Act-3000 Théorie du risque

Notions sur la dépendance et distributions multivariées

Étienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

A2019: Semaines 6, 7, 8

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières I

Table des matières II

Table des matières III

Introduction

Introduction

Objectif principal : Se familiariser avec les distributions multivariées et les notions de dépendance

Objectifs spécifiques :

- Comprendre les différentes notions de dépendance
- Se familiariser avec différentes distributions multivariées (autres que la loi normale multivariée)
- Adapter les méthodes d'agrégation pour la somme de v.a. dépendantes

Source principale : [Cossette and Marceau, 2019]

Motivations

Motivations

Soit un portefeuille de n risques représentées par le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$.

On définit les coûts totaux du portefeuille par la v.a. $S = X_1 + ... + X_n$.

Questions :

- Q1 : est-ce que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes ?
- Q2 : quelle est la distribution multivariée la plus appropriée pour décrire le comportement conjoint des v.a. $X_1, ..., X_n$?
- Q3 : est-ce qu'il y a différentes structures de dépendance qui permettent d'expliquer le comportement conjoint de $X_1, ..., X_n$?
- Q4 : est-ce que la coefficient de corrélation de Pearson mesure bien la relation de dépendance entre deux v.a. ?
- Q5 : est-ce que l'on peut évaluer F_S ou tout autre mesure de risque ou quantité définie en fonction de la v.a. S ?
- Etc.

Applications

Applications

Les applications en actuariat et gestion quantitative des risques sont nombreuses.

Assurance habitation :

- péril incendie ;
- péril vent ;
- péril inondation ;
- etc.

Assurance auto :

- dommages matériels ;
- dommages corporels ;
- dommages à autrui.

Applications

Autres exemples : [en classe]

- ...
- ...
- ...

Classes de Fréchet

Classes de Fréchet

Contexte :

- On connaît la distribution marginale de chaque v.a. X_i, pour $i = 1,2,...,n$.
- La fonction de répartition (marginale) associée à cette distribution marginale est notée par F_i, pour $i = 1,2,...,n$.
- Q : combien y a-t-il de fonctions de répartition possibles pour $\underline{X}$?
- Etc.

Classes de Fréchet

Exemple : Portefeuille avec 2 risques

- $X_1 \sim X_2 \sim Exp(\beta)$
- $F_1(x) = F_2(x) = 1 - \exp(-\beta x)$, $x \geq 0$.
- Q : quel est le nombre de distributions bivariées possibles pour (X_1,X_2) dont la fonction de répartition F_{X_1,X_2} est telle que $F_{X_1} = F_1$ et $F_{X_2} = F_2$?
- R : une infinité.
- Q : quel le nombre de l'ensemble de toutes les fonctions de répartition F_{X_1,X_2} où $F_{X_1} = F_1$ et $F_{X_2} = F_2$?
- R : Classe de Fréchet
- Q : est-ce que le choix de F_{X_1,X_2} a un impact sur F_S ?
- R : oui (voir à la prochaine diapo).

Classes de Fréchet

Exemple (suite) :

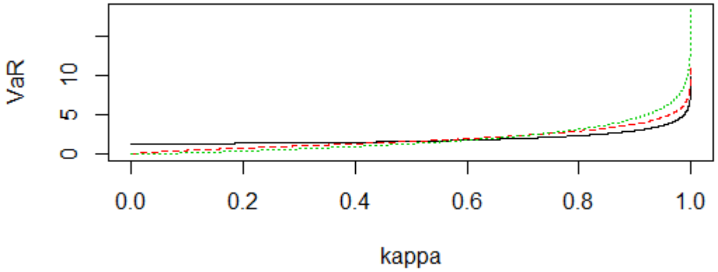


Illustration: Courbe de VaR pour trois choix différents de F_{X_1,X_2} avec $F_1(x) = F_2(x) = 1 - \exp(-x)$, $x \geq 0$.

Classes de Fréchet

Exemple (suite) :

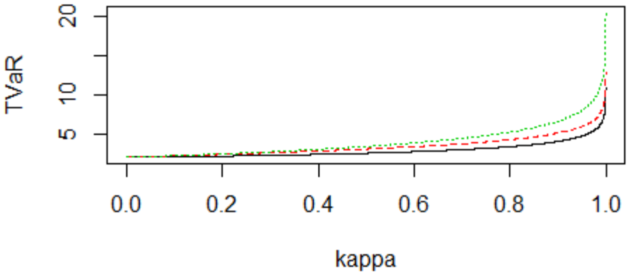


Illustration: Courbe de TVaR pour trois choix différents de F_{X_1,X_2} avec $F_1(x) = F_2(x) = 1 - \exp(-x)$, $x \geq 0$.

Classes de Fréchet

Remarques sur l'exemple : [en classe]

- ...
- ...
- ...

Soit $F_1,\ldots,F_n$ des fonctions de répartition univariées (pas nécessairement identiques).

Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ dont la fonction de répartition est $F_{\underline{X}}$.

Définition 1

On définit la classe de Fréchet $\mathcal{CF}\left(F_1,\ldots,F_n\right)$ par l'ensemble de toutes les fonctions de répartition multivariées $F_{\underline{X}}$ ayant pour marginales $F_1,\ldots,F_n$.

Remarque :

- Soit (X_1,X_2) et (X_1',X_2') avec

$$F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1,F_2)$$

et

$$F_{X_1',X_2'} \in \mathcal{CF}(F_1,F_2)$$

.

- On définit $S = X_1 + X_2$ et $S = X_1' + X_2'$.
- Questions :
  - Q1 : est-ce que $E[S] = E[S']$ ou $E[S] \neq E[S']$?
  - Q2 : est-ce que $F_S = F_{S'}$ ou $F_S \neq F_{S'}$?
- Réponses :
  - R1 : en classe
  - R2 : en classe

Théorème 1

Soit $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1,\ldots,F_n)$.
Alors, on a

$$W(x_1,\ldots,x_n) \leq F_{\underline{X}}(x_1,\ldots,x_n) \leq M(x_1,\ldots,x_n), \; (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

où

$$W(x_1,\ldots,x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - (n-1); 0\right),$$

$$M(x_1,\ldots,x_n) = \min(F_1(x_1); \ldots; F_n(x_n)).$$

Classes de Fréchet

Preuve : en classe.

Classes de Fréchet

Important ! Peu importe la structure de dépendance qui relie les v.a. $X_1, ..., X_n$, la fonction de répartition conjointe du vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ satisfait (1).

Borne $M(x_1,...,x_n) = \min(F_1(x_1); ...; F_n(x_n))$:

- M est appelée la borne supérieure de Fréchet.
- M est une fonction de répartition.

Borne $W(x_1,...,x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - (n-1); 0\right)$:

- W est appelée la borne inférieure de Fréchet.
- Pour $n = 2$, W est une fonction de répartition.
- Pour $n > 2$, W n'est pas une fonction de répartition (voir [Joe, 1997]).

Classes de Fréchet

Questions :

- Q1 : Comment est-il possible de construire $F_{\underline{X}}$ à partir d'une ensemble fixé de $F_1,...,F_n$?
- Q2 : Est-ce qu'il y a plusieurs lois multivariées avec des marginales exponentielles ?
- Q3 : Est-ce qu'il y a plusieurs lois multivariées avec des marginales Poisson ?
- Q4 : Est-ce qu'il y plusieurs lois multivariées avec des marginales hétéroclites (p. ex. pour $n = 2$: loi gamma, loi lognormale)?
- Q5 : Quelle est la structure de dépendance associée à la borne supérieure de Fréchet M ?

Réponses : en classe

Classes de Fréchet

Exemple no1 :

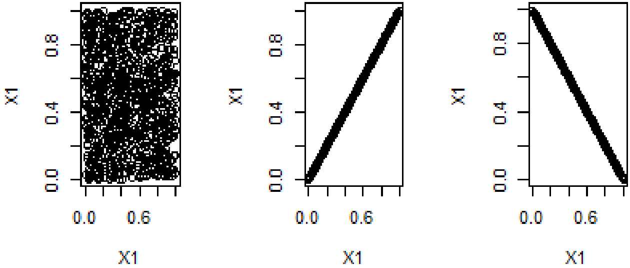


Illustration: Nuages de points des réalisations de (X_1, X_2) de l'exemple no1.

Classes de Fréchet

Exemple no2 :

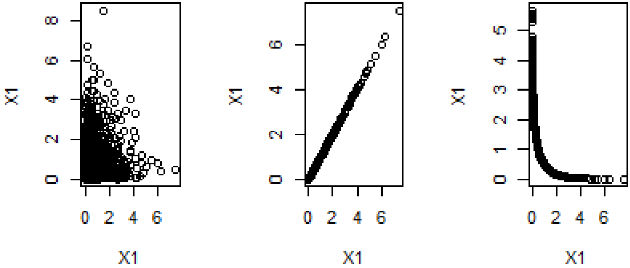


Illustration: Nuages de points des réalisations de (X_1, X_2) de l'exemple no2.

Classes de Fréchet

Exemple no3 :

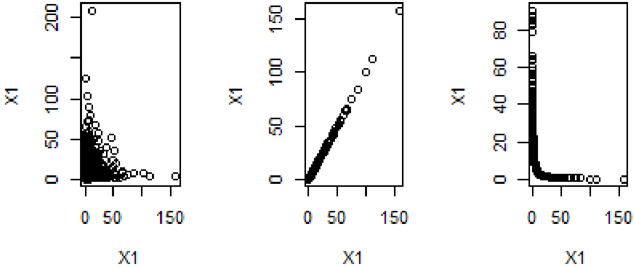


Illustration: Nuages de points des réalisations de (X_1,X_2) de l'exemple no3.

Notions de dépendance

Notions de dépendance

On connaît au moins une notion de dépendance : l'indépendance ...

Indépendance :

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = F_{X_1}(x_1) \times \ldots \times F_{X_n}(x_n),$$

pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

On introduit 2 autres notions fondamentales de dépendance :

- comonotonicité ;
- antimonotonicité .

Comonotonicité

Comonotonicité

Un cas particulier de relation de dépendance est la comonotonicité

Depuis la fin des années 1990, cette notion est fréquemment évoquée en actuariat.

Définition 2

Un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *est comonotonique si et seulement si il existe une v.a.* Z *et des fonctions non décroissantes* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *telles que*

$$\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n) =_d \left(\phi_1(Z), \ldots, \phi_n(Z)\right).$$

Comonotonicité

Représentation :

- Soit $U \sim Unif\,(0,1)$.
- Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$, où les composantes sont données par

$$X_i = F_i^{-1}\,(U)\,, \tag{2}$$

  pour $i = 1,2,...,n$ et $U \sim Unif\,(0,1)$.
- Par le Théorème de la fonction quantile, ...
- Alors, par la définition 2, les composantes de $\underline{X}$ sont dites comonotones.

La relation en (2) est importante pour l'agrégation de risques comonotones.

Soit un vecteur de v.a. comonotones $\underline{X} = (X_1,..,X_n)$.

Algorithme 1

Simulation des réalisations de $\underline{X}$.

1. *On simule une réalisation $U^{(j)}$ de la v.a. $U \sim U(0,1)$.*
2. *On calcule $X_1^{(j)} = F_1^{-1}\left(U^{(j)}\right)$, ..., $X_n^{(j)} = F_n^{-1}\left(U^{(j)}\right)$.*

Comonotonicité

Question : Quelle est la fonction de répartition d'un vecteur de v.a. comonotones ?

Proposition 2

Le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ *a des composantes comonotones si, et seulement si, sa fonction de répartition conjointe est la borne supérieure de Fréchet* M.

Interprétation : Soit $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ avec $X_i = F_i^{-1}(U)$ pour $i = 1,2,...,n$ où $U \sim Unif(0,1)$. Alors :

- $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1,...,F_n)$
- $F_{\underline{X}} = M$

Comonotonicité

Preuve : en classe

Comonotonicité

Soit $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ le vecteur de v.a. comonotones où

- $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1,...,F_n)$
- $F_{\underline{X}} = M$

On définit $S = X_1 + ... + X_n$.

Question : quelle est la forme F_S ?

La réponse est très étonnante !

Comonotonicité

Pour répondre à la question, on utilise la repésentation (2) en fonction de la v.a. $U \sim Unif(0,1)$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} F_i^{-1}(U) = \varphi(U), \tag{3}$$

où $\varphi(y)$ est une fonction croissante pour $y \in (0,1)$.

Le résultat suivant est fondamental pour la somme de v.a. comonotones.

