

# Act-3000 Théorie du risque

## Modèles de base

Étienne Marceau

École d'actuariat  
Université Laval, Québec, Canada

A2019: Série no1



UNIVERSITÉ  
**LAVAL**

Faculté des sciences et de génie  
École d'actuariat

# Table des matières I

---

- 1 Introduction
- 2 Motivations
- 3 Mécanisme d'assurance
- 4 Outils de base
- 5 Mesures de risque et primes
  - Généralités
  - Mise en place
  - Espérances tronquées
  - Prime stop-loss
  - Fonction quantile
  - Théorème de la fonction quantile
  - Méthode inverse de simulation et méthode Monte-Carlo
  - Théorème Transformation intégrale de la probabilité
  - Fonction croissante
  - Mesures VaR et TVaR
  - Évaluation de la VaR et méthode Monte Carlo

# Table des matières II

- Évaluation de la TVaR et méthode Monte Carlo
- Logiciel R
- Illustration numérique

## 6 Mutualisation des risques d'assurance

- Généralités
- Transformée de Laplace-Stieltjes
- Fonction de génératrice de probabilité
- Méthodes d'approximation
- Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a.
- Propriétés désirables des mesures de risque
- Autres propriétés désirables
- Mesure VaR
- Mesure TVaR
- Preuve no1 de la sous-additivité de la TVaR
- Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR

# Table des matières III

---

- Portefeuille homogène de risques d'assurance
- Illustration numérique
- Mesure de risque invariante à la distribution

## 7 Conclusion

## 8 Références

# Introduction

# Introduction

---

Objectif principal : ...

Objectifs spécifiques :

■ ...

■ ...

■ ...

Source principale : [Cossette and Marceau, 2019]

# Motivations

# Motivations

---

...



# Mécanisme d'assurance

# Mécanisme d'assurance

Les opérations d'une compagnie d'assurance dommages sont brièvement résumées ci-dessous:

- 1 Souscription et tarification
- 2 Renouvellement et tarification
- 3 Gestion et paiement des sinistres
- 4 Réserves en assurance dommages
- 5 Solvabilité et allocation de capital

Les actuaires interviennent dans chacune de ces étapes

Pour un résumé sur les opérations d'une compagnie d'assurance en lien avec les interventions des actuaires, voir, e.g, [?].

# Mécanisme d'assurance

Les calculs pour la tarification, les réserves, la solvabilité et l'allocation de capital reposent sur des modèles de risque (en assurance dommages).

Étapes de la modélisation :

- 1 Données
- 2 Choix du modèle : estimation et calibration
- 3 Quantification : primes et mesures de risques
- 4 Décisions

Gestion des risques (du point de vue de l'assuré) :

- Identification des risques
- Risque transféré vs risque auto-géré
- Risque transféré à un assureur
- Prime demandée par un assureur

Contrat d'assurance :

- Identification des périls couverts par le contrat d'assurance
- Modélisation des coûts éventuels pour un contrat
- Calculs de la prime

# Mécanisme d'assurance

L'ensemble de la procédure pour déterminer la prime d'un contrat d'assurance dommages est appelée "tarification".

Les coûts pour un contrat sont modélisés par une v.a.  $X$ .

La prime  $\Pi$  est calculée à partir du modèle choisi pour la v.a.  $X$  selon des principes de prime.

Les mesures de risque peuvent être considérés à titre de principes de prime.

Dans le contexte de la tarification d'un contrat d'assurance, l'espérance de la v.a.  $X$  est considérée comme la prime pure pour le contrat.

# Mécanisme d'assurance

Aperçu global de la procédure de tarification ([Parodi, 2014]) :

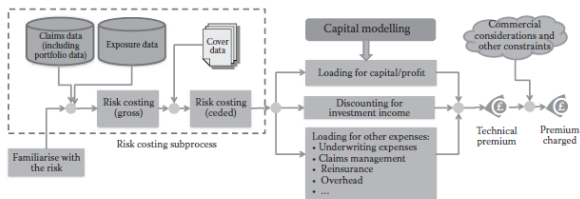


FIGURE 1.8

The high-level pricing process. Our elementary example in Section 1.1 contains these steps, albeit in a rudimentary form.

## Aperçu détaillé de la procédure de tarification ([Parodi, 2014]) :

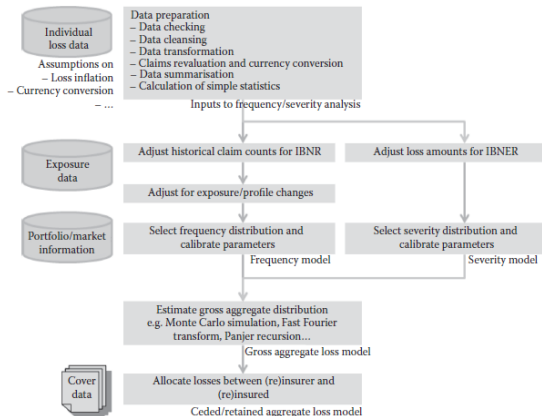


FIGURE 6.1

The risk costing subprocess according to the frequency/severity approach. The main difference between this and the simple example is that frequency and severity are analysed separately and are then combined with, for example, a Monte Carlo simulation. Note that in practice there will be many variations to this simple process, but it is fair to say that this is the 'vanilla' version of the frequency/severity approach.

# Outils de base



La modélisation des risques en actuariat, en général, et en actuariat pour l'assurance général repose à la fois sur des notions de probabilité et des méthodes statistiques.

Comme on le verra, le modèle fondamental pour les coûts en assurances dommages repose sur deux composantes :

- nombre de sinistres (v.a. positives discrètes, pour les modèles sur période fixe, ou processus aléatoires de comptage, pour les modèles dynamiques)
- montant d'un sinistre (v.a. positive, généralement continue)

Dans les prochaines sections, on présente les définitions de certaines outils de la théorie des probabilité, en introduisant les notions actuarielles qui s'y rattachent.

Les méthodes statistiques seront introduites plus tard.

On aborde les notions suivantes :

- Fonction stop-loss
- Fonction quantile
- Mesures de risque
- Méthodes de simulation

# Mesures de risque et primes

# Mesures de risque et primes

## Généralités

En actuariat, les coûts d'un contrat, d'une ligne d'affaires, ou d'un portefeuille sont représentés par une v.a.  $X$ , appelée *risque*.

Dans le contexte de l'assurances dommages, la v.a.  $X$ , qui représente les coûts d'un contrat d'assurance, est positive.

Le contrat d'assurance formalise le transfert d'un risque (v.a.  $X$ ) de l'assuré vers l'assureur.

En contrepartie, l'assureur demande à l'assuré de lui verser une prime (constante)  $\Pi(X)$ .

# Mesures de risque et primes

## Généralités

En émettant plusieurs contrats, l'assureur constitue un portefeuille de risques, représentés par des v.a.  $X_1, \dots, X_n$ .

Les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  peuvent être indépendantes ou dépendantes.

Les coûts d'assurance (souscription) de l'assureur résultent de la somme des v.a.  $X_1, \dots, X_n$  :

$$S = X_1 + \dots + X_n.$$

D'un point de vue de l'actuaire de l'assureur, les enjeux en lien avec les opérations d'assurance sont les suivants :

- modéliser à la fois les coûts (risques  $X_1, \dots, X_n$ ) des différents contrats d'assurances émis par la compagnie d'assurance ;
- modéliser la structure de dépendance régissant les interactions entre ces v.a. ;
- modéliser les coûts (risque global, v.a.  $S$ ) qui résultent de la mutualisation des coûts des contrats d'assurance.

