Act-3000 Théorie du risque

Ordres Stochastiques

Étienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

A2019: Séries 4.5

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières I

Introduction

Introduction

Objectif : examiner l'ordre en dominance stochastique et les ordres convexes.

Motivations

Motivations

Comparer les risques.

Ordres partiels

Ordres partiels

L'ordre en dominance stochastique et les ordres convexes sont des ordres partiels.

Definition 1

Soit A un ensemble de fonctions de répartition ainsi que F_X, F_Y, F_Z des éléments de A. Une relation binaire $\preceq$ définie sur A est un ordre partiel si cet ordre satisfait les trois propriétés suivantes :

1. **Transitivité.** Si $F_X \preceq F_Y$ et $F_Y \preceq F_Z$, alors $F_X \preceq F_Z$.
2. **Réflexivité.** $F_X \preceq F_X$.
3. **Anti-symétrie.** Si $F_X \preceq F_Y$ et $F_Y \preceq F_X$, alors $F_X \equiv F_Y$.

Ordres partiels

Sur le plan de la notation, la relation d'ordre est établie entre fonctions de répartition ou entre v.a. On écrit indifféremment $X \preceq Y$ et $F_X \preceq F_Y$.

Les propriétés désirables pour les ordres partiels sont indiquées dans la remarque suivante.

Les propriétés désirables sont la fermeture sous le mélange, la fermeture sous la convolution et la fermeture sous la composition.

Propriété 2

Fermeture sous le mélange. *Soit les v.a.* X, X' *et* Θ. *On dit que l'ordre stochastique* $\preceq$ *est fermé sous le mélange si* $X|\Theta = \theta \preceq X'|\Theta = \theta$ *pour tout* θ *implique* $X \preceq X'$.

Propriété 3

Fermeture sous la convolution. *Soit deux suites de v.a. indépendantes* $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ *et* $\underline{X}' = \{X_i', i \in \mathbb{N}^+\}$ *avec* $X_i \preceq X_i'$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}^+$. *On dit que l'ordre stochastique* $\preceq$ *est fermé sous la convolution si* $\sum_{i=1}^{n} X_i \preceq \sum_{i=1}^{n} X_i'$ *est satisfait.*

Ordres partiels

Propriété 4

***Fermeture sous la composition**. Soit deux suites de v.a. indépendantes $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ et $\underline{X}' = \{X_i', i \in \mathbb{N}^+\}$ avec $X_i \preceq X_i'$ pour tout $i \in \mathbb{N}^+$. Si l'ordre est fermé sous le mélange et sous la convolution alors l'ordre satisfait la relation $\sum_{i=1}^{N} X_i \preceq \sum_{i=1}^{N} X_i'$ où N est une v.a. discrète. On dit alors que l'ordre est fermé sous la composition. D'autre part, si la relation suivante est satisfaite $\sum_{i=1}^{N} X_i \preceq \sum_{i=1}^{N'} X_i$ pour $N \preceq N'$ on dit aussi que l'ordre est fermé sous la composition.*

Ordre en dominance stochastique

Ordre en dominance stochastique

L'ordre en dominance stochastique est défini comme suit.

Definition 5

Soit les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre en dominance stochastique, notée $X \preceq_{sd} X'$, si $F_X(x) \geq F_{X'}(x)$ (ou de façon équivalente $\overline{F}_X(x) \leq \overline{F}_{X'}(x)$) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On présente un certain nombre de résultats de base qui découlent de l'ordre en dominance stochastique et qui sont pertinents pour l'actuariat.

Ordre en dominance stochastique

Si on établit l'ordre en dominance stochastique entre deux risques, alors on déduit la relation suivante pour leurs mesures VaR.

Proposition 6

Soit deux v.a. X et X' telles que $X \preceq_{sd} X'$. Alors, on a $VaR_\kappa(X) \leq VaR_\kappa(X')$ pour tout $0 < \kappa < 1$.

Proof.

Voir [Denuit et al., 2006]. □

Ordre en dominance stochastique

En effet, puisque $F_X(x) \geq F_{X'}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $VaR_\kappa(X) \leq VaR_\kappa(X')$ pour tout $0 < \kappa < 1$.

Selon le théorème suivant, l'ordre en dominance stochastique mène à ordonner les espérances de deux v.a.

Theorem 7

Soit les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$.

1. *Si $X \preceq_{sd} X'$ alors $E[X] \leq E[X']$.*
2. *Si $X \preceq_{sd} X'$ et $E[X] = E[X']$ alors X et X' ont la même distribution.*

Proof.

Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. □

Ordre en dominance stochastique

Par conséquent, si X est inférieure à X' selon l'ordre en dominance stochastique, alors l'espérance de X est inférieure à l'espérance de X'.

Cette relation se généralise pour l'espérance de fonctions croissantes univariées.