Proposition 3

(Additivité des VaR et des TVaR). *Alors, on a*

$$VaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} VaR_\kappa(X_i). \tag{4}$$

et

$$TVaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_\kappa(X_i). \tag{5}$$

Comonotonicité

Preuve : en classe

Comonotonicité

Remarque : la comonotonicité représente la notion de dépendance positive extrême.

Remarques additionnelles : (en classe)

Antimonotonicité

Antimonotonicité

L'antimonotonicité correspond à la relation de dépendance négative parfaite.

Important : Cette notion de dépendance est définie pour des paires de v.a.

Définition 3

Les composantes du couple de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *sont antimonotones si, et seulement si, il existe une v.a.* Z, *une fonction croissante* ϕ_1 *et une fonction décroissante* ϕ_2 *telles que*

$$(X_1, X_2) =_d (\phi_1(Z), \phi_2(Z)).$$

Antimonotonicité

Représentation intéressante pour un couple de v.a. antimonotones :

- Soit une v.a. $U \sim Unif(0,1)$.
- Soit un couple de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2)$ dont les composantes sont définies par

$$X_1 = F_1^{-1}(U) \text{ et } X_2 = F_2^{-1}(1-U) \tag{6}$$

- Alors, $\underline{X} = (X_1, X_2)$ est antimonotone en vertu de la définition 2.

Antimonotonicité

Soit un couple de v.a. antimonotones (X_1, X_2).

Algorithme 4

Simulation des réalisations de (X_1, X_2)

1. *On simule une réalisation* $U^{(j)}$ *de la v.a.* $U \sim U(0,1)$.
2. *On calcule* $X_1^{(j)} = F_1^{-1}\left(U^{(j)}\right)$, $X_2^{(j)} = F_2^{-1}\left(1 - U^{(j)}\right)$.

Antimonotonicité

Proposition 5

Le couple de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *a des composantes antimonotones si, et seulement si, sa fonction de répartition conjointe est la borne inférieure de Fréchet* $F^-_{X_1,X_2}$.

Antimonotonicité

Preuve : en classe.

Antimonotonicité

Remarques additionnelles : en classe.

Notation

Notation

Soit la classe de Fréchet $\mathcal{CF}(\mathcal{F},\mathcal{F})$.

On a recours à la notation suivante :

- (X_1^+,X_2^+) correspond au couple de v.a. comonotones avec

$$F_{X_1^+,X_2^+}(x_1,x_2) = M(x_1,x_2) = \min(F_1(x_1);F_2(x_2))$$

- (X_1^-,X_2^-) correspond au couple de v.a. antimonotones avec

$$F_{X_1^-,X_2^-}(x_1,x_2) = W(x_1,x_2) = \max(F_1(x_1)+F_2(x_2)-1;0)$$

- $(X_1^\perp,X_2^\perp)$ correspond au couple de v.a. indépendantes avec

$$F_{X_1^\perp,X_2^\perp}(x_1,x_2) = W(x_1,x_2) = F_1(x_1)\times F_2(x_2)$$

- $S^+ = X_1^+ + X_2^+$, $S^- = X_1^- + X_2^-$ et $S^\perp = X_1^\perp + X_2^\perp$

Notation

Exemple : Portefeuille avec 2 risques

- $X_1 \sim X_2 \sim Exp(\beta)$
- $F_1(x) = F_2(x) = 1 - \exp(-\beta x)$, $x \geq 0$
- quelles sont les courbes des VaR de $S^+ = X_1^+ + X_2^+$, $S^- = X_1^- + X_2^-$ et $S^\perp = X_1^\perp + X_2^\perp$
- quelles sont les courbes des TVaR de $S^+ = X_1^+ + X_2^+$, $S^- = X_1^- + X_2^-$ et $S^\perp = X_1^\perp + X_2^\perp$

Notation

Exemple (suite) :

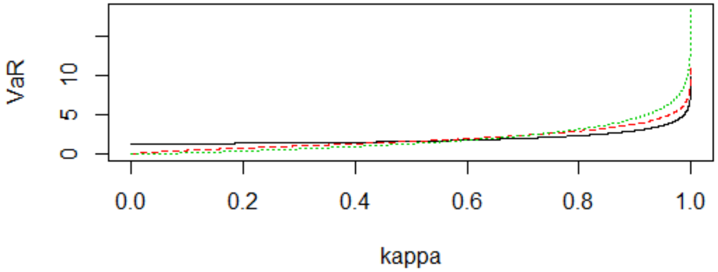


Illustration: Courbe de VaR pour trois choix différents de F_{X_1,X_2} avec $F_1(x) = F_2(x) = 1 - \exp(-x),\ x \geq 0.$

Notation

Exemple (suite) :

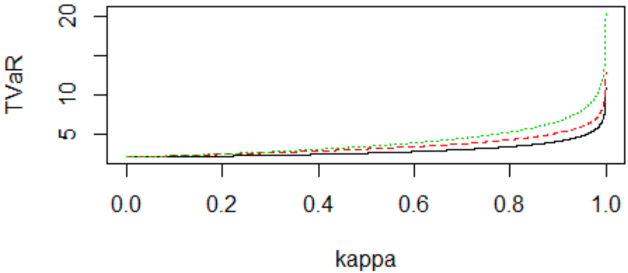


Illustration: Courbe de TVaR pour trois choix différents de F_{X_1,X_2} avec $F_1(x) = F_2(x) = 1 - \exp(-x)$, $x \geq 0$.

Notation

Remarques additionnelles : en classe.

Exemples

Exemples

Exemples : en classe

Définitions et propriétés

Définitions et propriétés

Rappel : Le contenu de cette section est un rappel.

Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

La fonction de répartition conjointe de $\underline{X}$ est définie par

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \Pr(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n).$$

Définitions et propriétés

Définition : on définit l'opérateur $\triangle_{a_i,b_i}$ où

$$\triangle_{a_i,b_i} F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{\underline{X}}(x_1,...,b_i,...,x_n) - F_{\underline{X}}(x_1,...,a_i,...,x_n).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\triangle_{a_j,b_j} \triangle_{a_i,b_i} F_{\underline{X}}(\underline{x}) &= \triangle_{a_j,b_j} F_{\underline{X}}(x_1,...,b_i,...,x_n) - \triangle_{a_j,b_j} F_{\underline{X}}(x_1,...,a_i,...,x_n) \\
&= F_{\underline{X}}(x_1,...,b_i,...,b_j...,x_n) - F_{\underline{X}}(x_1,...,b_i,...,a_j...,x_n) \\
&\quad - F_{\underline{X}}(x_1,...,a_i,...,b_j...,x_n) + F_{\underline{X}}(x_1,...,a_i,...,a_j...,x_n).
\end{aligned}$$

Définitions et propriétés

Pour $n = 2$, on écrit

$$\begin{aligned}\Pr\left(\underline{a} < \underline{X} \leq \underline{b}\right) &= \Pr\left(\underline{X} \in (a_1,b_1] \times (a_2,b_2]\right) \\ &= \triangle_{a_1,b_1} \triangle_{a_2,b_2} F_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right) \\ &= F_{\underline{X}}\left(b_1,b_2\right) - F_{\underline{X}}\left(a_1,b_2\right) \\ &\quad - F_{\underline{X}}\left(b_1,a_2\right) + F_{\underline{X}}\left(a_1,a_2\right).\end{aligned}$$

Propriétés : Une fonction de répartition multivariée $F_{\underline{X}}$ est une application de $\mathbb{R}^n$ vers $[0,1]$ telle que :

1. $F_{\underline{X}}$ est non décroissante sur $\mathbb{R}^n$;
2. $F_{\underline{X}}$ est continue à droite sur $\mathbb{R}^n$;
3. $\lim_{x_i \to -\infty} F_{\underline{X}}(x_1,\ldots,x_n) = 0$, pour $i = 1,\ldots,n$;
4. $\lim_{x_1 \to \infty,\ldots,x_n \to \infty} F_{\underline{X}}(x_1,\ldots,x_n) = 1$;
5. Pour tout x, on a

$$\triangle_{a_1,b_1} \ldots \triangle_{a_n,b_n} F_{\underline{X}}(\underline{x}) \geq 0 \tag{7}$$

pour s'assurer que

$$\Pr(\underline{a} < \underline{X} \leq \underline{b}) = \Pr(\underline{X} \in (a_1,b_1] \times \ldots \times (a_n,b_n]) \geq 0.$$

Définitions et propriétés

Remarque : Si $F_{\underline{X}}$ est dérivable, (7) est équivalent à

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$

sur $\mathbb{R}^n$.

Fonction de répartition marginale : On définit la fonction de répartition marginale de X_i par

$$F_{X_i}(x_i) = \Pr(X_i \leq x_i) = F_{X_1,\ldots,X_n}(\infty,\ldots,\infty,x_i,\infty,\ldots,\infty),$$

pour tout $i = 1,\ldots,n$.

Remarque : On utilise fréquemment l'expression "marginale" (univariée) au lieu de "fonction de répartition marginale".

Définition : La fonction de survie conjointe de $\underline{X}$ est définie par

$$\overline{F}_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \Pr(X_1 > x_1,\ldots,X_n > x_n).$$

Pour $n=2$: On a

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1,x_2).$$

Pour $n=3$: On a

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) &= 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) - F_{X_3}(x_3) \\ &\quad + F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) + F_{X_1,X_3}(x_1,x_3) \\ &\quad + F_{X_2,X_3}(x_2,x_3) - F_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

La fonction de survie marginale de la v.a. X_i est définie par

$$\overline{F}_{X_i}(x_i) = \Pr(X_i > x_i) = \overline{F}_{X_1,\ldots,X_n}(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0),$$

pour $i = 1,\ldots,n$.

Fgm multivariée de $\underline{X}$:

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}\left(t_1,\ldots,t_n\right) = E\left[\mathrm{e}^{t_1 X_1}\ldots\mathrm{e}^{t_n X_n}\right]$$

si l'espérance existe.

Définitions et propriétés

Soit un vecteur de v.a. $\underline{X}$ de v.a. positives.

TLS multivariée de $\underline{X}$:

$$\mathcal{L}_{\underline{X}}(t_1,\ldots,t_n) = E\left[\mathrm{e}^{-t_1 X_1}\ldots\mathrm{e}^{-t_n X_n}\right]$$

pour $(t_1,\ldots,t_n) \in [0,\infty)^n$.

Indépendance : Les v.a. X_1, ..., X_n sont indépendantes si et seulement si on a

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n)$$

ou

$$\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \overline{F}_{X_n}(x_n)...\overline{F}_{X_1}(x_n).$$

Définitions et propriétés

Conséquence : Si les v.a. X_1, ..., X_n sont indépendantes, on a

$$E\left[g\left(X_1\right)...g_n\left(X_n\right)\right] = E\left[g_1\left(X_1\right)\right]...E\left[g_n\left(X_n\right)\right],$$

pour toutes fonctions intégrables $g_1,...,g_n$.

Exemple no1: Espérance du produit de v.a. indépendantes X_i et X_j

$$E\left[X_i X_j\right] = E\left[X_i\right]E\left[X_j\right],$$

pour $i \neq j \in \{1,...,n\}$.

Exemple no2: Fgm de v.a. indépendantes

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\underline{X}}\left(t_1,\ldots,t_n\right) &= E\left[\mathrm{e}^{t_1X_1}\ldots\mathrm{e}^{t_nX_n}\right]\\ &= E\left[\mathrm{e}^{t_1X_1}\right]\ldots E\left[\mathrm{e}^{t_nX_n}\right]\\ &= \mathcal{M}_{X_1}\left(t_1\right)\ldots\mathcal{M}_{X_n}\left(t_n\right).\end{aligned}$$

Exemple no3: TLS de v.a. indépendantes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\underline{X}}\left(t_1,\ldots,t_n\right) &= E\left[\mathrm{e}^{-t_1X_1}\ldots\mathrm{e}^{-t_nX_n}\right]\\ &= E\left[\mathrm{e}^{-t_1X_1}\right]\ldots E\left[\mathrm{e}^{-t_nX_n}\right]\\ &= \mathcal{L}_{X_1}\left(t_1\right)\ldots\mathcal{L}_{X_n}\left(t_n\right).\end{aligned}$$

Indépendance

Soit un vecteur de n v.a. $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$.

Les composantes du vecteur $\underline{X}$ sont dites (mutuellement) indépendantes si et seulement si

$$F_{\underline{X}}(x_1,..,x_n) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n), (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

La relation (8) est essentielle pour vérifier si les composantes d'un vecteur sont indépendantes.