# Mesures de risque et primes

## Généralités

Pour mesurer quantitativement le risque d'un contrat ou d'un portefeuille de contrats d'assurance, on a recours à une mesure de risque  $\varsigma(Y)$ , où  $Y = X$  (pour un contrat) et  $Y = S$  pour un portefeuille,

Deux exemples importants d'application d'une mesure de risque :

- Tarification : la mesure de risque est utilisée pour calculer la prime :

$$\Pi(X) = \varsigma(X);$$

- Solvabilité : la mesure de risque sert à calculer le capital associé au portefeuille :

$$capital(S) = \varsigma(S);$$

# Mesures de risque et primes

## Généralités

L'actuaire de l'assureur doit aussi veiller à modéliser d'autres risques, tels que les risques de taux d'intérêt, de crédit, ou de risques opérationnels.

Pour faciliter la présentation, on s'intéresse dans cet exposé à la modélisation de la v.a.  $X$  dans le contexte de l'assurance dommages.

# Mesures de risque et primes

## Mise en place

Soit une v.a. positive  $X$  représentant le risque d'un contrat ou d'un portefeuille.

Notations de bases :

- Fonction de répartition :

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x), x \geq 0;$$

- Espérance (si elle existe) :

$$E[X] = \int_0^{\infty} x dF_X(x);$$

- En actuariat, la prime pure correspond à  $E[X]$ .



### Définition 1

Soit une v.a.  $X$  avec  $E[X] < \infty$ . Les espérances tronquées sont définies par

$$E[X \times 1_{\{X > d\}}] = \int_d^{\infty} x dF_X(x),$$

et

$$E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] = \int_{-\infty}^d x dF_X(x),$$

où  $d \in \mathbb{R}$ .

**Relation :**

$$E[X \times 1_{\{X > d\}}] + E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] = E[X \times (1_{\{X > d\}} + 1_{\{X \leq d\}})] = E[X].$$

# Mesures de risque et primes

## Espérance tronquées

Lorsque  $X$  est une v.a. continue, les expressions de  $E[X \times 1_{\{X>d\}}]$  et  $E[X \times 1_{\{X\leq d\}}]$  deviennent

$$E[X \times 1_{\{X>d\}}] = \int_d^{\infty} x f_X(x) dx,$$

et

$$E[X \times 1_{\{X\leq d\}}] = \int_{-\infty}^d x f_X(x) dx,$$

où  $d \in \mathbb{R}$ .

### Exemple 1

Soit  $X \sim \text{Exp}(\beta)$  dont la fonction de densité est  $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ . On obtient

$$\begin{aligned} E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] &= \int_0^d x f_X(x) dx \\ &= \int_0^d x \beta e^{-\beta x} dx = -de^{-\beta d} + \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta d}). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} E[X \times 1_{\{X > d\}}] &= \int_d^\infty x f_X(x) dx = \frac{1}{\beta} + de^{-\beta d} - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta d}) \\ &= de^{-\beta d} + \frac{1}{\beta} e^{-\beta d}. \quad \square \end{aligned} \tag{1}$$

### Exemple 2

Soit la v.a. continue positive  $X \sim Ga(\alpha, \beta)$  où

$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ . De plus,  $F_X(x) = H(x; \alpha, \beta)$

et  $\bar{F}(x) = \bar{H}(x; \alpha, \beta)$ . On obtient

$$\begin{aligned} E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] &= \int_0^d x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^d \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha+1-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\alpha}{\beta} H(d; \alpha+1, \beta) = E[X] H(d; \alpha+1, \beta). \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} E[X \times 1_{\{X > d\}}] &= E[X] - E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] \\ &= E[X] (1 - H(d; \alpha+1, \beta)) \\ &= E[X] \bar{H}(d; \alpha+1, \beta) \quad \square \end{aligned} \tag{2}$$

# Mesures de risque et primes

## Prime *stop-loss*

La prime *stop-loss*, appelée aussi fonction *stop-loss*, est fréquemment utilisée en actuariat

### Définition 2

Soit une v.a.  $X$  avec  $E[X] < \infty$ . La fonction *stop-loss*  $\pi_X(d)$  correspond à

$$\pi_X(d) = E[\max(X - d; 0)], \quad (3)$$

où  $d \in \mathbb{R}$ .

**Relation :** Soit une v.a. positive  $X$  avec  $E[X] < \infty$ .

$$\pi_X(0) = E[X].$$

**Prime stop-loss et espérance tronquée :** Comme

$$\max(X - d; 0) = X \times 1_{\{X > d\}} - d \times 1_{\{X > d\}},$$

on déduit

$$\pi_X(d) = E[X \times 1_{\{X > d\}}] - d \times \overline{F}_X(d),$$

où  $d \in \mathbb{R}$ .

# Mesures de risque et primes

## Prime *stop-loss*

Si la v.a.  $X$  obéit à une loi continue, (3) devient

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} (x - d) f_X(x) dx. \quad (4)$$

De plus, si la v.a.  $X$  est continue positive, l'expression (4) pour la fonction *stop-loss* devient

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} \overline{F}_X(x) dx.$$

### Exemple 3

Soit la v.a.  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ . La fonction *stop-loss* est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_d(X) &= E[\max(X - d; 0)] \\ &= \int_d^\infty \overline{F}_X(x) dx \\ &= \int_d^\infty e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{1}{\beta} e^{-\beta d}. \quad \square\end{aligned}$$



### Exemple 4

Soit la v.a.  $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ .

La fonction stop-loss est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_d(X) &= E[\max(X - d; 0)] \\ &= E[X \times 1_{\{X > d\}}] - d\bar{F}_X(d) \\ &= E[X] \bar{H}(d; \alpha + 1, \beta) - d\bar{H}(d; \alpha, \beta),\end{aligned}$$

for  $d \geq 0$ .  $\square$

# Mesures de risque et primes

## Prime *stop-loss*

Si la v.a.  $X = Kh$  ( $h \in \mathbb{R}^+$ ) où  $K$  obéit à une loi discrète dont le support est  $\mathbb{N}$  et si  $d = hk_0$  avec  $k_0 \in \mathbb{N}$ , on a

$$\pi_X(d) = \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0h; 0) f_X(kh) = h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \bar{F}_X(kh).$$

Les définitions de plusieurs mesures de risque reposent en grande partie sur la fonction quantile.

On débute avec la définition de base de la fonction quantile.

### Définition 3

*Soit la v.a.  $X$  avec fonction de répartition  $F_X$ . On définit la fonction inverse  $F_X^{-1}$  de  $F_X$  par*

$$F_X^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\},$$

*pour  $u \in (0,1)$ .*

*La fonction quantile de  $X$  correspond à la fonction inverse  $F_X^{-1}$ .*

# Mesures de risque et primes

## Fonction quantile

Si la v.a.  $X$  est continue, alors  $F_X^{-1}$  correspond à la seule valeur  $x_u$  telle que  $F_X(x_u) = u$ .

Pour certaines lois continues, il est possible d'obtenir une expression fermée pour la fonction quantile.

Autrement, on a recours à des méthodes d'optimisation numérique pour évaluer la valeur  $F_X^{-1}(u)$  pour une valeur fixée  $u \in (0,1)$ .

### Exemple 5

*Soit la v.a.  $X \sim \text{Exp}(\beta)$  dont la fonction de répartition est  $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$ ,  $x \geq 0$ .*

*L'expression fermée de la fonction quantile est déterminée en isolant  $x$  dans la relation  $F_X(x) = u$ ,  $u \in (0,1)$ .*

*On obtient  $F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\beta} \ln(1 - u)$ .  $\square$*

### Théorème 1

**Théorème de la fonction quantile** Soit une v.a.  $X$  avec fonction de répartition  $F_X$  et fonction quantile  $F_X^{-1}$ . Soit une v.a.  $U \sim U(0,1)$ . Alors, la fonction de répartition de  $F_X^{-1}(U)$  est  $F_X$ , i.e.,  $F_X^{-1}(U) \sim X$ .

# Mesures de risque et primes

## Théorème de la fonction quantile - Preuve

On fait la preuve en deux étapes.

### Étape no1 - v.a. continues

On suppose que la v.a.  $X$  est continue.