Theorem 8

Soit les deux v.a. X et X'. Alors, on a $X \leq_{sd} X'$ si et seulement si $E\left[\phi\left(X\right)\right] \leq E\left[\phi\left(X'\right)\right]$ pour toute fonction croissante ϕ.

Proof.

Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller, 2000] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. □

Ordre en dominance stochastique

Pour comparer les moments d'ordre m, on a recours au théorème suivant qui découle du théorème 8.

Theorem 9

Soit les v.a. X et X' telles que $E[X^m] < \infty$ et $E[X'^m] < \infty$, pour $m \in \mathbb{N}^+$. Si on a $X \leq_{sd} X'$, alors

1. $E[X^m] \leq E[X'^m]$, *pour* $m = 1,3,5,\ldots$;
2. $E[X^m] \leq E[X'^m]$, *pour* $m = 1,2,3,\ldots$ *si les v.a. X et Y sont positives.*

Proof.

Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. □

Ordre en dominance stochastique

Le résultat suivant a plusieurs applications en actuariat.

Theorem 10

Soit les deux v.a. X et X'. Si $X \preceq_{sd} X'$ alors on a $\phi(X) \preceq_{sd} \phi(X')$ pour toute fonction croissante ϕ.

Proof.

Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. □

Ordre en dominance stochastique

Des exemples d'application en actuariat et en gestion quantitative des risques du théorème 10 sont fournis dans la remarque suivante.

Ordre en dominance stochastique

Remarque 11

En vertu du théorème 10, si $X \preceq_{sd} X'$*, alors ...*

1. $\exp(X) \preceq_{sd} \exp(X')$;
2. $\min(X; d) \preceq_{sd} \min(X'; d)$, *pour toute limite* d ;
3. $\max(X - d; 0) \preceq_{sd} \max(X' - d; 0)$, *pour toute franchise* d ;
4. $X \times 1_{\{X>d\}} \preceq_{sd} X' \times 1_{\{X'>d\}}$, *pour toute franchise* d ;
5. $cX \preceq_{sd} cX'$, *pour tout scalaire* $c \in \mathbb{R}^+$.

Ordre en dominance stochastique

Le prochain théorème permet de comparer les résultats de fonctions de deux ensembles de v.a.

Theorem 12

Soit $X_1,...,X_n$ *et* $X_1',...,X_n'$ *des v.a. indépendantes avec* $X_i \preceq_{sd} X_i'$ *pour* $i = 1,2,...,n$*. On suppose que* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est une fonction croissante. Alors, on a* $\psi(X_1,...,X_n) \preceq_{sd} \psi(X_1',...,X_n')$*.*

Proof.

Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. □

Des exemples de fonctions croissantes sont indiqués dans la remarque suivante.

Remarque 13

Des exemples de fonctions croissantes ψ pour le théorème 12 sont :

1. $\psi\left(x_1,...,x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i$;
2. $\psi\left(x_1,...,x_n\right) = \max\left(x_1;...;x_n\right)$;
3. $\psi\left(x_1,...,x_n\right) = \min\left(x_1;...;x_n\right)$.

Ordre en dominance stochastique

L'ordre en dominance stochastique est fermé sous la convolution, le mélange et la composition. Les preuves des théorèmes suivants se trouvent dans, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007].

Theorem 14

Fermeture sous la convolution. *Soit* $X_1,\ldots,X_n$ *et* $X_1',\ldots,X_n'$ *des v.a. indépendantes avec* $X_i \preceq_{sd} X_i'$ *pour* $i = 1,2,\ldots,n$. *Alors, on a* $\sum_{i=1}^n X_i \preceq_{sd} \sum_{i=1}^n X_i'$.

Theorem 15

Fermeture sous le mélange. *Soit les v. a.* X, X' *et* Θ *définies de telle sorte que* $X|\Theta = \theta \preceq_{sd} X'|\Theta = \theta$ *pour tout* θ *sur le support de* Θ. *Alors, on a* $X \preceq_{sd} X'$.

Theorem 16

Fermeture sous la composition. *Soit les v.a.* X *et* X' *définies par*

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} B_i, \ M > 0 \\ 0, \ M = 0 \end{cases}$$

et

$$X' = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M'} B_i', \ M' > 0 \\ 0, \ M' = 0 \end{cases} .$$

Si $B_i \preceq_{sd} B_i'$*, si* $M \preceq_{sd} M'$ *et si toutes les v.a. sont indépendantes, alors, on a* $X \preceq_{sd} X'$*.*

Dans les 2 remarques suivantes, on indique sous quelles conditions l'ordre en dominance stochastique est satisfait pour certaines lois paramétriques.

