espérance limitée :

$$E\,[\min\,(X;d)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})B(\frac{d^\tau}{\lambda+d^\tau};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}) + d(\frac{\lambda}{\lambda+d^\tau})^\alpha$$

— Loi associée : la loi de Pareto est un cas particulier de la loi Burr avec $\tau = 1$.

1.3.13 Loi log-logistique

— Notation : $X \sim LL(\lambda, \tau)$

— Paramètres : λ, $\tau > 0$

— Support : $x \in \mathbb{R}^+$

— Fonction de densité : $f(x) = \frac{\frac{\tau}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau-1}}{\left(1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau}\right)^2} = \frac{\tau\lambda^\tau x^{\tau-1}}{(\lambda^\tau+x^\tau)^2}$

— Fonction de répartition : $F(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\tau}} = \frac{x^\tau}{\lambda^\tau+x^\tau} = 1 - \frac{\lambda^\tau}{\lambda^\tau+x^\tau}$

— Espérance (pour $\tau > 1$) : $E[X] = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)$

— Variance (pour $\tau > 2$) :

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\tau}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\right)^2\right)$$

— Fonction génératrice des moments : n'existe pas

— Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \lambda^k\Gamma\left(1+\frac{k}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{\tau}\right)$, $-\tau < k < \tau$

— Espérance tronquée (pour $\tau > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)B\left(\frac{d^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right)$$

— Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \lambda\left(\kappa^{-1}-1\right)^{-1/\tau}$

— Mesure $TVaR$ (pour $\tau > 1$) :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{\lambda}{1-\kappa}\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\overline{B}\left(\kappa; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right)$$

— Fonction *stop-loss* (pour $\tau > 1$) :

$$\begin{aligned}\pi_d(X) &= \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\overline{B}\left(\frac{d^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right) \\ &\quad -\frac{d\lambda^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}\end{aligned}$$

— Fonction d'excès-moyen (pour $\tau > 1$) :

$$e_d(X) = \frac{\lambda^\tau+d^\tau}{\lambda^{\tau-1}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\overline{B}\left(\frac{d^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right) - d$$

— Espérance limitée (pour $\tau > 1$) :

$$\begin{aligned}E[\min(X;d)] &= \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)B\left(\frac{d^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right) \\ &\quad +\frac{d\lambda^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}\end{aligned}$$

1.4 Lois continues à support réel

1.4.1 Loi normale

— Notation : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

— Paramètres : $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$

— Support : $x \in \mathbb{R}$

— Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

— Fonction de répartition : notée $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, forme non explicite

— Espérance : $E[X] = \mu$

— Variance : $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \mathrm{e}^{t\mu + t^2 \frac{\sigma^2}{2}}$

— Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \mu\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

— Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\kappa) = \mu + \sigma VaR_\kappa(Z)$

— Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \mu + \frac{1}{1-\kappa}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} = \mu + \sigma TVaR_\kappa(Z)$$

— Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = (\mu + d)(1 - \Phi(\frac{d-\mu}{\sigma})) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

— Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \mu + d - \frac{1}{1-\Phi(\frac{d-\mu}{\sigma})}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

— Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \mu\Phi(\frac{d-\mu}{\sigma}) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}} + d[1 - \Phi(\frac{d-\mu}{\sigma})]$

— Remarque :

  — lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit par convention que X obéit à une loi normale standard ;

  — par convention, Φ est la notation pour la fonction de répartition d'une loi normale standard.

1.4.2 Loi de Student

- Notation : $X \sim St(\nu)$
- Paramètre : $\nu > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$
  - Si $\nu = 1$, $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)}$
  - Si $\nu = 2$, $f(x) = \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
- Fonction de répartition :
$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} B\left(\frac{\nu}{x^2+\nu}; \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right),$$
  désignée par $t_\nu(x)$
  - Si $\nu = 1$, $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x)$
  - Si $\nu = 2$, $F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right)$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \frac{1}{2} B\left(\frac{\nu}{x^2+\nu}; \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- Espérance : $E[X] = 0$, $\nu > 1$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\nu}{\nu-2}$, $\nu > 2$
- Fonction génératrice des moments : n'existe pas
- Moments d'ordre k :
$$E\left[X^k\right] = \begin{cases} 0, & 0 < k \text{ impair} < \nu \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-k}{2}\right) \nu^{\frac{k}{2}}\right), & 0 < k \text{ pair} < \nu \end{cases}$$
- Espérance tronquée (pour $\nu > 1$) :
$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & d < 0 \\ \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & d > 0 \end{cases}$$
- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$ (pour $\nu > 1$) :
$$TVaR_\kappa(X) = \begin{cases} -\frac{1}{1-\kappa} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{VaR_\kappa(X)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & VaR_\kappa(X) < 0 \\ \frac{1}{1-\kappa} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{VaR_\kappa(X)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & VaR_\kappa(X) > 0 \end{cases}$$
- Espérance limitée (pour $\nu > 1$) :
$$E[\min(X; d)] = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} + d\overline{F}(d), & d < 0 \\ \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} + d\overline{F}(d), & d > 0 \end{cases}$$
- Note : la loi de Student converge en loi vers la loi normale lorsque $\nu \to \infty$.

1.5 Lois discrètes

1.5.1 Loi avec support arithmétique

— Support : $X \in \{0, 1h, 2h, ...\}$

— Fonction de masse de probabilité : $f(kh) = \Pr(X = kh)$, $k \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^+$

— Espérance : $E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} khf_X(kh)$

— Variance : $\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (kh - E[X])^2 f_X(kh)$

— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{tkh} f_X(kh)$

— Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{kh} f_X(kh)$

— Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq k_0 h\}}\right] = \sum_{k=0}^{k_0} khf_X(kh)$

— Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\left\{E[X] - \sum_{k=0}^{k_0} khf_X(kh) + k_0 h(\Pr(X \leq k_0 h) - \kappa)\right\},$$

où $VaR_\kappa(X) = k_0 h$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$

1.5.2 Loi de Poisson

— Notation : $M \sim Pois(\lambda)$
— Paramètre : $\lambda > 0$
— Support : $k \in \mathbb{N}$
— Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$
— Espérance : $E[M] = \lambda$
— Variance : $\mathrm{Var}(M) = \lambda$
— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{P}(t) = \exp\{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)\}$
— Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = \exp\{\lambda(t - 1)\}$

1.5.3 Loi binomiale

— Notation : $M \sim Bin(n, q)$
— Paramètres : $n \in \mathbb{N}$, $q \in (0, 1)$
— Support : $k \in \{0, 1, ..., n\}$
— Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \binom{n}{k} (q)^k (1 - q)^{n-k}$
— Espérance : $E[M] = nq$
— Variance : $\mathrm{Var}(M) = nq(1 - q)$
— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = (q\mathrm{e}^t + 1 - q)^n$
— Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = (qt + 1 - q)^n$
— Loi associée : la loi de Bernoulli est un cas particulier de la loi binomiale avec $n = 1$.

1.5.4 Loi de Bernoulli

— Notation : $M \sim Bern(q) \sim Bin(1, q)$
— Paramètre : $q \in (0, 1)$
— Support : $k \in \{0, 1\}$
— Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = (q)^k (1 - q)^{1-k}$
— Espérance : $E[M] = q$
— Variance : $\mathrm{Var}(M) = q(1 - q)$
— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = (q\mathrm{e}^t + 1 - q)$
— Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = (qt + 1 - q)$

1.5.5 Loi binomiale négative

Selon les auteurs, on rencontre deux paramétrisations pour la loi binomiale négative qui sont équivalentes. Les principales caractéristiques pour la première paramétrisation sont :

— Notation : $M \sim BN(r, q)$
— Paramètres : $r \in \mathbb{R}^+$, $q \in (0, 1)$
— Support : $k \in \mathbb{N}$
— Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \binom{r+k-1}{k} (q)^r (1-q)^k$
— Espérance : $E[M] = r\frac{1-q}{q}$
— Variance : $\mathrm{Var}(M) = r\frac{1-q}{q^2}$
— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = \left(\frac{q}{1-(1-q)\mathrm{e}^t}\right)^r$
— Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = \left(\frac{q}{1-(1-q)t}\right)^r$

Les principales caractéristiques pour la deuxième paramétrisation sont :

— Notation : $M \sim BN(r, \beta)$
— Paramètres : $r \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}^+$
— Support : $k \in \mathbb{N}$
— Fonction de masse de probabilité : $\Pr(X = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$
— Espérance : $E[X] = r\beta$
— Variance : $\mathrm{Var}(X) = r\beta(1+\beta)$
— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = (1 - \beta(\mathrm{e}^t - 1))^{-r}$
— Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}_X(t) = (1 - \beta(t-1))^{-r}$
— Lien entre la 1re paramétrisation et la 2e paramétrisation : $q = \frac{1}{1+\beta}$ ou $\beta = \frac{1-q}{q}$
— Note :
  — si $r \in \mathbb{N}^+$, la distribution binomiale négative est parfois appelée la distribution de Pascal ;
  — si $r \in \mathbb{R}^+$, la distribution binomiale négative est parfois appelée la distribution de Polya.
— Loi associée : la loi géométrique est un cas particulier de la loi binomiale négative avec $r = 1$.

