Act-3000 Théorie du risque

Processus de Poisson et modèles dynamiques

Étienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

A2019: Série no3

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières I

Table des matières II

Introduction

Les processus de comptage sont essentiels pour la modélisation des risques en actuariat.

Définition 1

On dit que $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ *est un processus de comptage (dénombrement) si*

1. $N(0) = 0$
2. $N(t) \geq 0$
3. *Si* $t > s$, *on a* $N(t) \geq N(s)$
4. *Si* $t > s$, *on a* $N(t) - N(s)$ *correspond au nombres d'évènements (p. ex., sinistres) encourus durant l'intervalle* $(s, t]$

Introduction

On considère processus de comptage (dénombrement) suivants :

- processus de Poisson homogène ;
- processus de Poisson non-homogène (NH) ;
- processus de Poisson mixte ;
- processus de renouvellement.

En actuariat, les processus de comptage sont souvent utilisés pour modéliser le processus d'avènement des sinistres.

Un cours de processus aléatoires (stochastiques) est un pré-requis à la compréhension des notions apprises dans ce chapitre.

Introduction

Notation

Notation

Soit un processus de dénombrement $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$.

On fixe $0 \leq s < s+t < \infty$.

L'accroissement du processus $\underline{N}$ sur l'intervalle de temps $(s, s+t]$ est noté par

$$N(s, s+t] = N(s+t) - N(s).$$

L'accroissement $N(s, s+t]$ est une v.a. discrète positive prenant valeur sur le support $\mathbb{N}$.

La fgp de $N(s, s+t]$ est

$$\mathcal{P}_{N(s,s+t]} = E[r^{N(s,s+t]}],$$

pour $r \in [0,1]$.

Modèles dynamiques en actuariat

Modèles dynamiques en actuariat

Un processus est l'outil mathématique (et probabiliste) qui a été conçu pour modéliser l'évolution d'un phénomène dans le temps.

Il en résulte un modèle est dit *dynamique*.

Exemples de phénomènes (en classe) :

-
-
-

Modèles dynamiques en actuariat

En actuariat, les modèles dynamiques servent à décrire l'évolution des coûts dans le temps pour un portefeuille de risques d'une compagnie d'assurance ou d'une institution financière.

Un modèle dynamique de risque est défini à l'aide d'un processus aléatoire (stochastique) ou de plusieurs processus aléatoires.

Processus agrégé et motivations

Processus agrégé et motivations

Soit un processus de dénombrement $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$.

$\underline{N}$ désigne le processus de nombre de sinistres

L'accroissement $N(s, s+t]$ est une v.a. représentant le nombre de sinistres sur l'intervalle de temps $(s, s+t]$.

Exemples (en classe) :

-
-
-

Processus agrégé et motivations

Soit $\underline{X} = \{X_k, k \in \mathbb{N}_+\}$ une suite de v.a. positives iid, continues ou discrètes.

La v.a. X_k désigne le montant (les coûts) du $k$ième sinistre, pour $k \in \mathbb{N}_+$.

Convention : $X_k \sim X$, pour $k \in \mathbb{N}_+$, dont la fonction de répartition est notée par F_X et la TLS est notée par $\mathcal{L}_X$.

Exemples :

-
-
-

Processus agrégé et motivations

On définit le processus agrégé par $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ avec $S(0) = 0$ et

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} X_k & , N(t) > 0 \\ 0 & , N(t) = 0 \end{cases}$$

Selon ce modèle dynamique, on utilise un processus agrégé pour décrire l'évolution des coûts d'un portefeuille d'une compagnie d'assurance.

Processus agrégé et motivations

$S(t) = S(0,t]$, $t > 0$, est définie par une somme aléatoire.

Alors, on utilise les notions apprises pour identifier les caractéristiques d'une v.a. définie par une somme aléatoire pour déterminer les caractéristiques de $S(t) = S(0,t]$, $t > 0$.

Fonction de répartition :

$$F_{S(t)}(x) = \Pr(N(t) = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(N(t) = j) F_{X_1+\cdots+X_k}(x)$$

Transformation Laplace Stieltjes (TLS) :

$$\mathcal{L}_{S(t)}(u) = E[e^{-uS(t)}] = \mathcal{P}_{N(t)}(\mathcal{L}_X(u))$$

Espérance :

- Supposons que $E[N(t)] < \infty$ et $E[X] < \infty$.
- Alors
$$E[S(t)] = E[N(t)]E[X].$$
- Preuve : en exercice.