Comme les évènements  $\{F_X^{-1}(U) \leq x\}$  et  $\{U \leq F_X(x)\}$  coïncident, alors on a

$$\Pr(F_X^{-1}(U) \leq x) = \Pr(U \leq F_X(x)).$$

De la fonction de répartition de  $U \sim U(0,1)$ , on déduit

$$\Pr(F_X^{-1}(U) \leq x) = \Pr(U \leq F_X(x)) = F_X(x).$$

### Étape no2 - cas général

Maintenant, on considère le cas général incluant le cas précédent mais aussi le cas d'une v.a.  $X$  dont la fonction de répartition peut avoir des sauts et des portions horizontales . Le cas des v.a. discrètes est aussi inclus.

On doit vérifier que les évènements  $\{F_X^{-1}(U) \leq x\}$  et  $\{U \leq F_X(x)\}$  coïncident.



# Fonction quantile

## Théorème de la fonction quantile - Preuve

### Étape no2 - cas général (suite)

D'abord, on suppose que  $x \geq F_X^{-1}(u)$ , pour  $u \in (0,1)$ .

Puisque

$$F_X^{-1}(u) = \inf \{y \in \mathbb{R}, F_X(y) \geq u\},$$

alors  $F_X(x) \geq u$ , pour  $u \in (0,1)$ .

Bref, on a  $x \geq F_X^{-1}(u) \Rightarrow F_X(x) \geq u$ , pour  $u \in (0,1)$ .

### Étape no2 - cas général (suite)

Ensuite, on suppose que  $F_X(x) \geq u$ , ce qui implique

$$x \geq F_X^{-1}(u) = \inf \{y \in \mathbb{R}, F_X(y) \geq u\},$$

pour  $u \in (0,1)$ .

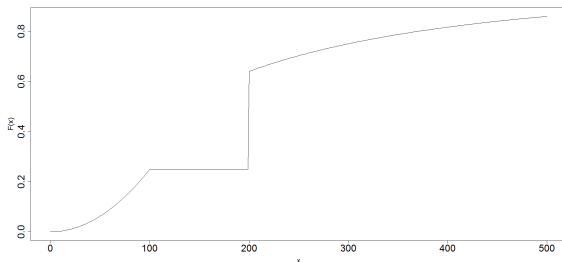
Puisque les évènements  $\{F_X^{-1}(U) \leq x\}$  et  $\{U \leq F_X(x)\}$  coïncident, on a

$$\Pr(F_X^{-1}(U) \leq x) = \Pr(U \leq F_X(x)) = F_X(x).$$

# Mesures de risque et primes

## Théorème de la fonction quantile - Illustration

Illustration:



**Illustration:** Fonction de répartition avec un saut et une partie horizontale.

# Mesures de risque et primes

## Théorème de la fonction quantile - Représentation

Soit une v.a.  $X$  avec une fonction de répartition  $F$  et une fonction quantile  $F^{-1}$ .

Soit une v.a.  $U \sim Unif(0,1)$ .

Selon ce théorème, on peut représenter la v.a.  $X$  comme suit :

$$X = F^{-1}(U). \quad (5)$$

La représentation en (5) est fort utile.

Par exemple, la méthode de simulation inverse découle de la représentation en (5).

# Mesures de risque et primes

## Théorème de la fonction quantile - Espérance

On suppose  $E[X] < \infty$ . En utilisant la représentation en (5), on a

$$E[X] = E[F^{-1}(U)] = \int_0^1 F^{-1}(u) du. \quad (6)$$

De plus, soit une fonction  $\varphi$  tel que  $E[\varphi(X)] < \infty$ . Alors, on a

$$E[\varphi(X)] = E[\varphi(F^{-1}(U))] = \int_0^1 \varphi(F^{-1}(u)) du. \quad (7)$$

Les résultats en (6) et (7) servent à justifier la méthode Monte Carlo.

# Mesures de risque et primes

## Méthode inverse de simulation et méthode Monte Carlo

Soit une v.a.  $X$  avec une fonction de répartition  $F_X$  et une fonction quantile  $F_X^{-1}$ .

Soit une v.a.  $U \sim Unif(0,1)$  dont on simule  $m$  réalisations  $U^{(1)}, \dots, U^{(m)}$  à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires.

### Algorithme 1

#### **Méthode inverse de simulation :**

- Simuler  $m$  réalisations  $U^{(1)}, \dots, U^{(m)}$  de la v.a.  $U \sim \text{Unif}(0,1)$ .
- Simuler  $m$  réalisations  $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$  de la v.a.  $X$  avec les  $m$  réalisations  $U^{(1)}, \dots, U^{(m)}$  :

$$X^{(j)} = F_X^{-1}(U^{(j)}) \quad (\text{théorème de la fonction quantile}),$$

pour  $j = 1, \dots, m$ .

Soit une v.a.  $X$  avec une fonction de répartition  $F_X$  et une fonction quantile  $F_X^{-1}$ .

### Idée de la méthode Monte-Carlo :

- Contexte : Soit une fonction  $\varphi$  tel que  $E[\varphi(X)] < \infty$ .
- But : Évaluer  $\zeta = E[\varphi(X)]$ .
- Appliquer le théorème de la fonction quantile

$$\zeta = E[\varphi(X)] = E[\varphi(F_X^{-1}(U))] = \int_0^1 \varphi(F_X^{-1}(u)) du.$$

- Approximer l'intégrale  $\zeta = \int_0^1 \varphi(F_X^{-1}(u)) du$  par une moyenne empirique.
- Convergence de la moyenne empirique vers  $\zeta$  en vertu d la loi des grands nombres.



### Algorithme 2

#### **Méthode Monte-Carlo :**

- *Simuler  $m$  réalisations  $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$  de la v.a.  $X$ .*
- *Calculer l'approximation  $\tilde{\zeta}_m$  de  $\zeta = E[\varphi(X)]$  avec*

$$\tilde{\zeta}_m = \frac{1}{m} \times \sum_{j=1}^m \varphi(X^{(j)})$$

Par la loi des grands nombres, l'approximation  $\tilde{\zeta}_m$  converge vers  $\zeta$  avec probabilité 1 quand le nombre  $m$  de réalisations tend vers  $\infty$ .

# Mesures de risque et primes

## Méthode inverse de simulation et méthode Monte Carlo

La variance de  $\tilde{\zeta}$  est

$$\text{Var}(\tilde{\zeta}) = \frac{1}{m} \text{Var}(\varphi(X)).$$

En vertu du théorème central limite, l'erreur  $(\tilde{\zeta} - \zeta)$  est approximativement normale avec moyenne 0 et écart type  $\frac{\sqrt{\text{Var}(\varphi(X))}}{\sqrt{m}}$ .

Cela signifie que la qualité de l'approximation obtenue par simulation s'améliore d'un facteur d'ordre  $\sqrt{m}$ .

Le terme  $\frac{\sqrt{\text{Var}(\varphi(X))}}{\sqrt{m}}$  est habituellement appelé l'erreur standard.

# Mesures de risque et primes

## Méthode inverse de simulation et méthode Monte Carlo

Souvent, comme  $\text{Var}(\varphi(X))$  ne peut pas être évaluée avec exactitude, on l'estime à l'aide de l'estimateur échantillonnal classique

$$\widehat{\text{Var}}(\varphi(X)) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \left( \varphi(X^{(j)}) - \tilde{\zeta} \right)^2. \quad (8)$$

On se base sur la distribution asymptotique de l'erreur  $(\tilde{\zeta} - \zeta)$  afin de construire un intervalle de confiance de niveau  $\alpha$  (e.g. 95 %) pour  $\tilde{\zeta}$  dont les bornes sont fournies par

$$\tilde{\zeta} \pm \frac{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\varphi(X))}}{\sqrt{m}} \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right).$$

# Mesures de risque et primes

## Méthode inverse de simulation et méthode Monte Carlo

Généralement, comme la valeur  $\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\varphi(X))}$  ne peut pas être obtenue, on utilise (8) pour calculer les bornes de l'intervalle de confiance

$$\tilde{\zeta} \pm \frac{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\varphi(X))}}{\sqrt{m}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

### Théorème 2

**Transformation intégrale de la probabilité** Soit une v.a. continue  $X$  avec une fonction de répartition  $F_X$  et une fonction quantile  $F_X^{-1}$ . Alors,  $F_X(X) \sim Unif(0,1)$ .

