Act-3000 Théorie du risque

Méthodes d'agrégation récursives

Étienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

A2019: Série no4

UNIVERSITÉ LAVAL

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières I

Table des matières III

Introduction

Introduction

L'objectif du présent chapitre est de familiariser avec les méthodes récursives d'agrégation de base en actuariat.

L'actuariat a contribué de façon majeure aux développpements de ces méthodes.

Motivations

Motivations

Soit les v.a. indépendantes continues positives X_1 et X_2.

On définit $S = X_1 + X_2$.

On sait que

$$f_S(x) = \int_0^x f_{X_1}(y) f_{X_2}(x-y)dy = f_{X_1} * f_{X_2}(x). \tag{1}$$

L'opération en (1) est appelée "produit de convolution".

Exemple :

- $X_1 \sim Gamma(2{,}0.2)$
- $X_2 \sim Gamma(3{,}0.2)$
- $\implies S \sim Gamma(5{,}0.2)$

Motivations

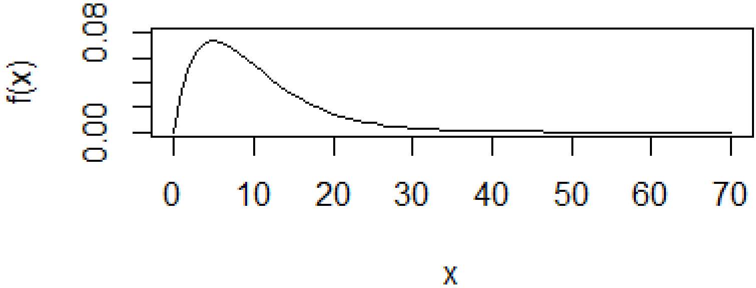


Illustration: Courbe de $f_{X_1}(x)$.

Motivations

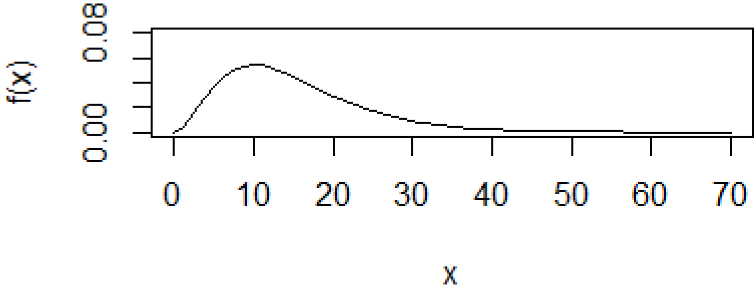


Illustration: Courbe de $f_{X_2}(x)$.

Motivations

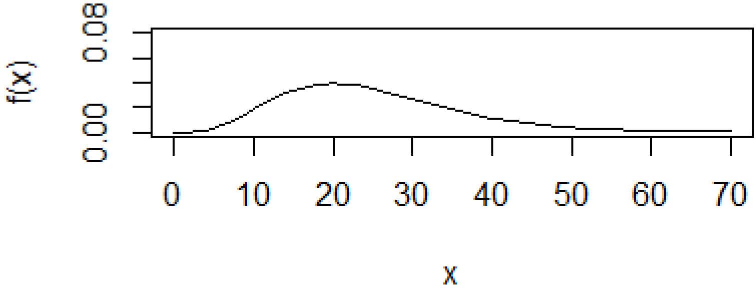


Illustration: Courbe de $f_S(x)$.

Motivations

Observations :

- En général, on n'identifie pas de forme fermée pour f_S.
- Le degré de difficulté augmente avec le nombre de v.a.
- La situation se complique davantage pour une somme aléatoire de v.a. indépendantes.

Solution proposée dans ce chapitre : utiliser des méthodes numériques récursives.

La solution repose sur la discrétisation de la distribution de v.a. continues.

Motivations

Soit les v.a. indépendantes discrètes positives X_1 et X_2 définies sur le support arithmétique $0h, 1h, 2h, \ldots$ où $h > 0$ est un pas de discrétisation.

Fonction de masse de probabilité :

$$f_{X_i}(kh) = \Pr(X_i = kh),$$

pour $i = 1, 2$.

On définit $S = X_1 + X_2$.

On sait que

$$f_S(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{X_1}(jh) f_{X_2}((k-j)h)) = f_{X_1} * f_{X_2}(kh), \tag{2}$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

L'opération en (2) est aussi appelée "produit de convolution".

Motivations

Exemple :

- $X_1 \sim NBinom(2{,}1/6)$
- $X_2 \sim NBinom(3{,}1/6)$
- $\implies S \sim NBinom(5{,}1/6)$

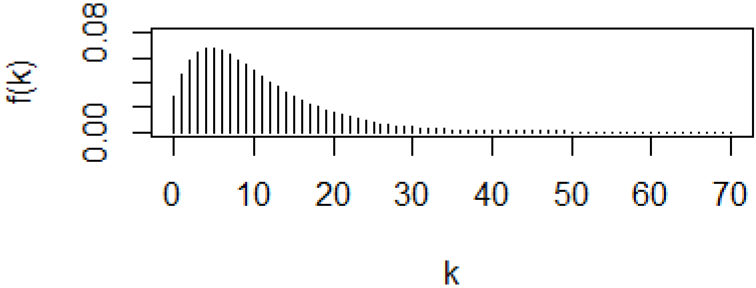


Illustration: Valeurs de la fonction de masse de probabilité de X_1.

Motivations

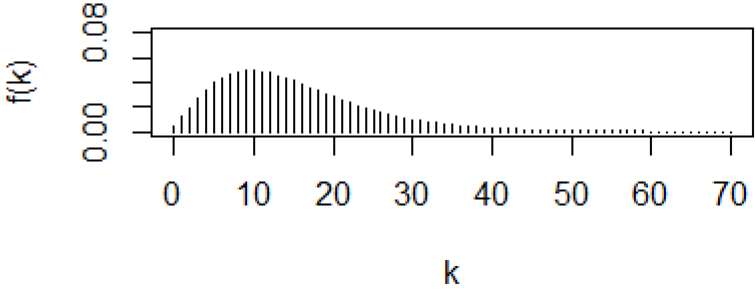


Illustration: Valeurs de la fonction de masse de probabilité de X_2.

Motivations

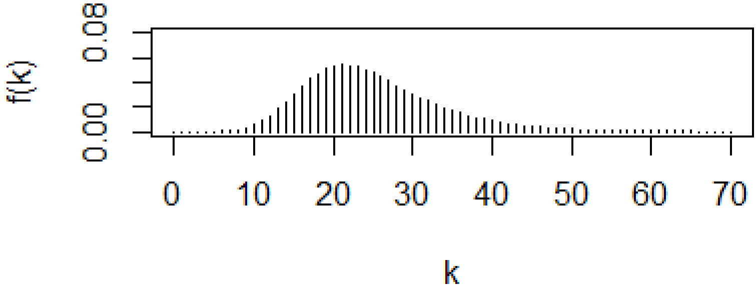


Illustration: Valeurs de la fonction de masse de probabilité de S.

Motivations

Exemple :

- $X_1 \sim NBinom(2{,}1/6)$
- $X_2 \sim Poisson(10)$
- $\implies S \sim LoiDiscrète$ (sans nom)

Motivations

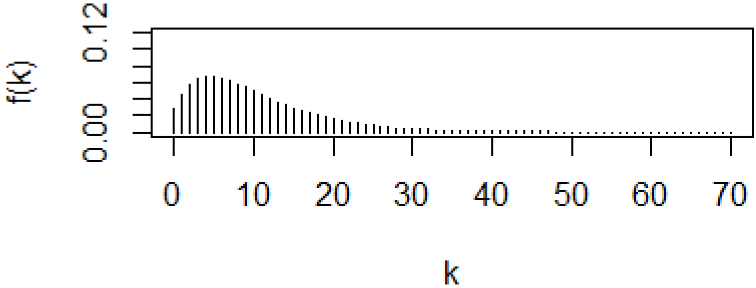


Illustration: Valeurs de la fonction de masse de probabilité de X_1.

Motivations

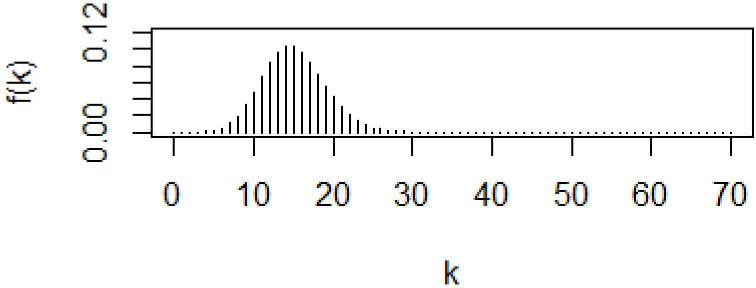


Illustration: Valeurs de la fonction de masse de probabilité de X_2.

Motivations

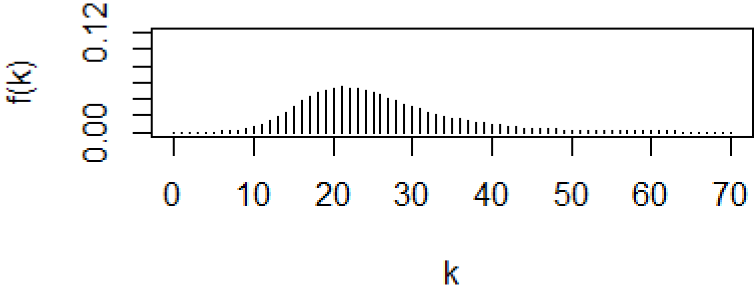


Illustration: Valeurs de la fonction de masse de probabilité de S.

Motivations

Observations : [en classe]

- ...
- ...

Méthodes de discrétisation

Méthodes de discrétisation

On présente les méthodes *lower* et *upper* de discrétisation.

Objectif : Approximer une v.a. définie (généralement continue) positive X par une v.a. $\widetilde{X}$ définie sur le support

$$A_h = \{0,1h,2h,3h,\ldots\},$$

où $h > 0$ est appelé le pas de discrétisation.

La fonction de masse de probabilité est $f_{\widetilde{X}}(kh) = \Pr\left(\widetilde{X} = kh\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Méthodes de discrétisation

Méthode *upper* :

- valeur de la fonction de masse de probabilité à 0 :

$$f_{\widetilde{X}}(0) = F_X(h)$$

- valeurs de la fonction de masse de probabilité à $1h, 2h, 3h, \ldots$:

$$f_{\widetilde{X}}(kh) = F_X((k+1)h) - F_X(kh)$$

  pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Méthodes de discrétisation

Méthode *lower* :

- valeur de la fonction de masse de probabilité à 0 :

$$f_{\widetilde{X}}(0) = 0$$

- valeurs de la fonction de masse de probabilité à $1h, 2h, 3h, \ldots$:

$$f_{\widetilde{X}}(kh) = F_X(kh) - F_X((k-1)h)$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Méthodes de discrétisation

Illustration des deux méthodes : [en classe]

Méthodes de discrétisation

Observations : [en classe]

- ...
- ...

Fgp et magie

Fgp et magie

Introduction

On présente un bref rappel.

On poursuit avec un peu de magie.

Soit une v.a. discrète positive X dont le support est $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$.

La fonction de masse de probabilité (f.m.p.) est notée par

$$f_X(k) = \Pr(X = k),\ k \in \mathbb{N}.$$

On introduit la notion de fonction génératrice de probabilité (fgp) pour une v.a. discrète positive.