Variance :

- Supposons aussi que $E[N(t)^2] < \infty$ et $E[X^2] < \infty$.
- Alors
$$Var[S(t)] = E[N(t)]Var[X] + Var[N(t)]E[X]^2.$$
- Preuve : en exercice.

Processus agrégé et motivations

On peut aussi s'intéresser à l'accroissement de la somme sur $(s,s+t]$:

$$S(s,s+t] = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(s,s+t]} X_k & , N(s+s+t] > 0 \\ 0 & , N(s,s+t] = 0 \end{cases}$$

où k désigne le k-ième sinsitre sur $(s+s+t]$.

Exercice : identifier les expressions de la fonction de répartition, de la TLS, de l'espérance et la variance de $S(s,s+t]$.

Processus agrégé et motivations

Selon le modèle classique de risque, $\underline{N}$ est modélisé par un processus de Poisson homogène avec une intensité $\lambda > 0$.

On a aussi recours à des extensions tel que le processus de Poisson non-homogène, le processus de Poisson mixte ou le processus de renouvellement.

$\underline{S}$ est appelé le processus des coûts agrégés.

On présente les différents processus pour $\underline{N}$ et on revient au autres propriétés de $\underline{S}$.

Processus de Poisson homogène

Définition 2

Le processus de comptage $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $N(0) = 0$;
2. *un accroissement sur un intervalle de temps de longueur t obéit à une loi Poisson de paramètre λt $(t > 0)$:*
   - $N(t) \sim Pois(\lambda t)$;
   - $N(s, s+t] \sim Pois(\lambda t)$;
3. $\underline{N}$ *a des accroissements indépendants :*
   - *pour $0 \leq s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2 < \infty$, $N(s_1, s_2]$ et $N(t_1, t_2]$ sont indépendants ;*
   - *c.-à-d., les accroissements sur deux intervalles disjoints de temps sont indépendants ;*
4. $\underline{N}$ *a des accroissements stationnaires : $N(t) \sim N(s, s+t]$.*

Illustration de trajectoires (en classe) :

Le terme λ correspond au taux (intensité) du processus.

On définit l'intensité cumulée par

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda \mathrm{d}s = \lambda t, \text{ pour } t > 0.$$

De plus, on note

$$\Lambda(s,s+t] = \Lambda_s(t) = \Lambda(s+t) - \Lambda(s), \text{ pour } s \geq 0 \text{ et } t > 0,$$

avec la convention $\Lambda(0,t] = \Lambda_0(t) = \Lambda(t)$, $t > 0$.

Illustration en classe: trajectoire de $\underline{N}$ sur $(0,t]$ vs $\Lambda(t)$

On sait que $N(s,s+t] = N(s+t) - N(s)$ obéit une distribution de Poisson avec moyenne λt

$$\begin{aligned} \Pr(N(s,s+t] = k) &= \Pr(N(s+t) - N(s) = k) \\ &= e^{-\Lambda(s,s+t]}\frac{\Lambda(s,s+t]^k}{k!} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $s \geq 0$.

Q : Quelle est l'expression de la fgp de $N(s,s+t]$?

Les évènements (p. ex., sinistres) se produisent aux durées représentées par les v.a. T_k, $k = 1,2,...$ où

$$0 < T_1 < T_2 < ... \tag{1}$$

Les temps écoulés entre chaque évènements sont définis par

$$\begin{aligned} W_1 &= T_1 \\ W_k &= T_k - T_{k-1} \end{aligned}$$

pour $k = 2,3,....$

Illustration en classe :

On sait que $\underline{W} = \{W_k, k = 1,2,...\}$ forme une suite de v.a. iid obéissant à une loi exponentielle avec moyenne $\frac{1}{\lambda}$.

Il en résulte que

$$T_k \sim Erlang\left(k;\lambda\right)$$

avec $k \in \mathbb{N}^+$.