1.5.6 Loi géométrique

— Notation : $M \sim Geom(q)$
— Paramètre : $q \in (0, 1)$
— Support : $k \in \mathbb{N}$
— Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = q\,(1-q)^k$
— Espérance : $E\,[M] = \frac{1-q}{q}$
— Variance : $\mathrm{Var}\,(M) = \frac{1-q}{q^2}$
— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = \frac{q}{(1-(1-q)\mathrm{e}^t)}$
— Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = \frac{q}{(1-(1-q)t)}$

1.5.7 Loi logarithmique

— Notation : $M \sim Log(\gamma)$

— Paramètre : $\gamma \in]0,1[$

— Support : $k \in \mathbb{N}^+$

— Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \frac{-1}{\ln(1-\gamma)} \frac{\gamma^k}{k}$

— Espérance : $E[M] = \frac{-1}{\ln(1-\gamma)} \frac{\gamma}{1-\gamma}$

— Variance : $\mathrm{Var}(M) = \frac{\gamma + \ln(1-\gamma)}{(1-\gamma)^2 (\ln(1-\gamma))^2}$

— Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}(t) = \frac{\ln(1-\gamma e^t)}{\ln(1-\gamma)}$

— Fonction génératrice des probabilités : $\mathcal{P}(t) = \frac{\ln(1-\gamma t)}{\ln(1-\gamma)}$

1.6 Lois univariées avec mélange

1.6.1 Loi mélange d'exponentielles

— Notation : $X \sim MxExp(\{(p_i, \beta_i), i = 1, 2, ..., n\})$
— Paramètres : $\beta_i > 0$, $0 \leq p_i \leq 1$, $p_1 + ... + p_n = 1$
— Fonction de densité : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \beta_i \mathrm{e}^{-\beta_i x}$, $x > 0$
— Fonction de répartition : $F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x}\right)$, $x > 0$
— Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{e}^{-\beta_i x}$, $x > 0$
— Espérance : $E[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i}$
— Variance : $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{2}{\beta_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i}\right)^2$
— Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\beta_i}{\beta_i - t}$
— Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{\beta_i}\right)^k k!$
— Espérance tronquée :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{\beta_i}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_i d}\right) - d\mathrm{e}^{-\beta_i d}\right)$$

— Mesure VaR : outil d'optimisation
— Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{\beta_i}\left(\mathrm{e}^{-\beta_i VaR_\kappa(X)}\right) + d\mathrm{e}^{-\beta_i VaR_\kappa(X)}\right)$$

— Fonction *stop-loss* : $\pi_X(d) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i} \mathrm{e}^{-\beta_i d}$
— Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_i d}\right)$

1.6.2 Loi mélange d'Erlang

— Notation : $X \sim MxErl(\{(p_k, \beta), k = 1, 2, ...\})$

— Paramètres : $\beta > 0$, $0 \leq p_k \leq 1$ $(k = 1, 2, ...)$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

— Fonction de densité : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k h(x; k, \beta)$, $x > 0$

— Fonction de répartition : $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k H(x; k, \beta)$, $x > 0$

— Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \overline{H}(x; k, \beta)$, $x > 0$

— Espérance : $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta}$

— Variance : $\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k(k+1)}{\beta} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta}\right)^2$

— Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - t}\right)^k$

— Moments m : $E[X^m] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k(k+1)...(k+m-1)}{\beta}$

— Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta} H(d; k+1, \beta)$

— Mesure VaR : outil d'optimisation

— Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(X); k+1, \beta)$$

— Fonction *stop-loss* :

$$\pi_d(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left(\frac{k}{\beta} \overline{H}(d; k+1, \beta) - d\overline{H}(d; k, \beta)\right)$$

— Espérance limitée :

$$E[\min(X; d)] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left(\frac{k}{\beta} H(d; k+1, \beta) + d\overline{H}(d; k, \beta)\right)$$

— Note : $H(x; k, \beta)$, $\overline{H}(x; k, \beta)$ et $h(x; k, \beta)$ sont les fonctions de répartition, de survie et de densité de la loi Erlang (k, β).

1.7 Tables de la loi normale

1.7.1 Fonction de répartition

Tableau 1.1 – Valeurs de la fonction de répartition de la loi normale standard à $(x + u)$

$x \setminus u$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

1.7.2 Valeurs de la fonction quantile

Tableau 1.2 – Valeurs de la fonction quantile de la loi normale standard, où $\kappa = u_1 + u_2$

u_1/u_2	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.5	0.0000	0.0251	0.0502	0.0753	0.1004	0.1257	0.1510	0.1764	0.2019	0.2275
0.6	0.2533	0.2793	0.3055	0.3319	0.3585	0.3853	0.4125	0.4399	0.4677	0.4959
0.7	0.5244	0.5534	0.5828	0.6128	0.6433	0.6745	0.7063	0.7388	0.7722	0.8064
0.8	0.8416	0.8779	0.9154	0.9542	0.9945	1.0364	1.0803	1.1264	1.1750	1.2265
0.9	1.2816	1.3408	1.4051	1.4758	1.5548	1.6449	1.7507	1.8808	2.0537	2.3263

Tableau 1.3 – Valeurs de la fonction quantile de la loi normale standard, où $\kappa = u_1 + u_2$

u_1/u_2	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.99	2.3263	2.3656	2.4089	2.4573	2.5121	2.5758	2.6521	2.7478	2.8782	3.0902

Tableau 1.4 – Valeurs de la fonction quantile de la loi normale standard, où $\kappa = u_1 + u_2$

u_1/u_2	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
0.999	3.0902	3.1214	3.1559	3.1947	3.2389	3.2905	3.3528	3.4316	3.5401	3.7190

1.8 Tables de la loi gamma

1.8.1 Fonction de répartition

Tableau 1.5 – Valeurs de la fonction de répartition d'une v.a. $X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ à $x \in [0.1, 5]$

$x \backslash \alpha$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0.1	0.3453	0.0952	0.0224	0.0047	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.4729	0.1813	0.0598	0.0175	0.0047	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
0.3	0.5614	0.2592	0.1036	0.0369	0.0120	0.0036	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
0.4	0.6289	0.3297	0.1505	0.0616	0.0230	0.0079	0.0026	0.0008	0.0002	0.0001
0.5	0.6827	0.3935	0.1987	0.0902	0.0374	0.0144	0.0052	0.0018	0.0006	0.0002
0.6	0.7267	0.4512	0.2470	0.1219	0.0551	0.0231	0.0091	0.0034	0.0012	0.0004
0.7	0.7633	0.5034	0.2945	0.1558	0.0757	0.0341	0.0144	0.0058	0.0022	0.0008
0.8	0.7941	0.5507	0.3406	0.1912	0.0988	0.0474	0.0214	0.0091	0.0037	0.0014
0.9	0.8203	0.5934	0.3851	0.2275	0.1239	0.0629	0.0299	0.0135	0.0058	0.0023
1	0.8427	0.6321	0.4276	0.2642	0.1509	0.0803	0.0402	0.0190	0.0085	0.0037
1.1	0.8620	0.6671	0.4681	0.3010	0.1792	0.0996	0.0521	0.0257	0.0121	0.0054
1.2	0.8787	0.6988	0.5064	0.3374	0.2085	0.1205	0.0656	0.0338	0.0165	0.0077
1.3	0.8931	0.7275	0.5425	0.3732	0.2386	0.1429	0.0806	0.0431	0.0219	0.0107
1.4	0.9057	0.7534	0.5765	0.4082	0.2692	0.1665	0.0971	0.0537	0.0283	0.0143
1.5	0.9167	0.7769	0.6084	0.4422	0.3000	0.1912	0.1150	0.0656	0.0357	0.0186
1.6	0.9264	0.7981	0.6382	0.4751	0.3308	0.2166	0.1341	0.0788	0.0442	0.0237
1.7	0.9348	0.8173	0.6660	0.5068	0.3614	0.2428	0.1543	0.0932	0.0537	0.0296
1.8	0.9422	0.8347	0.6920	0.5372	0.3917	0.2694	0.1755	0.1087	0.0643	0.0364
1.9	0.9487	0.8504	0.7161	0.5663	0.4214	0.2963	0.1975	0.1253	0.0759	0.0441
2	0.9545	0.8647	0.7385	0.5940	0.4506	0.3233	0.2202	0.1429	0.0886	0.0527
2.1	0.9596	0.8775	0.7593	0.6204	0.4790	0.3504	0.2435	0.1614	0.1022	0.0621
2.2	0.9641	0.8892	0.7786	0.6454	0.5066	0.3773	0.2673	0.1806	0.1168	0.0725
2.3	0.9680	0.8997	0.7965	0.6691	0.5334	0.4040	0.2914	0.2007	0.1323	0.0838
2.4	0.9715	0.9093	0.8130	0.6916	0.5592	0.4303	0.3156	0.2213	0.1486	0.0959
2.5	0.9747	0.9179	0.8282	0.7127	0.5841	0.4562	0.3400	0.2424	0.1657	0.1088
2.6	0.9774	0.9257	0.8423	0.7326	0.6080	0.4816	0.3644	0.2640	0.1835	0.1226
2.7	0.9799	0.9328	0.8553	0.7513	0.6310	0.5064	0.3887	0.2859	0.2019	0.1371
2.8	0.9820	0.9392	0.8672	0.7689	0.6529	0.5305	0.4128	0.3081	0.2208	0.1523
2.9	0.9840	0.9450	0.8782	0.7854	0.6738	0.5540	0.4367	0.3304	0.2402	0.1682
3	0.9857	0.9502	0.8884	0.8009	0.6938	0.5768	0.4603	0.3528	0.2601	0.1847
3.1	0.9872	0.9550	0.8977	0.8153	0.7128	0.5988	0.4834	0.3752	0.2803	0.2018
3.2	0.9886	0.9592	0.9063	0.8288	0.7308	0.6201	0.5061	0.3975	0.3007	0.2194
3.3	0.9898	0.9631	0.9142	0.8414	0.7479	0.6406	0.5283	0.4197	0.3213	0.2374
3.4	0.9909	0.9666	0.9214	0.8532	0.7641	0.6603	0.5500	0.4416	0.3421	0.2558
3.5	0.9918	0.9698	0.9281	0.8641	0.7794	0.6792	0.5711	0.4634	0.3629	0.2746
3.6	0.9927	0.9727	0.9342	0.8743	0.7938	0.6973	0.5916	0.4848	0.3837	0.2936
3.7	0.9935	0.9753	0.9398	0.8838	0.8074	0.7146	0.6115	0.5058	0.4045	0.3128
3.8	0.9942	0.9776	0.9450	0.8926	0.8203	0.7311	0.6308	0.5265	0.4251	0.3322
3.9	0.9948	0.9798	0.9497	0.9008	0.8324	0.7469	0.6494	0.5468	0.4456	0.3516
4	0.9953	0.9817	0.9540	0.9084	0.8438	0.7619	0.6674	0.5665	0.4659	0.3712
4.1	0.9958	0.9834	0.9579	0.9155	0.8544	0.7762	0.6847	0.5858	0.4859	0.3907
4.2	0.9962	0.9850	0.9616	0.9220	0.8645	0.7898	0.7014	0.6046	0.5056	0.4102
4.3	0.9966	0.9864	0.9649	0.9281	0.8739	0.8026	0.7173	0.6228	0.5250	0.4296
4.4	0.9970	0.9877	0.9679	0.9337	0.8827	0.8149	0.7327	0.6406	0.5441	0.4488
4.5	0.9973	0.9889	0.9707	0.9389	0.8909	0.8264	0.7473	0.6577	0.5627	0.4679
4.6	0.9976	0.9899	0.9733	0.9437	0.8987	0.8374	0.7614	0.6743	0.5810	0.4868
4.7	0.9978	0.9909	0.9756	0.9482	0.9059	0.8477	0.7748	0.6903	0.5988	0.5054
4.8	0.9981	0.9918	0.9777	0.9523	0.9126	0.8575	0.7876	0.7058	0.6162	0.5237
4.9	0.9983	0.9926	0.9797	0.9561	0.9189	0.8667	0.7998	0.7207	0.6331	0.5418
5	0.9984	0.9933	0.9814	0.9596	0.9248	0.8753	0.8114	0.7350	0.6495	0.5595