La fgp est à la fois une espérance d'une fonction de la v.a. X et une série de puissances.

La fgp est utile dans les aspects de la modélisation et des différents calculs à effectuer en actuariat.

Définition 1

La fonction génératrice de probabilités (fgp) de la v.a. X est définie par

$$\mathcal{P}_X(r) = E\left[r^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, r^k,$$

pour tout nombre complexe r tel que $|r| \leq 1$ (en particulier pour des nombres réels $r \in [0{,}1]$).

La fonction de génératice de probabilité (f.g.p.) de la v.a. X permet de représenter la f.m.p. de la v.a. M sous la forme d'une série de puissances.

Les coéfficients de cette série de puissances correspondent aux valeurs de la fonction de masse de probabilité.

Propriétés :

- $\mathcal{P}_X(0) = f_X(0)$
- $\mathcal{P}_X(1) = 1.$

On retrouve les coefficients (i.e., les valeurs de la fonction de masse de probabilité de la v.a. X) de la fgp en utilisant le théorème suivant.

Théorème 1

Fonction de masse de probabilité. *La valeur de $f_X(k)$ est calculée à partir de $\mathcal{P}_X(t)$ avec*

$$f_X(k) = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}r^k}\mathcal{P}_X(r)\bigg|_{r=0}. \tag{3}$$

La fgp d'une v.a. discrète positive X définit la distribution de cette v.a. :

- Soit deux v.a. discrètes positives X et Y dont $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{P}_Y$ sont identiques.
- Alors, selon le Théorème 1, les v.a. X et Y ont la même distribution.

Le résultat suivant permet d'identifier la fgp d'une somme de v.a. discrètes indépendantes.

Il est aussi utile pour l'évaluation numérique de F_S.

Proposition 1

Soit les v.a. discrètes positives (avec support $\mathbb{N}$) indépendantes $X_1,\ldots,X_n$ dont les fgp sont $\mathcal{P}_{X_i}(r)$, pour $i = 1,\ldots,n$. On définit la v.a. $S = X_1 + \ldots + X_n$. Alors, la fgp de la v.a. S est donnée par

$$\mathcal{P}_S(r) = \mathcal{P}_{X_1}(r) \times \ldots \times \mathcal{P}_{X_n}(r), \tag{4}$$

pour $r \in [0,1]$.

Fgp et magie

Rappels

Preuve

La fgp de la v.a. S est donnée par

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_S(r) &= E[r^S] = E[r^{X_1+\ldots+X_n}] \\
&= E[r^{X_1} \times \ldots \times r^{X_n}] \\
&= E[r^{X_1}] \times \ldots \times E[r^{X_n}] \ \textit{[v.a. indépendantes]} \\
&= \mathcal{P}_{X_1}(r) \times \ldots \times \mathcal{P}_{X_n}(r),
\end{aligned}
$$

pour $r \in [0,1]$.

Exemple 1

Soit les v.a. indépendantes $X_1,\ldots,X_n$, *avec* $X_i \sim Pois(\lambda_i)$, *pour* $i = 1,\ldots,n$. *On définit la v.a.* $S = X_1 + \ldots + X_n$.

Alors, la fgp de la v.a. S *est donnée par*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(r) &= \mathcal{P}_{X_1}(r) \times \ldots \times \mathcal{P}_{X_n}(r)\\ &= \mathrm{e}^{\lambda_1(r-1)} \times \ldots \times \mathrm{e}^{\lambda_n(r-1)}\\ &= \mathrm{e}^{\lambda_1(r-1)+\ldots+\lambda_n(r-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)(r-1)},\end{aligned}$$

pour $r \in [0,1]$.

On déduit que $S \sim Pois(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$.

Observations :

- On se contente d'apprendre par coeur la relation en (4)
- On l'utilise pour développer des expressions fermées pour les lois discrètes connues
- Toutefois, on oublie ce qui se passe en coulisses en multipliant les séries convergentes de puissances.

Questions :

- Quand la v.a. X_i est définie sur un support fini, à quoi correspond $\mathcal{P}_{X_i}(t)$ $(i \in \{1,2,\ldots,n\})$?
- En appliquant la relation en (4), que représente $\mathcal{P}_S(t)$?
- Que représentent les coefficients de $\mathcal{P}_S(t)$?

Exemples : [en classe]

Relations récursives

Relations récursives

On examine en classe les récursives de base.

Algorithme de DePril

Algorithme de DePril

Soit les v.a. $X_1,...,X_n$ discrètes i.i.d. définies sur $\mathbb{N}$ avec

$$f_{X_i} = f_X \text{ et } \mathcal{P}_{X_i} = \mathcal{P}_X,\ i = 1,2,...,n.$$

On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$ avec

$$f_{S_n}(k) = f_{X_1+...+X_n}(k) = f_X^{*n}(k)$$

où f_X^{*n} est le n-ième produit de convolution de f_X avec elle-même.

Algorithme de DePril

La fgp de la v.a. S_n est

$$\mathcal{P}_{S_n}(t) = E\left[t^{S_n}\right] = \mathcal{P}_X(t)^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_{S_n}(k) \times t^k.$$

L'algorithme de DePril est une relation récursive permettant de calculer systématiquement les valeurs des coefficients de $\mathcal{P}_{S_n}(t)$.

Algorithme de DePril

Proposition 1

Algorithme de De Pril. *L'algorithme pour calculer* $f_X^{*n}(k)$ *est fourni par la relation récursive suivante :*

$$f_{S_n}(k) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} \left((n+1) \frac{j}{k} - 1 \right) f_X(j) f_{S_n}((k-j)) \qquad (5)$$

dont le point de départ est

$$f_{S_n}(0) = f_X(0)^n .$$

Algorithme de DePril

Exemple : en classe.

Algorithme de DePril

Preuve : en classe.

Somme de aléatoire de v.a. iid

Somme de aléatoire de v.a. iid

Soit une v.a. X définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_i & , M > 0 \\ 0, & , M = 0 \end{cases} , \tag{6}$$

où

- M est une v.a. discrète de fréquence ;
- $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ est une suite de v.a. positives i.i.d. définies sur $\mathbb{N}$, avec $B_k \sim B$; et
- $\underline{B}$ est indépendante de M.

Conséquence : la v.a. X prend des valeurs dans $\mathbb{N}$ avec

$$f_X(k) = \Pr(X = k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Somme de aléatoire de v.a. iid

La fgp de la v.a. X est

$$\mathcal{P}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(t)).$$

L'objectif est de calculer les valeurs de f_X.

On considère tout d'abord deux approches "générales" pour y parvenir.

Approche no1: On procède comme suit :

$$
\begin{aligned}
f_X(0) &= f_M(0) + \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j)\, f_{B_1+\ldots+B_j}(0) \\
&= f_M(0) + \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j)\, f_B^{*j}(0) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f_M(j)\,(f_B(0))^j = \mathcal{P}_M(f_B(0)) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

et

$$
f_X(kh) = \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j)\, f_{B_1+\ldots+B_j}(kh) = \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j)\, f_B^{*j}(kh), \qquad (8)
$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Somme de aléatoire de v.a. iid

Remarques sur l'Approche no1 :

- Bien que (7) soit aisée à évaluer, (8) demande plus de temps de calcul.
- On doit recourir à la Proposition 1 pour évaluer les valeurs de $f_B^{*j}(kh)$ pour chaque $j \in \mathbb{N}^+$ et chaque $k \in \mathbb{N}^+$.
- On doit tronquer une somme infinie par une somme finie.

Une solution ? Oui: algorithme de Panjer

- [Panjer, 1981] a proposé un algorithme récursif.
- Cet algorithme est appelé désormais *algorithme de Panjer*.
- Il permet le calcul des valeurs de f_X.
- Condition : la distribution de la v.a. M doit faire partie de la famille $(a,b,0)$ (voir un peu plus loin).

Somme de aléatoire de v.a. iid

La deuxième approche utilise la Propriété 1.

elle permet de présenter l'intuition derrière l'algorithme de Panjer.

On illustre la deuxième approche par le biais de 2 exemples.

Somme de aléatoire de v.a. iid

Exemple No1 : en classe. ...

Somme de aléatoire de v.a. iid

Exemple No2 : en classe. ...

Somme de aléatoire de v.a. iid

...

Famille (a,b,0) des lois de fréquence

Famille (a,b,0) des lois de fréquence

Il s'agit d'une classe de distributions de fréquence.

Définition 2

Une distribution de fréquence pour une v.a. M appartient à la famille de distributions de fréquence $(a,b,0)$ si f_M satisfait la relation récursive suivante :

$$f_M(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.
Le point de départ est $f_M(0) > 0$ (d'où le nom).

Seules les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative sont membres de cette famille.

Famille (a,b,0) des lois de fréquence

Valeurs de a et b :

- loi de Poisson : $a = 0$ et $b = \lambda$;
- loi binomiale négative (avec r, q) :

$$a = 1 - q$$

$$b = (1 - q)(r - 1) \;\; ;$$

- loi binomiale négative (avec r, β) : $a = \frac{\beta}{1+\beta}$ et $b = \frac{\beta}{1+\beta}(r - 1)$;
- loi binomiale : $a = -\frac{q}{1-q}$ et $b = (n + 1)\frac{q}{1-q}$.

Détails pour la loi de Poisson :

$$f_M(k) = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} = \frac{\lambda}{k} \times \frac{\lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{k} \times f_M(k-1),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Famille (a,b,0) des lois de fréquence

Détails pour la loi de Poisson :

$$f_M(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{\lambda}{k} \times \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{k} \times f_M(k-1),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Proposition 2

Relation récursive. *Pour le distribution de la famille* $(a,b,0)$, *on a*

$$\mathcal{P}'_M(t) = a \times t \times \mathcal{P}'_M(t) + (a+b)\,\mathcal{P}_M(t)\,, \tag{9}$$

où $\mathcal{P}'_M(t) = \frac{\mathrm{d}\,\mathcal{P}_M(t)}{\mathrm{d}t}$.

Famille (a,b,0) des lois de fréquence

Preuve : en classe

Algorithme de Panjer

Algorithme de Panjer

L'algorithme de Panjer est fourni dans la proposition suivante.

Proposition 3

Le point de départ de l'algorithme est

$$f_X(0) = \mathcal{P}_M\left\{f_B(0)\right\}$$

et la relation récursive est donnée par

$$f_X(k) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(a + b\frac{j}{k}\right) f_B(j) f_X(k-j)}{1 - a f_B(0)}, \tag{10}$$

pour $k \in \mathbb{N}^{+}$.

Algorithme de Panjer

Preuve : en classe.

Algorithme de Panjer

Remarque :

- Soit la v.a. $B \in \{0,1h,2h,\ldots\}$
- Alors, $X \in \{0,1h,2h,\ldots\}$
- La relation résursive en (10) devient

$$f_X(kh) = \frac{1}{1 - af_B(0)} \sum_{j=1}^{k} \left(a + b\frac{jh}{kh}\right) f_B(jh) \times f_X((k-j)h)$$

- Le point de départ demeure inchangé, c.-à-d.,

$$f_X(0) = \mathcal{P}_M(f_X(0))$$

.

