# Compendium de lois multivariées et copules

Etienne Marceau, professeur titulaire

13 décembre 2018

## 1 Symboles et abréviations

### 1.1 Symboles

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ = ensemble des entiers naturels (incluant $\{0\}$)
2. $\mathbb{N}^{+} = \{1, 2...\}$
3. $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
4. $\mathbb{R}^{+}$ = ensemble des nombres réels positifs (incluant $\{0\}$)
5. $i = \sqrt{-1}$ = unité imaginaire
6. $\mathbb{C} = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ = ensemble des nombres complexes
7. $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$
8. $\rho_P (X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$
9. $\Phi (x)$ = fonction de répartition de la loi normale standard
10. $\Phi^{-1} (u)$ = fonction quantile de la loi normale standard

### 1.2 Abréviations

1. v.a. = variable(s) aléatoire(s)
2. i.i.d. = indépendant(e)s et identiquement distribué(e)s
3. fmp = fonction de masses de probabilité
4. fgp = fonction génératrice des probabilités
5. fgm = fonction génératrice des moments
6. TLS = transformée de Laplace-Stieltjes
7. PPH = processus de Poisson homogène
8. PPNH = processus de Poisson non-homogène
9. MMV = méthode du maximum de vraisemblance

## 2 Notation et relations diverses

1. Vecteur de v.a. : $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$.
2. Fonction de survie conjointe de $\underline{X}$ : $\overline{F}_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = \Pr(X_1 > x_1, ..., X_n > x_n)$, $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
3. Fgm conjointe de $\underline{X}$ (si elle existe) : $\mathcal{M}_{\underline{X}}(s_1, ..., s_n) = E\left[\mathrm{e}^{s_1 X_1} ... \mathrm{e}^{s_n X_n}\right] < \infty$, pour certains $s_i > 0$, $i = 1, ..., n$.
4. TLS conjointe de $\underline{X}$ (vecteur de v.a. positives) : $\mathcal{L}_{\underline{X}}(s_1, ..., s_n) = E\left[\mathrm{e}^{-s_1 X_1} ... \mathrm{e}^{-s_n X_n}\right] < \infty$, pour tout $s_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$.
5. Fgp conjointe de $\underline{X}$ (vecteur de v.a. discrètes positives) : $\mathcal{P}_{\underline{X}}(r_1, ..., r_n) = E\left[r_1^{X_1} ... r_n^{M_n}\right] < \infty$, pour tout $(r_1, ..., r_n) \in [0, 1]^n$.
6. Classe de Fréchet : ensemble de toutes les fonctions de répartition conjointes dont les marginales univariées sont $F_1$, ..., $F_n$, notée $\mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$ (ou $\Gamma(F_1, ..., F_n)$).
7. Signification de "$F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$" : la fonction de répartition conjointe de $\underline{X}$ est membre de l'ensemble de toutes les lois multivariées dont les fonctions de répartition appartiennent à la classe de Fréchet $\mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$ et dont les marginales sont $F_{X_i} = F_i$, $i = 1, ..., n$.
8. Soit un couple de v.a. $(X_1, X_2)$ avec $E\left[X_i^k\right] < \infty$, pour $i = 1, 2$ et $k = 1, 2$. Le coefficient de corrélation de Pearson est défini par
$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1) Var(X_2)}}.$$
9. Soit un couple de v.a. continues $(X_1, X_2)$ avec $F_{X_1, X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ (note : $F_{X_i} = F_i$, $i = 1, 2$). Le rho de Spearman est défini par
$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho_P(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_1)).$$
10. Soit deux couples indépendants de v.a. continues $(X_1, X_2)$ et $(X_1', X_2')$ avec $F_{X_1, X_2} = F_{X_1', X_2'} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ (note : $F_{X_i} = F_{X_i'} = F_i$, $i = 1, 2$). Le tau de Kendall est défini par
$$\tau(X_1, X_2) = \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) - \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0).$$
11. Soit un couple de v.a. continues $(X_1, X_2)$.
    - Le coefficient de dépendance de queue supérieure est défini par
    $$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{\kappa \to 1^-} \Pr\left(X_1 > F_{X_1}^{-1}(\kappa) | X_2 > F_{X_2}^{-1}(\kappa)\right), \text{ si cette limite existe.}$$
    - Le coefficient de dépendance de queue inférieure est défini par
    $$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{\kappa \to 0^+} \Pr\left(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(\kappa) | X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(\kappa)\right), \text{ si cette limite existe.}$$
    - Quand $X_1 \sim X_2 \sim Unif(0, 1)$, on note $\lambda_L(X_1, X_2) = \lambda_L$ et $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_U$.

## 3 Relations diverses

1. $\int_0^1 \ln(1-u)\ln(u)\,\mathrm{d}u - 1 = 1 + \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u$ (intégrale par partie)
2. $\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$
3. Théorème d'Euler : $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) =$ fonction Riemann-zeta évalué à 2
4. Soit un couple de v.a. positive $(X_1, X_2)$ avec une fonction de répartition $F_{X_1,X_2}$ et une fonction de survie $\overline{F}_{X_1,X_2}$, en supposant que $E\left[X_i^k\right] < \infty$, pour $i = 1, 2$ et $k = 1, 2$. Alors, on a

$$E[X_1X_2] = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_1x_2\mathrm{d}F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \tag{1}$$

   Quand la distribution bivariée de $(X_1, X_2)$ est absolument continue avec une fonction de densité $f_{X_1,X_2}$, (1) devient

$$E[X_1X_2] = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_1x_2f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

5. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$
6. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{m\times n} = \mathrm{e}^{mt}$
7. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$
8. Soit $0 < \beta_1 < \beta_2 < \infty$. Alors, on a $\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\alpha}\left(\frac{q}{1-(1-q)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)}\right)^{\alpha}$, où $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ et $t \geq 0$
9. Soit $0 < \beta_1 < \beta_2 < \infty$. Alors, on a $\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-t}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)^{\alpha}\left(\frac{q}{1-(1-q)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t}\right)}\right)^{\alpha}$, où $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ et $t \in [0, \beta_1)$

# 4 Lois continues multivariées

## 4.1 Loi exponentielle bivariée Eyraud - Farlie - Gumbel - Morgenstern (EFGM)

1. Paramètres :
   - $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$
   - $\theta = 0$ (indépendance), $\theta \in [-1, 0)$ (dépendance négative), $\theta \in (0, 1]$ (dépendance positive),
2. Support : $(x_1, x_2) \in [0, \infty)^2$
3. Fonction de répartition conjointe :

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) + \theta\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}$$

4. Fonction de densité conjointe :

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (1+\theta)\,\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} + \theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2} - \theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} - \theta\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2}$$

5. Fgm conjointe :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{X_1,X_2}(t_1, t_2) &= (1+\theta)\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t_2}\right) - \theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1 - t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t_2}\right) \\ &\quad - \theta\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2 - t_2}\right) + \theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1 - t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2 - t_2}\right)\end{aligned}$$