Illustration en classe :

Une définition alternative pour $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ est

$$N(t) = \sup\{k \in \mathbb{N}_+ : T_k \leq t\}, \qquad t \geq 0$$

où $\sup\{\varnothing\} = 0$.

Exemple

- *Pour la trajectoire $j = 1$ de $\underline{N}$, on observe $T_1^{(1)} = 3.76$, $T_2^{(1)} = 7.04$ et $T_3^{(1)} = 9.51$.*
- *Alors, $N^{(1)}(2) = 0$, $N^{(1)}(7.04) = 2$ et $N^{(1)}(9.5) = 2$.*

Cette définition correspond à la définition d'un processus de renouvellement ordinaire (voir la section sur les processus de renouvellement).

Le processus de Poisson $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ possède les propriétés suivantes:

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants et stationnaires
3. $N(t) \sim Pois(\lambda t)$
4. $N(s, s+t] = N(s+t) - N(s) \sim Pois(\lambda t)$
5. $\Pr(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$ avec $h \to 0$
6. $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$ avec $h \to 0$
7. $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ avec $h \to 0$ où $o(h) \to 0$ avec $h \to 0$.

Le résultat suivant est très important en actuariat.

Proposition 1

Soit les processus de Poisson indépendants $\underline{N}_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$ *et* $\underline{N}_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$ *avec des taux* λ_1 *et* λ_2. *Alors, le processus défini par*

$$\underline{M} = \{M(t), t \geq 0\}$$

où

$$M(t) = N_1(t) + N_2(t),$$

est aussi un processus de Poisson process avec un taux $\lambda_1 + \lambda_2$.

Preuve

À faire en exercice.

L'algorithme 2 permet de simuler les n premières occurrences du parcours (trajectoire) j d'un processus $\underline{N}$ de Poisson avec une intensité $\lambda > 0$

Algorithme 2

Algorithme PP1

1. *On fixe* $T_0^{(j)} = 0$.
2. *Pour* $i = 1,\ldots,n$, *on a*
   1. *On simule* $W_i^{(j)}$;
   2. *On calcule* $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$.

L'algorithme 2 est simple d'application.

Toutefois, il n'est pas toujours efficace si l'on souhaite produire des simulations du processus $\underline{N}$ sur un intervalle fixe $(0,t]$.

On a recours à l'algorithme 3.

Algorithme 3

Algorithme PP2

1. *On fixe* $T_0^{(j)} = 0$.
2. *On simule la réalisation* $N(t)^{(j)}$ *de* $N(t)$.
3. *Sachant* $N(t) = N(t)^{(j)} > 0$,
   1. *On simule le vecteur de réalisations* $\left(U_1^{(j)},\ldots,U_{N(t)^{(j)}}^{(j)}\right)$ *de* $\left(U_1,\ldots,U_{N(t)^{(j)}}\right)$, *où les v.a.* $U_i \sim U \sim Unif(0,1)$;
   2. *On trie les réalisations en [1] et on obtient* $\left(U_{[1]}^{(j)},\ldots,U_{\left[N(t)^{(j)}\right]}^{(j)}\right)$ *où* $U_{[1]}^{(j)} < \ldots < U_{\left[N(t)^{(j)}\right]}^{(j)}$.
   3. *On calcule* $T_i^{(j)} = t \times U_{[i]}^{(j)}$, *pour* $i = 1,\ldots,N(t)^{(j)}$.

L'algorithme 3 est basé sur la proposition suivante.

Proposition 4

Soit un processus de Poisson $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ *avec le taux* λ. *Soit le vecteur de v.a. continues iid* $(Y_1 \ldots, Y_n)$ *où* $Y_i \sim Y \sim Unif(0,t)$ *avec* $f_Y(t) = \frac{1}{t}$, $t \in (0,t]$, *pour* $i = 1,2,\ldots,n$. *On définit le vecteur de statistiques d'ordre* $\left(Y_{[1]}, \ldots, Y_{[n]}\right)$ *à partir de* $(Y_1 \ldots, Y_n)$.
Alors, on a

$$(T_1, T_2, \ldots, T_n | N(t) = n) \sim \left(Y_{[1]}, Y_{[2]}, \ldots, Y_{[n]}\right).$$

Preuve

À faire en classe.

La preuve de la proposition 4 s'appuie sur le lemme suivant.