Remarque 17

Soit deux v.a. X et X' obéissant à la même loi continue mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que $X \leq_{sd} X'$:

1. $X \sim Exp(\beta)$ *et* $X' \sim Exp(\beta')$ *avec* $\beta \geq \beta'$ *;*
2. $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ *et* $X' \sim Ga(\alpha, \beta')$ *avec* $\beta \geq \beta'$ *;*
3. $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ *et* $X' \sim Ga(\alpha', \beta)$ *avec* $\alpha \leq \alpha'$ *;*
4. $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ *et* $X' \sim Pa(\alpha, \lambda')$ *avec* $\lambda \leq \lambda'$ *;*
5. $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ *et* $X' \sim Pa(\alpha', \lambda)$ *avec* $\alpha \geq \alpha'$ *;*
6. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim N(\mu', \sigma^2)$ *avec* $\mu \leq \mu'$ *;*
7. $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim LN(\mu', \sigma^2)$ *avec* $\mu \leq \mu'$ *;*
8. $X \sim U(a, b)$ *et* $X' \sim U(a', b')$ *avec* $a \leq a'$ *et* $b \leq b'$.

Remarque 18

Soit deux v.a. X et X' obéissant à la même loi discrète mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que $X \preceq_{sd} X'$:

1. $X \sim Pois(\lambda)$ *et* $X' \sim Pois(\lambda')$ *avec* $\lambda \leq \lambda'$;
2. $X \sim Bin(n,q)$ *et* $X' \sim Bin(n,q')$ *avec* $q \leq q'$;
3. $X \sim Bin(n,q)$ *et* $X' \sim Bin(n',q)$ *avec* $n \leq n'$;
4. $X \sim BN(r,q)$ *et* $X' \sim BN(r,q')$ *avec* $q \leq q'$.

Ordre en dominance stochastique

On considère les exemples suivants.

Example 19

Soit $X \sim Exp(0.002)$ et $X' \sim Exp(0.001)$. On obtient

$$VaR_{95\ \%}(X) = 1497.87 \leq VaR_{95\ \%}\left(X'\right) = 2995.73.$$

Pour confirmer que cette inégalité est valide pour tout $\kappa \in (0,1)$, on constate que $X \preceq_{sd} X'$ selon la remarque 17. Puis, on a $VaR_{\kappa}(X) \leq VaR_{\kappa}(X')$ pour $\kappa \in (0,1)$ en appliquant la proposition 6. □

Ordre en dominance stochastique

Example 20

Soit $X \sim PComp\left(\lambda = 1, F_B\right)$, $X' \sim PComp\left(\lambda = 1, F_{B'}\right)$ avec $B \sim Exp\left(0.002\right)$ et $B' \sim Exp\left(0.001\right)$. On a calculé

$$VaR_{95~\%}\left(X\right) = 1959.02 \leq VaR_{95~\%}\left(X'\right) = 3918.04.$$

On vérifie que cette inégalité est valide pour tout $\kappa \in (0,1)$. Selon la remarque 17, $B_i \preceq_{sd} B_i'$ pour $i \in \mathbb{N}^+$. En utilisant la propriété de fermeture sous la composition (théorème 16), on déduit que $X \preceq_{sd} X'$. Enfin, il résulte de la proposition 6 que $VaR_\kappa\left(X\right) \leq VaR_\kappa\left(X'\right)$ pour $\kappa \in (0,1)$. $\square$

Ordre en dominance stochastique

Il est aussi possible de comparer des v.a. dont les lois paramétriques diffèrent.

Proposition 21

Soit les v.a. $M \sim Bern(q)$ *et* $M' \sim Pois(\lambda)$ *où* $\lambda = -\ln(1-q)$. *Alors, on a* $M \leq_{sd} M'$.

Proof.

Comme $\lambda = -\ln(1-q)$, on a $F_M(0) = F_{M'}(0) = (1-q)$. Puisque $F_M(k) = 1 \geq F_{M'}(k)$, pour $k \in \mathbb{N}^+$, il en découle le résultat désiré. $\square$

Ordre en dominance stochastique

En appliquant les résultats liés à l'ordre en dominance stochastique, on examine l'intérêt d'utiliser les méthodes de discrétisation *upper* et *lower*.

Soit la v.a. X définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j, \ M > 0 \\ 0, \ M > 0 \end{cases}, \tag{1}$$

où les v.a. continues B_1,B_2,... sont i.i.d. (avec $B_k \sim B$) et indépendantes de la v.a. de fréquence M.

Ordre en dominance stochastique

Soit la v.a. $\widetilde{X}^{(u,h)}$ définie à la suite de l'application de la méthode de discrétisation *upper* avec un pas de discrétisation h pour approximer la v.a. B_j par la v.a. $\widetilde{B}_j^{(u,h)}$ où

$$\widetilde{X}^{(u,h)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \widetilde{B}_j^{(u,h)}, \ M > 0 \\ 0, \ M > 0 \end{cases} , \tag{2}$$

où les v.a. $\widetilde{B}_j^{(u,h)}$,$\widetilde{B}_j^{(u,h)}$,... sont des v.a. i.i.d. concentrées sur le support $\{0,1h,2h,3h,...\}$.