Le Théorème 2 est fréquemment utilisé dans le contexte de la théorie des copules.

Note : L'expression "transformation intégrale de la probabilité" est utilisée par la Revue Canadienne de Statistique pour traduire l'expression anglaise "probability integral transform".

# Mesures de risque et primes

## Fonction croissante

Selon la proposition suivante, la fonction quantile d'une transformation croissante d'une v.a. s'exprime comme cette transformation de la fonction quantile de cette v.a.

### Proposition 1

*Soit une v.a.  $X$ . Si  $\varphi$  est une fonction croissante, alors on a*

$$F_{\varphi(X)}^{-1}(u) = \varphi(F_X^{-1}(u)), \quad (9)$$

*pour  $u \in (0,1)$ .*

# Mesures de risque et primes

## Mesures VaR et TVaR

La mesure *Value at Risk* (VaR) est une mesure de risque très populaire en actuariat et en gestion des risques.

### Définition 4

*Soit  $0 < \kappa < 1$ . La mesure VaR avec un niveau de confiance  $\kappa$  associée à la v.a.  $X$  est définie par  $VaR_{\kappa}(X) = F_X^{-1}(\kappa)$ .*

Ainsi, la probabilité que la v.a.  $X$  prenne une valeur supérieure à la VaR est moindre ou égale à  $1 - \kappa$ .

# Mesures de risque et primes

## Mesures VaR et TVaR

Toutefois, la mesure VaR ne donne pas d'information sur le comportement de la distribution au delà de la VaR.

Par exemple, pour une v.a. continue  $X$  et pour  $\kappa = 99.99\%$ , cela signifie qu'il y a une probabilité de  $0.01\%$  que la v.a.  $X$  prenne une valeur qui est supérieure à  $VaR_{99.99\%}(X)$  sans nous préciser l'ampleur de la valeur que  $X$  peut prendre si elle excède la VaR.



# Mesures de risque et primes

## Mesure VaR et TVaR

La mesure *Tail Value at Risk* (TVaR) est proposée comme une alternative à la mesure VaR.

### Définition 5

Soit  $0 \leq \kappa < 1$ . La mesure TVaR avec un niveau de confiance  $\kappa$  est définie par

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{1 - \kappa} \int_{\kappa}^1 VaR_u(X) du, \quad (10)$$

avec  $TVaR_0(X) = \int_0^1 VaR_u(X) du = E[X]$ .

### Proposition 2

Soit une v.a.  $X$  avec  $E[X] < \infty$ . Alors, à partir de (10), on déduit les deux expressions suivantes :

**1** Expression avec la prime stop-loss :

$$TVaR_{\kappa}(X) = VaR_{\kappa}(X) + \frac{1}{1 - \kappa} \Pi_X(VaR_{\kappa}(X)) \quad (11)$$

**2** Expression avec l'espérance tronquée :

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1 - \kappa} E[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] \\ &\quad + \frac{1}{1 - \kappa} VaR_{\kappa}(X) (F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa). \end{aligned} \quad (12)$$

### Preuve

*Démonstration de (11). On a*

$$\begin{aligned}TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 VaR_u(X) du \\&= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 (VaR_u(X) - VaR_{\kappa}(X) + VaR_{\kappa}(X)) du \\&= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 (VaR_u(X) - VaR_{\kappa}(X)) du + \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 (VaR_{\kappa}(X)) du \\&= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 (F_X^{-1}(u) - VaR_{\kappa}(X)) du + \frac{1}{1-\kappa} VaR_{\kappa}(X) (1-\kappa) \\&= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(F_X^{-1}(U) - VaR_{\kappa}(X); 0)] + VaR_{\kappa}(X) \\&= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] + VaR_{\kappa}(X) \text{ (Th. Fn. Quantile)}\end{aligned}$$

*pour  $\kappa \in (0,1)$ .*

### Preuve

*Démonstration de (2). De (11), on déduit*

$$\begin{aligned}TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] + VaR_{\kappa}(X) \\&= \frac{1}{1-\kappa} E[(X - VaR_{\kappa}(X)) \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] + VaR_{\kappa}(X) \\&= \frac{1}{1-\kappa} E[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] \\&\quad - \frac{1}{1-\kappa} VaR_{\kappa}(X) \times E[1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] + VaR_{\kappa}(X) \\&= \frac{1}{1-\kappa} E[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] \\&\quad - \frac{1}{1-\kappa} (VaR_{\kappa}(X) \times (1 - F_X(VaR_{\kappa}(X))) - (1-\kappa) VaR_{\kappa}(X)) \\&= \frac{1}{1-\kappa} \{E[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] + VaR_{\kappa}(X) (F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa)\}\end{aligned}$$

*pour  $\kappa \in (0,1)$ .*

# Mesures de risque et primes

## Mesures VaR et TVaR

Soit une v.a. continue  $X$ .

Alors, on a

$$(F_X(\text{VaR}_\kappa(X)) - \kappa) = 0.$$

De (2), on déduit

$$\text{TVaR}_\kappa(X) = \frac{1}{1 - \kappa} E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_\kappa(X)\}}], \quad (13)$$

pour  $\kappa \in (0,1)$ .

### Exemple 6

Soit la v.a.  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ , avec

$$\text{VaR}_\kappa(X) = F_X^{-1}(1 - \kappa) = -\frac{1}{\beta} \ln(1 - \kappa).$$

Or,

$$\Pi_X(\text{VaR}_\kappa(X)) = \frac{1}{\beta} e^{-\beta \text{VaR}_\kappa(X)} = \frac{1 - \kappa}{\beta}.$$

De (11), on déduit

$$\text{TVaR}_\kappa(X) = \text{VaR}_\kappa(X) + \frac{1}{\beta}. \quad \square$$

### Exemple 7

Soit la v.a.  $X \sim Ga(\alpha, \beta)$  où  $F_X^{-1}$  n'a pas de forme fermée.

La fonction quantile de la loi gamma est fournie dans le logiciel R.

Avec (2) et (13), on obtient

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}]}{1 - \kappa} = \frac{E[X] \overline{H}(VaR_{\kappa}(X); \alpha + 1, \beta)}{1 - \kappa}. \quad \square$$

# Mesures de risque et primes

## Évaluation de la VaR et méthode Monte Carlo

Soit une v.a.  $X$  dont on a produit  $m$  réalisations  $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$ . Une approximation de  $F_X$  est fournie à l'aide de la fonction de répartition empirique définie par

$$F^{(m)}(x) \simeq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m 1_{\{X^{(j)} \leq x\}}. \quad (14)$$

Puisque  $F^{(m)}$  est une fonction de répartition associée à une distribution discrète, il en découle que l'approximation de  $VaR_{\kappa}(X)$  est

$$VaR_{\kappa}(X) \simeq F^{(m)-1}(\kappa) = \inf \left\{ X^{(j)}, i = 1, 2, \dots, m ; F^{(m)}(X^{(j)}) \geq \kappa \right\}.$$



# Mesures de risque et primes

## Évaluation de la TVaR et méthode Monte Carlo

Soit le vecteur de réalisations classées en ordre croissant de  $X$ , que l'on note par  $(X^{[1]}, \dots, X^{[m]})$ .

On fixe  $j_0$  tel que  $F^{(m)-1}(\kappa) = X^{[j_0]}$ .