Il est implicite, dans la définition, que les composantes sont **mutuellement** indépendantes.

Soit un vecteur de 3 v.a. discrètes $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ défini sur $\{0,1\}^3$ avec

$$\Pr(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) = \Pr(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) = \frac{1}{4}$$

et

$$\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) = \Pr(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = \frac{1}{4}.$$

On observe que

$$\Pr(X_1 = 1) = \Pr(X_2 = 1) = \Pr(X_3 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Les composantes de $\underline{X}$ sont indépendantes par paire, i.e.,

$$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \Pr(X_1 = x_1) \times \Pr(X_2 = x_2) = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(X_1 = x_1, X_3 = x_3) = \Pr(X_1 = x_1) \times \Pr(X_3 = x_3) = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \Pr(X_2 = x_2) \times \Pr(X_3 = x_3) = \frac{1}{4}$$

pour $x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$.

Par contre, elle ne sont pas mutuellement indépendantes car

$$\Pr(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \neq \Pr(X_1 = 1)\times\Pr(X_2 = 1)\times\Pr(X_3 = 1) = \frac{1}{8}.$$

Covariance et corrélation linéaire

Covariance et corrélation linéaire

Soit une paire de v.a. (X,Y).

On définit la covariance entre X et Y par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left[(X - E\left[X\right])\left(Y - E\left[Y\right]\right)\right] = E\left[XY\right] - E\left[X\right]E\left[Y\right].$$

La covariance entre X et Y permet de mesurer la relation de dépendance linéaire entre deux v.a.

Covariance et corrélation linéaire

Si les v.a. X et Y sont discrètes et dénombrables, l'expression de $E[XY]$ est donnée par

$$E[XY] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i \, y_j \, f_{X,Y}(x_i, y_j).$$

Covariance et corrélation linéaire

On a aussi

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (x_i - E[X])(y_j - E[Y])\, f_{X,Y}(x_i,y_j).$$

Covariance et corrélation linéaire

Si les v.a. X et Y sont continues, l'expression de $E[XY]$ est

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \; f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

De plus, on a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])(y - E[Y]) \; f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Covariance et corrélation linéaire

La covariance peut être positive, nulle ou négative.

Une valeur positive (négative) indique une relation de dépendance linéaire positive (négative) entre X et Y.

Lorsque les v.a. X et Y sont indépendantes, on a $E[XY] = E[X] \times E[Y]$ et il en résulte que la covariance entre elles est nulle.

En revanche, comme il est illustré dans le prochain exemple, une covariance nulle entre les v.a. X et Y n'implique pas qu'elles soient indépendantes entre elles.

Example 6

Soit une paire de v.a. discrètes (X,Y) où $X \in \{-1,0,1\}$ *et* $Y \in \{-2,0,2\}$. *Les valeurs de la fmp conjointe de* (X,Y) sont fournies dans le tableau suivant :

$x \backslash y$	-2	0	2
-1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0

Clairement, on a $f_X(-1) = f_X(0) = f_X(1) = \frac{1}{3}$, $f_Y(-2) = f_Y(2) = \frac{1}{6}$ et $f_Y(0) = \frac{2}{3}$. On obtient $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Toutefois, $f_{X,Y}(0,0) \neq f_X(0)\, f_Y(0) = \frac{2}{9}$. *Alors, les v.a.* X *et* Y *ne sont pas indépendantes bien que leur covariance soit nulle.* $\square$

Covariance et corrélation linéaire

On définit le coefficient de corrélation linéaire de Pearson ρ_P par

$$\rho_P(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}},$$

où $-1 \leq \rho_P(X,Y) \leq 1$.Si les v.a. X et Y sont indépendantes, alors le coefficient de corrélation linéaire de Pearson est nul.

Covariance et corrélation linéaire

Toutefois, la réciproque n'est pas vraie car le coefficient de corrélation linéaire de Pearson ne mesure que la relation de dépendance linéaire entre les deux v.a. X et Y. Si $\rho_P(X,Y) = 0$, les v.a. X et Y sont dites non corrélées linéairement.

Covariance et v.a. positives

Covariance et v.a. positives

Soit une paire de v.a. continues positives $\underline{X} = (X_1, X_2)$ où $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$, la classe de Fréchet générée par les marginales F_1 et F_2.

Soit $F_{\underline{X}^{\max}}, F_{\underline{X}^{\min}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ et où

$$F_{\underline{X}^{\min}}(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}}(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2)$$

avec

$$F_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2) = \min\left(F_{X_1}(x), F_{X_2}(x_n)\right)$$

et

$$F_{\underline{X}^{\min}}(x_1, x_2) = \max\left(F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x_n) - 1; 0\right).$$

Covariance et v.a. positives

Alors, on a

$$Cov\left(X_1^{\min},X_2^{\min}\right) \leq Cov\left(X_1,X_2\right) \leq Cov\left(X_1^{\max},X_2^{\max}\right)$$

et

$$-1 \leq \rho_P\left(X_1^{\min},X_2^{\min}\right) \leq \rho_P\left(X_1,X_2\right) \leq \rho_P\left(X_1^{\max},X_2^{\max}\right) \leq 1.$$

Covariance et v.a. positives

Pour valider ces deux inégalités, on a recours aux ingrédients suivants:

- Ingrédient #1:

$$Cov(X_1,X_2) = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2].$$

- Ingrédient #2:

$$\begin{aligned} E[X_1X_2] &= \int_0^\infty \int_0^\infty x_1x_2f_{\underline{X}}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \end{aligned}$$

- Ingrédient #3:

$$\overline{F}_{\underline{X}^{\min}}(x_1,x_2) \leq \overline{F}_{\underline{X}}(x_1,x_2) \leq \overline{F}_{\underline{X}^{\max}}(x_1,x_2)$$

En effet, on a

$$\overline{F}_{\underline{X}}(x_1,x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{\underline{X}}(x_1,x_2).$$

Covariance et v.a. positives

On combine les 3 ingrédients, on laisse reposer 30 min, on enfourne 15 min et on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[X_1X_2\right] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}}\left(x_1,x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}^{\max}}\left(x_1,x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= E\left[X_1^{\max}X_2^{\max}\right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E\left[X_1X_2\right] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}}\left(x_1,x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\geq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}^{\min}}\left(x_1,x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= E\left[X_1^{\min}X_2^{\min}\right]
\end{aligned}$$

qui mène aux résultats désirés.

Covariance et v.a. positives

Le résultat est valide pour toute v.a. positives (continues, discrètes,ou mixtes).
Soit une paire de v.a. continues positives $\underline{X} = (X_1, X_2)$ où $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$, la classe de Fréchet générée par les marginales F_1 et F_2.
Soit $F_{\underline{X}^{\max}}, F_{\underline{X}^{\min}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ et où

$$F_{\underline{X}^{\min}}(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}}(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2)$$

avec

$$F_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2) = \min\left(F_{X_1}(x), F_{X_2}(x_n)\right)$$

et

$$F_{\underline{X}^{\min}}(x_1, x_2) = \max\left(F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x_n) - 1; 0\right).$$

Somme finie de v.a. et fgm

Proposition. Somme finie de v.a. et fgm conjointe.

- Soit un vecteur de n v.a. $\underline{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ dont la fgm conjointe existe .
- On définit $S = X_1 + \ldots + X_n$.
- Alors, la fgm de S est donnée par

$$\mathcal{M}_S(t) = \mathcal{M}_{\underline{X}}(t,\ldots,t) \tag{9}$$

Preuve : en classe.

Somme finie de v.a. et TLS

Proposition. Somme finie de v.a. et TLS.

- Soit un vecteur de n v.a. positives $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$.
- On définit $S = X_1 + ... + X_n$.
- Alors, la TLS de S est donnée par

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{\underline{X}}(t,...,t) \tag{10}$$

Preuve : en classe.

Distributions multivariées discrètes

Distributions multivariées discrètes

Soit un vecteur de n v.a. discrètes positives $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ à support dénombrable.

La fonction de masse de probabilité conjointe de $\underline{X}$, désignée par $f_{\underline{X}}$, est définie par

$$f_{\underline{X}}(x_1,...,x_n) = \Pr(X_1 = x_1,...,X_n = x_n).$$

Pour la suite, $X_i \in \{0,1h,2h,...\}$, $i = 1,2,...$, et h est un scalaire strictement positif.

Distributions multivariées discrètes

Pour $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(m_1h,m_2h) &= F_{X_1,X_2}(m_1h,m_2h) - F_{X_1,X_2}(m_1h-h,m_2h) \\
&\quad -F_{X_1,X_2}(m_1h,m_2h-h) \\
&\quad +F_{X_1,X_2}(m_1h-h,m_2h-h),
\end{aligned}
$$

pour $(m_1,m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et avec $F_{X_1,X_2}(m_1h,m_2h) = 0$ si $m_1 < 0$ ou $m_2 < 0$.

Pour $n = 3$: (en classe)

On a également les expressions suivantes :

$$
\begin{aligned}
& E\left[g_1\left(X_1\right) ... g_n\left(X_n\right)\right] \\
= & \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} g_1\left(m_1 h\right) ... g_n\left(m_n h\right) f_{X_1,...,X_n}\left(m_1 h,...,m_n h\right)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
& E\left[g\left(X_1,...,X_n\right)\right] \\
= & \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} g\left(m_1 h,...,m_n h\right) f_{X_1,...,X_n}\left(m_1 h,...,m_n h\right).
\end{aligned}
$$

Distributions multivariées discrètes

La fgm multivariée de $\underline{X}$ est

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1,\dots,t_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty}\dots\sum_{m_n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{m_1 h t_1}\dots\mathrm{e}^{m_n h t_n} f_{X_1,\dots,X_n}(m_1 h,\dots,m_n h),$$

si elle existe.

On définit la fgp multivariée par

$$\mathcal{P}_{\underline{X}}(t_1,...,t_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_1=0}^{\infty} t_1^{m_1 h} ... t_n^{m_n h} f_{X_1,...,X_n}(m_1 h,...,m_n h),$$

$|t_i| \leq 1$, $i = 1,2,...,n$.

Distributions multivariées discrètes

La fonction de masse de probabilité de $S = X_1 + X_2$ est

$$f_S(kh) = \sum_{m_1=0}^{k} f_{X_1,X_2}(m_1 h, kh - m_1 h). \tag{11}$$

La fonction de masse de probabilité de $S = X_1 + \ldots + X_n$ est

$$
\begin{aligned}
& f_{S_n}(kh) \\
= \quad & \sum_{k_1=0}^{k} \sum_{k_2=0}^{k_1} \ldots \sum_{k_{n-1}=0}^{k_{n-2}} f_{\underline{X}}\left(k_1 h, k_2 h, \ldots, k_{n-1} h, \left(k - \sum_{j=1}^{n-1} k_j\right) h\right).
\end{aligned}
$$

La fgp de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est donnée par

$$\mathcal{P}_S(t) = E\left[\mathrm{t}^{t(X_1+\ldots+X_n)}\right] = E\left[\mathrm{t}^{tX_1}\ldots\mathrm{t}^{tX_n}\right] = \mathcal{P}_{\underline{X}}(t,\ldots,t). \qquad (12)$$

Le résultat en (12) permet dans certains cas d'identifier la distribution de S.

Il permet d'appliquer la magie des fgps.

Loi de Poisson bivariée Teicher

Loi de Poisson bivariée Teicher

La loi de Poisson bivariée Teicher (voir [Teicher, 1954]) est la loi bivariée la plus simple pour le couple de v.a. (M_1,M_2) dont les marginales sont Poisson avec paramètres λ_1 et λ_2.
Le paramètre de dépendance est $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1;\lambda_2)$.

Loi de Poisson bivariée Teicher

Soit les v.a. indépendantes K_0, K_1, K_2 avec $K_i \sim Pois(\alpha_i)$, $i = 0{,}1{,}2$ et $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; \lambda_2)$, $\alpha_1 = \lambda_1 - \alpha_0$ et $\alpha_2 = \lambda_2 - \alpha_0$.

On définit

$$M_1 = K_1 + K_0 \text{ et } M_2 = K_2 + K_0.$$

Clairement, $M_i \sim Pois(\lambda_i)$, $i = 1{,}2$.

Loi de Poisson bivariée Teicher

F.m.p. conjointe de (M_1,M_2) :

$$f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) = \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2+\alpha_0} \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \frac{\alpha_0^j}{j!} \frac{(\lambda_1-\alpha_0)^{m_1-j}}{(m_1-j)!} \frac{(\lambda_2-\alpha_0)^{m_2-j}}{(m_2-j)!}, \tag{13}$$

Preuve : en classe.