6. Coefficient de corrélation de Pearson : $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\theta}{4} \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$
7. Remarque : loi absolument continue
8. $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ avec $F_i(x_i) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x_i}$, $i = 1, 2$

## 4.2 Loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin

1. Paramètres :
   - $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$
   - $\gamma_0 = 0$ (indépendance), $\gamma_0 \in (0, \min(\beta_1, \beta_2)]$ (dépendance positive)
2. Support : $(x_1, x_2) \in [0, \infty)^2$
3. Fonction de survie conjointe :

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\mathrm{e}^{\gamma_0 \min(x_1; x_2)}$$

4. Fonction de densité conjointe :

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}(\beta_2 - \gamma_0)\,\mathrm{e}^{-(\beta_2-\gamma_0)x_2} & , \quad x_1 > x_2 \\ (\beta_1 - \gamma_0)\,\mathrm{e}^{-(\beta_1-\gamma_0)x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} & , \quad x_1 < x_2 \\ \gamma_0\mathrm{e}^{-\beta_1 x}\mathrm{e}^{-\beta_2 x}\mathrm{e}^{\gamma_0 x} & , \quad x_1 = x_2 = x \end{cases}$$

   avec une singularité sur la diagonale $x_1 = x_2 = x$
5. Coefficient de corrélation de Pearson : $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\gamma_0}{\beta_1 + \beta_2 - \gamma_0}$
6. Remarque :
   - La loi est continue, mais elle n'est pas absolument continue en raison d'une singularité sur la diagonale $x_1 = x_2 = x$
   - La masse de probabilité pour la singularité est $\Pr(X_1 = X_2) = \frac{\gamma_0}{\beta_1 + \beta_2 - \gamma_0}$
   - La singularité est due à la méthode de construction basée sur le choc commun
7. $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ avec $F_i(x_i) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x_i}$, $i = 1, 2$

### 4.3 Loi gamma bivariée Cheriyan - Ramabhadran - Mathai - Moschopoulos (CRMM)

1. Paramètres :
   - $\alpha_1, \beta_1 > 0$, $\alpha_2, \beta_2 > 0$
   - $\gamma_0 = 0$ (indépendance), $\gamma_0 \in (0, \min(\alpha_1; \alpha_2)]$ (dépendance positive)
2. Support : $(x_1, x_2) \in [0, \infty)^2$
3. Fgm conjointe :

$$\mathcal{M}_{X_1,X_2}(t_1, t_2) = \left(1 - \frac{t_1}{\beta_1}\right)^{-(\alpha_1 - \gamma_0)} \left(1 - \frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2 - \gamma_0)} \times \left(1 - \frac{t_1}{\beta_1} - \frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0}.$$

4. Coefficient de corrélation de Pearson : $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}$
5. $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ avec $F_i(x) = H(x_i; \alpha_i, \beta_i)$ = fonction de répartition d'une loi gamma de paramètres $(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$

### 4.4 Loi Pareto bivariée

1. Paramètres :
   - $\alpha > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$
   - paramètre de dépendance $= \alpha$
2. Support : $(x_1, x_2) \in [0, \infty)^2$
3. Fonction de survie conjointe :

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{1 + \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}}\right)^{\alpha} \tag{2}$$

4. Fonction de densité conjointe :

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\lambda_1 \lambda_2}\left(\frac{1}{1 + \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}}\right)^{\alpha+2}$$

5. Covariance ($\alpha > 2$) :

$$\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\alpha - 2} - \frac{1}{\alpha - 1}\right)$$

6. Coefficient de corrélation de Pearson : $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{1}{\alpha} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$
7. Remarques :
   - Pour $\alpha$ fixé (et donc les marginales univariées fixées), il n'existe qu'un niveau de relation de dépendance.
   - L'indépendance n'est pas incluse comme cas particulier.
8. $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ avec $F_i(x_i) = 1 - \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + x_i}\right)^{\alpha}$, $i = 1, 2$

## 4.5 Loi normale multivariée

1. Paramètres :
   - vecteur des moyennes :
   $$\underline{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)$$
   avec $E[X_i] = \mu_i$, $i = 1, 2, ..., n$
   - matrice variance-covariance :
   $$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \rho_{n,2} & \cdots & \sigma_{n,n} \end{pmatrix}$$
   avec $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_{i,i} = \sigma_i^2$ $(i = 1, 2, ..., n)$ et $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i'}) = \sigma_{i,i'} = \rho_{i,i'}\sigma_i\sigma_{i'}$, où $\rho_{i,i'} = \rho_P(X_i, X_{i'})$ $(i,\ i' = 1, 2, ..., n)$
   - $\underline{\Sigma}$ = matrice semi-définie positive
2. Symbole : $\underline{X} \sim MN_n\left(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}\right)$
3. Support : $\underline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$
4. Fonction de densité conjointe (expression générale pour tout $n = 2, 3, ...$) :
   $$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\underline{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)\underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)^t}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
   où $|\underline{\Sigma}|$ est le déterminant de $\underline{\Sigma}$ et $\underline{\Sigma}^{-1}$ est la matrice inverse de $\underline{\Sigma}$
5. Fonction de densité conjointe $(n = 2)$ :
   $$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi) |\underline{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)\underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)^t}, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$
   où
   $$|\underline{\Sigma}| = \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1 - \rho^2\right)$$
   et
   $$\underline{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix}$$
6. Fgm conjointe :
   $$\mathcal{M}_{\underline{X}}(\underline{s}) = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n s_i\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n s_i s_{i'} \sigma_{i,i'}}$$
7. Remarques :
   - $n = 2, 3, 4, ...$ : pour tout $(i, i')$, les valeurs maximales de $\rho_{i,i'} = 1$ ;
   - $n = 2$ : pour tout $(i, i')$, les valeurs minimales de $\rho_{i,i'} = -1$ ;
   - $n = 3, 4, ...$ : pour tout $(i, i')$, les valeurs minimales de $\rho_{i,i'}$ dépend des valeurs de $\sigma_1$, ..., $\sigma_n$ ;
   - $n = 3, 4, ...$ : il est impossible que $\rho_{i,i'} = -1$ pour tout couple $(i, i')$ car la matrice $\underline{\Sigma}$ n'est plus semi-définie positive.
8. $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$ avec $F_i(x_i) = \Phi\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$