Soit la v.a. $\widetilde{X}^{(l,h)}$ définie de façon similaire en appliquant la méthode de discrétisation *lower* où

$$\widetilde{X}^{(l,h)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \widetilde{B}_j^{(l,h)}, \ M > 0 \\ 0, \ M > 0 \end{cases}, \tag{3}$$

où les v.a. $\widetilde{B}_j^{(l,h)}, \widetilde{B}_j^{(l,h)}, \ldots$ sont des v.a. i.i.d. concentrées sur le support $\{0, 1h, 2h, 3h, \ldots\}$.

Dans les deux cas, $\widetilde{X}^{(u,h)}$ et $\widetilde{X}^{(l,h)} \in \{0, 1h, 2h, 3h, \ldots\}$.

Ordre en dominance stochastique

On a les deux propositions suivantes qui démontrent l'intérêt d'utiliser ces deux méthodes de discrétisation.

Proposition 22

Soit les v.a. $\widetilde{X}^{(u,h')}$, $\widetilde{X}^{(u,h)}$, X, $\widetilde{X}^{(l,h)}$ *et* $\widetilde{X}^{(l,h')}$ *définies selon (1), (2) et (3). Alors, on a*

$$\widetilde{X}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{X}^{(u,h)} \preceq_{sd} X \preceq_{sd} \widetilde{X}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{X}^{(l,h')} \tag{4}$$

pour $0 < h \leq h'$.

Proof.

Selon les deux méthodes et pour $0 < h \leq h'$, on a

$$F_{\widetilde{B}^{(u,h')}}(x) \geq F_{\widetilde{B}^{(u,h)}}(x) \geq F_{B}(x) \geq F_{\widetilde{B}^{(l,h)}}(x) \geq F_{\widetilde{B}^{(l,h')}}(x),$$

pour $x \geq 0$. Il en résulte que

$$\widetilde{B}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(u,h)} \preceq_{sd} B \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h')}.$$

En appliquant le théorème 16, on obtient (4). □

Proposition 23

Soit les v.a. $\widetilde{S}^{(u,h')}$, $\widetilde{S}^{(u,h)}$, S, $\widetilde{S}^{(l,h)}$ *et* $\widetilde{S}^{(l,h')}$ *définies par* $\widetilde{S}^{(u,h)} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B_i}^{(u,h)}$, $S = \sum_{i=1}^{n} B_i$ *et* $\widetilde{S}^{(l,h)} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B_i}^{(l,h)}$ *avec* $0 < h \leq h'$. *Alors, on a*

$$\widetilde{S}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{S}^{(u,h)} \preceq_{sd} S \preceq_{sd} \widetilde{S}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{S}^{(l,h')}. \tag{5}$$

Ordre en dominance stochastique

Proof.

Dans la preuve de la proposition 22,

$$\widetilde{B}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(u,h)} \preceq_{sd} B \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h')}.$$

On déduit (5) en se basant sur le théorème 14. □

Ordre en dominance stochastique

Ces deux propositions expliquent l'intérêt d'utiliser les méthodes de discrétisation *upper* et *lower* pour évaluer différentes quantités de risque.

Selon ces deux propositions, ces méthodes permettent de déduire des bornes inférieures et supérieures pour F_X (ou $\overline{F}_X$) et pour F_S (ou $\overline{F}_S$).

De plus, en appliquant la proposition 6, on obtient aussi des bornes pour $VaR_k\left(X\right)$ et $VaR_k\left(S\right)$.

En diminuant la longueur de l'intervalle de discrétisation h, la valeur approximative $VaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{(l,h)}\right)$ (et $VaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{(u,h)}\right)$) va s'approcher de la valeur exacte $VaR_\kappa\left(X\right)$ tout en lui restant supérieure (inférieure).

Il n'est pas possible d'obtenir de telles bornes lorsque l'on utilise une approximation basée sur la méthode des moments ou une méthode basée sur la simulation stochastique.

Ordre en dominance stochastique

Example 24

En classe.

On peut se demander si $X \preceq_{sd} Y$ permet de déduire que $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(Y)$. On examine cette question dans l'exemple suivant.

Example 25

Soit les v.a. X et X' où $X \sim U(0,b)$ et $\Pr(X' = b) = 1$. Comme $F_X(x) \geq F_{Y'}(x)$, $x \geq 0$, alors $X \preceq_{sd} Y$ ce qui implique $E[X^m] \leq E[X'^m]$ pour $m \in \mathbb{N}^+$. Toutefois, $\mathrm{Var}(X) = \frac{b^2}{12} > \mathrm{Var}(X') = 0$. $\square$

Ordre en dominance stochastique

Bref, l'ordre en dominance stochastique n'est pas suffisant pour comparer les variances.

La raison est que $\mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$ et $\phi(x) = (x-a)^2$ n'est pas une fonction croissante.