En utilisant les expressions (10) et (2) pour la TVaR conjointement avec (14), l'approximation de  $TVaR_\kappa(X)$  correspond à

$$\begin{aligned} & TVaR_\kappa(X) \\ & \simeq \frac{1}{1-\kappa} \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X^{(j)} \times 1_{\{X^{(j)} > F^{(m)-1}(\kappa)\}} \right) \\ & \quad + \frac{1}{1-\kappa} \left( F^{(m)-1}(\kappa) \left( F^{(m)} \left( F^{(m)-1}(\kappa) \right) - \kappa \right) \right) \\ & \simeq \frac{1}{1-\kappa} \left( \frac{1}{m} \sum_{j=j_0+1}^m X^{[j]} + X^{[j_0]} \left( F^{(m)} \left( X^{[j_0]} \right) - \kappa \right) \right). \quad (15) \end{aligned}$$

# Mesures de risque et primes

## Évaluation de la TVaR et méthode Monte Carlo

Supposons que  $m \times \kappa$  est un entier.

Alors cet entier est  $j_0$ . Il en résulte que  $(F^{(m)}(X^{[j_0]}) - \kappa) = 0$  et (15) devient

$$\begin{aligned}TVaR_{\kappa}(X) &\simeq \frac{1}{m(1-\kappa)} \sum_{j=1}^m X^{(j)} \times 1_{\{X^{(j)} > X^{[j_0]}\}} \\&= \frac{1}{m-j_0} \sum_{j=j_0+1}^m X^{[j]},\end{aligned}$$

ce qui correspond à la moyenne des  $m - j_0$  plus grandes réalisations de  $X$ .

# Mesures de risque et primes

## Évaluation de la TVaR et méthode Monte Carlo

### Proposition 3

Soit une v.a.  $X$  avec fonction de répartition  $F_X$ . Soit une suite de v.a. i.i.d.  $X_1, \dots, X_n$  où  $X_i \sim X$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Alors, on a

$$TVaR_\kappa(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=[n\kappa]+1}^n X^{[j]}}{[n(1-\kappa)]} \quad (p.s.), \quad (16)$$

où  $[u]$  correspond à la partie entière de  $u$ .

### Preuve

Voir la preuve de la proposition 4.1 dans [Acerbi and Tasche, 2002] ainsi que le développement aux pages 1494 et 1495 de cet article.

Lois continues paramétriques et logiciel R :

- Loi uniforme : `dunif()`, `punif()`, `qunif()`, `runif()` ;
- Loi exponentielle : `dexp()`, `pexp()`, `qexp()`, `rexp()` ;
- Loi gamma : `dgamma()`, `pgamma()`, `qgamma()`, `rgamma()` ;
- Loi lognormale : `dlnorm()`, `plnorm()`, `qlnorm()`, `rlnorm()`.

Lois discrètes paramétriques et logiciel R :

- Loi Poisson : `dpois()`, `ppois()`, `qpois()`, `rpois()` ;
- Loi binomiale négative : `dnbinom()`, `pnbinom()`, `qnbinom()`, `rnbinom()`.

# Mesures de risque et primes

## Illustration numérique

---

Illustration numérique à faire en classe.

# Mutualisation des risques d'assurance

# Mutualisation des risques d'assurance

## Généralités

Les opérations d'assurance sont fondées sur la possibilité de mutualiser les risques d'assurance.

On considère un portefeuille de  $n$  risques  $X_1, \dots, X_n$ .

Le risque global correspond à aux coûts totaux du portefeuille définis par la v.a.

$$S = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Les coûts totaux espérés du portefeuille sont donnés par

$$E[S] = \sum_{i=1}^n E[X_i].$$

# Mutualisation des risques d'assurance

## Généralités

Le calcul de  $\varsigma(S)$  requiert d'évaluer  $F_S$ .

L'évaluation de  $F_S$  représente un défi important.

Les risques  $X_1, \dots, X_n$  peuvent être indépendants ou dépendants entre eux, ce qui a un impacte sur l'évaluation de  $F_S$ .

On peut recourir à la transformée de Laplace-Stietjes et la fonction génératrice de probabilité pour identifier la loi de  $S$  ou évaluer  $F_S$ .



# Mutualisation des risques d'assurance

## Transformée de Laplace-Stieltjes

### Définition 6

Soit une v.a. positive  $X$ . La transformée de Laplace-Stieltjes (TLS) de la v.a.  $X$  est définie par l'espérance suivante :

$$\mathcal{L}_X(t) = E[e^{-tX}] = \int_0^{\infty} e^{-tx} dF_X(x), \quad (17)$$

pour  $t \in [0, \infty)$ .

### Remarques :

- Puisque la v.a.  $X$  est positive, l'espérance en (17) est finie pour tout  $t > 0$ .
- Alors,  $\mathcal{L}_X$  existe peu importe la loi de v.a.  $X$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Transformée de Laplace-Stieltjes

Le résultat suivant permet d'identifier la TLS d'une somme de v.a. indépendantes.

Il est aussi utile pour l'évaluation numérique de  $F_S$ .

### Proposition 4

*Soit les v.a. indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  dont les TLS sont  $\mathcal{L}_{X_i}(r)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . On définit la v.a.  $S = X_1 + \dots + X_n$ . Alors, la TLS de la v.a.  $S$  est donnée par*

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \dots \times \mathcal{L}_{X_n}(t),$$

*pour  $t \in [0, \infty)$ .*

# Mutualisation des risques d'assurance

## Transformée de Laplace-Stieltjes

### Preuve

*La TLS de la v.a.  $S$  est donnée par*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= E[e^{-tS}] = E[e^{-t(X_1+\dots+X_n)}] \\ &= E[e^{-tX_1} \times \dots \times e^{-tX_n}] \\ &= E[e^{-tX_1}] \times \dots \times E[e^{-tX_n}] \text{ [v.a. indépendantes]} \\ &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \dots \times \mathcal{L}_{X_n}(t),\end{aligned}$$

*pour  $t \in [0, \infty)$ .*

# Mutualisation des risques d'assurance

## Transformée de Laplace-Stieltjes

### Exemple 8

Soit les v.a. indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  avec  $X \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Alors, la TLS de la v.a.  $S$  est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \dots \times \mathcal{L}_{X_n}(t) \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_1} \times \dots \times \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_n} = \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}\end{aligned}$$

pour  $t \in [0, \infty)$ .

On déduit que  $S \sim \text{Gamma}(\alpha_1 + \dots + \alpha_n, \beta)$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Fonction de génératrice de probabilité

Soit une v.a. discrète positive  $X$  dont le support est  $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ .

La fonction de masse de probabilité (f.m.p.) est notée par

$$f_X(k) = \Pr(X = k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

On introduit la notion de fonction génératrice de probabilité (fgp) pour une v.a. discrète positive.

La fgp est à la fois une espérance d'une fonction de la v.a.  $X$  et une série de puissances.

La fgp est utile dans les aspects de la modélisation et des différents calculs à effectuer en actuariat.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Fonction de génératrice de probabilité

### Définition 7

*La fonction génératrice de probabilités (fgp) de la v.a.  $X$  est définie par*

$$\mathcal{P}_X(r) = E[r^X] = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) r^k,$$

*pour tout nombre complexe  $r$  tel que  $|r| \leq 1$  (en particulier pour des nombres réels  $r \in [0,1]$ ).*

La fonction de génératrice de probabilité (f.g.p.) de la v.a.  $X$  permet de représenter la f.m.p. de la v.a.  $M$  sous la forme d'une série de puissances.

Les coefficients de cette série de puissances correspondent aux valeurs de la fonction de masse de probabilité.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Fonction de génératrice de probabilité

---

### Propriétés :

- $\mathcal{P}_X(0) = f_X(0)$
- $\mathcal{P}_X(1) = 1.$

On retrouve les coefficients (i.e., les valeurs de la fonction de masse de probabilité de la v.a.  $X$ ) de la fgp en utilisant le théorème suivant.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Fonction de génératrice de probabilité

### Théorème 3

**Fonction de masse de probabilité.** La valeur de  $f_X(k)$  est calculée à partir de  $\mathcal{P}_X(t)$  avec

$$f_X(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{dr^k} \mathcal{P}_X(r) \right|_{r=0}. \quad (18)$$

La fgp d'une v.a. discrète positive  $X$  définit la distribution de cette v.a. :

- Soit deux v.a. discrètes positives  $X$  et  $Y$  dont  $\mathcal{P}_X$  et  $\mathcal{P}_Y$  sont identiques.
- Alors, selon le Théorème 3, les v.a.  $X$  et  $Y$  ont la même distribution.



