Mathématiques actuarielles du risque : Anciens examens

Hélene Cossette, Etienne Marceau

Version : 15 décembre 2018

Table des matières

Préface

Document de référence. Le présent ouvrage porte sur la modélisation des risques en actuariat. Il correspond à une version considérablement retravaillée, corrigée et augmentée de [2]. Il sert de base pour les cours Act-2001, Act-3000 et Act-7016 de l'École d'actuariat (Université Laval) ainsi que pour le cours Modèles Stochastiques en assurance non-vie (Master Recherche) de l'ISFA (Université Claude Bernard Lyon 1).

Prérequis. Les prérequis pour cet ouvrage sont principalement des cours de bases en mathématiques, en probabilité et en statistique.

Conditions d'utilisation. Cet ouvrage est en cours de rédaction, ce qui implique que son contenu est continuellement révisé et mis à jour. Alors, il peut y avoir encore des erreurs et son contenu doit être encore amélioré. Pour cette raison, la lectrice et le lecteur sont invités à nous communiquer tout commentaire et / ou correction qu'elle et il peuvent avoir. Les conditions suivantes d'utilisation doivent être respectées :

1. Cet ouvrage a été conçu pour des fins pédagogiques, personnelles et non-commerciales. Toute utilisation commerciale ou reproduction est interdite.
2. Son contenu demeure la propriété de son auteur.

Calculs et illustrations. Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project. Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Le logiciel GNU R et les bibliothèques sont disponibles sur le site du R Project et du Comprehensive R Archive Network (CRAN) :

https://cran.r-project.org/.

L'environnement RStudio est disponible sur le site suivant :

https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/.

Symboles et acronymes. Les listes de symboles et d'aconymes utilisés dans l'ouvrage sont fournies en annexe.

Versions précédentes :

1. Aucune.

Remerciements

Merci aux étudiantes et aux étudiants de mes cours à l'École d'actuariat (Université Laval), de l'ISFA (Université Claude Bernard Lyon 1), et *Départment of Mathematics and Statistics* (*McGill University*).

Partie I

Introduction à l'actuariat

1
H2018 - Partiel Informatique

Université Laval	Examen partiel informatique
Faculté des Sciences et de Génie	Hiver 2018
École d'actuariat	Date: 25 février 2018

Act-2001 Introduction à l'actuariat 2
Professeur: Etienne Marceau

Nom de famille de l'étudiant	**Prénom de l'étudiant**	**Matricule**

Instructions:

– L'examen contient 5 questions à développement.
– Le total des points est de **135 points**.
– La durée est de 180 minutes.
– Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.
– Veuillez écrire vos réponses dans le présent cahier seulement.
– Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.
– **Important : on ne doit pas utiliser la fonction R "integrate" pour effectuer les calculs ou tout autre fonction d'intégration numérique.**

– Veuillez retourner le présent cahier, les annexes et le papier brouillon à la fin de l'examen.

Questions	Points obtenus	Points
1		24
2		30
3		20
4		32
5		29
Total		135

1.1 Symboles et abréviations

1.1.1 Symboles

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ = ensemble des entiers naturels (incluant $\{0\}$)
2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2...\}$
3. $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
4. $\mathbb{R}^+$ = ensemble des nombres réels positifs (incluant $\{0\}$)
5. $i = \sqrt{-1}$ = unité imaginaire
6. $\mathbb{C} = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ = ensemble des nombres complexes
7. $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$
8. $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$
9. $\Phi(x)$ = fonction de répartition de la loi normale standard
10. $\Phi^{-1}(u)$ = fonction quantile de la loi normale standard

1.1.2 Abréviations

1. fmp = fonction de masses de probabilité
2. fgp = fonction génératrice des probabilités
3. fgm = fonction génératrice des moments
4. i.i.d. = indépendant(e)s et identiquement distribué(e)s
5. v.a. = variable(s) aléatoire(s)
6. TLS = transformée de Laplace-Stieltjes

1.2 Questions

1. **(24 points).** On considère un portefeuille homogène de n contrats d'assurance IARD.
Selon un modèle simple, les coûts sont définis par les v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n avec
$$X_i \sim X \quad (i = 1, 2, ..., n),$$
où la TLS de la v.a. X est $\mathcal{L}_X(t) = \left(\frac{b}{b+t}\right)^c$, $t > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a.
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$
La part allouée par contrat est définie par la v.a. $W_n = \frac{1}{n} S_n$.
Questions : (**note : on ne doit pas utiliser la fonction R "integrate" pour effectuer les calculs**)
   (a) **(1 point).** Identifer la loi de la v.a. X.
   (b) **(2 points).** Développer l'expression de la TLS de la v.a. W_n, notée par $\mathcal{L}_{W_n}(t)$, pour $t > 0$, en fonction de n, b, et c.
   (c) **(1 point).** À partir de l'item [1b], identifier la loi de W_n, pour $n \in \mathbb{N}^+$, en indiquant clairement les paramètres de cette loi en fonction de n, b, et c.
   (d) **(3 points).** Développer les expressions $E[W_n]$ et $\sqrt{Var(W_n)}$, pour $n \in \mathbb{N}^+$. Développer les expressions de
   $$\lim_{n\to\infty} E[W_n] \text{ et } \lim_{n\to\infty} \sqrt{Var(W_n)}. \tag{1.1}$$
   Commenter les résultats en (1.1) dans le contexte de mutualisation des risques en assurance.
   (e) **(1 point).** Identifier l'expression de $TVaR_\kappa(W_n)$ (en fonction de n, κ, b, et c) pour $\kappa \in (0,1)$ et pour $n \in \mathbb{N}^+$.
   (f) **(16 points).** On effectue les calculs suivants en supposant $b = 0.001$ et $c = 0.1$:
      i. **(3 points).** Tracer les courbes de $f_{W_n}(x)$, pour $n = 1$, 10 et 100. Utiliser ces dessins pour commenter sur le comportement de W_n (la part allouée par contrat), quand n augmente. Indiquer les valeurs de $f_{W_n}(x)$, $x = 0$ et $E[W_n]$, pour $n = 1$, 10 et 100.
      ii. **(3 points).** Calculer $E[W_n]$ et $\sqrt{Var(W_n)}$ pour $n = 2^2$ et $n = 10^2$.
      iii. **(2 points).** Calculer $VaR_\kappa(W_n)$, pour $\kappa = 0.9999$ et pour $n = 2^2$ et $n = 10^2$.

iv. **(4 points).** Calculer $TVaR_{\kappa}(W_n)$, pour $\kappa = 0.9999$ et pour $n = 2^2$ et $n = 10^2$.

v. **(4 points).** Pour un contrat (en supposant que n contrats seront émis), la prime, notée par $\Pi_{\kappa,n} = \rho_k(W_n)$, est calculée avec une mesure de risque ρ_{κ} qui garantit $\Pi_{\kappa,n} \geq E[W_n]$, pour $\kappa \in (0,1)$.
   - Choisir une seule mesure parmi la VaR et la TVaR afin de calculer $\Pi_{\kappa,n}$, pour $\kappa = 0.9999$ et pour $n = 2^2$ et $n = 10^2$.
   - Justifier brièvement votre choix. Commenter à propos de l'impact de l'augmentation du nombre n de contrats sur la prime $\Pi_{\kappa,n}$ (pour κ fixé).

2. **(30 points).** Les coûts pour les 3 lignes d'affaires d'un portefeuille d'une société d'assurance sont représentés par les v.a. indépendantes X_1, X_2 et X_3 avec $X_i \sim Gamma\left(\alpha_i, \beta_i\right)$, $i = 1, 2, 3$.
Hypothèses :

i	α_i	β_i
1	0.5	$\frac{0.5}{10}$
2	1.5	$\frac{1.5}{10}$
3	2.5	$\frac{2.5}{10}$

Les coûts pour le portefeuille sont définis par la v.a. S où

$$S = X_1 + X_2 + X_3.$$

On a recours au générateur par défaut de R pour produire $m =$ 100000 (cent milles) réalisations de (U_1, U_2, U_3) où U_1, U_2, U_3 sont des v.a. i.i.d. de loi uniforme standard.
On fixe `set.seed(2018)`.
On produit dans l'ordre $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, U_3^{(1)}\right)$, $\left(U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, U_3^{(2)}\right)$, ..., $\left(U_1^{(m)}, U_2^{(m)}, U_3^{(m)}\right)$:

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$U_3^{(j)}$
1	0.33615347	0.46372327	0.06058539
2	0.1974336	0.4743142	0.3010486
...			
m	0.5308576	0.4349172	0.2569627

On fournit les deux lemmes suivants :

- **Lemme #1.** Soit une v.a. Y avec fonction de répartition F_Y. Soit une suite de v.a. i.i.d. $Y^{(1)}$, ..., $Y^{(m)}$ où $Y^{(i)} \sim Y$, $i = 1, 2, ..., m$. Alors, on a

$$TVaR_\kappa\left(Y\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=\lfloor m\kappa\rfloor+1}^{m} Y^{[j]}}{\lfloor m\left(1-\kappa\right)\rfloor} \text{ (p.s.),} \tag{1.2}$$

  où $Y^{[1]} \leq Y^{[2]} \leq ... \leq Y^{[m-1]} \leq Y^{[m]}$ sont les statistiques d'ordre de $Y^{(1)}$, ..., $Y^{(m)}$ et $\lfloor u\rfloor$ correspond à la partie entière de u.
- **Lemme #2.** Soit une suite de v.a. i.i.d. $Y^{(1)}$, ..., $Y^{(m)}$ où $Y^{(j)} \sim Y$, $j = 1, 2, ..., m$. Pour un entier j_0 tel que $1 \leq j_0 + 1 \leq m$ ($j_0 \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$), l'égalité suivante est vérifiée

$$\sum_{j=j_0+1}^{m} Y^{[j]} = \sup\left\{Y^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + Y^{(i_m)}; 1 \leq i_{j_0+1} < ... < i_m \leq m\right\}.$$

Questions :

(a) **(7 points).** Utiliser la méthode inverse pour produire m réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$. On utilise $U_i^{(j)}$ pour calculer $X_i^{(j)}$ pour $j = 1, ..., m$ et $i = 1, 2, 3$.

i. **(1 point).** Fournir l'expression de $X_i^{(j)}$ en fonction de $F_{X_i}^{-1}$ et $U_i^{(j)}$, $i = 1, 2, 3$.

ii. **(3 points).** Indiquer la réalisation #3 de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$.

iii. **(3 points).** Indiquer la réalisation #4 de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$.

Les valeurs de vérification sont les suivantes :

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$
1	1.8888466	7.260302	2.511576
2	0.6251355	7.439780	6.013419
...			
m	5.2399519	6.784813	5.440269

(b) **(6 points).** Avec les résultats de l'item [4a], calculer une approximation $\varphi_i(\kappa)$ de $TVaR_\kappa(X_i)$, $i = 1, 2, 3$, pour $\kappa = 0.99$. (Vérification : $TVaR_{0.9}(X_1) \simeq \varphi_1(0.9) = 43.97499$; $TVaR_{0.9}(X_2) \simeq \varphi_2(0.9) = 28.26282$; $TVaR_{0.9}(X_3) \simeq \varphi_3(0.9) = 23.58501$)

i. Indiquer les expressions des approximations $\varphi_i(\kappa)$, $i = 1, 2, 3$.

ii. Indiquer les valeurs des approximations $\varphi_i(\kappa)$, $i = 1, 2, 3$.

(c) **(3 points).** Produire m réalisations $S^{(j)}$ de S :

i. Indiquer la méthode pour y parvenir.

ii. Indiquer les réalisations #3 et #4 de S.

(d) **(2 points).** Avec les résultats de l'item [2c], calculer une approximation $\psi(\kappa)$ de $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.99$.

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\psi(\kappa)$.

ii. Indiquer la valeur de l'approximation $\psi(\kappa)$.

(e) **(8 points).** En utilisant de façon astucieuse les statistiques d'ordres, les propriétés des sup, et un passage à la limite, démontrer que

$$\sum_{i=1}^{3} TVaR_\kappa(X_i) \geq TVaR_\kappa\left(\sum_{i=1}^{3} X_i\right), \quad \text{pour } \kappa \in (0,1). \tag{1.3}$$

Note : Il ne faut pas faire la démonstration basée sur les fonctions indicatrices et ni celle basée sur la fonction stop-loss.

(f) **(4 points).** Comparer [4b] et [4c] en regard de [2e]. Quelle est la propriété souhaitable pour une mesure de risque en lien avec (1.4) ? Quelle est l'importance de cette propriété pour l'assurance ?

3. **(20 points).** Soit un contrat d'assurance IARD dont les coûts sont représentés par la v.a. X où

$$X \sim PoisComp\left(\lambda; F_B\right)$$

avec $\lambda = 1$ et

$$B \sim Gamma\left(\alpha = 1.5, \beta = \frac{1.5}{10}\right).$$

La fonction de répartition d'une loi gamma de paramètres α et β, qui est évaluée à x, est notée par $H\left(x; \alpha, \beta\right)$.
Le fonction de masse de probabilité d'une loi Poisson, qui est évaluée à k, est notée par $p\left(k; \lambda\right)$, $k \in \mathbb{N}$.
Questions : (Note : pour les fins de cette question, on effectue les calculs en sommant de 0 **jusqu'à** $k_0 = 1000$).
   (a) **(4 points).** Calculer l'espérance et la variance de la v.a. X :
      i. **(2 points).** Démontrer les expressions de l'espérance et de la variance de la v.a. X.
      ii. **(2 points).** Indiquer les valeurs de l'espérance et la variance de la v.a. X :
   (b) **(4 points).** Calculer $F_X\left(0\right)$, $F_X\left(50\right)$, $F_X\left(100\right)$:
      i. Écrire l'expression de $F_X\left(x\right)$ en termes des fonctions p et H et des paramètres λ, α, et β.
      ii. Indiquer les valeurs de $F_X\left(0\right)$, $F_X\left(30\right)$, $F_X\left(60\right)$ (**Vérification**: $F_X\left(90\right) = 0.9996227$) ;
   (c) **(2 points).** Tracer la courbe de F_X, $x \geq 0$, en indiquant la valeur de $F_X\left(0\right)$.
   (d) **(4 points).** Utiliser l'optimisation numérique pour calculer $VaR_\kappa\left(X\right)$, $\kappa = 0.01$ et 0.99 :
      i. Expliquer comment obtenir $VaR_\kappa\left(X\right)$, $\kappa = 0.01$ et 0.99.
      ii. Indiquer les deux valeurs.
   (e) **(4 points).** Calculer $TVaR_\kappa\left(X\right)$, $\kappa = 0.01$ et 0.99 :
      i. Donner l'expression de $TVaR_\kappa\left(X\right)$, $\kappa = 0.01$ et 0.99, en utilisant, si nécessaire, le niveau de confiance κ, les fonctions p et H, et les paramètres λ, α, et β (si nécessaire).
      ii. Indiquer les deux valeurs.
   (f) **(2 points).** Tracer sur un même graphique les courbes de $VaR_\kappa\left(X\right)$ et $TVaR_\kappa\left(X\right)$, en indiquant clairement leurs valeurs quand $\kappa \to 0$. S'il y en a, indiquer les portions plates ou les sauts dans les courbes.

4. **(32 points).** Soit les v.a. indépendantes X_1, X_2, X_2 où $X_i \sim Exp(\beta_i)$ $\left(E[X_i] = \frac{1}{\beta_i}\right)$ avec $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 0$.
Selon un modèle simple, la v.a. X_i représente les coûts pour la filiale i de la compagnie d'assurance GAG (Grondines Assurances Générales).
Les coûts totaux pour la compagnie GAG sont définis par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{3} X_i$.
Les mesures de risque VaR et TVaR sont utilisées pour calculer le capital.
Questions : (**note : on ne doit pas utiliser la fonction R "integrate" pour effectuer les calculs**)
   (a) **(2 points).** Avec démonstration à l'appui, ordonner (de la plus petite valeur à la plus grande) $VaR_\kappa(X_1)$, $VaR_\kappa(X_2)$, $VaR_\kappa(X_3)$, pour tout $\kappa \in (0,1)$. Commenter à l'égard du capital attribué à chaque filliale.
   (b) **(2 points).** Avec démonstration à l'appui, ordonner (de la plus petite valeur à la plus grande) $TVaR_\kappa(X_1)$, $TVaR_\kappa(X_2)$, $TVaR_\kappa(X_3)$, pour tout $\kappa \in (0,1)$. Commenter à l'égard du capital attribué à chaque filliale.
   (c) **(2 points).** Développer l'expression de la fgm de S. Identifier la distribution de S.
   (d) **(3 points).** Démontrer (à partir du document d'annexes) que l'expression de F_S est donnée par
$$F_S(x) = \sum_{i=1}^{3} c_i F_{X_i}(x), \; x \geq 0,$$
où $c_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i}$, $i = 1, 2, 3$. (Note : $\sum_{i=1}^{3} c_i = 1$, et les valeurs de c_i peuvent être positives ou négatives).
   (e) **(2 points).** Démontrer que la prime stop loss de v.a. S est $\pi_S(x) = \sum_{i=1}^{3} c_i \pi_{X_i}(x)$, $x \geq 0$, où c_i est définie en [4d]. Note : Soit une v.a. positive Y avec $E[Y] < \infty$. Alors, $\pi_Y(x) = E[\max(Y - x; 0)]$, $x \geq 0$.
   (f) **(3 points).** Démontrer (à partir du document d'annexes) que l'expression de $TVaR_\kappa(S)$ est donnée par
$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa} \sum_{i=1}^{3} c_i \times \pi_{X_i}(VaR_\kappa(S)) \\ &= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa} \sum_{i=1}^{3} c_i \times E[X_i] \times \overline{F}_{X_i}(VaR_\kappa(S)), \text{ pour } \kappa \in (0,1), \end{aligned}$$
où c_i est définie en [4d].

(g) **(3 points).** Soit une mesure de risque ρ_κ, $\kappa \in (0,1)$. On définit le bénéfice de mutualisation par

$$BM_\kappa = \sum_{i=1}^{3} \rho_\kappa (X_i) - \rho_\kappa (S), \text{ pour } \kappa \in (0,1).$$

Soit la propriété PRO (parmi les 4 propriétés requises pour qu'une mesure soit déclarée cohérente) requise pour que $BM_\kappa \geq 0$, pour tout $\kappa \in (0,1)$.

  i. Identifier la propriété PRO.
  ii. Identifier la mesure (parmi la VaR et la TVaR) qui satisfait la propriété PRO.
  iii. Développer l'expression de BM_κ pour cette mesure, en fonction de VaR et prime stop-loss.

(h) **(15 points).** On effectue les calculs suivants en supposant $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{6}$, et $\beta_3 = \frac{1}{12}$:

  i. **(3 points).** Calculer $VaR_\kappa (X_i)$, $i = 1, 2, 3$ et $\kappa = 0.995$.
  ii. **(3 points).** Calculer $TVaR_\kappa (X_i)$, $i = 1, 2, 3$ et $\kappa = 0.995$.
  iii. **(2 points).** Calculer $F_S (x)$, $x = 50, 80$. (Vérification : $F_S (100) = 0.9994232$)
  iv. **(3 points).** Utiliser l'optimisation numérique pour calculer $VaR_\kappa (S)$, $\kappa = 0.995$. (Vérification : $VaR_{0.9999} (S) = 121.0294$ avec `optimize` en R).
  v. **(2 points).** Calculer $TVaR_\kappa (S)$, $\kappa = 0.995$.
  vi. **(2 points).** Calculer BM_κ, $\kappa = 0.995$.

5. **(29 points).** Le tableau (source : Tableau 2 de Swiss Re (2010)) ci-dessous contient les coûts totaux de $m = 28$ inondations importantes survenues au Canada pendant les années 1909, 1910, ..., 2008 (100 ans) :

Table 2:
Large Flood Disasters in Canada and Estimated Total Costs (trended to 2008)

Year	Province	Location/Area	Total Costs in millions CAD (trended to 2008)
1954	ON	Southern ON (Hurricane Hazel)	5,392
1948	BC	Fraser River	5,172
1950	MB	Winnipeg	4,652
1996	QC	Saguenay	2,699
1997	MB	Southern Manitoba	1,230
1948	ON	Southern Ontario	706
1993	MB	Winnipeg	618
2005	ON	Southern Ontario	[1] 587
2005	AB	High river, southern AB	[1] 519
1937	ON	Southern Ontario	470
1923	NB	Saint John River Basin	463
1955	SK/MB	Manitoba and Saskatchewan	362
2004	AB	Edmonton	303
1995	AB	Southern Alberta	285
1934	NB	Plaster Rock	198
1936	NB	New Brunswick	188
1999	MB	Melita	163
1916	ON	Central Ontario	161
1909	NB	Chester	149
1961	NB	Saint John River Basin	148
1987	QC	Montréal	147
1996	QC	Montréal and Mauricie Region	145
1920	ON	Southwestern Ontario	132
1920	BC	Prince George	131
2004	ON	Peterborough	129
1972	QC	Richelieu River	124
1983	NF	Newfoundland	115
1974	QC	Maniwaki	103

Data sources: Public Safety Canada, 2007; Shrubsole *et al.*, 1993.
[1] Trended insured losses. Data source: IBC, 2008
Trending methods: Collins & Lowe, 2001

Les coûts sont en 1 millions \$ de 2008.
Hypothèses :

- les coûts totaux suite à une inondation importante au Canada sont modélisés par la v.a. $B \sim LNorm(\mu, \sigma)$ (B est en multiple de 1million; $B = 200 \Rightarrow$ coûts d'une inondation $= 200$ millions);
- le nombre d'inondations pendant une année au Canada est modélisé par la v.a. $M \sim Pois(\lambda)$.

En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, on a estimé que $\mu = 5.9$ et $\sigma = 1.22$.
La valeur du paramètre λ est donnée par

$$\lambda = \frac{\text{nombre inondations}}{\text{nombre d'années de la période d'observation}} = 0.28.$$

Les coûts pour une inondation pendant l'année 2018 sont définis par la v.a. B.

Le nombre d'inondations au Canada pendant l'année 2018 est défini par la v.a. M.
Les coûts totaux résultants de toutes les inondations survenues au Canada en 2018 sont définis par la v.a. $X \sim PoisComp\,(\lambda, F_B)$, i.e.,

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k & , \quad M > 0 \\ 0 & , \quad M = 0 \end{cases},$$

où $\{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. (avec $B_k \sim B$) qui est indépendante de la v.a. M.

Questions :

(Note : tous les calculs s'effectuent en multiples de 1million).

(**Note : on ne doit pas utiliser la fonction R "integrate" pour effectuer les calculs).**

(a) **(7 points).** Pour calculer les réalisations $X^{(j)}$ de X, on utilise dans l'ordre les réalisations de la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$ produites avec le générateur par défaut du logiciel R.
On fixe `set.seed(2018)` et les 5 premières réalisations de U sont les suivantes :

j	1	2	3	4	5
$U^{(j)}$	0.33615347	0.46372327	0.06058539	0.19743361	0.47431419

Produire $m = 100000$ (cent mille) réalisations $\left(M^{(j)}, X^{(j)}\right)$ de (M, X) selon la procédure suivante :
- Étape 1 : Simuler $M^{(j)}$.
- Étape 2 : Simuler $X^{(j)}$ selon la valeur de $M^{(j)}$.
- Répéter les étapes 1 et 2 pour $j = 1, 2, ..., m$.

On fournit les réponses suivantes :

i. **(1 point).** Détailler l'étape 2.

ii. **(3 points).** Calculer $M^{(2)}$ et $X^{(2)}$.
(Vérification : $M^{(1)} = 0$ et $X^{(1)} = 0$)

iii. **(3 points).** Calculer $M^{(12)}$ et $X^{(12)}$.
(Vérification : $M^{(40)} = 1$ et $X^{(33)} = 909.93766$)

(b) **(3 points).** Appliquer la méthode Monte-Carlo avec les m réalisations de X pour évaluer approximativement $\psi_1(x) = \Pr(X > x)$, pour $x = 1000$.
(Vérification : $\Pr(X > 1500) \simeq \psi_1(1500) = 0.03689$)

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\psi_1(x)$, pour $x = 1000$.

ii. Indiquer la valeur de $\psi_1(x)$, pour $x = 1000$.

(c) **(3 points).** Appliquer la méthode Monte-Carlo avec les m réalisations de X pour évaluer approximativement $\psi_2 = E[\max(X - x; 0)]$, pour $x = 1000$.
(Vérification : $E[\max(X - 1500; 0)] \simeq \psi_2(1500) = 66.43956$)

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\psi_2(x)$, pour $x = 1000$.
ii. Indiquer la valeur de $\psi_2(x)$, pour $x = 1000$.

(d) **(10 points).** Appliquer la méthode Monte-Carlo avec les m réalisations de X pour évaluer les approximations $\varphi(\kappa)$ et $\gamma(\kappa)$ de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ (respectivement) , avec $\kappa = 0.99 > \Pr(X > 0) = \Pr(M = 0)$.
(Vérification : $VaR_{0.995}(X) \simeq \varphi(0.995) = 4956.131$ et $TVaR_{0.995}(X) \simeq \gamma(0.995) = 8436.559$)
i. **(3 points).** Indiquer les expressions des 2 approximations $\varphi(k)$ et $\gamma(\kappa)$, pour $\kappa = 0.99$
ii. **(3 points).** Indiquer les 2 valeurs de $\varphi(k)$ et $\gamma(\kappa)$, pour $\kappa = 0.99$
iii. **(2 points).** Si le capital est égal à $VaR_{0.99}(X)$, est-ce que le montant aurait été suffisant pour payer les coûts des inondations survenues pendant l'année 2004 ? pendant l'année 2005 ? Indiquer le nombre d'années pour lesquelles le capital n'aurait pas été suffisant pour financer les coûts (suite aux inondations) d'une année.
iv. **(2 points).** Si le capital est égal à $TVaR_{0.99}(X)$, est-ce que le montant aurait été suffisant pour payer les coûts des inondations survenues pendant l'année 2004 ? pendant l'année 2005 ? Indiquer le nombre d'années pour lesquelles le capital n'aurait pas été suffisant pour financer les coûts (suite aux inondations) d'une année.

(e) **(6 points).** Soit la v.a. $N(k, 100)$ qui correspond au nombre d'années où k inondations sont survenus dans une même année, parmi 100 ans. On a

$$N(k, 100) \sim Binom(100, p_k),$$

avec $p_k = \Pr(M = k)$.
i. **(3 points).** Calculer $E[N(k, 100)]$, pour $k = 0, 1, 2$.
ii. **(1.5 points).** À partir de l'échantillon fourni dans le tableau, on définit le nombre d'années n_k avec k inondations dans la même année. Calculer les valeurs n_k, pour $k = 0, 1, 2$.
iii. **(1.5 points).** Comparer $E[N(k, 100)]$ et n_k, $k = 0, 1, 2$. Qu'en pensez-vous ?

FIN

1.3 Solutions

1. **Solution :**
   (a) **(1 point).** Identifer la loi de la v.a. X.
   Gamma
   (b) **(2 points).** Développer l'expression de la TLS de la v.a. W_n, notée par $\mathcal{L}_{W_n}(t)$, pour $t > 0$, en fonction de n, b, et c.
   On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{-W_n t}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}(X_1+...+X_n)t}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-X_1 \frac{t}{n}}\right] \times ... \times E\left[\mathrm{e}^{-X_n \frac{t}{n}}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-X \frac{t}{n}}\right]^n \\
&= \mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

   qui devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= \mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)^n \\
&= \left(\frac{b}{b+\frac{t}{n}}\right)^{nc} \\
&= \left(\frac{nb}{nb+t}\right)^{nc}
\end{aligned}$$

   (c) **(1 point).** À partir de l'item [1b], identifier la loi de W_n, pour $n \in \mathbb{N}^+$, en indiquant clairement les paramètres de cette loi en fonction de n, b, et c.
   On déduit

$$W_n \sim Gamma\,(nc, nb)$$

   (d) **(3 points).** Développer les expressions $E[W_n]$ et $\sqrt{Var(W_n)}$, pour $n \in \mathbb{N}^+$. Développer les expressions de

$$\lim_{n\to\infty} E[W_n] \text{ et } \lim_{n\to\infty} \sqrt{Var(W_n)}.$$

   Commenter les résultats en (1.1) dans le contexte de mutualisation des risques en assurance.
   On obtient

$$E[W_n] = \frac{nc}{nb} = \frac{c}{b}$$

et

$$\sqrt{Var\left(W_n\right)} = \frac{\sqrt{c}}{b\sqrt{n}}$$

(e) **(1 point).** Identifier l'expression de $TVaR_\kappa\left(W_n\right)$ (en fonction de n, κ, b, et c) pour $\kappa \in (0,1)$ et pour $n \in \mathbb{N}^+$.
On a

$$TVaR_\kappa\left(W_n\right) = \frac{nc}{nb}\frac{1}{1-\kappa}\overline{H}\left(VaR_\kappa\left(W_n\right); nc+1; nb\right)$$

(f) **(16 points).** On effectue les calculs suivants en supposant $b = 0.001$ et $c = 0.1$:

i. **(3 points).** Tracer les courbes de $f_{W_n}(x)$, pour $n = 1$, 10 et 100. Utiliser ces dessins pour commenter sur le comportement de W_n (la part allouée par contrat), quand n augmente. Indiquer les valeurs de $f_{W_n}(x)$, $x = 0$ et $E\left[W_n\right]$, pour $n = 1$, 10 et 100.
...

ii. **(3 points).** Calculer $E\left[W_n\right]$ et $\sqrt{Var\left(W_n\right)}$ pour $n = 2^2$ et $n = 10^2$.
Valeurs : 100 et 100 ; 158.1139 et 31.62278

iii. **(2 points).** Calculer $VaR_\kappa\left(W_n\right)$, pour $\kappa = 0.9999$ et pour $n = 2^2$ et $n = 10^2$.
Valeurs : 1790.0651 et 261.9299

iv. **(4 points).** Calculer $TVaR_\kappa\left(W_n\right)$, pour $\kappa = 0.9999$ et pour $n = 2^2$ et $n = 10^2$.
Valeurs : 2024.2310 et 276.4484

v. **(4 points).** Pour un contrat (en supposant que n contrats seront émis), la prime, notée par $\Pi_{\kappa,n} = \rho_k\left(W_n\right)$, est calculée avec une mesure de risque ρ_κ qui garantit $\Pi_{\kappa,n} \geq E\left[W_n\right]$, pour $\kappa \in (0,1)$.

- Choisir une seule mesure parmi la VaR et la TVaR afin de calculer $\Pi_{\kappa,n}$, pour $\kappa = 0.9999$ et pour $n = 2^2$ et $n = 10^2$.
TVaR
- Justifier brièvement votre choix. Commenter à propos de l'impact de l'augmentation du nombre n de contrats sur la prime $\Pi_{\kappa,n}$ (pour κ fixé).
TVaR introduit une marge relative strictement positive

2. **Solution :**
   (a) **(7 points).** Utiliser la méthode inverse pour produire m réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$. On utilise $U_i^{(j)}$ pour calculer $X_i^{(j)}$ pour $j = 1, ..., m$ et $i = 1, 2, 3$.
      i. **(1 point).** Fournir l'expression de $X_i^{(j)}$ en fonction de $F_{X_i}^{-1}$ et $U_i^{(j)}$, $i = 1, 2, 3$.
      ii. **(3 points).** Indiquer la réalisation #3 de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$.
      iii. **(3 points).** Indiquer la réalisation #4 de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$.

   Valeurs :

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$
3	7.888964	2.378845	23.11989
4	5.627596	6.162504	11.42912

   (b) **(6 points).** Avec les résultats de l'item [4a], calculer une approximation $\varphi_i(\kappa)$ de $TVaR_\kappa(X_i)$, $i = 1, 2, 3$, pour $\kappa = 0.99$. (Vérification : $TVaR_{0.9}(X_1) \simeq \varphi_1(0.9) = 43.97499$; $TVaR_{0.9}(X_2) \simeq \varphi_2(0.9) = 28.26282$; $TVaR_{0.9}(X_3) \simeq \varphi_3(0.9) = 23.58501$)
      i. Indiquer les expressions des approximations $\varphi_i(\kappa)$, $i = 1, 2, 3$.
      Pour $\kappa = (0, 1)$ et pour $\kappa \times m$ entier (noté j_0), on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X_i) &\simeq \varphi_i(\kappa) \\ &= \frac{1}{(1-\kappa)} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} X_i^{(j)} \times 1_{\left\{X_i^{(j)} > X_i^{[j_0]}\right\}} \\ &= \frac{1}{(1-\kappa)} \frac{1}{m} \sum_{j=j_0+1}^{m} X_i^{[j]} \end{aligned}$$

      où

$$X_i^{[1]} < .... < X_i^{[m]}$$

      ii. Indiquer les valeurs des approximations $\varphi_i(\kappa)$, $i = 1, 2, 3$.
      Valeurs : 83.49539; 45.01924; 34.68944
   (c) **(3 points).** Produire m réalisations $S^{(j)}$ de S :
      i. Indiquer la méthode pour y parvenir.
      ii. Indiquer les réalisations #3 et #4 de S.
      Valeurs : 32.78720; 23.21027
   (d) **(2 points).** Avec les résultats de l'item [2c], calculer une approximation $\psi(\kappa)$ de $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.99$.

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\psi(\kappa)$.Pour $\kappa = (0,1)$ et pour $\kappa \times m$ entier (noté j_0), on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &\simeq \psi(\kappa) \\ &= \frac{1}{(1-\kappa)}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} S^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)}>S^{[j_0]}\right\}} \\ &= \frac{1}{(1-\kappa)}\frac{1}{m}\sum_{j=j_0+1}^{m} S^{[j]} \end{aligned}$$

où

$$S^{[1]} < .... < S^{[m]}$$

ii. Indiquer la valeur de l'approximation $\psi(\kappa)$.
Valeurs : 107.5526

(e) **(8 points).** En utilisant de façon astucieuse les statistiques d'ordres, les propriétés des sup, et un passage à la limite, démontrer que

$$\sum_{i=1}^{3} TVaR_\kappa(X_i) \geq TVaR_\kappa\left(\sum_{i=1}^{3} X_i\right), \quad \text{pour } \kappa \in (0,1). \tag{1.4}$$

Note : Il ne faut pas faire la démonstration basée sur les fonctions indicatrices et ni celle basée sur la fonction stop-loss.
Démonstration.
Lemme #2. Soit une suite de v.a. i.i.d. $Y^{(1)}, ..., Y^{(m)}$ où $Y^{(j)} \sim Y$, $j = 1, 2, ..., m$.
Pour un entier j_0 tel que $1 \leq j_0+1 \leq m$ ($j_0 \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$), l'égalité suivante est vérifiée

$$\sum_{j=j_0+1}^{m} Y^{[j]} = \sup\left\{Y^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + Y^{(i_m)}; 1 \leq i_{j_0+1} < ... < i_m \leq m\right\}.$$

Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ dont la fonction de répartition est désignée par $F_{\underline{X}}$.
Soient la suite de couple de v.a. i.i.d. $\underline{X}^{(j)}$, j pour $j = 1, 2, ...m$.
On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$ et $S^{(j)} = X_1^{(j)} + X_2^{(j)} + X_3^{(j)}$, pour $j = 1, 2, ..., m$.
Par le **Lemme 1**, on a

$$TVaR_\kappa(S) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=\lfloor m\kappa\rfloor+1}^{m} S^{[j]}}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor} \text{ (p.s.)},$$

où $Y^{[1]} \leq Y^{[2]} \leq ... \leq Y^{[m-1]} \leq Y^{[m]}$ sont les statistiques d'ordre de $S^{(1)}$, ..., $S^{(m)}$ et $[u]$ correspond à la partie entière de u.
On fixe $j_0 = \lfloor m\kappa \rfloor$.
On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=\lfloor m\kappa \rfloor+1}^{m} S^{[j]} &= \sum_{j=j_0+1}^{m} S^{[j]} \\
&= \sup\left\{ S^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + S^{(i_m)} ; 1 \leq i_{j_0+1} < ... < i_m \leq m \right\} \text{ } (\textbf{Lemme 2}) \\
&= \sup\left\{ \left(X_1^{\left(i_{j_0+1}\right)} + X_2^{\left(i_{j_0+1}\right)} + X_3^{\left(i_{j_0+1}\right)} \right) + ... + \left(X_1^{(i_m)} + X_2^{(i_m)} + X_3^{(i_m)} \right) ; 1 \leq i_{j_0} \right. \\
&= \sup\left\{ \left(X_1^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + X_1^{(i_m)} \right) + \left(X_2^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + X_2^{(i_m)} \right) + \left(X_3^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + X \right.\right. \\
&\leq \sup\left\{ \left(X_1^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + X_1^{(i_m)} \right) ; 1 \leq i_{j_0+1} < ... < i_m \leq m \right\} \\
&\quad + \sup\left\{ \left(X_2^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + X_2^{(i_m)} \right) ; 1 \leq i_{j_0+1} < ... < i_m \leq m \right\} \\
&\quad + \sup\left\{ \left(X_3^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + X_3^{(i_m)} \right) ; 1 \leq i_{j_0+1} < ... < i_m \leq m \right\} \\
&= \sum_{j=[m\kappa]+1}^{m} X_1^{[j]} + \sum_{j=[m\kappa]+1}^{m} X_2^{[j]} + \sum_{j=[m\kappa]+1}^{m} X_3^{[j]}.
\end{aligned}$$

Il suffit de diviser par $[m(1-\kappa)]$ et de faire tendre $m \to \infty$ et on déduit le résultat voulu en appliquant le **Lemme 1**.

(f) **(4 points).** Comparer [4b] et [4c] en regard de [2e]. Quelle est la propriété souhaitable pour une mesure de risque en lien avec (1.4) ? Quelle est l'importance de cette propriété pour l'assurance ?
La relation en (**??**) correspond à la propriété de sous-additivité. Cette dernière est en lien avec l'effet positif de la mutualisation. En comparant (**??**) et (**??**), on observe la mutualisation conduit à un effet positif.

3. **Solution**
   (a) **(4 points).** Calculer l'espérance et la variance de la v.a. X :
      i. **(2 points).** Démontrer les expressions de l'espérance et de la variance de la v.a. X.
      ii. **(2 points).** Indiquer les valeurs de l'espérance et la variance de la v.a. X :
      Valeurs : 10 et 166.67
   (b) **(4 points).** Calculer $F_X(0)$, $F_X(50)$, $F_X(100)$:
      i. Écrire l'expression de $F_X(x)$ en termes des fonctions p et H et des paramètres λ, α, et β.
      ii. Indiquer les valeurs de $F_X(0)$, $F_X(30)$, $F_X(60)$ (**Vérification**: $F_X(90) = 0.9996227$) ;
      Valeurs : 0.3678794 ; 0.9845376; 0.9998581
   (c) **(2 points).** Tracer la courbe de F_X, $x \geq 0$, en indiquant la valeur de $F_X(0)$.
   Masse de probabilité à $0 = F_X(0)$
   (d) **(4 points).** Utiliser l'optimisation numérique pour calculer $VaR_\kappa(X)$, $\kappa = 0.01$ et 0.99 :
      i. Expliquer comment obtenir $VaR_\kappa(X)$, $\kappa = 0.01$ et 0.99.
      ii. Indiquer les deux valeurs.
      Valeurs : 0 et 54.92079
   (e) **(4 points).** Calculer $TVaR_\kappa(X)$, $\kappa = 0.01$ et 0.99 :
      i. Donner l'expression de $TVaR_\kappa(X)$, $\kappa = 0.01$ et 0.99, en utilisant, si nécessaire, le niveau de confiance κ, les fonctions p et H, et les paramètres λ, α, et β (si nécessaire).
      ii. Indiquer les deux valeurs.
      Valeurs : 10.1010 et 65.80757
   (f) **(2 points).** Tracer sur un même graphique les courbes de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$, en indiquant clairement leurs valeurs quand $\kappa \to 0$. S'il y en a, indiquer les portions plates ou les sauts dans les courbes.

4. **Solution :**
   (a) **(2 points).** Avec démonstration à l'appui, ordonner (de la plus petite valeur à la plus grande) $VaR_\kappa(X_1)$, $VaR_\kappa(X_2)$, $VaR_\kappa(X_3)$, pour tout $\kappa \in (0,1)$. Commenter à l'égard du capital attribué à chaque filliale.
   On a
   $$VaR_\kappa(X_i) = -\frac{1}{\beta_i}\ln(1-\kappa)$$
   Alors,
   $$VaR_\kappa(X_i) \uparrow \text{ quand } \beta_i \downarrow$$
   (b) **(2 points).** Avec démonstration à l'appui, ordonner (de la plus petite valeur à la plus grande) $TVaR_\kappa(X_1)$, $TVaR_\kappa(X_2)$, $TVaR_\kappa(X_3)$, pour tout $\kappa \in (0,1)$. Commenter à l'égard du capital attribué à chaque filliale.
   On a
   $$TVaR_\kappa(X_i) = \frac{1}{\beta_i}(1-\ln(1-\kappa))$$
   Alors,
   $$TVaR_\kappa(X_i) \uparrow \text{ quand } \beta_i \downarrow$$
   (c) **(2 points).** Développer l'expression de la fgm de S. Identifier la distribution de S.
   On observe
   $$\begin{aligned}\mathcal{M}_S(t) &= \mathcal{M}_{X_1}(t) \times \mathcal{M}_{X_2}(t) \times \mathcal{M}_{X_3}(t) \\ &= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t}\right)\left(\frac{\beta_3}{\beta_3 - t}\right)\end{aligned}$$
   $\Rightarrow$Distribution Erlang Généralisée
   (d) **(3 points).** Démontrer (à partir du document d'annexes) que l'expression de F_S est donnée par
   $$F_S(x) = \sum_{i=1}^{3} c_i F_{X_i}(x)\,,\ x \geq 0,$$
   où $c_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i}$, $i = 1,2,3$. (Note : $\sum_{i=1}^{3} c_i = 1$, et les valeurs de c_i peuvent être positives ou négatives).