Algorithme 4

Poisson composée. *Soit* $M \sim Pois(\lambda)$. *Le point de départ est* $f_X(0) = e^{\lambda(f_B(0)-1)}$ *et la relation récursive est donnée par*

$$f_X(kh) = \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} j f_B(jh) f_X((k-j)h),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. $\square$

Algorithme 5

Binomiale négative composée *(avec r et q). On suppose que $M \sim BN(r,q)$. Le point de départ est*

$$f_X(0) = \left(\frac{q}{1-(1-q)\,f_B(0)}\right)^r$$

et la relation récursive est donnée par

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{k}\right) f_B(jh) f_X((x-j)\,h)}{1-(1-q)\,f_B(0)},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. $\square$

Algorithme 6

Binomiale composée. *On suppose que* $M \sim Bin(n,q)$. *Le point de départ est*

$$f_X(0) = (1 - q + q f_B(0))^n$$

et la relation récursive est donnée par

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left(-q + \frac{(n+1)qj}{k}\right) f_B(j) f_X((k-j)h)}{1 - q + q f_B(0)},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. □

Algorithme de Panjer

Exemple No1 : en classe.

Algorithme de Panjer

Exemple No2 : en classe.

Algorithme de Panjer

Remarques : en classe.

Nombres complexes

Nombres complexes

Les notions sur ce thème seront traitées plus tard pendant le semestre.

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Les notions sur ce thème seront traitées plus tard pendant le semestre.

Illustrations

Illustrations

Les sections suivantes sont des illustrations sur la théorie présentée dans ce chapitre.

Les illustrations sont discutées pendant les ateliers.

Les calculs numériques et les graphiques ont été réalisés par Madame Ihsan Chaoubi et Monsieur Christopher Blier-Wong au semestre A2018.

Méthodes de discrétisation

Méthodes de discrétisation

Soit une v.a. continue positive Y, avec fonction de répartition F_Y. Pour simplifier la présentation, $F_Y(0) = 0$.

Un certain nombre de méthodes de discrétisation existent afin de définir la v.a. $\widetilde{Y}$ qui approxime la v.a. Y.

On présente les principales méthodes dans les prochaines sous-sections.

Selon la méthode *upper*, la valeur de la fonction de masse de probabilité à 0 est

$$f_{\widetilde{Y}(u,h)}(0) = \Pr(Y \leq h) = F_Y(h)$$

et les valeurs de la fonction de masse de probabilité à $1h$,$2h$,$3h$,... sont

$$f_{\widetilde{Y}(u,h)}(kh) = \Pr(kh \leq Y < (k+1)h) = F_Y((k+1)h) - F_Y(kh)$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

La fonction de répartition $F_{\widetilde{Y}(u,h)}(x)$ est une fonction en escalier dont les sauts sont à $0h$, $1h$, $2h$, ... et dont la première marche à 0 est d'une hauteur $F_{\widetilde{Y}(u,h)}(0) = F_Y(h)$.

On a

$$F_{\widetilde{Y}(u,h)}(x) = \begin{cases} F_Y(h), & 0 \leq x < h \\ F_Y(2h), & h \leq x < 2h \\ F_Y(3h), & 2h \leq x < 3h \\ & \ldots \end{cases}$$

Selon cette méthode, on a la relation $F_Y(x) \leq F_{\widetilde{Y}(u,h)}(x)$, $x \geq 0$.

Pour la méthode *lower*, la valeur de la fonction de masse de probabilité à 0 est $f_{\widetilde{Y}^{(l,h)}}(0) = 0$ et les valeurs de la fonction de masse de probabilité à $1h$,$2h$,$3h$,... sont

$$f_{\widetilde{Y}^{(l,h)}}(kh) = \Pr\left((k-1)h \leq Y < kh\right) = F_Y(kh) - F_Y((k-1)h),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

La fonction de répartition $F_{\widetilde{Y}^{(l,h)}}(x)$ est une fonction en escalier dont les sauts sont à $1h$, $2h$, ..., soit

$$F_{\widetilde{Y}^{(l,h)}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < h \\ F_Y(h), & h \leq x < 2h \\ F_Y(2h), & 2h \leq x < 3h \\ & \ldots \end{cases}$$

On observe la relation $F_Y(x) \geq F_{\widetilde{Y}^{(l,h)}}(x)$, $x \geq 0$.

Convergence en distribution :

1. $Y^{(u,h)} \overset{D}{\to} Y$, i.e.,

$$\lim_{h \to 0} F_{Y^{(u,h)}}(x) = F_Y(x), \text{ pour } x \geq 0.$$

2. $Y^{(l,h)} \overset{D}{\to} Y$, i.e.,

$$\lim_{h \to 0} F_{Y^{(l,h)}}(x) = F_Y(x), \text{ pour } x \geq 0.$$

Inégalités : Soit $h_2 \leq h_1$. On a

$$F_{Y^{(l,h_1)}}(x) \leq F_{Y^{(l,h_2)}}(x) \leq F_Y(x) \leq F_{Y^{(u,h_2)}}(x) \leq F_{Y^{(u,h_1)}}(x)$$

pour $x \geq 0$.

Méthodes de discrétisation

Exemple - Loi lognormale

Soit $Y \sim LNorm(\mu, \sigma)$ avec $\mu = \ln(10) - 0.32$ et $\sigma = 0.8$.

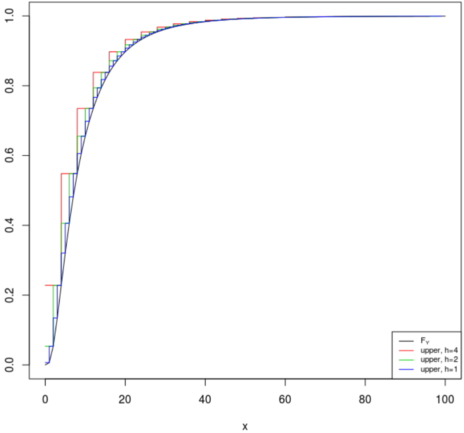
	$VaR_\kappa\left(Y^{(u,h)}\right)$				$VaR_\kappa(Y)$	$VaR_\kappa\left(Y^{(l,h)}\right)$			
κ	$h = 1$	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 10^{-3}$		$h = 10^{-3}$	$h = 0.01$	$h = 0.1$	$h = 1$
0.9	20	20.2	20.24	20.243	20.24335	20.244	20.25	20.3	21
0.99	46	46.6	46.69	46.696	46.69623	46.697	46.70	46.7	47
0.999	86	86.0	86.03	86.036	86.03644	86.037	86.04	86.1	87
0.9999	142	142.2	142.28	142.280	142.28019	142.281	142.29	142.3	143

Les calculs s'effectuent très rapidement.

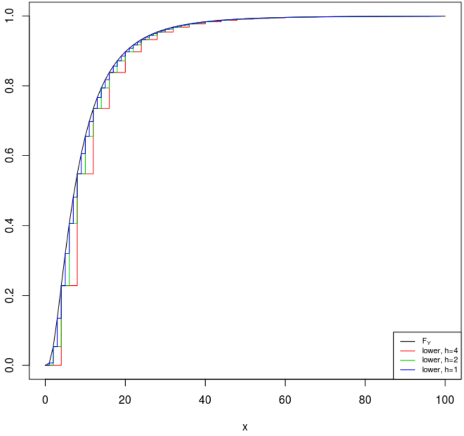
Méthodes de discrétisation

Exemple - Loi lognormale

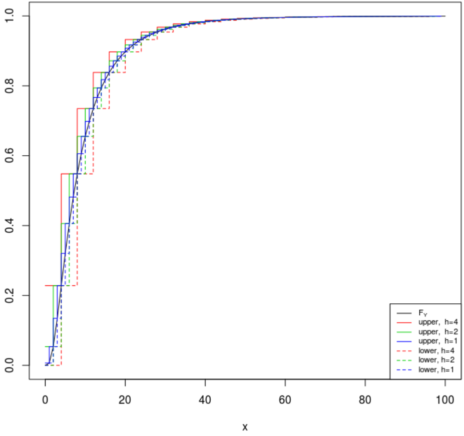
Graphique #1 Convergence en distribution - Méthode lower



Graphique #2 Convergence en distribution - Méthode upper



Graphique #3 - Sandwich



Méthodes de discrétisation

Exemple - Loi Pareto

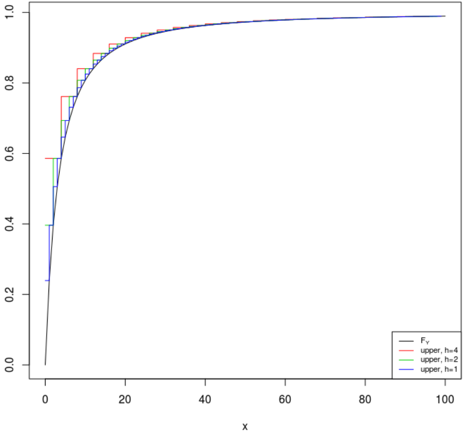
Soit $Y \sim Pareto(\alpha,\lambda)$ avec $\alpha = 1.5$ et $\lambda = 5$ (variance infini)

	$VaR_\kappa\left(Y^{(u,h)}\right)$				$VaR_\kappa(Y)$	$VaR_\kappa\left(Y^{(l,h)}\right)$			
κ	$h=1$	$h=0.1$	$h=0.01$	$h=10^{-3}$		$h=10^{-3}$	$h=0.01$	$h=0.1$	$h=1$
0.9	18	18.2	18.20	18.207	18.20794	18.208	18.21	18.3	19
0.99	102	102.7	102.72	102.721	102.722	102.722	102.73	102.8	103
0.999	495	495.0	495.00	495.000	495.000	495.001	495.01	495.1	496
0.9999	2315	2315.7	2315.79	2315.794	2315.794	2315.795	2315.80	2315.8	2316

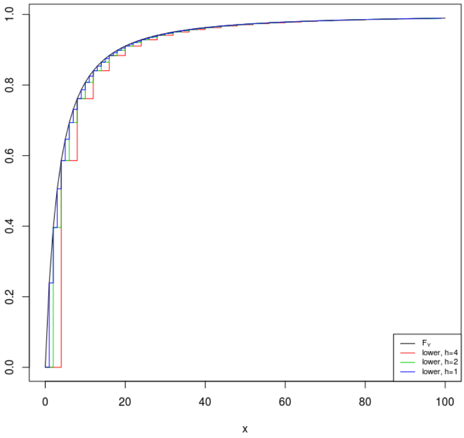
Méthodes de discrétisation

Exemple - Loi Pareto

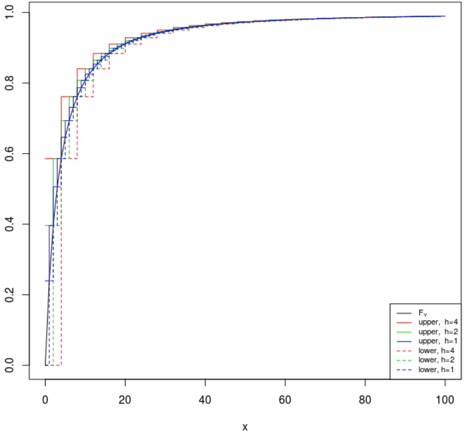
Graphique #1 Convergence en distribution - Méthode upper



Graphique #2 Convergence en distribution - Méthode lower



Graphique #3 - Sandwich



Produit de convolution

Produit de convolution

Soit les variables aléatoires indépendantes continues positives X_1 et X_2 avec les fonctions de répartition F_{X_i} et les fonctions de densité f_{X_i}, pour $i = 1,2$.

On définit la v.a. S par

$$S = X_1 + X_2$$

avec une fonction de répartition F_S et une fonction de densité f_S.