# Mutualisation des risques d'assurance

## Fonction de génératrice de probabilité

Le résultat suivant permet d'identifier la fgp d'une somme de v.a. discrètes indépendantes.

Il est aussi utile pour l'évaluation numérique de  $F_S$ .

### Proposition 5

*Soit les v.a. discrètes positives (avec support  $\mathbb{N}$ ) indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  dont les fgp sont  $\mathcal{P}_{X_i}(r)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . On définit la v.a.  $S = X_1 + \dots + X_n$ . Alors, la fgp de la v.a.  $S$  est donnée par*

$$\mathcal{P}_S(r) = \mathcal{P}_{X_1}(r) \times \dots \times \mathcal{P}_{X_n}(r),$$

*pour  $r \in [0, 1]$ .*

# Mutualisation des risques d'assurance

## Fonction de génératrice de probabilité

### Preuve

*La fgp de la v.a.  $S$  est donnée par*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(r) &= E[r^S] = E[r^{X_1 + \dots + X_n}] \\ &= E[r^{X_1} \times \dots \times r^{X_n}] \\ &= E[r^{X_1}] \times \dots \times E[r^{X_n}] \text{ [v.a. indépendantes]} \\ &= \mathcal{P}_{X_1}(r) \times \dots \times \mathcal{P}_{X_n}(r),\end{aligned}$$

*pour  $r \in [0,1]$ .*

# Mutualisation des risques d'assurance

## Fonction de génératrice de probabilité

### Exemple 9

Soit les v.a. indépendantes  $X_1, \dots, X_n$ , avec  $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . On définit la v.a.  $S = X_1 + \dots + X_n$ .

Alors, la fgp de la v.a.  $S$  est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(r) &= \mathcal{P}_{X_1}(r) \times \dots \times \mathcal{P}_{X_n}(r) \\ &= e^{\lambda_1(r-1)} \times \dots \times e^{\lambda_n(r-1)} \\ &= e^{\lambda_1(r-1) + \dots + \lambda_n(r-1)} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(r-1)},\end{aligned}$$

pour  $r \in [0, 1]$ .

On déduit que  $S \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Méthodes d'approximation

---

Généralement, on ne parvient pas à identifier la loi de  $S$ .

On doit recourir à des méthodes d'approximation :

- Méthodes d'approximation basées sur les moments ;
- Méthodes numériques basées sur des relations récursives ;
- Méthodes basées sur la simulation Monte-Carlo.

Les méthodes numériques basées sur des relations récursives sont présentées plus loin.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a.

Soit une v.a.  $Z$  qui est définie en fonction des v.a.  $X_1, \dots, X_n$  i.e.  
 $Z = \phi(X_1, \dots, X_n)$ .

La forme explicite de la fonction de répartition  $F_Z$  ne peut être obtenue et on peut produire des réalisations de  $X_1, \dots, X_n$ .

La procédure pour simuler la réalisation  $j$ ,  $Z^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, m$ ), de la v.a.  $Z$  est décrite comme suit.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a.

### Algorithme 3

#### *Simulation d'une fonction de v.a.*

**1** *Étape 1.* On simule les réalisations de  $(X_1^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$  de  $(X_1, \dots, X_n)$ .

**2** *Étape 2.* On évalue  $Z^{(j)} = \phi(X_1^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$ .

On répète pour  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Un exemple de fonction intéressante pour analyser le comportement aléatoire du risque global d'un portefeuille d'assurance est

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

# Mutualisation des risques d'assurance

Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a.

---

Illustration numérique à faire en classe.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Propriétés désirables des mesures de risque

---

Les mesures de risque peuvent être utilisées dans différents contextes, notamment :

- item calcul du capital pour un portefeuille ;
- calcul de la prime pour un contrat d'assurance ;
- outils de comparaison.

On présente les propriétés désirables d'une mesure de risque  $\varsigma_K$ .



# Mutualisation des risques d'assurance

## Propriétés désirables des mesures de risque

### Propriété 1

**Homogénéité.** Soient un risque  $X$  et un scalaire  $a \in \mathbb{R}^+$ . Une mesure  $\varsigma_\kappa$  est homogène si

$$\varsigma_\kappa(aX) = a\varsigma_\kappa(X),$$

pour  $0 < \kappa < 1$ .

Une modification d'unité monétaire apportée au risque  $X$  conduit à une modification du même ordre pour la valeur obtenue avec la mesure de risque.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Propriétés désirables des mesures de risque

### Propriété 2

**Invariance à la translation.** Soient un risque  $X$  et un scalaire  $a \in \mathbb{R}$ . Une mesure  $\varsigma_\kappa$  est invariante à la translation si

$$\varsigma_\kappa(X + a) = \varsigma_\kappa(X) + a,$$

pour  $0 < \kappa < 1$ .

Par exemple, pour la v.a. perte définie par  $L = X - \pi$  où  $\pi$  correspond à la prime associée à  $X$ , il est justifié d'avoir  $\varsigma_\kappa(L) = \varsigma_\kappa(X) - \pi$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Propriétés désirables des mesures de risque

### Propriété 3

**Monotonocité.** Soient deux risques  $X_1$  et  $X_2$  tels que  $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$ . Une mesure  $\varsigma_\kappa$  est monotone si

$$\varsigma_\kappa(X_1) \leq \varsigma_\kappa(X_2),$$

pour  $0 < \kappa < 1$ .

### Interprétation :

- Prime : Si le risque  $X_2$  est plus dangereux que le risque  $X_1$ , il est raisonnable que la mesure de risque mène à une prime plus élevée pour le risque  $X_2$  que celle qui est calculée pour le risque  $X_1$ .
- Capital : Si le risque  $X_2$  est plus dangereux que le risque  $X_1$ , il est raisonnable que la mesure de risque conduise à un capital pour le risque  $X_2$  supérieur à celui calculé pour le risque  $X_1$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Propriétés désirables des mesures de risque

### Propriété 4

**Sous-additivité.** Soient  $n$  risques  $X_1, \dots, X_n$ . La mesure  $\varsigma_\kappa$  est sous-additive si

$$\varsigma_\kappa(X_1 + \dots + X_n) \leq \varsigma_\kappa(X_1) + \dots + \varsigma_\kappa(X_n),$$

pour  $0 < \kappa < 1$ .

La propriété de sous-additivité est très importante relativement à la mutualisation des risques.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Propriétés désirables des mesures de risque

Il est intéressant d'examiner le bénéfice de mutualisation qui résulte de la mise en commun des risques  $X_1, \dots, X_n$ .

Le bénéfice de mutualisation est défini par

$$B_{\kappa}^{\varsigma}(S) = \sum_{i=1}^n \varsigma_{\kappa}(X_i) - \varsigma_{\kappa}(S)$$

Comme la mutualisation des risques est le fondement de l'assurance, il est souhaitable que  $B_{\kappa}^{\varsigma}(S)$  soit positif.

Soit  $\varsigma$  une mesure sous-additive. Alors, on observe

$$B_{\kappa}^{\varsigma}(S) = \sum_{i=1}^n \varsigma_{\kappa}(X_i) - \varsigma_{\kappa}(S) \geq 0,$$

pour tout  $\kappa \in (0,1)$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Propriétés désirables des mesures de risque

La notion de mesure cohérente a été introduite par [Artzner et al., 1999].