D'après le document d'annexes, on a

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \sum_{i=1}^{3}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{3}\frac{\beta_j}{\beta_j-\beta_i}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_i x}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} c_i F_{X_i}(x) \end{aligned}$$

(e) **(2 points).** Démontrer que la prime stop loss de v.a. S est $\pi_S(x)=\sum_{i=1}^{3} c_i\pi_{X_i}(x)$, $x\geq 0$, où c_i est définie en [4d]. Note : Soit une v.a. positive Y avec $E[Y]<\infty$. Alors, $\pi_Y(x)=E[\max(Y-x;0)]$, $x\geq 0$.
On a

$$\begin{aligned} \pi_S(x) &= E[\max(S-x;0)] \\ &= \int_x^\infty \overline{F}_S(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{i=1}^{3} c_i\int_x^\infty \overline{F}_{X_i}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{i=1}^{3} c_i E[\max(X_i-x;0)] \\ &= \sum_{i=1}^{3} c_i\pi_{X_i}(x) \end{aligned}$$

(f) **(3 points).** Démontrer (à partir du document d'annexes) que l'expression de $TVaR_\kappa(S)$ est donnée par

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= VaR_\kappa(S)+\frac{1}{1-\kappa}\sum_{i=1}^{3} c_i\times\pi_{X_i}(VaR_\kappa(S)) \\ &= VaR_\kappa(S)+\frac{1}{1-\kappa}\sum_{i=1}^{3} c_i\times E[X_i]\times\overline{F}_{X_i}(VaR_\kappa(S)),\text{ pour }\kappa\in(0,1), \end{aligned}$$

où c_i est définie en [4d].
On sait

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= VaR_\kappa(S)+\frac{1}{1-\kappa}\pi_S(VaR_\kappa(S)) \\ &= VaR_\kappa(S)+\frac{1}{1-\kappa}\sum_{i=1}^{3} c_i\times\pi_{X_i}(VaR_\kappa(S)) \end{aligned}$$

(g) **(3 points).** Soit une mesure de risque ρ_κ, $\kappa \in (0,1)$. On définit le bénéfice de mutualisation par

$$BM_\kappa = \sum_{i=1}^{3} \rho_\kappa (X_i) - \rho_\kappa (S) \text{, pour } \kappa \in (0,1) \text{.}$$

Soit la propriété PRO (parmi les 4 propriétés requises pour qu'une mesure soit déclarée cohérente) requise pour que $BM_\kappa \geq 0$, pour tout $\kappa \in (0,1)$.

i. Identifier la propriété PRO. Réponse : Sous-additivité

ii. Identifier la mesure (parmi la VaR et la TVaR) qui satisfait la propriété PRO. Réponse : TVaR

iii. Développer l'expression de BM_κ pour cette mesure, en fonction de VaR et prime stop-loss.
Réponse : On a

$$\begin{aligned} BM_\kappa &= \sum_{i=1}^{3} \rho_\kappa (X_i) - \rho_\kappa (S) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(VaR_\kappa (X_i) + \frac{1}{1-\kappa} \pi_{X_i} (VaR_\kappa (X_i)) \right) - VaR_\kappa (S) - \frac{1}{1-\kappa} \sum_{i=1}^{3} c_i \times \pi_{X_i} (VaR_\kappa \\ &= \sum_{i=1}^{3} VaR_\kappa (X_i) - VaR_\kappa (S) + \frac{1}{1-\kappa} \sum_{i=1}^{3} (\pi_{X_i} (VaR_\kappa (X_i)) - c_i \times \pi_{X_i} (VaR_\kappa (S))) \end{aligned}$$

(h) **(15 points).** On effectue les calculs suivants en supposant $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{6}$, et $\beta_3 = \frac{1}{12}$:

i. **(3 points).** Calculer $VaR_\kappa (X_i)$, $i = 1,2,3$ et $\kappa = 0.995$.
Réponses : 10.59663 ; 31.7899; 63.57981

ii. **(3 points).** Calculer $TVaR_\kappa (X_i)$, $i = 1,2,3$ et $\kappa = 0.995$.
Réponses : 12.59663 ; 37.7899; 75.57981

iii. **(2 points).** Calculer $F_S (x)$, $x = 50$, 80. (Vérification : $F_S (100) = 0.9994232$)
Réponses : 0.9631513 et 09969481

iv. **(3 points).** Utiliser l'optimisation numérique pour calculer $VaR_\kappa (S)$, $\kappa = 0.995$. (Vérification : $VaR_{0.9999} (S) = 121.0294$ avec `optimize` en R).
Réponses : 74.06977

v. **(2 points).** Calculer $TVaR_\kappa (S)$, $\kappa = 0.995$.
Réponses : 86.07761

vi. **(2 points).** Calculer BM_κ, $\kappa = 0.995$.
Réponses : 39.88874

5. **Solution**
   (a) **(7 points).** Pour calculer les réalisations $X^{(j)}$ de X, on utilise dans l'ordre les réalisations de la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$ produites avec le générateur par défaut du logiciel R.
   On fixe `set.seed(2018)` et les 5 premières réalisations de U sont les suivantes :

j	1	2	3	4	5
$U^{(j)}$	0.33615347	0.46372327	0.06058539	0.19743361	0.47431419

   Produire $m = 100000$ (cent mille) réalisations $\left(M^{(j)}, X^{(j)}\right)$ de (M, X) selon la procédure suivante :
   - Étape 1 : Simuler $M^{(j)}$.
   - Étape 2 : Simuler $X^{(j)}$ selon la valeur de $M^{(j)}$.
   - Répéter les étapes 1 et 2 pour $j = 1, 2, ..., m$.

   On fournit les réponses suivantes :
   i. **(1 point).** Détailler l'étape 2.
   ii. **(3 points).** Calculer $M^{(2)}$ et $X^{(2)}$.
   (Vérification : $M^{(1)} = 0$ et $X^{(1)} = 0$)
   Valeurs : 0 et 0.
   iii. **(3 points).** Calculer $M^{(12)}$ et $X^{(12)}$.
   (Vérification : $M^{(40)} = 1$ et $X^{(33)} = 909.93766$)
   Valeurs : 3 et 1688.536.

   (b) **(3 points).** Appliquer la méthode Monte-Carlo avec les m réalisations de X pour évaluer approximativement $\psi_1(x) = \Pr(X > x)$, pour $x = 1000$.
   (Vérification : $\Pr(X > 1500) \simeq \psi_1(1500) = 0.03689$)
   i. Indiquer l'expression de l'approximation $\psi_1(x)$, pour $x = 1000$.
   ii. Indiquer la valeur de $\psi_1(x)$, pour $x = 1000$.
   Valeur : 0.05954

   (c) **(3 points).** Appliquer la méthode Monte-Carlo avec les m réalisations de X pour évaluer approximativement $\psi_2 = E[\max(X - x; 0)]$, pour $x = 1000$.
   (Vérification : $E[\max(X - 1500; 0)] \simeq \psi_2(1500) = 66.43956$)
   i. Indiquer l'expression de l'approximation $\psi_2(x)$, pour $x = 1000$.
   ii. Indiquer la valeur de $\psi_2(x)$, pour $x = 1000$.
   Valeur : 89.97229

   (d) **(10 points).** Appliquer la méthode Monte-Carlo avec les m réalisations de X pour évaluer les approximations $\varphi(\kappa)$ et $\gamma(\kappa)$ de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ (respectivement) , avec $\kappa = 0.99 > \Pr(X > 0) = \Pr(M = 0)$.
   (Vérification : $VaR_{0.995}(X) \simeq \varphi(0.995) = 4956.131$ et $TVaR_{0.995}(X) \simeq \gamma(0.995) = 8436.559$)

i. **(3 points).** Indiquer les expressions des 2 approximations $\varphi(k)$ et $\gamma(\kappa)$, pour $\kappa = 0.99$

ii. **(3 points).** Indiquer les 2 valeurs de $\varphi(k)$ et $\gamma(\kappa)$, pour $\kappa = 0.99$
Valeurs : 3455.8796 et 6276.267

iii. **(2 points).** Si le capital est égal à $VaR_{0.99}(X)$, est-ce que le montant aurait été suffisant pour payer les coûts des inondations survenues pendant l'année 2004 ? pendant l'année 2005 ? Indiquer le nombre d'années pour lesquelles le capital n'aurait pas été suffisant pour financer les coûts (suite aux inondations) d'une année.
Ok pour 2004 et 2005. Insuffisant pour 1948, 1950, 1954

iv. **(2 points).** Si le capital est égal à $TVaR_{0.99}(X)$, est-ce que le montant aurait été suffisant pour payer les coûts des inondations survenues pendant l'année 2004 ? pendant l'année 2005 ? Indiquer le nombre d'années pour lesquelles le capital n'aurait pas été suffisant pour financer les coûts (suite aux inondations) d'une année.
Ok pour toutes les années.

(e) **(6 points).** Soit la v.a. $N(k, 100)$ qui correspond au nombre d'années où k inondations sont survenus dans une même année, parmi 100 ans. On a

$$N(k, 100) \sim Binom(100, p_k),$$

avec $p_k = \Pr(M = k)$.

i. **(3 points).** Calculer $E[N(k, 100)]$, pour $k = 0, 1, 2$.
Valeurs : 75.57837; 21.16194; 2.962672

ii. (**1.5 points).** À partir de l'échantillon fourni dans le tableau, on définit le nombre d'années n_k avec k inondations dans la même année. Calculer les valeurs n_k, pour $k = 0, 1, 2$.
Valeurs : 72; 23;5

iii. **(1.5 points).** Comparer $E[N(k, 100)]$ et n_k, $k = 0, 1, 2$. Qu'en pensez-vous ?
Les valeurs sont assez semblables. Le modèle semble satisfaisant. Il faudrait tout de même inverstiguer davantage, car il sous-estime le nombre espéré d'années avec 2 évènements.

2

H2018 - Partiel Traditionnel

Université Laval	Examen partiel traditionnel
Faculté des Sciences et de Génie	Hiver 2018
École d'actuariat	Date: 24 février 2018

Act-2001 Introduction à l'actuariat 2

Professeur: Etienne Marceau

Nom de famille de l'étudiant	**Prénom de l'étudiant**	**Matricule**

- L'examen contient 10 questions à développement.
- Le total des points est de **120 points**.
- La durée est de 170 minutes.
- Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.
- Veuillez écrire vos réponses dans le cahier de réponse seulement.
- Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.

– Veuillez retourner le présent cahier, les annexes et le papier brouillon à la fin de l'examen.

Questions	**Points obtenus**	**Points**
1		15
2		10
3		11
4		18
5		14
6		10
7		14
8		8
9		8
10		12
Total		120

2.1 Symboles et abréviations

2.1.1 Symboles

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ = ensemble des entiers naturels (incluant $\{0\}$)
2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2...\}$
3. $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
4. $\mathbb{R}^+$ = ensemble des nombres réels positifs (incluant $\{0\}$)
5. $i = \sqrt{-1}$ = unité imaginaire
6. $\mathbb{C} = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ = ensemble des nombres complexes
7. $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$
8. $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$
9. $\Phi(x)$ = fonction de répartition de la loi normale standard
10. $\Phi^{-1}(u)$ = fonction quantile de la loi normale standard

2.1.2 Abréviations

1. fmp = fonction de masses de probabilité
2. fgp = fonction génératrice des probabilités
3. fgm = fonction génératrice des moments
4. i.i.d. = indépendant(e)s et identiquement distribué(e)s
5. v.a. = variable(s) aléatoire(s)
6. TLS = transformée de Laplace-Stieltjes

2.2 Questions

1. **(15 points).** Soit les v.a. indépendantes

$$X_1 \sim LNorm\,(\mu = 4.2, \sigma = 0.9) \quad \text{et} \quad X_2 \sim Gamma\left(\alpha = 2.5, \beta = \tfrac{1}{40}\right).$$

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.
On fournit ci-dessous des réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ du couple de v.a. i.i.d. (U_1, U_2) $(U_1 \sim U_2 \sim U\,(0,1))$, des réalisations suivantes de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ du couple (X_1, X_2) et des réalisations $S^{(j)}$ de la v.a. S :

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	0.24	0.55			
2	0.99	0.25			
3	0.11	0.15	22.11	39.88	61.99
4	0.88	0.75	192.00	132.51	324.51
5	0.06	0.95	16.46	221.41	237.87

Note : conserver 2 décimales pour les calculs.
Questions :

(a) **(6 points).** Calculer les réalisations $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$, $\left(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}\right)$, $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$.

(b) **(3 points).** Utiliser les résultats à l'item [2a] pour calculer des approximations de $TVaR_{0.6}\,(X_1)$, $TVaR_{0.6}\,(X_2)$, et $TVaR_{0.6}\,(S)$.

(c) **(3 points).** Utiliser les résultats à l'item [2a] pour calculer

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)}\right\}\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)}\right\}\right)$$
$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{S^{(j_1)} + S^{(j_2)}\right\}\right).$$

(d) **(1 point).** Comparer les valeurs obtenues aux items [2b] et [2c].

(e) **(2 points).** Utiliser les valeurs aux items [2b] et [2c] pour illustrer la propriété de la sous-additivité de la TVaR.

2. **(10 points).** Soit une v.a. discrète X dont la fgp est définie par

$$\mathcal{P}_X(t) = 0.38 + 0.12t^{10} + 0.27t^{80} + 0.13t^{200} + 0.1t^{1000}.$$

Questions :

(a) **(2 points).** Identifier toutes les valeurs non-nulles de $\Pr(X = x)$ (en précisant les valeurs de x).

(b) **(2 points).** Calculer $F_X^{-1}(u)$, pour $u = 0.6$. Interpréter.

(c) **(2 points).** Calculer $E\left[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(u)\}}\right]$, pour $u = 0.6$. Interpréter.

(d) **(2 points).** Développer l'expression de $\int_{0.25}^{0.95} F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u$ et calculer sa valeur. Interpréter.

(e) **(2 points).** Calculer $E[\max(X - 100; 0)]$. Interpréter.

3. **(11 points).** Le tableau (source : Tableau 2 de Swiss Re (2010)) ci-dessous contient les coûts totaux de $m = 28$ inondations importantes survenues au Canada pendant les années 1909, 1910, ..., 2008 (100 ans) :

Table 2: Large Flood Disasters in Canada and Estimated Total Costs (trended to 2008)

Year	Province	Location/Area	Total Costs in millions CAD (trended to 2008)
1954	ON	Southern ON (Hurricane Hazel)	5,392
1948	BC	Fraser River	5,172
1950	MB	Winnipeg	4,652
1996	QC	Saguenay	2,699
1997	MB	Southern Manitoba	1,230
1948	ON	Southern Ontario	706
1993	MB	Winnipeg	618
2005	ON	Southern Ontario	[1] 587
2005	AB	High river, southern AB	[1] 519
1937	ON	Southern Ontario	470
1923	NB	Saint John River Basin	463
1955	SK/MB	Manitoba and Saskatchewan	362
2004	AB	Edmonton	303
1995	AB	Southern Alberta	285
1934	NB	Plaster Rock	198
1936	NB	New Brunswick	188
1999	MB	Melita	163
1916	ON	Central Ontario	161
1909	NB	Chester	149
1961	NB	Saint John River Basin	148
1987	QC	Montréal	147
1996	QC	Montréal and Mauricie Region	145
1920	ON	Southwestern Ontario	132
1920	BC	Prince George	131
2004	ON	Peterborough	129
1972	QC	Richelieu River	124
1983	NF	Newfoundland	115
1974	QC	Maniwaki	103

Data sources: Public Safety Canada, 2007; Shrubsole *et al.*, 1993.
[1] Trended insured losses. Data source: IBC, 2008
Trending methods: Collins & Lowe, 2001

Les coûts sont en 1 millions \$ de 2008.
Hypothèses :

- les coûts totaux suite à une inondation importante au Canada sont modélisés par la v.a. $B \sim LNorm\left(\mu, \sigma\right)$;
- le nombre d'inondations pendant une année au Canada est modélisé par la v.a. $M \sim Pois\left(\lambda\right)$.

Les observations triées des coûts sont définies par $x^{[1]} < x^{[2]} < ... < x^{[28]}$, où $x^{[2]} = 115\ 000\ 000$ et $x^{[27]} = 5\ 172\ 000\ 000$.
Pour identifier les paramètres μ et σ, on fixe

$$x^{[j]} = F_B^{-1}\left(\frac{j}{m+1}\right), \ j = 1, 2, ..., m.$$

La valeur du paramètre λ est donnée par

$$\lambda = \frac{\text{nombre inondations}}{\text{nombre d'années de la période d'observation}}.$$

Questions :

(a) **(3 points).** Déterminer les valeurs des paramètres μ et σ à partir de $x^{[1]}$ et $x^{[28]}$. Note : $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{29}\right) = -1.8186$ et $\Phi^{-1}\left(\frac{28}{29}\right) = 1.8186$.

(b) **(1 point).** Déterminer la valeur du paramètre λ.

(c) **(7 points).** Les coûts pour une inondation pendant l'année 2018 sont définis par la v.a. B_{2018}, avec $B_{2018} \sim B$.
Le nombre d'inondations au Canada pendant l'année 2018 est défini par la v.a. M_{2018}, avec $M_{2018} \sim M$.
Les coûts totaux résultants de toutes les inondations survenues au Canada en 2018 sont définis par la v.a. $X_{2018} \sim PoisComp\,(\lambda, F_{B_{2018}})$, i.e.,

$$X_{2018} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_{2018}} B_{2018,k} & , \quad M_{2018} > 0 \\ 0 & , \quad M_{2018} = 0 \end{cases},$$

où $\{B_{2018,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. (avec $B_{2018,k} \sim B_{2018} \sim B$) qui est indépendante de la v.a. M_{2018}.

i. **(2 points).** Quelle est la probabilité qu'au moins 1 inondation survienne au Canada en 2018 ? Calculer qu'il survienne au Canada en 2018 autant d'inondations qu'en 2005 ?

ii. **(2 points).** Calculer $E\left[X_{2018}\right]$. Expliquer en mots cette quantité.

iii. **(3 points).** Calculer $F_{X_{2018}}(0)$ et $\overline{F}_{X_{2018}|M_{2018}=1}(x)$, où $x = 1\ 000\ 000\ 000$. Expliquer en mots les deux probabilités calculées.

4. **(18 points).** Soit les couples de v.a. (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) avec $E[X_1] = E[Y_1] = 10$ et $E[X_2] = E[Y_2] = 20$.
On fournit les valeurs suivantes :

   - valeurs de $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$:

$x_1 \backslash x_2$	0	20	40
0	$\frac{9}{180}$	$\frac{71}{180}$	0
10	0	$\frac{20}{180}$	0
20	0	$\frac{71}{180}$	$\frac{9}{180}$

;

   - valeurs de $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$:

$y_1 \backslash y_2$	0	20	40
0	$\frac{4}{180}$	$\frac{72}{180}$	$\frac{4}{180}$
10	$\frac{1}{180}$	$\frac{18}{180}$	$\frac{1}{180}$
20	$\frac{4}{180}$	$\frac{72}{180}$	$\frac{4}{180}$

.

Mesure de risque : Soit une v.a. Z avec $E[Z] < \infty$ et $E\left[Z^2\right] < \infty$.
   - Le superviseur d'une stagiaire et d'un stagiaire en actuariat qui ont suivi le cours Act-2001 propose d'utiliser la mesure suivante :
$$\rho_\kappa(Z) = E[Z] + \sqrt{Var(Z)}\varphi(\kappa),$$
où $\varphi(\kappa) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \geq 0$, pour $\kappa \in (0, 1)$.
   - $\varphi(0.99) = 2.665214$ (pour les calculs ci-dessous).
   - $\rho_\kappa(Z) \neq VaR_\kappa(Z)$ et $\rho_\kappa(Z) \neq TVaR_\kappa(Z)$, $\kappa \in (0, 1)$.

Inégalité du triangle :
   - Soit un couple de v.a. (Z_1, Z_2) avec $E[Z_i] < \infty$ et $E\left[Z_i^2\right] < \infty$, $i = 1, 2$.
   - Alors, on a
$$\sqrt{Var(Z_1 + Z_2)} \leq \sqrt{Var(Z_1)} + \sqrt{Var(Z_2)}.$$

Questions :
   (a) **(3 points).** Identifier les valeurs des fonctions de masse de probabilité de f_{X_1}, f_{X_2}, f_{Y_1} et f_{Y_2}.
   (b) **(3 points).** Calculer $Var(X_i)$ et $Var(Y_i)$, $i = 1, 2$.
   (c) **(2 points).** Calculer $\rho_{0.99}(X_i)$, $i = 1, 2$, et $\rho_{0.99}(X_1 + X_2)$.
   (d) **(2 points).** Calculer $\rho_{0.99}(Y_i)$, $i = 1, 2$, et $\rho_{0.99}(Y_1 + Y_2)$.
   (e) **(2 points).** Calculer les valeurs de $\Pr(X_1 \leq X_2)$ et $\Pr(Y_1 \leq Y_2)$.
   (f) **(6 points).** Les deux stagiaires, attentifs pendant le cours Act-2001, veulent démontrer que la mesure ρ_κ proposée par leur superviseur n'est pas cohérente. En effet, la mesure satisfait à 3 des 4 propriétés (souhaitables pour être cohérente) et elle ne satisfait pas à la quatrième.
      i. **(4 points).** Indiquer les 3 propriétés, avec démonstration à l'appui, satisfaites par la mesure de risque ρ_κ. Pour la démonstration de l'une d'entre elles, il est recommandé d'utiliser l'inégalité du triangle.

ii. **(2 points).** Indiquer la propriété à laquelle la mesure de risque ρ_κ ne satisfait pas et utiliser les valeurs calculées aux items [4c], [4d], et [4e] comme contre-exemple pour le confirmer.

5. **(14 points).** Soit les coûts pour un contrat d'assurance IARD définis par la v.a. X qui obéit à une loi composée avec

$$\mathcal{M}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{M}_B(t)),$$

où $\mathcal{P}_M(s) = (1 - q + qs)^2$ et $\mathcal{M}_B(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$.
On a observé que

$$F_X(0) = 0.8464 \text{ et } E[X] = 960.$$

Questions :

(a) **(2 points).** Identifier les lois des v.a. M et B. Quelle est la loi de X ?

(b) **(3 points).** Calculer les paramètres q et β.

(c) **(2 points).** Calculer $\gamma = F_X(24000)$.

(d) **(1 point).** Représenter sur un graphique la courbe de $F_X(x)$, $x \geq 0$. Indiquer clairement la valeur de la masse de probabilité à 0.

(e) **(2 points).** Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_\gamma(X)$.

(f) **(4 points).** Calculer $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_\gamma(X)$.

6. **(10 points).** Soit la v.a. X représentant les coûts d'une erreur technologique pour une entreprise où

$$X = \begin{cases} 0 & , \quad R \leq 3 \\ B & , \quad R > 3 \end{cases}$$

avec les v.a. indépendantes B et R.
On a

$$\begin{aligned} F_B(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\tau}}, \; x \geq 0, \; \tau > 0, \; \lambda > 0 \\ \text{et } F_R(x) &= 1 - \frac{2}{3}e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, \; x \geq 0, \; \beta > 0, \; \gamma > 0. \end{aligned}$$

Questions :

(a) **(2 points).** Développer l'expression de $F_X(x)$, $x \geq 0$.

(b) **(2 points).** Démontrer que $F_B^{-1}(u) = \lambda \left(u^{-1} - 1\right)^{-1/\tau}$, $u \in (0,1)$.

(c) **(2 points).** Développer l'expression de $VaR_\kappa(X)$, $u \in (0,1)$.

(d) **(4 points).** Hypothèses $\tau = 2$, $\lambda = 10$. Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_{0.9999}(X)$.

7. **(14 points).** La question est basée sur la section des évènements catastrophiques du document produit par le Bureau d'assurance du Canada (**document séparé**).
On utilise uniquement les données de la dernière colonne sous le titre "*Loss plus loss adjustment expenses in 2016 dollars*".
Les montants sont exprimées en multiple de 1000 \$Can.
À partir de ces données, les actuaires de la compagnie de réassurance LavalRe ont démontré que les coûts d'un évènement catastrophique (v.a. B, en \$Can) obéissait à une loi de Pareto, i.e.,

$$B \sim Pareto\,(\alpha = 2.1, \lambda = 90500000)\,.$$

Questions :

(a) **(2 points).** Pour la prochaine année, calculer la probabilité p que les coûts de la prochaine catastrophe excèdent ceux de la catastrophe survenue à Fort McMurray, en mai 2016.

(b) **(3 points).** Arrangement #1. Pour la prochaine année, la compagnie LavalRe et $n - 1 = 4$ autres compagnies de réassurance décident de partager les coûts d'une catastrophe selon l'arrangement suivant :
- À chaque catastrophe qui pourrait éventuellement survenir, les coûts de la catastrophe (v.a. B) sont répartis équitablement entre chacune des n compagnies.
- La part de LavalRe est représentée par la v.a. W_n.

Définir la v.a. W_n et calculer $VaR_{0.9999}\,(W_n)$ en utilisant adroitement une propriété de la fonction quantile.

(c) **(9 points).** Arrangement #2. La compagnie LavalRe assume les coûts en excès de $d = 500\,000\,000$ (500 millions \$Can). Cette exposition est représentée par la v.a. Y_d où

$$Y_d = \max\,(B - d; 0)\,.$$

i. **(3 points).** Calculer $\Pr\,(Y_d = 0)$ et $F_{Y_d}\,(x)$, $x = 1\,000\,000\,000$ \$Can.

ii. **(3 points).** Calculer $VaR_\kappa\,(Y_d)$, $\kappa = 0.5$ et 0.9999, en utilisant adroitement une propriété de la fonction quantile.

iii. **(3 points).** Calculer $\int_{0.025}^{0.975} VaR_u\,(Y_d)\,\mathrm{d}u$, en utilisant adroitement une propriété de la fonction quantile.

8. **(8 points).** Soit les v.a. X et Y ($E[X] < \infty$, $E[Y] < \infty$) avec les fonctions de répartition F_X et F_Y, quantile F_X^{-1} et F_Y^{-1}, et stop-loss π_X et π_Y. (Note : on ne précise pas si les v.a. X et Y sont discrètes, continues, ou mixtes; dépendantes ou indépendantes).
On rappelle que

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u,\ \kappa \in (0,1)\,. \tag{2.1}$$

La relation

$$TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \tfrac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) \quad , \quad \text{pour } \kappa \in (0,1), \tag{2.2}$$

est valide pour toute v.a. X.
Soit la fonction convexe

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(x)$$

pour $x \in \mathbb{R}$.
Alors, (2.2) peut être récrit sous la forme

$$TVaR_\kappa(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}}\{\varphi(x)\} \tag{2.3}$$

Questions :

(a) **(3 points).** À partir directement de la définition de la TVaR en (2.1), démontrer la relation en (2.2).

(b) **(5 points).** En utilisant de façon astucieuse (2.2) et (2.3), démontrer que

$$TVaR_\kappa(X+Y) \leq TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y)$$

pour $\kappa \in (0,1)$.
Note : Il ne faut pas faire la démonstration basée sur les statistiques d'ordre ou celle basée sur les fonctions indicatrices généralisées.

9. **(8 points).** Soit les v.a. i.i.d. $X_1, ..., X_n$ avec

$$X_i \sim Pareto\left(\alpha = 1.5, \lambda = 5\right),$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $W_n = \frac{1}{n} S_n$.
On ne peut pas identifier une forme explicite pour F_{W_n}.
Questions :
   (a) **(2 points).** Calculer la valeur de $E\left[W_n\right]$.
   (b) **(6 points).**
      i. **(4 points).Démontrer** de façon appropriée que la part allouée W_n tend (en distribution) vers la v.a. Z où

$$\Pr\left(Z = E\left[X\right]\right) = 1. \tag{2.4}$$

      (**Note** : il faut démontrer le résultat qui permet d'obtenir cette conclusion).
      ii. **(2 points).**Interpréter le résultat en (2.4) dans le contexte de l'assurance.

10. **(12 points).** Soit une v.a. continue X dont le support est $\mathbb{R}$ et avec

$$F_X^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right),\ u \in (0,1).$$

Questions :

(a) **(4 points).** Développer l'expression de $TVaR_\kappa(X)$. Note : $\lim_{v\to 0} v \ln v = 0$.

(b) **(3 points).** Développer l'expression de $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) **(5 points).** Soit la v.a. $Y = 0.2X + 0.06$, représentant le rendement instantanné annuel sur un titre boursier.

i. **(1 point).** Calculer $F_Y(0)$.

ii. **(2 points).** Calculer $VaR_{0.99}(Y)$. Indiquer clairement les propriétés utilisées.

iii. **(2 points).** Calculer $TVaR_{0.99}(Y)$. Indiquer clairement les propriétés utilisées.

FIN

2.3 Solutions

1. **Solution :**
   (a) **(4 points).** Calculer les réalisations $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$, $\left(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}\right)$, $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$.
   2 réalisations de X_1 : 35.32 541.16
   2 réalisations de X_2 : 94.56 53.49
   2 réalisations de S : 129.88 594.65
   (b) **(3 points).** Utiliser les résultats en (a) pour calculer des approximations de $TVaR_{0.6}(X_1)$, $TVaR_{0.6}(X_2)$, et $TVaR_{0.6}(S)$.
   On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(X_1) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(X_1^{[4]} + X_1^{[5]}\right) \\ &= 366.58 \end{aligned}$$

   On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(X_2) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(X_2) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(X_2^{[4]} + X_2^{[5]}\right) \\ &= 176.96 \end{aligned}$$

   On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(S) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(S) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(S^{[4]} + S^{[5]}\right) \\ &= 459.58 \end{aligned}$$

   (c) **(3 points).** Utiliser les résultats en (a) pour calculer

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)}\right\}\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)}\right\}\right)$$
$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{S^{(j_1)} + S^{(j_2)}\right\}\right).$$

On a

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\max\left\{\begin{array}{c} X_1^{(1)} + X_1^{(2)}, X_1^{(1)} + X_1^{(3)}, X_1^{(1)} + X_1^{(4)}, X_1^{(1)} + X_1^{(4)}, X_1^{(2)} + X_1^{(3)}, X_1^{(2)} + X_1^{(4)}, X_1^{(2)} \\ X_1^{(3)} + X_1^{(4)}, X_1^{(3)} + X_1^{(5)}, X_1^{(4)} + X_1^{(5)} \end{array}\right.\right.$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\max\left\{\begin{array}{c} X_2^{(1)} + X_2^{(2)}, X_2^{(1)} + X_2^{(3)}, X_2^{(1)} + X_2^{(4)}, X_2^{(1)} + X_2^{(4)}, X_2^{(2)} + X_2^{(3)}, X_2^{(2)} + X_2^{(4)}, X_2^{(2)} \\ X_2^{(3)} + X_2^{(4)}, X_2^{(3)} + X_2^{(5)}, X_2^{(4)} + X_2^{(5)} \end{array}\right.\right.$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\left(\max\left\{\begin{array}{c} S^{(1)} + S^{(2)}, S^{(1)} + S^{(3)}, S^{(1)} + S^{(4)}, S^{(1)} + S^{(4)}, S^{(2)} + S^{(3)}, S^{(2)} + S^{(4)}, S^{(2)} + S^{(5)}, \\ S^{(3)} + S^{(4)}, S^{(3)} + S^{(5)}, S^{(4)} + S^{(5)} \end{array}\right.\right.$$

On a

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	0.24	0.55	35.32	94.56	129.88
2	0.99	0.25	541.16	53.49	594.65
3	0.11	0.15	22.11	39.88	61.99
4	0.88	0.75	192.00	132.51	324.51
5	0.06	0.95	16.46	221.41	237.87

On obtient

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)} + X_1^{(4)}\right) = 366.58 \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}\left(X_2^{(4)} + X_2^{(5)}\right) = 176.96 \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2}\left(S^{(2)} + S^{(4)}\right) = \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)} + X_2^{(2)} + X_1^{(4)} + X_2^{(4)}\right) = 459.58 \end{aligned}$$

(d) **(1 point).** Comparer les valeurs obtenues en (b) et en (c).
On observe

$$\begin{aligned} TV\widetilde{aR_{0.6}}(X_1) &= \varphi_1 \\ TV\widetilde{aR_{0.6}}(X_2) &= \varphi_2 \\ TV\widetilde{aR_{0.6}}(S) &= \varphi_3 \end{aligned}$$

(e) **(1 point).** Utiliser les valeurs en (b) et (c) pour illustrer la propriété de la sous-additivité de la TVaR.

(f) On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{TVaR_{0.6}}(S) &= \varphi_3 = \frac{1}{2}\left(S^{(2)} + S^{(4)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)} + X_2^{(2)} + X_1^{(4)} + X_2^{(4)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)} + X_1^{(4)}\right) + \frac{1}{2}\left(X_2^{(2)} + X_2^{(4)}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)} + X_1^{(4)}\right) + \frac{1}{2}\left(X_2^{(5)} + X_2^{(4)}\right) \text{ (on remplace } X_2^{(2)} \text{ par } X_2^{(5)} \text{ qui est plus éle} \\
&= \varphi_1 + \varphi_2 = \widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1) + \widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1)
\end{aligned}$$

2. **Solution :**

   (a) **(2 points).** Identifier toutes les valeurs non-nulles de $\Pr(X = x)$ (en précisant les valeurs de x).
   On déduit

x	$\Pr(X = x)$	$\Pr(X \leq x)$
0	0.38	0.38
10	0.12	0.5
80	0.27	0.77
200	0.13	0.9
1000	0.1	1

   (b) **(2 points).** Calculer $F_X^{-1}(u)$, pour $u = 0.6$. Interpréter.
   On obtient

$$F_X^{-1}(0.6) = 80$$

   (c) **(2 points).** Calculer $E\left[X \times 1_{\left\{X > F_X^{-1}(u)\right\}}\right]$, pour $u = 0.6$. Interpréter.
   On obtient

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\left\{X > F_X^{-1}(0.6)\right\}}\right] &= E\left[X \times 1_{\{X > 80\}}\right] \\ &= 200 \times 0.13 + 1000 \times 0.1 \\ &= ... \end{aligned}$$

   (d) **(2 points).** Développer l'expression de $\int_{0.25}^{0.95} F_X^{-1}(u)\, du$ et calculer sa valeur. Interpréter.

x	$\Pr(X = x)$	$\Pr(X \leq x)$
0	0.38	0.38
10	0.12	0.5
80	0.27	0.77
200	0.13	0.9
1000	0.1	1

   On obtient

$$\begin{aligned} \int_{0.25}^{0.95} F_X^{-1}(u)\, du &= (0.5 - 0.25) \times 10 + 0.27 \times 80 + 0.13 \times 200 + 0.05 \times 1000 \\ &= 100.1 \end{aligned}$$

   (e) **(2 points).** Calculer $E[\max(X - 100; 0)]$. Interpréter.
   On obtient

$$\begin{aligned} E[\max(X - 100; 0)] &= (200 - 100) \times 0.13 + (1000 - 100) \times 0.1 \\ &= 103.0 \end{aligned}$$

3. **Solution :**

   (a) **(3 points).** Déterminer les valeurs des paramètres μ et σ à partir de $x^{[1]}$ et $x^{[28]}$. Note : $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{29}\right) = -1.8186$ et $\Phi^{-1}\left(\frac{28}{29}\right) = 1.8186$.
   On a

$$x^{[j]} = F_B^{-1}\left(\frac{j}{m+1}\right) = \exp\left(\mu + \sigma\Phi^{-1}\left(\frac{j}{m+1}\right)\right)$$

   On isole (μ, σ) dans

$$\begin{aligned}\ln\left(x^{[1]}\right) &= \mu + \sigma\Phi^{-1}\left(\frac{1}{29}\right)\\ \ln\left(x^{[28]}\right) &= \mu + \sigma\Phi^{-1}\left(\frac{28}{29}\right)\end{aligned}$$

   On obtient

$$\mu = \frac{\ln\left(x^{[1]}\right) + \ln\left(x^{[28]}\right)}{2} = ...$$

   et

$$\sigma = \frac{\ln\left(x^{[28]}\right) - \mu}{\Phi^{-1}\left(\frac{28}{29}\right)} = ...$$

   (b) **(1 point).** Déterminer la valeur du paramètre λ.

$$\lambda = \frac{\text{nombre inondations}}{\text{nombre d'années de la période d'observation}} = 0.28$$

   (c) **(7 points).** Les coûts pour une inondation pendant l'année 2018 sont définis par la v.a. B_{2018}, avec $B_{2018} \sim B$.
   Le nombre d'inondations au Canada pendant l'année 2018 est défini par la v.a. M_{2018}, avec $M_{2018} \sim M$.
   Les coûts totaux résultants de toutes les inondations survenues au Canada en 2018 sont définis par la v.a. $X_{2018} \sim PoisComp\left(\lambda, F_{B_{2018}}\right)$, i.e.,

$$X_{2018} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_{2018}} B_{2018,k} & , \quad M_{2018} > 0 \\ 0 & , \quad M_{2018} = 0 \end{cases},$$

   où $\{B_{2018,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. (avec $B_{2018,k} \sim B_{2018} \sim B$) qui est indépendante de la v.a. M_{2018}.

      i. **(2 points).** Quelle est la probabilité qu'au moins 1 inondation survienne au Canada en 2018 ? Calculer qu'il survienne au Canada en 2018 autant d'inondations qu'en 2005 ?
      On obtient

$$\Pr(M > 0) = e^{-\lambda} = e^{-0.28} =: 0.755\,783\,741\,456$$

On obtient

$$\Pr(M=2) = \frac{e^{-0.28}0.28^2}{2} =: 2.962\,672\,266\,51 \times 10^{-2}$$

ii. **(2 points).** Calculer $E[X_{2018}]$. Expliquer en mots cette quantité.
On obtient

$$E[X_{2018}] = E[M]\,E[B] = ...$$

iii. **(3 points).** Calculer $F_{X_{2018}}(0)$ et $\overline{F}_{X_{2018}|M_{2018}=1}(x)$, où $x = 1\ 000\ 000\ 000$. Expliquer en mots les deux probabilités calculées.
On obtient

$$F_{X_{2018}}(0) = F_M(0) = ...$$

On obtient

$$\overline{F}_{X_{2018}|M_{2018}=1}(x) = \Pr(B > x) = ...$$

4. **Solution :**
   (a) **(3 points).** Identifier les valeurs des fonctions de masse de probabilité de f_{X_1}, f_{X_2}, f_{Y_1} et f_{Y_2}.
   On obtient

   (b) **(3 points).** Calculer $Var(X_i)$ et $Var(Y_i)$, $i = 1, 2$.
   On obtient

   (c) **(2 points).** Calculer $\rho_{0.95}(X_i)$, $i = 1, 2$, et $\rho_{0.95}(X_1 + X_2)$.
   On obtient

   (d) **(2 points).** Calculer $\rho_{0.95}(Y_i)$, $i = 1, 2$, et $\rho_{0.95}(Y_1 + Y_2)$.
   On obtient

   (e) **(2 points).** Calculer les valeurs de $\Pr(X_1 \leq X_2)$ et $\Pr(Y_1 \leq Y_2)$.
   On obtient
$$\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$$
   et
$$\Pr(Y_1 \leq Y_2) = 1 - \frac{77}{180} = \frac{103}{180}.$$

   (f) **(6 points).** Les deux stagiaires, attentifs pendant le cours Act-2001, veulent démontrer que la mesure ρ_κ proposée par leur superviseur n'est pas cohérente. En effet, la mesure satisfait à 3 des 4 propriétés (souhaitables pour être cohérente) et elle ne satisfait pas à la quatrième.
      i. **(4 points).** Indiquer les 3 propriétés, avec démonstration à l'appui, satisfaites par la mesure de risque ρ_κ. Pour la démonstration de l'une d'entre elles, il est recommandé d'utiliser l'inégalité du triangle.
      - Invariance à la translation : Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, on a
$$\begin{aligned} \rho_\kappa(Z+a) &= E[Z+a] + \sqrt{Var(Z+a)}\varphi(\kappa) \\ &= E[Z] + a + \sqrt{Var(Z)}\varphi(\kappa) \\ &= \rho_\kappa(Z) + a \end{aligned}$$
      pour tout $\kappa \in (0, 1)$.
      - Homogénéité : Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Alors, on a
$$\begin{aligned} \rho_\kappa(aZ) &= E[aZ] + \sqrt{Var(aZ)}\varphi(\kappa) \\ &= aE[Z] + a\sqrt{Var(Z)}\varphi(\kappa) \\ &= a\rho_\kappa(Z) \end{aligned}$$

pour tout $\kappa \in (0, 1)$.

- Sous-additivité : Soit un couple de v.a. (Z_1, Z_2) avec $E[Z_i] < \infty$ et $E\left[Z_i^2\right] < \infty$, $i = 1, 2$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa (Z_1 + Z_2) &= E[Z_1 + Z_2] + \sqrt{Var(Z_1 + Z_2)}\varphi(\kappa) \\
&= E[Z_1] + E[Z_2] + \sqrt{Var(Z_1 + Z_2)}\varphi(\kappa) \\
&\leq E[Z_1] + E[Z_2] + \left(\sqrt{Var(Z_1)} + \sqrt{Var(Z_2)}\right)\varphi(\kappa) \text{ (inégalité du triangl} \\
&= \rho_\kappa(Z_1) + \rho_\kappa(Z_2),
\end{aligned}$$

pour tout $\kappa \in (0, 1)$.

ii. **(2 points).** Indiquer la propriété à laquelle la mesure de risque ρ_κ ne satisfait pas et utiliser les valeurs calculées aux items [4c], [4d], et [4e] comme contre-exemple pour le confirmer.

- Motononicité : Bien que

$$\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$$

on a obtenu les valeurs suivantes à l'item [4c] :

$$\rho_{0.99}(X_1) > \rho_{0.99}(X_2).$$

5. **Solution :**
   (a) **(2 points).** Identifier les lois des v.a. M et B. Quelle est la loi de X ?
   Loi de M :
   $$M \sim Binom\,(2, q)$$
   Loi de B :
   $$B \sim Exp\,(\beta)$$
   Loi de X :
   $$X \sim BinomComp\,(2, q; F_B)$$
   (b) **(3 points).** Calculer les paramètres q et β.
   On a
   $$F_X\,(x) = (1-q)^2 + 2q\,(1-q)\,H\,(x; 1, \beta) + q^2 H\,(x; 2, \beta)$$
   avec
   $$\begin{aligned} F_X\,(0) &= (1-q)^2 \\ &= 0.8464 \end{aligned}$$
   On déduit
   $$\begin{aligned} q &= 1 - \sqrt{0.8464} \\ &= 0.08. \end{aligned}$$
   On a
   $$\begin{aligned} E\,[X] &= E\,[M]\,E\,[B] \\ &= qE\,[B]\,. \end{aligned}$$
   On déduit
   $$E\,[B] = \frac{E\,[X]}{q} = \frac{960}{0.08} = 12000$$
   (c) **(2 points).** Calculer $\gamma = F_X\,(24000)$.
   On obtient
   $$\begin{aligned} \gamma &= F_X\,(24000) \\ &= (1-q)^2 + 2q\,(1-q)\,H\,(24000; 1, \beta) + q^2 H\,(24000; 2, \beta) \end{aligned}$$
   (d) **(1 point).** Représenter sur un graphique la courbe de $F_X\,(x)$, $x \geq 0$. Indiquer clairement la valeur de la masse de probabilité à 0.
   Masse à 0 : 0.8464
   (e) **(2 points).** Calculer $VaR_{0.5}\,(X)$ et $VaR_\gamma\,(X)$.