Lemme 1

Soit le vecteur de v.a. continues iid $(Y_1 \ldots, Y_n)$ *où* $Y_i \sim Y$ *avec la fonction de densité* $f_{Y_i} = f_Y$, *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$. *On définit le vecteur de statistiques d'ordre* $\left(Y_{[1]}, \ldots, Y_{[n]}\right)$ *à partir de* $(Y_1 \ldots, Y_n)$. *Alors, la fonction de densité de conjointe de* $\left(Y_{[1]}, \ldots, Y_{[n]}\right)$ *est donnée par*

$$f_{Y_{[1]}, Y_{[2]}, \ldots, Y_{[n]}}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n! f_Y(y_1) \times f_Y(y_2) \times \ldots \times f_Y(y_n), \; y_1 < y_2 < \ldots < y_n. \quad (2)$$

Preuve

Voir, p. ex., [Ross, 2014].

Le développement de la preuve de la proposition 4 requiert plusieurs pages.

Illustration en classe de l'algorithme 3 :

Exemple en classe de l'algorithme 3

Hypothèses :

- $\lambda = 2$
- horizon $= 10$

Trajectoires (voir l'illustration **??** à la prochaine diapo)

Exemple en classe de l'algorithme 3 (suite)

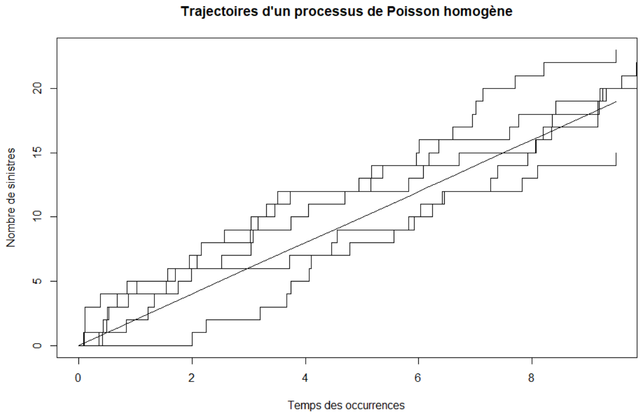

Illustration: Cinq trajectoires d'un processus de Poisson homogène.

Processus de Poisson NH

On considère des données danoises de sinistres.

Il s'agit de 2167 incendies survenus au Danemark, du 1.1.1980 au 31.12.1990.

Ces données sont très utilisées pour la modélisation des risques en assurance IARD.

Source : package R `QRM` (voir `danish` ou `danish.df`).

Processus de Poisson non-homogène

Motivations

Q1 : est-ce que l'évolution du nombre de sinistres (selon ces données) peut être modéliser par un processus de Poisson homog;ene ?

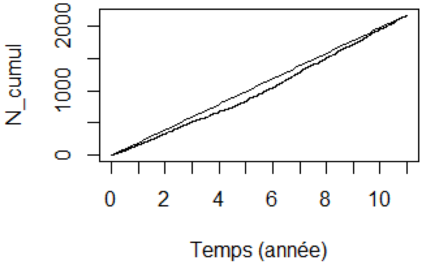

Illustration: Processus de Poisson vs donnés danoises d'incendie.

Processus de Poisson non-homogène

Motivations

Il est clair que le parcours du processus d'avènement des incendies construits à partir des données n'est pas celui d'un processus de Poisson homogène.

Il faut essayer un autre processus de dénombrement.

Processus de Poisson non-homogène

Motivations

Q2 : Quel processus pourrait être approprié selon les graphiques de l'illustration 3 ?

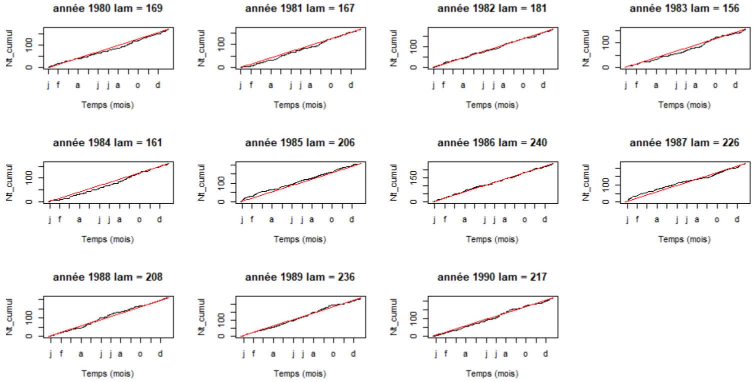

Illustration: Processus de Poisson non-homogène vs donnés danoises d'incendie.