Relation : $H(x; \alpha, \beta) = H(x\beta; \alpha, 1)$. Exemple : $H(0.5; 0.5, 10) = H(5; 0.5, 1) = 0.9984$.

Tableau 1.6 – Valeurs de la fonction de répartition d'une v.a. $X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ à $x \in [5.1, 10]$

$x \backslash \alpha$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
5.1	0.9986	0.9939	0.9831	0.9628	0.9302	0.8835	0.8225	0.7487	0.6655	0.5769
5.2	0.9987	0.9945	0.9845	0.9658	0.9353	0.8912	0.8330	0.7619	0.6809	0.5939
5.3	0.9989	0.9950	0.9859	0.9686	0.9401	0.8984	0.8430	0.7746	0.6959	0.6105
5.4	0.9990	0.9955	0.9871	0.9711	0.9445	0.9052	0.8524	0.7867	0.7103	0.6267
5.5	0.9991	0.9959	0.9883	0.9734	0.9486	0.9116	0.8614	0.7983	0.7243	0.6425
5.6	0.9992	0.9963	0.9893	0.9756	0.9524	0.9176	0.8699	0.8094	0.7378	0.6578
5.7	0.9993	0.9967	0.9903	0.9776	0.9560	0.9232	0.8779	0.8200	0.7507	0.6728
5.8	0.9993	0.9970	0.9911	0.9794	0.9593	0.9285	0.8855	0.8300	0.7632	0.6873
5.9	0.9994	0.9973	0.9919	0.9811	0.9624	0.9334	0.8927	0.8396	0.7752	0.7013
6	0.9995	0.9975	0.9926	0.9826	0.9652	0.9380	0.8994	0.8488	0.7867	0.7149
6.1	0.9995	0.9978	0.9933	0.9841	0.9679	0.9423	0.9058	0.8575	0.7977	0.7281
6.2	0.9996	0.9980	0.9939	0.9854	0.9703	0.9464	0.9119	0.8658	0.8083	0.7408
6.3	0.9996	0.9982	0.9944	0.9866	0.9726	0.9502	0.9175	0.8736	0.8184	0.7531
6.4	0.9997	0.9983	0.9949	0.9877	0.9747	0.9537	0.9229	0.8811	0.8281	0.7649
6.5	0.9997	0.9985	0.9954	0.9887	0.9766	0.9570	0.9279	0.8882	0.8374	0.7763
6.6	0.9997	0.9986	0.9958	0.9897	0.9784	0.9600	0.9326	0.8948	0.8462	0.7873
6.7	0.9997	0.9988	0.9962	0.9905	0.9801	0.9629	0.9371	0.9012	0.8547	0.7978
6.8	0.9998	0.9989	0.9965	0.9913	0.9816	0.9656	0.9412	0.9072	0.8627	0.8080
6.9	0.9998	0.9990	0.9968	0.9920	0.9831	0.9680	0.9451	0.9129	0.8704	0.8177
7	0.9998	0.9991	0.9971	0.9927	0.9844	0.9704	0.9488	0.9182	0.8777	0.8270
7.1	0.9998	0.9992	0.9974	0.9933	0.9856	0.9725	0.9523	0.9233	0.8846	0.8359
7.2	0.9999	0.9993	0.9976	0.9939	0.9867	0.9745	0.9555	0.9281	0.8912	0.8445
7.3	0.9999	0.9993	0.9978	0.9944	0.9878	0.9764	0.9585	0.9326	0.8975	0.8527
7.4	0.9999	0.9994	0.9980	0.9949	0.9887	0.9781	0.9613	0.9368	0.9034	0.8605
7.5	0.9999	0.9994	0.9982	0.9953	0.9896	0.9797	0.9640	0.9409	0.9091	0.8679
7.6	0.9999	0.9995	0.9983	0.9957	0.9905	0.9812	0.9665	0.9446	0.9144	0.8751
7.7	0.9999	0.9995	0.9985	0.9961	0.9912	0.9826	0.9688	0.9482	0.9195	0.8819
7.8	0.9999	0.9996	0.9986	0.9964	0.9919	0.9839	0.9710	0.9515	0.9243	0.8883
7.9	0.9999	0.9996	0.9988	0.9967	0.9926	0.9851	0.9730	0.9547	0.9288	0.8945
8	0.9999	0.9997	0.9989	0.9970	0.9932	0.9862	0.9749	0.9576	0.9331	0.9004
8.1	0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9937	0.9873	0.9766	0.9604	0.9372	0.9060
8.2	0.9999	0.9997	0.9991	0.9975	0.9942	0.9882	0.9783	0.9630	0.9410	0.9113
8.3	1.0000	0.9998	0.9991	0.9977	0.9947	0.9891	0.9798	0.9654	0.9446	0.9163
8.4	1.0000	0.9998	0.9992	0.9979	0.9951	0.9900	0.9813	0.9677	0.9481	0.9211
8.5	1.0000	0.9998	0.9993	0.9981	0.9955	0.9907	0.9826	0.9699	0.9513	0.9256
8.6	1.0000	0.9998	0.9994	0.9982	0.9959	0.9914	0.9838	0.9719	0.9543	0.9299
8.7	1.0000	0.9998	0.9994	0.9984	0.9962	0.9921	0.9850	0.9738	0.9572	0.9340
8.8	1.0000	0.9998	0.9995	0.9985	0.9965	0.9927	0.9861	0.9756	0.9599	0.9379
8.9	1.0000	0.9999	0.9995	0.9986	0.9968	0.9932	0.9871	0.9772	0.9624	0.9416
9	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9971	0.9938	0.9880	0.9788	0.9648	0.9450
9.1	1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9942	0.9889	0.9802	0.9671	0.9483
9.2	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9975	0.9947	0.9897	0.9816	0.9692	0.9514
9.3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9977	0.9951	0.9905	0.9828	0.9712	0.9544
9.4	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9979	0.9955	0.9912	0.9840	0.9731	0.9571
9.5	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9981	0.9958	0.9918	0.9851	0.9748	0.9597
9.6	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9962	0.9924	0.9862	0.9765	0.9622
9.7	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9984	0.9965	0.9930	0.9871	0.9780	0.9645
9.8	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985	0.9967	0.9935	0.9880	0.9795	0.9667
9.9	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9986	0.9970	0.9940	0.9889	0.9808	0.9688
10	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9988	0.9972	0.9944	0.9897	0.9821	0.9707

Relation : $H(x; \alpha, \beta) = H(x\beta; \alpha, 1)$. Exemple : $H(0.5; 0.5, 10) = H(5; 0.5, 1) = 0.9984$.