9. Décomposition de Choleski. Soit $\underline{\Sigma}$ une matrice semi-définie positive. Alors, la matrice $\underline{\Sigma}$ admet la représentation
$$\underline{\Sigma} = \underline{B}\ \underline{B}^t$$
où
$$\underline{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix},$$
et $\underline{B}^t$ est la matrice transposée de la matrice $\underline{B}$.
Les entrées de la matrice $\underline{B}$ sont calculées à partir de
$$b_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j} - \sum_{l=1}^{j-1} b_{i,l} b_{j,l}}{\sqrt{1 - \sum_{l=1}^{j-1} b_{j,l}^2}},$$
où $1 \leq j \leq i \leq n$ et $\sum_{l=1}^{0} a_l = 0$.
Note : la décomposition n'est pas possible si $\underline{\rho}$ n'est pas semi-définie positive.
10. Soit un vecteur de v.a. i.i.d. $(Y_1, ..., Y_n)$ avec $Y_i \sim N(0,1)$. Alors, $\underline{X}$ admet la représentation suivante :
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} + \underline{B} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 + b_{1,1} Y_1 \\ \mu_2 + b_{2,1} Y_1 + b_{2,2} Y_2 \\ \vdots \\ \mu_n + b_{n,1} Y_1 + b_{n,2} Y_2 + ... + b_{n,n} Y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$
11. **Algorithme de simulation d'une réalisation $\underline{X}^{(l)}$ de $\underline{X} \sim MN\left(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}\right)$, basé sur la représentation de $\underline{X}$ à partir de la décomposition de Choleski de $\underline{\Sigma}$.**
   - Génèrer la réalisation $\left(Y_1^{(l)}, ..., Y_n^{(l)}\right)$ de $(Y_1, ..., Y_n)$.
   - Génèrer la réalisation $\underline{X}^{(l)}$ de $\underline{X}$ avec
   $$X_i^{(l)} = \mu_i + \sum_{j=1}^{i} b_{i,j} Y_j^{(l)}$$
   pour $i = 1, 2, ..., n$

## 4.6 Loi de Student multivariée

**[Semestre A2018 : Elle n'est pas l'étude pour les deux examens finaux.]**

# 5 Lois discrètes multivariées

## 5.1 Loi de Poisson bivariée de Teicher

1. Paramètres :
   - $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$
   - paramètre de dépendance : $\alpha_0$
     - $\alpha_0 = 0$ (indépendance),
     - $\alpha_0 \in (0, \min(\lambda_1; \lambda_2)]$ (dépendance positive),
2. Support : $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$
3. Fonction de masse de probabilité conjointe :

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2+\alpha_0} \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \frac{\alpha_0^j}{j!} \frac{(\lambda_1 - \alpha_0)^{m_1-j}}{(m_1 - j)!} \frac{(\lambda_2 - \alpha_0)^{m_2-j}}{(m_2 - j)!}$$

4. Fgp conjointe :

$$P_{M_1,M_2}(t_1, t_2) = E\left[r_1^{M_2} r_2^{M_1}\right] = \mathrm{e}^{(\lambda_1-\alpha_0)(t_1-1)} \mathrm{e}^{(\lambda_2-\alpha_0)(t_2-1)} \mathrm{e}^{\alpha_0(t_1t_2-1)}$$

5. Covariance : $Cov(M_1, M_2) = \alpha_0$
6. Espérance conditionnelle : $E[M_1|M_2 = m_2] = (\lambda_1 - \alpha_0) + \frac{\alpha_0}{\lambda_2} m_2$
7. Coefficient de corrélation de Pearson : $\rho_P(M_1, M_2) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \in \left[0, \frac{\min(\lambda_1;\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right]$
8. $F_{M_1,M_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ où $F_i$ est la fonction de répartition d'une loi Poisson univariée de paramètre $\lambda_i$, $i = 1, 2$

## 5.2 Loi Binomiale bivariée de Marshall-Olkin

1. Paramètres :
   - $n \in \mathbb{N}^{+}$, $q_1 \in (0,1)$, $q_2 \in (0,1)$
   - paramètre de dépendance : $p_{11}$
     - $p_{11} \in [\max(q_1 + q_2 - 1; 0), q_1 q_2)$ (dépendance négative)
     - $p_{11} = q_1 q_2$ (indépendance)
     - $p_{11} \in (q_1 q_2, \min(q_1; q_2)]$ (dépendance positive)
2. Notation :
   - $p_{01} = q_2 - p_{11}$, $p_{10} = q_1 - p_{11}$
   - $p_{00} = 1 - p_{01} - p_{10} - p_{11}$
3. Support : $(m_1, m_2) \in \{0, 1, ..., n\}^2$
4. Fonction de masse de probabilité conjointe :

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = \sum_{l=\max(m_1+m_2-n;0)}^{\min(m_1;m_2)} \frac{n! \times p_{11}^{l} p_{10}^{m_1-l} p_{01}^{m_2-l} p_{00}^{n-m_1-m_2+l}}{l!\,(m_1-l)!\,(m_2-l)!\,(n-m_1-m_2+l)!}$$

5. Fgp conjointe :

$$\mathcal{P}_{M_1,M_2}(r_1, r_2) = (p_{00} + p_{10} r_1 + p_{01} r_2 + p_{11} r_1 r_2)^n .$$

6. Covariance : $Cov(M_1, M_2) = n(p_{11} - q_1 q_2)$
7. Coefficient de corrélation de Pearson : $\rho_P(M_1, M_2) = \frac{(p_{11} - q_1 q_2)}{\sqrt{q_1 q_2 (1-q_1)(1-q_2)}}$
8. $F_{M_1,M_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ où $F_i$ est la fonction de répartition d'une loi binomiale univariée de paramètres $(n, q_i)$, $i = 1, 2$

## 5.3 Loi Poisson-Gamma bivariée de CRMM ou binomiale négative bivariée de CRMM

1. Paramètres :
   - $r_1, \lambda_1 > 0$, $r_2, \lambda_2 > 0$
   - paramètre de dépendance $\gamma_0$
     - $\gamma_0 = 0$ (indépendance)
     - $\gamma_0 \in (0, \min(r_1; r_2)]$ (dépendance positive)
2. Support : $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$
3. Fonction de masse de probabilité conjointe :

$$
\begin{aligned}
f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) &= \left(\frac{\lambda_1}{r_1}\right)^{m_1} \left(\frac{\lambda_2}{r_2}\right)^{m_2} \times \left(1+\frac{\lambda_1}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)} \left(1+\frac{\lambda_2}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)} \\
&\quad \times \sum_{j_1=0}^{m_1} \sum_{j_2=0}^{m_2} \frac{\Gamma(j_1+j_2+\gamma_0) \prod_{i=1}^{2} \omega_{(r_i,\lambda_i,\gamma_0,m_i,j_i)}}{\Gamma(\gamma_0) j_1! j_2! \left(1+\frac{\lambda_1}{r_1}+\frac{\lambda_2}{r_2}\right)^{\gamma_0+j_1+j_2}},
\end{aligned}
$$

   où

$$
\omega_{(r_i,\lambda_i,\gamma_0,m_i,j_i)} = \frac{\Gamma(r_i-\gamma_0+m_i-j_i)}{\Gamma(r_i-\gamma_0)\Gamma(m_i-j_i+1)} \left(1+\frac{\lambda_i}{r_i}\right)^{-(m_i-j_i)},
$$

   pour $j_i = 0, ..., m_i$ et $i = 1, 2$
4. Fgp conjointe :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{M_1,M_2}(t_1, t_2) &= \left(1-\frac{\lambda_1(t_1-1)}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)} \times \left(1-\frac{\lambda_2(t_2-1)}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)} \\
&\quad \times \left(1-\frac{\lambda_1(t_1-1)}{r_1}-\frac{\lambda_2(t_2-1)}{r_2}\right)^{-\gamma_0}
\end{aligned}
$$