Comme $\kappa = 0.5 < F_X(0)$, on a

$$VaR_{0.5}(X) = 0$$

Comme $\kappa = \gamma = F_X(24000) > F_X(0) = 0.8464$, on obtient

$$VaR_\gamma(X) = 24000$$

(f) **(4 points).** Calculer $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_\gamma(X)$.
On a

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.5}(X) &= \frac{1}{1-0.5} E\left[X \times 1_{\{X>0\}}\right] \\
&= 2 \times E[X] \\
&= 2 \times 960 \\
&= 1920.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
TVaR_\gamma(X) &= \frac{1}{1-\gamma}\left(2q(1-q)\frac{1}{\beta}\overline{H}(24000;2,\beta) + q^2\frac{2}{\beta}\overline{H}(24000;3,\beta)\right) \\
&= ...
\end{aligned}$$

6. **Solution :**

   (a) **(2 points).** Développer l'expression de $F_X(x)$, $x \geq 0$.
   On a
   $$F_X(x) = 1 - q + qF_B(x)$$
   avec
   $$\begin{aligned} q &= \Pr(R > 3) \\ &= \overline{F}_R(3) \\ &= ... \end{aligned}$$

   (b) **(2 points).** Démontrer que $F_B^{-1}(u) = \lambda\left(u^{-1} - 1\right)^{-1/\tau}$, $u \in (0,1)$.
   On pose
   $$\begin{aligned} & u = \tfrac{1}{} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 + \left(\tfrac{x}{\lambda}\right)^{-\tau} = \tfrac{1}{u} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\tfrac{x}{\lambda}\right)^{-\tau} = \tfrac{1}{u} - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \lambda\left(\tfrac{1}{u} - 1\right)^{-\frac{1}{\tau}} \end{aligned}$$

   (c) **(2 points).** Développer l'expression de $VaR_\kappa(X)$, $u \in (0,1)$.
   On a
   $$\begin{aligned} VaR_\kappa(X) &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 < u < 1 - q \\ F_B^{-1}\left(\frac{\kappa-(1-q)}{q}\right) & , \quad 1 - q < u < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 < u < 1 - q \\ \lambda\left(\frac{1}{\frac{\kappa-(1-q)}{q}} - 1\right)^{-\frac{1}{\tau}} & , \quad 1 - q < u < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 < u < 1 - q \\ \lambda\left(\frac{q}{\kappa-(1-q)fs} - 1\right)^{-\frac{1}{\tau}} & , \quad 1 - q < u < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

   (d) **(4 points).** Hypothèses $\tau = 2$, $\lambda = 10$. Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_{0.9999}(X)$.
   - On a
   $$VaR_{0.5}(X) = 0$$
   - On a
   $$\begin{aligned} VaR_{0.9999}(X) &= \lambda\left(\frac{q}{\kappa - (1-q)fs} - 1\right)^{-\frac{1}{\tau}} \\ &= ... \end{aligned}$$

7. **Solution :**
   (a) **(2 points).** Pour la prochaine année, calculer la probabilité p que les coûts de la prochaine catastrophe excèdent ceux de la catastrophe survenue à Fort McMurray, en mai 2016.
   On a
   $$p = \Pr(B > 3816447000) = \left(\frac{90500000}{3816447000 + 90500000}\right)^{2.1} = 0.0003682164823$$
   (b) **(3 points).** Arrangement #1. Pour la prochaine année, la compagnie LavalRe et $n-1=4$ autres compagnies de réassurance décident de partager les coûts d'une catastrophe selon l'arrangement suivant :
   - À chaque catastrophe qui pourrait éventuellement survenir, les coûts de la catastrophe (v.a. B) sont répartis équitablement entre chacune des n compagnies.
   - La part de LavalRe est représentée par la v.a. W_n.

   Définir la v.a. W_n et calculer $VaR_{0.9999}(W_n)$ en utilisant adroitement une propriété de la fonction quantile.
   On a
   $$W_n = \frac{1}{5}X$$
   On déduit
   $$VaR_{0.9999}(W_n) = \frac{1}{5}VaR_{0.9999}(X) = ...$$
   (c) **(9 points).** Arrangement #2. La compagnie LavalRe assume les coûts en excès de $d = 500\,000\,000$ (500 millions \$Can). Cette exposition est représentée par la v.a. Y_d où
   $$Y_d = \max(B-d;0).$$
   i. **(3 points).** Calculer $\Pr(Y_d = 0)$ et $F_{Y_d}(x)$, $x = 1\,000\,000\,000$ \$Can.
   On a
   $$\begin{aligned} \Pr(Y_d = 0) &= \Pr(\max(B-d;0)=0) \\ &= \Pr(B \le d) \\ &= ... \end{aligned}$$
   On a
   $$\begin{aligned} \Pr(Y_d \le x) &= \Pr(\max(B-d;0)\le x) \\ &= \Pr(B \le d+x) \\ &= ... \end{aligned}$$

ii. **(3 points).** Calculer $VaR_{\kappa}(Y_d)$, $\kappa = 0.5$ et 0.9999, en utilisant adroitement une propriété de la fonction quantile.
La fonction $\varphi(x) = \max(x-d;0)$ est croissante et B est une v.a. continue.
Alors, on obtient

$$\begin{aligned} VaR_{\kappa}(Y_d) &= VaR_{\kappa}(\max(B-d;0)) \\ &= \max(VaR_{\kappa}(B)-d;0) \end{aligned}$$

iii. **(3 points).** Calculer $\int_{0.025}^{0.975} VaR_u(Y_d)\,\mathrm{d}u$, en utilisant adroitement une propriété de la fonction quantile.
On a

$$\begin{aligned} \int_{0.025}^{0.975} VaR_u(Y_d)\,\mathrm{d}u &= \int_{0.025}^{0.975} \max(VaR_u(B)-d;0)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{F_B(B)}^{0.975} VaR_u(B)\,\mathrm{d}u - d \\ &= \ldots \end{aligned}$$

8. **Solution :**
   (a) **(3 points).** À partir directement de la définition de la TVaR en (2.1), démontrer la relation en (2.2).
   On a

$$
\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} VaR_{u}(X)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} \left(VaR_{u}(X) - VaR_{\kappa}(X) + VaR_{\kappa}(X)\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} \left(VaR_{u}(X) - VaR_{\kappa}(X)\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} \left(VaR_{\kappa}(X)\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} \left(F_{X}^{-1}(u) - VaR_{\kappa}(X)\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}VaR_{\kappa}(X)(1-\kappa) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[\max\left(F_{X}^{-1}(U) - VaR_{\kappa}(X);0\right)\right] + VaR_{\kappa}(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[\max\left(X - VaR_{\kappa}(X);0\right)\right] + VaR_{\kappa}(X) \quad \text{(Quantile Function Theorem)}
\end{aligned}
$$

   pour $\kappa \in (0,1)$.

   (b) **(5 points).** En utilisant de façon astucieuse (2.2) et (2.3), démontrer que

$$TVaR_{\kappa}(X+Y) \leq TVaR_{\kappa}(X) + TVaR_{\kappa}(Y)$$

   pour $\kappa \in (0,1)$.
   On a

$$TVaR_{\kappa}(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}}\{\varphi(x)\}$$

   ce qui signifie

$$TVaR_{\kappa}(X) \leq \varphi(x)\text{, pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   Ainsi, pour $\alpha \in (0,1)$, on a

$$TVaR_{\kappa}(\alpha \times X + (1-\alpha)\times Y) \leq x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_{\alpha\times X+(1-\alpha)\times Y}(x)\text{, pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   On choisit

$$x_{\alpha} = \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1-\alpha)\times VaR_{\kappa}(Y)$$

et on a

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}\left(\alpha\times X+(1-\alpha)\times Y\right) &\leq x_0+\frac{1}{1-\kappa}\pi_{\alpha\times X+(1-\alpha)\times Y}\left(x_0\right)\\
&= x_0+\frac{1}{1-\kappa}\times E\left[\max\left(\alpha\times X+(1-\alpha)\times Y-x_0;0\right)\right]\\
&= \alpha\times VaR_{\kappa}\left(X\right)+(1-\alpha)\times VaR_{\kappa}\left(Y\right)\\
&\quad +\frac{1}{1-\kappa}\times E\left[\max\left(\alpha\times X+(1-\alpha)\times Y-\alpha\times VaR_{\kappa}\left(X\right)+(1\right.\right.
\end{aligned}$$

La fonction

$$E\left[\max\left(W;0\right)\right]$$

est convexe.
Alors, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}\left(\alpha\times X+(1-\alpha)\times Y\right) &\leq \alpha\times VaR_{\kappa}\left(X\right)+(1-\alpha)\times VaR_{\kappa}\left(Y\right)\\
&\quad +\frac{1}{1-\kappa}\times E\left[\max\left(\alpha\times X+(1-\alpha)\times Y-\alpha\times VaR_{\kappa}\left(X\right)+(1\right.\right.\\
&= \alpha\times VaR_{\kappa}\left(X\right)+(1-\alpha)\times VaR_{\kappa}\left(Y\right)\\
&\quad +\frac{1}{1-\kappa}\times E\left[\max\left(\alpha\times\left(X-VaR_{\kappa}\left(X\right)\right)+(1-\alpha)\times\left(Y-VaI\right.\right.\right.\\
&\leq \alpha\times VaR_{\kappa}\left(X\right)+(1-\alpha)\times VaR_{\kappa}\left(Y\right)\\
&\quad +\frac{1}{1-\kappa}\times\alpha E\left[\max\left(X-VaR_{\kappa}\left(X\right);0\right)\right]\\
&\quad +\frac{1}{1-\kappa}\times(1-\alpha)E\left[\max\left(Y-VaR_{\kappa}\left(Y\right);0\right)\right]\\
&= \alpha\times VaR_{\kappa}\left(X\right)+\frac{1}{1-\kappa}\times\alpha E\left[\max\left(X-VaR_{\kappa}\left(X\right);0\right)\right]\\
&\quad +(1-\alpha)\times VaR_{\kappa}\left(Y\right)+\frac{1}{1-\kappa}\times(1-\alpha)E\left[\max\left(Y-VaR_{\kappa}\left(Y\right.\right.\right.
\end{aligned}$$

pour tout $\alpha\in(0,1)$.
La relation est vraie pour $\alpha=\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}\left(\frac{1}{2}\times X+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times Y\right) &\leq \frac{1}{2}\times VaR_{\kappa}\left(X\right)+\frac{1}{1-\kappa}\times\frac{1}{2}E\left[\max\left(X-VaR_{\kappa}\left(X\right);0\right)\right]\\
&\quad +\left(1-\frac{1}{2}\right)\times VaR_{\kappa}\left(Y\right)+\frac{1}{1-\kappa}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)E\left[\max\left(Y-V\right.\right.
\end{aligned}$$

Avec la propriété d'homoénéité de la TVaR, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}TVaR_{\kappa}\left(X+Y\right) &\leq \frac{1}{2}\times VaR_{\kappa}\left(X\right)+\frac{1}{1-\kappa}\times\frac{1}{2}E\left[\max\left(X-VaR_{\kappa}\left(X\right);0\right)\right]\\
&\quad +\frac{1}{2}\times VaR_{\kappa}\left(Y\right)+\frac{1}{1-\kappa}\times\frac{1}{2}E\left[\max\left(Y-VaR_{\kappa}\left(Y\right);0\right)\right]
\end{aligned}$$

On multiplie par "2" et on obtient le résultat désiré.

9. **Solution :**
   (a) **(2 points).** Calculer la valeur de $E[W_n]$.
   On a

$$\begin{aligned} E[W_n] &= E\left[\frac{1}{n}S_n\right] \\ &= \frac{1}{n}E[S_n] \\ &= \frac{1}{n}nE[X] \\ &= E[X] \end{aligned}$$

où

$$E[X] = \frac{0.5}{1.5-1} = 1.$$

   (b) **(6 points).**
   i. **(4 points).Démontrer** de façon appropriée que la part allouée W_n tend (en distribution) vers la v.a. Z où

$$\Pr(Z = E[W_n]) = 1.$$

(**Note** : il faut démontrer le résultat qui permet d'obtenir cette conclusion).
On utilise la TLS de W_n donnée par (pour $t > 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W_n}(t) &= E\left[e^{-W_n t}\right] \\ &= E\left[e^{-\frac{1}{n}S_n t}\right] \\ &= E\left[e^{-S_n \frac{t}{n}}\right] \\ &= E\left[e^{-(X_1+...+X_n)\frac{t}{n}}\right] \\ &= E\left[e^{-X_1 \frac{t}{n}}\right] \times ... \times E\left[e^{-X_n \frac{t}{n}}\right] \quad \text{(indépendance)} \\ &= E\left[e^{-X \frac{t}{n}}\right]^n \quad \text{(i.d.)} \end{aligned}$$

Ensuite, on procède au passage à la limite

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) &= \lim_{n\to\infty} E\left[e^{-X\frac{t}{n}}\right]^n \\ &\simeq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{E[X]\,t}{n}\right)^n \\ &= e^{-E[X]t} \\ &= \mathcal{L}_Z(t) \end{aligned}$$

où

$$\Pr\left(Z = E\left[X\right]\right) = \Pr\left(Z = E\left[W_n\right]\right) = 1.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n}\left(t\right) = \mathcal{L}_Z\left(t\right)$$

on conclut

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n}\left(x\right) = F_Z\left(x\right)$$

pour tout point de continuité $x \in \mathbb{R}$.

ii. **(2 points).**Interpréter le résultat en (2.4) dans le contexte de l'assurance.
Quand la taille n du portefeuille devient importante, la part allouée à chaque contrat tend vers la constante $E\left[X\right]$

Solution :

(a) **(4 points).** Développer l'expression de $TVaR_\kappa(X)$. Note : $\lim_{v\to 0} v\ln v = 0$.
On a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)du \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(u)\,du - \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(1-u)\,du. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(u)\,du &= \frac{1}{1-\kappa}\, u\ln(u)|_\kappa^1 - \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 du \\ &= 0 - \frac{1}{1-\kappa}\kappa\ln(\kappa) - 1 \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\kappa\ln(\kappa) - 1 \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(1-u)\,du &= \frac{1}{1-\kappa} - (1-u)\ln(1-u)|_\kappa^1 - \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 du \\ &= 0 - \ln(1-\kappa) - 1 \\ &= -\ln(1-\kappa) - 1. \end{aligned}$$

On combine les deux expressions et on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)du \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(u)\,du - \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(1-u)\,du \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\kappa\ln(\kappa) - \ln(1-\kappa) \end{aligned}$$

(b) **(3 points).** Développer l'expression de $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned} x &= \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{u}{1-u} \\ &\Leftrightarrow (1-u)e^x = u \\ &\Leftrightarrow e^x = u(1+e^x) \end{aligned}$$

On conclut

$$F_X(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}},\ x \in \mathbb{R}.$$

(c) **(5 points).** Soit la v.a. $Y = 0.2X + 0.06$, représentant le rendement instantanné annuel sur un titre boursier.

i. **(1 point).** Calculer $F_Y(0)$.
On a

$$\begin{aligned} F_Y(0) &= \Pr(Y \leq 0) \\ &= \Pr(0.2X + 0.06 \leq 0) \\ &= \Pr\left(X \leq \frac{-0.06}{0.2}\right) \\ &= ... \end{aligned}$$

ii. **(2 points).** Calculer $VaR_{0.99}(Y)$. Indiquer clairement les propriétés utilisées.
On a

$$Y = 0.2X + 0.06 = \varphi(X)$$

où

$$\varphi(x) = 0.2x + 0.06$$

est une fonction strictement croissante d'une v.a. continue. Alors, on a

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(Y) &= 0.2 \times VaR_k(X) + 0.06 \\ &= ... \end{aligned}$$

iii. **(2 points).** Calculer $TVaR_{0.99}(Y)$. Indiquer clairement les propriétés utilisées.
On a

$$Y = 0.2X + 0.06 = \varphi(X)$$

où

$$\varphi(x) = 0.2x + 0.06$$

est une fonction strictement croissante d'une v.a. continue. Alors, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= 0.2 \times TVaR_k(X) + 0.06 \\ &= ... \end{aligned}$$

3

H2018 - Final Informatique

Université Laval	Examen final informatique
Faculté des Sciences et de Génie	Hiver 2018
École d'actuariat	Date: 29 avril 2018

Act-2001 Introduction à l'actuariat 2
Professeur: Etienne Marceau

Nom de famille de l'étudiant	**Prénom de l'étudiant**	**Matricule**

Instructions:

- – L'examen contient 6 questions à développement, pour un total de **120 points**.
- – La durée est de 180 minutes.
- – Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.
- – **On ne doit pas utiliser la fonction R "integrate" pour effectuer les calculs**.
- – Veuillez écrire vos réponses dans les cahiers bleus seulement.
- – Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.

- – Veuillez retourner le présent cahier, les cahiers bleus, les annexes et le papier brouillon à la fin de l'examen.

Questions	Points obtenus	Points
1		23
2		29
3		21
4		24
5		15
6		8
Total		120

3.1 Symboles et abréviations

3.1.1 Symboles

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ = ensemble des entiers naturels (incluant $\{0\}$)
2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2...\}$
3. $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
4. $\mathbb{R}^+$ = ensemble des nombres réels positifs (incluant $\{0\}$)
5. $i = \sqrt{-1}$ = unité imaginaire
6. $\mathbb{C} = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ = ensemble des nombres complexes
7. $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$
8. $\rho_P\,(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$
9. $\Phi\,(x)$ = fonction de répartition de la loi normale standard
10. $\Phi^{-1}\,(u)$ = fonction quantile de la loi normale standard
11. $H\,(x; \alpha, \beta)$ = fonction de répartition de la loi gamma de paramètres α et β

3.1.2 Abréviations

1. fmp = fonction de masses de probabilité
2. fgp = fonction génératrice des probabilités
3. fgm = fonction génératrice des moments
4. i.i.d. = indépendant(e)s et identiquement distribué(e)s
5. v.a. = variable(s) aléatoire(s)
6. TLS = transformée de Laplace-Stieltjes

3.2 Questions

1. **(23 points).** On considère un contrat de rente discrète temporaire $n = 65$ ans, émis à un individu d'âge $x = 35$.
   La v.a. T_x représente la durée de vie de l'individu d'âge x.
   La distribution de la v.a. T_x est modélisée à partir d'une table de mortalité où

   $$\ln\left(\frac{q_y}{1-q_y}\right) = -9.9 + 0.1 \times y, \quad \text{pour les âges entiers } y = 30, 31, ..., 110 \quad . \tag{3.1}$$

   La rente annuelle $g = 100$ est versée au début de l'année et elle cesse au décès s'il advient avant la durée n.
   On utilise une force d'intérêt de 3% pour les calculs.
   La v.a. discrète Z correspond à la valeur présente des coûts pour le contrat.
   La v.a. Z peut être définie selon les deux approches équivalentes comme suit :

   $$\text{approche \#1 :} \quad Z = \sum_{k=0}^{n-1} gv^k \times 1_{\{T_x > k\}} \;;$$
   $$\text{approche \#2 :} \quad Z = g \times \ddot{a}_{\overline{\min([T_x]+1;n)|}} = \begin{cases} g \times \ddot{a}_{\overline{[T_x]+1|}} & , T_x \leq n \\ g \times \ddot{a}_{\overline{n|}} & , T_x > n \end{cases} .$$

   Questions :
   (a) **(1 point).** Isoler l'expression de q_y, pour $y = 30, 31, ..., 110$.
   (b) **(2 points)**. À partir de (3.1), calculer les valeurs de $\overline{F}_{T_x}(k)$, pour $k = 20$ et 50.
   (Vérification : $\overline{F}_{T_x}(30) = 0.741521$; $\overline{F}_{T_x}(60) = 0.003862$).
   (c) **(5 points)**. Calculer $E[Z]$.
      i. **(2 points)**. Développer l'expression de $E[Z]$ selon les deux approches.
      ii. **(3 points)**. Indiquer la valeur exacte de $E[Z]$.
   (d) **(5 points)**. Calculer $\sqrt{Var(Z)}$.
      i. **(2 points)**. Développer l'expression de $E\left[Z^2\right]$.
      ii. **(3 points)**. Indiquer les valeurs exactes de $E\left[Z^2\right]$ et de $\sqrt{Var(Z)}$.
   (e) **(6 points).** La v.a. discrète Z prend des valeurs dans l'ensemble fini

   $$\{z_1, ..., z_m\}$$

   où

   $$0 < z_1 < ... < z_m.$$

      i. **(2 points)**. Indiquer les valeurs de m, z_1, z_{20}, z_m.

   ii. **(2 points)**. Calculer la probabilité que la valeur présente des paiements versés au titulaire du contrat excède strictement la prime pure payée par ce titulaire.
   iii. **(2 points)**. Calculer le mode z_{j_0} de la distribution de Z. Combien de versements ont-ils été versés lorsque le mode est atteint ?

(f) **(2 points)**. Calculer $VaR_{\kappa}(Z)$ pour $\kappa = 0.95$.
(g) **(2 points)**. Calculer $TVaR_{\kappa}(Z)$ pour $\kappa = 0.95$.

2. **(29 points). Dans cette question tous les coûts sont des multiples de 1 million \$.** Le **Tableau 1** contient les coûts totaux de $m = 28$ inondations importantes survenues au Canada pendant les années 1909, 1910, ..., 2008 (100 années d'observation).

Table 2:
Large Flood Disasters in Canada and Estimated Total Costs (trended to 2008)

Year	Province	Location/Area	Total Costs in millions CAD (trended to 2008)
1954	ON	Southern ON (Hurricane Hazel)	5,392
1948	BC	Fraser River	5,172
1950	MB	Winnipeg	4,652
1996	QC	Saguenay	2,699
1997	MB	Southern Manitoba	1,230
1948	ON	Southern Ontario	706
1993	MB	Winnipeg	618
2005	ON	Southern Ontario	[1]587
2005	AB	High river, southern AB	[1]519
1937	ON	Southern Ontario	470
1923	NB	Saint John River Basin	463
1955	SK/MB	Manitoba and Saskatchewan	362
2004	AB	Edmonton	303
1995	AB	Southern Alberta	285
1934	NB	Plaster Rock	198
1936	NB	New Brunswick	188
1999	MB	Melita	163
1916	ON	Central Ontario	161
1909	NB	Chester	149
1961	NB	Saint John River Basin	148
1987	QC	Montréal	147
1996	QC	Montréal and Mauricie Region	145
1920	ON	Southwestern Ontario	132
1920	BC	Prince George	131
2004	ON	Peterborough	129
1972	QC	Richelieu River	124
1983	NF	Newfoundland	115
1974	QC	Maniwaki	103

Data sources: Public Safety Canada, 2007; Shrubsole *et al.*, 1993.
[1] Trended insured losses. Data source: IBC, 2008
Trending methods: Collins&Lowe, 2001

Tableau 1. Source : Tableau 2 de Swiss Re [?]**.**

Note sur le Tableau 1 : une année sans observation est une année sans inondation.
Les coûts totaux résultants de toutes les inondations à survenir au Canada en 2018 sont définis par la v.a. $X \sim PoisComp\,(\lambda, F_B)$, i.e., la v.a. X est définie selon la représentation suivante :

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k & , \quad M > 0 \\ 0 & , \quad M = 0 \end{cases} ,$$

où

- v.a. M : nombre d'inondations au Canada pendant l'année 2018 ;
- v.a. B_k : coûts pour la $k$ième inondation pendant l'année 2018 ;
- $\{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$: suite de v.a. i.i.d. (avec $B_k \sim B$), indépendante de la v.a. M.

Les paramètres des distributions des v.a. B et M ont été estimés à partir des données du Tableau 1 :

- $B \sim LNorm(\mu, \sigma)$, avec $\mu = 5.9$ et $\sigma = 1.22$;
- $M \sim Pois(\lambda)$, où la valeur du paramètre λ est donnée par

$$\lambda = \frac{\text{nombre total d'inondations}}{\text{nombre d'années de la période d'observation}} = \frac{28}{100}.$$

Questions :

(a) **(4 points).** On définit le nombre observé d'années n_k où k inondations sont survenues dans la même année, parmi les 100 années d'observation. À partir des données du Tableau 1, calculer les valeurs n_k, pour $k = 0, 1, 2$.
Réponses : 77; 18; 5

(b) **(6 points).** Soit la v.a. $N(k, 100)$ représentant le nombre d'années où k inondations ayant pu survenir dans une même année, parmi les 100 années d'observation. On a

$$N(k, 100) \sim Binom(100, p_k),$$

avec $p_k = \Pr(M = k)$, $k = 0, 1, 2$.

i. **(3 points).** Calculer $E[N(k, 100)]$, pour $k = 0, 1, 2$.
On a

$$E[N(k, 100)] = 100 \times p_k$$

Réponses : 75.578; 21.162; 2.9627

ii. **(3 points).** Comparer $E[N(k, 100)]$ et n_k, $k = 0, 1, 2$. Que pouvons-nous conclure sur le choix de la loi de Poisson pour modéliser le nombre d'inondations dans une seule année ? Est-ce qu'elle semble "intuitivement" adéquate ?
Sans accomplir de tests statistiques formels, la loi de Poisson semble adéquate. Ce serait à confirmer par un test d'adéquation.

(c) **(4 points).** Pour calculer les réalisations $X^{(j)}$ de X, on utilise dans l'ordre les réalisations $U^{(j)}$ de la v.a. $U \sim Unif(0, 1)$ produites avec le générateur par défaut du logiciel R.
On fixe `set.seed(2018)` et les 5 premières réalisations de U sont les suivantes :

j	1	2	3	4	5
$U^{(j)}$	0.33615347	0.46372327	0.06058539	0.19743361	0.47431419

Produire $m = 100000$ (cent mille) réalisations $\left(M^{(j)}, X^{(j)}\right)$ de (M, X) selon la procédure suivante :

- Étape 1 : Simuler $M^{(j)}$.
- Étape 2 : Simuler $X^{(j)}$ selon la valeur de $M^{(j)}$.

- Répéter les étapes 1 et 2 pour $j = 1, 2, ..., m$.

On fournit les réponses suivantes :

i. **(1 point).** Détailler l'étape 2.

ii. **(3 points).** Calculer $M^{(j)}$ et $X^{(j)}$, pour $j = 93$ et 95.
(Vérification : $M^{(1)} = 0$ et $X^{(1)} = 0$; $M^{(33)} = 1$ et $X^{(33)} = 909.9377$)
Réponses : $(0, 0)$; $(2, 819.6388)$

(d) **(6 points).** Appliquer la méthode Monte-Carlo en utilisant les m réalisations de X (produite à l'item [2c]) pour évaluer les approximations $\varphi(\kappa)$ et $\gamma(\kappa)$ de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ (respectivement) , avec $\kappa = 0.995 > \Pr(X > 0) = \Pr(M = 0)$. (Vérification : $VaR_{0.99}(X) \simeq \varphi(0.99) = 3455.88$ et $TVaR_{0.99}(X) \simeq \gamma(0.99) = 6276.267$)

i. **(3 points).** Indiquer les expressions des 2 approximations $\varphi(k)$ et $\gamma(\kappa)$, pour $\kappa = 0.995$.

ii. **(3 points).** Indiquer les 2 valeurs de $\varphi(k)$ et $\gamma(\kappa)$, pour $\kappa = 0.995$.
Réponses : 4956.131 ; 8436.559

(e) **(6 points).** Le capital est égal à $VaR_{0.99}(X)$.

i. **(3 points).** Indiquer les années pendant la période de 100 ans pour lesquelles le capital n'aurait pas été suffisant pour financer les coûts totaux pendant une année. Indiquer le nombre k_{insuf} de ces années. Indiquer les coûts totaux de ces années.
Réponses : 3; 5392+5172+4652=15216

ii. **(3 points).** Soit la v.a. $K \sim Binom(100, 1 - \kappa = 0.01)$ représentant le nombre d'années parmi les 100 ans où pour lesquelles le capital n'aurait pas été suffisant pour financer les coûts totaux pendant une année. Est-ce que le nombre k_{insuf} dépasse $E[K]$? Interpréter le lien entre VaR avec $\kappa = 99\%$ et $E[K]$.

- Oui, le nombre k_{insuf} dépasse $E[K]$.
- Le montant VaR est établi avec un niveau de confiance de $\kappa = 0.99$. Le nombre espéré $E[K]$ d'années où les coûts excèdent ce montant devrait être de 1.
- Dans ce cas-ci, le nombre observé est 3, ce qui est considérable.
- Clairement, la VaR n'est pas adéquate. Il faudrait éventuellement réviser le modèle.

(f) **(3 points).** Le capital est égal à $TVaR_{0.99}(X)$. Pour les années indiquées à l'item [2(e)i], est-ce que le capital aurait été suffisant pour financer les coûts (suite aux inondations) d'une année ? Que peut-on conclure ?

- Oui.
- La mesure TVaR est adéquate.

- Le modèle semble ok.

3. **(21 points).** On considère un portefeuille homogène de n contrats d'assurance IARD d'une société d'assurance.
   Les coûts pour les contrats sont définis par les v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n où
   $$X_i \sim X \quad (i = 1, 2, ..., n).$$
   La TLS de la v.a. X est $\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{L}_B(t))$ où
   - $\mathcal{P}_M(s) = \left(\frac{b}{1-(1-b)\times s}\right)^a$, $a > 0$, $b \in (0,1)$, $|s| < 1$, et
   - $\mathcal{L}_B(t) = \left(\frac{d}{d+t}\right)^c$, $t > 0$, $d > 0$, $c > 0$.

   Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a.
   $$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$
   La part allouée par contrat est définie par la v.a. $W_n = \frac{1}{n} S_n$.
   Questions :
   (a) **(2 points).** Identifier les lois des v.a. M, B, et X. Écrire la représentation de la v.a. X, impliquant notamment la v.a. M.
   (b) **(2 points).** Développer l'expression de la TLS de la v.a. W_n, notée par $\mathcal{L}_{W_n}(t)$, pour $t > 0$, en fonction de n, a, b, c et d.
   (c) **(1 point).** À partir de l'item [3b], identifier la loi de W_n, pour $n \in \mathbb{N}^+$, en indiquant clairement les paramètres de cette loi en fonction de n, a, b, c et d.
   (d) **(2 points).** Développer l'expression de $E[W_n]$, en fonction de de n, a, b, c et d.
   (e) **(1.5 points).** L'expression de F_{W_n} est donnée par
   $$F_{W_n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(x), \text{ pour } x \geq 0. \tag{3.2}$$
   Donner les expressions de $\gamma_k(x)$, en fonction de x, k, n, a, b, c et d.
   (f) **(1.5 points).** L'expression de $TVaR_\kappa(W_n)$ est donnée par
   $$TVaR_\kappa(W_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x), \text{ pour } \kappa \in (0,1). \tag{3.3}$$
   Donner les expressions de $\omega_k(x)$, en fonction de x, k, n, a, b, c et d.
   (g) **(11 points).** À compter du présent item, on réalise les calculs en supposant $a = 0.1$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 0.2$ et $d = \frac{1}{10000}$. Pour les calculs impliquant les relations en (3.2) et (3.3), on effectue les sommes pour $k = 0, 1, ..., k_0$ avec $k_0 = 1000$.

i. **(2 points).** Calculer $E[W_n]$, $n = 1$ et 1000.

ii. **(3 points).** Calculer les valeurs de $F_{W_1}(0)$, $F_{W_1}(10000)$, $F_{W_{1000}}(100)$ et $F_{W_{1000}}(200)$.
Note : $F_{W_1}(20000) = 0.999255$ et $F_{W_{1000}}(300) = 0.999961$.

iii. **(3 points).** Calculer $VaR_\kappa(W_n)$, pour $\kappa = 0.999$ et pour $n = 1$ et $n = 1000$.
Note : $VaR_{0.001}(W_{1000}) = 21.299$ et $VaR_{0.5}(W_{1000}) = 96.12867$

iv. **(3 points).** Calculer $TVaR_\kappa(W_n)$, pour $\kappa = 0.999$ et pour $n = 1$ et $n = 1000$.

4. **(24 points).** Les coûts pour les 2 lignes d'affaires d'un portefeuille d'une société d'assurance sont représentés par les v.a. indépendantes X_1 et X_2 avec $X_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2,$.
Hypothèses :

i	α_i	β_i
1	0.5	$\frac{0.5}{10}$
2	2.5	$\frac{2.5}{10}$

Les coûts pour le portefeuille sont définis par la v.a. S où

$$S = X_1 + X_2.$$

On a recours au générateur par défaut de R pour produire $m = 100000$ (cent milles) réalisations de (U_1, U_2) où U_1, U_2 sont des v.a. i.i.d. de loi uniforme standard.
On fixe `set.seed(2018)`.
On produit dans l'ordre $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$, $\left(U_1^{(2)}, U_2^{(2)}\right)$, ..., $\left(U_1^{(m)}, U_2^{(m)}\right)$:

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$
1	0.33615347	0.46372327
2	0.06058539	0.1974336
...		
m	0.30083538	0.4439863

Questions :

(a) **(3 points).** Utiliser la méthode inverse pour produire m réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$. On utilise $U_i^{(j)}$ pour calculer $X_i^{(j)}$ pour $j = 1, ..., m$ et $i = 1, 2, 3$.

i. **(1 point).** Fournir l'expression de $X_i^{(j)}$ en fonction de $F_{X_i}^{-1}$ et $U_i^{(j)}$, $i = 1, 2$.

ii. **(2 points).** Indiquer la valeur de $\left(X_1^{(3)}, X_2^{(3)}\right)$ (3e réalisation).

Les valeurs de vérification sont les suivantes :

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$
1	1.888847	8.183593
2	0.057769	4.650295
...		
m	1.493424	7.908608

(b) **(6 points).** Avec les résultats de l'item [4a], calculer une approximation $\varphi_i(\kappa)$ de $TVaR_\kappa(X_i)$, $i = 1, 2$, pour $\kappa = 0.99$. (Vérification : $TVaR_{0.9}(X_1) \simeq \varphi_1(0.9) = 44.16251$; $TVaR_{0.9}(X_2) \simeq \varphi_2(0.9) = 23.52832$)

i. **(3 points).** Indiquer les expressions des approximations $\varphi_i(\kappa)$, $i = 1, 2$.

ii. **(3 points).** Indiquer les valeurs des approximations $\varphi_i(\kappa)$, $i = 1, 2$.

(c) **(3 points).** Avec les résultats de l'item [4b], calculer une approximation $\psi(\kappa)$ de $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.99$.

i. **(1.5 points).** Indiquer l'expression de l'approximation $\psi(\kappa)$.

ii. **(1.5 points).** Indiquer la valeur de l'approximation $\psi(\kappa)$.

(d) **(4 points).** Avec les résultats de l'item [4a], calculer une approximation $\widetilde{\theta}_i$ de la contribution θ_i pour X_i, $i = 1, 2$, selon la méthode d'Euler à $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.99$.

i. **(2 points).** Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\theta}_i$ de θ_i, $i = 1, 2$.

ii. **(2 points).** Indiquer les valeurs de $\widetilde{\theta}_1$, $\widetilde{\theta}_2$.

(e) **(8 points).** En utilisant de façon astucieuse les statistiques d'ordres, les propriétés des sup, et un passage à la limite, démontrer que, pour chaque $i = 1, 2$, on a

$$TVaR_\kappa(X_i) \geq TVaR_\kappa(X_i; S), \quad \text{pour } \kappa \in (0,1).$$

Note : Il ne faut pas faire la démonstration basée sur les fonctions indicatrices et ni celle basée sur la fonction stop-loss. On fournit les trois lemmes suivants :

- **Lemme #1.** Soit une v.a. Y avec fonction de répartition F_Y. Soit une suite de v.a. i.i.d. $Y^{(1)}$, ..., $Y^{(m)}$ où $Y^{(i)} \sim Y$, $i = 1, 2, ..., m$. Alors, on a

$$TVaR_\kappa(Y) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=\lfloor m\kappa\rfloor+1}^{m} Y^{[j]}}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor} \text{ (p.s.)}, \tag{3.4}$$

  où $Y^{[1]} \leq Y^{[2]} \leq ... \leq Y^{[m-1]} \leq Y^{[m]}$ sont les statistiques d'ordre de $Y^{(1)}$, ..., $Y^{(m)}$ et $\lfloor u\rfloor$ correspond à la partie entière de u.

- **Lemme #2.** Soit une suite de v.a. i.i.d. $Y^{(1)}$, ..., $Y^{(m)}$ où $Y^{(j)} \sim Y$, $j = 1, 2, ..., m$. Pour un entier j_0 tel que $1 \leq j_0 + 1 \leq m$ ($j_0 \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$), l'égalité suivante est vérifiée

$$\sum_{j=j_0+1}^{m} Y^{[j]} = \sup\left\{Y^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + Y^{(i_m)}; 1 \leq i_{j_0+1} < ... < i_m \leq m\right\}.$$

- **Lemme #3.** Soit une v.a. $S = X_1 + ... + X_n$ avec fonction de répartition F_S. Soit une suite de v.a. i.i.d. $S^{(1)}$, ..., $S^{(m)}$ où $S^{(i)} \sim S$, $i = 1, 2, ..., m$. Alors, pour la contribution de la v.a. X_i à la TVaR de la S selon la méthode d'Euler, notée par $TVaR_\kappa\left(X_i;S\right)$, on a

$$TVaR_\kappa\left(X_i;S\right)=\lim_{m\rightarrow\infty}\frac{\sum_{j=1}^{m}X_i^{(j)}\times 1_{\left\{S^{(j)}>S^{[\lfloor m(1-\kappa)\rfloor]}\right\}}}{\lfloor m\left(1-\kappa\right)\rfloor}\text{ (p.s.)},$$

où $S^{[1]}\leq S^{[2]}\leq ...\leq S^{[m-1]}\leq S^{[m]}$ sont les statistiques d'ordre de $S^{(1)}$, ..., $S^{(m)}$ et $\lfloor u\rfloor$ correspond à la partie entière de u.

5. **(15 points).** Les calculs sont effectués avec la force de mortalité

$$\mu(x) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)}, \ x \geq 0.$$

Pour calculer les réalisations $T_x^{(j)}$ de T_x, on utilise dans l'ordre les réalisations de la v.a. $U \sim Unif(0,1)$ produites avec le générateur par défaut du logiciel R. On fixe `set.seed(2018)` et les 5 premières réalisations de U sont les suivantes :

j	1	2	3	4	5
$U^{(j)}$	0.33615347	0.46372327	0.06058539	0.19743361	0.47431419

Questions :

(a) **(2 points).** Développer l'expression de $\overline{F}_{T_x}(t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$.

(b) **(2 points).** Développer l'expression de $F_{T_x}^{-1}(u)$, $x \geq 0$, $u \in (0,1)$.

(c) **(2 points).** On pose $\beta_0 = -10$, $\beta_1 = 0.1$ et $x = 90$. À partir de $m = 100000$ réalisations, notées $U^{(1)}$, ..., $U^{(m)}$, de la v.a. $U \sim Unif(0,1)$, utiliser la méthode inverse pour produire $m = 100000$ réalisations, notées par $T_{90}^{(1)}$, ..., $T_{90}^{(m)}$, de la v.a. T_{90}.

   i. **(1 point).** Fournir l'expression de $T_{90}^{(j)}$ en fonction de $F_{T_{90}}^{-1}$ et $U_i^{(j)}$, $i = 1, 2$. Sur quel théorème de la théorie des probabilités se fonde la méthode inverse de simulation ?

   ii. **(1 point).** Indiquer la valeur $T_{90}^{(j)}$, pour $j = 4$.
   Valeurs de vérification : $T_{90}^{(1)} = 1.445361$.

(d) **(2 points).** Avec les réalisations produites à l'item [5c], calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ (basée sur la méthode de Monte-Carlo) de $\varphi = E[T_{90}]$.

   i. Indiquer l'expression de $\widetilde{\varphi}$.

   ii. Indiquer la valeur de $\widetilde{\varphi}$.

(e) **(3 points).** Avec les réalisations produites à l'item [5c], calculer une approximation $\widetilde{\psi}$ (basée sur la méthode de Monte-Carlo) de $\psi = E[Z] = 1000 A_{\overset{1}{90}:\overline{10|}}$, où Z correspond à la valeur présente (avec une force d'intérêt $\delta = 3\%$) d'une assurance continue temporaire 10 ans, avec une prestation de décès 10 ans.

   i. **(1 point).** Définir la v.a. Z.

   ii. **(1 point).** Indiquer l'expression de $\widetilde{\psi}$.

   iii. **(1 point).** Indiquer la valeur de $\widetilde{\psi}$ (note : $\widetilde{\psi} > 500$).

(f) **(2 points).** Commenter sur les valeurs obtenues de $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ en regard de l'âge de l'assuré à l'émission du contrat.Questions :

6. **(8 points).** Soit un portefeuille composé de deux risques représentés par les v.a. discrètes indépendantes X_1 et X_2 où

$$\mathcal{P}_{X_1}(s) = E\left[s^{X_1}\right] = \frac{3}{4}e^{\lambda_1(s-1)} + \frac{1}{4}e^{\lambda_2(s-1)}, \text{ pour } |s| \leq 1,$$

et

$$\Pr(X_2 = k) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \times q^r & , \quad k = 0 \\ 0.5 \times \binom{r+k-1}{k}(q^r)(1-q)^k & , \quad k = 1, 2, ... \end{cases}.$$

Hypothèses : $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 8$, $r = 2.5$, $q = \frac{1}{5}$.
On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.
Questions :
(a) **(2 points).** Indiquer les lois de X_1 et X_2.
(b) **(5 points).** Calculer les valeurs de $\Pr(S = k)$, $k = 0, 1, ..., 200$.
  i. **(1 points).** Développer l'expression pour calculer $\Pr(S = k)$.
  ii. **(4 points).** Indiquer les valeurs exactes de $\Pr(S = k)$, pour $k = 0,\ 10,\ 30$.
  (Vérification : $f_S(20) = 0.0160207901$)
(c) **(1 point).** Calculer $\overline{F}_S(35)$.
  (Vérification : $\overline{F}_S(40) = 0.003396881$)

FIN

3.3 Solutions

1. **Solution :**
   (a) **(1 point).** Isoler l'expression de q_y, pour $y = 30, 31, ..., 110$.
   On obtient
   $$q_y = \frac{\mathrm{e}^{-9.9+0.1y}}{1+\mathrm{e}^{-9.9+0.1y}}$$
   (b) **(2 points)**. À partir de (3.1), calculer les valeurs de $\overline{F}_{T_x}(k)$, pour $k = 20$ et 50.
   (Vérification : $\overline{F}_{T_x}(30) = 0.741521$; $\overline{F}_{T_x}(60) = 0.003862$).
   (c) **(5 points)**. Calculer $E[Z]$.
      i. **(2 points)**. Développer l'expression de $E[Z]$ selon les deux approches.
      ii. **(3 points)**. Indiquer la valeur exacte de $E[Z]$.
      Réponse : 2199.498
   (d) **(5 points)**. Calculer $\sqrt{Var(Z)}$.
      i. **(2 points)**. Développer l'expression de $E[Z^2]$.
      ii. **(3 points)**. Indiquer les valeurs exactes de $E[Z^2]$ et de $\sqrt{Var(Z)}$.
      Réponses : 5058462; 469.7565
   (e) **(6 points).** La v.a. discrète Z prend des valeurs dans l'ensemble fini
   $$\{z_1, ..., z_m\}$$
   où
   $$0 < z_1 < ... < z_m.$$
      i. **(2 points)**. Indiquer les valeurs de m, z_1, z_{20}, z_m.
      Réponses : 100; 1526.6334; 2902.1872
      ii. **(2 points)**. Calculer la probabilité que la valeur présente des paiements versés au titulaire du contrat excède strictement la prime pure payée par ce titulaire.
      On observe que $z_{35} = 2199.5398$ (survive au moins 34 ans) et $z_{36} = 2234.5336$ (survivre au moins 35 ans). Alors,
      $$\Pr(Z > 2199.4978) = \Pr(T_x > 34) = 0.6362802.$$
      iii. **(2 points)**. Calculer le mode z_{j_0} de la distribution de Z. Combien de versements ont-ils été versés lorsque le mode est atteint ?
      On a
      $$z_{j_0} = \underset{j=1,2,...,65}{\arg\max}\{\Pr(Z = z_j)\} = z_{42} = 2423.816$$
   (f) **(2 points)**. Calculer $VaR_\kappa(Z)$ pour $\kappa = 0.95$.

Réponse : 2713.9766

(g) **(2 points)**. Calculer $TVaR_{\kappa}(Z)$ pour $\kappa = 0.95$.