Définition 3

Le processus de comptage $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ *est dit un processus de Poisson non-homogène de fonction d'intensité* $\lambda(t) \geq 0$ *pour* $t \geq 0$ *si*

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ *possède des accroissements indépendants*
3. $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
4. $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

La condition 3 implique que le processus $\underline{N}$ ne possède pas des accroissements stationnaires, à moins que $\lambda(t) = \lambda > 0, \ \forall t$.

Alors, $\underline{N}$ devient un processus de Poisson homogène de taux λ.

Proposition 5

Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ *un processus de Poisson non-homogène de fonction d'intensité* $\lambda(t)$*. Alors,*

$$N(t+s) - N(t) \sim Poisson(\Lambda(t+s) - \Lambda(s)), \; \forall t, s \geq 0$$

où

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(y) dy$$

est la fonction d'intensité cumulée) du processus. Ainsi,

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{[m(t+s) - m(s)]^n \, e^{-[m(t+s) - m(s)]}}{n!}.$$

Preuve

Voir, p. ex., [Ross, 2014].

On suppose $\lambda(t)$ est une fonction absolument continue (sans saut).

Exemple

Exemples de fonction d'intensité :

1. *fonction linéaire :* $\lambda(t) = a + bt$, $a > 0$, $b \geq 0$;
2. *fonction puissance :* $\lambda(t) = (\beta t)^{\tau}$, $\beta > 0$, $\tau > 0$;
3. *fonction log-linéaire :* $\lambda(t) = \exp(\alpha + \beta t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
4. *fonction périodique (effet saisonnier) :* $\lambda(t) = a + b\cos(2\pi t)$, $a > 0$, $b \in [0, a]$;
5. *fonction périodique (effet saisonnier) bis :* $\lambda(t) = a + b\cos(2\pi(t + c))$, $a > 0$, $b \in [0, a]$, $c \in [0, 1)$.

On définit

$$\Lambda\,(s{,}s+t] = \int_s^{s+t} \lambda\,(u)\,\mathrm{d}u, \text{ pour } s \geq 0,\ t > 0,$$

avec

$$\Lambda\,(0{,}t] = \Lambda\,(t) = \int_0^{t} \lambda\,(u)\,\mathrm{d}u, \text{ pour } t > 0.$$

Pour $s \geq 0$ fixé, l'inverse de la fonction $\Lambda\,(s{,}s+t] = \Lambda_s\,(t)$ (note : $\Lambda_0\,(t) = \Lambda\,(t)$) est définie par

$$\Lambda_s^{-1}\,(u) = \inf\left\{t > 0{,}\Lambda_s\,(t) \geq u\right\},$$

pour $u \geq 0$.

Exemple

Soit $\lambda(t) = a + bt$, $t \geq 0$ $(a > 0,\ b \geq 0)$. *[Suite en classe]*

Question : Est-ce que $\underline{W} = \{W_k, k \in \mathbb{N}_+\}$ forme une suite de v.a. iid ?

Réponse : [La réponse sera discutée en classe]

La réponse mène à l'algorithme 6.

L'algorithme 6 permet de simuler les n premières occurrences du parcours (trajectoire) j d'un processus $\underline{N}$ de Poisson non-homogène.

Algorithme 6

Algorithme PPNH1

1. *On fixe* $T_0^{(j)} = 0$.
2. *Pour* $i = 1,\ldots,n$, *on a*
    1. *On simule les réalisations* $\left(Z_1^{(j)},\ldots,Z_n^{(j)}\right)$ *du vecteur de v.a. iid avec* $Z_i \sim Z \sim Exp(1)$.
    2. *On simule* $W_i^{(j)} = \Lambda^{-1}_{T_{i-1}^{(j)}}(Z_i)$ *;*
    3. *On calcule* $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$.

L'algorithme 6 est simple d'application.