5. Covariance : $\mathrm{Cov}(M_1, M_2) = \lambda_1\lambda_2\gamma_0$
6. $F_{M_1,M_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ où $F_i$ est la fonction de répartition d'une loi binomale négative univariée de paramètres $(r_i, q_i)$, $i = 1, 2$ avec $q_i = \frac{r_i}{r_i+\lambda_i}$

## 5.4 Loi Poisson-gamma bivariée de CRMM ou binomiale négative bivariée de CRMM (paramétrisation différente)

1. Note : loi identique à la loi décrite en §5.3 en remplaçant $\frac{\lambda_i}{r_i} = \frac{1-q_i}{q_i}$
2. Paramètres :
   - $(r_1, q_1) \in (0, \infty) \times (0, 1)$, $(r_2, q_2) \in (0, \infty) \times (0, 1)$
   - paramètre de dépendance $\gamma_0$
     - $\gamma_0 = 0$ (indépendance)
     - $\gamma_0 \in (0, \min(r_1; r_2)]$ (dépendance positive)
3. Support : $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$
4. Fonction de masse de probabilité conjointe :

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = (1-q_1)^{m_1}(1-q_2)^{m_2} \times q_1^{r_1} q_2^{r_2} \times \sum_{j_1=0}^{m_1} \sum_{j_2=0}^{m_2} \frac{\Gamma(j_1 + j_2 + \gamma_0) q_1^{j_2} q_2^{j_1} \prod_{i=1}^{2} \frac{\Gamma(r_i - \gamma_0 + m_i - j_i)}{\Gamma(r_i - \gamma_0)\Gamma(m_i - j_i + 1)}}{\Gamma(\gamma_0) j_1! j_2! (q_1 + q_2 - q_1 q_2)^{\gamma_0 + j_1 + j_2}},$$

   pour $j_i = 0, ..., m_i$ et $i = 1, 2$
5. Fgp conjointe :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{M_1,M_2}(t_1, t_2) &= \left(1 - \frac{1-q_1}{q_1}(t_1 - 1)\right)^{-(r_1 - \gamma_0)} \times \left(1 - \frac{1-q_2}{q_2}(t_2 - 1)\right)^{-(r_2 - \gamma_0)} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1-q_1}{q_1}(t_1 - 1) - \frac{1-q_2}{q_2}(t_2 - 1)\right)^{-\gamma_0} \end{aligned}$$

6. Covariance : $\mathrm{Cov}(M_1, M_2) = r_1 \frac{1-q_1}{q_1} r_2 \frac{1-q_2}{q_2} \gamma_0$
7. $F_{M_1,M_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ où $F_i$ est la fonction de répartition d'une loi binomale négative univariée de paramètres $(r_i, q_i)$, $i = 1, 2$

## 6 Probabilité sur un hyperrectangle

1. Pour $-\infty < a_1 < b_1 < \infty$, ..., $-\infty < a_n < b_n < \infty$, un hyperrectangle dans $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$(a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n].$$

Cas particuliers :
– $n = 1$ : segment $= (a_1, b_1]$
– $n = 2$ : rectangle $= (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$
– $n = 3$ : prisme $= (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times (a_3, b_3]$

2. Soit une fonction multivariée $\varphi(x_1, ..., x_n)$ définie sur $\mathbb{R}^n$. On définit l'opérateur différence "$\triangle$" comme suit :
– $\triangle_{a_i,b_i}\varphi(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ :

$$\triangle_{a_i,b_i}\varphi(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., b_i, ..., x_n) - \varphi(x_1, ..., a_i, ..., x_n)$$

– $\triangle_{a_i,b_i}\triangle_{a_{i'},b_{i'}}\varphi(x_1, ..., x_i, ..., x_{i'}, ..., x_n)$ :

$$\begin{aligned}\triangle_{a_i,b_i}\triangle_{a_{i'},b_{i'}}\varphi(x_1, ..., x_i, ..., x_{i'}, ..., x_n) &= \triangle_{a_i,b_i}\varphi(x_1, ..., x_i, ..., b_{i'}, ..., x_n) - \triangle_{a_i,b_i}\varphi(x_1, ..., x_i, ..., a_{i'}, ..., x_n) \\ &= (\varphi(x_1, ..., b_i, ..., b_{i'}, ..., x_n) - \varphi(x_1, ..., a_i, ..., b_{i'}, ..., x_n)) \\ &\quad - (\varphi(x_1, ..., b_i, ..., a_{i'}, ..., x_n) - \varphi(x_1, ..., a_i, ..., a_{i'}, ..., x_n))\end{aligned}$$

– $\triangle_{a_1,b_1}...\triangle_{a_n,b_n}\varphi(x_1, ..., x_n)$ :

$$\triangle_{a_1,b_1}...\triangle_{a_n,b_n}\varphi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1=1}^{2} ... \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1+...+i_n}\varphi(x_{1,i_1}, ..., x_{n,i_n})$$

avec $x_{j,1} = a_j$ et $x_{j,2} = b_j$ pour $j \in \{1, 2, ..., n\}$.
– L'opérateur est commutatif. P.ex. :

$$\triangle_{a_{i'},b_{i'}}\triangle_{a_i,b_i}\varphi(x_1, ..., x_i, ..., x_{i'}, ..., x_n) = \triangle_{a_i,b_i}\triangle_{a_{i'},b_{i'}}\varphi(x_1, ..., x_i, ..., x_{i'}, ..., x_n)$$

où

$$\begin{aligned}\triangle_{a_{i'},b_{i'}}\triangle_{a_i,b_i}\varphi(x_1, ..., x_i, ..., x_{i'}, ..., x_n) &= \triangle_{a_{i'},b_{i'}}\varphi(x_1, ..., b_i, ..., x_{i'}, ..., x_n) - \triangle_{a_{i'},b_{i'}}\varphi(x_1, ..., a_i, ..., x_{i'}, ..., x_n) \\ &= (\varphi(x_1, ..., b_i, ..., b_{i'}, ..., x_n) - \varphi(x_1, ..., b_i, ..., a_{i'}, ..., x_n)) \\ &\quad - (\varphi(x_1, ..., a_i, ..., b_{i'}, ..., x_n) - \varphi(x_1, ..., a_i, ..., a_{i'}, ..., x_n))\end{aligned}$$