### Definition 1

**Mesure de risque cohérente.** On dit qu'une mesure de risque  $\varsigma_K$  est *cohérente* si les propriétés 1, 2, 3 et 4 sont satisfaites.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Autres propriétés désirables des mesures de risque

---

Dans la littérature actuarielle (voir e.g. [Denuit et al., 2006]), les trois propriétés suivantes sont aussi jugées désirables.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Autres propriétés désirables des mesures de risque

### Propriété 5

**Marge de risque non excessive.** La mesure  $\varsigma_{\kappa}$  ne doit pas induire une marge de risque excessive. Si  $X \leq x_{\max}$ , alors on a  $\varsigma_{\kappa}(X) \leq x_{\max}$ , pour  $0 < \kappa < 1$ .

### Interprétation :

- Prime : Il est injustifié d'exiger une prime supérieure au montant maximal que les coûts d'un risque ou d'un portefeuille peut prendre.
- Capital : Il est injustifié de détenir un capital en excédent du montant maximal que les coûts d'un risque ou d'un portefeuille peut prendre.



# Mutualisation des risques d'assurance

## Autres propriétés désirables des mesures de risque

### Propriété 6

**Marge de risque positive.** On doit avoir  $\varsigma_{\kappa}(X) \geq E[X]$ , pour  $0 < \kappa < 1$ .

### Interprétation :

- Prime : Le capital minimum doit être supérieure à la prime pure sinon il y aura ruine certaine.
- Capital : Le capital minimum doit excéder les coûts espérés sinon il y aura ruine certaine.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Autres propriétés désirables des mesures de risque

### Propriété 7

**Marge de risque justifiée.** Soit  $a$  une constante quelconque. On doit toujours avoir  $\varsigma_{\kappa}(a) = a$ , pour  $0 < \kappa < 1$ .

### Interprétation :

- Prime : Il n'est pas approprié de demander une prime différente de  $a$  si les coûts pour un contrat correspondent à la constante  $a$ .
- Capital : Il n'est pas justifié de détenir un capital différent de  $a$  si les coûts pour un portefeuille correspondent à la constante  $a$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Mesure VaR

La mesure VaR satisfait aux propriétés suivantes :

- Invariance à la translation ;
- Homogénéité ;
- Monotonicité ;
- Elle n'introduit pas une marge de risque excessive ;
- Elle n'introduit pas une marge de risque injustifiée.

La mesure VaR ne satisfait pas aux propriétés suivantes :

- Sous-additivité ;
- Elle n'introduit pas une marge de risque positive pour tout  $\kappa \in (0,1)$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Mesure VaR

### Exemple 10

Soient les v.a. indépendantes  $X_1$  et  $X_2$  où  $X_i \sim \text{Exp}(0.1)$ . On sait que  $X_1 + X_2 \sim \text{Erlang}(2, 0.1)$ . Il est clair avec les valeurs de  $\text{VaR}_\kappa(X_1 + X_2)$  et  $\text{VaR}_\kappa(X_1) + \text{VaR}_\kappa(X_2)$  qui sont fournies dans le tableau suivant que la mesure VaR n'est pas sous-additive :

$\kappa$	0.1	0.2	0.5	0.8	0.9
$\text{VaR}_\kappa(X_1) + \text{VaR}_\kappa(X_2)$	0.2107	0.4463	1.3863	3.2189	4.6052
$\text{VaR}_\kappa(X_1 + X_2)$	0.5318	0.8244	1.6783	2.9943	3.8897

# Mutualisation des risques d'assurance

## Mesure TVaR

La mesure TVaR satisfait aux propriétés suivantes :

- Invariance à la translation ;
- Homogénéité ;
- Monotonie ;
- Sous-additivité ;
- Elle n'introduit pas une marge de risque excessive ;
- Elle introduit une marge de risque positive pour tout  $\kappa \in (0,1)$  ;
- Elle n'introduit pas une marge de risque injustifiée.

[Embrechts and Wang, 2015] proposent 7 preuves de la sous-additivité de la TVaR.

On présente 2 d'entre elles.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Preuve no1 de la sous-additivité de la TVaR

On suit la démonstration fournie dans [McNeil et al., 2015].

Soit une suite de v.a. i.i.d.  $X_1, \dots, X_n$  où  $X_i \sim X$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pour un entier  $m$  tel que  $1 \leq m+1 \leq n$ , l'égalité suivante est vérifiée

$$\sum_{j=m+1}^n X^{[j]} = \sup \{ X_{i_{m+1}} + \dots + X_{i_n}; 1 \leq i_{m+1} \leq \dots \leq i_n \leq m+1 \}.$$

# Mutualisation des risques d'assurance

## Preuve no1 de la sous-additivité de la TVaR

Soit un couple de v.a.  $(X,Y)$  dont la fonction de répartition est désignée par  $F_{X,Y}$ .

Soient la suite de couple de v.a. i.i.d.  $(X_1,Y_1), (X_2,Y_2), \dots, (X_n,Y_n)$  où  $(X_i,Y_i) \sim (X,Y)$  pour  $i = 1,2,\dots,n$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Preuve no1 de la sous-additivité de la TVaR

On définit  $S = X + Y$  et  $S_i = X_i + Y_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Par la Proposition 3, on a

$$TVaR_{\kappa}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=[n\kappa]+1}^n S^{[j]}}{[n(1-\kappa)]} \text{ (p.s.)},$$

où  $S^{[1]} \leq S^{[2]} \leq \dots \leq S^{[n-1]} \leq S^{[n]}$  sont les statistiques d'ordre de  $S_1, \dots, S_n$  et  $[a]$  correspond à la partie entière de  $a$ .



# Mutualisation des risques d'assurance

## Preuve no1 de la sous-additivité de la TVaR

On a

$$\begin{aligned}\sum_{j=[n\kappa]+1}^n S_{j:n} &= \sup \left\{ S_{i_{[n\kappa]+1}} + \dots + S_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq \dots \leq i_n \leq [n\kappa] + 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ X_{i_{[n\kappa]+1}} + \dots + X_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq \dots \leq i_n \leq [n\kappa] + 1 \right\} \\ &\quad + \sup \left\{ Y_{i_{[n\kappa]+1}} + \dots + Y_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq \dots \leq i_n \leq [n\kappa] + 1 \right\} \\ &= \sum_{j=[n\kappa]+1}^n X_{j:n} + \sum_{j=[n\kappa]+1}^n Y_{j:n}.\end{aligned}$$

Il suffit de diviser par  $[n(1 - \kappa)]$  et de faire tendre  $n \rightarrow \infty$  et on déduit le résultat voulu en appliquant la Proposition 3.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR

On a

$$TVaR_{\kappa}(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{ \varphi(x) \}$$

ce qui signifie

$$TVaR_{\kappa}(X) \leq \varphi(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour  $\alpha \in (0,1)$ , on a

$$TVaR_{\kappa}(\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y) \leq x + \frac{1}{1-\kappa} \pi_{\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y}(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On choisit

$$x_{\alpha} = \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1-\alpha) \times VaR_{\kappa}(Y)$$

.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR

On a

$$\begin{aligned} & TVaR_{\kappa}(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y) \\ \leq & x_0 + \frac{1}{1 - \kappa} \pi_{\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y}(x_0) \\ = & x_0 + \frac{1}{1 - \kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y - x_0; 0)] \\ = & \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y) \\ & + \frac{1}{1 - \kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y - \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y); 0)]. \end{aligned}$$

La fonction

$$E[\max(W; 0)]$$

est convexe.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR

Alors, on a

$$\begin{aligned} & TVaR_{\kappa}(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y) \\ \leq & \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y) \\ & + \frac{1}{1 - \kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y - \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y); 0)] \\ = & \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y) \\ & + \frac{1}{1 - \kappa} \times E[\max(\alpha \times (X - VaR_{\kappa}(X)) + (1 - \alpha) \times (Y - VaR_{\kappa}(Y)); 0)] \\ \leq & \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y) \\ & + \frac{1}{1 - \kappa} \times \alpha E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] \\ & + \frac{1}{1 - \kappa} \times (1 - \alpha) E[\max(Y - VaR_{\kappa}(Y); 0)] \\ = & \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + \frac{1}{1 - \kappa} \times \alpha E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] \\ & + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y) + \frac{1}{1 - \kappa} \times (1 - \alpha) E[\max(Y - VaR_{\kappa}(Y); 0)] \end{aligned}$$

pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR

La relation est vraie pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} & TVaR_{\kappa} \left( \frac{1}{2} \times X + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times Y \right) \\ \leq & \frac{1}{2} \times VaR_{\kappa}(X) + \frac{1}{1 - \kappa} \times \frac{1}{2} E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] \\ & + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times VaR_{\kappa}(Y) + \frac{1}{1 - \kappa} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) E[\max(Y - VaR_{\kappa}(Y); 0)] \end{aligned}$$

