Act-3000 Théorie du risque

Modèles de base en assurance dommages

Étienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

A2019: Série no2

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières I

Table des matières II

Introduction

Introduction

Objectif principal : Présenter le modèle de base pour les coûts d'un risque en assurance dommages

Objectifs spécifiques :

- Etudier les caractéristiques du modèle
- Examiner la mutualisation des risques en assurance dommages
- ...

Source principale : [Cossette and Marceau, 2019]

Définition de X

Définition de X

Généralités

Soit la v.a. X représentant les coûts pour un risque en assurances dommages.

Exemples pour X :

- coûts pour un contrat d'assurances dommages (auto, habitation, risques divers)
- coûts pour un contrat d'assurances commerciales
- coûts totaux pour une ligne d'affaire
- coûts totaux pour une classe de risque

Expressions équivalentes :

- Assurances non-vie
- Assurances IARD (Incendie, Accident, Risque Divers)
- Assurances générales

Définition de X

Convention pour une somme aléatoire : $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$.

La v.a. X est définie selon une somme aléatoire, i.e.,

$$X = \sum_{k=1}^{M} B_k. \tag{1}$$

Définitions :

- v.a. discrète positive M : nombre de sinistres (fréquence);
- v.a. positive B_k : montant du $k$ième sinistre, $k = 1, 2, \ldots$.

Dénominations pour la v.a. M :

- v.a. de fréquence;
- v.a. de comptage ;
- v.a. de dénombrement.

Définition de X

Généralités

Hypothèses :

- $\underline{B} = B_k, k \in \mathbb{N}^+$: suite de v.a. iid, $B_k \sim B, k \in \mathbb{N}^+$;
- la v.a. M et la suite $\underline{B}$ sont indépendantes .

Interprétation :

- On suppose l'indépendance mutuelle entre les montants de sinistres.
- On suppose que les montants de sinistres ont le même comportement aléatoire.
- On suppose que le nombre de sinistres et les montants "ne s'influence pas mutuellement".

Proposition 1

Espérance de la v.a. X.

- *Hypothèse additionnelle :* $E[M] < \infty$ *et* $E[B] < \infty$.
- *Alors, on a*

$$E[X] = E[M] \times E[B]. \tag{2}$$

Preuve

L'espérance de la v.a. X est obtenue en conditionnant sur la v.a. de dénombrement M :

$$E[X] = E_M[E[X|M]]$$

Or, on a $E[X|M] = M \times E[B]$. Finalement, on conclut

$$E[X] = E[M \times E[B]] = E[M]E[B].$$

Interprétation :

- En actuariat, l'espérance de la v.a. X correspond à la prime pure pour le contrat d'assurance.

Définition de X

Variance de X

Proposition 2

- *Hypothèse additionnelle :* $E[M^2] < \infty$ *et* $E[B^2] < \infty$.
- *Alors, on a*

$$Var(X) = E[M] \times Var(B) + Var(M) \times (E[B]^2). \quad (3)$$

Preuve

La variance de la v.a. X est obtenue en conditionnant sur la v.a. de dénombrement M :

$$Var(X) = E_M[Var(X|M)] + Var_M(E[X|M]).$$

Selon les hypothèses du modèle, on a

$$Var(X|M) = M \times Var(B).$$

Ensuite,

$$Var(X) = E[M \times Var(B)] + Var(M \times E[B]).$$

On conclut que

$$Var(X) = E[M] \times Var(B) + Var(M) \times (E[B]^2).$$

Proposition 3

La fonction de répartiton de la v.a. X *est donnée par*

$$F_X(x) = f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) F_{B_1+\ldots+B_k}(x), \tag{4}$$

pour $x \in [0,\infty)$.

Preuve

En classe.

Proposition 4

La TLS de la v.a. X est donnée par

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{L}_B(t)), \tag{5}$$

pour $t \in [0,\infty)$.

Preuve

En classe.

Algorithme de simulation de rèalisations de S : (en classe)

Distributions de fréquence

En actuariat, les principales lois pour la v.a. de fréquence sont les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative.