Comme $\max(x-d;0)$ et $x \times 1_{\{x>d\}}$ sont des fonctions croissantes, si $X \leq_{sd} X'$, alors $\pi_X(d) \leq \pi_{X'}(d)$ et $TVaR_\kappa(X) \leq TVaR_\kappa(X')$.

Ordres convexes

Ordres convexes

Dans certaines situations, l'actuaire doit comparer des risques qui ont des espérances identiques mais dont les «variabilités» sont différentes. Comme l'ordre en dominance stochastique n'est d'aucun secours, on doit recourir aux ordres convexes.

Definition 26

Une fonction ϕ est dite convexe si $\phi(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha\phi(x) + (1-\alpha)\phi(y)$ pour tout x et y et pour tout $0 < \alpha < 1$.

Ordres convexes

Une fonction ϕ est dite concave si $-\phi$ est convexe.

Definition 27

Soit les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre convexe, noté $X \preceq_{cx} X'$, si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle convexe ϕ et en supposant que les espérances existent.

Definition 28

Soit les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre convexe croissant, noté $X \preceq_{icx} X'$, si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle convexe croissante ϕ et en supposant que les espérances existent.

Definition 29

Soit les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre concave croissant, noté $X \preceq_{icv} X'$, si $\mathbb{E}[\phi(X)] \leq \mathbb{E}[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle concave croissante ϕ et en supposant que les espérances existent.

En actuariat, l'ordre suivant a aussi été défini.

Definition 30

Soit les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre *stop-loss*, noté $X \leq_{sl} X'$, si $E[(X-d)_+] \leq E[(X'-d)_+]$, pour tout $d \in \mathbb{R}$, où $(u)_+ = \max(u;0)$.

Ordres convexes

En actuariat, l'ordre convexe correspond à l'ordre *stop-loss* avec moyenne égale. La fonction $\phi(x) = \max(x - d; 0) = (x - d)_+$ est convexe croissante. La fonction $\phi(x) = (x - a)^2$ est convexe mais elle n'est pas croissante. On a $X \preceq_{icv} Y$ si et seulement si $-X \succeq_{icx} -Y$.

Pour les démonstrations des résultats suivants, on peut se référer à, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007].

Theorem 31

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $X \preceq_{cx} X'$;
2. $X \preceq_{icx} X'$ et $E[X] = E[X']$.

Proof.

Pour (1) $\Rightarrow$ (2), il est clair que $X \preceq_{cx} X'$ mène à $X \preceq_{icx} X'$. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. □

Ordres convexes

L'ordre *stop-loss* et l'ordre convexe croissant sont équivalents.

Theorem 32

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $X \preceq_{icx} X'$;
2. $X \preceq_{sl} X'$.

Proof.

L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) découle du fait que la fonction $\phi(x) = \max(x - d; 0)$ est convexe croissante. Pour (b) $\Rightarrow$ (a), voir, p. ex., [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. $\square$

Ordres convexes

Ainsi, $X \preceq_{cx} X'$ implique, p. ex., $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(X')$ et $\pi_d(X) \leq \pi_d(X')$ pour tout $d \geq 0$. De plus, $X \preceq_{icx} X'$ implique $\pi_d(X) \leq \pi_d(X')$ pour tout $d \geq 0$ mais n'implique pas $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(X')$ car la fonction $\phi(x) = (x-a)^2$ est convexe mais elle n'est pas croissante. Enfin, $X \preceq_{icx} X'$ avec $E[X] = E[X']$ implique $\pi_d(X) \leq \pi_d(X')$ pour tout $d \geq 0$ et $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(X')$.

Ordres convexes

On considère les relations entre les ordres convexes et l'ordre en dominance stochastique.

Remarque 33

Si $X \preceq_{sd} X'$ *alors cela implique* $X \preceq_{icx} X'$ *mais cela n'implique pas* $X \preceq_{cx} X'$.

Ordres convexes

Les ordres $\preceq_{cx}$,$\preceq_{icx}$ et $\preceq_{sl}$ sont fermés sous le mélange, la convolution et la composition. Dans les trois théorèmes suivants, $\preceq_{\upsilon}$ désigne $\preceq_{cx}$,$\preceq_{icx}$ ou $\preceq_{sl}$. On trouve les preuves des théorèmes suivants dans, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007].

Theorem 34

Fermeture sous la convolution. *Soit les v.a. indépendantes* $X_1,...,X_n$ *et* $X'_1,...,X'_n$ *avec* $X_i \preceq_v X'_i$ *pour* $i = 1,2,...,n$. *Alors, on a* $\sum_{i=1}^n X_i \preceq_v \sum_{i=1}^n X'_i$.