Réponse : 2762.334

2. **Solution :**
   (a) **(4 points).** On définit le nombre observé d'années n_k où k inondations sont survenues dans la même année, parmi les 100 années d'observation. À partir des données du Tableau 1, calculer les valeurs n_k, pour $k = 0, 1, 2$.
   (b) **(6 points).** Soit la v.a. $N(k, 100)$ représentant le nombre d'années où k inondations ayant pu survenir dans une même année, parmi les 100 années d'observation. On a

$$N(k, 100) \sim Binom(100, p_k),$$

   avec $p_k = \Pr(M = k)$, $k = 0, 1, 2$.
      i. **(3 points).** Calculer $E[N(k, 100)]$, pour $k = 0, 1, 2$.
      ii. **(3 points).** Comparer $E[N(k, 100)]$ et n_k, $k = 0, 1, 2$. Que pouvons-nous conclure sur le choix de la loi de Poisson pour modéliser le nombre d'inondations dans une seule année ? Est-ce qu'elle semble adéquate ?
   (c) **(4 points).** Pour calculer les réalisations $X^{(j)}$ de X, on utilise dans l'ordre les réalisations $U^{(j)}$ de la v.a. $U \sim Unif(0, 1)$ produites avec le générateur par défaut du logiciel R.
   On fixe `set.seed(2018)` et les 5 premières réalisations de U sont les suivantes :

j	1	2	3	4	5
$U^{(j)}$	0.33615347	0.46372327	0.06058539	0.19743361	0.47431419

   Produire $m = 100000$ (cent mille) réalisations $\left(M^{(j)}, X^{(j)}\right)$ de (M, X) selon la procédure suivante :
   - Étape 1 : Simuler $M^{(j)}$.
   - Étape 2 : Simuler $X^{(j)}$ selon la valeur de $M^{(j)}$.
   - Répéter les étapes 1 et 2 pour $j = 1, 2, ..., m$.

   On fournit les réponses suivantes :
      i. **(1 point).** Détailler l'étape 2.
      ii. **(3 points).** Calculer $M^{(j)}$ et $X^{(j)}$, pour $j = 93$ et 95. (Vérification : $M^{(1)} = 0$ et $X^{(1)} = 0$; $M^{(33)} = 1$ et $X^{(33)} = 909.9377$)
   (d) **(6 points).** Appliquer la méthode Monte-Carlo en utilisant les m réalisations de X (produite à l'item [2c]) pour évaluer les approximations $\varphi(\kappa)$ et $\gamma(\kappa)$ de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ (respectivement) , avec $\kappa = 0.995 > \Pr(X > 0) = \Pr(M = 0)$.
   (Vérification : $VaR_{0.99}(X) \simeq \varphi(0.99) = 3455.88$ et $TVaR_{0.99}(X) \simeq \gamma(0.99) = 6276.267$)
      i. **(3 points).** Indiquer les expressions des 2 approximations $\varphi(k)$ et $\gamma(\kappa)$, pour $\kappa = 0.995$.

ii. **(3 points).** Indiquer les 2 valeurs de $\varphi(k)$ et $\gamma(\kappa)$, pour $\kappa = 0.995$.

(e) **(6 points).** Le capital est égal à $VaR_{0.99}(X)$.

i. **(3 points).** Indiquer les années pendant la période de 100 ans pour lesquelles le capital n'aurait pas été suffisant pour financer les coûts totaux pendant une année. Indiquer le nombre k_{insuf} de ces années. Indiquer les coûts totaux de ces années.

ii. **(3 points).** Soit la v.a. $K \sim Binom(100, 1-\kappa = 0.01)$ représentant le nombre d'années parmi les 100 ans où pour lesquelles le capital n'aurait pas été suffisant pour financer les coûts totaux pendant une année. Est-ce que le nombre k_{insuf} dépasse $E[K]$? Interpréter le lien entre VaR avec $\kappa = 99\%$ et $E[K]$.

(f) **(3 points).** Le capital est égal à $TVaR_{0.99}(X)$. Pour les années indiquées à l'item [2(e)i], est-ce que le capital aurait été suffisant pour financer les coûts (suite aux inondations) d'une année ? Que peut-on conclure ?

3. **Solution :**
   (a) ...
   (b) ...
   (c) ...
   (d) ...
   (e) ...
   (f) ...
   (g) **(11 points).** À compter du présent item, on réalise les calculs en supposant $a = 0.1$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 0.2$ et $d = \frac{1}{10000}$. Pour les calculs impliquant les relations en (3.2) et (3.3), on effectue les sommes pour $k = 0, 1, ..., k_0$ avec $k_0 = 1000$.
      i. **(2 points).** Calculer $E[W_n]$, $n = 1$ et 1000. Réponse : 500
      ii. **(3 points).** Calculer les valeurs de $F_{W_1}(0)$, $F_{W_1}(10000)$, $F_{W_{1000}}(100)$ et $F_{W_{1000}}(200)$.
      Note : $F_{W_1}(20000) = 0.999255$ et $F_{W_{1000}}(300) = 0.999961$.
      Réponses : 0.9602645; 0.9971982; 5429867; 9898455
      iii. **(3 points).** Calculer $VaR_\kappa(W_n)$, pour $\kappa = 0.999$ et pour $n = 1$ et $n = 1000$.
      Note : $VaR_{0.001}(W_{1000}) = 21.299$ et $VaR_{0.5}(W_{1000}) = 96.12867$
      Réponses : 17662.84; 244.357
      iv. **(3 points).** Calculer $TVaR_\kappa(W_n)$, pour $\kappa = 0.999$ et pour $n = 1$ et $n = 1000$.
      Réponses : 25952.37; 261.854

4. **Solution :**
   (a) **(3 points).** Utiliser la méthode inverse pour produire m réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$. On utilise $U_i^{(j)}$ pour calculer $X_i^{(j)}$ pour $j = 1, ..., m$ et $i = 1, 2, 3$.
      i. **(1 point).** Fournir l'expression de $X_i^{(j)}$ en fonction de $F_{X_i}^{-1}$ et $U_i^{(j)}$, $i = 1, 2$.
      ii. **(2 points).** Indiquer la valeur de $\left(X_1^{(3)}, X_2^{(3)}\right)$ (3e réalisation).
      Réponse : $(4.02724, 6.013419)$
   (b) **(6 points).** Avec les résultats de l'item [4a], calculer une approximation $\varphi_i(\kappa)$ de $TVaR_\kappa(X_i)$, $i = 1, 2$, pour $\kappa = 0.99$. (Vérification : $TVaR_{0.9}(X_1) \simeq \varphi_1(0.9) = 44.16251$; $TVaR_{0.9}(X_2) \simeq \varphi_2(0.9) = 23.52832$)
      i. **(3 points).** Indiquer les expressions des approximations $\varphi_i(\kappa)$, $i = 1, 2$.

$$\varphi_i(\kappa) = \frac{1}{m(1-\kappa)} \sum_{j=[m\times\kappa]+1}^{m} X_i^{[j]}$$

      ii. **(3 points).** Indiquer les valeurs des approximations $\varphi_i(\kappa)$, $i = 1, 2$.
      Réponse : 84.5093 ; 34.75014
   (c) **(3 points).** Avec les résultats de l'item [4b], calculer une approximation $\psi(\kappa)$ de $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.99$.
      i. **(1.5 points).** Indiquer l'expression de l'approximation $\psi(\kappa)$.
      ii. **(1.5 points).** Indiquer la valeur de l'approximation $\psi(\kappa)$.
      Réponse : 95.93502
   (d) **(4 points).** Avec les résultats de l'item [4a], calculer une approximation $\widetilde{\theta}_i$ de la contribution θ_i pour X_i, $i = 1, 2$, selon la méthode d'Euler à $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.99$.
      i. **(2 points).** Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\theta}_i$ de θ_i, $i = 1, 2$.
      ii. **(2 points).** Indiquer les valeurs de $\widetilde{\theta}_1$, $\widetilde{\theta}_2$.
      Réponses : 82.97951; 12.95551
   (e) **(8 points).** En utilisant de façon astucieuse les statistiques d'ordres, les propriétés des sup, et un passage à la limite, démontrer que, pour chaque $i = 1, 2$, on a

$$TVaR_\kappa(X_i) \geq TVaR_\kappa(X_i; S), \quad \text{pour } \kappa \in (0, 1).$$

   Note : Il ne faut pas faire la démonstration basée sur les fonctions indicatrices et ni celle basée sur la fonction stop-loss.

Pour tout m et pour pour tout $\kappa \in (0,1)$, on a

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} X^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)} > S^{[\lfloor m(1-\kappa)\rfloor]}\right\}}}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor} \leq \frac{\sum_{j=\lfloor m\kappa \rfloor+1}^{m} X_i^{[j]}}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor} \tag{3.5}$$

On applique le Lemme #3 du côté gauche de (3.5) et le Lemme #1 du côté droit de (3.5) pour obtenir le résultat souhaité :

$$TVaR_\kappa (X_i; S) \leq TVaR_\kappa (X_i)$$

pour $i = 1, 2$.

5. **Solution :**
   (a) **(2 points).** Développer l'expression de $\overline{F}_{T_x}(t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$.
   On a

$$\begin{aligned}\overline{F}_{T_x}(t) &= \exp\left(-\int_0^t \mu(x+s)\,\mathrm{d}s\right)\\ &= \exp\left(-\int_0^t \frac{\exp(\beta_0+\beta_1(x+s))}{1+\exp(\beta_0+\beta_1(x+s))}\mathrm{d}s\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{\beta_1}\ln(1+\exp(\beta_0+\beta_1(x+t)))+\frac{1}{\beta_1}\ln(1+\exp(\beta_0+\beta_1 x))\right)\\ &= \left(\frac{1+\exp(\beta_0+\beta_1 x)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1(x+1))}\right)^{\frac{1}{\beta_1}}\end{aligned}$$

   (b) **(2 points).** Développer l'expression de $F_{T_x}^{-1}(u)$, $x \geq 0$, $u \in (0,1)$.
   On isole "t" dans

$$\left(\frac{1+\exp(\beta_0+\beta_1 x)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1(x+1))}\right)^{\frac{1}{\beta_1}} = 1-u$$

   On obtient

$$F_{T_x}^{-1}(u) = \frac{1}{\beta_1}\left(\ln\left(\frac{1+\exp(\beta_0+\beta_1 x)}{(1-u)^{\beta_1}}-1\right)-\beta_0\right)-x$$

   (c) **(2 points).** On pose $\beta_0=-10$, $\beta_1=0.1$ et $x=90$. À partir de $m=100000$ réalisations, notées $U^{(1)}$, ..., $U^{(m)}$, de la v.a. $U \sim Unif(0,1)$, utiliser la méthode inverse pour produire $m = 100000$ réalisations, notées par $T_{90}^{(1)}$, ..., $T_{90}^{(m)}$, de la v.a. T_{90}.
      i. **(1 point).** Fournir l'expression de $T_{90}^{(j)}$ en fonction de $F_{T_{90}}^{-1}$ et $U_i^{(j)}$, $i=1,2$. Sur quel théorème de la théorie des probabilités se fonde la méthode inverse de simulation ?
      ii. **(1 point).** Indiquer la valeur $T_{90}^{(j)}$, pour $j=4$.
      Valeurs de vérification : $T_{90}^{(1)} = 1.445361$.
      Réponses : 0.7944510

   (d) **(2 points).** Avec les réalisations produites à l'item [5c], calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ (basée sur la méthode de Monte-Carlo) de $\varphi = E[T_{90}]$.
      i. Indiquer l'expression de $\widetilde{\varphi}$.
      ii. Indiquer la valeur de $\widetilde{\varphi}$.
      Réponse : 3.057906

   (e) **(3 points).** Avec les réalisations produites à l'item [5c], calculer une approximation $\widetilde{\psi}$ (basée sur la méthode de Monte-Carlo) de

$\psi = E[Z] = 1000A_{\overset{1}{90}:\overline{10|}}$, où la v.a. Z correspond à la valeur présente (avec une force d'intérêt $\delta = 3\%$) d'une assurance continue temporaire 10 ans, avec une prestation de décès 10 ans.

i. **(1 point).** Définir la v.a. Z.
$Z = 1000 \times v^{T_{90}} \times 1_{\{T_{90} \leq 10\}}$

ii. **(1 point).** Indiquer l'expression de $\widetilde{\psi}$.
$\widetilde{\psi} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} 1000 v^{T_{90}^{(j)}}$

iii. **(1 point).** Indiquer la valeur de $\widetilde{\psi}$ (note : $\widetilde{\psi} > 500$).
Réponse : 899.601

(f) **(2 points).** Commenter sur les valeurs obtenues de $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ en regard de l'âge de l'assuré à l'émission du contrat.

6. **Solution :**
   (a) **(2 points).** Indiquer les lois de X_1 et X_2.
   - Loi de X_1 : mélange de lois de Poisson avec

   $$\Pr(X_1 = k) = \frac{3}{4} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} + \frac{1}{4} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, ...$$

   - Loi de X_2 : loi binomiale négative avec une modification pour la valeur de la masse de probabilité à 0

   (b) **(5 points).** Calculer les valeurs de $\Pr(S = k)$, $k = 0, 1, ..., 200$.
   i. **(1 points).** Développer l'expression pour calculer $\Pr(S = k)$.

   $$\Pr(S = k) = \sum_{j=0}^{k} \Pr(X_1 = j) \Pr(X_2 = k - j)$$

   ii. **(4 points).** Indiquer les valeurs exactes de $\Pr(S = k)$, pour $k = 0,\ 10,\ 30$.
   Valeurs : 0.0070330913; 0.04387406; 0.00380933
   (Vérification : $f_S(20) = 0.0160207901$)

   (c) **(1 point).** Calculer $\overline{F}_S(35)$. Réponse : 0.008453751
   (Vérification : $\overline{F}_S(40) = 0.003396881$)

4

H2018 - Final Traditionnel

Université Laval	Examen final traditionnel
Faculté des Sciences et de Génie	Hiver 2018
École d'actuariat	Date: 2 mai 2018

Act-2001 Introduction à l'actuariat 2
Professeur: Etienne Marceau

Nom de famille de l'étudiant	Prénom de l'étudiant	Matricule

- L'examen contient 12 questions à développement.
- Le total des points est de **120 points**.
- La durée est de 180 minutes.
- Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.
- Veuillez écrire vos réponses dans le cahier de réponse seulement.
- Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.

- Veuillez retourner le présent cahier, les annexes et le papier brouillon à la fin de l'examen.

Questions	**Points obtenus**	**Points**
1		10
2		12
3		5
4		18
5		15
6		5
7		16
8		7
9		7
10		11
11		11
12		3
Total		120

4.1 Symboles et abréviations

4.1.1 Symboles

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ = ensemble des entiers naturels (incluant $\{0\}$)
2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2...\}$
3. $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
4. $\mathbb{R}^+$ = ensemble des nombres réels positifs (incluant $\{0\}$)
5. $i = \sqrt{-1}$ = unité imaginaire
6. $\mathbb{C} = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ = ensemble des nombres complexes
7. $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$
8. $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$
9. $\Phi(x)$ = fonction de répartition de la loi normale standard
10. $\Phi^{-1}(u)$ = fonction quantile de la loi normale standard

4.1.2 Abréviations

1. fmp = fonction de masses de probabilité
2. fgp = fonction génératrice des probabilités
3. fgm = fonction génératrice des moments
4. i.i.d. = indépendant(e)s et identiquement distribué(e)s
5. v.a. = variable(s) aléatoire(s)
6. TLS = transformée de Laplace-Stieltjes

4.2 Questions

1. **(10 points).** On considère un portefeuille de m contrats de rente discrète temporaire $n = 3$ ans à des individus d'âge $x = 65$ ans dont les durées de vie sont i.i.d.
La v.a. $T_{x,i}$ représente la durée de vie de l'assuré i d'âge x, $i = 1, 2, ..., m$, qui est modélisée à partir d'une table de mortalité où

$$\ln\left(\frac{q_y}{1-q_y}\right) = -10 + 0.1 \times y, \quad \text{pour les âges entiers } y = 40, 41, ..., 90 \quad .$$

La rente g est de 300, versée en début d'année.
La valeur présente des coûts pour le contrat i est représentée par la v.a. Z_i qui est définie selon les deux approches équivalentes comme suit :

$$\text{approche \#1 :} \quad Z_i = \sum_{k=0}^{n-1} gv^k \times 1_{\{T_{x,i}>k\}} \ ;$$

ou

$$\text{approche \#2 :} \quad Z_i = g \times \ddot{a}_{\overline{\min([T_{x,i}]+1;n)|}} = \begin{cases} g \times \ddot{a}_{\overline{[T_{x,i}]+1|}} & , T_{x,i} \leq n \\ g \times \ddot{a}_{\overline{n|}} & , T_{x,i} > n \end{cases} .$$

La v.a. discrète Z_i correspond à la valeur présente des coûts pour le contrat i pour $i = 1, 2, ..., m$.
Les valeurs présentes (actualisées) sont calculées avec une force d'intérêt δ de 2%.
On définit la v.a. W_m par

$$W_m = \frac{Z_1 + ... + Z_m}{m}.$$

On définit les primes $\Pi_{m,\kappa}^{VaR} = VaR_\kappa(W_m)$ et $\Pi_{m,\kappa}^{TVaR} = TVaR_\kappa(W_m)$.
Questions :
   (a) **(4 points).** Calculer l'espérance et la variance de Z_i ($i = 1, 2, ..., m$).
   (b) **(3 points).** Calculer l'espérance et la variance de W_m pour $m = 225$.
   (c) **(3 points).** Utiliser l'approximation normale pour évaluer approximativement $\Pi_{m,\kappa}^{TVaR}$ pour $m = 225$ et $\kappa = 99\%$.

2. **(12 points).** Soit les v.a. indépendantes

$$X_1 \sim LNorm\,(\mu = 4.2, \sigma = 0.9) \quad \text{et} \quad X_2 \sim Gamma\left(\alpha = 2.5, \beta = \tfrac{1}{40}\right).$$

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.
On fournit ci-dessous des réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ du couple de v.a. i.i.d. (U_1, U_2) $(U_1 \sim U_2 \sim U\,(0,1))$, des réalisations suivantes de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ du couple (X_1, X_2) et des réalisations $S^{(j)}$ de la v.a. S :

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	0.24	0.55			
2	0.99	0.25			
3	0.11	0.15	22.11	39.88	61.99
4	0.88	0.75	192.00	132.51	324.51
5	0.06	0.95	16.46	221.41	237.87

Note : conserver 2 décimales pour les calculs.
Questions :

(a) **(6 points).** Calculer les réalisations $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$, $\left(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}\right)$, $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$.

(b) **(3 points).** Utiliser les résultats à l'item [2a] pour calculer une approximation $\widetilde{\psi}$ de $\psi = TVaR_{0.6}\,(X_1 + X_2)$.

(c) **(3 points).** Utiliser les résultats à l'item [2a] pour calculer une approximation de $\widetilde{C}_{0.6}^{TVaR}\,(X_i)$ de la contribution $C_{0.6}^{TVaR}\,(X_i)$ basée sur la méthode d'Euler de la v.a. X_i à $TVaR_{0.6}\,(X_1 + X_2)$, pour $i = 1, 2$.

3. **(5 points).** Soit une mesure de risque sous-additive et homogène ρ_κ, avec un niveau de confiance $\kappa \in (0,1)$.
Soit une suite de v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n, où $X_i \sim X$ $(i = 1, 2, ..., n)$ avec $E[X] < \infty$.
La v.a. X_i correspond aux coûts pour le contrat i, $i = 1, 2, ..., n$.
On définit la part allouée à chaque contrat par la v.a. W_n avec

$$W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Questions : Démontrer que

$$\rho_\kappa (W_n) \leq \rho_\kappa (X),$$

pour $\kappa \in (0,1)$. Interpréter le résultat.

4. **(18 points).** Soit une v.a. de fréquence M où

$$\Pr(M=k)=\begin{cases} 0.6+0.4\times(1-q)^2 & , \quad k=0 \\ 0.4\times\binom{2}{k}\left(q^k\right)(1-q)^{2-k} & , \quad k=1,2 \end{cases}.$$

Les coûts pour un contrat sont definis par la v.a. X dont la TLS est

$$\mathcal{L}_X(t)=\mathcal{P}_M(\mathcal{L}_B(t))$$

avec $\mathcal{L}_B(t)=\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{0.5}$, $t\geq 0$. De plus, on a

$$F_X(0)=0.7 \text{ et } VaR_{0.95}(B)=19.207.$$

Questions :

(a) **(2 points).** Identifier la fgp $\mathcal{P}_M(s)$, $|s|\leq 1$.

(b) **(2 points).** Identifier les lois des v.a. M et B. Quelle est la loi de X ?

(c) **(3 points).** Calculer les paramètres q et β.

(d) **(4 points).** Calculer $E[X]$ et $\sqrt{Var(X)}$.

(e) **(2 points).** Calculer $\gamma=F_X(30)$.

(f) **(1 point).** Représenter sur un graphique la courbe de $F_X(x)$, $x\geq 0$. Indiquer clairement la valeur de la masse de probabilité à 0.

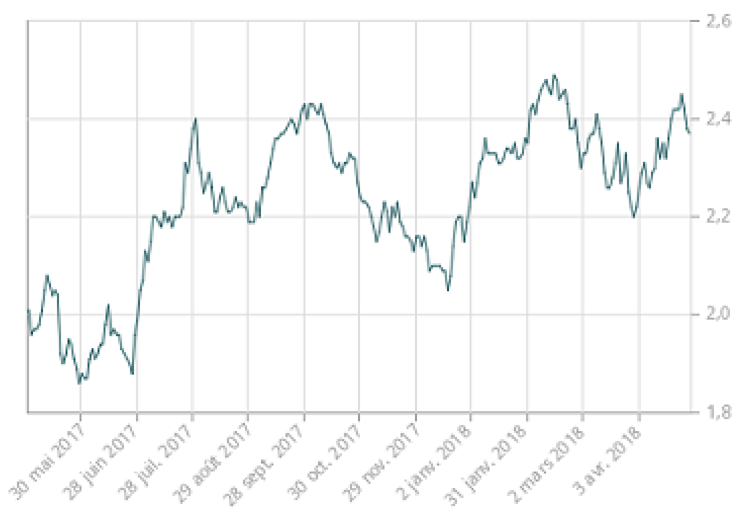
(g) **(4 points).** Calculer $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{\gamma}(X)$.

5. **(15 points).** On considère un portefeuille de $m = 2000$ contrats d'assurance discrète temporaire $n = 3$ ans à des individus d'âge $x = 65$ ans dont les durées de vie sont i.i.d.
La v.a. $T_{x,i}$ représente la durée de vie de l'assuré i d'âge x, $i = 1, 2, ..., m$.
La distribution de la v.a. $T_{x,i}$ est modélisée à partir d'une table de mortalité où
$$\ln\left(\frac{q_y}{1-q_y}\right) = -10 + 0.1 \times y, \quad \text{pour les âges entiers } y = 40, 41, ..., 90 \quad . \tag{4.1}$$
La prestation de décès est de 1000, versée en fin d'année.
La valeur présente des coûts pour le contrat i est représentée par la v.a. Z_i qui est définie en fonction de la v.a. $T_{x,i}$ $(i = 1, 2, ..., m)$.
La v.a. discrète Z_i correspond à la valeur présente des coûts pour le contrat i, et elle définie par
$$Z_i = b \times v^{[T_{x,i}]+1} \times 1_{\{T_{x,i} \leq n\}} = \begin{cases} b \times v^{[T_{x,i}]+1} & , T_{x,i} \leq n \\ 0 & , T_{x,i} > n \end{cases} ,$$
pour $i = 1, 2, ..., m$.
Deux hypothèses pour la force d'intérêt δ sont proposées pour calculer les valeurs présentes (actualisées) :
   - Hypothèse A: un étudiant du cours Act-2001 H2018, qui ne venait pas aux séances en classe, propose d'utiliser une force d'intérêt de 10 % ;
   - Hypothèse B: une étudiante consciencieuse et attentive du cours Act-2001 H2018, qui laissait son téléphone cellulaire en mode avion pendant les séances en classe, propose d'utiliser une force d'intérêt de 2.2 %.

Pour faire un choix, on dispose des informations présentées le graphique de l'Illustration 1.

Rendements moyens des obligations négociables du gouvernement canadien de plus de 10 ans

GRAPHIQUE : 28 avril 2017 - 30 avril 2018



Date	Rendement
2018-04-30	**2,37**
2018-04-27	**2,38**
2018-04-26	**2,42**
2018-04-25	**2,45**
2018-04-24	**2,42**

Données précédentes

Illustration 1. Banque du Canada [1].

On définit la v.a. Z_{PTF} comme étant la valeur présente des coûts pour l'ensemble du portefeuille où

$$Z_{PTF} = Z_1 + ... + Z_m.$$

Questions :

(a) **(1 point).** Isoler l'expression de q_y, pour $y = 40, 41, ..., 90$.

(b) **(1.5 points)**. À partir de (4.1), calculer les valeurs de $\overline{F}_{T_x}(k)$, pour $k = 1$, 2, 3.

(c) **(1 point)**. Choisir une seule hypothèse pour la force d'intérêt pour effectuer les calculs aux items [5d] et [5f]. Justifier adéquatement ce choix en 2018.

(d) **(4.5 points).** Calculer la prime pure et le revenu total de primes.

(e) **(4 points).** Calculer les valeurs espérées des sorties de fonds pour les années 1, 2, 3.

(f) **(3 points).** Déterminer les montants qui doivent être investis dans des obligations 0-coupon au temps 0 pour financer les valeurs espérées des sorties de fonds pour les années 1, 2, 3 (voir à l'item [5e]). Les prix des obligations sont calculés en supposant le modèle de taux d'intérêt déterministe (avec force d'intérêt δ). Expliquer brièvement comment le revenu total de primes sera alloué en considérant les montants à investir au temps 0 (qui ont été déterminés à l'item [5e]).

6. **(5 points).** Soit la v.a. continue positive T représentant la durée d'un incendie.
La v.a. X, qui correspond aux coûts en sinistres résultant d'un incendie, est définie en fonction de la durée d'un incendie, i.e.,

$$X = \varphi(T) = \beta\left(e^{\frac{1}{\gamma}T} - 1\right)$$

avec $\beta > 0$, $\gamma > 0$.
Hypothèse : $T \sim Exp(1)$.
Questions :
(a) **(4 points).** Développer l'expression de F_X.
(b) **(1 point).** À partir de la réponse à l'item [6a], identifier la loi de X.
Solution :
(a) On a

$$\begin{aligned}
\Pr(X \leq x) &= \Pr\left(\beta\left(e^{\frac{1}{\gamma}T} - 1\right) \leq x\right) \\
&= \Pr\left(e^{\frac{1}{\gamma}T} \leq 1 + \frac{x}{\beta}\right) \\
&= \Pr\left(T \leq \gamma \ln\left(1 + \frac{x}{\beta}\right)\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\gamma \ln\left(1 + \frac{x}{\beta}\right)\right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\beta}}\right)^{\gamma}
\end{aligned}$$

(b) On reconnaît la fonction de répartition de la distribution Pareto

7. **(16 points).** Soit une v.a. X définie sur $\mathbb{R}$ représentant les pertes pour une compagnie d'assurance avec une fonction de répartition F_X et une fonction quantile F_X^{-1}.
(Note : on ne précise pas si la v.a. X est discrète, continues, ou mixte).
Une étudiante et un étudiant, consciencieux et motivés, du cours ACT-2001 du semestre H2018 ont proposé la mesure de risque ρ_κ, où

$$\rho_\kappa (X) = VaR_{\kappa+\frac{(1-\kappa)}{2}} (X) \quad , \quad \text{pour } \kappa \in [0,1).$$

Questions :
(a) **(2 points).** Comparer $\rho_\kappa (X)$ et $VaR_\kappa (X)$, pour $\kappa \in (0,1)$. Interpréter la mesure $\rho_\kappa (X)$. Que représente $\rho_0 (X)$?
(b) **(1 point).** En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est invariante à la translation.
(c) **(1 point).** En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est positive homogène.
(d) **(1 point).** En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est monotone.
(e) **(11 points).** Soit un vecteur de v.a. (X_1, X_2) obéissant à une loi normale multivariée avec

$$E[X_1] = \mu_1 \quad E[X_2] = \mu_2 \quad Var(X_1) = \sigma_1^2 \quad Var(X_2) = \sigma_2^2,$$

$$Cov(X_1, X_2) = \rho\sigma_1\sigma_2, \text{ pour } \rho \in [-1,1],$$

et

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \mathrm{e}^{\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2\right)}.$$

Questions :
i. **(2 points).** Utiliser les fgm pour identifier la loi de $S = X_1 + X_2$.
ii. **(2 points).** Développer l'expression de $\rho_\kappa (X_1 + X_2)$, pour $\kappa \in [0,1)$. Que vaut $\rho_0 (X_1 + X_2)$?
iii. **(3 points).** Développer les expressions des contributions $C_\kappa^\rho (X_1)$ et $C_\kappa^\rho (X_2)$ des v.a. X_1 et X_2 à $\rho_\kappa (X_1 + X_2)$ selon la méthode d'Euler.
iv. **(2 points).** Montrer que $\rho_\kappa (X_1 + X_2) \le \rho_\kappa (X_1) + \rho_\kappa (X_2)$, pour tout $\kappa \in [0,1)$.
v. **(2 points).** Montrer que $C_\kappa^\rho (X_1) \le \rho_\kappa (X_1)$, pour tout $\kappa \in [0,1)$.

8. **(7 points).** Soit une suite de v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n, où $X_i \sim X$ ($i = 1, 2, ..., n$) avec $E[X] = 1$ et $\sqrt{Var(X)} = 3$.
La v.a. X_i correspond aux coûts pour le contrat i, $i = 1, 2, ..., n$.
La prime pour le contrat i correspond à P, $i = 1, 2, ...n$.
On définit les coûts totaux du portefeuille par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
L'organisme de surveillance demande de fixer le capital du portefeuille en ayant recours à la mesure TVaR avec un niveau de confiance $\kappa = 0.995$.
Le capital est financé à la fois par les revenus de primes et par un montant $u = 150$ que la compagnie d'assurance peut allouer au portefeuille.
Le nombre de contrats n que la compagnie peut émettre est limiter par la norme de capital, i.e.,

$$u + n \times P \geq TVaR_{0.995}(S_n),$$

où $n \times P$ correspond au revenu de primes.
La distribution de la v.a. S_n est approximée par une loi normale.
Questions :
   (a) **(3 points).** Calculer le nombre maximal n_1 (un nombre entier) de contrats que la compagnie peut émettre si $P = E[X]$.
   (b) **(4 points).** Calculer le nombre maximal n_2 (un nombre entier) de contrats que la compagnie peut émettre si

$$P = E[X] + \frac{\sqrt{\frac{1}{n}Var(X)}}{1 - 0.95} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.95)\right)^2}{2}}.$$ **(note : oui, c'est 0.95)**

   Est-ce que $n_1 > n_2$ ou $n_1 < n_2$? Pourquoi ?

9. **(7 points).** Les coûts en sinistres sont représentés par la v.a. $X \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$.
Les coûts remboursés par la société d'assurance sont définis par la v.a.
$$Y = \min\left(X; 230\right).$$
Questions :
   (a) **(2 points).** Développer l'expression de F_Y. Est-ce que la v.a. Y est continue ?
   (b) **(1 point).** Tracer la courbe de $F_Y\left(x\right)$, pour $x \geq 0$. Indiquer clairement les informations nécessaires sur l'allure de la courbe.
   (c) **(4 points).** Calculer $VaR_{0.95}\left(Y\right)$ et $TVaR_{0.95}\left(Y\right)$ **en expliquant clairement les démarches.**

10. **(11 points).** Soit la v.a. X avec $E[X] < \infty$, la fonction de répartition F_X, la fonction quantile F_X^{-1}, et la fonction stop-loss π_X. On a

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u,\ \kappa \in (0,1). \tag{4.2}$$

La relation

$$TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \tfrac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) \quad , \quad \text{pour } \kappa \in (0,1). \tag{4.3}$$

est valide pour toute v.a. X.

Questions :

(a) **(3 points).** Démontrer la relation en (4.3) à partir de la relation en (4.2).

(b) **(2 points).** Première hypothèse additionnelle : la v.a. X est continue et positive avec $F_X(0) = 0$. Démontrer que

$$\pi_X(x) = \int_x^\infty \overline{F}_X(y)\,\mathrm{d}y,\ x \geq 0.$$

(c) **(6 points).** Deuxième hypothèse additionnelle :

$$\pi_X(x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x},\ x \geq 0.$$

i. **(2 points).** Développer l'expression de $F_X(x)$, $x \geq 0$.

ii. **(2 points).** Calculer $\kappa = F_X(5)$.

iii. **(2 points).** Utiliser la relation en (4.3) pour calculer $TVaR_\kappa(X)$.

11. **(11 points).** Soit deux v.a. i.i.d. W_1 et W_2 où
$$W_1 \sim W_2 \sim Exp\left(1\right).$$
On définit
$$T = W_1 - W_2.$$
Questions :
(a) **(5 points).** Développer les expressions de $E\left[T\right]$, $Var\left(T\right)$ et $\mathcal{M}_T\left(t\right)$.
(b) **(6 points).** On définit le rendement sur un titre par la v.a. $R = \mu + \sigma T$, avec $\mu = 0.1$ et $\sigma = 0.3$.
  i. **(2 points).** Calculer $\sqrt{Var\left(R\right)}$.
  ii. **(2 points).** On définit la mesure de risque
$$\rho_\theta\left(R\right) = \frac{1}{\theta}\ln\left(\mathcal{M}_R\left(\theta\right)\right), \theta \in \left[0, \frac{1}{\sigma}\right).$$
  Calculer $\rho_{0.5}\left(R\right)$.
  iii. **(2 points).** De plus, on sait que
$$F_T\left(x\right) = \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} & , & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & , & x > 0 \end{array} \right. . \qquad (4.4)$$
  On définit la v.a. $X = 1000 \times 1_{\{R \leq -0.15\}}$. Calculer $E\left[X\right]$.

12. **(3 points).** Soit les forces de mortalité

$$\mu^{(1)}(x) = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 x),\ x \geq 0 \text{ (GOMPERTZ)}$$

et

$$\mu^{(2)}(x) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)},\ x \geq 0.$$

Les fonctions de survie d'une v.a. associées aux forces de mortalité $\mu^{(1)}$ et $\mu^{(2)}$ sont

$$\overline{F}_{T_x}^{(1)}(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(1)}(x+s)\,\mathrm{d}s\right) = \exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{\alpha_0+\alpha_1 x}}{\alpha_1}\left(\mathrm{e}^{\alpha_1 t} - 1\right)\right),\ x \geq 0,\ t \geq 0,\ \text{(GOMPERTZ)}$$

et

$$\overline{F}_{T_x}^{(2)}(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(2)}(x+s)\,\mathrm{d}s\right) = \frac{1 + \mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1 x}}{1 + \mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1(x+t)}},\ x \geq 0,\ t \geq 0.$$

Les calculs sont effectués avec une force de mortalité qui est définie par

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu^{(1)}(x) & , \quad 30 \leq x \leq 90 \quad \text{(mortalité pré-centenaire)} \\ \mu^{(2)}(x) & , \quad x \geq 90 \quad \text{(mortalité centenaire)} \end{cases},$$

où $\alpha_0 = -9.9$, $\alpha_1 = 0.09$, $\beta_0 = -10.62$, $\beta_1 = 0.1$.
On rappelle que

$$\overline{F}_{T_x}(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu(x+s)\mathrm{d}s}, x \geq 30, t \geq 0.$$

Question : Calculer $\Pr(25 < T_{50} \leq 50)$.

FIN

4.3 Solutions

1. **Solution :**
   (a) **(4 points).** Calculer l'espérance et la variance de Z_i ($i = 1, 2, ..., m$).
   On sait que

$$q_y = \frac{\exp(-10+0.1\times y)}{1+\exp(-10+0.1\times y)}, \quad \text{pour les âges entiers } y = 40, 41, ..., 90 \quad .$$

On a

$$\begin{aligned} p_{65} &= 1 - q_{65} = 1 - \frac{\exp(-10 + 0.1 \times 65)}{1 + \exp(-10 + 0.1 \times 65)} \\ &= 0.970687769\,249 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{66} &= 1 - q_{66} = 1 - \frac{\exp(-10 + 0.1 \times 66)}{1 + \exp(-10 + 0.1 \times 66)} \\ &= 0.967\,704\,535\,302 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} {}_2p_{65} &= p_{65} \times p_{66} \\ &= 0.970687769\,249 \times 0.967704535302 \\ &= 0.939338956664 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} E[Z_1] &= 200 \times \left(1 + v \times p_{65} + v^2 \times {}_2p_{65}\right) \\ &= 200 \times (1 + \exp(-0.02) \times 0.970687 + \exp(-0.02 \times 2) \times 0.939339) \\ &= 570.794\,620 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} E[Z_1] &= 200 \times \left(1 \times (1 - p_{65}) + (1 + v) \times (p_{65} - {}_2p_{65}) + \left(1 + v + v^2\right) \times ({}_2p_{65} - {}_3p_{65}) + \left(1 + v\right.\right. \\ &= 200 \times \left(1 \times (1 - p_{65}) + (1 + v) \times (p_{65} - {}_2p_{65}) + \left(1 + v + v^2\right) \times ({}_2p_{65})\right) \\ &= 200 \times \left(1 - 0.970687 + \left(1 + e^{-0.02}\right) \times (0.970687 - 0.939339) + \left(1 + e^{-0.02} + e^{-0.04}\right) \times 0\right. \\ &= 570.794\,620 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
E\left[Z_1^2\right] &= 200^2 \times \Big(1 \times (1 - p_{65}) + (1+v)^2 \times (p_{65} - {}_2p_{65}) + \left(1+v+v^2\right)^2 \times ({}_2p_{65} - {}_3p_{65}) + (1 \\
&= 200^2 \times \Big(1 \times (1 - p_{65}) + (1+v)^2 \times (p_{65} - {}_2p_{65}) + \left(1+v+v^2\right)^2 \times ({}_2p_{65})\Big) \\
&= 200^2 \times \Big(1 - 0.970687 + \left(1+\mathrm{e}^{-0.02}\right)^2 \times (0.970687 - 0.939339) + \left(1 + \mathrm{e}^{-0.02} + \mathrm{e}^{-0.04}\right)^2 \\
&= 331078.540624
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
Var\,(Z_1) &= E\left[Z_1^2\right] - E\left[Z_1\right]^2 \\
&= 331078.540624 - 570.794620^2 \\
&= 5272.042403
\end{aligned}$$

(b) **(3 points).** Calculer l'espérance et la variance de $W_{PTF,m}$ pour $m = 400$.
On a

$$\begin{aligned}
E\left[W_m\right] &= E\left[\frac{Z_1 + ... + Z_m}{m}\right] \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E\left[Z_i\right] \\
&= \frac{1}{m} m E\left[Z\right] \ \text{ (i.d.)} \\
&= E\left[Z\right] = 570.79462
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
Var\,(W_m) &= Var\left(\frac{Z_1 + ... + Z_m}{m}\right) \\
&= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m} Var\,(Z_i) \ \text{ (indépendance)} \\
&= \frac{1}{m^2} m Var\,(Z) \ \text{ (i.d.)} \\
&= \frac{1}{m} Var\,(Z) = \frac{5272.042403}{400} = 13.180106
\end{aligned}$$

(c) **(3 points).** Utiliser l'approximation normale pour évaluer approximativement $\Pi_{m,\kappa}^{TVaR}$ pour $m = 400$ et $\kappa = 99\%$.

On obtient

$$\begin{aligned}
\Pi_{m,\kappa}^{TVaR} &= E\left[W_m\right] + \sqrt{Var\left(W_m\right)}\frac{1}{\sqrt{2\times\pi}}\frac{1}{1-\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi(\kappa)^2\right)}{2}} \\
&= 570.79462 + 13.180106 \times \frac{1}{\sqrt{2\times\pi}}\frac{1}{1-0.99}\mathrm{e}^{-\frac{\left(2.326348^2\right)}{2}} \\
&= 605.922416
\end{aligned}$$

2. **Solution :**
   (a) **(4 points).** Calculer les réalisations $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$, $\left(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}\right)$, $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$.
   2 réalisations de X_1 : 35.32 541.16
   2 réalisations de X_2 : 94.56 53.49
   2 réalisations de S : 129.88 594.65
   Le tableau devient

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	0.24	0.55	35.32	94.56	129.88
2	0.99	0.25	541.16	53.49	594.65
3	0.11	0.15	22.11	39.88	61.99
4	0.88	0.75	192.00	132.51	324.51
5	0.06	0.95	16.46	221.41	237.87

   (b) **(3 points).** Utiliser les résultats en (a) pour calculer des approximations de $TVaR_{0.6}(X_1)$, $TVaR_{0.6}(X_2)$, et $TVaR_{0.6}(S)$.
   On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(X_1) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(X_1^{[4]} + X_1^{[5]}\right) \\ &= 366.58 \end{aligned}$$

   On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(X_2) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(X_2) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(X_2^{[4]} + X_2^{[5]}\right) \\ &= 176.96 \end{aligned}$$

   On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(S) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(S) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(S^{[4]} + S^{[5]}\right) \\ &= 459.58 \end{aligned}$$

   (c) **(3 points).** Utiliser les résultats à l'item [2a] pour calculer une approximation de $\widetilde{C}_{0.6}^{TVaR}(X_i)$ de la contribution $C_{0.6}^{TVaR}(X_i)$ basée sur la méthode d'Euler de la v.a. X_i à $TVaR_{0.6}(X_1 + X_2)$, pour $i = 1, 2$.

On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_{0.6}^{TVaR}(X_1) &= \frac{1}{5\times(1-0.6)}\times\sum_{j=1}^{5}\left(X_1^{(j)}\times 1_{\{S^{(j)}>S^{[3]}\}}\right)\\
&= \frac{1}{5\times(1-0.6)}\times(541.16+192)\\
&= 366.58
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_{0.6}^{TVaR}(X_2) &= \frac{1}{5\times(1-0.6)}\times\sum_{j=1}^{5}\left(X_2^{(j)}\times 1_{\{S^{(j)}>S^{[3]}\}}\right)\\
&= \frac{1}{5\times(1-0.6)}\times(53.49+132.51)\\
&= 93.0
\end{aligned}$$

On vérifie que

$$366.58+93=459.58$$

3. **Solution :** On a

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa(W_n) &= \rho_\kappa\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\rho_\kappa\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \text{ (homogénéité)} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_\kappa(X_i) \text{ (sous-additivité)} \\
&= \frac{1}{n}n\rho_\kappa(X) \\
&= \rho_\kappa(X)
\end{aligned}$$

Si la mesure est utilisée pour calculée une prime, la prime diminue en augmentant le nombre de contrats.
Si la mesure est utilisée pour calculée le capital, la part de capital par contrat diminue en augmentant le nombre de contrats.

4. **Solution :**
   (a) **(2 points).** Identifier la fgp $\mathcal{P}_M(s)$, $|s| \leq 1$.
   La distribution de M correspond à une loi binomiale modifiée pour incorporer une masse de probabilité additionnelle à 0.
   On a
   $$\mathcal{P}_M(s) = 0.6 + 0.4\left(1 - q + qs\right)^2, \quad |s| \leq 1.$$
   (b) **(2 points).** Identifier les lois des v.a. M et B. Quelle est la loi de X ?
   - Loi de M : voir en (a)
   - Loi de B : d'après la TLS de B, $B \sim Gamma\,(0.5, \beta)$
   - Loi de X : loi composée, selon la TLS de X

   (c) **(3 points).** Calculer les paramètres q et β.
   i. q : on a
   $$F_X(0) = \Pr(M = 0) = 0.6 + 0.4 \times (1 - q)^2 = 0.7$$
   on déduit $q = \frac{1}{2}$
   ii. β : Soit une v.a. $Y \sim Gamma\,(0.5, 1)$. En annexes, on fournit les valeurs de la fonction quantile pour Y. Comme
   $$B = \frac{1}{\beta} Y$$
   on
   $$VaR_\kappa(B) = \frac{1}{\beta} VaR_\kappa(Y)$$
   On déduit $\beta = \frac{1}{10}$.