Toutefois, il n'est pas toujours efficace si l'on souhaite produire des simulations du processus $\underline{N}$ sur un intervalle fixe $(0,t]$.

On a recours à l'algorithme 7.

Illustration en classe de l'algorithme 6 :

Algorithme 7

Algorithme PPNH2.

1. *On fixe* $T_0^{(j)} = 0$.
2. *On simule la réalisation* $N(t)^{(j)}$ *de* $N(t) \sim Poisson(\Lambda(t))$.
3. *Sachant* $N(t) = N(t)^{(j)} > 0$,
    1. *On simule le vecteur de réalisations* $\left(V_1^{(j)},\ldots,V_{N(t)^{(j)}}^{(j)}\right)$ *du vecteur de v.a. iid* $\left(V_1,\ldots,V_{N(t)^{(j)}}\right)$, *où* $V_i \sim V$ *avec* $f_V(x) = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t)}$, $0 < x < t$ $(i = 1,2,\ldots,N(t)^j)$;
    2. *On trie les réalisations en [1] et on obtient* $\left(V_{[1]}^{(j)},\ldots,V_{\left[N(t)^{(j)}\right]}^{(j)}\right)$ *où* $V_{[1]}^{(j)} < \ldots < V_{\left[N(t)^{(j)}\right]}^{(j)}$.
    3. *On calcule* $T_i^{(j)} = V_{[i]}^{(j)}$, *pour* $i = 1,\ldots,N(t)^{(j)}$.

UNIVERSITÉ LAVAL

L'algorithme 7 est basé sur la proposition suivante.

Proposition 8

On a

$$\begin{aligned} f_{T_1,\ldots,T_n|N(t)=n}\left(s_1,\ldots,s_n\right) &= n!\frac{\lambda\left(s_1\right)\ldots\lambda\left(s_n\right)}{\left(\Lambda\left(t\right)\right)^n} \\ &= n!\frac{\lambda\left(s_1\right)}{\Lambda\left(t\right)}\times\ldots\times\frac{\lambda\left(s_n\right)}{\Lambda\left(t\right)}, \end{aligned}$$

pour $0 < s_1 < \ldots < s_n < t$.

Preuve

À faire en classe.

Processus de Poisson non-homogène

Algorithme de simulation no2

La preuve de la proposition 8 utilise le lemme 1.

Le développement de la preuve de la proposition 8 requiert plusieurs pages.

Exemple en classe de l'algorithme 7

Hypothèses :

- $\lambda(t) = a + bt, \; t > 0$
- $a = 1, \; b = 0.5$
- horizon $= 10$

Trajectoires (voir l'illustration 4 à la prochaine diapo)

Exemple en classe de l'algorithme 7 (suite)

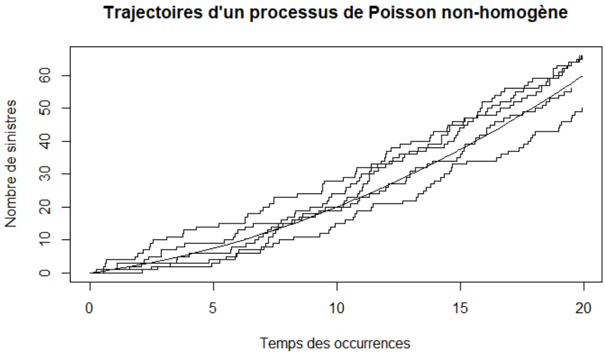

Illustration: Cinq trajectoires d'un processus de Poisson non-homogène.

Processus de Poisson mixte

Processus de Poisson mixte

L'intensité d'un processus de Poisson mixte est une variable aléatoire.

Définition 4

Soit Θ une variable aléatoire positive (continue ou discrète). Si le processus de comptage $\underline{N} = \{N(t); t \geq 0\}$ étant donné que $\Theta = \theta$ est un processus de Poisson de taux θ alors $\underline{N} = \{N(t); t \geq 0\}$ est appelé un processus de Poisson mixte.

Le fait que l'intensité soit désormais une v.a. introduit de la surdispersion.

On examine les propriétés du processus de Poisson mixte.