Les lois de X correspondantes sont alors appelées lois Poisson composée, binomiale composée et binomiale négative composée.

Comme la loi de Poisson est au cœur de la modélisation des risques en assurance IARD, on s'intéresse aussi aux extensions de cette loi obtenues par mélange.

La loi de Poisson est fondamentale en actuariat, en particulier en assurance dommages :

- Notation : $M \sim Pois(\lambda)$
- Paramètre : $\lambda > 0$
- Support : $k \in \mathbb{N}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$
- Espérance : $E[M] = \lambda$
- Variance : $\mathrm{Var}(M) = \lambda$
- Fgp : $\mathcal{P}_M(r) = \exp\{\lambda(r-1)\}$, $r \in [0,1]$

La loi binomiale négative est une extension de la loi de Poisson :

- Notation : $M \sim BN(r,q)$
- Paramètres : $r \in \mathbb{R}^+$, $q \in (0,1)$
- Support : $k \in \mathbb{N}$
- Fonction de masse de probabilité :
  $\Pr(M = k) = \binom{r+k-1}{k} (q)^r (1-q)^k$
- Espérance : $E[M] = r\frac{1-q}{q}$
- Variance : $\mathrm{Var}(M) = r\frac{1-q}{q^2} = \frac{E[M]}{q} \geq E[M]$
- Fgp : $\mathcal{P}_M(t) = \left(\frac{q}{1-(1-q)t}\right)^r$, $t \in [0,1]$

Généralisation des lois de fréquence

Il est possible de procéder de différentes façons pour généraliser les trois principales lois discrètes :

- mélange de la loi de Poisson ;
- modication de la masse à 0 ;
- et composition.

Souvent, dans les applications pratiques, la loi de Poisson n'offre pas toujours une description adéquate du comportement des données.

Dans ces circonstances, les lois Poisson-mélange jouent un rôle important dans la modélisation du comportement de la fréquence.

Soit une v.a. Θ positive de telle sorte que $E[\Theta] = 1$, $\mathrm{Var}(\Theta) < \infty$ et $M_\Theta(t)$ existe.

La v.a. Θ influence la v.a. M de la façon suivante.

On suppose que la loi conditionnelle de M est donnée par $(M|\Theta = \theta) \sim Pois(\lambda\theta)$ avec $\lambda > 0$.

Cela signifie que $E[M|\Theta] = \Theta\lambda$, $\mathrm{Var}(M|\Theta) = \Theta\lambda$ et $\mathcal{P}_{M|\Theta}(t) = E\left[t^M|\Theta\right] = \mathrm{e}^{\Theta\lambda(t-1)}$.

On peut s'imaginer que M correspond au nombre de sinistres pour un contrat d'assurance automobile.

Comme on ne connaît pas les habitudes de conduite du conducteur, on introduit une incertitude quant au paramètre de la loi de Poisson.

Quelle est la loi de M ?

Tout d'abord, en conditionnant sur Θ, on constate que

$$E\left[M\right] = E_{\Theta}\left[E\left[M|\Theta\right]\right] = E\left[\Theta\lambda\right] = \lambda\times 1 = \lambda. \tag{6}$$

Puis, en conditionnant à nouveau sur Θ, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left(M\right) &= E_{\Theta}\left[\mathrm{Var}\left(M|\Theta\right)\right] + \mathrm{Var}_{\Theta}\left(E\left[M|\Theta\right]\right) \\ &= E\left[\Theta\lambda\right] + \mathrm{Var}_{\Theta}\left(\Theta\lambda\right) = \lambda + \lambda^{2}\mathrm{Var}_{\Theta}\left(\Theta\right). \end{aligned} \tag{7}$$

En poursuivant l'interprétration fournie plus haut, l'incertitude quant au comportement du conducteur n'affecte pas l'espérance mais son influence conduit à une variance de M qui est supérieure à son espérance.

Ainsi, la présence du mélange ajoute de la surdispersion par rapport à la loi de Poisson dans le comportement du nombre de sinistres.