   (d) **(4 points).** Calculer $E[X]$ et $\sqrt{Var(X)}$.
   - Loi de X : loi composée, selon la TLS de X
   - Espérance de X : Alors
   $$\begin{aligned} E[X] &= E[M]\,E[B] \\ &= (0.4 \times 2 \times 0.5) \times \frac{0.5}{\frac{1}{10}} \\ &= 2 \end{aligned}$$
   - Variance de X : on a
   $$Var(X) = E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E[B]^2$$
   Etc.

   (e) **(2 points).** Calculer $\gamma = F_X(30)$.

On a

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(M=0) + \Pr(M=1)\, H\left(x; 0.5, \frac{1}{10}\right) \\ &\quad + \Pr(M=2)\, H\left(x; 2\times 0.5, \frac{1}{10}\right) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

(f) **(1 point).** Représenter sur un graphique la courbe de $F_X(x)$, $x \geq 0$. Indiquer clairement la valeur de la masse de probabilité à 0.

(g) **(4 points).** Calculer $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{\gamma}(X)$.

i. On a

$$VaR_{0.5}(X) = 0$$

car $F_X(0) > \kappa = 0.5$.
Alors, on obtient

$$TVaR_{0.5}(X) = \frac{1}{1-0.5} E[X]$$

ii. On a

$$TVaR_{\gamma}(X) = \Pr(M=1)\, \frac{0.5}{\frac{1}{10}} \overline{H}\left(30; 0.5+1, \frac{1}{10}\right) + \Pr(M=2)\, \frac{2\times 0.5}{\frac{1}{10}} \overline{H}\left(30; 2\times 0.5+1, \frac{1}{10}\right)$$

5. **Solution :**
   (a) **(1 point).** Isoler l'expression de q_y, pour $y = 40, 41, ..., 90$.
   (b) **(1.5 points)**. À partir de (4.1), calculer les valeurs de $\overline{F}_{T_x}(k)$, pour $k = 1, 2, 3$.
   (c) **(1 point)**. Choisir une seule hypothèse pour la force d'intérêt pour effectuer les calculs aux items [5d] et [5f]. Justifier adéquatement ce choix en 2018.
   (d) **(4.5 points).** Calculer la prime pure et le revenu total de primes.
   (e) **(4 points).** Calculer les valeurs espérées des sorties de fonds pour les années 1, 2, 3.
   (f) **(3 points).** Déterminer les montants qui doivent être investis dans des obligations 0-coupon au temps 0 pour financer les valeurs espérées des sorties de fonds pour les années 1, 2, 3 (voir à l'item [5e]). Les prix des obligations sont calculés en supposant le modèle de taux d'intérêt déterministe (avec force d'intérêt δ). Expliquer brièvement comment le revenu total de primes sera alloué en considérant les montants à investir au temps 0 (qui ont été déterminés à l'item [5e]).

6. **Solution :**
   (a) **(2 points).** Comparer $\rho_\kappa(X)$ et $VaR_\kappa(X)$, pour $\kappa \in (0,1)$. Interpréter la mesure $\rho_\kappa(X)$. Que représente $\rho_0(X)$?
   - $\rho_0(X)$ correspond à la médiane
   - Etc.

   (b) **(1 point).** En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est invariante à la translation.
   On a

$$\begin{aligned}\rho_\kappa(X+a) &= VaR_{\kappa+\frac{(1-\kappa)}{2}}(X+a) \\ &= VaR_{\kappa+\frac{(1-\kappa)}{2}}(X)+a \\ &= \rho_\kappa(X)+a\end{aligned}$$

   pour $a \in \mathbb{R}$

   (c) **(1 point).** En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est positive homogène.
   On a

$$\begin{aligned}\rho_\kappa(X\times a) &= VaR_{\kappa+\frac{(1-\kappa)}{2}}(X\times a) \\ &= VaR_{\kappa+\frac{(1-\kappa)}{2}}(X)\times a \\ &= \rho_\kappa(X)\times a\end{aligned}$$

   pour $a \in \mathbb{R}^+$

   (d) **(1 point).** En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est monotone.
   Soit les v.a. X_1 et X_2 tel que $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$. On sait que

$$VaR_\kappa(X_1) \leq VaR_\kappa(X_2)$$

   Alors, on a

$$VaR_{\kappa+\frac{(1-\kappa)}{2}}(X_1) \leq VaR_{\kappa+\frac{(1-\kappa)}{2}}(X_2)$$

   ce qui implique

$$\rho_\kappa(X_1) \leq \rho_\kappa(X_2)$$

   (e) **(11 points).** Soit un vecteur de v.a. (X_1, X_2) obéissant à une loi normale multivariée avec

$$E[X_1] = \mu_1 \quad E[X_2] = \mu_2 \quad Var(X_1) = \sigma_1^2 \quad Var(X_2) = \sigma_2^2,$$

$$Cov(X_1, X_2) = \rho\sigma_1\sigma_2, \text{ pour } \rho \in [-1,1],$$

et

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \mathrm{e}^{\mu_1 t_1+\mu_2 t_2+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 t_1^2+\sigma_2^2 t_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2\right)}.$$

i. **(2 points).** Utiliser les fgm pour identifier la loi de $S = X_1 + X_2$.
On a

$$\begin{aligned} M_S(t) &= M_{X_1,X_2}(t,t) = \mathrm{e}^{\mu_1 t+\mu_2 t+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 t^2+\sigma_2^2 t^2+2\rho\sigma_1\sigma_2 t^2\right)} \\ &= \mathrm{e}^{(\mu_1+\mu_2)t+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2\right)\times t^2} \\ &= \mathrm{e}^{\mu_S t+\frac{1}{2}\sigma_S^2\times t^2} \end{aligned}$$

On déduit

$$S \sim Norm\left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$$

avec

$$\mu_S = \mu_1 + \mu_2$$

et

$$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

ii. **(2 points).** Développer l'expression de $\rho_\kappa(X_1+X_2)$, pour $\kappa \in [0,1)$. Que vaut $\rho_0(X_1+X_2)$?
On a

$$\begin{aligned} \rho_\kappa(X_1+X_2) &= VaR_{\kappa+\frac{(1-\kappa)}{2}}(X_1+X_2) \\ &= \mu_S + \sigma_S \Phi^{-1}\left(\kappa + \frac{(1-\kappa)}{2}\right) \end{aligned}$$

On déduit

$$\rho_0(X_1+X_2) = \mu_S$$

iii. **(3 points).** Développer les expressions des contributions $C_\kappa^\rho(X_1)$ et $C_\kappa^\rho(X_2)$ des v.a. X_1 et X_2 à $\rho_\kappa(X_1+X_2)$ selon la méthode d'Euler.
On a

$$\rho_\kappa(\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2) = \mu_1\lambda_1+\mu_2\lambda_2+\sqrt{\left(\sigma_1^2\lambda_1^2+\sigma_2^2\lambda_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2\lambda_1\lambda_2\right)}\Phi^{-1}\left(\kappa+\frac{(1-\kappa)}{2}\right)$$

On a

$$
\begin{aligned}
C_\kappa^\rho(X_1) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\rho_\kappa(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)\Big|_{\lambda_1=\lambda_2=1} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \sqrt{(\sigma_1^2\lambda_1^2 + \sigma_2^2\lambda_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\lambda_1\lambda_2)}\,\Phi^{-1}\left(\kappa + \frac{(1-\kappa)}{2}\right)\right)\Big|_{\lambda_1=\lambda_2} \\
&= \mu_1 + \frac{\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)}}\Phi^{-1}\left(\kappa + \frac{(1-\kappa)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Similairement, on obtient

$$
C_\kappa^\rho(X_2) = \mu_2 + \frac{\sigma_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)}}\Phi^{-1}\left(\kappa + \frac{(1-\kappa)}{2}\right)
$$

iv. **(2 points).** Montrer que $\rho_\kappa(X_1 + X_2) \leq \rho_\kappa(X_1) + \rho_\kappa(X_2)$, pour tout $\kappa \in [0, 1)$.
On a

$$
\begin{aligned}
\rho_\kappa(X_1 + X_2) &= \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)}\,\Phi^{-1}\left(\kappa + \frac{(1-\kappa)}{2}\right) \\
&\leq \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2)}\,\Phi^{-1}\left(\kappa + \frac{(1-\kappa)}{2}\right) \\
&= \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}\,\Phi^{-1}\left(\kappa + \frac{(1-\kappa)}{2}\right) \\
&= \mu_1 + \sigma_1\Phi^{-1}\left(\kappa + \frac{(1-\kappa)}{2}\right) + \mu_2 + \sigma_2\Phi^{-1}\left(\kappa + \frac{(1-\kappa)}{2}\right) \\
&= \rho_\kappa(X_1) + \rho_\kappa(X_2)
\end{aligned}
$$

v. **(2 points).** Montrer que $C_\kappa^\rho(X_1) \leq \rho_\kappa(X_1)$, pour tout $\kappa \in [0, 1)$.
On a

$$
\begin{aligned}
C_\kappa^\rho(X_1) &= \mu_1 + \frac{\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)}}\Phi^{-1}\left(\kappa + \frac{(1-\kappa)}{2}\right) \\
&\leq \mu_1
\end{aligned}
$$

7. **Solution :**
   (a) On a

$$u+n\times E\left[X\right]\geq nE\left[X\right]+\frac{\sqrt{nVar\left(X\right)}}{1-0.995}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.995)\right)^{2}}{2}}$$

En suite, on a

$$\frac{\sqrt{nVar\left(X\right)}}{1-0.995}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.995)\right)^{2}}{2}}\leq u$$

Puis,

$$\begin{aligned}\sqrt{n} &\leq u\times 0.005\times\frac{\sqrt{2\pi}e^{\frac{\left(\Phi^{-1}(0.995)\right)^{2}}{2}}}{\sqrt{Var\left(X\right)}}\\ &= 50\times 0.005\sqrt{2\pi}e^{\frac{(2.575829)^{2}}{2}}\\ &= 17.2893670422\end{aligned}$$

et

$$n\leq(17.2893670422)^{2}=:298.922\,212\,720$$

On obtient

$$n_1=298$$

   (b) On a

$$u+nE\left[X\right]+n\frac{\sqrt{\frac{1}{n}Var\left(X\right)}}{1-0.95}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.95)\right)^{2}}{2}}\geq nE\left[X\right]+\frac{\sqrt{nVar\left(X\right)}}{1-0.995}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.995)\right)^{2}}{2}}$$

En suite, on a

$$\frac{\sqrt{nVar\left(X\right)}}{1-0.995}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.995)\right)^{2}}{2}}-\frac{\sqrt{nVar\left(X\right)}}{1-0.95}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.95)\right)^{2}}{2}}\leq u$$

Puis,

$$\begin{aligned}\sqrt{n} &\leq \frac{u\times\sqrt{2\pi}}{\frac{\sqrt{Var(X)}}{1-0.995}e^{-\frac{(\Phi^{-1}(0.995))^{2}}{2}}-\frac{\sqrt{Var(X)}}{1-0.95}e^{-\frac{(\Phi^{-1}(0.95))^{2}}{2}}}\\ &= \frac{150\times\sqrt{2\pi}}{\frac{3}{1-0.995}e^{-\frac{(2.575829)^{2}}{2}}-\frac{3}{1-0.95}e^{-\frac{(1.644854)^{2}}{2}}}\\ &= 60.2962239088\end{aligned}$$

et

$$n \leq 60.2962239088^2 = 3635.634\,61766$$

On obtient

$$n_2 = 3635$$

On observe $n_1 < n_2$. Chaque assuré contribue au financement du capital (ce qui est logique).

8. **Solution :**
   (a) **(2 points).** On a

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{x}{100}\right) & , \quad 0 \leq x < 230 \\ 1 & , \quad x \geq 230 \end{cases}$$

La distribution n'est pas absolument continue. Elle est mixte. Il y a un saut au point $x = 230$.
On observe que

$$\Pr(Y = 230) = \overline{F}_X(230)$$

   (b) **(1 point).** Tracer la courbe de $F_Y(x)$, pour $x \geq 0$. Indiquer clairement les informations nécessaires sur l'allure de la courbe.
La courbe est continue entre 0 et 230. Ensuite, il y a un saut au point $x = 230$. La hauteur du saut est

$$\Pr(Y = 230) = \overline{F}_X(230).$$

Puis la courbe est horizontale, avec une valeur de 1.

   (c) **(4 points).** Calculer $VaR_{0.95}(Y)$ et $TVaR_{0.95}(Y)$ **en expliquant clairement les démarches.**
      i. On observe

$$F_X(230) = \lim_{x \to 230^-} F_Y(x) = 0.8997412 < 0.95 < 1.$$

Alors, on a

$$VaR_{0.95}(Y) = 230$$

      ii. Ensuite,

$$\begin{aligned} TVaR_{0.95}(Y) &= \frac{1}{1-0.95} E\left[Y \times 1_{\{Y>230\}}\right] + \frac{230}{1-0.95}\left(F_X(230) - 0.95\right) \\ &= 0 + \frac{230}{1-0.95}(1 - 0.95) \\ &= 230 \end{aligned}$$

9. **Solution:**
   (a) **(2 points). Notes**
   (b) **(2 points). Notes**
   (c) **(6 points).** Deuxième hypothèse additionnelle :

$$\pi_X(x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x},\ x \geq 0.$$

i. **(2 points).** En appliquant le Théorème de Leibniz, on observe

$$\overline{F}_X(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\pi_X(x)$$

On déduit que

$$F_X(x) = 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\pi_X(x)$$

On obtient

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}\right) \\
&= 1 + \left(-\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

ii. **(2 points).** Calculer $\kappa = F_X(5)$.
On obtient

$$\begin{aligned}
F_X(5) &= 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-5} - \frac{1}{2}5\mathrm{e}^{-5} \\
&= 0.938743659691
\end{aligned}$$

iii. **(2 points).** Utiliser la relation en (4.3) pour calculer $TVaR_\kappa(X)$.
Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) \\
&= 5 + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(5) \\
&= 5 + \frac{\mathrm{e}^{-5} + \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}5\mathrm{e}^{-5}}{1 - 0.938743659691} \\
&= 6.72501022078
\end{aligned}$$

10. **Solution :**
   (a) **(5 points).** Développer les expressions de $E[T]$, $Var(T)$ et $\mathcal{M}_T(t)$.
      i. On a

$$\begin{aligned} E[T] &= E[W_1 - W_2] \\ &= E[W_1] - E[W_2] \\ &= E[W] - E[W] \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var(T) &= Var(W_1 - W_2) \\ &= Var(W_1) + Var(W_2) \ \text{(indépendance)} \\ &= 2Var(W) \\ &= 2 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_T(t) &= E\left[e^{tT}\right] \\ &= E\left[e^{t(W_1 - W_2)}\right] \\ &= E\left[e^{tW_1}\right] E\left[e^{-tW_2}\right] \ \text{(indépendance)} \\ &= \frac{1}{1-t}\frac{1}{1+t} \\ &= \frac{1}{1-t^2} \end{aligned}$$

   (b) **(6 points).** On définit le rendement sur un titre par la v.a. $R = \mu + \sigma T$, avec $\mu = 0.1$ et $\sigma = 0.3$.
      i. **(2 points).** Calculer $\sqrt{Var(R)}$.
      On a

$$\begin{aligned} \sqrt{Var(R)} &= \sqrt{Var(\mu + \sigma T)} \\ &= \sigma\sqrt{Var(T)} \\ &= 0.3 \times \sqrt{2} \end{aligned}$$

      ii. **(2 points).** On définit la mesure de risque

$$\rho_\theta(R) = \frac{1}{\theta}\ln\left(\mathcal{M}_R(\theta)\right), \theta \in \left[0, \frac{1}{\sigma}\right).$$

Calculer $\rho_{0.5}(R)$.

On a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_R(t) &= E\left[e^{tR}\right]\\ &= E\left[e^{t(\mu+\sigma T)}\right]\\ &= e^{t\mu}E\left[e^{t\sigma R}\right]\\ &= \frac{e^{t\mu}}{1-\sigma^2t^2}.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\rho_\theta(R) &= \frac{1}{0.5}\ln\left(\mathcal{M}_R(\theta)\right)\\ &= \mu - \ln\left(1-\sigma^2t^2\right)\\ &= 0.1 - \ln\left(1-0.3^2\times 0.5^2\right)\\ &= 0.122756987123.\end{aligned}$$

iii. **(2 points).** De plus, on sait que

$$F_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & , \quad x<0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & , \quad x>0 \end{cases}.$$

On définit la v.a. $X = 1000 \times 1_{\{R\leq -0.15\}}$. Calculer $E[X]$.
On a

$$\begin{aligned}E[X] &= 1000\times E\left[1_{\{R<-0.15\}}\right]\\ &= 1000\times \Pr(R\leq -0.15)\\ &= 1000\times\frac{1}{2}e^{\left(\frac{-0.15-0.1}{0.3}\right)}\\ &= 217.299104254\end{aligned}$$

11. **Solution :** On a

$$\begin{aligned}
\Pr(25 < T_{50} \leq 50) &= \overline{F}_{T_{50}}(25) - \overline{F}_{T_{50}}(50) \\
&= \overline{F}^{(1)}_{T_{50}}(25) - \overline{F}^{(1)}_{T_{50}}(40)\,\overline{F}^{(1)}_{T_{90}}(10) \\
&= ...
\end{aligned}$$

Partie II

Théorie du risque

5
A2017 - Partiel Informatique

Université Laval	Examen final informatique
Faculté des Sciences et de Génie	Automne 2017
École d'actuariat	Date: Mercredi 18 octobre 2017

Act-3000 Théorie du risque
Professeur: Etienne Marceau

Nom de famille de l'étudiant	**Prénom de l'étudiant**	**Matricule**

Les instructions sont à lire par la surveillante ou le surveillant avant le début de l'examen :

– L'examen contient 11 questions et la durée est de 170 minutes.
– Le total des points est de **105 points (7 points boni)**.
– Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.
– Veuillez écrire vos réponses dans le présent questionnaire.
– Il est important d'écrire clairement les solutions, les réponses, les résultats numériques et les commentaires demandés dans les questions.
– Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.
– Veuillez retourner tous les documents à la fin de l'examen.

Questions	Points obtenus	Points
1	5	
2	12	
3	11	
4	12	
5	10	
6	6	
7	12	
8	14	
9	12	
10	6	
11	12	
Total	105	**(7 points boni)**

5.1 Notation

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ = ensemble des entiers naturels (incluant $\{0\}$)
2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2...\}$
3. $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
4. $\mathbb{R}^+$ = ensemble des nombres réels positifs (incluant $\{0\}$)
5. $i = \sqrt{-1}$ = unité imaginaire
6. $\mathbb{C} = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ = ensemble des nombres complexes
7. fmp = fonction de masses de probabilité
8. fgp = fonction génératrice des probabilités
9. fgm = fonction génératrice des moments
10. TLS = transformée de Laplace-Stieltjes
11. $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$

5.2 Questions

1. **(5 points)** Soit $\mathcal{CF}(F_1, F_2)$ la classe de Fréchet générée par les marginales discrètes F_1 et F_2. Les valeurs des fonctions de masse de probabilité f_1 et f_2 associées à F_1 et F_2 sont fournies dans le tableau suivant :

j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$	$f_1(x_{1,j})$	$f_2(x_{2,j})$
1	3	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	5	7	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	8	10	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	13	14	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

   Soit la paire de v.a. discrètes $\underline{X} = (X_1, X_2)$ avec $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$.
   Cela signifie que $F_{X_1} = F_1$ et $F_{X_2} = F_2$.
   On définit $S = X_1 + X_2$, avec la fonction de masse de probabilité $f_S(k) = \Pr(S = k)$, $k \in \mathbb{N}$.
   Soit $F_{\underline{X}}(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1; 0)$, $x_1, x_2 \geq 0$.
   Questions :

   (a) **(1 point).** Quelle est la relation de dépendance entre les v.a. X_1 and X_2 ?

   (b) **(1 point).** Soit $U \sim Unif(0, 1)$. Identifier la représentation des v.a. X_1 et X_2 en fonction de la v.a. U.

   (c) **(3 points).** Calculer toutes les valeurs non-nulles de f_S. Commenter.

2. **(12 points)** En vertu des règles mises en place par OSFI pour 2018, une compagnie d'assurance IRD modélise les risques suivants :
   - risque d'assurance : X_1, avec $F_{X_1}(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{600}\right)^{-2}}$, $x > 0$;
   - risque du marché : $X_2 = 10000 - 10000e^R$ où R est une v.a. continue obéissant à une loi **symétrique** par rapport à μ avec
   $$F_R(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}} & , \quad x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} & , \quad x > \mu \end{cases}$$
   et
   $$E[R] = \mu, \quad Var(R) = 2\sigma^2, \quad M_R(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mu t}}{1-\sigma^2 t^2} \quad \left(-\frac{1}{\sigma} < t < \frac{1}{\sigma}\right),$$
   où $\mu = 0.08$ et $\sigma = 0.2$;
   - risque de crédit : $X_3 = 110000 \times Y - 10000$, $Y \sim Gamma(5, 50)$;
   - risque opérationnel : $F_{X_4}(x) = 1 - q + qF_B(x)$ avec $q = 0.1$ et
   $$B \sim LNorm(\mu_B = \ln(10000) - 0.5, \sigma_B = 1).$$

   Pour simplifier ses calculs, l'actuaire suppose que les v.a. X_1, X_2, X_3 et X_4 sont comonotones.
   On définit $S = X_1 + ... + X_4$.
   Question :
   (a) **(4 points).** Démontrer $VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(X_1) + ... + VaR_\kappa(X_4)$, $\kappa \in (0,1)$ en justifiant clairement les étapes.
   (b) **(8 points).** Calculer $VaR_{0.95}(S)$.

3. **(11 points).** Soit les paires de v.a. continues positives $\underline{X} = (X_1, X_2)$ et $\underline{X}' = (X_1', X_2')$ avec

$$F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2) \text{ et } F_{\underline{X}'} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2),$$

où $\mathcal{CF}(F_1, F_2)$ est la classe de Fréchet générée par les marginales F_1 et F_2

Note : $F_{X_1} = F_{X_1'} = F_1$ et $F_{X_2} = F_{X_2'} = F_2$. De plus, $E[X_i^m] < \infty$, pour $m = 1, 2$.

Proposition 5.1 *Si* $\overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) \leq \overline{F}_{\underline{X}'}(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, *alors, on a*

$$Cov(X_1, X_2) \leq Cov(X_1', X_2') \quad et \quad \rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P(X_1', X_2').$$

Questions :

(a) **(2 points).** Démontrer la **Proposition 6.1**.

(b) **(9 points).** On considère trois v.a. indépendantes de loi exponentielle

$$Y_0 \sim Exp(\lambda_0), \quad Y_1 \sim Exp(\beta_1 - \lambda_0), \quad \text{et} \quad Y_2 \sim Exp(\beta_2 - \lambda_0), \quad 0 \leq \lambda_0 \leq \min(\beta_1, \beta_2).$$

On définit les v.a. $X_1 = \min(Y_1; Y_0)$ et $X_2 = \min(Y_2; Y_0)$.

Convention : Si $\lambda_0 = 0$, alors $\Pr(Y_0 = 0) = 1$.

i. **(2 points).** Pour $i = 1, 2$, démontrer que $X_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1, 2$.

ii. **(2 points).** Démontrer que la fonction de survie de (X_1, X_2) est donnée par

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} = \overline{F}_{X_1}(x_1)\,\overline{F}_{X_2}(x_2)\,\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)}. \tag{5.1}$$

Notation : on convient que (X_1, X_2) obéit à une loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin, c.-à-d.,

$$(X_1, X_2) \sim ExpBMO(\beta_1, \beta_2, \lambda_0),$$

avec $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$, $\lambda_0 \leq \min(\beta_1, \beta_2)$ = paramètre de dépendance.

iii. **(1 point).** Soit $\lambda_0 = 0$. Utiliser l'expression de $\overline{F}_{X_1,X_2}$ en **(6.1)** pour démontrer que les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes.

iv. **(2 points).** Soit $\underline{X} = (X_1, X_2)$ et $\underline{X}' = (X_1', X_2')$ où

$$(X_1, X_2) \sim ExpBMO(\beta_1, \beta_2, \lambda_0) \quad \text{et} \quad (X_1', X_2') \sim ExpBMO\left(\beta_1, \beta_2, \lambda_0'\right),$$

avec $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_0' \leq \min(\beta_1, \beta_2)$. Sans développer les expressions analytiques pour la covariance et le coefficient de Pearson pour cette loi bivariée, utiliser la **Proposition 6.1** et l'expression de $\overline{F}_{X_1,X_2}$ en **(6.1)** pour démontrer que

$$Cov\,(X_1, X_2) \leq Cov\,(X_1', X_2') \quad \text{et} \quad \rho_P\,(X_1, X_2) \leq \rho_P\,(X_1', X_2')\,.$$

v. **(2 points).** Selon 3(b)iii et 3(b)iv, est-ce que cette loi bivariée peut introduire une corrélation négative entre X_1 et X_2 ? Justifier brièvement.

4. **(12 points).** Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) qui obéit à une loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin, c.-à-d.,

$$(X_1, X_2) \sim ExpBMO\left(\beta_1, \beta_2, \lambda_0\right),$$

avec

$$\overline{F}_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right) = \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} = \overline{F}_{X_1}\left(x_1\right)\overline{F}_{X_2}\left(x_2\right)\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)}.$$

où $\beta > 0, \beta_2 > 0$, $\lambda_0 \leq \min\left(\beta_1, \beta_2\right)$ = paramètre de dépendance.
Hypothèses : $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $F_{X_1}(1) = F_{X_2}(1) = 0.02$ et $\lambda_0 = \frac{1}{2}\beta$.
Les pertes pour deux titres de crédit d'un portefeuille de la Société ABC sont définies par les v.a. L_1 et L_2 avec

$$L_i = 100\,(1.04) \times I_i - 100 \times 0.04,$$

où

$$I_i = 1_{\{X_i \leq 1\}},\ i = 1, 2.$$

La perte totale pour le portefeuille est

$$S = L_1 + L_2 = aN + b. \tag{5.2}$$

Questions :

(a) **(2 points).** Développer la fgp de I_i et indiquer la loi univariée de I_i, $i = 1, 2$.

(b) **(4 points).** Développer la fgp conjointe de (I_1, I_2) et indiquer clairement les valeurs non-nulles pouvant être prises par la fmp conjointe de (I_1, I_2).

(c) **(2 points).** Développer la fgp de N et fournir les valeurs de sa fonction masse de probabilité.

(d) **(4 points).** Indiquer les valeurs de a et b dans (6.2). Calculer $E[S]$ et $\Pr(S > 0)$.

5. **(10 points).** Soit un couple de v.a. (X_1, X_2), $X_1, X_2 \in \{0, 1, 2\}$, dont la fgp conjointe est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= 0.4 + 0.3 \times (0.9 + 0.1t_1)^2 \\ &\quad +0.2 \times (0.8 + 0.2t_2)^2 \\ &\quad +0.1 \times (0.9 + 0.1t_1)^2 \times (0.8 + 0.2t_2)^2 \,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Questions :

(a) **(2 points).** Identifier l'expression $\mathcal{P}_{X_1}(t_1)$ et utiliser cette expression pour calculer toutes les valeurs de $\Pr(X_1 = k)$, $k = 0, 1, 2$.

(b) **(2 points).** Identifier l'expression $\mathcal{P}_{X_2}(t_2)$ et utiliser cette expression pour calculer toutes les valeurs de $\Pr(X_2 = k)$, $k = 0, 1, 2$.

(c) **(6 points).** On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

i. Développer l'expression de

$$\mathcal{P}_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k t^k. \tag{5.4}$$

ii. Utiliser l'expression obtenue en (6.4) pour calculer toutes les valeurs non-nulles de $\Pr(S = k)$.

6. **(6 points). Démonstration de l'algorithme de Panjer.**
Soit la v.a. $X \sim PoisComp\,(\lambda, F_B)$ où $X = \sum_{k=1}^{M} B_k$, $M \sim Pois(\lambda)$ et $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$, avec $B_k \sim B$, $k \in \mathbb{N}^+$.
La v.a. B est une v.a. discrète définie sur $\mathbb{N}$ avec une fmp f_B et une fgp $\mathcal{P}_B\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_B\,(k)\, t^k$.
Les fgp des v.a. X et M sont $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{P}_M$ où $\mathcal{P}_M\,(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.
Relations pertinentes pour la loi de Poisson :

$$f_M\,(k) = \tfrac{\lambda}{k} f_M\,(k-1) \quad , k \in \mathbb{N}^+, \quad \text{avec } f_M\,(0) = \mathrm{e}^{-\lambda},$$

et

$$\mathcal{P}'_M\,(t) = \lambda \mathcal{P}_M\,(t) \quad , \text{où } \mathcal{P}'_M\,(t) = \tfrac{\mathrm{d}\ \mathcal{P}_M(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{5.5}$$

Algorithme de Panjer :

$$\begin{array}{lcll} \text{(1) point de départ} & : & f_X(0) = \mathrm{e}^{\lambda(f_B(0)-1)} & ; \\ \text{(2) relation récursive} & : & f_X(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \times f_B(j) \times f_X((k-j)) \quad , \text{pour } k \in \mathbb{N}^+ & . \end{array} \tag{5.6}$$

Questions :

(a) **(1 point).** Identifier l'expression de la fgp de la v.a. X où

$$\mathcal{P}_X\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X\,(k)\, t^k \tag{5.7}$$

pour la loi Poisson composée.

(b) **(1 point).** À partir de l'expression trouvée (6a) et de (6.7), démontrer le point de départ de l'algorithme en (6.6).

(c) **(4 points).** À partir de l'expression trouvée (6a), de (6.7) et de (6.5), démontrer la relation récursive de l'algorithme en (6.6). Suggestion : identifier clairement les étapes de votre démarches (développer la dérivée, etc.)

7. **(12 points).** Soit un couple de v.a. continues antimonotones continues strictement positives (X_1, X_2) avec

$$\overline{F}_{X_1}(x) = \overline{F}_{X_2}(x) = \overline{F}(x),$$

où $\overline{F}(x)$ est une fonction convexe.
On rappelle les informations suivantes.
Définition 5.2 *Une fonction $\varphi(u)$ définie pour $u \in [a, b]$ est dite convexe si*

$$\varphi((1-t) \times u_1 + t \times u_2) \leq (1-t) \times \varphi(u_1) + t \times \varphi(u_2) \tag{5.8}$$

pour $t \in [0, 1]$ et $a \leq u_1 < u_2 \leq b$.
Lemme 5.3 *Soit les fonctions convexes $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ définies pour $u \in [a, b]$. Alors, la fonction $\zeta(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$ est convexe pour $u \in [a, b]$.*
Lemme 5.4 *Soit la fonction convexe $\varphi(u)$ définie pour $u \in [a, b]$, avec $-\infty < a < b < \infty$. Alors, $\zeta(u) = \varphi(b-u)$ est convexe pour $u \in [a, b]$.*
On définit $S = X_1 + X_2$.
Questions :
   (a) **(2 points).** Soit une v.a. $U \sim Unif(0, 1)$. Démontrer que $S = \varphi(U)$, où $\varphi(u)$ est une fonction convexe.
   (b) **(4 points). Démontrer que**

$$VaR_\kappa(S) = VaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X_1) + VaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X_2), \ \kappa \in (0, 1),$$

   et

$$TVaR_\kappa(S) = LTVaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X_1) + TVaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X_2), \ \kappa \in (0, 1),$$

   où

$$LTVaR_\alpha(S) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_u(S)\, du, \ \alpha \in (0, 1).$$

   (c) **(6 points).** Soit

$$\overline{F}_{X_1}(x) = \overline{F}_{X_2}(x) = \overline{F}(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3, \ x \geq 0.$$

      i. Démontrer que la fonction de survie $\overline{F}$ est convexe.
      ii. Calculer $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.99$.

8. **(14 points).** Soient les v.a. indépendantes

$$Z_0 \sim Gamma\,(\gamma, 1)\,, \quad Z_1 \sim Gamma\,(\alpha - \gamma, 1)\,, \quad ... \quad Z_n \sim Gamma\,(\alpha - \gamma, 1)\,,$$

où $0 < \gamma < \alpha$.
Soit un portefeuille de n contrats d'assurance habitation dont les propriétés (semblables) assurés se trouvent dans une région exposée (exposition comparable) aux ouragans.
Les coûts individuels pour les contrats sont définis par

$$X_1 = \frac{1}{\beta}\,(Z_0 + Z_1)\,, \,..., \, X_n = \frac{1}{\beta}\,(Z_0 + Z_n)\,,$$

où la v.a. Z_0 est associée aux coûts résultant des ouragans.
Les coûts par contrat sont définis par la v.a. $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
Soit la v.a. V_n où $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\beta}$, $n \in \mathbb{N}^{+}$.
Définition 5.5 *Soit une suite de v.a. positives* $\{C_n, n \in \mathbb{N}\}$ *et une v.a.* Y*. Alors, la suite* $\{C_n, n \in \mathbb{N}\}$ *converge en distribution vers la v.a.* Y *si* $\lim_{n\to\infty} F_{C_n}(x) = F_Y(x)$, $x \geq 0$, *c.-à-d.,* $C_n \overset{\mathcal{D}}{\to} Y$, *quand* $n \to \infty$.
Remarque 5.6 *La convergence en distribution est utile pour justifier l'approximation de* C_n *par* Y *quand* n *est grand.*
Théorème 5.7 *Soit une suite de v.a. positives* $\{C_n, n \in \mathbb{N}\}$ *et une v.a.* Y*. Alors,* $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{C_n}(t) = \mathcal{L}_Y(t)$ *si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} F_{C_n}(x) = F_Y(x)$, $x \geq 0$.
Lemme 5.8 $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n\times t} = \mathrm{e}^{x\times t}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n\times t} = \mathrm{e}^{-x\times t}$, $x, t > 0$.
Questions :
   (a) **(2 points).** Développer l'expression de la TLS de X_i, $i = 1, 2, ..., n$. Identifier les lois univariées de X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ et spécifier clairement les paramètres de ces lois.
   (b) **(2 points).** Identifier la TLS de V_n et celle de W_n.
   (c) **(2 points).** D'après le résultat en (8b), démontrer que

$$W_n = V_n + \frac{Z_0}{\beta} \tag{5.9}$$

   où $\frac{Z_0}{\beta}$ et V_n sont indépendantes avec $E\,[V_n] = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$.
   (d) **(3 points).** Soit la v.a. $U = \frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{Z_0}{\beta}$. À partir de (6.13), du Théorème 6.7 et du Lemme 6.8, démontrer que $W_n \overset{\mathcal{D}}{\to} U$, quand $n \to \infty$.
   (e) **(2 points).** Développer l'expression de $TVaR_k\,(U)$ en fonction de $TVaR_\kappa\,(Z_0)$.

(f) **(3 points).** Hypothèses **:** $\alpha = 2.5$, $\gamma = 1$, $\beta = \frac{1}{100}$, $\kappa = 0.95$. En supposant un nombre n de contrats très élevés, utiliser le résultat limite en (8d) pour calculer une approximation du benefice $B_{\kappa,n}$ de mutualisation par contrat défini par

$$B_{\kappa,n} = TVaR_\kappa\left(X_1\right) - TVaR_\kappa\left(W_n\right).$$

9. **(12 points).** Soit $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur de v.a. obéissant à une loi normale multivariée dont la fgm multivariée est donnée par

$$M_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = E\left[\mathrm{e}^{t_1 X_1} ... \mathrm{e}^{t_n X_n}\right] = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n \mu_i t_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j t_i t_j},$$

où

$$\mu_i = E[X_i] \text{ et } \sigma_i^2 = Var(X_i) \ (i = 1, 2, ..., n)$$

et

$$\rho_{i,j} = \rho_P(X_i, X_j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i) Var(X_j)}},$$

pour $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.
Hypothèses : $n = 3$ et

i	μ_i	σ_i
1	5	1
2	10	2
3	15	3

On définit $S = \sum_{i=1}^n X_i$.
Questions :

(a) **(5 points).** Hypothèse : $\rho_{1,2} = -1$, $\rho_{1,3} = -0.6$, et $\rho_{2,3} = -0.5$
   i. **(1.5 points).** Développer la fgm de S pour démontrer que $S \sim Norm\left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$.
   ii. **(1.5 points).** Calculer les valeurs de μ_S et σ_S^2.
   iii. **(2 points).** Calculer $VaR_{0.9999}(S)$ et $TVaR_{0.9999}(S)$.

(b) **(4 points).** Soit ζ_κ une mesure avec $\kappa \in (0, 1)$. Pour $\kappa \in (0, 1)$, l'Index du Bénéfice de Mutualisation est défini par

$$IbM_\kappa = 1 - \frac{\zeta_\kappa(S) - E[S]}{\sum_{i=1}^3 (\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i])} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

   i. **(1 point).** Quelle propriété ζ_k doit-elle satisfaire pour que $\varphi_1 \geq 0$?
   ii. **(1 point).** Quelle propriété ζ_k doit-elle satisfaire pour que chacun des 2 termes de la somme φ_2 soit positif ?
   iii. **(1 point).** Choisir la seule mesure parmi la VaR et la TVaR qui satisfait (i) et (ii) ; puis, calculer $IbM_{0.9999}$.
   iv. **(1 point).** Commenter brièvement le résultat.

(c) **(3 points).** Hypothèse : $\rho_{1,2} = -\frac{7}{11}$, $\rho_{1,3} = -\frac{7}{11}$, et $\rho_{2,3} = -\frac{7}{11}$.
   i. **(1 point).** Développer la fgm de S et identifier la loi de S.
   ii. **(1 point).** Avec la mesure choisie en (9(b)iii), calculer $IbM_{0.9999}$.
   iii. **(1 point).** Commenter brièvement le résultat.

10. **(6 points).** Soit la v.a.

$$X = \begin{cases} Y & , I = 1 \\ 0 & , I = 0 \end{cases},$$

où

$$I \sim Bern\,(0.4) \text{ et } Y \sim BNegComp\,(r, q; F_B)$$

sont des v.a. indépendantes avec

$r = 0.2$	$q = \frac{1}{2}$
$\Pr(B = 1000k) = \gamma\,(1-\gamma)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^+$	$\gamma = \frac{1}{4}$

On dispose des valeurs suivantes :

k	0	1	2	3
$f_Y\,(1000k)$	???	0.02176376	0.01795511	???

Questions :

(a) **(1 point).** Indiquer l'expression de $f_X\,(1000k)$, $k \in \mathbb{N}$.

(b) **(2 points).** Calculer $f_Y\,(0)$ et $f_X\,(0)$.

(c) **(2 points).** Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_Y\,(3000)$

(d) **(1 point).** Calculer $f_X\,(3000)$.

11. **(12 points).** Soient les v.a. indépendantes

$$Y_i \sim Tweedie\left(\tau_i, \gamma_i, 1\right) \quad , \quad i = 0, 1, 2,$$

avec

$$\mathcal{M}_{Y_i}\left(t\right) = E\left[\mathrm{e}^{tY_i}\right] = \mathrm{e}^{\tau_i\left(\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\gamma_i}-1\right)}, \text{ pour } i = 0, 1, 2$$

Soit le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2)$ où

$$X_1 = \frac{1}{\beta_1}\left(Y_1 + Y_0\right) \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1}{\beta_2}\left(Y_2 + Y_0\right) \quad .$$

Hypothèses :
- $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{5}$; $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 0.5$, $\tau_0 = 0.5$
- $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 2$, $\gamma_0 = 2$.

On définit $S = X_1 + X_2$.

Définition 5.9 *Soit la v.a. Y dont la fgm $\mathcal{M}_Y$ existe. Selon le principe exponentiel de prime, la prime majorée est* $\Pi_\kappa\left(Y\right) = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\mathcal{M}_Y\left(\kappa\right)\right)$.

Questions :

(a) **(4 points).**
   i. Développer l'expression de la fgm $\mathcal{M}_{X_i}\left(t_i\right)$ de la X_i, $i = 1, 2$.
   ii. Utiliser $\mathcal{M}_{X_i}\left(t_i\right)$ pour identifier la distribution univariée de la v.a. X_i, $i = 1, 2$. Justifier votre démarche. Spécifier clairement les paramètres des 2 distributions univariées.

(b) **(2 points).** Développer l'expression de la fgm multivariée de $\underline{X}$, définie par

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}\left(t_1, t_2\right) = E\left[\mathrm{e}^{t_1X_1}\mathrm{e}^{t_2X_2}\right].$$

(c) **(2 points).** Développer l'expression de la fgm de S définie par $\mathcal{M}_S\left(t\right)$. À partir de $\mathcal{M}_S\left(t\right)$, identifier la distribution de S en spécifiant clairement les paramètres de la distribution.

(d) **(4 points).** On fixe $\kappa = 0.05$. Calculer $\Pi_\kappa\left(S\right)$ et $E\left[S\right]$. Comparer les deux valeurs.

FIN

5.3 Solutions

1. **(5 points)**
   (a) **(1 point)** X_1 et X_2 sont antimonotones.
   (b) **(1 point)**
   - $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U)$
   - $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U)$

   (c) **(3 points)**
$$S = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(1-U)$$
   On trouve donc que $S \in \{15, 17\}$ et $f_S(15) = f_S(17) = 0.5$.

TABLE 5.1. Calcul des valeurs de S

u	$Pr(u \in U)$	$F_{X_1}^{-1}(u)$	$F_{X_2}^{-1}(1-u)$	S
$]0, 0.25]$	$\frac{1}{4}$	3	14	17
$]0.25, 0.5]$	$\frac{1}{4}$	5	10	15
$]0.5, 0.75]$	$\frac{1}{4}$	8	7	15
$]0.75, 1]$	$\frac{1}{4}$	13	4	17

- 1 point pour les valeurs de s_j
- 1 point pour le calcul des $Pr(S = s_j)$
- 1 point pour les valeurs de f_S

2. **(12 points)**
   (a) **(4 points).** Démontrer $VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(X_1) + ... + VaR_\kappa(X_4)$, $\kappa \in (0,1)$ en justifiant clairement les étapes.
   - (1 point) Pour des variables aléatoires comonotones, on a

$$\begin{aligned} S &= F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + F_{X_3}^{-1}(U) + F_{X_4}^{-1}(U) \\ &= \varphi(U), \end{aligned}$$

     où $\varphi(U)$ est une fonction croissante de U.
   - (1 point) Alors

$$VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(\varphi(U))$$

     et selon la proposition 11.2.1 de l'annèxe,

$$VaR_\kappa(\varphi(U)) = \varphi(VaR_\kappa(U)),$$

     avec $VaR_\kappa(U) = \kappa$.
   - (2 points) On conclut donc que

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) = \varphi(\kappa) &= F_{X_1}^{-1}(\kappa) + F_{X_2}^{-1}(\kappa) + F_{X_3}^{-1}(\kappa) + F_{X_4}^{-1}(\kappa) \\ &= VaR_\kappa(X_1) + VaR_\kappa(X_2) + VaR_\kappa(X_3) + VaR_\kappa(X_4) \end{aligned}$$

   (b) **(8 points).** Calculer $VaR_{0.95}(S)$**.**
   - **(1.75 points).** VaR de X_1 :
     - L'expression de $F_{X_1}^{-1}$ est donnée par ...
     - On déduit que

$$\begin{aligned} 0.95 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{VaR_{0.95}(X_1)}{600}\right)^{-2}} \\ 0.95^{-1} &= 1 + \left(\frac{VaR_{0.95}(X_1)}{600}\right)^{-2} \\ 0.95^{-1} - 1 &= \left(\frac{VaR_{0.95}(X_1)}{600}\right)^{-2} \\ VaR_{0.95}(X_1) &= 600\left(0.95^{-1} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2615.3393661244054 \end{aligned}$$

   - **(1.75 points).** VaR de X_2 :
     - On a

$$\begin{aligned} VaR_{0.95}(X_2) &= VaR_{0.95}(10000 - 10000e^{R}) \\ &= 10000 - 10000e^{VaR_{1-0.95}(R)} \end{aligned}$$

– L'expression de F_R^{-1} est donnée par ...
– Ensuite

$$\begin{aligned}0.05 &= \frac{1}{2}e^{\frac{VaR_{0.05}(R)-\mu}{\sigma}}\\ \ln(2\times 0.05) &= \frac{VaR_{0.05}(R)-\mu}{\sigma}\\ \sigma\ln(2\times 0.05) &= VaR_{0.05}(R)-\mu\\ VaR_{0.05}(R) &= \mu+\sigma\ln(2\times 0.05)\\ &= -0.3805170185988091\end{aligned}$$

– On obtient

$$\begin{aligned}VaR_{0.95}(X_2) &= 10000-10000e^{-0.3805170185988091}\\ &= 3164.9206847007272\end{aligned}$$

- **(1.75 points).** VaR de X_3 :
  – On a

$$\begin{aligned}VaR_{0.95}(X_3) &= VaR_{0.95}(110000Y-10000)\\ &= 110000\times VaR_{0.95}(Y)-10000\end{aligned}$$

  $Y\sim Gamma(5,50)$
  – $Y=\frac{1}{50}X$, où $X\sim Gamma(5,1)$
  – $VaR_\kappa(Y)=\frac{1}{50}VaR_\kappa(X)$
  – On regarde dans l'annexe 16.2 pour les quantiles de $X\sim Gamma(5,1)$
  – $VaR_{0.95}(X)=9.1535$
  – $VaR_{0.95}(Y)=\frac{1}{50}\times 9.1535=0.18307$
  – $VaR_{0.95}(X_3)=110000\times 0.18307-10000=10137.7$
- **(1.75 points).** VaR de X_4 :
  – L'expression de F_{X_4} est ...