On définit les versions discrétisées des v.a. X_1, X_2 et S par les v.a. $\widetilde{X}_1^{(mét,h)}$, $\widetilde{X}_2^{(mét,h)}$, et $\widetilde{S}^{(mét,h)}$, où $mét$ = "u" ou "l", définies sur le support

$$A_h = \{0,1h,2h,...\}\,.$$

Produit de convolution

La fonction de densité f_S est définie par le produit de convolution de f_{X_1} et f_{X_2} où

$$\begin{aligned} f_S(x) &= f_{X_1+X_2}(x) = f_{X_1} * f_{X_2}(x) \\ &= \int_0^x f_{X_1}(y) f_{X_2}(x-y)\,\mathrm{d}y, \qquad (11) \end{aligned}$$

pour $x \geq 0$.

La fonction de répartition F_S est définie par

$$F_S(x) = \int_0^x f_S(s)\,\mathrm{d}s,$$

pour $x \geq 0$.

Très souvent, il n'y a pas d'expression fermée à (11).

Produit de convolution

La fonction de masse de probabilité $f_{\widetilde{S}^{(mét,h)}}$ est définie par le produit de convolution de $f_{\widetilde{X}_1^{(mét,h)}}$ et $f_{\widetilde{X}_2^{(mét,h)}}$ où

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{S}^{(mét,h)}}(kh) &= f_{\widetilde{X}_1^{(mét,h)}+\widetilde{X}_2^{(mét,h)}}(kh) = f_{\widetilde{X}_1^{(mét,h)}} * f_{\widetilde{X}_2^{(mét,h)}}(kh) \\ &= \sum_{j=0}^{k} f_{\widetilde{X}_1^{(mét,h)}}(jh)\, f_{\widetilde{X}_2^{(mét,h)}}((k-j)\,h), \end{aligned} \tag{12}$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

La fonction de répartition $F_{\widetilde{S}^{(mét,h)}}$ est définie par

$$F_{\widetilde{S}^{(mét,h)}}(kh) = \sum_{l=0}^{k} f_{\widetilde{S}^{(mét,h)}}(lh), (k \in \mathbb{N}).$$

La relation en (12) se programme aisément en R.

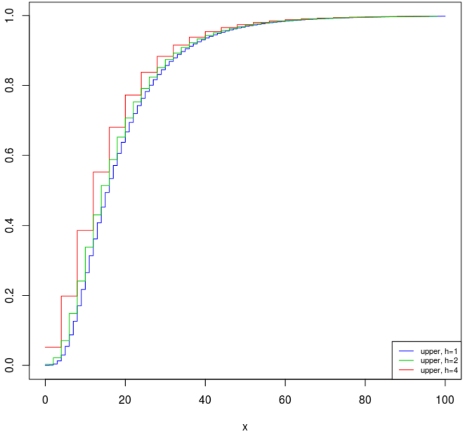
Soit $X_1 \sim X_2 \sim X \sim LNorm(\mu,\sigma)$ avec $\mu = \ln(10) - 0.32$ et $\sigma = 0.8$.

On a

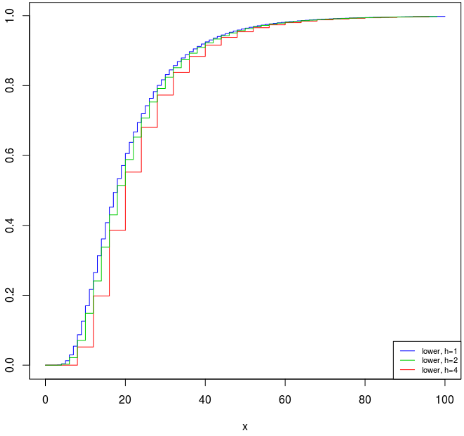
	$VaR_\kappa\left(Y^{(u,h)}\right)$			$VaR_\kappa\left(Y^{(l,h)}\right)$		
κ	$h = 1$	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.01$	$h = 0.1$	$h = 1$
0.9	35	35.7	35.83	35.85	35.9	37
0.99	68	68.7	68.75	68.77	68.9	70
0.999	113	113.5	113.59	113.61	113.7	115
0.9999	175	175.5	175.57	175.59	175.7	177

Les temps de calculs sont longs pour des pas plus petits (h $<$ 0.01).

Graphique #1 Convergence en distribution - Méthode upper



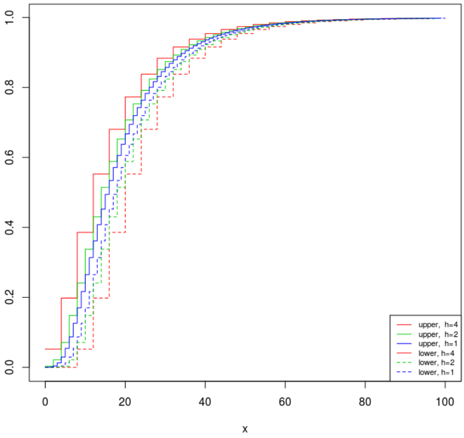
Graphique #2 Convergence en distribution - Méthode lower



Produit de convolution

Exemple - Loi lognormale

Graphique #3 - Sandwich



Soit $X_1 \sim X_2 \sim X \sim Pareto(\alpha,\lambda)$ avec $\alpha = 1.5$ et $\lambda = 5$.

On a

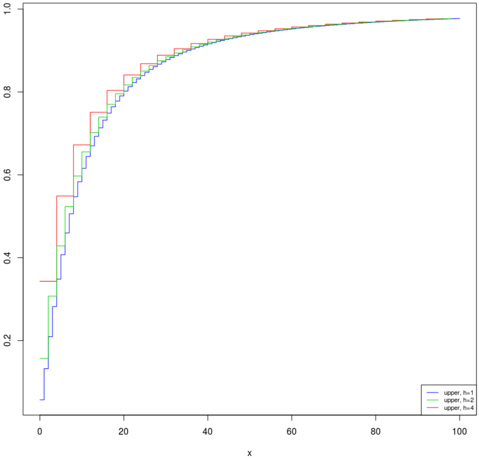
	$VaR_\kappa\left(Y^{(u,h)}\right)$			$VaR_\kappa\left(Y^{(l,h)}\right)$		
κ	$h = 1$	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.01$	$h = 0.1$	$h = 1$
0.9	35	36.4	36.45	36.47	36.6	37
0.99	173	174.1	174.18	174.20	174.3	175
0.999	797	798.2	798.24	798.26	798.4	799
0.9999	3688	3688.8	3688.92	3688.94	3689.0	3690

Les temps de calculs sont plus longs en comparaison à ceux de l'exemple précédent.

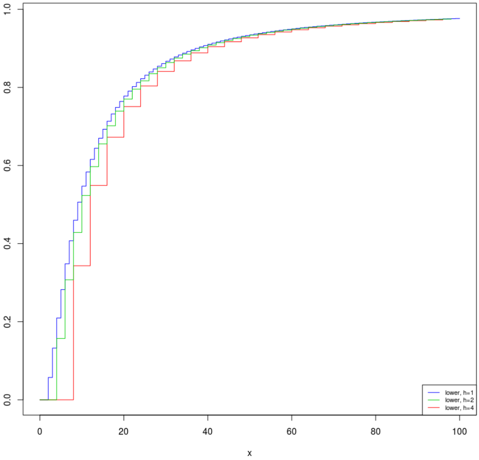
Produit de convolution

Exemple - Loi Pareto

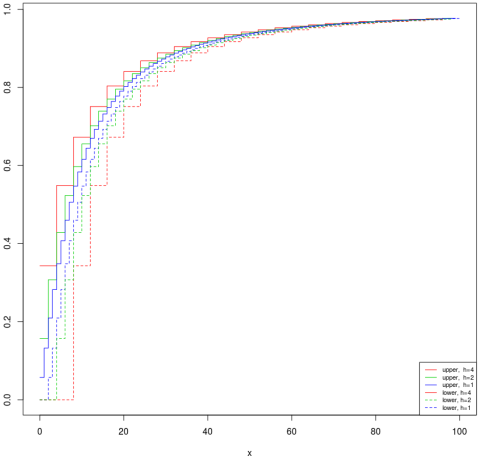
Graphique #1 Convergence en distribution - Méthode upper



Graphique #2 Convergence en distribution - Méthode lower



Graphique #3 - Sandwich



Somme aléatoire

Somme aléatoire

Soit la v.a. de comptage M (forcément discrète), avec une fonction de masse de probabilité f_M.

Soit la variable aléatoire continue positive X avec la fonction de répartition F_X et la fonction de densité f_X.

Soit une suite de v.a. i.i.d. $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}^+\}$, qui est indépendante de X, où $X_i \sim X$, $i \in \mathbb{N}^+$.

On définit la v.a. S par

$$S = \sum_{i=1}^{M} X_i$$

avec la convention $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$.

Somme aléatoire

On définit les versions discrétisées des v.a. X et S par les v.a. $\widetilde{X}^{(mét,h)}$ et $\widetilde{S}^{(mét,h)}$, où $mét$ = "u" ou "l", définies sur le support

$$A_h = \{0,1h,2h,...\}.$$

La fonction de répartition F_S est définie par

$$F_S(x) = f_M(0) + \sum_{i=1}^{\infty} f_M(i) F_{B_1+...+B_i}(x), \tag{13}$$

pour $x \geq 0$.

Très souvent, il n'y a pas d'expression fermée à (13).

Somme aléatoire

La fonction de masse de probabilité $f_{\widetilde{S}(mét,h)}$ est définie par

$$f_{\widetilde{S}(mét,h)}(kh) = f_M(0) \times 1_{\{k=0\}} + \sum_{i=1}^{\infty} f_M(i) f_{B_1+\ldots+B_i}(kh), k \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Les valeurs de $f_{\widetilde{S}(mét,h)}$ peuvent être calculées directement avec (14).

Toutefois, il est préférable de recourir à des méthodes récursives ou à la FFT.

La fonction de répartition $F_{\widetilde{S}(mét,h)}$ est définie par

$$F_{\widetilde{S}(mét,h)}(kh) = \sum_{l=0}^{k} f_{\widetilde{S}(mét,h)}(lh), k \in \mathbb{N}.$$

Somme aléatoire

Exemple - Loi lognormale

Soit $X \sim LNorm(\mu,\sigma)$ avec $\mu = \ln(10) - 0.32$ et $\sigma = 0.8$.

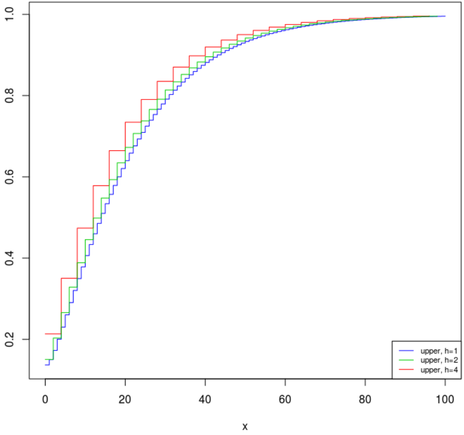
Soit $M \sim Pois(\lambda)$, $\lambda = 2$ ou $\lambda = 10$.