On identifie la loi de M par l'intermédiaire de sa f.g.p. qui est donnée par

$$\mathcal{P}_M(t) = E\left[t^M\right] = E_\Theta\left[E\left[t^M|\Theta\right]\right] = E\left[\mathrm{e}^{\Theta\lambda(t-1)}\right] = M_\Theta(\lambda(t-1)). \tag{8}$$

La v.a. Θ peut être discrète ou continue.

Si la v.a. Θ est continue positive avec une fonction de densité f_Θ alors la fonction de masse de probabilité de M est donnée par

$$\Pr\left(M = k\right) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\theta}\frac{\left(\lambda\theta\right)^k}{k!} f_\Theta\left(\theta\right)\mathrm{d}\theta,\ k \in \mathbb{N}^+.$$

Si la v.a. Θ est discrète avec support $\mathbb{N}^+$, la fonction de masse de probabilité de M est donnée par

$$\Pr\left(M = k\right) = \sum_{\theta=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\theta}\frac{\left(\lambda\theta\right)^k}{k!}\Pr\left(\Theta = \theta\right),\ k \in \mathbb{N}^+.$$

Le choix de la loi de Θ a un impact important sur le comportement de la v.a. M.

On examine trois cas particuliers de loi Poisson-mélange : la loi Poisson-gamma (ou binomiale négative), la loi Poisson-inverse gaussienne et la loi Poisson-lognormale.

Soit une v.a. $\Theta \sim Ga(\alpha = r, \beta = r)$ de telle sorte que $E[\Theta] = \frac{r}{r} = 1$, $\mathrm{Var}(\Theta) = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$ et $M_\Theta(t) = \left(\frac{r}{r-t}\right)^r$.

Alors, la v.a. M obéit à la loi Poisson-gamma, notée $M \sim P - Ga(\lambda, r)$.

En fait,la loi Poisson-gamma correspond à la loi binomiale négative.

À partir de (6), (7) et (8), on obtient $E[M] = \lambda$, $\mathrm{Var}(M) = \lambda + \frac{\lambda^2}{r}$ et

$$\mathcal{P}_M(t) = \left(\frac{r}{r-s}\right)^r = \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{r}(t-1)}\right)^r. \tag{9}$$

En fixant $\frac{\lambda}{r} = \frac{1-q}{q}$ (ce qui implique $q = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{r}}$), on retrouve la première paramétrisation de la loi binomiale négative où

$$\mathcal{P}_M(t) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1-q}{q}(t-1)}\right)^r = \left(\frac{q}{1-(1-q)t}\right)^r,$$

avec $E[M] = \lambda = r\frac{1-q}{q}$ et

$$\mathrm{Var}(M) = \lambda + \frac{\lambda^2}{r} = r\frac{1-q}{q^2}.$$

Dans l'exemple suivant, on illustre l'impact du choix des paramètres r et q de la loi binomiale négative sur le comportement aléatoire des coûts d'un contrat d'assurance.

Début de l'exemple.

Les coûts pour une ligne d'affaires sont définis par la v.a. $X \sim BNComp\left(r,q;F_B\right)$, avec $B \sim Exp\left(\beta = 1\right)$.

Les paramètres r et q de la v.a. de fréquence M sont fixés de telle sorte que $E\left[M\right] = 200$.

On considère 4 couples de valeurs pour (r,q) : $\left(1,\frac{1}{201}\right)$, $\left(2,\frac{1}{101}\right)$, $\left(5,\frac{1}{41}\right)$ et $\left(25,\frac{1}{9}\right)$.

Dans le tableau suivant, on indique les valeurs de $VaR_{0.5}(X)$, $VaR_{0.995}(X)$, $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$:

r	q	$VaR_{0.5}(X)$	$VaR_{0.995}(X)$	$TVaR_{0.5}(X)$	$TVaR_{0.995}(X$
1	$\frac{1}{201}$	138.320	1063.959	339.320	1264.95
2	$\frac{1}{101}$	167.509	748.435	306.217	861.41
5	$\frac{1}{41}$	186.499	511.316	271.108	567.14
25	$\frac{1}{9}$	196.973	332.139	235.481	352.00

Pour une valeur de κ fixée, on observe que la valeur de $TVaR_{\kappa}(X)$ augmente lorsque le paramètre r diminue (de telle sorte que l'espérance du nombre de sinistres reste identique).