# Mutualisation des risques d'assurance

## Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR

Avec la propriété d'homogénéité de la TVaR, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}TVaR_{\kappa}(X+Y) &\leq \frac{1}{2} \times VaR_{\kappa}(X) + \frac{1}{1-\kappa} \times \frac{1}{2} E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \times VaR_{\kappa}(Y) + \frac{1}{1-\kappa} \times \frac{1}{2} E[\max(Y - VaR_{\kappa}(Y); 0)]\end{aligned}$$

On multiplie par "2" et on obtient le résultat désiré.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Portefeuille homogène de risques d'assurance

Soit un portefeuille homogène de  $n$  risques d'assurance (indépendants ou pas)  $X_1, \dots, X_n$ , avec  $X_i \sim X$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , avec fonction de répartition  $F_X$ , TLS  $\mathcal{L}_X$ , et espérance  $E[X] < \infty$ .

Les coûts d'assurance du portefeuille sont définis par la v.a.

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

On définit la part allouée à chaque risque par la v.a.  $W_n$  où

$$W_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

La v.a.  $W_n$  correspond à la part attribuée à la suite d'un partage / allocation équitable des coûts du portefeuille parmi les membres du portefeuille.

Comme ce partage résulte de la mutualisation, il est intéressant de comparer le comportement de la part  $W_n$  à celui d'un risque

# Mutualisation des risques d'assurance

## Portefeuille homogène de risques d'assurance

Espérance de  $W_n$  : on a

$$E[W_n] = E[X],$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ .

VaR de  $W_n$  : puisque la VaR est une mesure homogène, on a

$$\text{VaR}_\kappa(W_n) = \text{VaR}_\kappa\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}\text{VaR}_\kappa(S_n),$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ .



# Mutualisation des risques d'assurance

## Portefeuille homogène de risques d'assurance

TVaR de  $W_n$  :

- Puisque la TVaR est une mesure homogène et sous-additive, on a

$$\begin{aligned}TVaR_{\kappa}(W_n) &= TVaR_{\kappa}\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}TVaR_{\kappa}(S_n) \\&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n TVaR_{\kappa}(X_i) = \frac{1}{n}n \times TVaR_{\kappa}(X) \\&= TVaR_{\kappa}(X),\end{aligned}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ .

- Alors, le bénéfice de mutualisation par risque positif, e.g.,

$$B_{\kappa}^S(W_n) = \varsigma_{\kappa}(X) - \varsigma_{\kappa}(W_n) \geq 0,$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Portefeuille homogène de risques d'assurance

Variance de  $W_n$  :

■ Hypothèses additionnelles :

- $Var(X) < \infty$  ;
- $Cov(X_i, X_j) = Cov(X_1, X_2) \in [-\frac{1}{n}Var(X), \infty)$  pour  $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

■ On a

$$Var(W_n) = \frac{1}{n}Var(X) + \frac{n-1}{n}Cov(X_1, X_2),$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Portefeuille homogène de risques d'assurance

Limites de la variance de  $W_n$  :

- Hypothèses additionnelles :

- $Var(X) < \infty$  ;
- $Cov(X_i, X_j) = Cov(X_1, X_2) \in [0, \infty)$  pour  $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

- Si les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  mutuellement indépendantes, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(W_n) = 0$$

⇒ "diversification complète du risque d'assurance".

- Sinon, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(W_n) = Cov(X_1, X_2) \geq 0$$

⇒ "diversification incomplète du risque d'assurance".

# Mutualisation des risques d'assurance

## Portefeuille homogène de risques d'assurance

TLS de  $W_n$  :

■ On a

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = E[e^{-tW_n}] = E[e^{-\frac{t}{n}S_n}] = \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right),$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ .

■ Hypothèse additionnelle :

- ▶ Les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes.
- ▶ On a

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = (\mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right))^n,$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Portefeuille homogène de risques d'assurance

TLS de  $W_n$  et loi des grands nombres pour risques indépendants :

- Hypothèse additionnelle : v.a.  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes.
- Loi des grands nombres (sans supposer  $Var(X) < \infty$ ) :
  - ▶ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ , on a

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

- ▶ On utilise l'approximation

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = \left(\mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \approx \left(1 - \frac{t}{n}E[X]\right)^n$$

- ▶ On prend la limite pour  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}E[X]\right)^n = e^{-tE[X]}$$

- ▶ Conclusion :  $W_n$  converge en distribution vers la v.a.  $Z$  où  $\Pr(Z = E[X]) = 1$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Portefeuille homogène de risques d'assurance

Soit les v.a. i.i.d.  $X_1, \dots, X_n$ , avec  $X_i \sim X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$   
( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Alors, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{W_n}(t) &= \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\ &= \left(\mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta + \frac{t}{n}}\right)^{n \times \alpha} \\ &= \left(\frac{n\beta}{n\beta + t}\right)^{n \times \alpha}\end{aligned}$$

pour  $t \in [0, 1]$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Portefeuille homogène de risques d'assurance

---

On déduit que

$$W_n \sim \text{Gamma}(n\alpha, n\beta)$$

pour  $n \in \mathbb{N}^+$ .

# Mutualisation des risques d'assurance

## Portefeuille homogène de risques d'assurance

Comme prévu, on observe

$$E[W_n] = \frac{\alpha n}{\beta n} = \frac{\alpha}{\beta} = E[X]$$

et

$$\text{Var}(W_n) = \frac{\alpha n}{(\beta n)^2} = \frac{1}{n} \times \frac{\alpha}{\beta^2} \leq \frac{1}{n} \times \text{Var}(X),$$

pour  $n \in \mathbb{N}^+$ .



# Mutualisation des risques d'assurance

## Illustration numérique

---

Illustration numérique à faire en classe.

# Mutualisation des risques d'assurance

## Mesure de risque invariante à la distribution

Une mesure de risque  $\varsigma$  est dite distribution-invariante (*law invariant*) si la mesure dépend uniquement de la distribution de la v.a.  $X$ .

Soit deux v.a.  $X_1$  et  $X_2$  avec  $F_{X_1} = F_{X_2} = F_X$ . Alors, pour une mesure distribution-invariante on a

$$\varsigma(X_1) = \varsigma(X_2).$$

Entre d'autres termes, une mesure de risque est "distribution-invariante" si elle attribue la même valeur à deux contrats (ou pertes) ayant la même loi de probabilité (voir, e.g., [?]).

Les mesures VaR et TVaR sont distribution-invariantes.

# Conclusion

# Conclusion

---

(En classe)




# Références

# Références I

-  Acerbi, C. and Tasche, D. (2002).  
On the coherence of expected shortfall.  
*Journal of Banking & Finance*, 26(7):1487–1503.
-  Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999).  
Coherent measures of risk.  
*Mathematical finance*, 9(3):203–228.
-  Cossette, H. and Marceau, E. (2019).  
*Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives*.  
Document de référence.
-  Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., and Kaas, R. (2006).  
*Actuarial theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*.  
John Wiley & Sons.

# Références II

---

-  Embrechts, P. and Wang, R. (2015).  
Seven proofs for the subadditivity of expected shortfall.  
*Dependence Modeling*, 3(1).
-  McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. (2015).  
*Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*.  
Princeton university press.
-  Parodi, P. (2014).  
*Pricing in General Insurance*.  
Chapman and Hall/CRC.