Theorem 35

Fermeture sous le mélange. *Soit les v. a. X, X' et Θ définies de telle sorte que $X|\Theta = \theta \preceq_v X'|\Theta = \theta$ pour tout θ sur le support de Θ. Alors, on a $X \preceq_v X'$.*

Theorem 36

Fermeture sous la composition. *Soit les v.a. S et S' définies par*

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} X_i, \ M > 0 \\ 0, \ M = 0 \end{cases} \quad \text{et } S' = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M'} X_i', \ M' > 0 \\ 0, \ M' = 0 \end{cases}.$$

Si $X_i \preceq_v X_i'$, si $M \preceq_v M'$ et si toutes les v.a. sont indépendantes, alors, on a $S \preceq_v S'$.

Une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour établir l'ordre convexe croissant (ou *stop-loss*) s'énonce comme suit.

Criterion 37

Critère de Karlin-Novikoff. *Soit deux v.a. X et X' telles que $E[X] \leq E[X'] < \infty$. S'il existe un nombre $c > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} F_X(x) &\leq F_{X'}(x), \qquad x < c \\ F_X(x) &\geq F_{X'}(x), \qquad x \geq c \end{aligned}$$

alors $X \preceq_{icx} X'$ ou $X \preceq_{sl} X'$.

Proof.

Voir, p. ex., [Denuit et al., 2006], [Kaas et al., 1994], [Müller and Stoyan, 2002] ou [Shaked and Shanthikumar, 2007]. □

On considère les exemples suivants.

Example 38

Soit les v.a. X et X' où $X \sim Exp\left(\beta = \frac{1}{\mu}\right)$ et $X' = \mu$ avec probabilité 1. Comme $E[X] = E[X'] = \mu$, $F_X(x) > F_{X'}(x)$, $0 \leq x < \mu$ et $F_X(x) \leq F_{X'}(x)$, $x \geq \mu$, on déduit du critère de Karlin-Novikoff que $X' \preceq_{icx} X$ avec $E[X] = E[X']$ ce qui est équivalent à $X' \preceq_{cx} X$. Par conséquent, $\mathrm{Var}(X') \leq \mathrm{Var}(X)$, ce qui est en effet le cas puisque $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$ et $\mathrm{Var}(X') = 0$. Pour confirmer, on a

$E[\max(X - d; 0)] = \mu e^{-\frac{d}{\mu}}$ et $E[\max(X' - d; 0)] = \mu - d$, $0 \leq d < \mu$, et $E[\max(X' - d; 0)] = 0$, $d \geq \mu$. $\square$

Example 39

Soit les v.a. X, Y et Z où $X \sim U(a,b)$, $\Pr\left(Y = \frac{a+b}{2}\right) = 1$, $\Pr(Z = a) = \Pr(Z = b) = \frac{1}{2}$. Comme

$$\begin{aligned} F_X(x) &> F_Y(x), \quad x < \frac{a+b}{2}, \text{ et } F_X(x) \leq F_Y(x), \quad x \geq \frac{a+b}{2}, \\ F_Z(x) &> F_Y(x), \quad x < \frac{a+b}{2}, \text{ et } F_Z(x) \leq F_Y(x), \quad x \geq \frac{a+b}{2}, \\ F_Z(x) &> F_X(x), \quad x < \frac{a+b}{2}, \text{ et } F_Z(x) \leq F_X(x), \quad x \geq \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

on déduit que $Y \preceq_{icx} X \preceq_{icx} Z$ selon le critère de Karlin-Novikoff. Puis, comme $E[X] = E[Y] = E[Z] = \frac{a+b}{2}$, il résulte du théorème 31 que $Y \preceq_{cx} X \preceq_{cx} Z$. $\square$

Ordres convexes

On indique la relation entre l'ordre convexe croissant et la mesure de risque $TVaR$.

Proposition 40

Soit les v.a. X *et* X'. *Alors, on a* $X \preceq_{icx} X'$ *si et seulement si* $TVaR_{\kappa}(X) \leq TVaR_{\kappa}(X')$, *pour tout* $0 < \kappa < 1$.

Proof.

Voir [Denuit et al., 2006]. □

Ordres convexes

On indique sous quelles conditions les relations d'ordre convexe et d'ordre convexe croissant sont satisfaites pour certaines distributions univariées connues.

Remarque 41

Soit deux v.a. X et X' obéissant à la même loi continue mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que $X \leq_{icx} X'$:

- $X \sim Ga(\alpha,\beta)$ *et* $X' \sim Ga(\alpha',\beta')$ *avec* $\alpha \geq \alpha'$ *et* $\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\alpha'}{\beta'}$ *;*
- $X \sim Pa(\alpha,\lambda)$ *et* $X' \sim Pa(\alpha',\lambda')$ *avec* $\alpha \geq \alpha'$ *et* $\frac{\lambda}{\alpha-1} \leq \frac{\lambda'}{\alpha'-1}$ *;*
- $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ *et* $X' \sim N\left(\mu',(\sigma')^2\right)$ *avec* $\mu \leq \mu'$ *et* $\sigma \leq \sigma'$ *;*
- $X \sim LN(\mu,\sigma^2)$ *et* $X' \sim LN\left(\mu',(\sigma')^2\right)$ *avec* $\mu \leq \mu'$ *et* $\sigma = \sigma'$.