Fin de l'exemple.

On observe également

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} E\left[M\right] &= \lambda \\
\lim_{r\to\infty} \mathrm{Var}\left(M\right) &= \lim_{r\to\infty} \lambda + \frac{\lambda^2}{r} = \lambda \\
\lim_{r\to\infty} \mathcal{P}_M\left(t\right) &= \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{r}\left(t-1\right)}\right)^r = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

D'après (10), si $r \to \infty$ de telle sorte que l'espérance de M reste égale λ, la variance de M tend vers λ et la loi de M tend vers la loi de Poisson de paramètre λ.

Début de l'exemple.

Soient les v.a. M_1, ..., M_5 où

$$M_i \sim BN\left(r = r_i, q = \left(1 + \frac{2}{r_i}\right)^{-1}\right), \; i = 1,2,3,4,$$

avec $r_1 = 0.5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 100$, et $M_5 \sim Pois\left(\lambda = 2\right)$ de telle sorte que $E\left[M_i\right] = 2$, $i = 1,2,...,5$.

Dans le tableau ci-dessous, on fournit les valeurs de la fonction de masse de probabilité pour les cinq v.a. :

k	$f_{M_1}(k)$	$f_{M_2}(k)$	$f_{M_3}(k)$	$f_{M_4}(k)$	$f_{M_5}(k)$
0	0.447214	0.333333	0.250000	0.138033	0.135335
1	0.178885	0.222222	0.250000	0.270653	0.270671
2	0.107331	0.148148	0.187500	0.267999	0.270671
3	0.071554	0.098765	0.125000	0.178668	0.180447
4	0.050088	0.065844	0.078125	0.090209	0.090224
5	0.036063	0.043896	0.046875	0.036791	0.036089
10	0.008461	0.005781	0.002686	0.000049	0.000038
15	0.002273	0.000761	0.000122	0.000000	0.000000
20	0.000646	0.000100	0.000005	0.000000	0.000000

Quand la valeur de r augmente, les valeurs des fonctions de masse de probabilité tendent comme prévu vers celles de la loi de Poisson. $\square$

Fin de l'exemple.

Distributions de sévérité

Distributions de sévérité

Généralités

Le choix de la distribution du montant d'un sinistre est crucial dans la modélisation du risque X.

En actuariat, on a généralement recours à une loi continue avec un support compris dans $\mathbb{R}^+$ pour modéliser le comportement aléatoire du montant d'un sinistre.

Dans la majorités des contextes d'application en assurance dommage et en assurance maladie, les distributions des montants de sinistre possède une asymétrie positive.

Par convention, les distributions pour les montants de sinistres sont continues et positives.

Pour l'analyse des durées de vie et de la distribution du montant d'un sinistre, on a recours à la fonction d'excès-moyen (espérance de durée de vie résiduelle en analyse des durées de vie) que l'on définit par

$$e_X(d) = E\left[X - d \middle| X > d\right] = \frac{\pi_X(d)}{1 - F_X(d)}. \tag{11}$$

Cette fonction est notamment utile dans l'analyse graphique effectuée lors de l'estimation des paramètres de lois continues.

- Notation : $X \sim Exp(\beta)$
- Paramètre : $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f_X(x) = \beta \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Fonction de survie : $\overline{F}_X(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Espérance : $E[X] = \frac{1}{\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$
- TLS : $\mathcal{L}_X(t) = \frac{\beta}{\beta+t}$, $t > -\beta$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \left(\frac{1}{\beta}\right)^k k!$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = -\frac{1}{\beta}\ln(1-\kappa)$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + E[X]$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_X(d) = \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d} = E[X]\overline{F}(d)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_X(d) = \frac{1}{\beta}$