Loi de Poisson bivariée Teicher

F.g.p. conjointe de (M_1,M_2) :

$$P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) = E\left[t_1^{M_2} t_2^{M_1}\right] = \mathrm{e}^{(\lambda_1-\alpha_0)(t_1-1)}\mathrm{e}^{(\lambda_2-\alpha_0)(t_2-1)}\mathrm{e}^{\alpha_0(t_1t_2-1)}.$$

Preuve : en classe.

Loi de Poisson bivariée Teicher

Covariance :

$$\mathrm{Cov}\left(M_1,M_2\right) = \mathrm{Var}\left(M_0\right) = \alpha_0.$$

Preuve : en classe.

Loi de Poisson bivariée Teicher

On déduit que $0 \leq \rho_P(M_1,M_2) \leq \frac{\min(\lambda_1;\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}$.

Question : Est-ce que la valeur $\rho_P(M_1,M_2) = 1$ peut être atteinte ?

Réponse : en classe.
Question : Est-ce que la valeur $\rho_P(M_1,M_2 = -1$ peut être atteinte ?

Réponse : en classe.

Cette loi introduit seulement une dépendance positive au sein de (M_1,M_2).

Loi de Poisson bivariée Teicher

Espérance conditionnelle :

$$E\left[M_1 | M_2 = m_2\right] = \left(\lambda_1 - \alpha_0\right) + \frac{\alpha_0}{\lambda_2} m_2.$$

Preuve : en classe.

Loi de Poisson bivariée Teicher

On utilise la notation $(M_1, M_2) \sim PBiv(\lambda_1, \lambda_2, \alpha_0)$ avec $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$, $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; \lambda_2)$.

Loi de Poisson bivariée Teicher

Question : On définit $N = M_1 + M_2$. Quelle est la loi de N ? Expliquer comment l'algorithme de Panjer pourrait être utile pour calculer les valeurs de la fonction de masse de probabilité de N.

Réponse : en classe.

Loi de Poisson bivariée Teicher

Question : Est-ce que cette loi inclut l'indépendance comme cas particulier ?

Réponse : en classe.

Question : Est-ce que cette loi inclut la comonotonicité comme cas particulier ?

Réponse : en classe.

Question : Est-ce que cette loi inclut l'antimonotonicité comme cas particulier ?

Réponse : en classe.

Loi de Poisson bivariée Teicher

Exemple : en classe.

Loi Poisson multivariée

On adapte la méthode de construction par choc commun pour définir la distribution Poisson multivariée de Teicher.

On fixe les paramètres $\lambda_1,...,\lambda_n > 0$.

Soit les v.a. indépendantes

$$\begin{aligned} K_0 &\sim Pois\left(\gamma_0\right) \\ K_1 &\sim Pois\left(\gamma_1\right) \\ &\dots \\ K_n &\sim Pois\left(\gamma_n\right) \end{aligned}$$

avec $0 \leq \gamma_0 \leq \min\left(\lambda_1;...;\lambda_n\right)$, $\gamma_i = \lambda_i - \gamma_0$ $(i = 1,2,...,n)$.

Loi Poisson multivariée

Construction

On adopte la convention suivante : si $K_i \sim Pois(0)$, alors $K_i = 0$.

On définit le vecteur de v.a. $\underline{M}^{(\gamma_0)} = \left(M_1^{(\gamma_0)},...,M_n^{(\gamma_0)}\right)$ où

$$\begin{aligned} M_1^{(\gamma_0)} &= K_1 + K_0 \\ &\dots \\ M_n^{(\gamma_0)} &= K_n + K_0. \end{aligned}$$

On déduit

$$M_i^{(\gamma_0)} \sim Pois(\lambda_i),$$

pour $i = 1,2,...,n$.

Le vecteur de v.a. $\underline{M}^{(\gamma_0)}$ obéit à une loi Poisson multivariée de Teicher avec une fonction de répartition $F_{\underline{M}^{(\gamma_0)}}$ et une fgp conjointe

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\underline{M}^{(\gamma_0)}}(r_1,\ldots,r_n) &= E\left[r_1^{M_1^{(\gamma_0)}} \times \ldots \times r_n^{M_n^{(\gamma_0)}}\right] \\
&= \mathrm{e}^{\gamma_0\left(\Pi_{i=1}^n r_i - 1\right)} \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{(\lambda_i - \gamma_0)(r_i - 1)},
\end{aligned}
$$

pour $r_i \in [0,1]$, $i = 1,\ldots,n$.

La fonction de masse de probabilité est

$$f_{\underline{M}^{(\gamma_0)}}(m_1,\ldots,m_n) = \sum_{j=0}^{\min(m_1;\ldots;m_n)} \left(\mathrm{e}^{-\gamma_0} \frac{(\gamma_0)^j}{j!} \times \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-(\lambda_i-\gamma_0)} \frac{(\lambda_i-\gamma_0)^{m_i-j}}{(m_i-j)!} \right),$$

pour $(m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{N}^n$.

La fonction de répartition marginale de $M_i^{(\gamma_0)}$ est notée par $F_{M_i^{(\gamma_0)}} = F_i$, pour $i = 1,2,\ldots,n$.

Soit la classe de Fréchet $\mathcal{CF}\left(F_1,\ldots,F_n\right)$ générée par les fonctions de répartition marginales des lois de Poisson avec les paramètres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Alors, on sait

- $F_{\underline{M}^{(\gamma_0)}} \in \mathcal{CF}\left(F_1,\ldots,F_n\right)$;
- $F_{\underline{M}^{(0)}} = F_{\underline{M}^{\perp}}$ (composantes indépendantes) ;

Loi Poisson multivariée

Construction

- Bornes inférieures et supérieures de Fréchet :

$$W(m_1,...,m_n) \leq F_{\underline{M}(\gamma_0)}(m_1,...,m_n) \leq M(m_1,...,m_n)$$

où

$$W(m_1,...,m_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} F_i(m_i) - (n-1)\,;0\right)$$

et

$$M(m_1,...,m_n) = \min\left(F_1(m_1)\,;...;F_1(m_1)\right),$$

pour tout $(m_1,...,m_n) \in \mathbb{N}^n$;

- $M(m_1,...,m_n)$ = fonction de répartition

$$M(m_1,...,m_n) = F_{\underline{M}^+}(m_1,...,m_n)$$

(composantes comonotones) ;

- $M(m_1,...,m_n)$ = fonction de répartition seulement si $n = 2$

$$M(m_1,m_2) = F_{\underline{M}^-}(m_1,m_2)$$

(composantes antimonotones) ;

- Soit $\lambda_i = \lambda$, $i = 1,2,...,n$. Alors, $F_{\underline{M}^{(\lambda)}} = F_{\underline{M}^+}$.

Soit la fonction stop-loss d'une v.a. discrète
$\pi_M(k) = E[\max(M - k; 0)]$, $k \in \mathbb{N}$.

- On considère une portefeuille $n = 2$.
- On fixe $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = 10$.
- On définit les v.a. $S^{(\gamma_0)} = M_1^{(\gamma_0)} + M_2^{(\gamma_0)}$ (avec $\gamma_0 \in [0,5]$) $S^+ = M_1^+ + M_2^+$, $S^- = M_1^- + M_2^-$, et $S^\perp = M_1^\perp + M_2^\perp$.

On observe que

$$
\begin{aligned}
f_{M_1^+,M_2^+}(m_1,m_2) &= F_{M_1^+,M_2^+}(m_1,m_2) - F_{M_1^+,M_2^+}(m_1-1,m_2) \\
&\quad - F_{M_1^+,M_2^+}(m_1,m_2-1) + F_{M_1^+,M_2^+}(m_1-1,m_2-1)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
f_{M_1^-,M_2^-}(m_1,m_2) &= F_{M_1^-,M_2^-}(m_1,m_2) - F_{M_1^-,M_2^-}(m_1-1,m_2) \\
&\quad - F_{M_1^-,M_2^-}(m_1,m_2-1) + F_{M_1^-,M_2^-}(m_1-1,m_2-1)
\end{aligned}
$$

pour $(m_1,m_2) \in \mathbb{N}^2$, avec $F_{M_1^+,M_2^+}(m_1,m_2) = F_{M_1^-,M_2^-}(m_1,m_2) = 0$, si $m_1 = -1$ ou $m_2 = -1$.

Les espérances sont

$$E\left[M_1^+ M_2^+\right] = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} m_1 m_2 f_{M_1^+, M_2^+}\left(m_1, m_2\right)$$

et

$$E\left[M_1^- M_2^-\right] = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} m_1 m_2 f_{M_1^-, M_2^-}\left(m_1, m_2\right)$$

Les coefficients de corrélation de Pearson sont

$$\rho_P\left(M_1^+, M_2^+\right) = \frac{Cov\left(M_1^+, M_2^+\right)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}$$

$$\rho_P\left(M_1^-, M_2^-\right) = \frac{Cov\left(M_1^-, M_2^-\right)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}$$

et

$$\rho_P\left(M_1^{(\gamma_0)}, M_2^{(\gamma_0)}\right) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}.$$

Loi Poisson multivariée

Exemple no1

De plus, on a

$$f_{S^+}(k) = \sum_{j=0}^{k} f_{M_1^+, M_2^+}(j, k-j)$$

et

$$f_{S^-}(k) = \sum_{j=0}^{k} f_{M_1^-, M_2^-}(j, k-j).$$

À l'aide des fgp, on démontre que

$$S^{\perp} \sim Pois\left(\lambda = 15\right)$$

et

$$S^{(\gamma_0)} \sim PoisComp\left(\lambda = 15 - \gamma_0; F_C\right)$$

où la v.a. $C \in \{1,2\}$ avec $\Pr\left(C = 1\right) = \frac{15-2\gamma_0}{15-\gamma_0}$ et $\Pr\left(C = 2\right) = \frac{\gamma_0}{15-\gamma_0}$.

Les valeurs de coefficients de corrélation de Pearson sont fournies dans le tableau suivant :

$\rho_P\left(M_1^-, M_2^-\right)$	$\rho_P\left(M_1^{(0)}, M_2^{(0)}\right)$	$\rho_P\left(M_1^{(1)}, M_2^{(1)}\right)$	$\rho_P\left(M_1^{(3)}, M_2^{(3)}\right)$	$\rho_P\left(M_1^{(5)}, M_2^{(5)}\right)$	$\rho_P\ ($
-0.9705450	0.0000000	0.1414214	0.4242641	0.7071068	0.986

Les valeurs des fonctions *stop-loss* sont fournies dans le tableau suivant :

k	$\pi_{S^-}(k)$	$\pi_{S^{(0)}}(k)$	$\pi_{S^{(1)}}(k)$	$\pi_{S^{(3)}}(k)$	$\pi_{S^{(5)}}(k)$	$\pi_{S^+}(k)$
0	15.00000	15.00000	15.00000	15.00000	15.00000	15.00000
5	10.00000	10.00111	10.00195	10.00533	10.01227	10.02039
10	5.00000	5.13684	5.17109	5.24871	5.33439	5.41195
15	0.39777	1.53654	1.63612	1.82009	1.98761	2.12844
20	0.00278	0.21230	0.26768	0.37618	0.48167	0.57795
30	0.00000	0.00036	0.00098	0.00347	0.00790	0.01472
40	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00003	0.00010
50	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Distributions multivariées continues

Soit un vecteur de n v.a. continues $\underline{X} = (X_1,\ldots,X_n)$. La fonction de densité conjointe de $\underline{X}$ est définie par

$$f_{\underline{X}}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F_{\underline{X}}(x_1,\ldots,x_n).$$

La fonction de densité conjointe $f_{\underline{X}}$ prend des valeurs positives qui peuvent être supérieures à 1 telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = 1.$$

Une interprétation heuristique de la fonction de densité conjointe est

$$f_{\underline{X}}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n \simeq \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in (x_i, x_i+\mathrm{d}x_i]\right).$$

Notamment, on a

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in (a_i,b_i]\right) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_{\underline{X}}(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n,$$

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\, f_{\underline{X}}(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n,$$

et

$$E\left[g(X_1,\dots,X_n)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\dots,x_n)\, f_{\underline{X}}(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n.$$

Distributions multivariées continues

L'expression de la fgm multivariée est donnée par

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}(t_1,...,t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{t_1 x_1} ... \mathrm{e}^{t_n x_n} f_{\underline{X}}(x_1,...,x_n)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n.$$

Soit $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ un vecteur de v.a. continues positives.