1.8.2 Fonction quantile

Tableau 1.7 – Valeurs de la fonction quantile d'une v.a. $X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ à $\kappa \in [0.01, 0.50]$

$\kappa \backslash \alpha$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0.01	0.0001	0.0101	0.0574	0.1486	0.2771	0.4360	0.6195	0.8232	1.0440	1.2791
0.02	0.0003	0.0202	0.0924	0.2147	0.3759	0.5672	0.7821	1.0162	1.2662	1.5295
0.03	0.0007	0.0305	0.1225	0.2675	0.4515	0.6648	0.9008	1.1550	1.4242	1.7060
0.04	0.0013	0.0408	0.1501	0.3136	0.5157	0.7462	0.9986	1.2683	1.5523	1.8483
0.05	0.0020	0.0513	0.1759	0.3554	0.5727	0.8177	1.0837	1.3663	1.6626	1.9701
0.06	0.0028	0.0619	0.2006	0.3942	0.6250	0.8825	1.1602	1.4540	1.7607	2.0784
0.07	0.0039	0.0726	0.2244	0.4308	0.6736	0.9423	1.2305	1.5341	1.8502	2.1767
0.08	0.0050	0.0834	0.2475	0.4657	0.7195	0.9984	1.2961	1.6086	1.9331	2.2675
0.09	0.0064	0.0943	0.2700	0.4993	0.7632	1.0514	1.3578	1.6785	2.0107	2.3524
0.1	0.0079	0.1054	0.2922	0.5318	0.8052	1.1021	1.4166	1.7448	2.0841	2.4326
0.11	0.0096	0.1165	0.3140	0.5634	0.8456	1.1507	1.4727	1.8080	2.1540	2.5088
0.12	0.0114	0.1278	0.3355	0.5942	0.8849	1.1976	1.5268	1.8687	2.2210	2.5817
0.13	0.0134	0.1393	0.3568	0.6244	0.9231	1.2431	1.5791	1.9273	2.2854	2.6518
0.14	0.0156	0.1508	0.3779	0.6540	0.9604	1.2874	1.6298	1.9840	2.3478	2.7194
0.15	0.0179	0.1625	0.3989	0.6832	0.9969	1.3306	1.6791	2.0391	2.4083	2.7850
0.16	0.0204	0.1744	0.4197	0.7120	1.0328	1.3729	1.7274	2.0928	2.4671	2.8488
0.17	0.0230	0.1863	0.4405	0.7405	1.0681	1.4144	1.7745	2.1453	2.5246	2.9109
0.18	0.0259	0.1985	0.4612	0.7687	1.1029	1.4552	1.8208	2.1967	2.5808	2.9717
0.19	0.0289	0.2107	0.4819	0.7966	1.1373	1.4954	1.8663	2.2472	2.6359	3.0312
0.2	0.0321	0.2231	0.5026	0.8244	1.1713	1.5350	1.9112	2.2968	2.6900	3.0895
0.21	0.0355	0.2357	0.5233	0.8520	1.2049	1.5742	1.9554	2.3457	2.7433	3.1469
0.22	0.0390	0.2485	0.5439	0.8794	1.2383	1.6130	1.9990	2.3939	2.7958	3.2034
0.23	0.0427	0.2614	0.5647	0.9068	1.2715	1.6514	2.0422	2.4415	2.8476	3.2592
0.24	0.0467	0.2744	0.5854	0.9341	1.3045	1.6895	2.0850	2.4886	2.8988	3.3142
0.25	0.0508	0.2877	0.6063	0.9613	1.3373	1.7273	2.1274	2.5353	2.9494	3.3686
0.26	0.0551	0.3011	0.6272	0.9885	1.3700	1.7649	2.1695	2.5816	2.9996	3.4225
0.27	0.0596	0.3147	0.6482	1.0157	1.4026	1.8023	2.2114	2.6275	3.0494	3.4758
0.28	0.0642	0.3285	0.6693	1.0428	1.4351	1.8396	2.2530	2.6732	3.0988	3.5288
0.29	0.0691	0.3425	0.6905	1.0701	1.4675	1.8767	2.2944	2.7185	3.1478	3.5814
0.3	0.0742	0.3567	0.7118	1.0973	1.5000	1.9138	2.3357	2.7637	3.1967	3.6336
0.31	0.0795	0.3711	0.7333	1.1247	1.5324	1.9508	2.3768	2.8087	3.2452	3.6856
0.32	0.0851	0.3857	0.7549	1.1521	1.5648	1.9877	2.4179	2.8536	3.2937	3.7373
0.33	0.0908	0.4005	0.7767	1.1796	1.5973	2.0247	2.4589	2.8983	3.3419	3.7889
0.34	0.0968	0.4155	0.7987	1.2073	1.6299	2.0616	2.4998	2.9430	3.3901	3.8403
0.35	0.1030	0.4308	0.8208	1.2350	1.6626	2.0986	2.5408	2.9876	3.4381	3.8916
0.36	0.1094	0.4463	0.8431	1.2630	1.6953	2.1357	2.5818	3.0323	3.4862	3.9429
0.37	0.1160	0.4620	0.8656	1.2910	1.7282	2.1729	2.6229	3.0769	3.5342	3.9940
0.38	0.1229	0.4780	0.8884	1.3193	1.7612	2.2101	2.6640	3.1216	3.5822	4.0452
0.39	0.1301	0.4943	0.9114	1.3478	1.7944	2.2475	2.7053	3.1664	3.6303	4.0965
0.4	0.1375	0.5108	0.9346	1.3764	1.8277	2.2851	2.7466	3.2113	3.6785	4.1477
0.41	0.1452	0.5276	0.9581	1.4053	1.8613	2.3228	2.7881	3.2563	3.7268	4.1991
0.42	0.1531	0.5447	0.9818	1.4344	1.8951	2.3607	2.8298	3.3015	3.7752	4.2506
0.43	0.1613	0.5621	1.0058	1.4638	1.9291	2.3989	2.8717	3.3469	3.8239	4.3023
0.44	0.1699	0.5798	1.0301	1.4935	1.9634	2.4373	2.9139	3.3925	3.8727	4.3541
0.45	0.1787	0.5978	1.0547	1.5235	1.9980	2.4759	2.9563	3.4383	3.9217	4.4062
0.46	0.1878	0.6162	1.0797	1.5537	2.0328	2.5149	2.9989	3.4844	3.9710	4.4585
0.47	0.1972	0.6349	1.1050	1.5844	2.0680	2.5541	3.0419	3.5308	4.0206	4.5111
0.48	0.2069	0.6539	1.1306	1.6153	2.1036	2.5937	3.0852	3.5775	4.0705	4.5640
0.49	0.2170	0.6733	1.1566	1.6466	2.1394	2.6337	3.1289	3.6246	4.1208	4.6173
0.5	0.2275	0.6931	1.1830	1.6783	2.1757	2.6741	3.1729	3.6721	4.1714	4.6709

Tableau 1.8 – Valeurs de la fonction quantile d'une v.a. $X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ à $\kappa \in [0.51, 0.99]$

$\kappa \backslash \alpha$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0.51	0.2383	0.7133	1.2098	1.7105	2.2124	2.7148	3.2174	3.7199	4.2225	4.7250
0.52	0.2494	0.7340	1.2370	1.7430	2.2496	2.7560	3.2623	3.7683	4.2740	4.7795
0.53	0.2610	0.7550	1.2647	1.7761	2.2872	2.7977	3.3077	3.8171	4.3260	4.8345
0.54	0.2729	0.7765	1.2929	1.8096	2.3253	2.8399	3.3536	3.8664	4.3785	4.8900
0.55	0.2853	0.7985	1.3215	1.8436	2.3639	2.8826	3.4000	3.9163	4.4316	4.9461
0.56	0.2981	0.8210	1.3507	1.8781	2.4030	2.9259	3.4470	3.9667	4.4853	5.0028
0.57	0.3114	0.8440	1.3804	1.9132	2.4428	2.9698	3.4946	4.0178	4.5396	5.0602
0.58	0.3252	0.8675	1.4107	1.9489	2.4832	3.0143	3.5429	4.0696	4.5946	5.1182
0.59	0.3394	0.8916	1.4416	1.9853	2.5242	3.0595	3.5919	4.1220	4.6503	5.1770
0.6	0.3542	0.9163	1.4731	2.0223	2.5659	3.1054	3.6416	4.1753	4.7068	5.2366
0.61	0.3695	0.9416	1.5053	2.0600	2.6084	3.1521	3.6921	4.2293	4.7642	5.2971
0.62	0.3854	0.9676	1.5382	2.0985	2.6516	3.1995	3.7435	4.2842	4.8224	5.3584
0.63	0.4018	0.9943	1.5718	2.1378	2.6957	3.2479	3.7957	4.3400	4.8816	5.4207
0.64	0.4189	1.0217	1.6063	2.1779	2.7407	3.2971	3.8489	4.3968	4.9417	5.4841
0.65	0.4367	1.0498	1.6416	2.2188	2.7865	3.3474	3.9031	4.4547	5.0030	5.5486
0.66	0.4552	1.0788	1.6777	2.2608	2.8334	3.3987	3.9583	4.5136	5.0654	5.6142
0.67	0.4744	1.1087	1.7148	2.3037	2.8813	3.4510	4.0147	4.5738	5.1290	5.6811
0.68	0.4945	1.1394	1.7529	2.3477	2.9304	3.5046	4.0724	4.6352	5.1940	5.7494
0.69	0.5153	1.1712	1.7921	2.3929	2.9807	3.5594	4.1314	4.6980	5.2603	5.8191
0.7	0.5371	1.2040	1.8324	2.4392	3.0322	3.6156	4.1917	4.7622	5.3282	5.8904
0.71	0.5598	1.2379	1.8740	2.4869	3.0851	3.6732	4.2536	4.8280	5.3977	5.9633
0.72	0.5835	1.2730	1.9168	2.5359	3.1396	3.7323	4.3171	4.8955	5.4689	6.0380
0.73	0.6084	1.3093	1.9610	2.5865	3.1956	3.7932	4.3823	4.9648	5.5420	6.1147
0.74	0.6344	1.3471	2.0068	2.6387	3.2533	3.8558	4.4494	5.0361	5.6171	6.1934
0.75	0.6617	1.3863	2.0542	2.6926	3.3128	3.9204	4.5186	5.1094	5.6944	6.2744
0.76	0.6903	1.4271	2.1033	2.7485	3.3744	3.9871	4.5899	5.1851	5.7740	6.3579
0.77	0.7204	1.4697	2.1544	2.8063	3.4382	4.0561	4.6637	5.2632	5.8563	6.4440
0.78	0.7522	1.5141	2.2075	2.8665	3.5043	4.1276	4.7400	5.3441	5.9414	6.5330
0.79	0.7857	1.5606	2.2629	2.9290	3.5730	4.2018	4.8193	5.4279	6.0295	6.6253
0.8	0.8212	1.6094	2.3208	2.9943	3.6446	4.2790	4.9016	5.5150	6.1211	6.7210
0.81	0.8588	1.6607	2.3815	3.0625	3.7194	4.3596	4.9875	5.6058	6.2163	6.8206
0.82	0.8988	1.7148	2.4452	3.1341	3.7976	4.4438	5.0771	5.7005	6.3158	6.9244
0.83	0.9415	1.7720	2.5123	3.2092	3.8797	4.5321	5.1711	5.7996	6.4198	7.0330
0.84	0.9871	1.8326	2.5833	3.2885	3.9662	4.6250	5.2698	5.9038	6.5290	7.1470
0.85	1.0361	1.8971	2.6585	3.3724	4.0576	4.7231	5.3739	6.0135	6.6440	7.2670
0.86	1.0890	1.9661	2.7387	3.4616	4.1546	4.8270	5.4842	6.1297	6.7657	7.3938
0.87	1.1463	2.0402	2.8244	3.5569	4.2580	4.9377	5.6016	6.2532	6.8949	7.5285
0.88	1.2087	2.1203	2.9167	3.6591	4.3688	5.0562	5.7271	6.3852	7.0330	7.6722
0.89	1.2771	2.2073	3.0167	3.7695	4.4883	5.1838	5.8621	6.5271	7.1813	7.8266
0.9	1.3528	2.3026	3.1257	3.8897	4.6182	5.3223	6.0085	6.6808	7.3418	7.9936
0.91	1.4372	2.4079	3.2457	4.0217	4.7605	5.4740	6.1686	6.8487	7.5171	8.1758
0.92	1.5325	2.5257	3.3793	4.1683	4.9183	5.6417	6.3456	7.0342	7.7105	8.3767
0.93	1.6415	2.6593	3.5302	4.3332	5.0955	5.8300	6.5439	7.2418	7.9269	8.6013
0.94	1.7687	2.8134	3.7034	4.5222	5.2981	6.0448	6.7699	7.4782	8.1730	8.8566
0.95	1.9207	2.9957	3.9074	4.7439	5.5352	6.2958	7.0336	7.7537	8.4595	9.1535
0.96	2.1089	3.2189	4.1556	5.0128	5.8222	6.5989	7.3515	8.0854	8.8041	9.5104
0.97	2.3546	3.5066	4.4736	5.3559	6.1873	6.9838	7.7545	8.5052	9.2398	9.9610
0.98	2.7059	3.9120	4.9187	5.8339	6.6941	7.5166	8.3112	9.0841	9.8395	10.5804
0.99	3.3174	4.6052	5.6724	6.6384	7.5431	8.4059	9.2377	10.0451	10.8330	11.6046