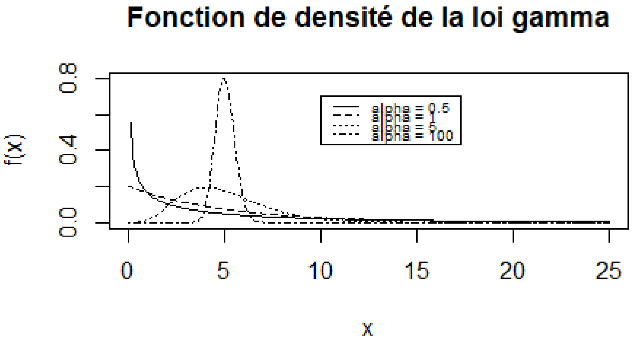
La loi Gamma est une extension de la loi exponentielle.

Elle est fréquemmment utilisée en actuariat.

- Notation : $X \sim Ga(\alpha,\beta)$
- Paramètres : $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$
- Fonction de répartition : notée $H(x;\alpha,\beta)$, forme non explicite pour $\alpha \notin \mathbb{N}^+$
- Fonction de survie : notée $\overline{H}(x;\alpha,\beta)$, forme non explicite pour $\alpha \notin \mathbb{N}^+$
- Espérance : $E[X] = \frac{\alpha}{\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

- TLS : $\mathcal{L}_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$, $t > -\beta$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+i)}{\beta^k}$
- Mesure VaR : outil d'optimisation si $\alpha \neq 1$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{\alpha}{\beta}\overline{H}\left(VaR_{\kappa}(X); \alpha + 1, \beta\right)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{\alpha}{\beta}\overline{H}(d; \alpha + 1, \beta) - d\overline{H}(d; \alpha, \beta)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\overline{H}(d;\alpha+1,\beta)}{\overline{H}(d;\alpha,\beta)} - d$

Courbes de la fonction de densité pour la loi gamma avec $\alpha = 0.5, 1, 5, 100$ de telle sorte que l'espérance est égale à 5.



Si on suppose que $B \sim Gamma(\alpha,\beta)$, on obtient des formes fermées pour $F_X(x)$, $TVaR_\kappa(X)$, et $\Pi_X(x)$:

(En classe)

La loi Erlang est un cas particulier de la loi gamma, avec $\alpha \in \mathbb{N}^{+}$.

- Notation : $X \sim Erl(n,\beta)$
- Paramètres : $n \in \mathbb{N}^{+}$, $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^{+}$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{\beta^{n}}{\Gamma(n)} x^{n-1} \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^{j}}{j!}$
- Fonction de survie : $\overline{F}_X(x) = \mathrm{e}^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^{j}}{j!}$
- Espérance : $E[X] = \frac{n}{\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{\beta^{2}}$

- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^n$, $t < \beta$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n+i)}{\beta^k}$
- Mesure VaR : outil d'optimisation si $n \neq 1$
- Mesure $TVaR$:
$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{n}{\beta}\left(\mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)}\sum_{j=0}^{n}\frac{(\beta VaR_\kappa(X))^j}{j!}\right)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{n}{\beta}\overline{H}(d; n+1, \beta) - d\overline{H}(d; n, \beta)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{n}{\beta}\frac{\overline{H}(d;n+1,\beta)}{\overline{H}(d;n,\beta)} - d$

La loi lognormale est fréquemment utilisée en actuariat, notamment pour la modélisation des montants de sinistres dans la modélisation des montants de sinistres en assurance dommage (e.g. IARD ou non-vie), et en gestion quantitative des risques.

Son mode est supérieur à 0 et son coefficient d'asymétrie est positif.

Sa fonction d'excès moyen est croissante.

Avec ces deux paramètres, elle possède une grande flexibilité pour la modélisation.