- Pour $\lambda = 2$, on a

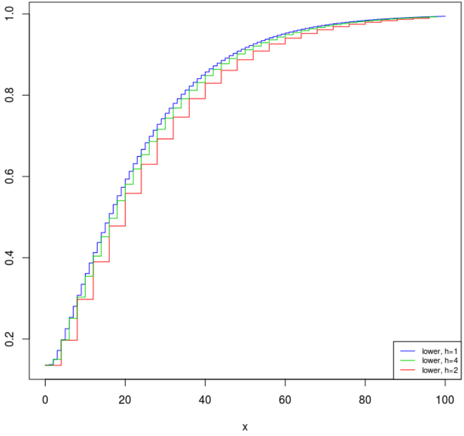
	$VaR_\kappa\left(Y^{(u,h)}\right)$			$VaR_\kappa\left(Y^{(l,h)}\right)$		
κ	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.1$	$h = 0.1$	$h = 0.5$	$h = 1$
0.9	43	44.5	45.0	45.4	46.0	47
0.99	85	85.5	86.5	87.0	88.0	89
0.999	132	133.0	134.0	134.4	135.5	136
0.9999	193	193.5	194.4	194.8	195.5	197

- Pour $\lambda = 10$, les calculs prennent plus de temps.

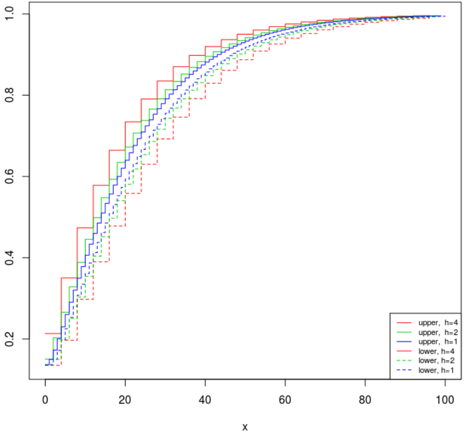
Graphique #1 Convergence en distribution - Méthode upper avec $\lambda = 2$



Graphique #2 Convergence en distribution - Méthode lower avec $\lambda = 2$



Graphique #3 - Sandwich $\lambda = 2$



Soit $X \sim Pareto(\alpha,\lambda)$ avec $\alpha = 1.5$ et $\lambda = 5$.
Soit $M \sim Pois(\lambda)$, $\lambda = 2$ ou $\lambda = 10$.

- Les calculs sont plus longs comparer à l'exemple précédent.
- Pour $\lambda = 2$, on obtient

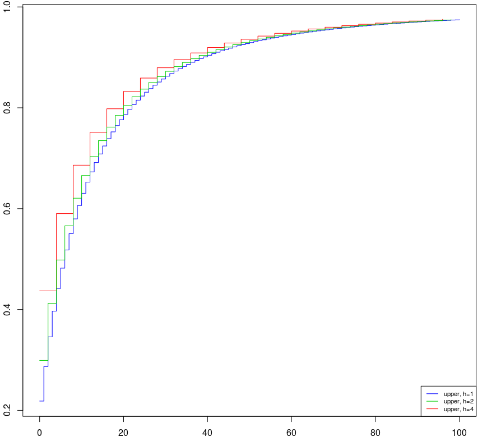
	$VaR_\kappa\left(Y^{(u,h)}\right)$			$VaR_\kappa\left(Y^{(l,h)}\right)$		
κ	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 1$	$h = 2$	$h = 4$
0.9	36	38	39	42	44	48
0.99	176	180	182	185	186	192
0.999	804	806	807	810	812	816
0.9999	3692	3696	3697	3700	3702	3704

- Pour $\lambda = 10$, les calculs prennent beaucoup plus de temps.
- Si on prend des pas plus petits que $h = 1$, les calculs prennent plus de temps.

Somme aléatoire

Exemple - Loi Pareto

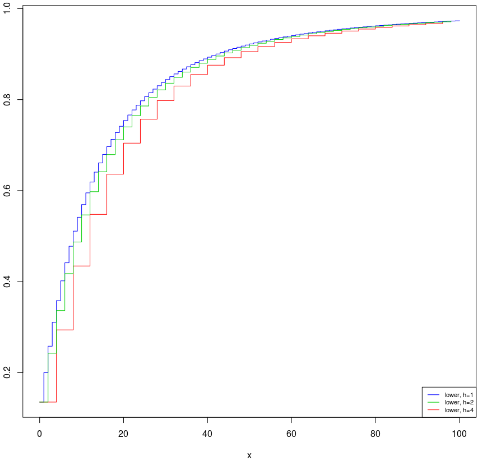
Graphique #1 Convergence en distribution - Méthode upper avec $\lambda = 2$



Somme aléatoire

Exemple - Loi Pareto

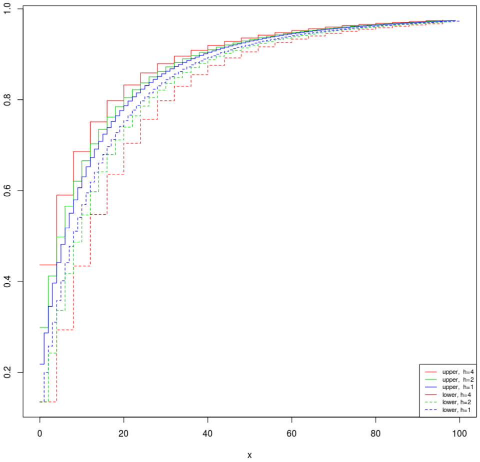
Graphique #2 Convergence en distribution - Méthode lower avec $\lambda = 2$



Somme aléatoire

Exemple - Loi Pareto

Graphique #3 Sandwich avec $\lambda = 2$



Conclusion

Conclusion

Le choix du pas de discrétisation dépend du degré de précision souhaité et du temps de calculs.

Les paramètres des lois lognormale et Pareto ont été fixés de telle sorte que les espérances soient égales à 10. Toutefois, les valeurs de VaR diffèrent considérablement pour $\kappa > 0.99$

Algorithmes récursifs

On considère une v.a. X discrète où $X \in \{0,1h,2h,...\}$ avec

$$f_X(kh) = \Pr(X = kh),$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

On définit

$$S_n = X_1 + ... + X_n,$$

où les v.a. $X_1,...,X_n$ sont i.i.d. et se comportent comme la v.a. X $(X_i \sim X,\ i = 1,2,...,n)$.

Algorithme de DePril :

- **Point de départ**:

$$f_{S_n}(0) = f_X(0)^n.$$

- **Relation récursive:**

$$f_{S_n}(kh) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} \left((n+1)\frac{j}{k} - 1 \right) f_X(jh) f_{S_n}((k-j)h)$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Soit la v.a. X définie selon l'approche fréquence sévérité

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} B_i & , \quad M > 0 \\ 0, & , \quad M = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses suivantes :

- $\underline{B} = \{B_i, i \in \mathbb{N}^+\}$;
- $B_i \sim B \in A_h = \{0, 1h, 2h, ...\}$;
- $\underline{B}$ et M sont indépendantes ;
- fonction de masse de probabilité de B :

$$\Pr(B = hj) = f_B(hj),$$

pour $j \in \mathbb{N}$ avec un pas de discrétisation $h > 0$;

L'algorithme de Panjer s'applique à la condition que la loi de M fasse partie de la classe $(a,b,0)$ dont la fonction de masse de probabilité satisfait la relation récursive suivante :

$$f_M(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$

Seules les lois Poisson, Binomiale et Binomiale Négative sont membres de cette famille.

Les valeurs de a et b pour les membres de la famille $(a,b,0)$ sont les suivantes :

- loi de Poisson: $a = 0$ et $b = \lambda$;
- loi binomiale négative (1ère paramétrisation): $a = 1 - q$ et $b = (1 - q)(r - 1)$;
- loi binomiale: $a = -\frac{q}{1-q}$ et $b = (n + 1)\frac{q}{1-q}$.

Algorithme de Panjer – Forme générale

- **Point de départ:**

$$f_X(0) = \Pr(X = 0) = \mathcal{P}_M\left(f_B(0)\right).$$

- **Relation récursive:**

$$f_X(hk) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(a + \frac{bj}{k}\right) f_B(hj) f_X(h(k-j))}{1 - a f_B(0)},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$

Loi Poisson :

$$N \sim Pois(\lambda).$$

- **Point de départ** :

$$f_X(0) = \Pr(X = 0) = e^{-\lambda(1-f_B(0))}.$$

- **Relation récursive:**

$$f_X(hk) = \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k}(j)\,f_B(hj)f_X(h\,(k-j)),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$

Loi Binomiale Négative ($1^{ère}$ paramétrisation):

$$N \sim BNeg(r,q).$$

- **Point de départ**:

$$f_X(0) = \left(\frac{q}{1 - (1-q)\, f_B(0)} \right)^r,$$

- **Relation récursive:**

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left(1 - q + \frac{(1-q)(r-1)j}{k} \right) f_B(jh) f_X((k-j)\, h)}{1 - (1-q)\, f_B(0)},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$

Loi Binomiale :

$$N \sim Binom(n,q).$$

- **Point de départ**:

$$f_X(0) = \Pr(X = 0) = (1 - q + q f_B(0))^n$$

- **Relation récursive:**

$$\begin{aligned} f_X(hk) &= \frac{\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{q}{q-1} + \frac{(n+1)qj}{(1-q)k} \right) f_B(j) f_X(k-j)}{1 + \frac{q}{1-q} f_B(0)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{k} \left(-q + \frac{(n+1)qj}{k} \right) f_B(hj) f_X(h(k-j))}{1 - q + q f_B(0)}, \end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$

Soit la v.a. X avec

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{L}_B(t)), \; t \geq 0,$$

avec

- $B \sim LNorm(\mu,\sigma)$, $\mu = \ln(10) - 0.32$ et $\sigma = 0.8$;
- $\mathcal{P}_M(r) = \alpha \exp(\lambda_1(r-1)) + (1-\alpha)\exp(\lambda_2(r-1))$, $r \in [0,1]$, $\alpha = 0.8$, $\lambda_1 = 1$, $\alpha = 0.8$, $\lambda_2 = 6$.

On déduit :

- Espérance de X :
$$E[X] = 20$$
- Variance de X :
$$Var(X) = 267.269$$

Soit les v.a. indépendantes $K_i \sim Pois(\lambda_i)$, $i = 1,2$, avec

$$\mathcal{P}_{K_i}(r) = \exp(\lambda_i(r-1)), \; r \in [0,1], \; i = 1,2.$$

Soit les v.a. indépendantes $Y_i \sim PoisComp(\lambda_i, F_B)$, $i = 1,2$, avec

$$\mathcal{L}_{Y_i}(t) = \mathcal{P}_{K_i}(\mathcal{L}_B(t)), \; t \geq 0, \; i = 1,2.$$

On déduit :

- fgp de M :
$$\mathcal{P}_M(r) = \alpha \mathcal{P}_{K_1}(r) + (1-\alpha)\mathcal{P}_{K_2}(r), \; r \in [0,1] \; ;$$
- TLS de X :
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(t) &= \alpha \mathcal{P}_{K_1}(\mathcal{L}_B(t)) + (1-\alpha)\mathcal{P}_{K_2}(\mathcal{L}_B(t)) \\ &= \alpha \mathcal{L}_{Y_1}(t) + (1-\alpha)\mathcal{L}_{Y_2}(t), t \geq 0 \; ; \end{aligned}$$
- F_X :
$$F_X(x) = \alpha F_{Y_1}(x) + (1-\alpha) F_{Y_2}(x)$$

On applique les outils suivants pour évaluer approximativement $F_X(x)$:

- discrétisation *upper* et *lower* $(h = 1, 0.1)$;
- algorithme de Panjer.