1.9 Tables de la loi de Poisson

1.9.1 Fonction de répartition

Tableau 1.9 – Valeurs de la fonction de répartition de la v.a. $X \sim Pois(\lambda)$

$k \mid \lambda$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.9098	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9856	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9982	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9998	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	1.0000	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	1.0000	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

1.9.2 Fonction stop-loss

Tableau 1.10 – Valeurs de la fonction *stop-loss* de la v.a. $X \sim Pois(\lambda)$

$k \vert \lambda$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0	0.5000	1.0000	1.5000	2.0000	2.5000	3.0000	3.5000	4.0000	4.5000	5.0000
1	0.1065	0.3679	0.7231	1.1353	1.5821	2.0498	2.5302	3.0183	3.5111	4.0067
2	0.0163	0.1036	0.2810	0.5413	0.8694	1.2489	1.6661	2.1099	2.5722	3.0472
3	0.0019	0.0233	0.0898	0.2180	0.4132	0.6721	0.9869	1.3480	1.7458	2.1718
4	0.0002	0.0043	0.0242	0.0751	0.1708	0.3194	0.5236	0.7815	1.0881	1.4368
5	0.0000	0.0007	0.0056	0.0225	0.0619	0.1346	0.2490	0.4103	0.6202	0.8773
6	0.0000	0.0001	0.0011	0.0059	0.0199	0.0507	0.1066	0.1954	0.3231	0.4933
7	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0057	0.0172	0.0413	0.0848	0.1542	0.2555
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0015	0.0053	0.0146	0.0336	0.0676	0.1221
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0047	0.0123	0.0273	0.0540
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0041	0.0102	0.0222
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0085
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0030
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0010
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

1.10 Table de la loi du khi-deux

Tableau 1.11 – Valeurs critiques calculées pour la loi du khi-deux et avec un niveau de confiance de 5% (note : valeur critique à 5% = $F_Z^{-1}(0.95)$, où Z obéit à une loi du khi-deux

Degrés de liberté	$\mathbf{F_Z^{-1}(0.95)}$
1	3.841458821
2	5.991464547
3	7.814727903
4	9.487729037
5	11.070497694
6	12.591587244
7	14.067140449
8	15.507313056
9	16.918977605
10	18.307038053
11	19.675137573
12	21.026069817
13	22.362032495
14	23.684791305
15	24.995790140
16	26.296227605
17	27.587111638
18	28.869299430
19	30.143527206
20	31.410432844

Annexe B

Matériel utile

2.1 Liste de fonctions R

- Convention :
  - La lettre `p` désigne la fonction de répartition
  - La lettre `d` désigne la fonction de densité (loi continue) ou la fonction de masses de probabilité (loi discrète)
  - La lettre `q` désigne la fonction quantile (ou fonction inverse de la fonction de répartition)
  - La lettre `r` désigne la fonction de simulation
- Paramétrisation des fonctions :
  - La paramétrisation des fonctions R sont fournies dans la rubrique d'aide du logiciel R.
  - Approche no1 pour accéder à la rubrique d'aide : menu sur la barre horizontale de commandes .
  - Approche no2 pour accéder à la rubrique d'aide : `help(nom de la fonction)`.
  - La rubrique d'aide est généralement bien faite et elle contient des exemples.
- Loi gamma : `pgamma, dgamma, qgamma, rgamma`
- Loi exponentielle : `pexp, dexp, qexp, rexp`
- Loi Weibull : `pweibull, dweibull, qweibull, rweibull`
- Loi normale : `pnorm, dnorm, qnorm, qnorm`
- Loi lognormale : `plnorm, dlnorm, qlnorm, rlnorm`
- Loi Student : `pt, dt, qt, rt`
- Loi beta : `pbeta, dbeta, qbeta, rbeta`
- Loi uniforme : `punif, dunif, qunif, runif`
- Loi Poisson : `ppois, dpois, qpois, rpois`
- Loi binomiale : `pbinom, dbinom, qbinom, rbinom`
- Loi binomiale négative : `pnbinom, dnbinom, qnbinom, rnbinom`
- Loi géométrique : `pgeom, dgeom, qgeom, rgeom`

2.2 R et Packages

ActuaR	polynom	statmod
copula	pracma	stats
lifecontingencies	psych	SuppDists
MASS	cubature	Deriv
VGAM	flexsurv	

2.3 Algorithme de Panjer et lois de fréquence $(a, b, 0)$

Définition de la v.a. X selon l'approche fréquence sévérité

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} B_i, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Panjer s'applique à la condition que la loi de N fasse partie de la classe $(a, b, 0)$.
Relations récursive pour la fonction de masses de probabilité de N

$$f_N(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) f_N(k-1),$$

pour $k = 1, 2, ...$

Seules les lois Poisson, Binomiale et Binomiale Négative sont membres de cette famille.
On indique les valeurs de a et b pour les membres de la famille $(a, b, 0)$:

— loi de Poisson : $a = 0$ et $b = \lambda$;

— loi binomiale négative (1ère paramétrisation) : $a = 1 - q$ et $b = (1 - q)(r - 1)$;

— loi binomiale négative (2e paramétrisation) : $a = \frac{\beta}{1+\beta}$et $b = \frac{\beta}{1+\beta}(r - 1)$;

— loi binomiale : $a = -\frac{q}{1-q}$ et $b = (n + 1)\frac{q}{1-q}$.

Fonction de masse de probabilité de B :

$$\Pr(B = hj) = f_B(hj),$$

pour $y = 0, 1, 2, ...$ où h est une coefficient positif plus petit (0.1) ou plus grand (10000) que 1.

1. **Algorithme de Panjer – Forme générale**
   Point de départ :

$$\begin{aligned} f_X(0) &= \Pr(X = 0) \\ &= P_N\{f_B(0))\} \end{aligned}$$

   Relation récursive :

$$f_X(hk) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(a + \frac{bj}{k}\right) f_B(hj) f_X(h(k-j))}{1 - af_B(0)}$$

   pour $k = 1, 2, ...$

2. **Loi Poisson** :

$$N \sim Pois(\lambda).$$

   Point de départ :

$$f_X(0) = \Pr(X = 0) = e^{-\lambda(1-f_B(0))}.$$

   Relation récursive :

$$f_X(hk) = \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k}(j)\, f_B(hj) f_X(h(k-j)),$$

   pour $k = 1, 2, ...$

3. **Loi Binomiale Négative** (1ère paramétrisation) :

$$N \sim BNeg(r, q).$$

   Point de départ :

$$f_X(0) = \left(\frac{q}{1 - (1-q) f_B(0)}\right)^r$$

Relation récursive :

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{k}\right) f_B(jh) f_X((k-j)\,h)}{1-(1-q)\,f_B(0)},$$

pour $k = 1, 2, ...$

4. **Loi Binomiale Négative** (2e paramétrisation) :

$$N \sim BNeg(r, \beta).$$

Point de départ :

$$f_X(0) = \Pr(X = 0) = \left(\frac{1}{(1-\beta((f_B(0))-1))}\right)^r$$

Relation récursive :

$$f_X(hk) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\beta+\frac{\beta(r-1)j}{k}\right) f_B(hj) f_X(h\,(k-j))}{1+\beta-\beta f_B(0)},$$

pour $k = 1, 2, ...$
Note : Il suffit de remplacer $\beta = \frac{1-q}{q}$ dans les deux relations pour retrouver les relations correspondantes pour la 1ère paramétrisation de la loi binomiale négative. □

5. **Loi Binomiale** :

$$N \sim Binom(n, q).$$

Point de départ :

$$f_X(0) = \Pr(X = 0) = (1-q+qf_B\,(0))^n$$

Relation récursive :

$$\begin{aligned} f_X(hk) &= \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{q}{q-1}+\frac{(n+1)qj}{(1-q)k}\right) f_B(j) f_X(k-j)}{1+\frac{q}{1-q}f_B(0)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(-q+\frac{(n+1)qj}{k}\right) f_B(hj) f_X(h\,(k-j))}{1-q+qf_B(0)}, \end{aligned}$$

pour $k = 1, 2, ...$ □

2.4 Relation récursive pour somme de v.a. discrètes i.i.d.

On considère une v.a. X discrète où $X \in \{0, 1h, 2h, ...\}$ avec

$$f_X(kh) = \Pr(X = kh)$$

pour $k = 0, 1, ...$.