Notation : $X \sim LN(\mu,\sigma^2)$

Paramètres : $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$

Support : $x \in \mathbb{R}^+$

Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$

Fonction de répartition : $F(x) = \Phi(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma})$

Espérance : $E[X] = \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$

Fonction génératrice des moments : forme non analytique

Moments d'ordre k : $E[X^k] = \mathrm{e}^{k\mu + k^2\frac{\sigma^2}{2}}$

Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \le d\}}\right] = \exp(\mu + \sigma^2/2)\Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})$

Mesure VaR : $VaR_{\kappa}(X) = \exp(\mu + \sigma VaR_{\kappa}(Z))$

Mesure $TVaR$:

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{1-\kappa} \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2} (1 - \Phi(VaR_{\kappa}(Z) - \sigma))$$

Fonction *stop-loss* :

$$\pi_d(X) = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2} (1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})) - d[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]$$

Fonction d'excès-moyen :

$$e_d(X) = \frac{1}{[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]} \mathrm{e}^{\mu + \sigma^2/2} (1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})) - d$$

Espérance limitée :

$$E[\min(X; d)] = \mathrm{e}^{\mu + \sigma^2/2} \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma}) + d[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]$$

La loi de Pareto est aussi une loi fondammentale en actuariat pour la modélisation des montants de sinistres.

Elle possède 2 paramètres et elle est fréquemment utilisée pour la modélisation des sinistres de montants élevés.

Avec un mode se trouvant à 0, son espérance existe si $\alpha > 1$ et sa variance existe si $\alpha > 2$.

Le moment d'ordre n existe à la condition que $\alpha > n$.

Parmi ses caractéristiques importantes, on mentionne aussi que sa fonction d'excédent moyen est linéaire et croissante.

Notation : $X \sim Pa(\alpha,\lambda)$

Paramètres : $\alpha > 0,\ \lambda > 0$

Support : $x \in \mathbb{R}^+$

Fonction de densité : $f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}$

Fonction de répartition : $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$

Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$

Espérance (pour $\alpha > 1$) : $E[X] = \frac{\lambda}{\alpha-1}$

Variance (pour $\alpha > 2$) : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

Fonction génératrice des moments : n'existe pas

Moments d'ordre k (pour $\alpha > k \in \mathbb{N}^+$): $E\left[X^k\right] = \frac{\lambda^k k!}{\prod_{i=1}^{k}(\alpha - i)}$

Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\lambda^k \Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}$, si $-1 < k < \alpha$

Espérance tronquée (pour $\alpha > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\lambda}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda + d)^{\alpha-1}}\right) - d\left(\frac{\lambda}{\lambda + d}\right)^{\alpha}$$

Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \lambda\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$

Mesure $TVaR$ (pour $\alpha > 1$) : $TVaR_\kappa(X) = \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$

Fonction *stop-loss* (pour $\alpha > 1$) : $\pi_d(X) = \frac{\lambda}{\alpha-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha-1}$

Fonction d'excès-moyen (pour $\alpha > 1$) : $e_d(X) = \frac{\lambda+d}{\alpha-1}$, si $\alpha > 1$

Espérance limitée (pour $\alpha > 1$) : $E[\min(X;d)] = \frac{\lambda}{\alpha-1}[1-(\frac{\lambda}{\lambda+d})^{\alpha-1}]$

Dans le prochain exemple, on compare les lois gamma, lognormale et de Pareto dont les 2 paramètres sont fixés de telle sorte que leur espérance et leur variance soient identiques.

On illustre notamment que l'espérance et la variance d'une v.a. n'offre qu'une connaissance partielle et très limitée du comportement aléatoire de cette dernière, car il existe une panoplie de lois satisfaisant ces deux contraintes.

Soient les v.a. B_1, B_2 et B_3 représentant le montant d'un sinistre dont l'espérance et la variance sont 3 et 18 où

$$B_1 \sim LN\left(\ln(3) - \frac{\ln(3)}{2}, \ln(3)\right),$$

$B_2 \sim Ga(1/2{,}1/6)$ et $B_3 \sim Pa(3{,}6)$.