– On obtient ...

$$
\begin{aligned}
0.95 &= F_{X_4}(VaR_{0.95}(X_4)) \\
0.95 &= 1 - q + qF_B(VaR_{0.95}(X_4)) \\
\frac{0.95 + q - 1}{q} &= F_B(VaR_{0.95}(X_4)) \\
VaR_{0.95}(X_4) &= F_B^{-1}\left(\frac{0.95 + q - 1}{q}\right) \\
&= \exp\left(\mu_B + \sigma_B VaR_{\frac{0.95+q-1}{q}}(Z)\right) \\
&= \exp\left(\mu_B + \sigma_B VaR_{0.5}(Z)\right) \\
&= \exp\left(\mu_B\right) \\
&= \exp\left(\ln(10000) - 0.5\right) \\
&= 10000\exp(-0.5) \\
&= 6065.307
\end{aligned}
$$

- **(1 points).** VaR de S :

  $VaR_{0.95}(S) = 2615.34+3164.92+10137.7+6065.307 = 21983.27$

3. **(11 points)**
   (a) **(2 points).** Démontrer la **Proposition 6.1**.

$$\overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) \leq \overline{F}_{\underline{X'}}(x_1, x_2)$$
$$\int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X'}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$
$$E[X_1 X_2] \leq E[X_1' X_2']$$
$$E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] \leq E[X_1' X_2'] - E[X_1']E[X_2']$$
$$Cov(X_1, X_2) \leq Cov(X_1', X_2')$$
$$\frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}} \leq \frac{Cov(X_1', X_2')}{\sqrt{Var(X_1')}\sqrt{Var(X_2')}}$$
$$\rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P(X_1', X_2')$$

   (b) **(9 points).**
      i. **(2 points).** Pour $i = 1, 2$, démontrer que $X_i \sim Exp\,(\beta_i)$, $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} Pr(X_i > x) &= Pr(\min(Y_i; Y_0) > x) \\ &= Pr(Y_i > x \cap Y_0 > x) \\ &= Pr(Y_i > x) Pr(Y_0 > x) \\ &= \exp(-(\beta_i - \lambda_0)x) \exp(-\lambda_0 x) \\ &= \exp(-\beta_i x + \lambda_0 x - \lambda_0 x) \\ &= \exp(-\beta_i x), \end{aligned}$$

      ce qui correspond à la fonction de survie d'une variable aléatoire exponentielle, i.e. $X_i \sim Exp(\beta_i)$.

      ii. **(2 points).** Démontrer que la fonction de survie de (X_1, X_2) est donnée par ..

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\ &= Pr(\min(Y_1; Y_0) > x_1, \min(Y_2; Y_0) > x_2) \\ &= Pr(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, Y_0 > \max(x_1; x_2)) \\ &= e^{-(\beta_1 - \lambda_0)x_1} e^{-(\beta_2 - \lambda_0)x_2} e^{-\lambda_0 \max(x_1; x_2)} \\ &= e^{-(\beta_1 - \lambda_0)x_1} e^{-(\beta_2 - \lambda_0)x_2} e^{-\lambda_0 (x_1 + x_2 - \min(x_1; x_2))} \\ &= e^{-\beta_1 x_1} e^{-\beta_2 x_2} e^{-\lambda_0 \min(x_1; x_2)} \\ &= \overline{F}_{X_1}(x_1) \overline{F}_{X_2}(x_2) e^{\lambda_0 \min(x_1; x_2)} \end{aligned}$$

      iii. **(1 point).** Soit $\lambda_0 = 0$. Utiliser l'expression de $\overline{F}_{X_1,X_2}$ en **(6.1)** pour démontrer que les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes.

$$\overline{F}_{X_1}(x_1)\overline{F}_{X_2}(x_2)e^{-(0)\min(x_1;x_2)} = \overline{F}_{X_1}(x_1)\overline{F}_{X_2}(x_2).$$

On conclut que les variables aléatoires sont indépendantes car la fonction de survie bivariée est le produit des deux fonctions de survies.

iv. **(2 points).**
- **(1 point).** Soit $\underline{X} = (X_1, X_2)$ et $\underline{X}' = (X_1', X_2')$ ...

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &\leq \lambda_0' \\
\lambda_0 \min(x_1; x_2) &\leq \lambda_0' \min(x_1; x_2) \\
e^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} &\leq e^{\lambda_0' \min(x_1;x_2)} \\
\overline{F}_{X_1}(x_1)\overline{F}_{X_2}(x_2)e^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} &\leq \overline{F}_{X_1}(x_1)\overline{F}_{X_2}(x_2)e^{\lambda_0' \min(x_1;x_2)} \\
\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &\leq \overline{F}_{X_1',X_2'}(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

- **(1 point).** On applique la proposition 1 et on obtient

$$\begin{aligned}
&Cov(X_1, X_2) \leq Cov(X_1', X_2') \text{ et} \\
&\rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P(X_1', X_2').
\end{aligned}$$

v. **(2 points).** Est-ce que cette loi bivariée peut introduire une corrélation négative entre X_1 et X_2 ? Justifier brièvement.
- De iii), on sait que si $\lambda_0 = 0$, les variables X_1 et X_2 sont indépendantes et $\rho_P(X_1, X_2) = 0$.
- De iv), on sait que si $\lambda_0 \leq \lambda_0'$, alors $\rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P(X_1', X_2')$.
- Vu que $0 \leq \lambda_0$, $0 \leq \rho_P(X_1, X_2)$
- On conclut que la distribution exponentielle bivariée de Marshall-Olkin est une distribution qui permet d'introduire de la dépendance positive entre deux variables aléatoire exponentielles.

4. **(12 points)**
   (a) **(2 points).** Développer la fgp de I_i et indiquer la loi univariée de I_i, $i = 1, 2$.
   On a

$$\begin{aligned} P_{I_i}(t) &= E\left[t^{I_i}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} tPr(I_i = k) \\ &= Pr(I_i = 0) + Pr(I_i = 0)t \\ &= \overline{F}_{X_i}(0.02) +_{X_i} (0.02)t \\ &= 0.98 + 0.02t. \end{aligned}$$

   On déduit que $I_i \sim Bern(0.02)$.
   (b) **(4 points).** Développer la fgp conjointe de (I_1, I_2) et indiquer clairement les valeurs non-nulles pouvant être prises par la fmp conjointe de (I_1, I_2).
   - On cherche d'abord le paramètre de dépendance.

$$\begin{aligned} F_{X_1}(1) &= 0.02 \\ 1 - e^{-\beta} &= 0.02 \\ \beta &= -\ln(1 - 0.02) \\ \beta &= 0.02020271 \\ \lambda_0 = \frac{\beta}{2} &= \frac{0.02020271}{2} = 0.01010135. \end{aligned}$$

   - Ensuite, on a

$$\begin{aligned} P_{I_1,I_2}(t_1, t_2) = E&\left[t_1^{I_1} t_2^{I_2}\right] \\ &= \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0)\, t_1^0 t_2^0 + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0)\, t_1^1 t_2^0 \\ &+ \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1)\, t_1^0 t_2^1 + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1)\, t_1^1 t_2^1 \end{aligned}$$

   - On calcule $\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0)$:

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) &= \Pr(X_1 > 1, X_2 > 1) \\ &= \overline{F}_{X_1,X_2}(1, 1) \\ &= \overline{F}_{X_1}(1)\overline{F}_{X_2}(1)e^{0.01010135\times 1} \\ &= 0.98 \times 0.98 \times e^{0.01010135} \\ &= 0.9701505. \end{aligned}$$

- On calcule $\Pr\left(I_1=1, I_2=1\right)$:

$$\begin{aligned}
\Pr\left(I_1=1, I_2=1\right) &= \Pr(X_1 \leq 1, X_2 \leq 1) \\
&= F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\
&= F_{X_1}(1) + F_{X_2}(1) + \overline{F}_{X_1,X_2}(1,1) - 1 \\
&= 0.02 + 0.02 + 0.9701505 - 1 \\
&= 0.0101505
\end{aligned}$$

- On calcule $\Pr\left(I_1=1, I_2=0\right)$:

$$\begin{aligned}
\Pr(I_1=1, I_2=0) &= \Pr(X_1 \leq 1, X_2 > 1) \\
&= F_{X_1}(1) - F_{X_1,X_2}(1,1) \\
&= 0.02 - 0.0101505 \\
&= 0.0098495
\end{aligned}$$

- On calcule $\Pr\left(I_1=0, I_2=1\right)$:

$$\begin{aligned}
\Pr\left(I_1=0, I_2=1\right) &= Pr(X_1 > 1, X_2 \leq 1) \\
&= F_{X_2}(1) - F_{X_1,X_2}(1,1) \\
&= 0.02 - 0.0101505 \\
&= 0.0098495
\end{aligned}$$

- On remplace et on obtient

$$P_{I_1,I_2}(t_1,t_2) = 0.9701505 + 0.0098495 t_1 + 0.0098495 t_2 + 0.0101505 t_1 t_2.$$

(c) **(2 points).** Développer la fgp de N et fournir les valeurs de sa fonction masse de probabilité.
On a observe que

$$\begin{aligned}
S &= L_1 + L_2 \\
&= 100 \times (1.04) I_1 - 0.04 \times 100 + 100 \times (1.04) I_2 - 0.04 \times 100 \\
&= 100 \times (1.04)(I_1 + I_2) - 2 \times 0.04 \times 100 \\
&= 104(I_1 + I_2) - 8 \\
&= 104N - 8
\end{aligned}$$

On conclut que $N = I_1 + I_2$.

La fgp de N est

$$\begin{aligned}
P_N(t) &= E\left[t^N\right] \\
&= E\left[t^{I_1+I_2}\right] \\
&= E\left[t^{I_1}t^{I_2}\right] \\
&= P_{I_1,I_2}(t,t) \\
&= 0.9701505 + 0.0098495t + 0.0098495t + 0.0101505t^2 \\
&= 0.9701505 + 0.019699t + 0.0101505t^2.
\end{aligned}$$

On trouve donc les valeurs suivantes des fonctions de masses de probabilités pour N et S :

$$f_N(k) = \begin{cases} 0.9701505, & \text{si } k=0 \\ 0.0196990, & \text{si } k=1 \\ 0.0101505, & \text{si } k=2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_S(k) = \begin{cases} 0.9701505, & \text{si } k=-8 \\ 0.0196990, & \text{si } k=96 \\ 0.0101505, & \text{si } k=200 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d) **(4 points).** Indiquer les valeurs de a et b dans (6.2). Calculer $E\left[S\right]$ et $\Pr\left(S > 0\right)$.

- On remarque que $S = 104N - 8 = aN + b$, où $a = 104$ et $b = -8$.
- $E[N] = 0 \times 0.9701505 + 1 \times 0.0196990 + 2 \times 0.0101505 = 0.04$ (option #1)
- $E[N] = E[I_1 + I_2] = E[I_1] + E[I_2] = 0.02 + 0.02 = 0.04$ (option #2)
- $E[S] = E[104N - 8] = 104E[N] - 8 = -3.84$
- $\Pr(S > 0) = \Pr(S = 96) + \Pr(S = 200) = 0.0196990 + 0.0101505 = 0.0298495$.

5. **(10 points)**. On a

$$\begin{aligned} P_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= 0.4+0.3\times(0.9+0.1t_1)^2+0.2\times(0.8+0.2t_2)^2 \\ &\quad +0.1\times(0.9+0.1t_1)^2\times(0.8+0.2t_2)^2 \end{aligned}$$

(a) **(2 points).** Identifier l'expression $\mathcal{P}_{X_1}(t_1)$ et utiliser cette expression pour calculer toutes les valeurs de $\Pr(X_1=k)$, $k=0,1,2$.

- fgp de X_1 :

$$\begin{aligned} P_{X_1}(t_1) &= P_{X_1,X_2}(t_1,1) \\ &= 0.4+0.3\times(0.9+0.1t_1)^2+0.2\times(0.8+0.2\times 1)^2 \\ &+0.1\times(0.9+0.1t_1)^2\times(0.8+0.2\times 1)^2 \\ &= 0.6+0.4\times(0.9+0.1t_1)^2 \\ &= 0.6+0.4\times 0.81+0.4\times 0.18t_1+0.4\times 0.01t_1^2 \\ &= 0.924+0.072t_1+0.004t_1^2 \end{aligned}$$

- On déduit que les valeurs suivantes :

k	0	1	2
$\Pr(X_1=k)$	0.924	0.072	0.004

(b) **(2 points).** Identifier l'expression $\mathcal{P}_{X_2}(t_2)$ et utiliser cette expression pour calculer toutes les valeurs de $\Pr(X_2=k)$, $k=0,1,2$.

- fgp de X_1 :

$$\begin{aligned} P_{X_1}(t_1) &= P_{X_1,X_2}(1,t_2) \\ &= 0.4+0.3\times(0.9+0.1\times 1)^2+0.2\times(0.8+0.2\times t_2)^2 \\ &+0.1\times(0.9+0.1\times 1)^2\times(0.8+0.2\times t_2)^2 \\ &= 0.7+0.3\times(0.8+0.2t_2)^2 \\ &= 0.6+0.3\times 0.64+0.3\times 0.32t_1+0.3\times 0.04t_1^2 \\ &= 0.792\ +0.096t_1+0.012t_1^2 \end{aligned}$$

- On déduit que les valeurs suivantes :

k	0	1	2
$\Pr(X_1=k)$	0.792	0.096	0.012

(c) **(6 points).** On définit la v.a. $S=X_1+X_2$.

i. Développer l'expression de $\mathcal{P}_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k t^k$. On a

$$P_S(t) = E\left[t^S\right] = E\left[t^{X_1+X_2}\right] = E\left[t^{X_1}t^{X_2}\right] = P_{X_1,X_2}(t,t)$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} P_S(t) = 0.4 & \\ & + 0.3 \times (0.9 + 0.1t)^2 \\ & + 0.2 \times (0.8 + 0.2t)^2 \\ & + 0.1 \times (0.9 + 0.1t)^2 \times (0.8 + 0.2t)^2 \\ & = 0.4 \\ & + 0.3 \times (0.9^2 + 2 \times 0.9 \times 0.1t + 0.1^2t^2) \\ & + 0.2 \times (0.8^2 + 2 \times 0.8 \times 0.2t + 0.2^2t^2) \\ & + 0.1 \times (0.9^2 + 2 \times 0.9 \times 0.1t + 0.1^2t^2) \times (0.8^2 + 2 \times 0.8 \times 0.2t + 0.2^2t^2) \end{aligned}$$

Puis, on a

$$\begin{aligned} &= \left(0.4 + 0.3 \times 0.9^2 + 0.2 \times 0.8^2 + 0.1 \times 0.9^2 \times 0.8^2\right) \\ &+ \begin{pmatrix} 0.3 \times 2 \times 0.9 \times 0.1 + 0.2 \times 2 \times 0.8 \times 0.2 \\ +0.1 \times (0.9^2 \times 2 \times 0.2 \times 0.8 + 2 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.8^2) \end{pmatrix} \times t \\ &+ \begin{pmatrix} 0.3 \times 0.1^2 + 0.2 \times 0.2^2 \\ +0.1 \times (0.1^2 \times 0.8^2 + 0.9^2 \times 0.2^2 \\ +2 \times 0.1 \times 0.9 \times 2 \times 0.2 \times 0.8) \end{pmatrix} \times t^2 \\ &+ 0.1 \times (2 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.2^2 + 2 \times 0.1^2 \times 0.8 \times 0.2) \times t^3 \\ &+ 0.1 \times (0.1^2 \times 0.2^2) \times t^4. \end{aligned}$$

On obtient

$$P_S(t) = 0.82284 + 0.15544t + 0.02064t^2 + 0.00104t^3 + 0.0004t^4.$$

ii. Utiliser l'expression obtenue en (6.4) pour calculer toutes les valeurs non-nulles de $\Pr(S = k)$.
La fgp de S est $E\left[t^S\right] = f_S(0)t^0 + f_S(1)t^1 + f_S(2)t^2 + f_S(3)t^3 + f_S(4)t^4 + f_S(4)t^4 + \ldots$, et on remarque que les valeurs de $f_S(k)$ correspond au terme avant la variable t^k dans la fgp de S. On conclut que la fonction de masse de S

est

$$f_S(k) = \begin{cases} 0.82284, & \text{si } k = 0 \\ 0.15544, & \text{si } k = 1 \\ 0.02064, & \text{si } k = 2 \\ 0.00104, & \text{si } k = 3 \\ 0.00004, & \text{si } k = 4 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. **(6 points). Démonstration de l'algorithme de Panjer.**
   (a) **(1 point).** Identifier l'expression de la fgp $\mathcal{P}_X(t)$ de la v.a. X où $\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k$ pour la loi Poisson composée.
   On a
$$P_X(t) = E\left[t^X\right] = P_M(P_B(t)) = \exp\left(\lambda\left(P_B(t) - 1\right)\right)$$
   (b) **(1 point).** À partir de l'expression trouvée (6a) et de (6.7), démontrer le point de départ de l'algorithme en (6.6).
   Selon les propriétés de la fgp, on a $f_X(0) = P_X(0)$ et $f_B(0) = P_B(0)$. Alors, on a
$$\begin{aligned} f_X(0) &= P_X(0) \\ &= P_M(P_B(0)) \\ &= P_M(f_B(0)) \\ &= e^{\lambda(f_B(0)-1)} \end{aligned}$$
   (c) **(4 points).** À partir de l'expression trouvée (6a), de (6.7) et de (6.5), démontrer la relation récursive de l'algorithme en (6.6). Suggestion : identifier clairement les étapes de votre démarches (développer la dérivée, etc.)
   On dérive
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_X(t) &= \frac{d}{dt}P_M(P_B(t)) \\ &= P_M'(P_B(t))\frac{d}{dt}P_B(t) \\ &= \lambda P_M(P_B(t))\frac{d}{dt}P_B(t) \text{ par (5)} \end{aligned}$$
   On observe
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^{k-1} &= \lambda P_X(t) \sum_{k=0}^{\infty} k t^{k-1} f_B(k) \\ \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^{k-1} &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k \sum_{k=0}^{\infty} k t^{k-1} f_B(k) \end{aligned}$$

On multiplie chaque côté de l'équation par t

$$t \times \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^{k-1} = t \times \lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k \sum_{k=0}^{\infty} k t^{k-1} f_B(k)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k \sum_{k=1}^{\infty} k t^k f_B(k)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k-j) f_B(j) t^k$$

Chaque terme de gauche correspond à un terme de droite pour un élément de la somme :

$$k f_X(k) = \lambda \sum_{j=0}^{k} j f_X(k-j) f_B(j)$$

qui devient

$$k f_X(k) = \lambda \sum_{j=1}^{k} j f_X(k-j) f_B(j)$$

On isole $f_X(k)$

$$f_X(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j f_X(k-j) f_B(j)$$

7. **(12 points)**
   (a) **(2 points).** Soit une v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$. Démontrer que $S = \varphi\,(U)$, où $\varphi\,(u)$ est une fonction convexe.
   - **(0.5 point).** On a
   $$S = F^{-1}\,(U) + F^{-1}\,(1-U) = \varphi\,(U)\,.$$
   - **(0.5 point).** Puisque $\overline{F}\,(x)$ est une fonction convexe (sur $\mathbb{R}^{+}$), alors $F^{-1}\,(u)$ est aussi une fonction convexe sur $(0,1)\,.$
   - **(0.5 point).** D'après le 2e lemme de la question et comme $F^{-1}\,(u)$ est aussi une fonction convexe sur $(0,1)$, alors $F^{-1}\,(1-u)$ est aussi une fonction convexe sur $(0,1)$.
   - **(0.5 point).** D'après le 1er lemme de la question, $\varphi\,(u)$ qui correspond à une somme de 2 fonctions convexes est aussi une fonction convexes sur $(0,1)$.

   (b) **(4 points).** Démontrer que
   - Par la convexité de φ sur $(0,1)$, pour $x > x_0$, il existe $0 < u_1 < \frac{1}{2} < u_2$ avec
   $$\varphi\,(u_1) = \varphi\,(u_2) = x.$$
   Alors, on a
   $$F_{X_1^- + X_2^-}\,(x) = \Pr\left(X_1^- + X_2^- \leq x\right) = u_2 - u_1.$$
   - Soit $\kappa \in (0,1)$. Puisque φ est une fonction continue, $F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}\,(\kappa)$ correspond à la solution de
   $$F_{X_1^- + X_2^-}\,(x) = u_2 - u_1 = \kappa. \tag{5.10}$$
   Comme φ est symétrique par rapport à $u = \frac{1}{2}$, il y a $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ où
   $$u_1 = \frac{1}{2} - \gamma \text{ et } u_2 = \frac{1}{2} + \gamma.$$
   Clairement, on a
   $$u_2 = \frac{1}{2} + \gamma = 1 - u_1.$$
   - Ainsi, (6.10) devient
   $$F_{X_1^- + X_2^-}\,(x) = \frac{1}{2} + \gamma - \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) = \kappa,$$

de laquelle on déduit $\gamma = \frac{\kappa}{2}$. Alors, on déduit

$$F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}(\kappa) = \varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) \text{ ou } F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}(\kappa) = \varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2}\right).$$

- Alors, à partir de la première égalité ou de la deuxième égalité, on obtient

$$F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}(\kappa) = \varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) = F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) + F^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2}\right). \tag{5.11}$$

- Soit $\kappa \in (0,1)$. D'après (6.11), on déduit

$$\begin{aligned} VaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) &= F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) + F^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2}\right) \\ &= VaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X) + VaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X), \end{aligned}$$

qui correspond à (**??**).

- Soit $\kappa \in (0,1)$. Par la définition de la TVaR, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u\left(X_1^- + X_2^-\right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \Big(VaR_{\frac{1-u}{2}}(X) + VaR_{\frac{1+u}{2}}(X)\Big) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_{\frac{1-u}{2}}(X)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_{\frac{1+u}{2}}(X)\,\mathrm{d}u \qquad (6.12) \end{aligned}$$

- En définissant $s = \frac{1-u}{2}$ et $t = \frac{1+u}{2}$, (6.12) devient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\frac{1-\kappa}{2}}^0 VaR_s(X)(-2)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{1-\kappa}\int_{\frac{1+\kappa}{2}}^1 VaR_t(X)(2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\frac{1-\kappa}{2}}\int_0^{\frac{1-\kappa}{2}} VaR_s(X)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\frac{1-\kappa}{2}}\int_{\frac{1+\kappa}{2}}^1 VaR_t(X)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\frac{1-\kappa}{2}}\int_0^{\frac{1-\kappa}{2}} VaR_s(X)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{1-\frac{1+\kappa}{2}}\int_{\frac{1+\kappa}{2}}^1 VaR_t(X)\,\mathrm{d}t \\ &= LTVaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X) + TVaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X) \end{aligned}$$

qui est la relation voulue.

(c) **(6 points).**

i. **(2 points).** Démontrer que la fonction de survie $\overline{F}$ est convexe.

- Il suffit de dériver $\overline{F}$ à deux reprises p/r à x.

- 1 fois :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{F}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)^3}{\mathrm{d}x} = -3\left(\frac{1}{1+x}\right)^4$$

- 2 fois :

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{F}(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(-3\left(\frac{1}{1+x}\right)^4\right)}{\mathrm{d}x} = 12\left(\frac{1}{1+x}\right)^5 \geq 0,\ x \geq 0$$

ii. **(4 points).**

- **(1 point).** Calculer $VaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.99$.

$$VaR_\kappa(S) = VaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X_1) + VaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X_2).$$

On obtient

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(S) &= VaR_{\frac{1-0.99}{2}}(X) + VaR_{\frac{1+0.99}{2}}(X) \\ &= VaR_{0.005}(X) + VaR_{0.995}(X) \\ &= \lambda\left((1-0.005)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) + \lambda\left((1-0.995)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \\ &= 1 \times \left(0.995^{-\frac{1}{3}} - 1\right) + 1 \times \left(0.005^{-\frac{1}{3}} - 1\right) \\ &= 0.001672244 + 4.848035 \\ &= 4.849708. \end{aligned}$$

- **(3 points).** Calculer $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.99$.
On a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= LTVaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X) + TVaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X) \\ &= LTVaR_{0.005}(X) + TVaR_{0.995}(X) \end{aligned}$$

Puis, on a

$$\begin{aligned}
LTVaR_{0.005}(X) &= \frac{1}{0.005}\int_0^{0.005} VaR_u(X)du \\
&= \frac{1}{0.005}E\left[X \times 1_{\{X \leq VaR_{0.005}(X)\}}\right] \\
&= \frac{1}{0.005}\left[\frac{\lambda}{\alpha-1}\left(1-\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+VaR_{0.005}(X))^{\alpha-1}}\right)-\right. \\
&\qquad \left. VaR_{0.005}(X)\times\left(\frac{\lambda}{\lambda+VaR_{0.005}(X)}\right)^{\alpha}\right] \\
&= \frac{1}{0.005}\left[\frac{1}{3-1}\left(1-\frac{1^{3-1}}{(1+0.001672244)^{3-1}}\right)-\right. \\
&\qquad \left. 0.001672244\times\left(\frac{1}{1+0.001672244}\right)^{3}\right] \\
&= \frac{1}{0.005}\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(1.001672244)^2}\right) \\ -0.001672244\times\left(\frac{1}{1.001672244}\right)^3 \end{array}\right] \\
&= 0.0008351906.
\end{aligned}$$

Aussi, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.995}(X) &= \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}(1-0.995)^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right) \\
&= 1\times\left(\frac{3}{3-1}(1-0.995)^{-\frac{1}{3}}-1\right) \\
&= 1.5\times 0.005^{-\frac{1}{3}}-1 \\
&= 7.772053
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(S) &= LTVaR_{0.005}(X)+TVaR_{0.995}(X) \\
&= 0.0008351906+7.772053 \\
&= 7.772888.
\end{aligned}$$

8. **(14 points)**
   (a) **(2 points).** Développer l'expression de la TLS de X_i, $i = 1, 2, ..., n$. Identifier les lois univariées de X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ et spécifier clairement les paramètres de ces lois.
   - **(1.5 points).** On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_i}(t) &= E\left[e^{-tX_i}\right] \\
&= E\left[e^{-t\left(\frac{1}{\beta}(Z_0+Z_i)\right)}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{\beta}Z_0-\frac{t}{\beta}Z_i}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{\beta}Z_0}\right]E\left[e^{-\frac{t}{\beta}Z_i}\right] \\
&= \mathcal{L}_{Z_0}\left(\frac{t}{\beta}\right)\mathcal{L}_{Z_i}\left(\frac{t}{\beta}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)^{\gamma}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{\beta}}\right)^{\alpha-\gamma} \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

   - **(0.5 point).** On conclut que $X_i \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

   (b) **(2 points).** Identifier la TLS de V_n et celle de W_n.
   - **(1 point).** TLS de V_n :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{V_n}(t) &= E\left[e^{-tV_n}\right] \\
&= E\left[e^{-t\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\beta}}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}Z_i}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}Z_i}\right] \\
&= \mathcal{L}_{Z_i}\left(\frac{t}{n\beta}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{n\beta}}\right)^{n(\alpha-\gamma)}
\end{aligned}$$

- **(1 point).** TLS de W_n :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= E\left[e^{-tW_n}\right] \\
&= E\left[e^{-t\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\beta}}\right] \\
&= E\left[e^{-t\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Z_0+Z_i)}{\beta}}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}Z_i+nZ_0\right)}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}Z_i-\frac{t}{n\beta}nZ_0}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}Z_i}\right]E\left[e^{-\frac{t}{\beta}Z_0}\right] \\
&= \mathcal{L}_{V_n}(t)\mathcal{L}_{Z_0}\left(\frac{t}{\beta}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{n\beta}}\right)^{n(\alpha-\gamma)}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)^{\gamma}
\end{aligned}$$

(c) **(2 points).** D'après le résultat en (8b), démontrer que

$$W_n = V_n + \frac{Z_0}{\beta} \tag{5.13}$$

où $\frac{Z_0}{\beta}$ et V_n sont indépendantes avec $E\left[V_n\right] = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$.

- **(1.5 points).** De (8b), on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}Z_i-\frac{t}{\beta}Z_0}\right] \\
&= E\left[e^{-V_nt-\frac{t}{\beta}Z_0}\right] \\
&= E\left[e^{-t\left(V_n+\frac{Z_0}{\beta}\right)}\right]
\end{aligned}$$

- **(0.5 point).** On conclut que $W_n = V_n + \frac{Z_0}{\beta}$.

(d) **(3 points).** Soit la v.a. $U = \frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{Z_0}{\beta}$. À partir de (6.13), du Théorème 6.7 et du Lemme 6.8, démontrer que $W_n \xrightarrow{\mathcal{D}} U$, quand $n \to \infty$.

- **(1 point).** On peut identifier la loi de U avec la proposition

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \mathcal{L}_{V_n}(t) \mathcal{L}_{Z_0}\left(\frac{t}{\beta}\right) \right\} \\
&= \mathcal{L}_{Z_0}\left(\frac{t}{\beta}\right) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{t}{n\beta}} \right)^{n(\alpha-\gamma)} \\
&= \mathcal{L}_{Z_0}\left(\frac{t}{\beta}\right) \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{V_n}(t)
\end{aligned}
$$

- **(0.5 point).** Ensuite

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{V_n}(t) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{t}{n\beta}} \right)^{n(\alpha-\gamma)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{t}{n\beta} \right)^{-n(\alpha-\gamma)} .
\end{aligned}
$$

- **(1 point).** Avec le lemme 8, $x = \frac{t}{\beta}$ et $k = -(\alpha-\gamma)$, on trouve
$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{V_n}(t) = e^{\frac{-(\alpha-\gamma)}{\beta} t}$$
qui correspond à la TLS d'une variable avec une masse non-nulle seulement à $\frac{\alpha-\gamma}{\beta}$.
- **(0.5 point).** On conclut que $U = \frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{Z_0}{\beta}$.

(e) **(2 points).** Développer l'expression de $TVaR_k(U)$ en fonction de $TVaR_\kappa(Z_0)$.
- **(0.5 point).** La $TVaR$ est une mesure de risque cohérente.
- **(1.5 points).** Comme la TVaR est homogène et invariante à la translation (puisqu'elle est cohérente), on a

$$TVaR_\kappa(U) = TVaR_\kappa\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{Z_0}{\beta}\right) = \frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{1}{\beta} TVaR_\kappa(Z_0)$$

(f) **(3 points).** Hypothèses **:** $\alpha = 2.5$, $\gamma = 1$, $\beta = \frac{1}{100}$, $\kappa = 0.95$.
- **(0.5 point).** On a

$$
\begin{aligned}
VaR_{0.95}(Z_0) &= -\frac{1}{1}\ln(1-0.95) \\
&= 2.9957
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}TVaR_{0.95}(Z_0) &= VaR_{0.95}(Z_0) + E[Z_0]\\ &= 2.9957 + \frac{1}{1}\\ &= 3.9957\end{aligned}$$

- **(0.5 point).** On obtient

$$\begin{aligned}TVaR_{0.95}(U) &= \frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{1}{\beta}TVaR_{0.95}\left(Z_0\right)\\ &= 100 \times (2.5-1) + 100 \times TVaR_{0.95}(Z_0)\\ &= 100 \times (2.5-1) + 100 \times 3.9957\\ &= 549.57\end{aligned}$$

- **(0.5 point).** Aussi, on a

$$\begin{aligned}VaR_{0.95}(X_1) &= \frac{1}{\beta}\overline{H}^{-1}(0.95; 2.5, 1)\\ &= 100 \times 5.5352\\ &= 553.52\end{aligned}$$

- **(0.5 point).** et

$$\begin{aligned}TVaR_{0.95}(X_1) &= \frac{1}{1-0.95}\frac{\alpha}{\beta}\overline{H}(VaR_{0.95}(X_1); \alpha+1, \beta)\\ &= \frac{1}{1-0.95}250\overline{H}\left(553.52 \times \frac{1}{\beta}; 3.5, 1\right)\\ &= \frac{250}{0.05}\overline{H}\left(5.5352; 3.5, 1\right)\\ &= \frac{250}{0.05}\left[1 - H\left(5.5352; 3.5, 1\right)\right]\\ &= \frac{250}{0.05}\left[1 - 0.8614\right]\\ &= 693\end{aligned}$$

- **(1 point).** Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}B_{0.95,n} &= TVaR_{0.95}\left(X_1\right) - TVaR_{0.95}\left(W_n\right)\\ &\simeq TVaR_{0.95}\left(X_1\right) - TVaR_{0.95}\left(U\right)\\ &= 693 - 549.57\\ &= 143.43.\end{aligned}$$

9. **(12 points).**
Questions :
(a) **(5 points).** Hypothèse : $\rho_{1,2} = -1$, $\rho_{1,3} = -0.6$, et $\rho_{2,3} = -0.5$
i. **(1.5 points).** Développer la fgm de S pour démontrer que $S \sim Norm\left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_S(t) &= \mathcal{M}_{X_1,X_2,X_3}(t,t,t) \\ &= \exp\left[t\sum_{i=1}^{3}\mu_i + \frac{1}{2}t^2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j\right]\end{aligned}$$

ii. **(1.5 points).** Calculer les valeurs de μ_S et σ_S^2.
On a

$$\sum_{i=1}^{3}\mu_i = 5 + 10 + 15 = 30$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j &= 1 + 2^2 + 3^2 - 2\times 1\times 1\times 2 \\ & \quad -2\times 0.6\times 1\times 3 - 2\times 0.5\times 2\times 3 \\ &= 0.4\end{aligned}$$

Alors, on constate

$$\mathcal{M}_S(t) = \exp\left[30t + \frac{0.4}{2}t^2\right]$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_S(t) &= \exp\left[30t + \frac{0.4}{2}t^2\right] \\ &= \exp\left[\mu_S t + \frac{\sigma_S^2}{2}t^2\right],\end{aligned}$$

où $\mu_S = 30$ et $\sigma_S^2 = 0.4$.
iii. **(2 points).** Calculer $VaR_{0.9999}\,(S)$ et $TVaR_{0.9999}\,(S)$.
- $VaR_{0.9999}(S) = VaR_{0.9999}(\mu_S + \sigma_S Z) = 30 + \sqrt{0.4}\times VaR_{0.9999}(Z) = 32.35211$
- $TVaR_{0.9999}(S) = TVaR_{0.9999}(\mu_S + \sigma_S Z) = 30 + \sqrt{0.4}\times TVaR_{0.9999}(Z) = 32.50356$

(b) **(4 points).** Soit ζ_κ une mesure avec $\kappa \in (0,1)$. Pour $\kappa \in (0,1)$, l'Index du Bénéfice de Mutualisation est défini par

$$IbM_\kappa = 1 - \frac{\zeta_\kappa(S) - E[S]}{\sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i])} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

i. **(1 point).** Quelle propriété ζ_k doit-elle satisfaire pour que $\varphi_1 \geq 0$?
   - On a

$$\begin{aligned} IbM_\kappa &= 1 - \frac{\zeta_\kappa(S) - E[S]}{\sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i])} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i]) - \zeta_\kappa(S) + E[S]}{\sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i])} \\ &= \frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \end{aligned}$$

   - On cherche dans quel cas $\varphi_1 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i]) - \zeta_\kappa(S) + E[S] &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i]) &\geq \zeta_\kappa(S) - E[S] \\ \sum_{i=1}^{3}\zeta_\kappa(X_i) &\geq \zeta_\kappa(S) \end{aligned}$$

   - ce qui est le cas quand la mesure de risque ζ_κ est sous-additive (annexe 12.1.P4)

ii. **(1 point).** Quelle propriété ζ_k doit-elle satisfaire pour que chacun des 2 termes de la somme φ_2 soit positif ?
   - $\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i]$ est positif quand le principe de marge de sécurité positive est satisfait (annexe 12.1.P1),

iii. **(1 point).** Choisir la seule mesure parmi la VaR et la TVaR qui satisfait (i) et (ii) ; puis, calculer $IbM_{0.9999}$. La mesure de risque VaR n'est pas sous-additive et ne satisfait pas le principe de marde de sécurité positive.
   - La mesure de risque $TVaR$ satisfait (i) et (ii).
   - $\zeta_= TVaR$
   - $IbM_{0.9999} = 1 - \frac{TVaR_{0.9999}(S)+E[S]}{\sum_{i=1}^{3}(TVaR_{0.9999}(X_i)-E[X_i])}$
   - $TVaR_{0.9999}(X_1) - E[X_1] = 5 + 1 \times TVaR_{0.9999}(Z) - 5 = TVaR_{0.9999}(Z)$

- $TVaR_{0.9999}(X_2) - E[X_2] = 10 + 2 \times TVaR_{0.9999}(Z) - 10 = 2TVaR_{0.9999}(Z)$
- $TVaR_{0.9999}(X_3) - E[X_3] = 15 + 3 \times TVaR_{0.9999}(Z) - 15 = 3TVaR_{0.9999}(Z)$
- $TVaT_{0.9999}(S) - E[S] = 30 + \sqrt{0.4}TVaR_{0.9999}(Z) - 30 = \sqrt{0.4}TVaR_{0.9999}(Z)$
- On obtient

$$\begin{aligned}
IbM_{0.9999} &= 1 - \frac{TVaR_{0.9999}(S) + E[S]}{\sum_{i=1}^{3}(TVaR_{0.9999}(X_i) - E[X_i])} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{0.4} \times TVaR_{0.9999}(Z)}{TVaR_{0.9999}(Z) + 2 \times TVaR_{0.9999}(Z) + 3 \times TVaR_{0.9999}(Z)} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{0.4} \times TVaR_{0.9999}(Z)}{6 \times TVaR_{0.9999}(Z)} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{0.4}}{6}
\end{aligned}$$

iv. **(1 point).** Commenter brièvement le résultat.

(c) **(3 points).** Hypothèse : $\rho_{1,2} = -\frac{7}{11}$, $\rho_{1,3} = -\frac{7}{11}$, et $\rho_{2,3} = -\frac{7}{11}$.

i. **(1 point).** Développer la fgm de S et identifier la loi de S.

- On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= \mathcal{M}_{X_1,X_2,X_3}(t,t,t) \\
&= \exp\left[t\sum_{i=1}^{3}\mu_i + \frac{1}{2}t^2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j\right]
\end{aligned}$$

- On a

$$\sum_{i=1}^{3}\mu_i = 5 + 10 + 15 = 30$$

- On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j &= 1 + 2^2 + 3^2 - 2 \times \frac{7}{11} \times 1 \times 2 - 2 \times \frac{7}{11} \times 1 \times 3 - 2 \times \frac{7}{11} \times 2 \times 3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

- On obtient

$$\mathcal{M}_S(t) = \exp[30t + 0]$$

- et

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= \exp[30t] \\
&= \exp[\mu_S t],
\end{aligned}$$

où $\mu_S = 30$. Cela siginifie que la v.a. S prend la valeur 30 avec une probabilité 1.

ii. **(1 point).** Avec la mesure choisie en (9(b)iii), calculer $IbM_{0.9999}$.
   - $VaR_{0.9999}(S) = 30$
   - $TVaR_{0.9999}(S) = 30$
   - $IbM_{0.9999} = 1$

iii. **(1 point).** Commenter brièvement le résultat.

10. **(6 points).**
   (a) **(1 point).** Indiquer l'expression de $f_X\,(1000k)$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f_X(1000k) &= Pr(X = 1000k) \\ &= Pr(I = 1, Y = 1000k) + Pr(I = 0, 0 = 1000k) \\ &= Pr(I = 1) \times Pr(Y = 1000k) + Pr(I = 0) \times 1_{\{k=0\}} \\ &= 0.4 f_Y(1000k) + 0.6 \times 1_{\{k=0\}} \end{aligned}$$

   (b) **(2 points).** Calculer $f_Y\,(0)$ et $f_X\,(0)$.
   - $f_Y\,(0)$:

$$\begin{aligned} f_Y(0) &= P_Y(0) \\ &= P_M(P_B(0)) \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)f_B(0)}\right)^r \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)\times 0}\right)^r \\ &= q^r \\ &= 0.8705505632961241 \end{aligned}$$

   - $f_X\,(0)$:

$$\begin{aligned} f_X(0) &= 0.4 f_Y(1000k) + 0.6 \times 1_{\{k=0\}} \\ &= 0.4 \times 0.8705506 + 0.6 \\ &= 0.9482202253184496 \end{aligned}$$

   (c) **(2 points).** Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_Y\,(3000)$.
   - **(0.5 point)** On a

$$\begin{aligned} f_Y(3000) &= \frac{\sum_{j=1}^{3}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_Y((3-j)\times 1000)}{1-(1-q)f_B(0)} \\ &= \sum_{j=1}^{3}\left(1-0.5+\frac{(1-0.5)(0.2-1)j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_Y((3-j)\times 1000) \\ &= \sum_{j=1}^{3}\left(0.5-0.4\frac{j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_Y((3-j)\times 1000) \end{aligned}$$

- **(1.5 points).** qui devient

$$
\begin{aligned}
f_Y(3000) &= \left(0.5 - \frac{0.4}{3}\right) f_B(1 \times 1000) f_Y((3-1) \times 1000) + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 2}{3}\right) f_B(2 \times 1000) f_Y((3-2) \times 1000) + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 3}{3}\right) f_B(3 \times 1000) f_Y((3-3) \times 1000) \\
&= \left(0.5 - \frac{0.4}{3}\right) f_B(1000) f_Y(2000) + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 2}{3}\right) f_B(2000) f_Y(1000) + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 3}{3}\right) f_B(3000) f_Y(0) \\
&= \left(0.5 - \frac{0.4}{3}\right) 0.25 \times 0.01795511 + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 2}{3}\right) 0.25 \times 0.75 \times \times 0.02176376 + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 3}{3}\right) 0.25 \times 0.75^2 \times 0.87055056 \\
&= 0.01484017
\end{aligned}
$$

(d) **(1 point).** Calculer $f_X(3000)$.