Alors, l'expression de la TLS multivariée de $\underline{X}$ est

$$\mathcal{L}_{\underline{X}}(t_1,...,t_n) = \int_0^\infty ... \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t_1 x_1} ... \mathrm{e}^{-t_n x_n} f_{\underline{X}}(x_1,...,x_n)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n,$$

pour $t_i \geq 0$, $i = 1,2,...,n$.

Distributions multivariées continues

Il existe un grand nombre de distributions multivariées continues.

Loi normale multivariée

Loi normale multivariée

Définition

On considère la loi normale multivariée pour le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1,...,X_n)^t$ avec le vecteur des moyennes $\underline{\mu} = (\mu_1,...,\mu_n)^t$ et la matrice variance-covariance

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix},$$

où $\underline{\Sigma}$ est une matrice semi-définie positive et $()^t$ désigne la transposée d'une matrice ou d'un vecteur.

Loi normale multivariée

Définition

Notation : $\underline{X} \sim NormMV\left(\underline{\mu},\underline{\Sigma}\right)$.
En outre, $E\left[X_i\right] = \mu_i$, $\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \sigma_i^2$ $\left(i = 1,2,\ldots,n\right)$ et

$$\mathrm{Cov}\left(X_i,X_{i'}\right) = \sigma_{i,i'} = \rho_{i,i'}\sigma_i\sigma_{i'},$$

$\left(i,\ i' = 1,2,\ldots,n\right)$, où

$$\rho_{i,i'} = \rho\left(X_i,X_{i'}\right) = \frac{\mathrm{Cov}\left(X_i,X_{i'}\right)}{\sigma_i\sigma_{i'}} \in \left[-1,1\right]$$

est le coefficient de corrélation de Pearson de la paire $\left(X_i,X_{i'}\right)$.

Remarques importantes :

- $n = 2,3,4,...$: pour tout (i,i'), les valeurs maximales de $\rho_{i,i'} = 1$ (comotonone) ;
- $n = 2$: pour tout (i,i'), les valeurs minimales de $\rho_{i,i'} = -1$ (antimotonone) ;
- $n = 3,4,...$: pour tout (i,i'), les valeurs minimales de $\rho_{i,i'}$ dépend des valeurs de σ_1, ..., σ_n ;
- $n = 3,4,...$: il est impossible que $\rho_{i,i'} = -1$ pour tout couple (i,i') car la matrice $\underline{\Sigma}$ n'est plus semi-définie positive.

Loi normale multivariée

Définition

L'expression de la fonction de densité de $\underline{X}$ est

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\underline{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^t \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu})}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $|\underline{\Sigma}|$ est le déterminant de $\underline{\Sigma}$.

L'expression de la fonction de densité de $\underline{X} = (X, Y)$ est

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

La f.g.m. multivariée de $\underline{X}$ est

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}\left(\underline{s}\right) = \mathrm{e}^{\underline{s}^t \underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{s}^t \underline{\Sigma s}}.$$

On a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{X_1,\ldots,X_n}(s_1,\ldots,s_n) &= \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} s_i\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} s_i s_{i'}\sigma_{i,i'}} \\ &= \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} s_i\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} s_i s_{i'}\rho_{i,i'}\sigma_i\sigma_{i'}}.\end{aligned}$$

Dans le cas univarié, pour une v.a. $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, on a la relation $X = \mu + \sigma Z$, où $Z \sim N(0,1)$.

Dans le cas multivarié, la relation devient

$$\underline{X} = \underline{\mu} + \underline{\sigma}^t \underline{Z}, \tag{14}$$

où $\underline{\sigma}^t = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ et $\underline{Z}$ obéit à une loi normale multivariée standard avec un vecteur de moyenne $(0, \ldots, 0)^t$ et une matrice variance-covariance

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

La fonction de répartition conjointe de $\underline{Z}$ est désignée par le symbole $\overline{\Phi}_{\underline{\rho}}$ de telle sorte que

$$\overline{\Phi}_{\underline{\rho}}\left(x_1,\ldots,x_n\right) = F_{Z_1,\ldots,Z_n}\left(x_1,\ldots,x_n\right).$$

De plus, pour $\underline{X} = \underline{\mu} + \underline{\sigma}^t \underline{Z}$, l'expression de la fonction de répartition conjointe de $\underline{X}$ est donnée par

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \overline{\Phi}_{\underline{\rho}}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1},\ldots,\frac{x_n - \mu_n}{\sigma_n}\right).$$

L'algorithme de simulation de réalisations pour la loi normale multivariée standard se décrit comme suit.

Algorithme 7

Algorithme de simulation pour la loi normale multivariée standard. *Soit un vecteur de v.a.* $(Z_1,\ldots,Z_n)$ *de loi normale multivariée avec* $Z_i \sim N(0,1)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ *et une matrice de corrélation (supposée définie positive)*

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Algorithme (suite)

On peut écrire $\underline{\rho} = \underline{B}\ \underline{B}^t$ où $\underline{B}^t$ est la matrice transposée de la matrice $\underline{B}$. La matrice $\underline{B}$ est obtenue à l'aide de la décomposition de Choleski

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

où

$$b_{ij} = \frac{\rho_{ij} - \sum_{l=1}^{j-1} b_{il} b_{jl}}{\sqrt{1 - \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl}^2}},$$

où $1 \leq j \leq i \leq n$ *et* $\sum_{l=1}^{0} () = 0$.

Algorithme (suite)

1. *On génère des réalisations* $Y_1^{(j)},\ldots,Y_n^{(j)}$ *des v.a.* $Y_1,\ldots,Y_n$ *indépendantes de loi normale standard.*
2. *On calcule* $\underline{Z}^{(j)} = \underline{B}\ \underline{Y}^{(j)}$ *où* $\underline{Z}^{(j)} = \left(Z_1^{(j)},\ldots,Z_n^{(j)}\right)^T$ *et* $\underline{Y}^{(j)} = \left(Y_1^{(j)},\ldots,Y_n^{(j)}\right)^T$.

Soit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
La fgm de la v.a. S est

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(s) &= E\left[e^{sS}\right] \\
&= E\left[e^{s(X_1+\ldots+X_n)}\right] \\
&= E\left[e^{sX_1}\ldots e^{sX_n}\right] \\
&= \mathcal{M}_{X_1,\ldots,X_n}(s,\ldots,s).
\end{aligned}$$

On obtient

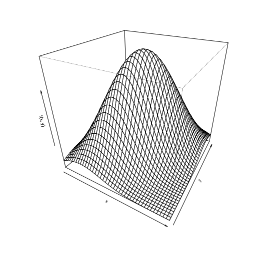
$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(s) &= E\left[e^{sS}\right] \\
&= \mathcal{M}_{X_1,\ldots,X_n}(s,\ldots,s) \\
&= e^{\sum_{i=1}^{n}s\mu_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n}s^2\rho_{i,i'}\sigma_i\sigma_{i'}} \\
&= e^{s\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)+\frac{1}{2}s^2\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n}\rho_{i,i'}\sigma_i\sigma_{i'}\right)} \\
&= e^{s\mu_S+\frac{1}{2}s^2\sigma_S^2}.
\end{aligned}$$

Alors, à l'aide de la f.g.m. de $\underline{X}$, on déduit que $S \sim N\left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$ où $\mu_S = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ et

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i'=1, i' \neq i}^{n} \sigma_{ii'}.$$

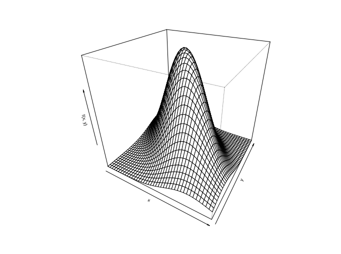
Exemple 1

Tracer $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$, *pour* $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ *et* $\rho_{1,2} = \rho_{2,1} = 0.6$.



Exemple 2

Tracer $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$, *pour* $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ *et* $\rho_{1,2} = \rho_{2,1} = -0.6$.



Exemple 3

Soit $\underline{X} = (X_1,...,X_n) \sim NormMV\left(\underline{\mu},\underline{\Sigma}\right)$ *avec* $\mu_i = 0$, $i = 1,2,...,n$, *et* $\sigma_{i,i'} = 1$, *pour toutes les paires* (i,i'), *avec* $i,j \in \{1,2,...,n\}$. *Identifier la loi de* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exemple 4

Soit $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim NormMV\left(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}\right)$ *avec* $\mu_i = 0$ *(*$i = 1, 2, \ldots, n$*),* $\sigma_{i,i} = 1$ *(*$i = 1, 2, \ldots, n$*), et* $\sigma_{i,i'} = -\frac{1}{n-1}$ *(pour toutes les paires* (i, i')*, avec* $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*). Identifier la loi de* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exemple 5

Soit $\underline{X} = (X_1,X_2,X_3) \sim NormMV\left(\underline{\mu},\underline{\Sigma}\right)$ *avec* $\mu_i = 0$ *(*$i = 1,2,3$*),* $\sigma_{i,i} = 1$ *(*$i = 1,2,\ldots,n$*),* $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = 0.2$*,* $\sigma_{1,3} = \sigma_{3,1} = 0.3$ *et* $\sigma_{2,3} = \sigma_{3,2} = 0.5$*. Questions :*

1. *Effectuer la décomposition de Choleski.*
2. *Soit les v.a. indépendantes* (W_1,W_2,W_3) *avec* $W_i \sim Norm(0,1)$*,* $i = 1,2,3$*. La première réalisation* $\left(W_1^{(1)},W_2^{(1)},W_3^{(1)}\right)$ *de* (W_1,W_2,W_3) *est la suivante :* $(0.31,-1.62,2.05)$*. Calculer la réalisation* $\left(X_1^{(1)},X_2^{(1)},X_3^{(1)}\right)$ *de* (X_1,X_2,X_3)*.*
3. *Set.seed(2018). Effectuer 1000 réalisations de* (X_1,X_2,X_3)*. Représenter ces réalisations dans un graphique 3-D.*

Exemple 6

Soit $\underline{X} = (X_1,...,X_n) \sim NormMV\left(\underline{\mu},\underline{\Sigma}\right)$ *avec* $\mu_i = 0$ *(*$i = 1,2,...,n$*),* $\sigma_{i,i} = 1$ *(*$i = 1,2,...,n$*), et* $\sigma_{i,i'} = a \in \left[-\frac{1}{n-1},1\right]$ *(pour toutes les paires* (i,i')*, avec* $i \neq j \in \{1,2,...,n\}$*). Identifier la loi de* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$*.*

Exemple 7

Soit $\underline{X} = (X_1,...,X_n) \sim NormMV\left(\underline{\mu},\underline{\Sigma}\right)$ *avec* $\mu_i = 0$ *(*$i = 1,2,...,n$*),* $\sigma_{i,i} = 1$ *(*$i = 1,2,...,n$*), et* $\sigma_{i,i'} = a^{|i-i'|}$ *avec* $a \in [0,1]$ *(pour toutes les paires* (i,i')*, avec* $i \neq j \in \{1,2,...,n\}$*). Identifier la loi de* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

C. Fréchet et m. exponentielles

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

Nombre de risques : $n = 2$
Marginales : $F_i\left(x_i\right) = 1 - \exp\left(-\beta_i x_i\right)$, $x_i \geq 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1{,}2$
Soit un couple de v.a. $\left(X_1{,}X_2\right)$ avec $F_{X_1,X_2} \in CF\left(F_1{,}F_2\right)$.