Remarque 42

Soit deux v.a. X et X' obéissant à la même loi continue mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que $X \leq_{cx} X'$:

- $X \sim Ga(\alpha,\beta)$ et $X' \sim Ga(\alpha',\beta')$ avec $E[X] = E[X']$ et $\alpha \geq \alpha'$;
- $X \sim Pa(\alpha,\lambda)$ et $X' \sim Pa(\alpha',\lambda')$ avec $E[X] = E[X']$ et $\alpha \geq \alpha'$;
- $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ et $X' \sim N\left(\mu,(\sigma')^2\right)$ avec $\sigma \leq \sigma'$;
- $X \sim LN(\mu,\sigma^2)$ et $X' \sim LN\left(\mu',(\sigma')^2\right)$ avec $\sigma \leq \sigma'$, $\mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2$ et $\mu' = a - \frac{1}{2}(\sigma')^2$ $(a \in \mathbb{R})$, tels que $E[X] = E[X'] = \mathrm{e}^a$.

On a la proposition suivante concernant les lois de Bernoulli et de Poisson.

Proposition 43

Soit les v.a. $M \sim Bern(q)$ *et* $M' \sim Pois(\lambda)$ *où* $\lambda = q$*. Alors, on a* $M \preceq_{cx} M'$*.*

Proof.

Comme $F_M(0) = 1 - q \leq F_{M'}(0) = \mathrm{e}^{-q}$ et $F_M(k) = 1 \geq F_{M'}(k)$, pour $k \in \mathbb{N}^+$, on applique le critère de Karlin-Novikov pour obtenir le résultat désiré. $\square$

Soit une v.a. X_Θ obéissant à une loi Poisson-mélange. On examine l'impact de la v.a. de mélange Θ sur le comportement de la v.a. X_Θ.

Proposition 44

Soit la v.a. positive Θ et la v.a. $X_\theta \sim Pois(\lambda\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}^+$. Les v.a. Θ et X_θ sont indépendantes. Alors, $\Theta \preceq_{icx} \Theta'$ implique $X_\Theta \preceq_{icx} X_{\Theta'}$.

Ordres convexes

Proof.

Voir document de référence. □

Corollary 45

Dans la proposition 44, si $E[\Theta] = E[\Theta'] = 1$, *alors* $E[X] = E[X'] = \lambda$ *et, par le théorème 31,* $\Theta \preceq_{cx} \Theta'$ *implique* $X_\Theta \preceq_{cx} X_{\Theta'}$.

Ordres convexes

En actuariat, la loi Poisson-mélange est souvent utilisée pour justifier la présence d'hétérogénéité dans les données d'assurance dommage. Soit deux contrats d'assurance dont les coûts sont définis par les v.a. X et X' avec

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j,\ M > 0 \\ 0,\ M > 0 \end{cases} \quad \text{et } X' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M'} B_j,\ M' > 0 \\ 0,\ M' > 0 \end{cases},$$

où les v.a. continues B_1,B_2,... sont i.i.d. (avec $B_k \sim B$) et indépendantes des v.a. M et M' de loi Poisson-mélange qui sont définies comme dans la proposition 44.

Alors, on a $X \preceq_{cx} X'$ en appliquant la proposition 44 et le théorème 16.

Par exemple, les primes calculées selon le principe de la variance sont ordonnées c.-à-d. $\Pi^{\mathrm{Var}}(X) \leq \Pi^{\mathrm{Var}}(X')$.

De même, on a $TVaR_{\kappa}(X) \preceq_{cx} TVaR_{\kappa}(X')$.

Par conséquent, une plus grande hétérogénéité dans la définition de la loi de fréquence conduit notamment à des valeurs plus élevées dans la prime selon le principe de la variance et de la TVaR.

Ordres convexes

Example 46

En classe.

Ordres convexes

Soit un portefeuile composé de n risques représentés par les v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n.

On définit la v.a. $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

La prochaine proposition est intéressante du point de vue de la mutualisation des risques.

Proposition 47

On a

$$W_{n+1} \preceq_{icx} W_n,$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$.

Proof.

Voir [Denuit et al., 2006]. □

Ordres convexes

En appliquant conjointement (47) et (40), on déduit que

$$TVaR_{\kappa}\left(W_{n+1}\right) \leq TVaR_{\kappa}\left(W_{n}\right),$$

pour toute valeur de $\kappa \in (0,1)$.

Ordres de dépendance

On introduit un ordre qui permet de comparer deux couples de v.a. sur la base de leur relation de dépendance.