L'impact du choix de la loi sur les valeurs des mesures VaR et TVaR est significatif comme on l'observe dans les deux tableaux ci-dessous :

κ	$VaR_\kappa(B_1)$	$VaR_\kappa(B_2)$	$VaR_\kappa(B_3)$
0	0	0	0
0.5	1.7321	1.3648	1.5595
0.95	9.7119	11.5244	10.2865
0.99	19.8392	19.9047	21.8495
0.995	25.7685	23.6383	29.0882

κ	$TVaR_\kappa(B_1)$	$TVaR_\kappa(B_2)$	$TVaR_\kappa(B_3)$
0	3	3	3
0.5	5.1163	5.5720	5.3393
0.95	16.5211	16.7460	18.4298
0.99	30.1768	25.3475	35.7743
0.995	37.9774	29.1421	46.6323

Par conséquent, il est important, pour obtenir des résultats adéquats, de connaître la distribution du montant de sinistre.

Illustration numérique

Illustration numérique

Illustration numérique à faire en classe.

Mutualisation en assurance dommages

On examine les coûts d'un portefeuille constitué de contrats d'assurance dommages.

On considère un cas particulier.

La proposition suivante contient un résultat important en actuariat.

Proposition 5

Soient les v.a. indépendantes X_1, ..., X_n *où*

$$X_i \sim PComp\left(\lambda_i; F_{B_i}\right), i = 1,2,\ldots,n.$$

Alors, $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim PComp\left(\lambda_S, F_C\right)$, *où* $\lambda_S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ *et*

$$F_C\left(x\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S} F_{B_1}\left(x\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S} F_{B_2}\left(x\right) + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda_S} F_{B_n}\left(x\right).$$

Preuve

La TLS de X_i est donnée par

$$\mathcal{L}_{X_i}(t) = \mathcal{P}_{M_i}(\mathcal{L}_{B_i}(t)) = \mathrm{e}^{\left(\{\lambda_i(\mathcal{L}_{B_i}(t)-1)\}\right)}, \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Preuve

L'expression de la TLS de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *est*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(t) &= E\left[e^{tS_n}\right] = E\left[e^{t\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}\right] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i\left(\mathcal{L}_{B_i}(t)-1\right)} = e^{\left(\{\lambda_S(\mathcal{L}_C(t)-1)\}\right)}, \end{aligned}$$

en posant $\lambda_S = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ *et*

$$\mathcal{L}_C(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S}\mathcal{L}_{B_1}(t) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S}\mathcal{L}_{B_2}(t) + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda_S}\mathcal{L}_{B_n}(t). \tag{12}$$

Preuve

On déduit de (12) que la distribution de C est un mélange des distributions de B_1, ... , B_n. D'après (12), cela implique que F_C est une combinaison convexe de F_{B_1},...,F_{B_n}, soit

$$F_C\left(x\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S} F_{B_1}\left(x\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S} F_{B_2}\left(x\right) + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda_S} F_{B_n}\left(x\right).$$

Preuve

Comme

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathrm{e}^{\lambda_S(\mathcal{L}_C(t)-1)} = \mathcal{P}_N(\mathcal{L}_C(t)) \tag{13}$$

est la TLS d'une loi Poisson composée, on déduit de (13) que $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim PComp(\lambda_S, F_C)$ *telle que*

$$S = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} C_k, \ N > 0 \\ 0, \ N = 0 \end{cases},$$

avec les hypothèses usuelles, $N = \sum_{i=1}^n M_i \sim Pois(\lambda_S)$ *et* $C_k \sim C$ *pour* $k \in \mathbb{N}^+$.

Une interprétation de ce résultat fondamental en actuariat est fournie dans la remarque suivante.

Remarque 1

Le risque global s'analyse en considérant le portefeuille comme une seule entité. Il importe peu de savoir de quel assuré (risque) provient un sinistre. Comme S *obéit à une loi Poisson composée, tous les résultats liés à cette loi sont valides pour ce cas particulier. Pour que ce résultat soit valide, il n'est pas nécessaire de supposer que les v.a.* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *soient identiquement distribuées ou que les v.a.* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *soient identiquement distribuées.*

Conclusion

Conclusion

(En classe)

Références

Références I

Cossette, H. and Marceau, E. (2019).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.
Document de référence.