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

Signification :

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_1(x_1)$$

et

$$F_{X_2}(x_2) = \lim_{x_1\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_2(x_2)$$

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

Bornes de Fréchet : pour tout $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1,F_2)$, on observe

$$W(x_1,x_2) \leq F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \leq M(x_1,x_2), \ (x_1,x_2) \in [0,\infty)^2$$

où

$$W(x_1,x_2) = \max\left(1 - e^{-\beta_1 x_1} - e^{-\beta_1 x_1}; 0\right) = \text{borne inférieure de Fréchet}$$

et

$$M(x_1,x_2) = \min\left(1 - e^{-\beta_1 x_1}; 1 - e^{-\beta_1 x_1}\right) = \text{borne supérieure de Fréchet}$$

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

Important : puisque $n = 2$, on a

$$W \in \mathcal{CF}\left(F_1, F_2\right)$$

et $W =$ fonction de répartition du couple de v.a. antimonotones

Important : pour tout $n = 2, 3, \ldots$, on a

$$M \in \mathcal{CF}\left(F_1, F_2\right)$$

et $M =$ fonction de répartition du couple de v.a. comonotones

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

La valeur maximale de $\rho_P(X_1,X_2)$ sur $\mathcal{CF}(F_1,F_2)$ est atteinte quand X_1 et X_2 sont comonotones avec

$$\rho_P(X_1,X_2) = 1$$

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

La valeur minimale de ρ_P sur $\mathcal{CF}(F_1,F_2)$ est atteinte quand X_1 et X_2 sont antimonotones avec

$$\rho_P(X_1,X_2) = 1 - \frac{\pi^2}{6}$$

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

Soit (X_1, X_2) avec

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = W(x_1, x_2) = \max\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}; 0\right)$$

et

$$X_1 = F_1^{-1}(U) \text{ et } X_1 = F_2^{-1}(1 - U)$$

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\rho_P(X_1,X_2) &= \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} \\
&= \frac{E[X_1X_2]-E[X_1]E[X_2]}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} \\
&= \frac{\frac{1}{\beta_1}\frac{1}{\beta_2}E[\ln(1-U)\ln(U)]-\frac{1}{\beta_1}\frac{1}{\beta_2}}{\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}\frac{1}{\beta_2^2}}} \\
&= E[\ln(1-U)\ln(U)]-1.
\end{aligned}$$

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

Or, on déduit

$$
\begin{aligned}
& E\left[\ln(1-U)\ln(U)\right]-1 \\
= \quad & \int_0^1 \ln(1-u)\ln(u)\,\mathrm{d}u-1 \\
= \quad & u\ln(1-u)\ln(u)\Big|_0^1+\int_0^1 \frac{u}{1-u}\ln(u)\,\mathrm{d}u \\
& -\int_0^1 \frac{u}{u}\ln(1-u)\,\mathrm{d}u-1 \\
= \quad & 0-0+\int_0^1 \frac{u-1+1}{1-u}\ln(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^1 \ln(1-u)\,\mathrm{d}u-1 \\
= \quad & -\int_0^1 \frac{1-u}{1-u}\ln(u)\,\mathrm{d}u+\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u \\
& -\int_0^1 \ln(1-u)\,\mathrm{d}u-1 \\
= \quad & -\int_0^1 \ln(u)\,\mathrm{d}u+\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u-\int_0^1 \ln(1-u)\,\mathrm{d}u-1
\end{aligned}
$$

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

Ensuite, on a

$$
\begin{aligned}
E\left[\ln(1-U)\ln(U)\right]-1 &= -\int_0^1 \ln(u)\,\mathrm{d}u+\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u \\
&\quad -\int_0^1 \ln(1-u)\,\mathrm{d}u-1 \\
&= 1+\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u+1-1 \\
&= 1+\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

Puis,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} \mathrm{d}u &= \int_0^1 \ln(u) \left(\sum_{k=0}^{\infty} u^k \right) \mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 u^k \ln(u) \, \mathrm{d}u \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}
$$

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

Euler a montré que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

qui correspond à la formule de zeta-Riemann (évaluée).

Classe de Fréchet avec marginales exponentielles

Finalement,

$$\begin{aligned}\rho_P(X_1,X_2) &= E[\ln(1-U)\ln(U)]-1\\ &= 1+\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u\\ &= 1-\frac{\pi^2}{6} = -0.644\,93\end{aligned}$$

Loi exponentielle bivariée FGM

Loi exponentielle bivariée FGM

La fonction de répartition de la loi exponentielle bivariée EFGM est donnée par

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) + \theta\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}, \quad (15)$$

avec un paramètre de dépendance $-1 \leq \theta \leq 1$ et avec $\beta_i > 0$.

On déduit que les lois marginales de X_1 et X_2 sont exponentielles c.-à-d. $X_i \sim Exp(\beta_i)$ $(i = 1,2)$.

Cette loi inclut l'indépendance comme cas particulier avec $\theta = 0$.

Loi exponentielle bivariée FGM

La fonction de densité conjointe est

$$
\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= (1+\theta)\,\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} \beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} + \theta 2\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1} 2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2} \\
&\quad - \theta 2\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1} \beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} - \theta \beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} 2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2}.
\end{aligned}
$$

Cette distribution bivariée admet une relation de dépendance modérée, qui peut être positive ou négative.

Elle peut être interprétée sous la forme d'une perturbation de la loi exponentielle bivariée avec indépendance.

Le coefficient de corrélation de Pearson est $\rho_P(X_1,X_2) = \frac{\theta}{4}$.

Note : $\rho_P(X_1,X_2) \in [-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$

La fgm conjointe de (X_1, X_2) est

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= (1+\theta)\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t_2}\right) \\
&- \theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t_2}\right) \\
&- \theta\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2-t_2}\right) \\
&+ \theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2-t_2}\right).
\end{aligned}
$$

Loi exponentielle bivariée FGM

On définit $S = X_1 + X_2$.

On veut identifier F_S.

2 approches :

1. produit de convolution
2. fgm

Approche avec le produit de convolution :
On utilise

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x,s-x) &= (1+\theta)\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x}\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2(s-x)} \\ &+ \theta 2\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_1 x} 2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_2(s-x)} \\ &- \theta 2\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_1 x}\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2(s-x)} \\ &- \theta\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x} 2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_2(s-x)}, \end{aligned}$$

On déduit l'expression de $F_S(s)$:

$$\begin{aligned} F_S(s) &= (1+\theta) G(s;\beta_1;\beta_2) + \theta G(s;2\beta_1;2\beta_2) \\ &- \theta G(s;2\beta_1;\beta_2) - \theta G(s;\beta_1;2\beta_2), \end{aligned}$$

où

$$G(s;\gamma_1,\gamma_2) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\gamma x}\sum_{j=0}^{1}\frac{(\gamma x)^j}{j!}, & \gamma_1=\gamma_2=\gamma \\ \sum_{i=1}^{2}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{2}\frac{\gamma_j}{\gamma_j-\gamma_i}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\gamma_i x}\right), & \gamma_1\neq\gamma_2 \end{cases}.$$

Ainsi, la distribution de S est une combinaison linéaire de lois Erlang ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$) ou de lois Erlang généralisées ($\gamma_1 \neq \gamma_2$).

On déduit l'expression de $TVaR_\kappa(S)$

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= \frac{1}{1-\kappa}(1+\theta)\zeta(VaR_\kappa(S);\beta_1,\beta_2) \\ &+ \frac{1}{1-\kappa}\theta\zeta(VaR_\kappa(S);2\beta_1,2\beta_2) \\ &- \frac{1}{1-\kappa}\theta\zeta(VaR_\kappa(S);2\beta_1,\beta_2) \\ &- \frac{1}{1-\kappa}\theta\zeta(VaR_\kappa(S);\beta_1,2\beta_2), \end{aligned}$$

où

$$\zeta(b;\gamma_1,\gamma_2) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\gamma b}\sum_{j=0}^{2}\frac{(\gamma b)^j}{j!}, & \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \\ \sum_{i=1}^{2}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{2}\frac{\gamma_j}{\gamma_j-\gamma_i}\right)\mathrm{e}^{-\gamma_i b}\left(b+\frac{1}{\gamma_i}\right), & \gamma_1 \neq \gamma_2 \end{cases}.$$

Loi exponentielle bivariée M-O

Loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin

On considère trois v.a. indépendantes de loi exponentielle $Y_i \sim Exp(\lambda_i)$ pour $i = 0,1,2$.

On définit les v.a. X_1 et X_2 par $X_i = \min(Y_i; Y_0)$ pour $i = 1,2$.

Pour $i = 1,2$, on observe que

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_i}(x_i) &= \Pr(X_i > x_i) \\
&= \Pr(\min(Y_i; Y_0) > x_i) = \Pr(Y_i > x_i, Y_0 > x_i) \\
&= \Pr(Y_i > x_i)\Pr(Y_0 > x_i) \\
&= \overline{F}_{Y_i}(x_i)\,\overline{F}_{Y_0}(x_i) = \exp(-(\lambda_i + \lambda_0)\,x_i),
\end{aligned}$$

ce qui implique $X_i \sim Exp(\lambda_i + \lambda_0)$, $i = 1,2$.

Loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin

La fonction de survie de (X_1,X_2) est donnée par

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\
&= \Pr(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, Y_0 > \max(x_1; x_2)) \\
&= \Pr(Y_1 > x_1) \Pr(Y_2 > x_2) \Pr(Y_0 > \max(x_1; x_2)) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1} \mathrm{e}^{-\lambda_2 x_2} \mathrm{e}^{-\lambda_0 \max(x_1; x_2)} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_0) x_1} \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_0) x_2} \mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1; x_2)}.
\end{aligned}
$$

Loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin

On fixe $\beta_i = \lambda_i + \lambda_0$ $(i = 1{,}2)$ et $0 \leq \lambda_0 \leq \min(\beta_1; \beta_2)$.

Alors, l'expression de la fonction de survie de $(X_1{,}X_2)$ devient

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1{,}x_2) &= \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} \\ &= \overline{F}_{X_1}(x_1)\,\overline{F}_{X_2}(x_2)\,\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)},\end{aligned}$$

qui permet de déduire que la loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin est une forme de perturbation de la loi exponentielle bivariée supposant l'indépendance.

Cette loi incorpore une relation de dépendance positive seulement.

Loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin

La fonction de densité de (X_1,X_2) est

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \beta_1 e^{-\beta_1 x_1} (\beta_2 - \lambda_0) e^{-(\beta_2-\lambda_0)x_2}, & x_1 > x_2, \\ (\beta_1 - \lambda_0) e^{-(\beta_1-\lambda_0)x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2}, & x_1 < x_2, \\ \lambda_0 e^{-\beta_1 x} e^{-\beta_2 x} e^{\lambda_0 x}, & x_1 = x_2 = x, \end{cases}$$

avec une singularité sur la diagonale $x_1 = x_2 = x$.

Le coefficient de corrélation de Pearson est $\rho_P(X_1,X_2) = \frac{\lambda_0}{\beta_1+\beta_2-\lambda_0}$.

Loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin

La méthode utilisée pour construire la loi bivariée exponentielle Marshall-Olkin est appelée la méthode *choc commun* et elle s'adapte aisément afin de construire des lois exponentielles multivariées.

Loi gamma bivariée CRMM

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

Paramètres :

- $\alpha_1,\beta_1 > 0$, $\alpha_2,\beta_2 > 0$
- $\gamma_0 = 0$ (indépendance), $\gamma_0 \in (0, \min(\alpha_1; \alpha_2)]$ (dépendance positive)

Support : $(x_1,x_2) \in [0,\infty)^2$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

Fgm conjointe :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= \left(1-\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{-(\alpha_1-\gamma_0)}\left(1-\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2-\gamma_0)} \\ &\quad\times\left(1-\frac{t_1}{\beta_1}-\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0}.\end{aligned}$$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

Coefficient de corrélation de Pearson : $\rho_P(X_1,X_2) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}$

$F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1,F_2)$ avec $F_i(x) = H(x_i;\alpha_i,\beta_i) =$ fonction de répartition d'une loi gamma de paramètres (α_i,β_i), $i = 1,2$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

On définit $S = X_1 + X_2$
Alors, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= \mathcal{M}_{X_1,X_2}(t,t) \\
&= \left(1 - \frac{t}{\beta_1}\right)^{-(\alpha_1-\gamma_0)} \left(1 - \frac{t}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2-\gamma_0)} \times \left(1 - \frac{t}{\beta_1} - \frac{t}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0}.
\end{aligned}$$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

On fixe $\beta_1 < \beta_2$.
On définit $\beta_{1,2}$ de telle sorte que

$$\frac{1}{\beta_{1,2}} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \Leftrightarrow \beta_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}}$$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

On peut montrer

$$\beta_{1,2} < \beta_2$$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

On veut identifier F_S.
On pose

$$q_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

et

$$q_{1,2} = \frac{\beta_{1,2}}{\beta_2}$$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

On utilise les transformations suivantes :

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)} = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)} \left(\frac{q_1}{1-(1-q_1)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)}$$

et

$$\left(\frac{\beta_{1,2}}{\beta_{1,2} - t}\right)^{\gamma 0} = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t}\right)^{\gamma_0} \left(\frac{q_{1,2}}{1-(1-q_{1,2})\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)}\right)^{\gamma_0}$$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