– Notation : on utilise $\triangle_{a_i,b_i}$ ou $\triangle_{a_i}^{b_i}$ ($\triangle_{a_i,b_i} = \triangle_{a_i}^{b_i}$)

3. Soit $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ avec $F_{\underline{X}}$. Alors, la probabilité que $\underline{X}$ se trouve dans l'hyperrectangle

$$(a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]$$

est donnée par

$$\begin{aligned}\Pr(\underline{X} \in (a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]) &= \Pr(X_1 \in (a_1, b_1], ..., X_n \in (a_1, b_1]) \\ &= \triangle_{a_1,b_1}...\triangle_{a_n,b_n}F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n),\end{aligned}$$

où

$$\triangle_{a_1,b_1}...\triangle_{a_n,b_n}F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1=1}^{2} ... \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1+...+i_n} F_{\underline{X}}(x_{1,i_1}, ..., x_{n,i_n})$$

avec $x_{j,1} = a_j$ et $x_{j,2} = b_j$ pour $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

# 7 Propriétés désirables pour une mesure de dépendance

**Propriété 1** *Les propriétés désirables pour une mesure de dépendance $\pi(X_1, X_2)$ sont les suivantes :*

1. *Symétrie :*
$$\pi(X_1, X_2) = \pi(X_2, X_1) \ ;$$
2. *Normalisation :*
$$-1 \leq \pi(X_1, X_2) \leq 1 \ ;$$
3. *Comonotonicité :*
$$\pi(X_1, X_2) = 1$$
*si et seulement si $X_1$ et $X_2$ sont comonotones ;*
4. *Antimonotonicité :*
$$\pi(X_1, X_2) = -1$$
*si et seulement si $X_1$ et $X_2$ sont antimonotones ;*
5. *Invariance : pour toute fonction strictement monotone $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a*
$$\pi(\phi(X_1), X_2) = \begin{cases} \pi(X_1, X_2), & \text{si } \phi \text{ est croissante} \\ -\pi(X_1, X_2), & \text{si } \phi \text{ est décroissante} \end{cases} .$$

## 8 Fonction quantile

**Définition 2** *Soit la v.a. $X$ avec fonction de répartition $F_X$. On définit la fonction inverse $F_X^{-1}$ de $F_X$ par*

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\},$$

*pour $u \in (0,1)$. La fonction inverse $F_X^{-1}$ est aussi appelée la fonction quantile de $X$.*

**Propriété 3** *La fonction quantile satisfait les propriétés suivantes :*

1. *$F_X^{-1}$ est non décroissante (croissante au sens large) ;*
2. *$F_X^{-1}$ est semi-continue à gauche ;*
3. *$F_X^{-1}(F_X(x)) \leq x$ ;*
4. *$F_X\left(F_X^{-1}(x)\right) \geq u$.*

**Théorème 4** ***Théorème de la fonction quantile.*** *Soit une v.a. $X$ avec fonction de répartition $F_X$ et fonction quantile $F_X^{-1}$. Soit une v.a. $U \sim U(0,1)$. Alors, la fonction de répartition de $F_X^{-1}(U)$ est $F_X$, c.-à-d., $F_X^{-1}(U) \sim X$.*

**Théorème 5** ***Théorème sur la transformation intégrale de probabilité ("Probability Integral Transform").*** *Soit une v.a. continue $X$ avec une fonction de répartition $F_X$ et fonction quantile $F_X^{-1}$. Alors, la v.a. $F_X(X)$ obéit à une loi uniforme standard, c.-à-d., $F_X(X) \sim U(0,1)$.*

**Proposition 6** *Soit une v.a. continue $X$. Si $\varphi$ est une fonction strictement croissante et continue, alors on a*

$$F_{\varphi(X)}^{-1}(u) = \varphi\left(F_X^{-1}(u)\right),$$

*pour $u \in (0,1)$.*

**Proposition 7** *Soit une v.a. continue $X$. Si $\varphi$ est une fonction strictement décroissante et continue, alors on a*

$$F_{\varphi(X)}^{-1}(u) = \varphi\left(F_X^{-1}(1-u)\right),$$

*pour $u \in (0,1)$.*

# 9 Théorème de Sklar

## 9.1 Énoncé du théorème

Le résultat fondamental de la théorie des copules est le théorème de Sklar.

**Théorème 8** ***Théorème de Sklar***. *Soit $F \in \mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$ ayant des fonctions de répartition marginales $F_1$, ..., $F_n$.*

1. ***Volet #1.*** *Alors, il existe une copule $C$ telle que pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$*

$$F(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)).$$

   *Si $F_1$, ..., $F_n$ sont continues, alors $C$ est unique.*

2. ***Volet #2.*** *Inversement, si $C$ est une copule et $F_1$, ..., $F_n$ sont des fonctions de répartition, alors la fonction définie par*

$$F(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$$

   *est une fonction de répartition multivariée avec les fonctions de répartition marginales $F_1$, ..., $F_n$.*

## 9.2 Version du théorème pour les fonctions de survie

**Corollaire 9** ***Théorème de Sklar pour les fonctions de survie***. *Soit $\overline{F} \in \mathcal{CF}(\overline{F}_1, ..., \overline{F}_n)$ ayant des fonctions de survie marginales $\overline{F}_1$, ..., $\overline{F}_n$.*

1. ***Volet #1.*** *Alors, il existe une copule $C$ telle que pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$*

$$\overline{F}(x_1, ..., x_n) = C(\overline{F}_1(x_1), ..., \overline{F}_n(x_n)).$$

   *Si $\overline{F}_1$, ..., $\overline{F}_n$ sont continues, alors $C$ est unique.*

2. ***Volet #2.*** *Inversement, si $C$ est une copule et $\overline{F}_1$, ..., $\overline{F}_n$ sont des fonctions de survie, alors la fonction définie par*

$$\overline{F}(x_1, ..., x_n) = C(\overline{F}_1(x_1), ..., \overline{F}_n(x_n))$$

   *est une fonction de survie multivariée avec les fonctions de survie marginales $\overline{F}_1$, ..., $\overline{F}_n$.*

# 10 Copules de base

1. Copule indépendance :
$$C^{\perp}(u_1, ..., u_n) = u_1 ... u_n,$$
pour $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, ..., n$
2. Copule borne supérieure de Fréchet :
$$C^{+}(u_1, ..., u_n) = \min(u_1; ...; u_n),$$
pour $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, ..., n$
3. Copule bivariée de la borne inférieure de Fréchet :
$$C^{-}(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0),$$
pour $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$

## 11 Copule bivariée de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM)

1. Copule de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM) :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2),$$

   pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$
2. Paramètre de dépendance :
   - $\alpha = 0$ (indépendance)
   - $\alpha \in [-1, 0)$ (dépendance négative)
   - $\alpha \in (0, 1]$ (dépendance positive)
3. Cas particulier : $C_0(u_1, u_2) = C^{\perp}(u_1, u_2)$
4. Fonction de densité :

$$c(u_1, u_2) = 1 + \alpha(1 - 2u_1)(1 - 2u_2),$$

   pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$
5. Remarque : copule absolument continue
6. Tau de Kendall : $\frac{2\alpha}{9}$
7. Rho de Spearman : $\frac{\alpha}{3}$