On définit

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d. et se comportent comme la v.a. X.

Relation récursive pour calculer $f_{S_n}(kh)$ pour $k = 0, 1, 2, ...$:

$$f_{S_n}(kh) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} \left((n+1)\frac{j}{k} - 1 \right) f_X(jh) f_{S_n}((k-j)h)$$

dont le point de départ est

$$f_{S_n}(0) = f_X(0)^n .$$

2.5 Algorithmes récursifs et fonctions R

2.5.1 Convolution directe (2 v.a. indépendantes)

```
directconvo<-function(ff1,ff2)
{
# convolution de deux fns de masses de probabilité
l1<-length(ff1)
l2<-length(ff2)
ffs<-ff1[1]*ff2[1]
smax<-l1+l2-2
ff1<-c(ff1,rep(0,smax-l1+1))
ff2<-c(ff2,rep(0,smax-l2+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,sum(ff1[1 :j]*ff2[j :1]))
}
return(ffs)
}
```

2.5.2 Convolution directe (n v.a. indépendantes)

```
directconvo.nrisks<-function(matff=rbind(...))
{
    # convolution de n fns de masses de probabilité
    # supports de longueur égale – sinon ajouter des 0
    # utiliser rbind pour mettre ensemble les vecteurs de
    # fns de masses de probabilite
nbrisks<-dim(matff)[1]
ffs<-matff[1,]
for (i in 2 :nbrisks)
{
ffx<-matff[i,]
ffs<-directconvo(ffs,ffx)
}
return(ffs)
}
```

2.5.3 Algorithme récursif – DePril (n v.a. i.i.d.)

```
recur.nrisks<-function(ff,nn=5,smax=100)
{
    # convolution de n fns de masses de probabilité avec
# elle-meme
    # premier algorihtme de DePril
ll<-length(ff)
ffs<-ff[1]^nn
ff<-c(ff,rep(0,smax-ll+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,(1/ff[1])*sum(ff[2 :j]*ffs[i :1]*((nn+1)*(1 :i)/i-1)))
}
return(ffs)
}
```

2.5.4 Algorithme de Panjer – Poisson composée

```
# Algorithme récursif de Panjer–Poisson
panjer.poisson<-function(lam,ff,smax)
{
aa<-0
bb<-lam
ll<-length(ff)
ffs<-exp(lam*(ff[1]-1))
ff<-c(ff,rep(0,smax-ll+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,(1/(1-aa*ff[1]))*sum(ff[2 :j]*ffs[i :1]*(bb*(1 :i)/i+aa)))
}
return(ffs)
}
```

2.5.5 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale composée

```
panjer.binom<-function(nn,qq,ff,smax)
{
# Algorithme de Panjer
# Cas Binomiale
# Loi discrete pour B
aa<- -qq/(1-qq)
bb<- -(nn+1)*aa
ll<-length(ff)
ffs<-(1-qq+qq*ff[1])^nn
ff<-c(ff,rep(0,smax-ll+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,(1/(1-aa*ff[1]))*sum(ff[2 :j]*ffs[i :1]*(bb*(1 :i)/i+aa)))
}
return(ffs)
}
```

2.5.6 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale négative composée (1)

```
panjer.nbinom1<-function(rr,qq,ff,smax)
{
# Algorithme de Panjer
# Cas Binomiale negative 1
# Loi discrete pour B
aa<-1-qq
bb<-aa*(rr-1)
ll<-length(ff)
ffs<-(qq/(1-(1-qq)*ff[1]))^rr
ff<-c(ff,rep(0,smax-ll+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,(1/(1-aa*ff[1]))*sum(ff[2 :j]*ffs[i :1]*(bb*(1 :i)/i+aa)))
}
return(ffs)
}
```

2.5.7 Algorithme récursif de Panjer – Binomiale négative composée (2)

```
panjer.nbinom2<-function(rr,beta,ff,smax)
{
# Algorithme de Panjer
# Cas Binomiale negative 2
# Loi discrete pour B
aa<-beta/(1+beta)
bb<-aa*(rr-1)
ll<-length(ff)
qq<-1/(1+beta)
ffs<-(qq/(1-(1-qq)*ff[1]))^rr
ff<-c(ff,rep(0,smax-ll+1))
for (i in 1 :smax)
{
j<-i+1
ffs<-c(ffs,(1/(1-aa*ff[1]))*sum(ff[2 :j]*ffs[i :1]*(bb*(1 :i)/i+aa)))
}
return(ffs)
}
```

2.6 Variables aléatoires discrètes, fgp, fonctions caractéristiques et méthode FFT

2.6.1 Contexte

Soit la v.a. discrète positive X définie sur $\{0, 1, ..., n-1\}$ avec

$$f_X(k) = \Pr(X = k)$$

pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

La fgp est donnée par

$$P_X(t) = f_X(0) + f_X(1)\, t^1 + ... + f_X(n-1)\, t^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\, t^k,$$

pour $t \geq 0$.

Pour identifer la valeur $f_X(k)$ à partir de $P_X(t)$, on a

$$f_X(k) = \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} P_X(t) \bigg|_{t=0}.$$

2.6.2 Fonction caractéristique

La fonction caractéristique de la v.a. X est

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k)\, e^{itk},$$

Selon la formule d'Euler, on a

$$e^{itk} = \cos(tk) + i \times \sin(tk).$$

La méthode FFT permet d'idenfier $f_X(k)$ à partir de $\varphi_X(t)$.

2.6.3 Définition de deux vecteurs

On définit le vecteur des fonctions de masse de probabilité de la v.a. X par

$$\underline{f}_X = (f_X(0), f_X(1), ..., f_X(n-1)).$$

On définit un vecteur correspondant avec les valeurs de $\varphi_X(t)$ aux points $t = t_j = 2\pi \frac{j}{n}$, pour $j = 0, 1, ..., n-1$, par

$$\underline{\phi}_X = (\varphi_X(t_0), \varphi_X(t_1), ..., \varphi_X(t_{n-1})) = \left(\varphi_X\left(2\pi \frac{0}{n}\right), \varphi_X\left(2\pi \frac{1}{n}\right), ..., \varphi_X\left(2\pi \frac{n-1}{n}\right)\right).$$

2.6.4 Construction : $\underline{f}_X$ vers $\underline{\phi}_X$

Chaque élément de $\underline{\phi}_X$ est obtenu avec

$$\varphi_X(t_j) = \varphi_X\left(2\pi \frac{j}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k) \exp\left(i 2\pi \frac{j}{n} k\right)$$

pour $j = 0, 1, ..., n-1$.

Chaque élément de $\underline{\phi}_X$ est un nombre complexe i.e.

$$\varphi_X(t_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k) \cos\left(2\pi \frac{j}{n} k\right) + i \times \sum_{k=0}^{n-1} f_X(k) \sin\left(2\pi \frac{j}{n} k\right).$$

2.6.5 Inversion : $\underline{\phi}_X$ vers $\underline{f}_X$

On dispose du vecteur

$$\underline{\phi}_X = (\varphi_X(t_0), \varphi_X(t_1), ..., \varphi_X(t_{n-1}))$$

et on vise à identifier les valeurs de

$$\underline{f}_X = (f_X(0), f_X(1), ..., f_X(n-1)).$$

Cette procédure est appelée inversion de la fonction caractéristique et les composantes de $\underline{f}_X$ sont obtenues avec

$$f_X(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_X(t_j) \exp\left(-i2\pi \frac{j}{n} k\right), \text{ par } k = 0, 1, ..., n-1.$$

2.6.6 Remarque

La construction et l'inversion fonctionne pour tout $n \geq 1$.

2.6.7 Algorithme FFT

La méthode FFT est un algorithme permettant d'effectuer les calculs de façon efficace numériquement. L'algorithme est préprogrammé en R et dans plusieurs autres logiciels. Il est important que $n = 2^m$, $m = 1, 2, ...$.

2.7 FFT et fonctions R

2.7.1 FFT – Somme de deux v.a. discrètes indépendantes.

```
fft.directconvo<-function(m=16, fx, fy)
{
    aa <- 2^m
    nx <- length(fx)
    ny <- length(fy)
    ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
    fty <- fft(c(fy, rep(0, aa - ny)))
    fs <- Re(fft(ftx*fty, TRUE))/aa
    return(fs)
}
```

2.7.2 FFT – Somme de n v.a. discrètes indépendantes

```
fft.nrisks<-function(matff,v.n,m=14)
{
aa <- 2^m
nbrisks<-dim(matff)[1]
fx<-matff[1,]
nx <- length(fx)
ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
fts<-(ftx)^v.n[1]
    for (i in 2:nbrisks)
        {
        fx<-matff[i,]
        nx <- length(fx)
        ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
        fts<-fts*(ftx^v.n[i])
    }
    ffs <- Re(fft(fts, TRUE))/aa
return(ffs)
}
```

2.7.3 FFT – Somme aléatoire (loi Poisson composée)

```
fft.poiscomposee<-function(lam, n, fx)
{
# 2**n = longueur du vecteur
# prendre n eleve (ex: n=12 ou plus)
# premiere masse de fx est Pr(X=0)
    aa <- 2^n
    nx <- length(fx)
    ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
    fts<-exp(lam * (ftx - 1))
    fs <- Re(fft(fts, T))/aa
    return(fs)
}
```

Bibliographie

[Acerbi and Tasche, 2002] Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7) :1487–1503.