Soit les v.a. discrètes $\widetilde{B}^{(up,h)}$ et $\widetilde{B}^{(low,h)}$ résultant de l'approximation par discrétisation de la distribution de la v.a. continue B

Soit les v.a. correspondantes $\widetilde{Y}_1^{(up,h)}$, $\widetilde{Y}_1^{(low,h)}$, $\widetilde{Y}_2^{(up,h)}$, $\widetilde{Y}_2^{(low,h)}$, $\widetilde{X}^{(up,h)}$ et $\widetilde{X}^{(low,h)}$.

Étapes pour l'évaluation des approximations de F_X :

1. Discrétisation de la v.a. $B \Rightarrow f_{\widetilde{B}^{(up,h)}}$ et $f_{\widetilde{B}^{(low,h)}}$;
2. Algo de Panjer : calcul des valeurs de $f_{\widetilde{Y}_i^{(up,h)}}(kh)$ et $f_{\widetilde{Y}_i^{(low,h)}}(kh)$, $k \in \{0,1,...,k_0\}$, $i = 1,2$;
3. Calcul des valeurs de $f_{\widetilde{X}^{(up,h)}}(kh)$ et $f_{\widetilde{X}^{(low,h)}}(kh)$, $k \in \{0,1,...,k_0\}$, avec

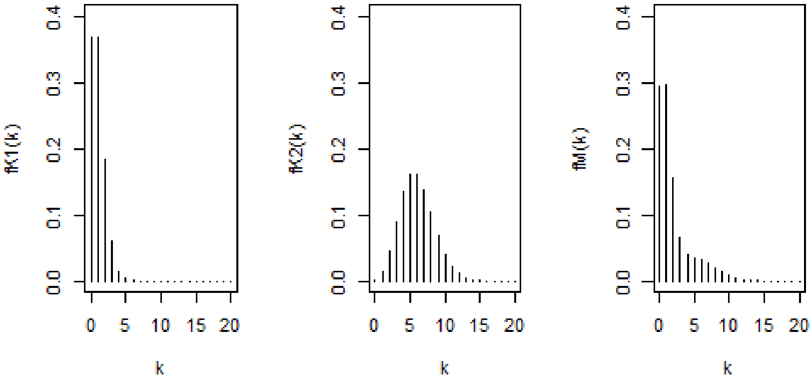
$$f_{\widetilde{X}^{(up,h)}}(kh) = \alpha \times f_{\widetilde{Y}_1^{(up,h)}}(kh) + (1-\alpha) f_{\widetilde{Y}_2^{(up,h)}}(kh),$$

et

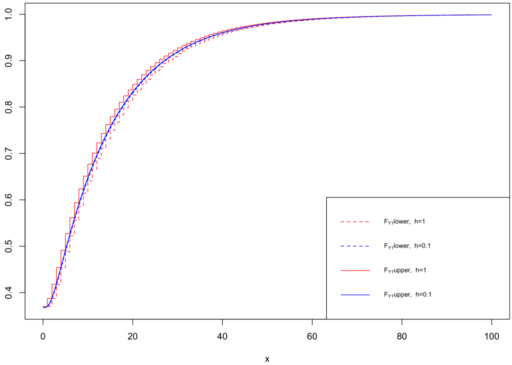
$$f_{\widetilde{X}^{(low,h)}}(kh) = \alpha \times f_{\widetilde{Y}_1^{(low,h)}}(kh) + (1-\alpha) f_{\widetilde{Y}_2^{(low,h)}}(kh),$$

pour $k \in \{0,1,...,k_0\}$,

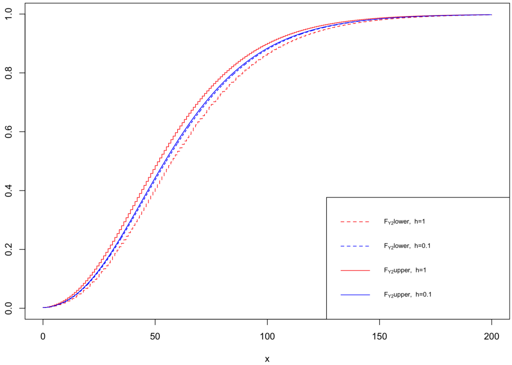
Valeurs des fonctions de masse de probabilité f_{K_1}, f_{K_2}, et f_M :



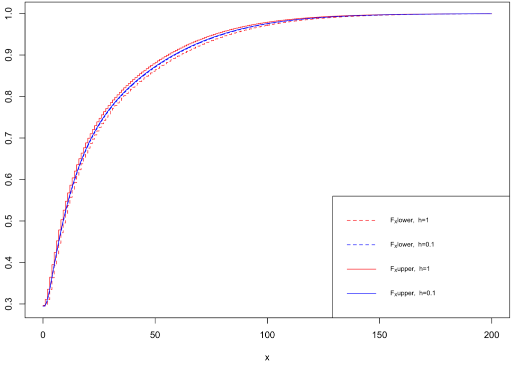
Valeurs de $F_{\widetilde{Y_1}^{(up,h)}}$ et $F_{\widetilde{Y_1}^{(low,h)}}$, $h = 1{,}0.1$:



Valeurs de $F_{\widetilde{Y_2}(up,h)}$ et $F_{\widetilde{Y_2}(low,h)}$, $h = 1{,}0.1$:



Valeurs de $F_{\widetilde{X}(up,h)}$ et $F_{\widetilde{X}(low,h)}$, $h = 1{,}0.1$:



Soit les v.a. indépendantes X_1 et X_2 avec

$$\mathcal{L}_{X_i}(t) = \mathcal{P}_{M_i}(\mathcal{L}_{B_i}(t)), \ t \geq 0,$$

avec

- $B_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1{,}2$, $\beta_1 = \frac{1}{10}$ et $\beta_2 = \frac{1}{2}$ (note : $\beta_2 > \beta_1$) ;
- $\mathcal{P}_{M_i}(r) = \exp(\lambda_i(r-1))$, $r \in [0{,}1]$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 10$.

On définit

$$S = X_1 + X_2.$$

On déduit :

- Espérance de X_1 et X_2 : $E[X_1] = 20$, $E[X_2] = 20$.
- Variance de X_1 et X_2 : $Var(X_1) = 600$, $Var(X_2) = 120$.
- Espérance de S : $E[S] = 40$.
- Variance de S : $Var(S) = 720$.

Objectif : Évaluer F_S (et les mesures de risque associée à S)
Stratégie :

1. Étape 1: Démontrer que

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta_2), \ x \geq 0 \ ;$$

2. Étape 2: Utiliser l'algorithme de Panjer pour évaluer γ_k, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$, où k_0 est fixé de telle sorte que $1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \leq \varepsilon$ pour un ε fixé très petit (e.g., $\varepsilon = 10^{-10}$).
3. Étape 3: On évalue $F_S(x)$, avec γ_k, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$, où k_0 est fixé de telle sorte que $1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \leq \varepsilon$ pour un ε fixé très petit (e.g., $\varepsilon = 10^{-10}$).

Étape 1.
La TLS de S est donnée par

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \mathcal{L}_{X_2}(t) = \mathcal{P}_N(\mathcal{L}_C(t)), \ t \geq 0,$$

où

- fgp de N :

$$\mathcal{P}_N = \exp(\lambda_N(r-1)), \ r \in [0,1] \ ;$$

- $\lambda_N = \lambda_1 + \lambda_2 = 12$;
- TLS de C

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C(t) &= p_1 \mathcal{L}_{B_1}(t) + p_2 \mathcal{L}_{B_2}(t) \\ &= p_1\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right) + p_2\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right), \ t \geq 0; \end{aligned}$$

On rérrange les termes de $\mathcal{L}_C(t)$.

La TLS de la v.a. C est

$$\mathcal{L}_C(t) = \alpha\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right). \tag{15}$$

Dans (15), on a

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right) = q\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\frac{1}{1-(1-q)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)}$$

où $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$.

On introduit la v.a. discrète J (avec support $\mathbb{N}^{+}$) avec

$$\mathcal{P}_J(r) = qr\frac{1}{1-(1-q)r},\ r \in [0,1].$$

On observe

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_J(r) &= qr\frac{1}{1-(1-q)r} \\ &= r\sum_{k=0}^{\infty} q(1-q)^k \times r^k\end{aligned}$$

avec $q = \frac{\beta_1}{\beta_2} \in (0,1)$.

Algorithmes récursifs

Illustration no2

Ainsi, dans (15), on remplace

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right)$$

par

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right) = \mathcal{P}_J\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) = \mathcal{P}_J\left(\mathcal{L}_D\left(t\right)\right),$$

où

$$\mathcal{L}_D\left(t\right) = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right).$$

Alors, (15) devient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_C(t) &= \alpha\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)+(1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\\ &= \alpha\mathcal{P}_J\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)+(1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right).\end{aligned} \qquad (16)$$

On introduit une v.a. discrète K sur le support $\mathbb{N}^+=\{1,2,\ldots\}$ dont la f.g.p. est

$$\mathcal{P}_K(r)=\alpha\mathcal{P}_J(r)+(1-\alpha)\times r, \qquad (17)$$

pour $r\in[0,1]$. [Note : $\Pr(K=0)=0$.]

La fgp de la v.a. K est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_K(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \times r^k \\ &= \alpha \mathcal{P}_J(r) + (1-\alpha) \times r \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \times r^k + (1-\alpha) \times r \end{aligned} \tag{18}$$

où

$$f_J(k) = \begin{cases} 0 & , \quad k = 0 \\ q(1-q)^{k-1} & , \quad k \in \mathbb{N}^+ \end{cases} . \tag{19}$$

En combinant (18) et (17), on déduit que

$$f_K(k) = \eta_k = \begin{cases} 0 & , \quad k = 0 \\ \alpha \times q + (1-\alpha) & , \quad k = 1 \\ \alpha \times q(1-q)^{k-1} & , \quad k = 2,3,\ldots \end{cases}.$$

Avec (16) et (17), et puisque $\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \in [0,1]$ pour $t \geq 0$, on conclut que

$$\mathcal{L}_C(t) = \mathcal{P}_K\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)$$

Clairement,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} f_J(k) + (1-\alpha) \\ &= \alpha \times 1 + (1-\alpha) = 1. \end{aligned}$$

Maintenant, on revient à la TLS de S

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \mathcal{L}_{X_2}(t) = \mathcal{P}_N(\mathcal{L}_C(t)),\ t \geq 0,$$

où

- fgp de N :

$$\mathcal{P}_N = \exp(\lambda_N(r-1)),\ r \in [0,1]\ ;$$

- $\lambda_N = \lambda_1 + \lambda_2 = 12$;
- TLS de C

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_C(t) &= p_1\mathcal{L}_{B_1}(t) + p_2\mathcal{L}_{B_2}(t)\\ &= p_1\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right) + p_2\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\\ &= \mathcal{P}_K\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right),\ t \geq 0;\end{aligned}$$

Alors, la TLS de S devient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \mathcal{L}_{X_2}(t) \\ &= \mathcal{P}_N(\mathcal{L}_C(t)) \\ &= \mathcal{P}_N\left(\mathcal{P}_K\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\right),\ t \geq 0, \end{aligned} \tag{20}$$

On introduit la v.a. discrète L dont la fonction de masse de probabilité et la fgp sont respectivement

$$\Pr(L = k) = \gamma_k,\ k \in \mathbb{N},$$

et

$$\mathcal{P}_L(r) = \mathcal{P}_N(\mathcal{P}_K(r)) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k r^k. \tag{21}$$

Puisque $N \sim Pois\,(\lambda_N)$, on utilise l'algorithme de Panjer pour calculer les valeurs de γ_k, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$, où k_0 est fixé de telle sorte que $1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \leq \varepsilon$ pour un ε fixé très petit (e.g., $\varepsilon = 10^{-10}$).