# 12 Copules Archimédiennes

## 12.1 Caractéristiques de base

1. Une copule $C$ est dite archimédienne si elle s'écrit sous la forme
$$C(u_1,...,u_n) = \psi\left\{\psi^{-1}(u_1) + ... + \psi^{-1}(u_n)\right\}, \quad (u_1,...,u_n) \in [0,1]^n, \tag{3}$$
où la fonction $\psi$ est appelée un générateur.
2. La fonction $\psi$ doit satisfaire les propriétés suivantes :
   - $\psi : [0,\infty) \to [0,1]$ avec $\psi(0) = 1$ et $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$ ;
   - $\psi$ est une fonction continue ;
   - $\psi$ est une fonction strictement décroissante sur $[0,\infty)$ ;
   - $\psi^{-1}$ est la fonction inverse, c.-à-d.
   $$\psi^{-1}(x) = \inf\{u, \psi(u) \leq x\}.$$
3. La copule $C$ est définie pour toute dimension $n = 2, 3, ...$ si et seulement si le générateur est une fonction complètement monotone.
4. Une fonction $\psi$ est complètement monotone si
$$(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k\psi(x)}{\mathrm{d}x^k} \geq 0$$
pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. Une fonction $\psi$ est complètement monotone si et seulement si elle correspond à la TLS d'une v.a. strictement positive $\Theta$, c.-à-d. $\psi = \mathcal{L}_\Theta$.
6. Dans le cours, on considère uniquement la classe de copules archimédiennes où $\psi = \mathcal{L}_\Theta$.

## 12.2 Méthode générale de simulation pour une copule archimédienne

1. Simulation de $\underline{Y}^{(j)}$ de $\underline{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ (déduite de la construction de la distribution multivariée de $\underline{Y}$) :
   (a) Simulation de $\Theta^{(j)}$ de $\Theta$.
   (b) Simulation de $\underline{V}^{(j)}$ de $\underline{V} = (V_1, ..., V_n)$ qui est un vecteur de v.a. iid de loi $Unif\,(0,1)$.
   (c) Simulation de $Y_i^{(j)}$ avec

$$\left(Y_i|\Theta = \Theta^{(j)}\right) = F^{-1}_{Y_i|\Theta=\Theta^{(j)}}\left(V_i^{(j)}\right) = -\frac{1}{\Theta^{(j)}}\ln\left(1 - V_i^{(j)}\right)$$

   pour $i = 1, 2, ..., n$.
2. Simulation de $\underline{U}^{(j)}$ de $\underline{U} = (U_1, ..., U_n)$ avec

$$U_i^{(j)} = \overline{F}_{Y_i}\left(Y_i^{(j)}\right) = \mathcal{L}_\Theta\left(Y_i^{(j)}\right),$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.

## 12.3 Copule de Ali-Mikhail-Haq (AMH)

1. Copule bivariée de Ali-Mikhail-Haq :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{1 - \alpha(1 - u_1)(1 - u_2)} = u_1 u_2 \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha(1 - u_1)(1 - u_2))^k,$$

   pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$
2. Paramètre de dépendance : $\alpha \in [-1, 1]$
   - $\alpha = 0$ (indépendance)
   - $\alpha \in (0, 1]$ (dépendance positive)
   - $\alpha \in [-1, 0)$ (dépendance négative, pour la copule bivariée seulement)
3. Cas particulier : $C_0(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$
4. Fonction de densité :

$$c(u_1, u_2) = \frac{1 - \alpha + 2\alpha \frac{u_1 u_2}{1 - \alpha(1 - u_1)(1 - u_2)}}{(1 - \alpha(1 - u_1)(1 - u_2))^2}$$

5. Générateur :
   - $\psi(t) = L_\Theta(t) = \frac{(1-\alpha)e^{-t}}{1-\alpha e^{-t}}$, $t \geq 0$
   - Loi de $\Theta$ : loi géométrique définie sur $\mathbb{N}^+$ avec

$$\Pr(\Theta = k) = (1 - \alpha)\alpha^{k-1},\ k \in \mathbb{N}^+$$

6. Copule multivariée de Ali-Mikhail-Haq :

$$C_\alpha(u_1, ..., u_n) = \frac{(1 - \alpha)}{\prod_{i=1}^{n} \left((1 - \alpha) u_i^{-1} + \alpha\right) - \alpha},$$

   pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, ..., n$
7. Remarque : copule absolument continue
8. Tau de Kendall : formule non fermée
9. Rho de Spearman : formule non fermée
10. Coefficients de dépendance de queue : $\lambda_L(U_1, U_2) = 0$, $\lambda_U(U_1, U_2) = 0$

## 12.4 Copule de Clayton

1. Copule bivariée de Clayton :
$$C_\alpha(u_1,u_2)=\left(u_1^{-\alpha}+u_2^{-\alpha}-1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$
2. Paramètre de dépendance : $\alpha$
   - $\alpha\to 0$ (indépendance)
   - $\alpha\in(0,\infty)$ (dépendance positive)
   - $\alpha\to\infty$ (comonotonicité)
3. Cas particuliers :
   - $C_0(u_1,u_2)=C^{\perp}(u_1,u_2)$
   - $C_\infty(u_1,u_2)=C^{+}(u_1,u_2)$
4. Fonction de densité :
$$c(u_1,u_2)=\frac{1+\alpha}{(u_1u_2)^{\alpha+1}}\left(u_1^{-\alpha}+u_2^{-\alpha}-1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}},$$
pour $u_i\in[0,1]$, $i=1,2$
5. Générateur :
   - $\psi(t)=L_\Theta(t)=\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $t\geq 0$
   - Loi de $\Theta$ : loi gamma de paramètres $\left(\frac{1}{\alpha},1\right)$ avec
$$f_\Theta(x)=\frac{x^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}e^{-x}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)},\ x\in\mathbb{R}^+$$
6. Copule multivariée de Clayton :
$$C_\alpha(u_1,...,u_n)=\left(u_1^{-\alpha}+...+u_n^{-\alpha}-(n-1)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$
pour $u_i\in[0,1]$, $i=1,...,n$
7. Remarque : copule absolument continue
8. Tau de Kendall : $\frac{\alpha}{\alpha+2}$
9. Rho de Spearman : formule non fermée
10. Coefficients de dépendance de queue : $\lambda_L(U_1,U_2)=2^{\frac{1}{\alpha}}$, $\lambda_U(U_1,U_2)=0$