[Albrecher et al., 2017] Albrecher, H., Teugels, J. L., and Beirlant, J. (2017). *Reinsurance : Actuarial and Statistical Aspects*. John Wiley & Sons.

[Albrecht, 2014] Albrecht, P. (2014). Risk-based capital allocation. *Wiley StatsRef : Statistics Reference Online*.

[Arbenz et al., 2011] Arbenz, P., Embrechts, P., and Puccetti, G. (2011). The AEP algorithm for the fast computation of the distribution of the sum of dependent random variables. *Bernoulli*, 17(2) :562–591.

[Artzner et al., 1999] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3) :203–228.

[Balakrishnan and Lai, 2009] Balakrishnan, N. and Lai, C. D. (2009). *Continuous Bivariate Distributions*. Springer Science & Business Media.

[Barbour et al., 1992] Barbour, A. D., Holst, L., and Janson, S. (1992). *Poisson Approximation*, volume 2. The Clarendon Press Oxford University Press.

[Bargès et al., 2009] Bargès, M., Cossette, H., and Marceau, E. (2009). TVaR-based capital allocation with copulas. *Insurance : Mathematics and Economics*, 45(3) :348–361.

[Bäuerle and Müller, 1998] Bäuerle, N. and Müller, A. (1998). Modeling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 28(1) :59–76.

[Bäuerle and Müller, 2006] Bäuerle, N. and Müller, A. (2006). Stochastic orders and risk measures : consistency and bounds. *Insurance : Mathematics and Economics*, 38(1) :132–148.

[Blier-Wong, 2018] Blier-Wong, C. (2018). Correction of ratemaking errors in the presence of spatial dependence. *Master's Thesis*.

[Bouyé et al., 2000] Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G., and Roncalli, T. (2000). Copulas for finance-a reading guide and some applications. *Available at SSRN 1032533*.

[Chaubey et al., 1998] Chaubey, Y. P., Trudeau, S., et al. (1998). On the computation of aggregate claims distributions : some new approximations. *Insurance : Mathematics and Economics*, 23(3) :215–230.

[Cherian, 1941] Cherian, K. (1941). A bi-variate correlated gamma-type distribution function. *The Journal of the Indian Mathematical Society*, 5 :133–144.

[Cherubini et al., 2004] Cherubini, U., Luciano, E., and Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*. John Wiley & Sons.

[Chiragiev and Landsman, 2007] Chiragiev, A. and Landsman, Z. (2007). Multivariate Pareto portfolios : TCE-based capital allocation and divided differences. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2007(4) :261–280.

[Cizek et al., 2005] Cizek, P., Härdle, W. K., and Weron, R. (2005). *Statistical Tools for Finance and Insurance*. Springer Science & Business Media.

[Cossette et al., 2014] Cossette, H., Côté, M.-P., Mailhot, M., and Marceau, E. (2014). A note on the computation of sharp numerical bounds for the distribution of the sum, product or ratio of dependent risks. *Journal of Multivariate Analysis*, 130 :1–20.

[Cossette et al., 2003] Cossette, H., Duchesne, T., and Marceau, E. (2003). Modeling catastrophes and their impact on insurance portfolios. *North American Actuarial Journal*, 7(4) :1–22.

[Cossette et al., 2002a] Cossette, H., Gaillardetz, P., and Marceau, E. (2002a). Common mixture in the individual risk model. *Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung*, 2 :131–157.

[Cossette et al., 2002b] Cossette, H., Gaillardetz, P., Marceau, E., and Rioux, J. (2002b). On two dependent individual risk models. *Insurance : Mathematics and Economics*, 30(2) :153–166.

[Cossette et al., 2012] Cossette, H., Mailhot, M., and Marceau, E. (2012). TVaR-based capital allocation for multivariate compound distributions with positive continuous claim amounts. *Insurance : Mathematics and Economics*, 50(2) :247–256.

[Cossette and Marceau, 2000] Cossette, H. and Marceau, E. (2000). The discrete-time risk model with correlated classes of business. *Insurance : Mathematics and Economics*, 26(2-3) :133–149.

[Daykin et al., 1993] Daykin, C. D., Pentikainen, T., and Pesonen, M. (1993). *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman and Hall/CRC.

[Denuit and Charpentier, 2005] Denuit, M. and Charpentier, A. (2005). *Mathématiques de l'Assurance Non-Vie. Tome II : Tarification et Provisionnement*. Economica.

[Denuit et al., 2004] Denuit, M., Charpentier, A., and Bébéar, C. (2004). *Mathématiques de l'Assurance Non-Vie. Tome I : Principes Fondamentaux de Théorie du Risque*. Economica.

[Denuit et al., 2006] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., and Kaas, R. (2006). *Actuarial theory for Dependent Risks : Measures, Orders and Models*. John Wiley & Sons.

[Denuit et al., 1999] Denuit, M., Genest, C., and Marceau, E. (1999). Stochastic bounds on sums of dependent risks. *Insurance : Mathematics and Economics*, 25(1) :85–104.

[Denuit et al., 2002] Denuit, M., Genest, C., and Marceau, E. (2002). Criteria for the stochastic ordering of random sums, with actuarial applications. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2002(1) :3–16.

[Denuit et al., 2007] Denuit, M., Maréchal, X., Pitrebois, S., and Walhin, J.-F. (2007). *Actuarial Modelling of Claim Counts : Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*. John Wiley & Sons.

[Dhaene et al., 2002a] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M. J., Kaas, R., and Vyncke, D. (2002a). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance : applications. *Insurance : Mathematics and Economics*, 31(2) :133–161.

[Dhaene et al., 2002b] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M. J., Kaas, R., and Vyncke, D. (2002b). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance : theory. *Insurance : Mathematics and Economics*, 31(1) :3–33.

[Dhaene et al., 2008] Dhaene, J., Henrard, L., Landsman, Z., Vandendorpe, A., and Vanduffel, S. (2008). Some results on the CTE-based capital allocation rule. *Insurance : Mathematics and Economics*, 42(2) :855–863.

[Dickson, 2016] Dickson, D. C. (2016). *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge University Press.

[Dubois et al., 2012] Dubois, J., Giacomo, M., Guespin, L., Marcellesi, C., Marcellesi, J.-B., and Mével, J.-P. (2012). Copule. In *Larousse Le Dictionnaire linguistique et des sciences du langage*. Larousse Dictionnaires.

[Embrechts and Frei, 2009] Embrechts, P. and Frei, M. (2009). Panjer recursion versus FFT for compound distributions. *Mathematical Methods of Operations Research*, 69(3) :497–508.

[Embrechts et al., 2003] Embrechts, P., Höing, A., and Juri, A. (2003). Using copulae to bound the value-at-risk for functions of dependent risks. *Finance and Stochastics*, 7(2) :145–167.

[Embrechts et al., 2013] Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (2013). *Modelling Extremal Events : for Insurance and Finance*, volume 33. Springer Science & Business Media.

[Embrechts et al., 2002] Embrechts, P., McNeil, A., and Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management : properties and pitfalls. *Risk management : value at risk and beyond*, 1 :176–223.

[Embrechts and Puccetti, 2006] Embrechts, P. and Puccetti, G. (2006). Bounds for functions of dependent risks. *Finance and Stochastics*, 10(3) :341–352.

[Feldmann and Whitt, 1998] Feldmann, A. and Whitt, W. (1998). Fitting mixtures of exponentials to long-tail distributions to analyze network performance models. *Performance evaluation*, 31(3-4) :245–279.

[Fenton, 1960] Fenton, L. (1960). The sum of log-normal probability distributions in scatter transmission systems. *IRE Transactions on Communications Systems*, 8(1) :57–67.

[Fishman, 2013] Fishman, G. (2013). *Monte Carlo : Concepts, Algorithms, and Applications.* Springer Science & Business Media.

[Frank and Schweizer, 1975] Frank, M. and Schweizer, B. (1975). Duality of generalized infimal and supremal convolutions. In *NOTICES OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY*, pages A460–A461. AMER MATHEMATICAL SOC 201 CHARLES ST, PROVIDENCE, RI 02940-2213.

[Frank et al., 1987] Frank, M. J., Nelsen, R. B., and Schweizer, B. (1987). Best-possible bounds for the distribution of a sum—a problem of kolmogorov. *Probability theory and related fields*, 74(2) :199–211.

[Frees and Valdez, 1998] Frees, E. W. and Valdez, E. A. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American actuarial journal*, 2(1) :1–25.

[Furman and Landsman, 2005] Furman, E. and Landsman, Z. (2005). Risk capital decomposition for a multivariate dependent gamma portfolio. *Insurance : Mathematics and Economics*, 37(3) :635–649.

[Furman and Landsman, 2008] Furman, E. and Landsman, Z. (2008). Economic capital allocations for non-negative portfolios of dependent risks. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 38(2) :601–619.

[Genest and Favre, 2007] Genest, C. and Favre, A.-C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of hydrologic engineering*, 12(4) :347–368.

[Genest et al., 2013] Genest, C., Gendron, M., and Bourdeau-Brien, M. (2013). The advent of copulas in finance. In *Copulae and Multivariate Probability Distributions in Finance*, pages 13–22. Routledge.