On note $\eta(k; r, q)$ est la fonction de masse de probabilité d'une loi binomiale négative (r, q).
On définit

$$J_1 \sim BN(r_1, q_1) \text{ (avec } r_1 = \alpha_1 - \gamma_0\text{)}$$

$$J_{1,2} \sim BN(r_{1,2}, q_{1,2}) \text{ (avec } r_{1,2} = \gamma_0\text{)}$$

et

$$K = J_1 + J_{1,2}.$$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

La fonction de masse de probabilité de la v.a. K est calculée avec

$$\begin{aligned}
\Pr(K = k) &= \sum_{j=0}^{k} \Pr(J_1 = j) \Pr(J_{1,2} = k - j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \eta(j; r_1, q_1)\, \eta(k - j; r_{1,2}, q_{1,2})
\end{aligned}$$

pour $k = 0,1,2,...$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

On développe

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= \mathcal{M}_{X_1,X_2}(t,t) = \left(1-\frac{t}{\beta_1}\right)^{-(\alpha_1-\gamma_0)}\left(1-\frac{t}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2-\gamma_0)} \times \left(1-\frac{t}{\beta_1}-\frac{t}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0} \\
&= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)}\left(\frac{q_1}{1-(1-q_1)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)^{\gamma_0}\left(\frac{q_{1,2}}{1-(1-q_{1,2})\left(\right.}\right. \\
&= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)+(\alpha_2-\gamma_0)+\gamma_0}\left(\frac{q_1}{1-(1-q_1)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)}\left(\frac{q_{1,2}}{1-(1-q_{1,2})\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)}\right)^{\gamma_0} \\
&= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)+(\alpha_2-\gamma_0)+\gamma_0}\mathcal{P}_{J_1}\left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)\right)\mathcal{P}_{J_{1,2}}\left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)+(\alpha_2-\gamma_0)+\gamma_0}\mathcal{P}_K\left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

On développe

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= \mathcal{M}_{X_1,X_2}(t,t) = \left(1-\frac{t}{\beta_1}\right)^{-(\alpha_1-\gamma_0)}\left(1-\frac{t}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2-\gamma_0)} \times \left(1-\frac{t}{\beta_1}-\frac{t}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0} \\
&= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)+(\alpha_2-\gamma_0)+\gamma_0} \mathcal{P}_K\left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)^{(\alpha_1-\gamma_0)+(\alpha_2-\gamma_0)+\gamma_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_K(k)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_K(k)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-\gamma_0+k}
\end{aligned}$$

Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

On déduit

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_K(k)\, H(x; \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_0 + k, k)$$

Loi gamma multivariée CRMM

Loi gamma multivariée CRMM

Construction

On adapte la méthode de construction par choc commun pour définir la distribution Gamma multivariée de CRMM.
On fixe les paramètres $\alpha_1,...,\alpha_n > 0$ et $\beta_1,...,\beta_n > 0$.
Soit les v.a. indépendantes

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \sim & Gamma\left(\gamma_0,1\right) \\ Y_1 & \sim & Gamma\left(\gamma_1,1\right) \\ & & \ldots \\ Y_n & \sim & Gamma\left(\gamma_n,1\right) \end{array}$$

avec $0 \leq \gamma_0 \leq \min\left(\alpha_1;...;\alpha_n\right)$, $\gamma_i = \alpha_i - \gamma_0$ $\left(i = 1,2,...,n\right)$.
On adopte la convention suivante : si $Y_i \sim Gamma\left(0,\beta\right)$, alors $Y_i = 0$.

On définit le vecteur de v.a. $\underline{X}^{(\gamma_0)} = \left(X_1^{(\gamma_0)}, \ldots, X_n^{(\gamma_0)}\right)$ où

$$
\begin{aligned}
X_1^{(\gamma_0)} &= \frac{1}{\beta_1}\left(Y_1 + Y_0\right) \\
&\cdots \\
X_n^{(\gamma_0)} &= \frac{1}{\beta_n}\left(Y_n + Y_0\right).
\end{aligned}
$$

En exercice, on déduit

$$X_i^{(\gamma_0)} \sim Gamma\left(\alpha_i, \beta_i\right),$$

pour $i = 1,2,\ldots,n$.
Le vecteur de v.a. $\underline{X}^{(\gamma_0)}$ obéit à une loi Gamma multivariée CRMM avec une fonction de répartition $F_{\underline{X}^{(\gamma_0)}}$.

En exercice, on obtient la TLS conjointe

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\underline{X}^{(\gamma_0)}}(t_1,\ldots,t_n) &= E\left[\mathrm{e}^{-t_1 X_1^{(\gamma_0)}} \times \ldots \times \mathrm{e}^{-t_n X_n^{(\gamma_0)}}\right] \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t_1}{\beta_1}+\ldots+\frac{t_n}{\beta_n}}\right)^{\gamma_0} \Pi_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\frac{t_i}{\beta_i}}\right)^{\gamma_i-\gamma_0},
\end{aligned}$$

pour $t_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,n$.

La fonction de répartition marginale de $X_i^{(\gamma_0)}$ est notée par $F_{X_i^{(\gamma_0)}} = F_i$, pour $i = 1,2,\ldots,n$.

Soit la classe de Fréchet $\mathcal{CF}(F_1,...,F_n)$ générée par les fonctions de répartition marginales des lois de Gamma avec les paramètres (α_1,β_1), ..., (α_n,β_n). Alors, on sait

- $F_{\underline{X}(\gamma_0)} \in \mathcal{CF}(F_1,...,F_n)$;
- $F_{\underline{X}^{(0)}} = F_{\underline{X}^{\perp}}$ (composantes indépendantes) ;
- bornes inférieures et supérieures de Fréchet :

$$W(x_1,...,x_n) \leq F_{\underline{X}(\gamma_0)}(x_1,...,x_n) \leq M(x_1,...,x_n)$$

où

$$W(x_1,...,x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - (n-1) ; 0\right)$$

et

$$M(x_1,...,x_n) = \min(F_1(x_1) ; ...; F_1(x_1)),$$

pour tout $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^+ \times ... \times \mathbb{R}^+$;

- $M(x_1,\ldots,x_n) =$ fonction de répartition

$$M(x_1,\ldots,x_n) = F_{\underline{X}^+}(x_1,\ldots,x_n)$$

(composantes comonotones) ;

- $M(x_1,\ldots,x_n) =$ fonction de répartition seulement si $n = 2$

$$M(x_1,x_2) = F_{\underline{X}^-}(x_1,x_2)$$

(composantes antimonotones) ;

- Soit $\alpha_i = \alpha$, $i = 1,2,\ldots,n$. Alors, $F_{\underline{X}^{(\alpha)}} = F_{\underline{X}^+}$.

On définit les v.a. suivantes :

$$\begin{aligned} S_n^{(\gamma_0)} &= X_1^{(\gamma_0)} + \ldots + X_n^{(\gamma_0)} \\ S_n^{+} &= X_1^{+} + \ldots + X_n^{+} \\ S_2^{-} &= X_1^{-} + X_2^{-} \\ S_n^{\perp} &= X_1^{\perp} + \ldots + X_n^{\perp}. \end{aligned}$$

On considère une portefeuille $n = 2$. On fixe $\alpha_1 = \beta_1 = 2$ et $\alpha_2 = \beta_2 = 3$.
Démontrer que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{S^{(\gamma_0)}}(t) &= \mathcal{L}_{\underline{X}^{(\gamma_0)}}(t,t) \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta_1}+\frac{t}{\beta_2}}\right)^{\gamma_0}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta_1}}\right)^{\alpha_i-\gamma_0}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta_2}}\right)^{\alpha_i-\gamma_0},
\end{aligned}
$$

pour $t \geq 0$.

À l'aide $\mathcal{L}_{S(\gamma_0)}(t)$, démontrer que

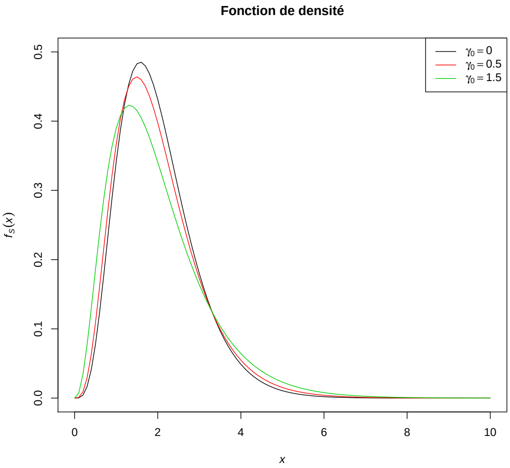
$$f_{S(\gamma_0)}(x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} p(k)\, h(x; a+k, \beta_2)$$

en indiquant la forme de $p(k)$, la valeur de a, et la valeur de k_0.

- Pour $\gamma_0 = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $f_{S^{(\gamma_0)}}(x)$, pour $x \geq 0$, sur un graphique.
- Pour $\gamma_0 = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $VaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$, pour $\kappa \in (0,1)$, sur un graphique.
- Pour $\gamma_0 = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $TVaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$, pour $\kappa \in (0,1)$, sur un graphique.

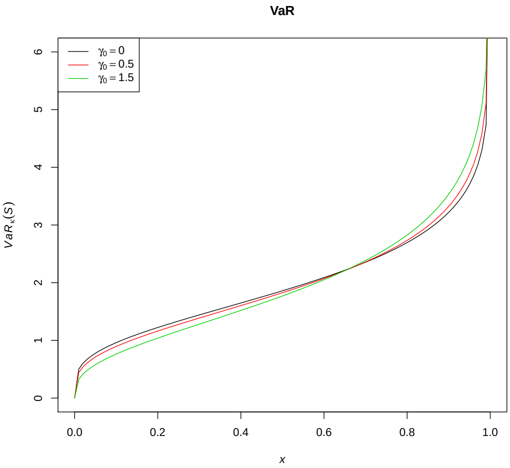
Loi gamma multivariée

Exemple no1



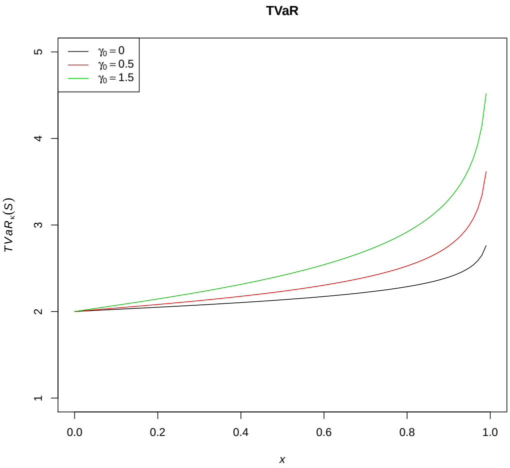
Loi gamma multivariée

Exemple no1



Loi gamma multivariée

Exemple no1



On fixe $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta = \alpha$, et $\gamma_0 = \gamma$.
On définit

$$\begin{aligned} W_n^{(\gamma_0)} &= \frac{1}{n} S_n^{(\gamma_0)} \\ W_n^{+} &= \frac{1}{n} S_n^{+} \\ W_n^{\perp} &= \frac{1}{n} S_n^{\perp}. \end{aligned}$$

Selon les paramètres choisis, on observe

$$E\left[W_n^{(\gamma_0)}\right] = E\left[W_n^{+}\right] = E\left[W_n^{\perp}\right] = 1$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$.

Démontrer que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n^{(\gamma_0)}}(t) &= \mathcal{L}_{S_n^{(\gamma_0)}}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \mathcal{L}_{\underline{X}^{(\gamma_0)}}\left(\frac{t}{n},\ldots,\frac{t}{n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\alpha}}\right)^{\gamma}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{n\alpha}}\right)^{n(\alpha-\gamma)},
\end{aligned}$$

pour $t \geq 0$.

À l'aide $\mathcal{L}_{W_n^{(\gamma_0)}}(t)$, démontrer que

$$f_{W_n^{(\gamma_0)}}(x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} p(k)\, h(x; a+k, n\beta)$$

en indiquant la forme de $p(k)$, la valeur de a, et la valeur de k_0.

À l'aide $\mathcal{L}_{W_n^{(\gamma_0)}}(t)$, démontrer que $W_n^{(\gamma_0)}$ converge en distribution vers la v.a. Z où $Z - \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right) \sim Gamma\,(\gamma,\beta)$, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n^{(\gamma_0)}}(x) = F_Z(x)\,,$$

pour tout $x \geq 0$.