- $f_X(3000) = 0.4 f_Y(3000) = 0.4 \times 0.01484017 = 0.005936068$

11. **(12 points).**
   (a) **(4 points).**
      i. Développer l'expression de la fgm $\mathcal{M}_{X_i}(t_i)$ de la X_i, $i = 1, 2$.
      ii. Utiliser $\mathcal{M}_{X_i}(t_i)$ pour identifier la distribution univariée de la v.a. X_i, $i = 1, 2$. Justifier votre démarche. Spécifier clairement les paramètres des 2 distributions univariées.
         - Étape #1 **(2 points).**

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{X_i}(t) &= E\left[e^{tX_i}\right]\\ &= E\left[e^{\frac{t}{\beta_i}(Y_i+Y_0)}\right]\\ &= E\left[e^{\frac{t}{\beta_i}Y_i}e^{\frac{t}{\beta_i}Y_0}\right]\\ &= E\left[e^{\frac{t}{\beta_i}Y_i}\right]E\left[e^{\frac{t}{\beta_i}Y_0}\right] \text{ (indépendance de } Y_i \text{ et } Y_0)\\ &= \mathcal{M}_{Y_i}\left(\frac{t}{\beta_i}\right)\mathcal{M}_{Y_0}\left(\frac{t}{\beta_i}\right)\end{aligned}$$

         - Étape #2**(2 points).**

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{X_i}(t) &= \exp\left[\tau_i\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_i}\right)^{\gamma_i}-1\right)\right]\exp\left[\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_i}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right]\\ &= \exp\left[\tau_i\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_i}\right)^{\gamma_i}-1\right)+\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_i}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right]\\ &= \exp\left[(\tau_i+\tau_0)\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_i}\right)^{\gamma_i}-1\right)\right]\end{aligned}$$

car $\gamma_i = \gamma_0$. On conclut que $X_i \sim Tweedie(\tau_i + \tau_0, \gamma_i, \beta_i)$.

   (b) **(2 points).** Développer l'expression de la fgm multivariée de $\underline{X}$, définie par

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1, t_2) = E\left[\mathrm{e}^{t_1X_1}\mathrm{e}^{t_2X_2}\right].$$

   - Étape #1 (1 pt)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1,t_2) &= E\left[e^{t_1X_1}e^{t_2X_2}\right]\\ &= E\left[e^{\frac{t_1}{\beta_1}(Y_1+Y_0)}e^{\frac{t_2}{\beta_2}(Y_2+Y_0)}\right]\\ &= E\left[e^{\frac{t_1}{\beta_1}Y_1+\frac{t_2}{\beta_2}Y_2+\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}\right)Y_0}\right]\\ &= \mathcal{M}_{Y_1}\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)\mathcal{M}_{Y_2}\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)\mathcal{M}_{Y_0}\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}\right)\end{aligned}$$

- Étape #2 (1 pt)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1,t_2) &= \exp\left[\tau_1\left(\left(\frac{1}{1-t_1/\beta_1}\right)^{\gamma_1}-1\right)\right] \\
&\times \exp\left[\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-t_2/\beta_2}\right)^{\gamma_2}-1\right)\right] \\
&\times \exp\left[\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right]
\end{aligned}
$$

(c) **(2 points).** Développer l'expression de la fgm de S définie par $\mathcal{M}_S(t)$. À partir de $\mathcal{M}_S(t)$, identifier la distribution de S en spécifiant clairement les paramètres de la distribution.

- Étape #1 (1 pt)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= \mathcal{M}_{\underline{X}}(t,t) \\
&= \exp\left[\tau_1\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_1}-1\right)\right] \\
&\times \exp\left[\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_2}-1\right)\right] \\
&\times \exp\left[\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-t\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right] \\
&= \exp\left[\begin{array}{c} \tau_1\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_1}-1\right)+\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_2}\right)^{\gamma_2}-1\right) \\ +\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-t\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right) \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

qui devient

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left[\begin{array}{c} \tau_1\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_1}-1\right)+\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_2}\right)^{\gamma_2}-1\right) \\ +\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-t\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right) \end{array}\right] \\
&= \exp\left[\tau_S\left(\begin{array}{c} \frac{\tau_1}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_1}+\frac{\tau_2}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t/\beta_2}\right)^{\gamma_2} \\ +\frac{\tau_0}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1 \end{array}\right)\right] \\
&= \exp\left[\tau_S\left(M_B(t)-1\right)\right]
\end{aligned}
$$

avec $\tau_S = \tau_1 + \tau_2 + \tau_0$ et

$$M_B(t) = \frac{\tau_1}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_1} + \frac{\tau_2}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t/\beta_2}\right)^{\gamma_2} + \frac{\tau_0}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}.$$

- Étape #2 (1 pt)On remarque que $S \sim PoisComp(\tau_S, F_B)$ et que B obéit à une combinaison de distributions gamma.

(d) **(4 points).** On fixe $\kappa = 0.05$. Calculer $\Pi_\kappa(S)$ et $E[S]$. Comparer les deux valeurs.

- **(1 point).** On commence avec

$$\begin{aligned}\Pi_\kappa(S) &= \frac{1}{\kappa}\ln\{(\mathcal{M}_S(\kappa))\} \\ &= \frac{1}{\kappa}\ln\left\{\begin{array}{c}\exp\left[\tau_1\left(\left(\frac{1}{1-\kappa/\beta_1}\right)^{\gamma_1}-1\right)\right] \\ \times\exp\left[\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-\kappa/\beta_1}\right)^{\gamma_2}-1\right)\right] \\ \exp\left[\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-\kappa\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right]\end{array}\right\}\end{aligned}$$

- **(1 point).** qui devient

$$\begin{aligned}\Pi_\kappa(S) \quad = \quad & \frac{1}{\kappa}\left(\tau_1\left(\left(\frac{1}{1-\frac{\kappa}{\beta_1}}\right)^{\gamma_1}-1\right)\right) \\ & +\frac{1}{\kappa}\left(\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-\frac{\kappa}{\beta_2}}\right)^{\gamma_2}-1\right)\right) \\ & +\frac{1}{\kappa}\left(\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-\kappa\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right)\end{aligned}$$

- Hypothèses :
  - $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{5}$; $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 0.5$, $\tau_0 = 0.5$
  - $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 2$, $\gamma_0 = 2$.
- **(2 points).** On calcule

$$\begin{aligned}\Pi_{0.05}(S) \quad = \quad & 20\left(2\left(\left(\frac{1}{1-\frac{0.05}{0.5}}\right)^2-1\right)\right)+20\left(0.5\left(\left(\frac{1}{1-\frac{0.05}{0.2}}\right)^2-1\right)\right) \\ & +20\left(0.5\left(\left(\frac{1}{1-0.05\left(\frac{1}{0.5}+\frac{1}{0.2}\right)}\right)^2-1\right)\right) \\ = \quad & 30.8291328804\end{aligned}$$

- Calcul de $E[S]$: 2 options

- Option #1 :

$$\begin{aligned}
E[S] &= E[X_1] + E[X_2] \\
&= \frac{1}{\beta_1}(E[Y_1] + E[Y_0]) + \frac{1}{\beta_2}(E[Y_2] + E[Y_0]) \\
&= 2 \times (2 \times 2 \times 1 + 0.5 \times 2) + 5 \times (0.5 \times 2 \times 1 + 0.5 \times 2) \\
&= 20
\end{aligned}$$

- Option #2 : On a

$$E[S] = \tau_S E[B] = \tau_1 \frac{\gamma_1}{\beta_1} + \tau_2 \frac{\gamma_2}{\beta_2} + \tau_0 \frac{\gamma_0}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}}$$

où

$$E[B] = \frac{\tau_1}{\tau_S}\frac{\gamma_1}{\beta_1} + \frac{\tau_2}{\tau_S}\frac{\gamma_2}{\beta_2} + \frac{\tau_0}{\tau_S}\frac{\gamma_0}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
E[S] &= 2\frac{2}{\frac{1}{2}} + 0.5\frac{2}{\frac{1}{5}} + 0.5\frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}} \\
&= 2 \times 2 \times 2 + 0.5 \times 2 \times 5 + 0.5 \times 2 \times 7 \\
&= 20
\end{aligned}$$

6

A2017 - Partiel traditionnel

Université Laval	Examen final traditionnel
Faculté des Sciences et de Génie	Automne 2017
École d'actuariat	Date: Mercredi 18 octobre 2017

Act-3000 Théorie du risque
Professeur: Etienne Marceau

Nom de famille de l'étudiant	**Prénom de l'étudiant**	**Matricule**

Les instructions sont à lire par la surveillante ou le surveillant avant le début de l'examen :

- L'examen contient 11 questions et la durée est de 170 minutes.
- Le total des points est de **105 points (7 points boni)**.
- Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.
- Veuillez écrire vos réponses dans le présent questionnaire.
- Il est important d'écrire clairement les solutions, les réponses, les résultats numériques et les commentaires demandés dans les questions.
- Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.
- Veuillez retourner tous les documents à la fin de l'examen.

Questions	Points obtenus	Points
1	5	
2	12	
3	11	
4	12	
5	10	
6	6	
7	12	
8	14	
9	12	
10	6	
11	12	
Total	105	**(7 points boni)**

6.1 Notation

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ = ensemble des entiers naturels (incluant $\{0\}$)
2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2...\}$
3. $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
4. $\mathbb{R}^+$ = ensemble des nombres réels positifs (incluant $\{0\}$)
5. $i = \sqrt{-1}$ = unité imaginaire
6. $\mathbb{C} = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ = ensemble des nombres complexes
7. fmp = fonction de masses de probabilité
8. fgp = fonction génératrice des probabilités
9. fgm = fonction génératrice des moments
10. TLS = transformée de Laplace-Stieltjes
11. $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$

6.2 Questions

1. **(5 points)** Soit $\mathcal{CF}(F_1, F_2)$ la classe de Fréchet générée par les marginales discrètes F_1 et F_2. Les valeurs des fonctions de masse de probabilité f_1 et f_2 associées à F_1 et F_2 sont fournies dans le tableau suivant :

j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$	$f_1(x_{1,j})$	$f_2(x_{2,j})$
1	3	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	5	7	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	8	10	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	13	14	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Soit la paire de v.a. discrètes $\underline{X} = (X_1, X_2)$ avec $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$.
Cela signifie que $F_{X_1} = F_1$ et $F_{X_2} = F_2$.
On définit $S = X_1 + X_2$, avec la fonction de masse de probabilité $f_S(k) = \Pr(S = k)$, $k \in \mathbb{N}$.
Soit $F_{\underline{X}}(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1; 0)$, $x_1, x_2 \geq 0$.
Questions :

(a) **(1 point).** Quelle est la relation de dépendance entre les v.a. X_1 and X_2 ?

(b) **(1 point).** Soit $U \sim Unif(0, 1)$. Identifier la représentation des v.a. X_1 et X_2 en fonction de la v.a. U.

(c) **(3 points).** Calculer toutes les valeurs non-nulles de f_S. Commenter.

2. **(12 points)** En vertu des règles mises en place par OSFI pour 2018, une compagnie d'assurance IRD modélise les risques suivants :
   - risque d'assurance : X_1, avec $F_{X_1}(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{600}\right)^{-2}}$, $x > 0$;
   - risque du marché : $X_2 = 10000 - 10000e^R$ où R est une v.a. continue obéissant à une loi **symétrique** par rapport à μ avec

     $$F_R(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}} & , \quad x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} & , \quad x > \mu \end{cases}$$

     et

     $$E[R] = \mu, \quad Var(R) = 2\sigma^2, \quad M_R(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mu t}}{1-\sigma^2 t^2} \quad \left(-\frac{1}{\sigma} < t < \frac{1}{\sigma}\right),$$

     où $\mu = 0.08$ et $\sigma = 0.2$;
   - risque de crédit : $X_3 = 110000 \times Y - 10000$, $Y \sim Gamma(5, 50)$;
   - risque opérationnel : $F_{X_4}(x) = 1 - q + qF_B(x)$ avec $q = 0.1$ et

     $$B \sim LNorm(\mu_B = \ln(10000) - 0.5, \sigma_B = 1).$$

   Pour simplifier ses calculs, l'actuaire suppose que les v.a. X_1, X_2, X_3 et X_4 sont comonotones.
   On définit $S = X_1 + ... + X_4$.
   Question :
   (a) **(4 points).** Démontrer $VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(X_1) + ... + VaR_\kappa(X_4)$, $\kappa \in (0,1)$ en justifiant clairement les étapes.
   (b) **(8 points).** Calculer $VaR_{0.95}(S)$.

3. **(11 points).** Soit les paires de v.a. continues positives $\underline{X} = (X_1, X_2)$ et $\underline{X}' = (X_1', X_2')$ avec

$$F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2) \text{ et } F_{\underline{X}'} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2),$$

où $\mathcal{CF}(F_1, F_2)$ est la classe de Fréchet générée par les marginales F_1 et F_2
Note : $F_{X_1} = F_{X_1'} = F_1$ et $F_{X_2} = F_{X_2'} = F_2$. De plus, $E[X_i^m] < \infty$, pour $m = 1, 2$.
Proposition 6.1 *Si $\overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) \leq \overline{F}_{\underline{X}'}(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, alors, on a*

$$Cov(X_1, X_2) \leq Cov(X_1', X_2') \quad et \quad \rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P(X_1', X_2').$$

Questions :
(a) **(2 points).** Démontrer la **Proposition 6.1**.
(b) **(9 points).** On considère trois v.a. indépendantes de loi exponentielle

$$Y_0 \sim Exp(\lambda_0), \quad Y_1 \sim Exp(\beta_1 - \lambda_0), \quad \text{et} \quad Y_2 \sim Exp(\beta_2 - \lambda_0), \quad 0 \leq \lambda_0 \leq \min(\beta_1, \beta_2).$$

On définit les v.a. $X_1 = \min(Y_1; Y_0)$ et $X_2 = \min(Y_2; Y_0)$.
Convention : Si $\lambda_0 = 0$, alors $\Pr(Y_0 = 0) = 1$.
i. **(2 points).** Pour $i = 1, 2$, démontrer que $X_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1, 2$.
ii. **(2 points).** Démontrer que la fonction de survie de (X_1, X_2) est donnée par

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} = \overline{F}_{X_1}(x_1)\,\overline{F}_{X_2}(x_2)\,\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)}. \tag{6.1}$$

Notation : on convient que (X_1, X_2) obéit à une loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin, c.-à-d.,

$$(X_1, X_2) \sim ExpBMO(\beta_1, \beta_2, \lambda_0),$$

avec $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$, $\lambda_0 \leq \min(\beta_1, \beta_2)$ = paramètre de dépendance.
iii. **(1 point).** Soit $\lambda_0 = 0$. Utiliser l'expression de $\overline{F}_{X_1,X_2}$ en **(6.1)** pour démontrer que les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes.
iv. **(2 points).** Soit $\underline{X} = (X_1, X_2)$ et $\underline{X}' = (X_1', X_2')$ où

$$(X_1, X_2) \sim ExpBMO(\beta_1, \beta_2, \lambda_0) \quad \text{et} \quad (X_1', X_2') \sim ExpBMO\left(\beta_1, \beta_2, \lambda_0'\right),$$

avec $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_0' \leq \min(\beta_1, \beta_2)$. Sans développer les expressions analytiques pour la covariance et le coefficient de Pearson pour cette loi bivariée, utiliser la **Proposition 6.1** et l'expression de $\overline{F}_{X_1,X_2}$ en **(6.1)** pour démontrer que

$$Cov\,(X_1, X_2) \leq Cov\,(X_1', X_2') \quad \text{et} \quad \rho_P\,(X_1, X_2) \leq \rho_P\,(X_1', X_2')\,.$$

v. **(2 points).** Selon 3(b)iii et 3(b)iv, est-ce que cette loi bivariée peut introduire une corrélation négative entre X_1 et X_2 ? Justifier brièvement.

4. **(12 points).** Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) qui obéit à une loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin, c.-à-d.,

$$(X_1, X_2) \sim ExpBMO\left(\beta_1, \beta_2, \lambda_0\right),$$

avec

$$\overline{F}_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right) = \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} = \overline{F}_{X_1}\left(x_1\right)\overline{F}_{X_2}\left(x_2\right)\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)}.$$

où $\beta > 0, \beta_2 > 0$, $\lambda_0 \leq \min\left(\beta_1, \beta_2\right) =$ paramètre de dépendance.
Hypothèses : $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $F_{X_1}(1) = F_{X_2}(1) = 0.02$ et $\lambda_0 = \frac{1}{2}\beta$.
Les pertes pour deux titres de crédit d'un portefeuille de la Société ABC sont définies par les v.a. L_1 et L_2 avec

$$L_i = 100\,(1.04) \times I_i - 100 \times 0.04,$$

où

$$I_i = 1_{\{X_i \leq 1\}},\ i = 1, 2.$$

La perte totale pour le portefeuille est

$$S = L_1 + L_2 = aN + b. \tag{6.2}$$

Questions :

(a) **(2 points).** Développer la fgp de I_i et indiquer la loi univariée de I_i, $i = 1, 2$.

(b) **(4 points).** Développer la fgp conjointe de (I_1, I_2) et indiquer clairement les valeurs non-nulles pouvant être prises par la fmp conjointe de (I_1, I_2).

(c) **(2 points).** Développer la fgp de N et fournir les valeurs de sa fonction masse de probabilité.

(d) **(4 points).** Indiquer les valeurs de a et b dans (6.2). Calculer $E[S]$ et $\Pr(S > 0)$.

5. **(10 points).** Soit un couple de v.a. (X_1, X_2), $X_1, X_2 \in \{0, 1, 2\}$, dont la fgp conjointe est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{X_1,X_2}(t_1, t_2) &= 0.4 + 0.3 \times (0.9 + 0.1t_1)^2 \\ &\quad +0.2 \times (0.8 + 0.2t_2)^2 \\ &\quad +0.1 \times (0.9 + 0.1t_1)^2 \times (0.8 + 0.2t_2)^2 . \end{aligned} \tag{6.3}$$

Questions :

(a) **(2 points).** Identifier l'expression $\mathcal{P}_{X_1}(t_1)$ et utiliser cette expression pour calculer toutes les valeurs de $\Pr(X_1 = k)$, $k = 0, 1, 2$.

(b) **(2 points).** Identifier l'expression $\mathcal{P}_{X_2}(t_2)$ et utiliser cette expression pour calculer toutes les valeurs de $\Pr(X_2 = k)$, $k = 0, 1, 2$.

(c) **(6 points).** On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

i. Développer l'expression de

$$\mathcal{P}_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k t^k. \tag{6.4}$$

ii. Utiliser l'expression obtenue en (6.4) pour calculer toutes les valeurs non-nulles de $\Pr(S = k)$.

6. **(6 points). Démonstration de l'algorithme de Panjer.**
Soit la v.a. $X \sim PoisComp\,(\lambda, F_B)$ où $X = \sum_{k=1}^{M} B_k$, $M \sim Pois(\lambda)$ et $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$, avec $B_k \sim B$, $k \in \mathbb{N}^+$.
La v.a. B est une v.a. discrète définie sur $\mathbb{N}$ avec une fmp f_B et une fgp $\mathcal{P}_B\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_B\,(k)\,t^k$.
Les fgp des v.a. X et M sont $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{P}_M$ où $\mathcal{P}_M\,(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.
Relations pertinentes pour la loi de Poisson :

$$f_M\,(k) = \tfrac{\lambda}{k} f_M\,(k-1) \quad , k \in \mathbb{N}^+, \quad \text{avec } f_M\,(0) = \mathrm{e}^{-\lambda},$$

et

$$\mathcal{P}'_M\,(t) = \lambda \mathcal{P}_M\,(t) \quad , \text{où } \mathcal{P}'_M\,(t) = \tfrac{\mathrm{d}\ \mathcal{P}_M(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{6.5}$$

Algorithme de Panjer :

$$\begin{array}{lll} \text{(1) point de départ} & : & f_X(0) = \mathrm{e}^{\lambda(f_B(0)-1)} \hspace{4cm} ; \\ \text{(2) relation récursive} & : & f_X(k) = \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} j \times f_B(j) \times f_X((k-j)) \quad , \text{pour } k \in \mathbb{N}^+ \quad . \end{array} \tag{6.6}$$

Questions :

(a) **(1 point).** Identifier l'expression de la fgp de la v.a. X où

$$\mathcal{P}_X\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X\,(k)\,t^k \tag{6.7}$$

pour la loi Poisson composée.

(b) **(1 point).** À partir de l'expression trouvée (6a) et de (6.7), démontrer le point de départ de l'algorithme en (6.6).

(c) **(4 points).** À partir de l'expression trouvée (6a), de (6.7) et de (6.5), démontrer la relation récursive de l'algorithme en (6.6). Suggestion : identifier clairement les étapes de votre démarches (développer la dérivée, etc.)

7. **(12 points).** Soit un couple de v.a. continues antimonotones continues strictement positives (X_1, X_2) avec

$$\overline{F}_{X_1}(x) = \overline{F}_{X_2}(x) = \overline{F}(x),$$

où $\overline{F}(x)$ est une fonction convexe.
On rappelle les informations suivantes.
Définition 6.2 *Une fonction $\varphi(u)$ définie pour $u \in [a,b]$ est dite convexe si*

$$\varphi((1-t) \times u_1 + t \times u_2) \leq (1-t) \times \varphi(u_1) + t \times \varphi(u_2) \qquad (6.8)$$

pour $t \in [0,1]$ et $a \leq u_1 < u_2 \leq b$.
Lemme 6.3 *Soit les fonctions convexes $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ définies pour $u \in [a,b]$. Alors, la fonction $\zeta(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$ est convexe pour $u \in [a,b]$.*
Lemme 6.4 *Soit la fonction convexe $\varphi(u)$ définie pour $u \in [a,b]$, avec $-\infty < a < b < \infty$. Alors, $\zeta(u) = \varphi(b-u)$ est convexe pour $u \in [a,b]$.*
On définit $S = X_1 + X_2$.
Questions :
(a) **(2 points).** Soit une v.a. $U \sim Unif(0,1)$. Démontrer que $S = \varphi(U)$, où $\varphi(u)$ est une fonction convexe.
(b) **(4 points). Démontrer que**

$$VaR_\kappa(S) = VaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X_1) + VaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X_2),\ \kappa \in (0,1),$$

et

$$TVaR_\kappa(S) = LTVaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X_1) + TVaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X_2),\ \kappa \in (0,1),$$

où

$$LTVaR_\alpha(S) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_u(S)\,du,\ \alpha \in (0,1).$$

(c) **(6 points).** Soit

$$\overline{F}_{X_1}(x) = \overline{F}_{X_2}(x) = \overline{F}(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3,\ x \geq 0.$$

i. Démontrer que la fonction de survie $\overline{F}$ est convexe.
ii. Calculer $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.99$.

8. **(14 points).** Soient les v.a. indépendantes

$$Z_0 \sim Gamma(\gamma, 1), \quad Z_1 \sim Gamma(\alpha - \gamma, 1), \quad ... \quad Z_n \sim Gamma(\alpha - \gamma, 1),$$

où $0 < \gamma < \alpha$.
Soit un portefeuille de n contrats d'assurance habitation dont les propriétés (semblables) assurés se trouvent dans une région exposée (exposition comparable) aux ouragans.
Les coûts individuels pour les contrats sont définis par

$$X_1 = \frac{1}{\beta}(Z_0 + Z_1), ..., X_n = \frac{1}{\beta}(Z_0 + Z_n),$$

où la v.a. Z_0 est associée aux coûts résultant des ouragans.
Les coûts par contrat sont définis par la v.a. $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
Soit la v.a. V_n où $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i}{\beta}$, $n \in \mathbb{N}^{+}$.
Définition 6.5 *Soit une suite de v.a. positives $\{C_n, n \in \mathbb{N}\}$ et une v.a. Y. Alors, la suite $\{C_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge en distribution vers la v.a. Y si $\lim_{n\to\infty} F_{C_n}(x) = F_Y(x)$, $x \geq 0$, c.-à-d., $C_n \overset{\mathcal{D}}{\to} Y$, quand $n \to \infty$.*
Remarque 6.6 *La convergence en distribution est utile pour justifier l'approximation de C_n par Y quand n est grand.*
Théorème 6.7 *Soit une suite de v.a. positives $\{C_n, n \in \mathbb{N}\}$ et une v.a. Y. Alors, $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{C_n}(t) = \mathcal{L}_Y(t)$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} F_{C_n}(x) = F_Y(x)$, $x \geq 0$.*
Lemme 6.8 $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n\times t} = \mathrm{e}^{x\times t}$; $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n\times t} = \mathrm{e}^{-x\times t}$, $x, t > 0$.
Questions :

(a) **(2 points).** Développer l'expression de la TLS de X_i, $i = 1, 2, ..., n$. Identifier les lois univariées de X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ et spécifier clairement les paramètres de ces lois.

(b) **(2 points).** Identifier la TLS de V_n et celle de W_n.

(c) **(2 points).** D'après le résultat en (8b), démontrer que

$$W_n = V_n + \frac{Z_0}{\beta} \tag{6.9}$$

où $\frac{Z_0}{\beta}$ et V_n sont indépendantes avec $E[V_n] = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$.

(d) **(3 points).** Soit la v.a. $U = \frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{Z_0}{\beta}$. À partir de (6.13), du Théorème 6.7 et du Lemme 6.8, démontrer que $W_n \overset{\mathcal{D}}{\to} U$, quand $n \to \infty$.

(e) **(2 points).** Développer l'expression de $TVaR_k(U)$ en fonction de $TVaR_\kappa(Z_0)$.

(f) **(3 points).** Hypothèses **:** $\alpha = 2.5$, $\gamma = 1$, $\beta = \frac{1}{100}$, $\kappa = 0.95$. En supposant un nombre n de contrats très élevés, utiliser le résultat limite en (8d) pour calculer une approximation du benefice $B_{\kappa,n}$ de mutualisation par contrat défini par

$$B_{\kappa,n} = TVaR_{\kappa}\left(X_1\right) - TVaR_{\kappa}\left(W_n\right).$$

9. **(12 points).** Soit $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur de v.a. obéissant à une loi normale multivariée dont la fgm multivariée est donnée par

$$M_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = E\left[e^{t_1 X_1} ... e^{t_n X_n}\right] = e^{\sum_{i=1}^{n} \mu_i t_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j t_i t_j},$$

où

$$\mu_i = E[X_i] \text{ et } \sigma_i^2 = Var(X_i) \ \ (i = 1, 2, ..., n)$$

et

$$\rho_{i,j} = \rho_P(X_i, X_j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i) Var(X_j)}},$$

pour $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.
Hypothèses : $n = 3$ et

i	μ_i	σ_i
1	5	1
2	10	2
3	15	3

On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Questions :
(a) **(5 points).** Hypothèse : $\rho_{1,2} = -1$, $\rho_{1,3} = -0.6$, et $\rho_{2,3} = -0.5$
  i. **(1.5 points).** Développer la fgm de S pour démontrer que $S \sim Norm\left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$.
  ii. **(1.5 points).** Calculer les valeurs de μ_S et σ_S^2.
  iii. **(2 points).** Calculer $VaR_{0.9999}(S)$ et $TVaR_{0.9999}(S)$.

(b) **(4 points).** Soit ζ_κ une mesure avec $\kappa \in (0,1)$. Pour $\kappa \in (0,1)$, l'Index du Bénéfice de Mutualisation est défini par

$$IbM_\kappa = 1 - \frac{\zeta_\kappa(S) - E[S]}{\sum_{i=1}^{3} (\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i])} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

  i. **(1 point).** Quelle propriété ζ_k doit-elle satisfaire pour que $\varphi_1 \geq 0$?
  ii. **(1 point).** Quelle propriété ζ_k doit-elle satisfaire pour que chacun des 2 termes de la somme φ_2 soit positif ?
  iii. **(1 point).** Choisir la seule mesure parmi la VaR et la TVaR qui satisfait (i) et (ii) ; puis, calculer $IbM_{0.9999}$.
  iv. **(1 point).** Commenter brièvement le résultat.

(c) **(3 points).** Hypothèse : $\rho_{1,2} = -\frac{7}{11}$, $\rho_{1,3} = -\frac{7}{11}$, et $\rho_{2,3} = -\frac{7}{11}$.
  i. **(1 point).** Développer la fgm de S et identifier la loi de S.
  ii. **(1 point).** Avec la mesure choisie en (9(b)iii), calculer $IbM_{0.9999}$.
  iii. **(1 point).** Commenter brièvement le résultat.

10. **(6 points).** Soit la v.a.

$$X = \begin{cases} Y & , I = 1 \\ 0 & , I = 0 \end{cases},$$

où

$$I \sim Bern\,(0.4) \text{ et } Y \sim BNegComp\,(r, q; F_B)$$

sont des v.a. indépendantes avec

$r = 0.2$	$q = \frac{1}{2}$
$\Pr(B = 1000k) = \gamma\,(1-\gamma)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^+$	$\gamma = \frac{1}{4}$

On dispose des valeurs suivantes :

k	0	1	2	3
$f_Y\,(1000k)$	???	0.02176376	0.01795511	???

Questions :
(a) **(1 point).** Indiquer l'expression de $f_X\,(1000k)$, $k \in \mathbb{N}$.
(b) **(2 points).** Calculer $f_Y\,(0)$ et $f_X\,(0)$.
(c) **(2 points).** Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_Y\,(3000)$
(d) **(1 point).** Calculer $f_X\,(3000)$.

11. **(12 points).** Soient les v.a. indépendantes

$$Y_i \sim Tweedie\left(\tau_i, \gamma_i, 1\right) \quad , \quad i = 0, 1, 2,$$

avec

$$\mathcal{M}_{Y_i}(t) = E\left[\mathrm{e}^{tY_i}\right] = \mathrm{e}^{\tau_i\left(\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\gamma_i}-1\right)}, \text{ pour } i = 0, 1, 2$$

Soit le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2)$ où

$$X_1 = \frac{1}{\beta_1}\left(Y_1 + Y_0\right) \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1}{\beta_2}\left(Y_2 + Y_0\right) \quad .$$

Hypothèses :
- $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{5}$; $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 0.5$, $\tau_0 = 0.5$
- $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 2$, $\gamma_0 = 2$.

On définit $S = X_1 + X_2$.

Définition 6.9 *Soit la v.a. Y dont la fgm $\mathcal{M}_Y$ existe. Selon le principe exponentiel de prime, la prime majorée est* $\Pi_\kappa(Y) = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\mathcal{M}_Y(\kappa)\right)$.

Questions :

(a) **(4 points).**
   i. Développer l'expression de la fgm $\mathcal{M}_{X_i}(t_i)$ de la X_i, $i = 1, 2$.
   ii. Utiliser $\mathcal{M}_{X_i}(t_i)$ pour identifier la distribution univariée de la v.a. X_i, $i = 1, 2$. Justifier votre démarche. Spécifier clairement les paramètres des 2 distributions univariées.

(b) **(2 points).** Développer l'expression de la fgm multivariée de $\underline{X}$, définie par

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1, t_2) = E\left[\mathrm{e}^{t_1 X_1}\mathrm{e}^{t_2 X_2}\right].$$

(c) **(2 points).** Développer l'expression de la fgm de S définie par $\mathcal{M}_S(t)$. À partir de $\mathcal{M}_S(t)$, identifier la distribution de S en spécifiant clairement les paramètres de la distribution.

(d) **(4 points).** On fixe $\kappa = 0.05$. Calculer $\Pi_\kappa(S)$ et $E[S]$. Comparer les deux valeurs.

FIN

6.3 Solutions

1. **(5 points)**
   (a) **(1 point)** X_1 et X_2 sont antimonotones.
   (b) **(1 point)**
   - $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U)$
   - $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U)$

   (c) **(3 points)**
   $$S = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(1-U)$$
   On trouve donc que $S \in \{15, 17\}$ et $f_S(15) = f_S(17) = 0.5$.

TABLE 6.1. Calcul des valeurs de S

u	$Pr(u \in U)$	$F_{X_1}^{-1}(u)$	$F_{X_2}^{-1}(1-u)$	S
$]0, 0.25]$	$\frac{1}{4}$	3	14	17
$]0.25, 0.5]$	$\frac{1}{4}$	5	10	15
$]0.5, 0.75]$	$\frac{1}{4}$	8	7	15
$]0.75, 1]$	$\frac{1}{4}$	13	4	17

- 1 point pour les valeurs de s_j
- 1 point pour le calcul des $Pr(S = s_j)$
- 1 point pour les valeurs de f_S

2. **(12 points)**
   (a) **(4 points).** Démontrer $VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(X_1) + ... + VaR_\kappa(X_4)$, $\kappa \in (0,1)$ en justifiant clairement les étapes.
   - (1 point) Pour des variables aléatoires comonotones, on a

$$\begin{aligned} S &= F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + F_{X_3}^{-1}(U) + F_{X_4}^{-1}(U) \\ &= \varphi(U), \end{aligned}$$

     où $\varphi(U)$ est une fonction croissante de U.
   - (1 point) Alors

$$VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(\varphi(U))$$

     et selon la proposition 11.2.1 de l'annèxe,

$$VaR_\kappa(\varphi(U)) = \varphi(VaR_\kappa(U)),$$

     avec $VaR_\kappa(U) = \kappa$.
   - (2 points) On conclut donc que

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) = \varphi(\kappa) &= F_{X_1}^{-1}(\kappa) + F_{X_2}^{-1}(\kappa) + F_{X_3}^{-1}(\kappa) + F_{X_4}^{-1}(\kappa) \\ &= VaR_\kappa(X_1) + VaR_\kappa(X_2) + VaR_\kappa(X_3) + VaR_\kappa(X_4) \end{aligned}$$

   (b) **(8 points).** Calculer $VaR_{0.95}(S)$**.**
   - **(1.75 points).** VaR de X_1 :
     - L'expression de $F_{X_1}^{-1}$ est donnée par ...
     - On déduit que

$$\begin{aligned} 0.95 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{VaR_{0.95}(X_1)}{600}\right)^{-2}} \\ 0.95^{-1} &= 1 + \left(\frac{VaR_{0.95}(X_1)}{600}\right)^{-2} \\ 0.95^{-1} - 1 &= \left(\frac{VaR_{0.95}(X_1)}{600}\right)^{-2} \\ VaR_{0.95}(X_1) &= 600\left(0.95^{-1} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2615.3393661244054 \end{aligned}$$

   - **(1.75 points).** VaR de X_2 :
     - On a

$$\begin{aligned} VaR_{0.95}(X_2) &= VaR_{0.95}(10000 - 10000e^{R}) \\ &= 10000 - 10000e^{VaR_{1-0.95}(R)} \end{aligned}$$

- L'expression de F_R^{-1} est donnée par ...
- Ensuite

$$\begin{aligned}
0.05 &= \frac{1}{2} e^{\frac{VaR_{0.05}(R)-\mu}{\sigma}} \\
\ln(2 \times 0.05) &= \frac{VaR_{0.05}(R)-\mu}{\sigma} \\
\sigma \ln(2 \times 0.05) &= VaR_{0.05}(R) - \mu \\
VaR_{0.05}(R) &= \mu + \sigma \ln(2 \times 0.05) \\
&= -0.3805170185988091
\end{aligned}$$

- On obtient

$$\begin{aligned}
VaR_{0.95}(X_2) &= 10000 - 10000 e^{-0.3805170185988091} \\
&= 3164.9206847007272
\end{aligned}$$

- **(1.75 points).** VaR de X_3 :
  - On a

$$\begin{aligned}
VaR_{0.95}(X_3) &= VaR_{0.95}(110000Y - 10000) \\
&= 110000 \times VaR_{0.95}(Y) - 10000
\end{aligned}$$

  $Y \sim Gamma(5, 50)$
  - $Y = \frac{1}{50} X$, où $X \sim Gamma(5, 1)$
  - $VaR_\kappa(Y) = \frac{1}{50} VaR_\kappa(X)$
  - On regarde dans l'annexe 16.2 pour les quantiles de $X \sim Gamma(5, 1)$
  - $VaR_{0.95}(X) = 9.1535$
  - $VaR_{0.95}(Y) = \frac{1}{50} \times 9.1535 = 0.18307$
  - $VaR_{0.95}(X_3) = 110000 \times 0.18307 - 10000 = 10137.7$
- **(1.75 points).** VaR de X_4 :
  - L'expression de F_{X_4} est ...

– On obtient ...

$$
\begin{aligned}
0.95 &= F_{X_4}(VaR_{0.95}(X_4)) \\
0.95 &= 1 - q + qF_B(VaR_{0.95}(X_4)) \\
\frac{0.95 + q - 1}{q} &= F_B(VaR_{0.95}(X_4)) \\
VaR_{0.95}(X_4) &= F_B^{-1}\left(\frac{0.95 + q - 1}{q}\right) \\
&= \exp\left(\mu_B + \sigma_B VaR_{\frac{0.95+q-1}{q}}(Z)\right) \\
&= \exp\left(\mu_B + \sigma_B VaR_{0.5}(Z)\right) \\
&= \exp\left(\mu_B\right) \\
&= \exp\left(\ln(10000) - 0.5\right) \\
&= 10000 \exp(-0.5) \\
&= 6065.307
\end{aligned}
$$

- **(1 points).** VaR de S :

  $VaR_{0.95}(S) = 2615.34+3164.92+10137.7+6065.307 = 21983.27$

3. **(11 points)**
   (a) **(2 points).** Démontrer la **Proposition 6.1**.

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) &\leq \overline{F}_{\underline{X'}}(x_1, x_2) \\
\int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2)dx_1dx_2 &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X'}}(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
E[X_1X_2] &\leq E[X_1'X_2'] \\
E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] &\leq E[X_1'X_2'] - E[X_1']E[X_2'] \\
Cov(X_1, X_2) &\leq Cov(X_1', X_2') \\
\frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}} &\leq \frac{Cov(X_1', X_2')}{\sqrt{Var(X_1')}\sqrt{Var(X_2')}} \\
\rho_P(X_1, X_2) &\leq \rho_P(X_1', X_2')
\end{aligned}
$$

   (b) **(9 points).**
      i. **(2 points).** Pour $i = 1, 2$, démontrer que $X_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1, 2$.

$$
\begin{aligned}
Pr(X_i > x) &= Pr(\min(Y_i; Y_0) > x) \\
&= Pr(Y_i > x \cap Y_0 > x) \\
&= Pr(Y_i > x)Pr(Y_0 > x) \\
&= \exp(-(\beta_i - \lambda_0)x)\exp(-\lambda_0 x) \\
&= \exp(-\beta_i x + \lambda_0 x - \lambda_0 x) \\
&= \exp(-\beta_i x),
\end{aligned}
$$

      ce qui correspond à la fonction de survie d'une variable aléatoire exponentielle, i.e. $X_i \sim Exp(\beta_i)$.

      ii. **(2 points).** Démontrer que la fonction de survie de (X_1, X_2) est donnée par ..

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\
&= Pr(\min(Y_1; Y_0) > x_1, \min(Y_2; Y_0) > x_2) \\
&= Pr(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, Y_0 > \max(x_1; x_2)) \\
&= e^{-(\beta_1-\lambda_0)x_1}e^{-(\beta_2-\lambda_0)x_2}e^{-\lambda_0 \max(x_1;x_2)} \\
&= e^{-(\beta_1-\lambda_0)x_1}e^{-(\beta_2-\lambda_0)x_2}e^{-\lambda_0(x_1+x_2-\min(x_1;x_2))} \\
&= e^{-\beta_1 x_1}e^{-\beta_2 x_2}e^{-\lambda_0 \min(x_1;x_2)} \\
&= \overline{F}_{X_1}(x_1)\overline{F}_{X_2}(x_2)e^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)}
\end{aligned}
$$

      iii. **(1 point).** Soit $\lambda_0 = 0$. Utiliser l'expression de $\overline{F}_{X_1,X_2}$ en **(6.1)** pour démontrer que les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes.

$$\overline{F}_{X_1}(x_1)\overline{F}_{X_2}(x_2)e^{-(0)\min(x_1;x_2)} = \overline{F}_{X_1}(x_1)\overline{F}_{X_2}(x_2).$$

On conclut que les variables aléatoires sont indépendantes car la fonction de survie bivariée est le produit des deux fonctions de survies.

iv. **(2 points).**
- **(1 point).** Soit $\underline{X} = (X_1, X_2)$ et $\underline{X}' = (X_1', X_2')$ ...

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &\leq \lambda_0' \\
\lambda_0 \min(x_1; x_2) &\leq \lambda_0' \min(x_1; x_2) \\
e^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} &\leq e^{\lambda_0' \min(x_1;x_2)} \\
\overline{F}_{X_1}(x_1)\overline{F}_{X_2}(x_2)e^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} &\leq \overline{F}_{X_1}(x_1)\overline{F}_{X_2}(x_2)e^{\lambda_0' \min(x_1;x_2)} \\
\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &\leq \overline{F}_{X_1',X_2'}(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

- **(1 point).** On applique la proposition 1 et on obtient

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &\leq Cov(X_1', X_2') \text{ et} \\
\rho_P(X_1, X_2) &\leq \rho_P(X_1', X_2').
\end{aligned}$$

v. **(2 points).** Est-ce que cette loi bivariée peut introduire une corrélation négative entre X_1 et X_2 ? Justifier brièvement.
- De iii), on sait que si $\lambda_0 = 0$, les variables X_1 et X_2 sont indépendantes et $\rho_P(X_1, X_2) = 0$.
- De iv), on sait que si $\lambda_0 \leq \lambda_0'$, alors $\rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P(X_1', X_2')$.
- Vu que $0 \leq \lambda_0$, $0 \leq \rho_P(X_1, X_2)$
- On conclut que la distribution exponentielle bivariée de Marshall-Olkin est une distribution qui permet d'introduire de la dépendance positive entre deux variables aléatoire exponentielles.