Definition 48

Soit les v.a. (X_1,X_2) et (X_1',X_2') avec

$$F_{X_1,X_2} \in CF\left(F_1,F_2\right)$$

et

$$F_{X_1',X_2'} \in CF\left(F_1,F_2\right).$$

On dit que (X_1,X_2) est plus petit selon l'ordre **pqd** (**positive quadrant dependence**) que (X_1',X_2'), noté par

$$\left(X_1,X_2\right) \preceq_{pqd} \left(X_1,X_2\right),$$

si

$$F_{X_1,X_2}\left(x_1,x_2\right) \leq F_{X_1',X_2'}\left(x_1,x_2\right), \tag{6}$$

pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ordres de dépendance

Note : la relation

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

est satisfaite pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ainsi, l'ordre **pqd** peut aussi être défini comme suit.

Definition 49

Soit les v.a. (X_1,X_2) et (X_1',X_2') avec

$$F_{X_1,X_2} \in CF\left(F_1,F_2\right)$$

et

$$F_{X_1',X_2'} \in CF\left(F_1,F_2\right).$$

On dit que (X_1,X_2) est plus petit selon l'ordre pqd (**positive quadrant dependence**) que (X_1',X_2'), noté par

$$\left(X_1,X_2\right) \preceq_{pqd} \left(X_1,X_2\right),$$

si

$$\overline{F}_{X_1,X_2}\left(x_1,x_2\right) \leq \overline{F}_{X_1',X_2'}\left(x_1,x_2\right), \tag{7}$$

pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ordres de dépendance

L'ordre **pqd** est aussi appelé "*more concordant order*" par certains auteurs.

L'ordre **pqd** mène au résultat suivant.

Proposition 50

Soit les v.a. (X_1, X_2) *et* (X_1', X_2') *avec*

$$F_{X_1,X_2} \in CF(F_1, F_2)$$

et

$$F_{X_1',X_2'} \in CF(F_1, F_2)$$

où $E[X_i^m] = E[X_i'^m] < \infty$, *pour* $k = 1,2$ *et* $i = 1,2$, *et*

$$(X_1, X_2) \preceq_{pqd} \left(X_1', X_2'\right).$$

Alors, on a

$$Cov(X_1, X_2) \leq Cov\left(X_1', X_2'\right)$$

et

$$\rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P\left(X_1', X_2'\right).$$

Proof.

La preuve est basée sur

$$Cov\left(X_1,X_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F_{X_1,X_2}\left(x_1,x_2\right) - F_1\left(x_1\right)F_2\left(x_2\right)\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

et

$$Cov\left(X_1',X_2'\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F_{X_1',X_2'}\left(x_1,x_2\right) - F_1\left(x_1\right)F_2\left(x_2\right)\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

$\square$

Conséquences:

1. Soit la v.a. (X_1, X_2) avec
$$F_{X_1,X_2} \in CF(F_1, F_2)$$
Alors, on a
$$(X_1^-, X_2^-) \preceq_{pqd} (X_1, X_2) \preceq_{pqd} (X_1^+, X_2^+).$$
2. De plus, si $E[X_i^m] < \infty$, pour $m = 1,2$, on déduit
$$Cov(X_1^-, X_2^-) \leq Cov(X_1, X_2) \leq Cov(X_1^+, X_2^+).$$
et
$$\rho_P(X_1^-, X_2^-) \preceq_{pqd} \rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P(X_1^+, X_2^+).$$

On a le résultat suivant pour les sommes de v.a.

Proposition 51

Soit les v.a. (X_1,X_2) *et* (X_1',X_2') *avec*

$$F_{X_1,X_2} \in CF\left(F_1,F_2\right)$$

et

$$F_{X_1',X_2'} \in CF\left(F_1,F_2\right)$$

où $E\left[X_i^m\right] = E\left[X_i'^m\right] < \infty$, *pour* $k = 1$, *et* $i = 1,2$, *et*

$$\left(X_1,X_2\right) \preceq_{pqd} \left(X_1',X_2'\right).$$

On définit $S = X_1 + X_2$ *et* $S' = X_1' + X_2'$ *Alors, on a*

$$S \preceq_{icx} S'.$$

Comme $E\left[S\right] = E\left[S'\right]$, *on a*

$$S \preceq_{cx} S'.$$

Références

Références I

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., and Kaas, R. (2006).
Actuarial theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models.
John Wiley & Sons.

Kaas, R., Van Heerwaarden, A. E., and Goovaerts, M. (1994).
Ordering of Actuarial Risks.
Caire Education Series 1.

Müller, A. (2000).
On the waiting times in queues with dependency between interarrival and service times.
Operation Research Letters, 26(1):43–47.

Références II

Müller, A. and Stoyan, D. (2002).
Comparison Methods for Stochastic Models and Risks, volume 389.
Wiley.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007).
Stochastic Orders.
Springer Science & Business Media.