En effet, on observe

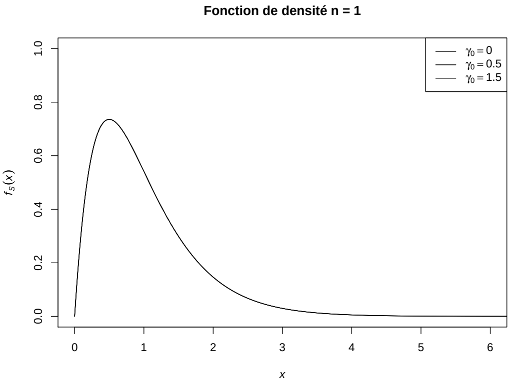
$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n^{(\gamma_0)}}(t) = \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\alpha}}\right)^{\gamma} \mathrm{e}^{-t\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right)} = F_Z(x),$$

Valeurs numériques avec $\alpha = 2$:

- Pour $n = 1$ et $\gamma = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $f_{W_n^{(\gamma_0)}}(x)$, pour $x \geq 0$, sur un graphique.
- Pour $n = 10$ et $\gamma = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $f_{W_n^{(\gamma_0)}}(x)$ ainsi que celles de $f_{W_n^{\perp}}(x)$ et $f_{W_n^{+}}(x)$, pour $x \geq 0$, sur un graphique.
- Pour $n = 100$ et $\gamma = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $f_{W_n^{(\gamma_0)}}(x)$ ainsi que celles de $f_{W_n^{\perp}}(x)$ et $f_{W_n^{+}}(x)$, pour $x \geq 0$, sur un graphique.
- Pour $n \to \infty$ et $\gamma = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $f_{W_n^{(\gamma_0)}}(x)$ ainsi que celles de $f_{W_n^{\perp}}(x)$ et $f_{W_n^{+}}(x)$, pour $x \geq 0$, sur un graphique.

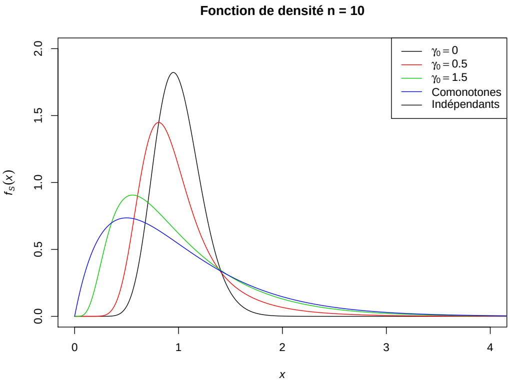
Loi gamma multivariée

Exemple no2



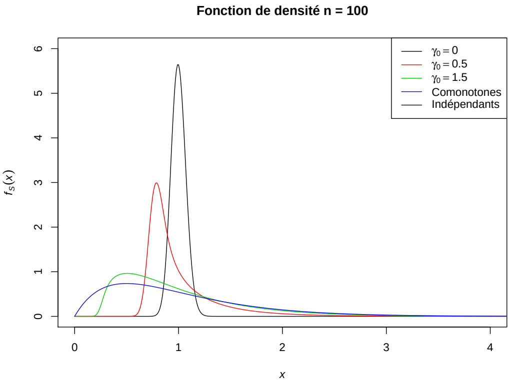
Loi gamma multivariée

Exemple no2



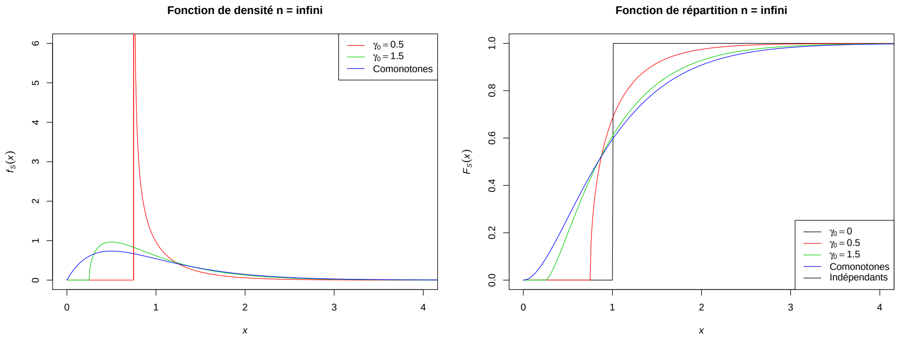
Loi gamma multivariée

Exemple no2



Loi gamma multivariée

Exemple no2



Écrire un algorithme de simulation basée sur la méthode de construction.

On considère un portefeuille $n = 3$ risques.

On fixe $\alpha_1 = \beta_1 = 2$, $\alpha_2 = \beta_2 = 3$, et $\alpha_3 = \beta_3 = 4$.

Pour effectuer les calculs demandés, on utilise la méthode de simulation Monte-Carlo avec les paramètres suivants :

- nombre de simulations : $m = 100000$;
- `set.seed(2018)`.

Loi gamma multivariée

Exemple no4

Pour $\gamma_0 = 0$, 0.5, 1.5, on évalue approximativement les quantités suivantes :

- $VaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$ et les contributions $C_\kappa^{VaR}\left(X_i^{(\gamma_0)}\right)$ basée sur la règle d'Euler, pour $\kappa = 1 - \frac{1}{10^j}$, $j = 1{,}2{,}3{,}4$;
- $TVaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$ et les contributions $C_\kappa^{TVaR}\left(X_i^{(\gamma_0)}\right)$ basée sur la règle d'Euler, pour $\kappa = 1 - \frac{1}{10^j}$, $j = 1{,}2{,}3{,}4$.

Loi gamma multivariée

Exemple no4

$\gamma_0 = 0$

κ	$C_{\kappa}^{VaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{VaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{VaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$VaR_{\kappa}\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.017415	1.786410	0.2992175	4.103043
0.99	2.287821	2.231084	1.1588997	5.677804
0.999	2.090065	3.672269	1.3287001	7.091034
0.9999	5.440871	2.623617	0.3996309	8.464119

κ	$C_{\kappa}^{TVaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{TVaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{TVaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$TVaR_{\kappa}\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.093387	1.641081	1.066283	4.800751
0.99	3.141991	1.930183	1.209309	6.281483
0.999	4.253396	2.052436	1.313135	7.618967
0.9999	5.760619	1.872141	1.180103	8.812863

UNIVERSITÉ LAVAL

$\gamma_0 = 0.5$

κ	$C_{\kappa}^{VaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{VaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{VaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$VaR_{\kappa}\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.140645	0.9175122	1.234240	4.292397
0.99	2.434492	2.3611347	1.614523	6.410150
0.999	2.966123	3.0316724	2.774799	8.772595
0.9999	4.639027	3.7548733	2.696342	11.090242

κ	$C_{\kappa}^{TVaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{TVaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{TVaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$TVaR_{\kappa}\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.192300	1.787483	1.247891	5.227675
0.99	3.313145	2.390686	1.690832	7.394663
0.999	4.295816	3.248918	2.242175	9.786909
0.9999	5.782719	3.649601	2.548460	11.980780

$\gamma_0 = 1.5$

κ	$C_\kappa^{VaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{VaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{VaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$VaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.075341	1.501833	1.104101	4.681275
0.99	3.125972	2.556567	1.816267	7.498806
0.999	4.234186	3.217113	2.647751	10.099050
0.9999	5.554900	4.218299	2.842858	12.616057

κ	$C_\kappa^{TVaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{TVaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{TVaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$TVaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.407525	2.023599	1.473276	5.904399
0.99	3.665116	2.863381	2.107845	8.636341
0.999	4.825608	3.703921	2.677929	11.207458
0.9999	6.102415	4.286741	3.492603	13.881759

Lois composées multivariées

Lois composées multivariées

Souvent, on modélise les risques d'assurance par des sommes aléatoires.

On présente dans cette section une extension multivariée de cette modélisation.

On considère un portefeuille de n risques dont les coûts sont représentés par les v.a. X_1, ..., X_n.

Lois composées multivariées

La v.a. X_i est définie par

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}, \tag{16}$$

où la f.m.p. conjointe de $(M_1,\ldots,M_n)$ est donnée par

$$f_{M_1,\ldots,M_n}(m_1,\ldots,m_n) = \Pr(M_1 = m_1,\ldots,M_n = m_n) = q_{m_1,\ldots,m_n},$$

pour m_1, ..., $m_n \in \mathbb{N}$.

Pour chaque i, les v.a. $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, ... forment une suite de v.a. i.i.d.

Les suites $\{B_{1,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$, ..., $\{B_{n,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$ sont indépendantes entre elles et elles sont indépendantes du vecteur de v.a. $(M_1,\ldots,M_n)$.

Lois composées multivariées

La covariance entre X_i et X_j est

$$\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right) = E\left[B_i\right] E\left[B_j\right] \mathrm{Cov}\left(M_i,M_j\right), \quad \text{pour } i \neq j.$$

Il est à la fois intéressant d'évaluer le comportement aléatoire de la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et le comportement aléatoire conjoint du vecteur de v.a. $(X_1,...,X_n)$.

La relation de dépendance entre les v.a. $X_1,...,X_n$ est introduite via les v.a. $(M_1,...,M_n)$.

La fgm de $(X_1,...,X_n)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{X_1,...,X_n}(t_1,...,t_n) &= E\left[\mathrm{e}^{t_1 X_1}...\mathrm{e}^{t_n X_n}\right] \\ &= \mathcal{P}_{M_1,...,M_n}\left(\mathcal{M}_{B_1}(t_1),...,\mathcal{M}_{B_n}(t_n)\right) \quad (17) \end{aligned}$$

L'expression de la fonction de répartition conjointe de $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ est

$$\begin{aligned} & F_{\underline{X}}\left(x_1,...,x_n\right) \\ = \; & q_{0,...,0} \\ & + \sum_{\substack{m_1=0 \\ \backslash\{m_1=0,...,m_n=0\}}}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,...,m_n} \Pr\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left\{\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{1,i_j} \leq x_j\right\}\right), \end{aligned}$$

pour x_1, ..., $x_n \geq 0$.

Lois composées multivariées

En conditionnant sur les différentes valeurs de $(M_1,\ldots,M_n)$, l'expression générale pour la fonction de répartition de S est

$$F_S(x) = q_{0,\ldots,0} + \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \Pr\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j} \leq x\right), \tag{18}$$

où $\sum_{j=1}^{0} u_j = 0$ par convention.

L'expression de l'espérance tronquée de S est

$$E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right] = \sum_{\substack{m_1=0 \\ \backslash\{m_1=0,\dots,m_n=0\}}}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\dots,m_n} \times E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right) \times 1_{\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right)>b\right\}}\right]. \tag{19}$$

Avec (19), on déduit que l'expression de la $TVaR_\kappa(S)$ est donnée par

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{\substack{m_1=0 \\ \backslash\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \times \\ & E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right) \times 1_{\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right) > VaR_\kappa(S)\right\}}\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Lois composées multivariées

Les expressions (18) et (20) sont intéressantes lorsque les v.a. représentant la sévérité des sinistres appartiennent à une famille de distribution qui est fermée sous la convolution, comme les familles gamma et mélange d'Erlang.

Lois composées multivariées

Il est possible de considérer plusieurs structures de dépendance pour $(M_1,...,M_n)$, notamment les versions bivariées des distributions discrètes communes comme les lois de Poisson et binomiale négative présentées plus tôt.

Les distributions bivariées pour (M_1,M_2) peuvent également être construites avec des copules, comme il est expliqué au peochain chapitre.

Lois composées multivariées

Dans la proposition suivante, on présente les expressions de F_S et de $TVaR_\kappa(S)$ quand les montants de sinistres obéissent à des lois gamma avec des paramètres de forme différents et des paramètres d'échelle identiques.

Proposition 8

Loi composée avec montants de sinistres de loi gamma. *On suppose que les montants de sinistres* $B_i \sim Ga(\alpha_i, \beta)$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$. *On obtient les expressions suivantes pour* F_S *et* $TVaR_\kappa(S)$ *:*

$$F_S(x) = q_{0,\ldots,0} + \sum_{\substack{m_1=0 \\ \backslash\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} H\left(x; \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j; \beta\right) \quad (21)$$

et

$$TVaR_\kappa(S) = \sum_{\substack{m_1=0 \\ \backslash\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{q_{m_1,\ldots,m_n} \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j}{(1-\kappa)\beta} \overline{H}\left(b; \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j + 1; \beta\right), \quad (22)$$

Lois composées multivariées

Exemple numérique : En classe.

Lois composées multivariées

Exemple avec la loi Poisson bivariée de Teicher : En classe.

Références

Références I

Cossette, H. and Marceau, E. (2019).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.
Document de référence.

Joe, H. (1997).
Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts.
CRC Press.

Teicher, H. (1954).
On the multivariate Poisson distribution.
Scandinavian Actuarial Journal, 1954(1):1–9.