## 12.5 Copule de Frank

1. Copule bivariée de Frank :
$$C_\alpha\left(u_1,u_2\right)=-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right)}\right),$$
pour $u_i\in[0,1]$, $i=1,2$
2. Paramètre de dépendance : $\alpha$
   - $\alpha\to 0$ (indépendance)
   - $\alpha\in(0,\infty)$ (dépendance positive)
   - $\alpha\in(-\infty,0)$ (dépendance négative, pour la copule bivariée seulement)
   - $\alpha\to\infty$ (comonotonicité)
   - $\alpha\to-\infty$ (antimonotonicité, pour la copule bivariée seulement)
3. Cas particuliers :
   - $C_0\left(u_1,u_2\right)=C^{\perp}\left(u_1,u_2\right)$
   - $C_\infty\left(u_1,u_2\right)=C^{+}\left(u_1,u_2\right)$
   - $C_{-\infty}\left(u_1,u_2\right)=C^{-}\left(u_1,u_2\right)$
4. Fonction de densité :
$$c\left(u_1,u_2\right)=\frac{\alpha\mathrm{e}^{-\alpha(u_1+u_2)}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha(u_1+u_2)}-\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-\mathrm{e}^{-\alpha u_2}+\mathrm{e}^{-\alpha}\right)^2},$$
pour $u_i\in[0,1]$, $i=1,2$
5. Générateur :
   - $\psi\left(t\right)=L_\Theta\left(t\right)=-\frac{1}{\alpha}\ln\left\{1-\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)\mathrm{e}^{-t}\right\}$, $t\geq 0$
   - Loi de $\Theta$ : loi logarithmique avec
$$\Pr\left(\Theta=k\right)=\frac{\left(1-e^{-\alpha}\right)^k}{k\alpha},\ k\in\mathbb{N}^+$$
6. Copule multivariée de Frank :
$$C_\alpha\left(u_1,...,u_n\right)=-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-1\right)\times...\times\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_n}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right)^{n-1}}\right),$$
pour $u_i\in[0,1]$, $i=1,...,n$
7. Remarque : copule absolument continue
8. Tau de Kendall : formule non fermée
9. Rho de Spearman : formule non fermée
10. Coefficients de dépendance de queue : $\lambda_L\left(U_1,U_2\right)=0$, $\lambda_U\left(U_1,U_2\right)=0$

## 12.6 Copule de Gumbel

1. Copule bivariée de Gumbel :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \mathrm{e}^{-\{(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\}^{(1/\alpha)}},$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$
2. Paramètre de dépendance : $\alpha \geq 1$
3. Cas particuliers :
 – $C_1(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$
 – $\lim_{\alpha \to \infty} C_\alpha(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$.
4. Fonction de densité :

$$\begin{aligned} & c(u_1, u_2) \\ = \; & C_\alpha(u_1, u_2) \times \frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}(-\ln u_2)^{\alpha-1}}{u_1 u_2} \\ & \times \left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-2} \left(\alpha - 1 + \left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right), \end{aligned}$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$
5. Générateur :
 – $\psi(t) = L_\Theta(t) = \mathrm{e}^{-\left\{t^{\frac{1}{\alpha}}\right\}}$, $t \geq 0$
 – Loi de $\Theta$ : loi $Stable\left(\frac{1}{\alpha}, 1, \gamma, 0\right)$ définie sur $\mathbb{R}^+$
 **[Semestre A2018 : la méthode de simulation pour la loi stable n'est pas à l'étude]**
6. Copule multivariée de Gumbel :

$$C_\alpha(u_1, ..., u_n) = \mathrm{e}^{-\{(-\ln u_1)^\alpha + ... + (-\ln u_n)^\alpha\}^{(1/\alpha)}},$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, ..., n$ et $\alpha \geq 1$
7. Remarque : copule absolument continue
8. Tau de Kendall : $\frac{\alpha-1}{\alpha}$
9. Rho de Spearman : formule non fermée
10. Coefficients de dépendance de queue : $\lambda_L = 0$, $\lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\alpha}}$

# 13 Copules elliptiques

## 13.1 Copule normale bivariée

1. Copule :
$$C_{\alpha}^{N}\left(u_1,u_2\right)=\overline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}\left(u_1\right),\Phi^{-1}\left(u_2\right)\right),$$
pour $u_i \in [0,1]$, $i=1,2$, et avec
$$\underline{\alpha}=\left(\begin{array}{cc} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{array}\right),$$
2. La copule normale n'a pas de forme analytique.
3. Paramètres de dépdassendance : $\alpha \in [-1,1]$
   - $\alpha \in [-1,0)$ (dépendance négative, pour la copule bivariée seulement)
   - $\alpha = 0$ (indépendance)
   - $\alpha \in (0,1]$ (dépendance positive)
4. Cas particuliers :
   - $C_0\left(u_1,u_2\right)=C^{\perp}\left(u_1,u_2\right)$
   - $C_1\left(u_1,u_2\right)=C^{+}\left(u_1,u_2\right)$
   - $C_{-1}\left(u_1,u_2\right)=C^{-}\left(u_1,u_2\right)$.
5. Fonction de densité :
$$c\left(u_1,u_2\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(u_1)^2-2\alpha\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)+\Phi^{-1}(u_2)^2\right)}{2\left(1-\alpha^2\right)}}\mathrm{e}^{\frac{\left(\Phi^{-1}(u_1)^2+\Phi^{-1}(u_2)^2\right)}{2}},$$
pour $u_i \in [0,1]$, $i=1,2$
6. Remarque : copule absolument continue
7. Tau de Kendall : $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\alpha\right)$
8. Rho de Spearman : $\frac{6}{\pi}\arcsin\left(\alpha\right)$
9. Coefficients de dépendance de queue : $\lambda_L=0$, $\lambda_U=0$

## 13.2 Copule de Student

**[Semestre A2018 : Elle n'est pas l'étude pour les deux examens finaux.]**

# 14 Copules avec singularité

## 14.1 Copule bivariée de Fréchet

1. La copule de Fréchet est une combinaison convexe des copules borne inférieure de Fréchet, indépendance et borne supérieure de Fréchet avec

$$C_{\alpha,\beta}\left(u_1,u_2\right) = \alpha C^{+}\left(u_1,u_2\right) + \beta C^{-}\left(u_1,u_2\right) + \left(1-\alpha-\beta\right) C^{\perp}\left(u_1,u_2\right),$$

   pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2$
2. Paramètres de dépendance : $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta \leq 1$.
3. Cas particuliers :
   - $C_{0,0}\left(u_1,u_2\right) = C^{\perp}\left(u_1,u_2\right)$,
   - $C_{1,0}\left(u_1,u_2\right) = C^{+}\left(u_1,u_2\right)$
   - $C_{0,1}\left(u_1,u_2\right) = C^{-}\left(u_1,u_2\right)$.
4. La copule de Fréchet est complète.
5. Remarque : copule continue avec singularité(s)
6. Tau de Kendall : $\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2)}{3}$
7. Rho de Spearman : $(\alpha - \beta)$
8. Coefficients de dépendance de queue : $\lambda_L = \alpha$, $\lambda_U = \alpha$