[Genest and Nešlehová, 2007] Genest, C. and Nešlehová, J. (2007). A primer on copulas for count data. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 37(2) :475–515.

[Gentle, 2006] Gentle, J. E. (2006). *Random Number Generation and Monte Carlo Methods.* Springer Science & Business Media.

[Gerber, 1979] Gerber, H. U. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory.* S.S. Huebner Foundation.

[Glasserman, 2013] Glasserman, P. (2013). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, volume 53. Springer Science & Business Media.

[Goovaerts et al., 1984] Goovaerts, M. J., De Vylder, F., and Haezendonck, J. (1984). *Insurance Premiums : Theory and Applications.* North-Holland Amsterdam.

[Grimmett et al., 2001] Grimmett, G., Grimmett, G. R., and Stirzaker, D. (2001). *Probability and Random Processes.* Oxford university press.

[Gumbel, 1960] Gumbel, E. J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55(292) :698–707.

[Hesselager, 1996] Hesselager, O. (1996). Recursions for certain bivariate counting distributions and their compound distributions. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 26(1) :35–52.

[Hu and Wu, 1999] Hu, T. and Wu, Z. (1999). On dependence of risks and stop-loss premiums. *Insurance : Mathematics and Economics*, 24(3) :323–332.

[Joe, 1997] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts.* CRC Press.

[Joe, 2015] Joe, H. (2015). *Dependence Modeling with Copulas.* CRC Press.

[Johnson and Taaffe, 1989] Johnson, M. A. and Taaffe, M. R. (1989). Matching moments to phase distributions : Mixtures of Erlang distributions of common order. *Stochastic Models*, 5(4) :711–743.

[Johnson et al., 2005] Johnson, N. L., Kemp, A. W., and Kotz, S. (2005). *Univariate Discrete Distributions*, volume 444. John Wiley & Sons.

[Johnson et al., 1995] Johnson, N. L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions.* John Wiley & Sons.

[Johnson et al., 1997] Johnson, N. L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions*, volume 165. Wiley New York.

[Kaas et al., 2008] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., and Denuit, M. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory : Using R*, volume 128. Springer Science & Business Media.

[Kaas et al., 1994] Kaas, R., Van Heerwaarden, A. E., and Goovaerts, M. (1994). *Ordering of Actuarial Risks*. Caire Education Series 1.

[Klugman et al., 2012] Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2012). *Loss Models : from Data to Decisions*, volume 715. John Wiley & Sons.

[Klugman et al., 2009] Klugman, S. A., Panjer, H. H., Willmot, G. E., and Venter, G. (2009). Loss models : From data to decisions . *Annals of Actuarial Science*, 4(2) :343.

[Kocherlakota and Kocherlakota, 1992] Kocherlakota, S. and Kocherlakota, K. (1992). *Bivariate Discrete Distributions*. Marcel Dekker.

[Kolev et al., 2006] Kolev, N., Anjos, U. d., and Mendes, B. V. d. M. (2006). Copulas : a review and recent developments. *Stochastic models*, 22(4) :617–660.

[Kotz et al., 2004] Kotz, S., Balakrishnan, N., and Johnson, N. L. (2004). *Continuous Multivariate Distributions, Volume 1 : Models and Applications*. John Wiley & Sons.

[Landsman and Valdez, 2003] Landsman, Z. M. and Valdez, E. A. (2003). Tail conditional expectations for elliptical distributions. *North American Actuarial Journal*, 7(4) :55–71.

[L'Ecuyer, 1994] L'Ecuyer, P. (1994). Uniform random number generation. *Annals of Operations Research*, 53(1) :77–120.

[L'Ecuyer, 2012] L'Ecuyer, P. (2012). Random number generation. In *Handbook of computational statistics*, pages 35–71. Springer.

[Lehmann, 1966] Lehmann, E. L. (1966). Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 1137–1153.

[Lemieux, 2009] Lemieux, C. (2009). *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling*. Springer Series in Statistics. Springer, New York.

[Lindskog and McNeil, 2003] Lindskog, F. and McNeil, A. J. (2003). Common Poisson shock models : applications to insurance and credit risk modelling. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 33(2) :209–238.

[Makarov, 1982] Makarov, G. (1982). Estimates for the distribution function of a sum of two random variables when the marginal distributions are fixed. *Theory of Probability & its Applications*, 26(4) :803–806.

[Marceau, 2013] Marceau, E. (2013). *Modélisation et évaluation Quantitative des risques en actuariat : modèles sur une période*. Springer.

[Marlow, 1967] Marlow, N. (1967). A normal limit theorem for power sums of independent random variables. *The Bell System Technical Journal*, 46(9) :2081–2089.

[Marshall and Olkin, 1967a] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1967a). A generalized bivariate exponential distribution. *Journal of Applied Probability*, 4(2) :291–302.

[Marshall and Olkin, 1967b] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1967b). A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 62(317) :30–44.

[Marshall and Olkin, 1988] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1988). Families of multivariate distributions. *Journal of the American statistical association*, 83(403) :834–841.

[Mathai and Moschopoulos, 1991] Mathai, A. M. and Moschopoulos, P. G. (1991). On a multivariate gamma. *Journal of Multivariate Analysis*, 39(1) :135–153.

[McNeil et al., 2015] McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools*. Princeton university press.

[Mikosch, 2009] Mikosch, T. (2009). *Non-life Insurance Mathematics : an Introduction with the Poisson Process*. Springer Science & Business Media.

[Moschopoulos, 1985] Moschopoulos, P. G. (1985). The distribution of the sum of independent gamma random variables. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 37(1) :541–544.

[Müller, 1997] Müller, A. (1997). Stop-loss order for portfolios of dependent risks. *Insurance : Mathematics and Economics*, 21(3) :219–223.

[Müller, 2000] Müller, A. (2000). On the waiting times in queues with dependency between interarrival and service times. *Operation Research Letters*, 26(1) :43–47.

[Müller and Stoyan, 2002] Müller, A. and Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, volume 389. Wiley.

[Nelsen, 2007] Nelsen, R. B. (2007). *An introduction to copulas*. Springer Science & Business Media.

[Nolan, 2003] Nolan, J. (2003). *Stable Distributions : Models for Heavy-Tailed Data*. Birkhauser Boston.

[Oakes, 1989] Oakes, D. (1989). Bivariate survival models induced by frailties. *Journal of the American Statistical Association*, 84(406) :487–493.

[Panjer, 1981] Panjer, H. H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 12(1) :22–26.

[Panjer and Willmot, 1992] Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (1992). *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries.

[Parodi, 2014] Parodi, P. (2014). *Pricing in General Insurance*. Chapman and Hall/CRC.

[Ramabhadran, 1951] Ramabhadran, V. (1951). A multivariate gamma-type distribution. *Sankhyā : The Indian Journal of Statistics*, pages 45–46.

[Rey, 1994] Rey, A. (1994). Copule. In *Robert Dictionnaire historique de la langue française*. Editions Le Robert.

[Rey-Debove and Rey, 2015] Rey-Debove, J. and Rey, A. (2015). Copule. In *Le Petit Robert Dictionnaire alphabétique et analogigue de la langue française*. Editions Le Robert.

[Rolski et al., 2009] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., and Teugels, J. L. (2009). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, volume 505. John Wiley & Sons.

[Ross, 2014a] Ross, S. (2014a). *A First Course in Probability*. Pearson.

[Ross, 2014b] Ross, S. M. (2014b). *Introduction to Probability Models*. Academic press.

[Rubinstein and Kroese, 2016] Rubinstein, R. Y. and Kroese, D. P. (2016). *Simulation and the Monte Carlo method*, volume 10. John Wiley & Sons.

[Shaked and Shanthikumar, 1997] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (1997). Supermodular stochastic orders and positive dependence of random vectors. *Journal of Multivariate Analysis*, 61(1) :86–101.

[Shaked and Shanthikumar, 2007] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007). *Stochastic Orders*. Springer Science & Business Media.

[Sklar, 1959] Sklar, M. (1959). *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*. Université Paris 8.

[Sundt and Vernic, 2009] Sundt, B. and Vernic, R. (2009). *Recursions for Convolutions and Compound Distributions with Insurance Applications*. Springer Science & Business Media.

[Tasche, 1999] Tasche, D. (1999). Risk contributions and performance measurement. *Report of the Lehrstuhl für mathematische Statistik, TU München*.

[Teicher, 1954] Teicher, H. (1954). On the multivariate Poisson distribution. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1954(1) :1–9.

[Tijms and Tijms, 1994] Tijms, H. C. and Tijms, H. C. (1994). *Stochastic Models : an Algorithmic Approach*, volume 994. John Wiley & Sons Chichester.

[Trivedi et al., 2007] Trivedi, P. K., Zimmer, D. M., et al. (2007). Copula modeling : an introduction for practitioners. *Foundations and Trends® in Econometrics*, 1(1) :1–111.

[Wang, 1998] Wang, S. (1998). Aggregation of correlated risk portfolios : models and algorithms. In *Proceedings of the Casualty Actuarial society*, pages 848–939.

[Williamson and Downs, 1990] Williamson, R. C. and Downs, T. (1990). Probabilistic arithmetic. i. numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds. *International journal of approximate reasoning*, 4(2) :89–158.

[Willmot and Lin, 2011] Willmot, G. E. and Lin, X. S. (2011). Risk modelling with the mixed Erlang distribution. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 27(1) :2–16.

[Willmot and Woo, 2007] Willmot, G. E. and Woo, J.-K. (2007). On the class of Erlang mixtures with risk theoretic applications. *North American Actuarial Journal*, 11(2) :99–115.

[Young, 2014] Young, V. R. (2014). Premium principles. *Wiley StatsRef : Statistics Reference Online*.