Processus de Poisson mixte

On fait l'hypothèse additionnelle suivante : les paramètres de la loi de Θ sont fixés de telle sorte que

$$E[\Theta] = \lambda \in (0,\infty).$$

Espérance :

$$\begin{aligned} E\left[N(t)\right] &= E_\Theta\left[E\left[N(t) \mid \Theta\right]\right] \\ &= E\left[\Theta t\right] \text{ car } (N(t) \mid \Theta = \theta) \sim Poisson(\theta t) \\ &= tE\left[\Theta\right] \\ &= t\lambda \end{aligned}$$

Processus de Poisson mixte

Variance :

$$\begin{aligned} Var\left(N(t)\right) &= E\left[Var\left(N(t) \mid \Theta\right)\right] + Var\left(E\left[N(t) \mid \Theta\right]\right) \\ &= E\left[\Theta t\right] + Var\left(\Theta t\right) \\ &= tE\left[\Theta\right] + t^2 Var\left(\Theta\right) \\ &= t\lambda + t^2 Var\left(\Theta\right). \end{aligned}$$

Remarques (en classe) :

-
-

Illustration de trajectoires (en classe)

- Les deux illustations suivantes reproduisent les trajectoires de 2 processus de dénombrement différents.
- L'un des processus est un processus de Poisson homogène avec une intensité λ.
- L'autre est un processus de Poisson mixte avec $E[\Theta] = \lambda$.
- Q : Lequel est le lequel ?

Processus de Poisson mixte

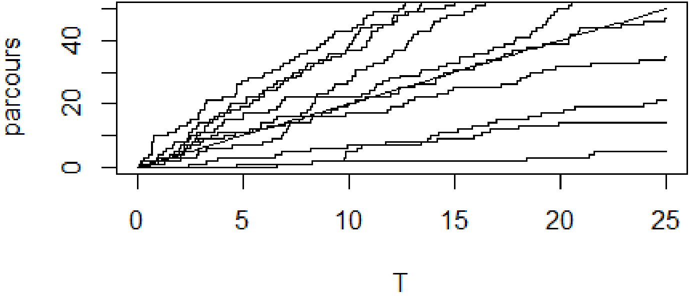

Illustration: Dix trajectoires du processus de dénombrement no1.

Processus de Poisson mixte

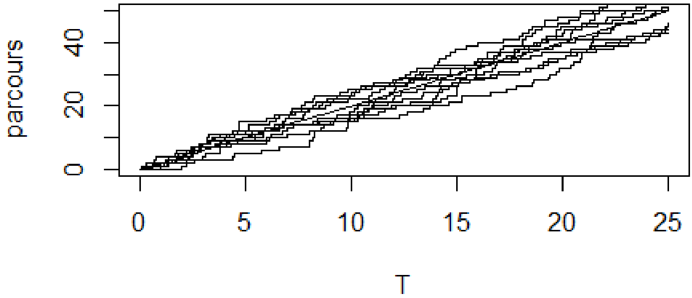

Illustration: Dix trajectoires du processus de dénombrement no2.

Processus de Poisson mixte

Remarques (en classe) :

-
-

Fgm de $N(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{N(t)}(r) &= E\left[e^{N(t)r}\right] \\
&= E_{\Theta}\left[E\left[e^{N(t)r}|\Theta\right]\right] \\
&= E_{\Theta}\left[e^{\Theta t(e^{r}-1)}\right] \\
&= \mathcal{M}_{\Theta}\left(t\left(e^{r}-1\right)\right).
\end{aligned}$$

Fgp de $N(t)$:

$$\mathcal{P}_{N(t)}(r) = \mathcal{M}_{\Theta}\left(t\left(r-1\right)\right),$$

pour $r \in [0,1]$.

Processus de Poisson mixte

Proposition 9

Les accroissements du processus de Poisson mixte $\underline{N}$ sont ***stationnaires*** *et* ***dépendants****.*

Preuve

À faire en classe.

Processus de Poisson mixte

On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. $\underline{W} = \{W_j, j = 1,2,...\}$.

On définit les temps d'occurrence des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1,2,...$.

Proposition 10

Les temps inter-sinistres du processus de Poisson mixte $\underline{N}$ sont échangeables. Ils ne sont pas indépendants.

Preuve

À faire en classe.

Processus de Poisson mixte

La simulation d'un parcours d'un processus de Poisson mixte $\underline{N}$ est fort simple.