4. **(12 points)**
   (a) **(2 points).** Développer la fgp de I_i et indiquer la loi univariée de I_i, $i = 1, 2$.
   On a

$$\begin{aligned} P_{I_i}(t) &= E\left[t^{I_i}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} tPr(I_i = k) \\ &= Pr(I_i = 0) + Pr(I_i = 0)t \\ &= \overline{F}_{X_i}(0.02) +_{X_i} (0.02)t \\ &= 0.98 + 0.02t. \end{aligned}$$

   On déduit que $I_i \sim Bern(0.02)$.
   (b) **(4 points).** Développer la fgp conjointe de (I_1, I_2) et indiquer clairement les valeurs non-nulles pouvant être prises par la fmp conjointe de (I_1, I_2).
   - On cherche d'abord le paramètre de dépendance.

$$\begin{aligned} F_{X_1}(1) &= 0.02 \\ 1 - e^{-\beta} &= 0.02 \\ \beta &= -\ln(1 - 0.02) \\ \beta &= 0.02020271 \\ \lambda_0 = \frac{\beta}{2} &= \frac{0.02020271}{2} = 0.01010135. \end{aligned}$$

   - Ensuite, on a

$$\begin{aligned} P_{I_1,I_2}(t_1, t_2) = E\left[t_1^{I_1} t_2^{I_2}\right] & \\ &= \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0)\, t_1^0 t_2^0 + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0)\, t_1^1 t_2^0 \\ &+ \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1)\, t_1^0 t_2^1 + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1)\, t_1^1 t_2^1 \end{aligned}$$

   - On calcule $\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0)$:

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) &= \Pr(X_1 > 1, X_2 > 1) \\ &= \overline{F}_{X_1,X_2}(1, 1) \\ &= \overline{F}_{X_1}(1)\overline{F}_{X_2}(1)e^{0.01010135\times 1} \\ &= 0.98 \times 0.98 \times e^{0.01010135} \\ &= 0.9701505. \end{aligned}$$

- On calcule $\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1)$:

$$\begin{aligned}\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) &= \Pr(X_1 \leq 1, X_2 \leq 1)\\ &= F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\\ &= F_{X_1}(1) + F_{X_2}(1) + \overline{F}_{X_1,X_2}(1,1) - 1\\ &= 0.02 + 0.02 + 0.9701505 - 1\\ &= 0.0101505\end{aligned}$$

- On calcule $\Pr(I_1 = 1, I_2 = 0)$:

$$\begin{aligned}\Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) &= \Pr(X_1 \leq 1, X_2 > 1)\\ &= F_{X_1}(1) - F_{X_1,X_2}(1,1)\\ &= 0.02 - 0.0101505\\ &= 0.0098495\end{aligned}$$

- On calcule $\Pr(I_1 = 0, I_2 = 1)$:

$$\begin{aligned}\Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) &= Pr(X_1 > 1, X_2 \leq 1)\\ &= F_{X_2}(1) - F_{X_1,X_2}(1,1)\\ &= 0.02 - 0.0101505\\ &= 0.0098495\end{aligned}$$

- On remplace et on obtient

$$P_{I_1,I_2}(t_1, t_2) = 0.9701505 + 0.0098495t_1 + 0.0098495t_2 + 0.0101505t_1t_2.$$

(c) **(2 points).** Développer la fgp de N et fournir les valeurs de sa fonction masse de probabilité.
On a observe que

$$\begin{aligned}S &= L_1 + L_2\\ &= 100 \times (1.04)I_1 - 0.04 \times 100 + 100 \times (1.04)I_2 - 0.04 \times 100\\ &= 100 \times (1.04)(I_1 + I_2) - 2 \times 0.04 \times 100\\ &= 104(I_1 + I_2) - 8\\ &= 104N - 8\end{aligned}$$

On conclut que $N = I_1 + I_2$.

La fgp de N est

$$\begin{aligned}
P_N(t) &= E\left[t^N\right] \\
&= E\left[t^{I_1+I_2}\right] \\
&= E\left[t^{I_1}t^{I_2}\right] \\
&= P_{I_1,I_2}(t,t) \\
&= 0.9701505 + 0.0098495t + 0.0098495t + 0.0101505t^2 \\
&= 0.9701505 + 0.019699t + 0.0101505t^2.
\end{aligned}$$

On trouve donc les valeurs suivantes des fonctions de masses de probabilités pour N et S :

$$f_N(k) = \begin{cases} 0.9701505, & \text{si } k = 0 \\ 0.0196990, & \text{si } k = 1 \\ 0.0101505, & \text{si } k = 2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_S(k) = \begin{cases} 0.9701505, & \text{si } k = -8 \\ 0.0196990, & \text{si } k = 96 \\ 0.0101505, & \text{si } k = 200 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d) **(4 points).** Indiquer les valeurs de a et b dans (6.2). Calculer $E[S]$ et $\Pr(S > 0)$.

- On remarque que $S = 104N - 8 = aN + b$, où $a = 104$ et $b = -8$.
- $E[N] = 0 \times 0.9701505 + 1 \times 0.0196990 + 2 \times 0.0101505 = 0.04$ (option #1)
- $E[N] = E[I_1 + I_2] = E[I_1] + E[I_2] = 0.02 + 0.02 = 0.04$ (option #2)
- $E[S] = E[104N - 8] = 104E[N] - 8 = -3.84$
- $\Pr(S > 0) = \Pr(S = 96) + \Pr(S = 200) = 0.0196990 + 0.0101505 = 0.0298495$.

5. **(10 points)**. On a

$$P_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = 0.4 + 0.3 \times (0.9 + 0.1t_1)^2 + 0.2 \times (0.8 + 0.2t_2)^2 + 0.1 \times (0.9 + 0.1t_1)^2 \times (0.8 + 0.2t_2)^2$$

(a) **(2 points).** Identifier l'expression $\mathcal{P}_{X_1}(t_1)$ et utiliser cette expression pour calculer toutes les valeurs de $\Pr(X_1 = k)$, $k = 0, 1, 2$.

- fgp de X_1 :

$$\begin{aligned} P_{X_1}(t_1) &= P_{X_1,X_2}(t_1, 1) \\ &= 0.4 + 0.3 \times (0.9 + 0.1t_1)^2 + 0.2 \times (0.8 + 0.2 \times 1)^2 \\ &+ 0.1 \times (0.9 + 0.1t_1)^2 \times (0.8 + 0.2 \times 1)^2 \\ &= 0.6 + 0.4 \times (0.9 + 0.1t_1)^2 \\ &= 0.6 + 0.4 \times 0.81 + 0.4 \times 0.18t_1 + 0.4 \times 0.01t_1^2 \\ &= 0.924 + 0.072t_1 + 0.004t_1^2 \end{aligned}$$

- On déduit que les valeurs suivantes :

k	0	1	2
$\Pr(X_1 = k)$	0.924	0.072	0.004

(b) **(2 points).** Identifier l'expression $\mathcal{P}_{X_2}(t_2)$ et utiliser cette expression pour calculer toutes les valeurs de $\Pr(X_2 = k)$, $k = 0, 1, 2$.

- fgp de X_1 :

$$\begin{aligned} P_{X_1}(t_1) &= P_{X_1,X_2}(1, t_2) \\ &= 0.4 + 0.3 \times (0.9 + 0.1 \times 1)^2 + 0.2 \times (0.8 + 0.2 \times t_2)^2 \\ &+ 0.1 \times (0.9 + 0.1 \times 1)^2 \times (0.8 + 0.2 \times t_2)^2 \\ &= 0.7 + 0.3 \times (0.8 + 0.2t_2)^2 \\ &= 0.6 + 0.3 \times 0.64 + 0.3 \times 0.32t_1 + 0.3 \times 0.04t_1^2 \\ &= 0.792 + 0.096t_1 + 0.012t_1^2 \end{aligned}$$

- On déduit que les valeurs suivantes :

k	0	1	2
$\Pr(X_1 = k)$	0.792	0.096	0.012

(c) **(6 points).** On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

i. Développer l'expression de $\mathcal{P}_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k t^k$. On a

$$P_S(t) = E\left[t^S\right] = E\left[t^{X_1+X_2}\right] = E\left[t^{X_1}t^{X_2}\right] = P_{X_1,X_2}(t,t)$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
P_S(t) = 0.4 &\\
&+ 0.3 \times (0.9 + 0.1t)^2\\
&+ 0.2 \times (0.8 + 0.2t)^2\\
&+ 0.1 \times (0.9 + 0.1t)^2 \times (0.8 + 0.2t)^2\\
&= 0.4\\
&+ 0.3 \times (0.9^2 + 2 \times 0.9 \times 0.1t + 0.1^2t^2)\\
&+ 0.2 \times (0.8^2 + 2 \times 0.8 \times 0.2t + 0.2^2t^2)\\
&+ 0.1 \times (0.9^2 + 2 \times 0.9 \times 0.1t + 0.1^2t^2) \times (0.8^2 + 2 \times 0.8 \times 0.2t + 0.2^2t^2)
\end{aligned}$$

Puis, on a

$$\begin{aligned}
&= \left(0.4 + 0.3 \times 0.9^2 + 0.2 \times 0.8^2 + 0.1 \times 0.9^2 \times 0.8^2\right)\\
&+ \left(\begin{array}{c} 0.3 \times 2 \times 0.9 \times 0.1 + 0.2 \times 2 \times 0.8 \times 0.2 \\ +0.1 \times (0.9^2 \times 2 \times 0.2 \times 0.8 + 2 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.8^2) \end{array}\right) \times t\\
&+ \left(\begin{array}{c} 0.3 \times 0.1^2 + 0.2 \times 0.2^2 \\ +0.1 \times (0.1^2 \times 0.8^2 + 0.9^2 \times 0.2^2 \\ +2 \times 0.1 \times 0.9 \times 2 \times 0.2 \times 0.8) \end{array}\right) \times t^2\\
&+ 0.1 \times (2 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.2^2 + 2 \times 0.1^2 \times 0.8 \times 0.2) \times t^3\\
&+ 0.1 \times (0.1^2 \times 0.2^2) \times t^4.
\end{aligned}$$

On obtient

$$P_S(t) = 0.82284 + 0.15544t + 0.02064t^2 + 0.00104t^3 + 0.0004t^4.$$

ii. Utiliser l'expression obtenue en (6.4) pour calculer toutes les valeurs non-nulles de $\Pr(S = k)$.
La fgp de S est $E\left[t^S\right] = f_S(0)t^0 + f_S(1)t^1 + f_S(2)t^2 + f_S(3)t^3 + f_S(4)t^4 + f_S(4)t^4 + \ldots$, et on remarque que les valeurs de $f_S(k)$ correspond au terme avant la variable t^k dans la fgp de S. On conclut que la fonction de masse de S

est

$$f_S(k) = \begin{cases} 0.82284, & \text{si } k = 0 \\ 0.15544, & \text{si } k = 1 \\ 0.02064, & \text{si } k = 2 \\ 0.00104, & \text{si } k = 3 \\ 0.00004, & \text{si } k = 4 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. **(6 points). Démonstration de l'algorithme de Panjer.**
   (a) **(1 point).** Identifier l'expression de la fgp $\mathcal{P}_X(t)$ de la v.a. X où $\mathcal{P}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k$ pour la loi Poisson composée.
   On a
   $$P_X(t) = E\left[t^X\right] = P_M(P_B(t)) = \exp\left(\lambda\left(P_B(t) - 1\right)\right)$$
   (b) **(1 point).** À partir de l'expression trouvée (6a) et de (6.7), démontrer le point de départ de l'algorithme en (6.6).
   Selon les propriétés de la fgp, on a $f_X(0) = P_X(0)$ et $f_B(0) = P_B(0)$. Alors, on a
   $$\begin{aligned} f_X(0) &= P_X(0) \\ &= P_M(P_B(0)) \\ &= P_M(f_B(0)) \\ &= e^{\lambda(f_B(0)-1)} \end{aligned}$$
   (c) **(4 points).** À partir de l'expression trouvée (6a), de (6.7) et de (6.5), démontrer la relation récursive de l'algorithme en (6.6). Suggestion : identifier clairement les étapes de votre démarches (développer la dérivée, etc.)
   On dérive
   $$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_X(t) &= \frac{d}{dt}P_M(P_B(t)) \\ &= P'_M(P_B(t))\frac{d}{dt}P_B(t) \\ &= \lambda P_M(P_B(t))\frac{d}{dt}P_B(t) \text{ par (5)} \end{aligned}$$
   On observe
   $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^{k-1} &= \lambda P_X(t) \sum_{k=0}^{\infty} k t^{k-1} f_B(k) \\ \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^{k-1} &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k \sum_{k=0}^{\infty} k t^{k-1} f_B(k) \end{aligned}$$

On multiplie chaque côté de l'équation par t

$$t \times \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^{k-1} = t \times \lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k \sum_{k=0}^{\infty} k t^{k-1} f_B(k)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k \sum_{k=1}^{\infty} k t^k f_B(k)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) t^k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k-j) f_B(j) t^k$$

Chaque terme de gauche correspond à un terme de droite pour un élément de la somme :

$$k f_X(k) = \lambda \sum_{j=0}^{k} j f_X(k-j) f_B(j)$$

qui devient

$$k f_X(k) = \lambda \sum_{j=1}^{k} j f_X(k-j) f_B(j)$$

On isole $f_X(k)$

$$f_X(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j f_X(k-j) f_B(j)$$

7. **(12 points)**
   (a) **(2 points).** Soit une v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$. Démontrer que $S = \varphi\,(U)$, où $\varphi\,(u)$ est une fonction convexe.
   - **(0.5 point).** On a
   $$S = F^{-1}\,(U) + F^{-1}\,(1-U) = \varphi\,(U)\,.$$
   - **(0.5 point).** Puisque $\overline{F}\,(x)$ est une fonction convexe (sur $\mathbb{R}^{+}$), alors $F^{-1}\,(u)$ est aussi une fonction convexe sur $(0,1)$.
   - **(0.5 point).** D'après le 2e lemme de la question et comme $F^{-1}\,(u)$ est aussi une fonction convexe sur $(0,1)$, alors $F^{-1}\,(1-u)$ est aussi une fonction convexe sur $(0,1)$.
   - **(0.5 point).** D'après le 1er lemme de la question, $\varphi\,(u)$ qui correspond à une somme de 2 fonctions convexes est aussi une fonction convexes sur $(0,1)$.

   (b) **(4 points).** Démontrer que
   - Par la convexité de φ sur $(0,1)$, pour $x > x_0$, il existe $0 < u_1 < \frac{1}{2} < u_2$ avec
   $$\varphi\,(u_1) = \varphi\,(u_2) = x.$$
   Alors, on a
   $$F_{X_1^- + X_2^-}\,(x) = \Pr\left(X_1^- + X_2^- \leq x\right) = u_2 - u_1.$$
   - Soit $\kappa \in (0,1)$. Puisque φ est une fonction continue, $F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}\,(\kappa)$ correspond à la solution de
   $$F_{X_1^- + X_2^-}\,(x) = u_2 - u_1 = \kappa. \tag{6.10}$$
   Comme φ est symétrique par rapport à $u = \frac{1}{2}$, il y a $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ où
   $$u_1 = \frac{1}{2} - \gamma \text{ et } u_2 = \frac{1}{2} + \gamma.$$
   Clairement, on a
   $$u_2 = \frac{1}{2} + \gamma = 1 - u_1.$$
   - Ainsi, (6.10) devient
   $$F_{X_1^- + X_2^-}\,(x) = \frac{1}{2} + \gamma - \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) = \kappa,$$

de laquelle on déduit $\gamma = \frac{\kappa}{2}$. Alors, on déduit

$$F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}(\kappa) = \varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) \text{ ou } F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}(\kappa) = \varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2}\right).$$

- Alors, à partir de la première égalité ou de la deuxième égalité, on obtient

$$F^{-1}_{X_1^- + X_2^-}(\kappa) = \varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) = F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) + F^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2}\right). \tag{6.11}$$

- Soit $\kappa \in (0,1)$. D'après (6.11), on déduit

$$\begin{aligned} VaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) &= F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) + F^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2}\right) \\ &= VaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X) + VaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X), \end{aligned}$$

qui correspond à (**??**).

- Soit $\kappa \in (0,1)$. Par la définition de la TVaR, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u\left(X_1^- + X_2^-\right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \Big(VaR_{\frac{1-u}{2}}(X) + VaR_{\frac{1+u}{2}}(X)\Big) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_{\frac{1-u}{2}}(X)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_{\frac{1+u}{2}}(X)\,\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{6.12}$$

- En définissant $s = \frac{1-u}{2}$ et $t = \frac{1+u}{2}$, (6.12) devient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\frac{1-\kappa}{2}}^0 VaR_s(X)(-2)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{1-\kappa}\int_{\frac{1+\kappa}{2}}^1 VaR_t(X)(2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\frac{1-\kappa}{2}}\int_0^{\frac{1-\kappa}{2}} VaR_s(X)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\frac{1-\kappa}{2}}\int_{\frac{1+\kappa}{2}}^1 VaR_t(X)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\frac{1-\kappa}{2}}\int_0^{\frac{1-\kappa}{2}} VaR_s(X)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{1-\frac{1+\kappa}{2}}\int_{\frac{1+\kappa}{2}}^1 VaR_t(X)\,\mathrm{d}t \\ &= LTVaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X) + TVaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X) \end{aligned}$$

qui est la relation voulue.

(c) **(6 points).**

i. **(2 points).** Démontrer que la fonction de survie $\overline{F}$ est convexe.

- Il suffit de dériver $\overline{F}$ à deux reprises p/r à x.

- 1 fois :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{F}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)^3}{\mathrm{d}x} = -3\left(\frac{1}{1+x}\right)^4$$

- 2 fois :

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{F}(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(-3\left(\frac{1}{1+x}\right)^4\right)}{\mathrm{d}x} = 12\left(\frac{1}{1+x}\right)^5 \geq 0,\ x \geq 0$$

ii. **(4 points).**

- **(1 point).** Calculer $VaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.99$.

$$VaR_\kappa(S) = VaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X_1) + VaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X_2).$$

On obtient

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(S) &= VaR_{\frac{1-0.99}{2}}(X) + VaR_{\frac{1+0.99}{2}}(X) \\ &= VaR_{0.005}(X) + VaR_{0.995}(X) \\ &= \lambda\left((1-0.005)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) + \lambda\left((1-0.995)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \\ &= 1 \times \left(0.995^{-\frac{1}{3}} - 1\right) + 1 \times \left(0.005^{-\frac{1}{3}} - 1\right) \\ &= 0.001672244 + 4.848035 \\ &= 4.849708. \end{aligned}$$

- **(3 points).** Calculer $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.99$.
On a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= LTVaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X) + TVaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X) \\ &= LTVaR_{0.005}(X) + TVaR_{0.995}(X) \end{aligned}$$

Puis, on a

$$
\begin{aligned}
LTVaR_{0.005}(X) &= \frac{1}{0.005}\int_0^{0.005} VaR_u(X)du \\
&= \frac{1}{0.005}E\left[X \times 1_{\{X \leq VaR_{0.005}(X)\}}\right] \\
&= \frac{1}{0.005}\left[\frac{\lambda}{\alpha-1}\left(1-\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+VaR_{0.005}(X))^{\alpha-1}}\right)-\right. \\
&\qquad \left. VaR_{0.005}(X) \times \left(\frac{\lambda}{\lambda+VaR_{0.005}(X)}\right)^{\alpha}\right] \\
&= \frac{1}{0.005}\left[\frac{1}{3-1}\left(1-\frac{1^{3-1}}{(1+0.001672244)^{3-1}}\right)-\right. \\
&\qquad \left. 0.001672244 \times \left(\frac{1}{1+0.001672244}\right)^{3}\right] \\
&= \frac{1}{0.005}\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(1.001672244)^2}\right) \\ -0.001672244 \times \left(\frac{1}{1.001672244}\right)^3 \end{array}\right] \\
&= 0.0008351906.
\end{aligned}
$$

Aussi, on a

$$
\begin{aligned}
TVaR_{0.995}(X) &= \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}(1-0.995)^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right) \\
&= 1 \times \left(\frac{3}{3-1}(1-0.995)^{-\frac{1}{3}}-1\right) \\
&= 1.5 \times 0.005^{-\frac{1}{3}}-1 \\
&= 7.772053
\end{aligned}
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(S) &= LTVaR_{0.005}(X) + TVaR_{0.995}(X) \\
&= 0.0008351906 + 7.772053 \\
&= 7.772888.
\end{aligned}
$$

8. **(14 points)**
   (a) **(2 points).** Développer l'expression de la TLS de X_i, $i = 1, 2, ..., n$. Identifier les lois univariées de X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ et spécifier clairement les paramètres de ces lois.
   - **(1.5 points).** On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_i}(t) &= E\left[e^{-tX_i}\right] \\
&= E\left[e^{-t\left(\frac{1}{\beta}(Z_0+Z_i)\right)}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{\beta}Z_0-\frac{t}{\beta}Z_i}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{\beta}Z_0}\right]E\left[e^{-\frac{t}{\beta}Z_i}\right] \\
&= \mathcal{L}_{Z_0}\left(\frac{t}{\beta}\right)\mathcal{L}_{Z_i}\left(\frac{t}{\beta}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)^{\gamma}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{\beta}}\right)^{\alpha-\gamma} \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

   - **(0.5 point).** On conclut que $X_i \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

   (b) **(2 points).** Identifier la TLS de V_n et celle de W_n.
   - **(1 point).** TLS de V_n :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{V_n}(t) &= E\left[e^{-tV_n}\right] \\
&= E\left[e^{-t\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i}{\beta}}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}Z_i}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}Z_i}\right] \\
&= \mathcal{L}_{Z_i}\left(\frac{t}{n\beta}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{n\beta}}\right)^{n(\alpha-\gamma)}
\end{aligned}$$

- **(1 point).** TLS de W_n :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= E\left[e^{-tW_n}\right] \\
&= E\left[e^{-t\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\beta}}\right] \\
&= E\left[e^{-t\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Z_0+Z_i)}{\beta}}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}Z_i+nZ_0\right)}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}Z_i-\frac{t}{n\beta}nZ_0}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}Z_i}\right]E\left[e^{-\frac{t}{\beta}Z_0}\right] \\
&= \mathcal{L}_{V_n}(t)\mathcal{L}_{Z_0}\left(\frac{t}{\beta}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{n\beta}}\right)^{n(\alpha-\gamma)}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)^{\gamma}
\end{aligned}$$

(c) **(2 points).** D'après le résultat en (8b), démontrer que

$$W_n = V_n + \frac{Z_0}{\beta} \tag{6.13}$$

où $\frac{Z_0}{\beta}$ et V_n sont indépendantes avec $E\left[V_n\right] = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$.

- **(1.5 points).** De (8b), on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= E\left[e^{-\frac{t}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}Z_i-\frac{t}{\beta}Z_0}\right] \\
&= E\left[e^{-V_nt-\frac{t}{\beta}Z_0}\right] \\
&= E\left[e^{-t\left(V_n+\frac{Z_0}{\beta}\right)}\right]
\end{aligned}$$

- **(0.5 point).** On conclut que $W_n = V_n + \frac{Z_0}{\beta}$.

(d) **(3 points).** Soit la v.a. $U = \frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{Z_0}{\beta}$. À partir de (6.13), du Théorème 6.7 et du Lemme 6.8, démontrer que $W_n \stackrel{\mathcal{D}}{\to} U$, quand $n \to \infty$.

- **(1 point).** On peut identifier la loi de U avec la proposition

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \mathcal{L}_{V_n}(t)\mathcal{L}_{Z_0}\left(\frac{t}{\beta}\right) \right\}$$
$$= \mathcal{L}_{Z_0}\left(\frac{t}{\beta}\right) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{t}{n\beta}}\right)^{n(\alpha-\gamma)}$$
$$= \mathcal{L}_{Z_0}\left(\frac{t}{\beta}\right) \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{V_n}(t)$$

- **(0.5 point).** Ensuite

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{V_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{t}{n\beta}}\right)^{n(\alpha-\gamma)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{t}{n\beta}\right)^{-n(\alpha-\gamma)}.$$

- **(1 point).** Avec le lemme 8, $x = \frac{t}{\beta}$ et $k = -(\alpha-\gamma)$, on trouve
$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{V_n}(t) = e^{\frac{-(\alpha-\gamma)}{\beta}t}$$
qui correspond à la TLS d'une variable avec une masse non-nulle seulement à $\frac{\alpha-\gamma}{\beta}$.
- **(0.5 point).** On conclut que $U = \frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{Z_0}{\beta}$.

(e) **(2 points).** Développer l'expression de $TVaR_k(U)$ en fonction de $TVaR_\kappa(Z_0)$.
- **(0.5 point).** La $TVaR$ est une mesure de risque cohérente.
- **(1.5 points).** Comme la TVaR est homogène et invariante à la translation (puisqu'elle est cohérente), on a

$$TVaR_\kappa(U) = TVaR_\kappa\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{Z_0}{\beta}\right) = \frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{1}{\beta}TVaR_\kappa(Z_0)$$

(f) **(3 points).** Hypothèses **:** $\alpha = 2.5$, $\gamma = 1$, $\beta = \frac{1}{100}$, $\kappa = 0.95$.
- **(0.5 point).** On a

$$VaR_{0.95}(Z_0) = -\frac{1}{1}\ln(1-0.95)$$
$$= 2.9957$$

$$\begin{aligned}TVaR_{0.95}(Z_0) &= VaR_{0.95}(Z_0) + E[Z_0] \\ &= 2.9957 + \frac{1}{1} \\ &= 3.9957\end{aligned}$$

- **(0.5 point).** On obtient

$$\begin{aligned}TVaR_{0.95}(U) &= \frac{\alpha-\gamma}{\beta} + \frac{1}{\beta}TVaR_{0.95}(Z_0) \\ &= 100 \times (2.5-1) + 100 \times TVaR_{0.95}(Z_0) \\ &= 100 \times (2.5-1) + 100 \times 3.9957 \\ &= 549.57\end{aligned}$$

- **(0.5 point).** Aussi, on a

$$\begin{aligned}VaR_{0.95}(X_1) &= \frac{1}{\beta}\overline{H}^{-1}(0.95; 2.5, 1) \\ &= 100 \times 5.5352 \\ &= 553.52\end{aligned}$$

- **(0.5 point).** et

$$\begin{aligned}TVaR_{0.95}(X_1) &= \frac{1}{1-0.95}\frac{\alpha}{\beta}\overline{H}(VaR_{0.95}(X_1); \alpha+1, \beta) \\ &= \frac{1}{1-0.95}250\overline{H}\left(553.52 \times \frac{1}{\beta}; 3.5, 1\right) \\ &= \frac{250}{0.05}\overline{H}(5.5352; 3.5, 1) \\ &= \frac{250}{0.05}[1 - H(5.5352; 3.5, 1)] \\ &= \frac{250}{0.05}[1 - 0.8614] \\ &= 693\end{aligned}$$

- **(1 point).** Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}B_{0.95,n} &= TVaR_{0.95}(X_1) - TVaR_{0.95}(W_n) \\ &\simeq TVaR_{0.95}(X_1) - TVaR_{0.95}(U) \\ &= 693 - 549.57 \\ &= 143.43.\end{aligned}$$

9. **(12 points).**
Questions :
(a) **(5 points).** Hypothèse : $\rho_{1,2} = -1$, $\rho_{1,3} = -0.6$, et $\rho_{2,3} = -0.5$
i. **(1.5 points).** Développer la fgm de S pour démontrer que $S \sim Norm\left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_S(t) &= \mathcal{M}_{X_1,X_2,X_3}(t,t,t)\\ &= \exp\left[t\sum_{i=1}^{3}\mu_i + \frac{1}{2}t^2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j\right]\end{aligned}$$

ii. **(1.5 points).** Calculer les valeurs de μ_S et σ_S^2.
On a

$$\sum_{i=1}^{3}\mu_i = 5 + 10 + 15 = 30$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j &= 1 + 2^2 + 3^2 - 2\times 1\times 1\times 2\\ &\quad -2\times 0.6\times 1\times 3 - 2\times 0.5\times 2\times 3\\ &= 0.4\end{aligned}$$

Alors, on constate

$$\mathcal{M}_S(t) = \exp\left[30t + \frac{0.4}{2}t^2\right]$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_S(t) &= \exp\left[30t + \frac{0.4}{2}t^2\right]\\ &= \exp\left[\mu_S t + \frac{\sigma_S^2}{2}t^2\right],\end{aligned}$$

où $\mu_S = 30$ et $\sigma_S^2 = 0.4$.
iii. **(2 points).** Calculer $VaR_{0.9999}\,(S)$ et $TVaR_{0.9999}\,(S)$.
- $VaR_{0.9999}(S) = VaR_{0.9999}(\mu_S + \sigma_S Z) = 30 + \sqrt{0.4}\times VaR_{0.9999}(Z) = 32.35211$
- $TVaR_{0.9999}(S) = TVaR_{0.9999}(\mu_S + \sigma_S Z) = 30 + \sqrt{0.4}\times TVaR_{0.9999}(Z) = 32.50356$

(b) **(4 points).** Soit ζ_κ une mesure avec $\kappa \in (0,1)$. Pour $\kappa \in (0,1)$, l'Index du Bénéfice de Mutualisation est défini par

$$IbM_\kappa = 1 - \frac{\zeta_\kappa(S) - E[S]}{\sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i])} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

i. **(1 point).** Quelle propriété ζ_k doit-elle satisfaire pour que $\varphi_1 \geq 0$?

- On a

$$\begin{aligned} IbM_\kappa &= 1 - \frac{\zeta_\kappa(S) - E[S]}{\sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i])} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i]) - \zeta_\kappa(S) + E[S]}{\sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i])} \\ &= \frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \end{aligned}$$

- On cherche dans quel cas $\varphi_1 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i]) - \zeta_\kappa(S) + E[S] &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^{3}(\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i]) &\geq \zeta_\kappa(S) - E[S] \\ \sum_{i=1}^{3}\zeta_\kappa(X_i) &\geq \zeta_\kappa(S) \end{aligned}$$

- ce qui est le cas quand la mesure de risque ζ_κ est sous-additive (annexe 12.1.P4)

ii. **(1 point).** Quelle propriété ζ_k doit-elle satisfaire pour que chacun des 2 termes de la somme φ_2 soit positif ?

- $\zeta_\kappa(X_i) - E[X_i]$ est positif quand le principe de marge de sécurité positive est satisfait (annexe 12.1.P1),

iii. **(1 point).** Choisir la seule mesure parmi la VaR et la TVaR qui satisfait (i) et (ii) ; puis, calculer $IbM_{0.9999}$. La mesure de risque VaR n'est pas sous-additive et ne satisfait pas le principe de marde de sécurité positive.

- La mesure de risque $TVaR$ satisfait (i) et (ii).
- $\zeta_= TVaR$
- $IbM_{0.9999} = 1 - \frac{TVaR_{0.9999}(S)+E[S]}{\sum_{i=1}^{3}(TVaR_{0.9999}(X_i)-E[X_i])}$
- $TVaR_{0.9999}(X_1) - E[X_1] = 5 + 1 \times TVaR_{0.9999}(Z) - 5 = TVaR_{0.9999}(Z)$

- $TVaR_{0.9999}(X_2) - E[X_2] = 10 + 2 \times TVaR_{0.9999}(Z) - 10 = 2TVaR_{0.9999}(Z)$
- $TVaR_{0.9999}(X_3) - E[X_3] = 15 + 3 \times TVaR_{0.9999}(Z) - 15 = 3TVaR_{0.9999}(Z)$
- $TVaT_{0.9999}(S) - E[S] = 30 + \sqrt{0.4}TVaR_{0.9999}(Z) - 30 = \sqrt{0.4}TVaR_{0.9999}(Z)$
- On obtient

$$\begin{aligned}
IbM_{0.9999} &= 1 - \frac{TVaR_{0.9999}(S) + E[S]}{\sum_{i=1}^{3}(TVaR_{0.9999}(X_i) - E[X_i])} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{0.4} \times TVaR_{0.9999}(Z)}{TVaR_{0.9999}(Z) + 2 \times TVaR_{0.9999}(Z) + 3 \times TVaR_{0.9999}(Z)} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{0.4} \times TVaR_{0.9999}(Z)}{6 \times TVaR_{0.9999}(Z)} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{0.4}}{6}
\end{aligned}$$

iv. **(1 point).** Commenter brièvement le résultat.

(c) **(3 points).** Hypothèse : $\rho_{1,2} = -\frac{7}{11}$, $\rho_{1,3} = -\frac{7}{11}$, et $\rho_{2,3} = -\frac{7}{11}$.

i. **(1 point).** Développer la fgm de S et identifier la loi de S.

- On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= \mathcal{M}_{X_1,X_2,X_3}(t,t,t) \\
&= \exp\left[t\sum_{i=1}^{3}\mu_i + \frac{1}{2}t^2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j\right]
\end{aligned}$$

- On a

$$\sum_{i=1}^{3}\mu_i = 5 + 10 + 15 = 30$$

- On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j &= 1 + 2^2 + 3^2 - 2 \times \frac{7}{11} \times 1 \times 2 - 2 \times \frac{7}{11} \times 1 \times 3 - 2 \times \frac{7}{11} \times 2 \times 3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

- On obtient

$$\mathcal{M}_S(t) = \exp[30t + 0]$$

- et

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= \exp[30t] \\
&= \exp[\mu_S t],
\end{aligned}$$

où $\mu_S = 30$. Cela siginifie que la v.a. S prend la valeur 30 avec une probabilité 1.

ii. **(1 point).** Avec la mesure choisie en (9(b)iii), calculer $IbM_{0.9999}$.
   - $VaR_{0.9999}(S) = 30$
   - $TVaR_{0.9999}(S) = 30$
   - $IbM_{0.9999} = 1$

iii. **(1 point).** Commenter brièvement le résultat.

10. **(6 points).**

(a) **(1 point).** Indiquer l'expression de $f_X(1000k)$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f_X(1000k) &= Pr(X = 1000k) \\ &= Pr(I = 1, Y = 1000k) + Pr(I = 0, 0 = 1000k) \\ &= Pr(I = 1) \times Pr(Y = 1000k) + Pr(I = 0) \times 1_{\{k=0\}} \\ &= 0.4 f_Y(1000k) + 0.6 \times 1_{\{k=0\}} \end{aligned}$$

(b) **(2 points).** Calculer $f_Y(0)$ et $f_X(0)$.

- $f_Y(0)$:

$$\begin{aligned} f_Y(0) &= P_Y(0) \\ &= P_M(P_B(0)) \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)f_B(0)}\right)^r \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)\times 0}\right)^r \\ &= q^r \\ &= 0.8705505632961241 \end{aligned}$$

- $f_X(0)$:

$$\begin{aligned} f_X(0) &= 0.4 f_Y(1000k) + 0.6 \times 1_{\{k=0\}} \\ &= 0.4 \times 0.8705506 + 0.6 \\ &= 0.9482202253184496 \end{aligned}$$

(c) **(2 points).** Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_Y(3000)$.

- **(0.5 point)** On a

$$\begin{aligned} f_Y(3000) &= \frac{\sum_{j=1}^{3}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_Y((3-j)\times 1000)}{1-(1-q)f_B(0)} \\ &= \sum_{j=1}^{3}\left(1-0.5+\frac{(1-0.5)(0.2-1)j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_Y((3-j)\times 1000) \\ &= \sum_{j=1}^{3}\left(0.5-0.4\frac{j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_Y((3-j)\times 1000) \end{aligned}$$

- **(1.5 points).** qui devient

$$\begin{aligned}
f_Y(3000) &= \left(0.5 - \frac{0.4}{3}\right) f_B(1 \times 1000) f_Y((3-1) \times 1000) + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 2}{3}\right) f_B(2 \times 1000) f_Y((3-2) \times 1000) + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 3}{3}\right) f_B(3 \times 1000) f_Y((3-3) \times 1000) \\
&= \left(0.5 - \frac{0.4}{3}\right) f_B(1000) f_Y(2000) + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 2}{3}\right) f_B(2000) f_Y(1000) + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 3}{3}\right) f_B(3000) f_Y(0) \\
&= \left(0.5 - \frac{0.4}{3}\right) 0.25 \times 0.01795511 + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 2}{3}\right) 0.25 \times 0.75 \times \times 0.02176376 + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 3}{3}\right) 0.25 \times 0.75^2 \times 0.87055056 \\
&= 0.01484017
\end{aligned}$$

(d) **(1 point).** Calculer $f_X(3000)$.

- $f_X(3000) = 0.4 f_Y(3000) = 0.4 \times 0.01484017 = 0.005936068$

11. **(12 points).**
    (a) **(4 points).**
        i. Développer l'expression de la fgm $\mathcal{M}_{X_i}(t_i)$ de la X_i, $i = 1, 2$.
        ii. Utiliser $\mathcal{M}_{X_i}(t_i)$ pour identifier la distribution univariée de la v.a. X_i, $i = 1, 2$. Justifier votre démarche. Spécifier clairement les paramètres des 2 distributions univariées.
            - Étape #1 **(2 points).**

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{X_i}(t) &= E\left[e^{tX_i}\right] \\
&= E\left[e^{\frac{t}{\beta_i}(Y_i+Y_0)}\right] \\
&= E\left[e^{\frac{t}{\beta_i}Y_i}e^{\frac{t}{\beta_i}Y_0}\right] \\
&= E\left[e^{\frac{t}{\beta_i}Y_i}\right]E\left[e^{\frac{t}{\beta_i}Y_0}\right] \text{ (indépendance de } Y_i \text{ et } Y_0) \\
&= \mathcal{M}_{Y_i}\left(\frac{t}{\beta_i}\right)\mathcal{M}_{Y_0}\left(\frac{t}{\beta_i}\right)
\end{aligned}
$$

            - Étape #2**(2 points).**

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{X_i}(t) &= \exp\left[\tau_i\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_i}\right)^{\gamma_i}-1\right)\right]\exp\left[\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_i}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right] \\
&= \exp\left[\tau_i\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_i}\right)^{\gamma_i}-1\right)+\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_i}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right] \\
&= \exp\left[(\tau_i+\tau_0)\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_i}\right)^{\gamma_i}-1\right)\right]
\end{aligned}
$$

car $\gamma_i = \gamma_0$. On conclut que $X_i \sim \mathit{Tweedie}(\tau_i + \tau_0, \gamma_i, \beta_i)$.

    (b) **(2 points).** Développer l'expression de la fgm multivariée de $\underline{X}$, définie par

$$
\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1, t_2) = E\left[\mathrm{e}^{t_1X_1}\mathrm{e}^{t_2X_2}\right].
$$

    - Étape #1 (1 pt)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1, t_2) &= E\left[e^{t_1X_1}e^{t_2X_2}\right] \\
&= E\left[e^{\frac{t_1}{\beta_1}(Y_1+Y_0)}e^{\frac{t_2}{\beta_2}(Y_2+Y_0)}\right] \\
&= E\left[e^{\frac{t_1}{\beta_1}Y_1+\frac{t_2}{\beta_2}Y_2+\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}\right)Y_0}\right] \\
&= \mathcal{M}_{Y_1}\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)\mathcal{M}_{Y_2}\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)\mathcal{M}_{Y_0}\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}\right)
\end{aligned}
$$

- Étape #2 (1 pt)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1,t_2) &= \exp\left[\tau_1\left(\left(\frac{1}{1-t_1/\beta_1}\right)^{\gamma_1}-1\right)\right] \\
&\times \exp\left[\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-t_2/\beta_2}\right)^{\gamma_2}-1\right)\right] \\
&\times \exp\left[\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right]
\end{aligned}
$$

(c) **(2 points).** Développer l'expression de la fgm de S définie par $\mathcal{M}_S\left(t\right)$. À partir de $\mathcal{M}_S\left(t\right)$, identifier la distribution de S en spécifiant clairement les paramètres de la distribution.

- Étape #1 (1 pt)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= \mathcal{M}_{\underline{X}}(t,t) \\
&= \exp\left[\tau_1\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_1}-1\right)\right] \\
&\times \exp\left[\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_2}-1\right)\right] \\
&\times \exp\left[\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-t\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right] \\
&= \exp\left[\begin{array}{c} \tau_1\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_1}-1\right)+\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_2}\right)^{\gamma_2}-1\right) \\ +\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-t\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right) \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

qui devient

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left[\begin{array}{c} \tau_1\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_1}-1\right)+\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-t/\beta_2}\right)^{\gamma_2}-1\right) \\ +\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-t\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right) \end{array}\right] \\
&= \exp\left[\tau_S\left(\begin{array}{c} \frac{\tau_1}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_1}+\frac{\tau_2}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t/\beta_2}\right)^{\gamma_2} \\ +\frac{\tau_0}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1 \end{array}\right)\right] \\
&= \exp\left[\tau_S\left(M_B(t)-1\right)\right]
\end{aligned}
$$

avec $\tau_S = \tau_1 + \tau_2 + \tau_0$ et

$$M_B(t) = \frac{\tau_1}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t/\beta_1}\right)^{\gamma_1} + \frac{\tau_2}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t/\beta_2}\right)^{\gamma_2} + \frac{\tau_0}{\tau_S}\left(\frac{1}{1-t\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}.$$

- Étape #2 (1 pt)On remarque que $S \sim PoisComp(\tau_S, F_B)$ et que B obéit à une combinaison de distributions gamma.

(d) **(4 points).** On fixe $\kappa = 0.05$. Calculer $\Pi_\kappa(S)$ et $E[S]$. Comparer les deux valeurs.

- **(1 point).** On commence avec

$$\begin{aligned}\Pi_\kappa(S) &= \frac{1}{\kappa}\ln\{(\mathcal{M}_S(\kappa))\} \\ &= \frac{1}{\kappa}\ln\left\{\begin{array}{c}\exp\left[\tau_1\left(\left(\frac{1}{1-\kappa/\beta_1}\right)^{\gamma_1}-1\right)\right] \\ \times\exp\left[\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-\kappa/\beta_1}\right)^{\gamma_2}-1\right)\right] \\ \exp\left[\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-\kappa\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right]\end{array}\right\}\end{aligned}$$

- **(1 point).** qui devient

$$\begin{aligned}\Pi_\kappa(S) &= \frac{1}{\kappa}\left(\tau_1\left(\left(\frac{1}{1-\frac{\kappa}{\beta_1}}\right)^{\gamma_1}-1\right)\right) \\ &\quad+\frac{1}{\kappa}\left(\tau_2\left(\left(\frac{1}{1-\frac{\kappa}{\beta_2}}\right)^{\gamma_2}-1\right)\right) \\ &\quad+\frac{1}{\kappa}\left(\tau_0\left(\left(\frac{1}{1-\kappa\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}-1\right)\right)\end{aligned}$$

- Hypothèses :
  - $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{5}$; $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 0.5$, $\tau_0 = 0.5$
  - $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 2$, $\gamma_0 = 2$.
- **(2 points).** On calcule

$$\begin{aligned}\Pi_{0.05}(S) &= 20\left(2\left(\left(\frac{1}{1-\frac{0.05}{0.5}}\right)^2-1\right)\right)+20\left(0.5\left(\left(\frac{1}{1-\frac{0.05}{0.2}}\right)^2-1\right)\right) \\ &\quad+20\left(0.5\left(\left(\frac{1}{1-0.05\left(\frac{1}{0.5}+\frac{1}{0.2}\right)}\right)^2-1\right)\right) \\ &= 30.8291328804\end{aligned}$$

- Calcul de $E[S]$: 2 options

– Option #1 :

$$\begin{aligned}
E[S] &= E[X_1] + E[X_2] \\
&= \frac{1}{\beta_1}\left(E[Y_1] + E[Y_0]\right) + \frac{1}{\beta_2}\left(E[Y_2] + E[Y_0]\right) \\
&= 2 \times (2 \times 2 \times 1 + 0.5 \times 2) + 5 \times (0.5 \times 2 \times 1 + 0.5 \times 2) \\
&= 20
\end{aligned}$$

– Option #2 : On a

$$E[S] = \tau_S E[B] = \tau_1 \frac{\gamma_1}{\beta_1} + \tau_2 \frac{\gamma_2}{\beta_2} + \tau_0 \frac{\gamma_0}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}}$$

où

$$E[B] = \frac{\tau_1}{\tau_S}\frac{\gamma_1}{\beta_1} + \frac{\tau_2}{\tau_S}\frac{\gamma_2}{\beta_2} + \frac{\tau_0}{\tau_S}\frac{\gamma_0}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
E[S] &= 2\frac{2}{\frac{1}{2}} + 0.5\frac{2}{\frac{1}{5}} + 0.5\frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}} \\
&= 2 \times 2 \times 2 + 0.5 \times 2 \times 5 + 0.5 \times 2 \times 7 \\
&= 20
\end{aligned}$$

Annexe A
Logiciel et bibliothèques R

Dans cet ouvrage, les calculs sont effectués en R. Les bibliothèques suivantes peuvent être utilisés :

ActuaR	polynom	statmod
copula	pracma	stats
lifecontingencies	psych	SuppDists
MASS	cubature	Deriv

References

[1] Banque du Canada (2018). https://www.banqueducanada.ca/taux/taux-dinteret/obligations-canadiennes/.

[2] Marceau, E. (2013). Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat: modèles sur une période. Springer.