En combinant (20) et (21), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{P}_N\left(\mathcal{P}_K\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\right) \\ &= \mathcal{P}_L\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^k,\ t\geq 0. \end{aligned} \tag{22}$$

De la TLS de S en (22), on déduit

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k H(x;k,\beta_2),\ x\geq 0.$$

Étape 2.

On applique l'algorithme de Panjer pour calculer γ_k, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$, où k_0 est fixé de telle sorte que $1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \leq \varepsilon$ pour un ε fixé très petit (e.g., $\varepsilon = 10^{-10}$).

k	0	1	5	10	20
γ_k	6.144212×10^{-6}	0.000026543	0.000348132	0.001599818	0.007537266

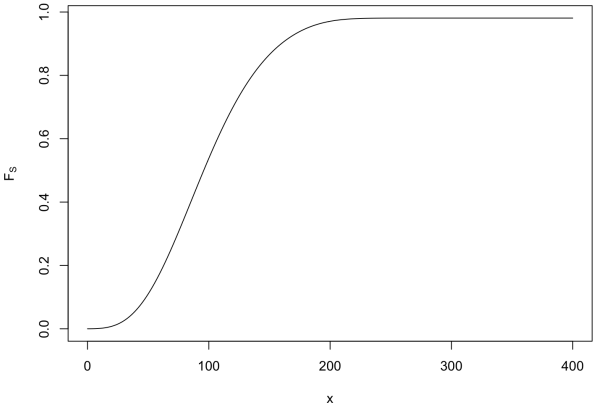
Étape 3.
On évalue $F_S(x)$, avec γ_k, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$, où k_0 est fixé de telle sorte que $1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \leq \varepsilon$ pour un ε fixé très petit (e.g., $\varepsilon = 10^{-10}$).

x	0	5	10	20	50
$F_S(x)$	6.144212×10^{-6}	0.00026746	0.00125063	0.00788859	0.10987205

Algorithmes récursifs

Illustration no2

Valeurs de F_S :



Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim Gamma\left(\alpha_1,\beta_1\right)$ et $X_2 \sim Gamma\left(\alpha_2,\beta_2\right)$ avec

$$\mathcal{L}_{X_i}\left(t\right) = \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + t}\right)^{\alpha_i},\ t \geq 0,$$

avec $\beta_2 > \beta_1 > 0$.

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

Objectif : Évaluer $F_S(x)$, $x \geq 0$.

Stratégie :

1. Étape 1 : Transformer $\left(\frac{\beta_i}{\beta_i + t}\right)^{\alpha_i}$ adéquatement.
2. Étape 2 : Démontrer

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k H(x; \alpha_1 + \alpha_2 + k; \beta_2), \ x \geq 0.$$

3. Étape 3 : Évaluer $F_S(x)$, avec γ_k, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$, où k_0 est fixé de telle sorte que $1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \leq \varepsilon$ pour un ε fixé très petit (e.g., $\varepsilon = 10^{-10}$).

Algorithmes récursifs

Illustration no3

Étape 1.
La TLS de S est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \mathcal{L}_{X_2}(t) \\ &= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right)^{\alpha_1} \times \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)^{\alpha_2}, \ t \geq 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Dans (23), on a

$$\mathcal{L}_{X_1}(t) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right)^{\alpha_1} = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{q}{1 - (1-q)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)}\right)^{\alpha_1}$$

où $q = \frac{\beta_1}{\beta_2} \in (0,1)$.

On introduit la v.a. discrète J (avec support $\mathbb{N}^{+}$) avec

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_J(r) &= \left(\frac{q}{1-(1-q)r}\right)^{\alpha_1} \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_k r^k,\ r \in [0,1].\end{aligned}$$

On reconnaît la fgp de la loi binomiale négative de paramètres α_1 et $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$

$$f_J(k) = \gamma_k = \frac{\Gamma(\alpha_1 + k)}{\Gamma(\alpha_1)k!} q^{\alpha_1} (1-q)^k$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

La TLS de X_1 devient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_1}(t) &= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)^{\alpha_1} \\
&= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\alpha_1} \mathcal{P}_J\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \\
&= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\alpha_1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{k},
\end{aligned}
$$

où $q = \frac{\beta_1}{\beta_2} \in (0,1)$.

Étape 2.
Alors, l'expression en (23) de la TLS de la v.a. S devient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S\left(t\right) &= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)^{\alpha_1}\times\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\alpha_2} \\ &= \left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\alpha_1}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\gamma_k\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{k}\right)\times\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\alpha_2}.\end{aligned}$$

On réarrange les termes

$$\mathcal{L}_S(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)^{\alpha_1+\alpha_2+k}.$$

On déduit que

$$F_S(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_k H(x; \alpha_1 + \alpha_2 + k, \beta_2)$$

ou

$$f_S(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_k h(x; \alpha_1 + \alpha_2 + k, \beta_2),$$

pour $x \geq 0$.

Étape 3.

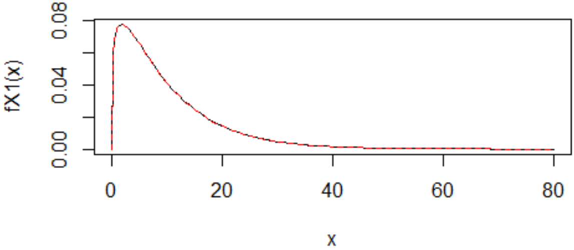
On évalue $F_S(x)$, avec γ_k, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$, où k_0 est fixé de telle sorte que $1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \leq \varepsilon$ pour un ε fixé très petit (e.g., $\varepsilon = 10^{-10}$).

Hypothèses de calculs : $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_2 = 4.5$, $\beta_1 = \frac{1.2}{10}$ et $\beta_2 = \frac{4.5}{30}$.

Valeurs numériques :

- $E[S] = 40$, $q = 0.8$
- $\gamma_k, (k = 0,1,2,3)$: 0.765082000; 0.183619680; 0.040396330; 0.008617884
- $F_S(x)$, $(x = 40,80)$: 0.5564092; 0.9767901; 0.9995224 (valeurs calculées en R avec $k_0 = 1000$)

Valeurs de $f_{X_1}(x) = h(x;\alpha_1,\beta_1)$ et $f_{X_1} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_k h(x;\alpha_1+k,\beta_2)$:

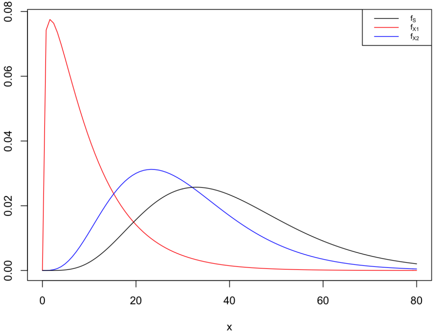


Comme prévu, les deux courbes se superposent parfaitement.

Algorithmes récursifs

Illustration no3

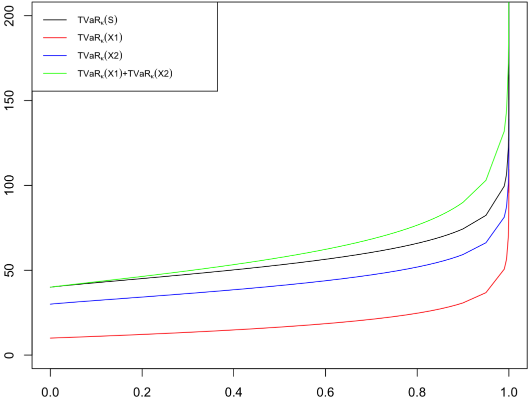
Valeurs de f_{X_1}, f_{X_2} et f_S :



Algorithmes récursifs

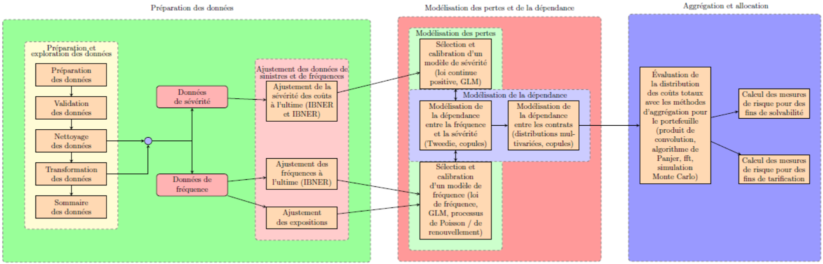
Illustration no3

Valeurs de $TVaR_\kappa(X_1)$, $TVaR_\kappa(X_2)$, $TVaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(X_1) + TVaR_\kappa(X_2)$:



Études de cas

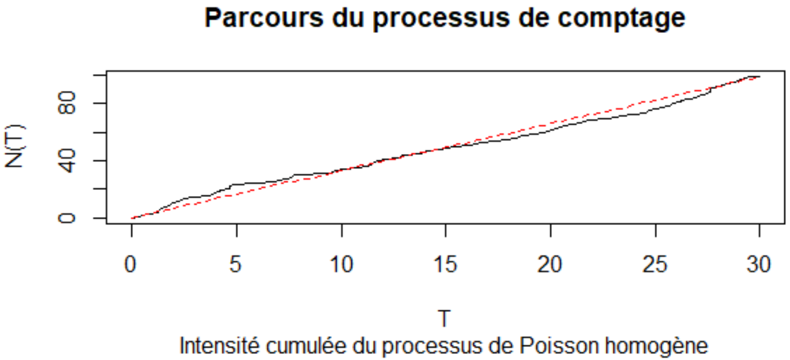
Illustration de la procédure



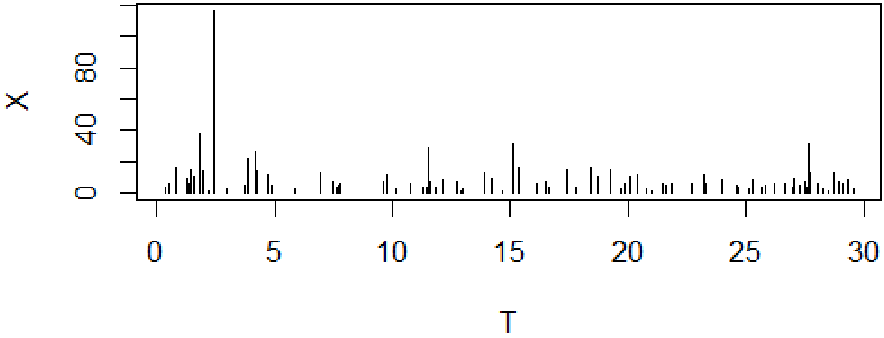
Contexte :

- Montants complets de sinistres
- Temps d'occurrence
- Période d'observation = (0,30]
- 99 observations : $(x_i,t_i), i = 1,2,...,99$