Étapes pour la simulation de la trajectoire j :

- Simuler une réalisation $\Theta^{(j)}$ de Θ.
- Simuler le $j$ième parcours de $\left(\underline{N}|\Theta = \Theta^{(j)}\right)$ en utilisant l'algorithme 2 ou l'algorithme 3 pour un processus de Poisson homogène avec une intensité $\lambda = \Theta^{(j)}$.

Exemple

Soit $\Theta \sim Gamma(\alpha, \beta)$ *avec* $\beta = \frac{\alpha}{\lambda}$. *À faire en classe.*

Processus de renouvellement

Processus de renouvellement

Un processus de renouvellement $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ est un exemple de processus de dénombrement (comptage).

Il est une généralisation du processus de Poisson.

La généralisation se fait via les v.a. temps inter-sinistres.

On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. $\underline{W} = \{W_j, j = 1,2,...\}$.

On définit les temps d'occurrence des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1,2,...$.

Processus de renouvellement

Exemples de lois pour W (en classe) :

- ...
- ...
- ...

Pour $t > 0$, la valeur de $N(t) = N(0,t]$ est obtenue avec

$$\begin{aligned} N(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} \\ &= \sup\{k \in \mathbb{N}, T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0. \end{aligned}$$

Relation fondamentale :

$$\{N(t) \geq k\} = \{T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Avec (3), on déduit

$$\Pr(N(t) \geq k) = \Pr(T_k \leq t), \text{ pour } t > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}.$$

Fonction de masse de probabilité de $N(t)$:

$$\begin{aligned} \Pr(N(t) = k) &= \Pr(\# \text{ de sinistres sur } (0,t] \text{ soit égal à } k) \\ &= \Pr(N(t) \geq k) - \Pr(N(t) \geq k+1) \\ &= F_{T_k}(t) - F_{T_{k+1}}(t), \end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{N}$, avec $F_{T_0}(t) = 1$, pour tout $t > 0$.

Processus de renouvellement

Remarques (en classe) :

- ...
- ...
- ...

Processus de renouvellement

L'algorithme 11 pour simuler une trajectoire de $\underline{N}$ est adapté de l'algorithme 2 pour une processus de Poisson homogène.

Algorithme 11

Algorithme Processus de renouvellement

1. *On fixe* $T_0^{(j)} = 0$.
2. *Pour* $i = 1, \ldots, n$, *on a*
    1. *On simule* $W_i^{(j)}$;
    2. *On calcule* $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$.

Processus de renouvellement

Espérance de $N(t)$:

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} E\left[1_{\{T_k \leq t\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} F_{T_k}(t),$$

pour $t > 0$.

Remarques :

- $m(t) = E[N(t)]$ = nombre espéré de sinistres sur l'intervalle de temps $(0,t]$
- La fonction $m(t)$ est appelée la fonction de renouvellement.

Processus de renouvellement

Le processus de Poisson est un cas particulier de processus de renouvellement.

Quelle est la forme de $m(t)$ en fonction de t ?

Seul le processus de Poisson possède une fonction $m(t)$ linéaire en fonction de t, c.-à-d. $m(t) = \lambda t$, $t \geq 0$.

Exemple

Soit $W \sim Gamma\left(\alpha,\beta\right)$ *avec* $E\left[W\right] = \frac{\alpha}{\beta}$ *et* $F_W\left(x\right) = H\left(x;\alpha,\beta\right)$. *À faire en classe.*

Notes bibliographiques

Notes bibliographiques

Source principale : [Cossette and Marceau, 2019]

Ressources additionnelles (exploration personnelle) :

- Introduction aux processus de Poisson et ses variantes:
  - [Ross, 2014]
  - [Mikosch, 2009]
- Applications de ces processus en actuariat:
  - [Albrecher et al., 2017]

Références

Références I

Albrecher, H., Teugels, J. L., and Beirlant, J. (2017).
Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects.
John Wiley & Sons.

Cossette, H. and Marceau, E. (2019).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.
Document de référence.

Mikosch, T. (2009).
Non-life Insurance Mathematics: an Introduction with the Poisson Process.
Springer Science & Business Media.

Ross, S. M. (2014).
Introduction to Probability Models.
Academic press.