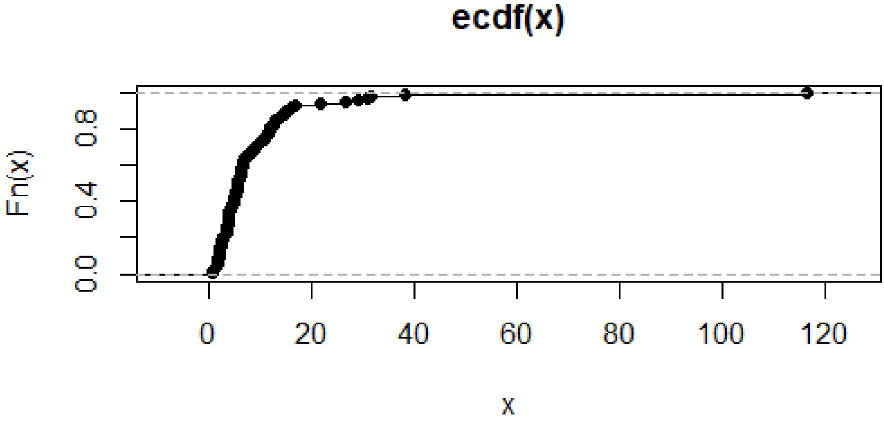
Parcours du processus de comptage vs intentité cumulée pour un processus de Poisson



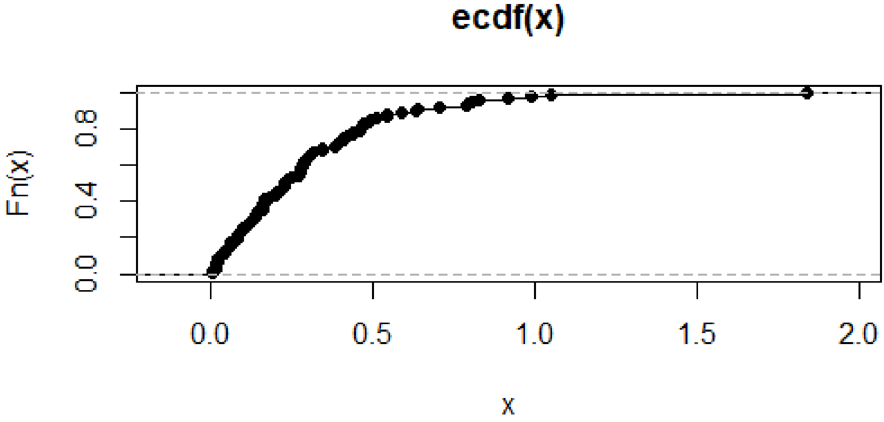
Montants de sinistres vs temps d'occurrence



Fonction de répartition empirique - Sinistres



Fonction de répartition empirique - Temps inter-inistres



Fonctions d'excès moyen: [Embrechts and Schmidli, 1994]

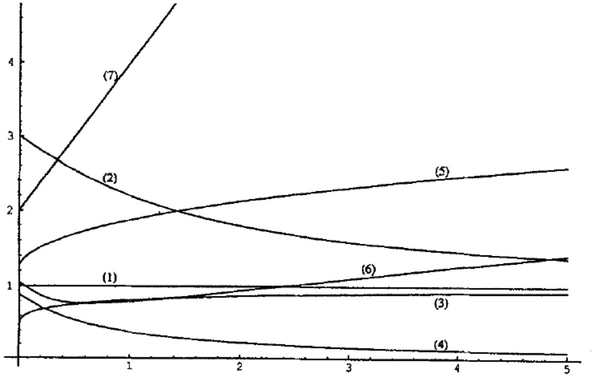
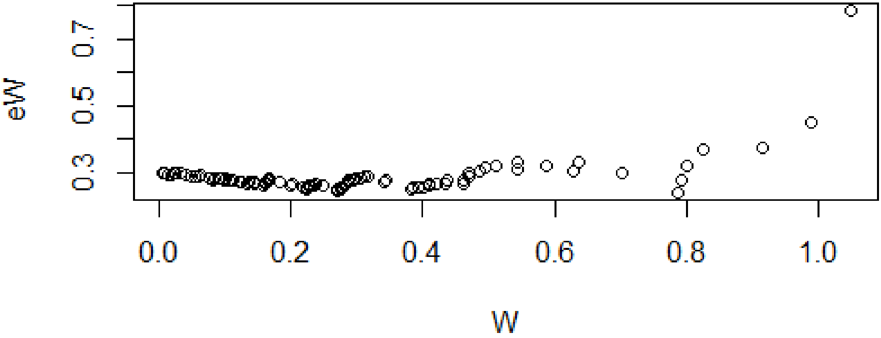
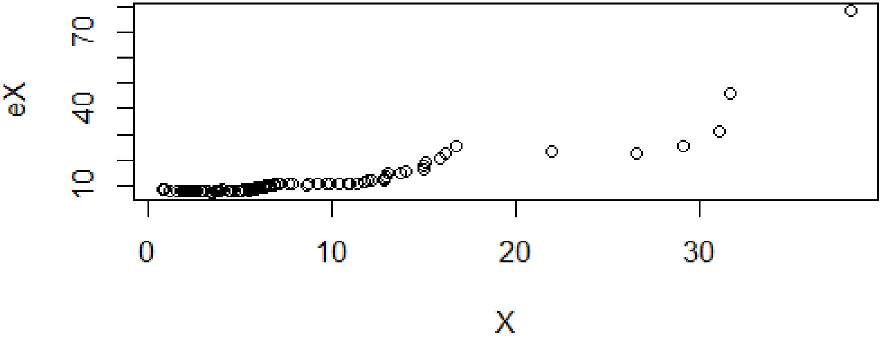


Fig. 2.1. Mean-residual-life function $e(x)$ for a wide class of distributions: (1) exponential (1), (2) gamma (3), (3) gamma (0.5), (4) Weibull (2), (5) Weibull (0.7), (6) lognormal (-0.2, 1) and (7) Pareto (1.5)

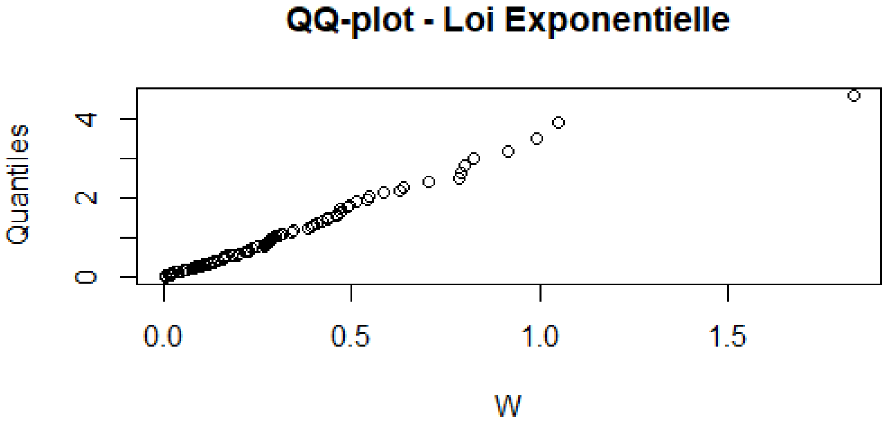
Fonctions d'excès moyen empirique : temps inter-sinistres



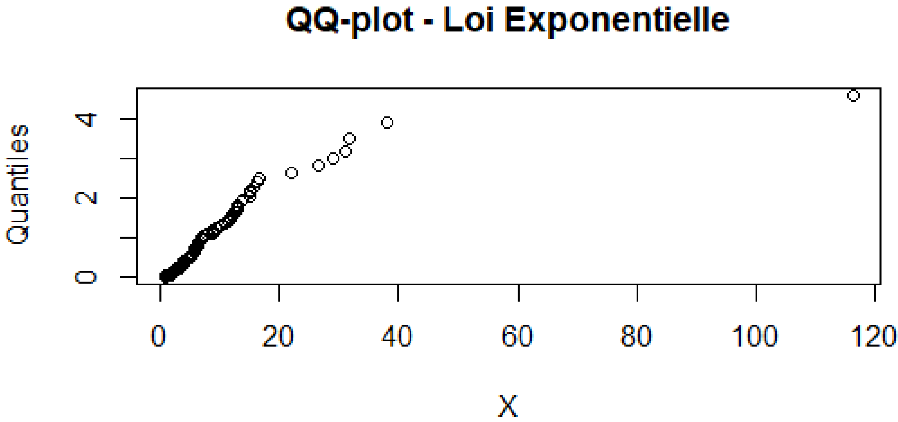
Fonctions d'excès moyen empirique : montants de sinistres



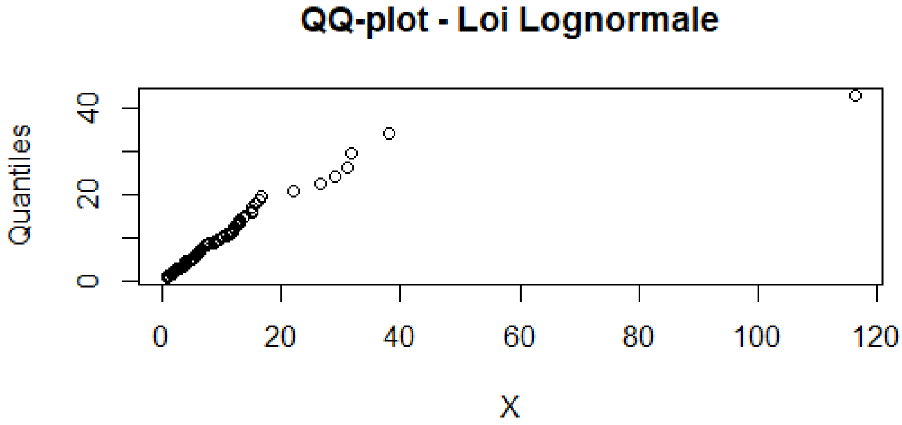
QQ-plot - Loi exponentielle : temps inter-sinistres



QQ-plot - Loi exponentielle : montants de sinistres



QQ-plot - Loi lognormale : montants de sinistres



Estimation MV - montant de sinistre X:

- Loi lognormale : $X \sim LNorm(\mu,\sigma)$
- $\mu = 1.796876, \sigma = 0.8439212$

Estimation MV - processus de comptage $\underline{N}$:

- Processus de Poisson homogène avec intensité λ
- Temps inter-sinistre : loi exponentielle avec paramètre λ
- $\lambda = \frac{99}{33} = 3.3$

On examine le comportement de l'accroissement $S(30{,}31]$ du processus de Poisson composé $\underline{S}$

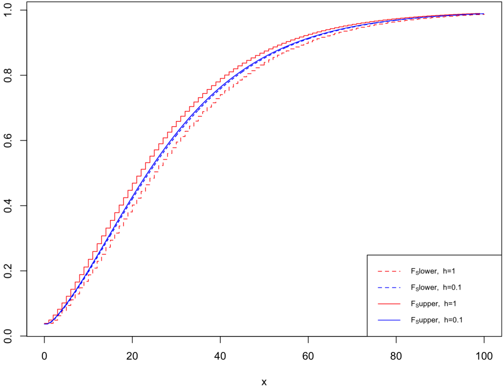
On applique les outils suivants pour évaluer approximativement $F_{S(30{,}31]}(x)$:

- discrétisation *upper* et *lower* $(h = 1, 0.1)$;
- algorithme de Panjer.

Études de cas

Données no1

Valeurs de $F_{\widetilde{S(30,31]}^{(up,h)}}$ et $F_{\widetilde{S(30,31]}^{(low,h)}}$, $h = 1{,}0.1$:



Références

Références I

Embrechts, P. and Schmidli, H. (1994).
Modelling of extremal events in insurance and finance.
Zeitschrift für Operations Research, 39(1):1–34.

Panjer, H. H. (1981).
Recursive evaluation of a family of compound distributions.
ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 12(1):22–26.