## 14.2 Copule bivariée de Cuadras-Augé

1. Copule de Cuadras-Augé :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)^\alpha \, C^\perp(u_1, u_2)^{1-\alpha} = \begin{cases} u_1 u_2^{1-\alpha}, \text{ si } u_1 \leq u_2 \\ u_1^{1-\alpha} u_2, \text{ si } u_1 \geq u_2 \end{cases},$$

   pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$
2. Paramètre de dépendance : $\alpha \in [0,1]$.
3. Cas particuliers :
   - $C_0(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$ ;
   - $C_1(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$.
4. Tau de Kendall : $\frac{\alpha}{2-\alpha}$
5. Rho de Spearman : $\frac{3\alpha}{4-\alpha}$

## 14.3 Copule bivariée de Marshall-Olkin

1. Copule de Marshall-Olkin :

$$C_{\alpha,\beta}\left(u_1,u_2\right)=\min\left(u_1^{1-\alpha}u_2;u_1u_2^{1-\beta}\right)=\left\{\begin{array}{l} u_1^{1-\alpha}u_2,\ \text{si } u_1^{\alpha}\geq u_2^{\beta} \\ u_1u_2^{1-\beta},\ \text{si } u_1^{\alpha}\leq u_2^{\beta}\end{array}\right. ,$$

   pour $u_i\in[0,1]$, $i=1,2$
2. Paramètres de dépendance : $\alpha,\beta\in[0,1]$.
3. Cas particuliers :
   - $C_{0,0}\left(u_1,u_2\right)=C^{\perp}\left(u_1,u_2\right)$
   - $C_{1,1}\left(u_1,u_2\right)=C^{+}\left(u_1,u_2\right)$
   - avec $\beta=\alpha$, copule de Marshall-Olkin = copule de Cuadras-Augé.
4. Tau de Kendall : $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}$
5. Rho de Spearman : $\frac{3\alpha\beta}{2\alpha+2\beta-\alpha\beta}$

## 15 Copules construites par la méthode géométrique

### 15.1 Copule en forme de "$\vee$"

1. Soit la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$.
2. On définit le couple de v.a. $(U_1, U_2)$ avec

$$U_1 = U \sim Unif\,(0,1) \text{ et } U_2 = |2U-1| \sim Unif\,(0,1)$$

3. Copule :

$$C\,(u_1,u_2) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq u_1 \leq \frac{1-u_2}{2} \leq \frac{1}{2} \\ u_1 + \frac{u_2}{2} - \frac{1}{2} & , \ 0 \leq \frac{1-u_2}{2} \leq u_1 \leq \frac{1+u_2}{2} \leq 1 \\ u_2 & , \ \frac{1}{2} \leq \frac{1+u_2}{2} \leq u_1 \leq 1 \end{cases}.$$

4. Cette copule n'est pas symétrique.
5. Cette copule est singulière et son support est composée de deux diagonales :
   - diagonale #1 décroissante de $(0,1)$ à $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ;
   - diagonale #2 croissante de $\left(\frac{1}{2},0\right)$ à $(1,1)$.
6. C'est un exemple de couple de v.a. $(U_1,U_2)$ où les v.a. $U_1$ et $U_2$ sont identiquement distribuées mais qui ne sont pas échangeables, c.-à-d., il existe des couples $(u_1,u_2)$ tel que

$$F_{U_1,U_2}\,(u_1,u_2) \neq F_{U_1,U_2}\,(u_2,u_1)\,.$$

7. $\rho_P\,(U_1,U_2) = 0$

### 15.2 Copule en forme de "$\wedge$"

1. Soit la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$.
2. On définit le couple de v.a. $(U_1, U_2)$ avec

$$U_1 = U \sim Unif\,(0,1) \text{ et } U_2 = 1-|2U-1| \sim Unif\,(0,1)$$

3. Copule :

$$C\,(u_1,u_2) = \begin{cases} u_2 & , \ 0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq u_2 \leq 2u_1 \\ u_1 & , \ 0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } 2u_1 \leq u_2 \leq 1 \\ \frac{u_2}{2} & , \ \frac{1}{2} \leq u_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq u_2 \leq 2-2u_1 \\ u_1+u_2-1 & , \ \frac{1}{2} \leq u_1 \leq 1 \text{ et } 2-2u_1 \leq u_2 \leq 1 \end{cases}.$$

4. Cette copule n'est pas symétrique.
5. Cette copule est singulière et son support est composée de deux diagonales :
   - diagonale #1 croissante de $(0,0)$ à $\left(\frac{1}{2},1\right)$ ;
   - diagonale #2 décroissante de $\left(\frac{1}{2},1\right)$ à $(1,0)$.
6. C'est un exemple de couple de v.a. $(U_1,U_2)$ où les v.a. $U_1$ et $U_2$ sont identiquement distribuées mais qui ne sont pas échangeables, c.-à-d., il existe des couples $(u_1,u_2)$ tel que

$$F_{U_1,U_2}\,(u_1,u_2) \neq F_{U_1,U_2}\,(u_2,u_1)\,.$$

7. $\rho_P\,(U_1,U_2) = 0$

### 15.3 Copule en forme de "<"

1. Soit la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$.
2. On définit le couple de v.a. $(U_1, U_2)$ avec

$$U_1 = |2U - 1| \text{ et } U_2 = U$$

3. Copule :

$$C\,(u_1,u_2) = \begin{cases} 0 & , \; 0 \leq u_2 \leq \frac{1-u_1}{2} \leq \frac{1}{2} \\ u_2 + \frac{u_1}{2} - \frac{1}{2} & , \; 0 \leq \frac{1-u_2}{2} \leq u_2 \leq \frac{1+u_1}{2} \leq 1 \\ u_1 & , \; \frac{1}{2} \leq \frac{1+u_1}{2} \leq u_2 \leq 1 \end{cases} .$$

4. Cette copule n'est pas symétrique.
5. Cette copule est singulière et son support est composée de deux diagonales :
   - diagonale #1 croissante de $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ à $(1,1)$ ;
   - diagonale #2 décroissante de $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ à $(1,0)$.
6. C'est un exemple de couple de v.a. $(U_1, U_2)$ où les v.a. $U_1$ et $U_2$ sont identiquement distribuées mais qui ne sont pas échangeables, c.-à-d., il existe des couples $(u_1, u_2)$ tel que

$$F_{U_1,U_2}\,(u_1,u_2) \neq F_{U_1,U_2}\,(u_2,u_1)\,.$$

7. $\rho_P\,(U_1, U_2) = 0$

### 15.4 Copule en forme de ">"

1. Soit la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$.
2. On définit le couple de v.a. $(U_1, U_2)$ avec

$$U_1 = 1 - |2U - 1| \text{ et } U_2 = U$$

3. Copule :

$$C\,(u_1,u_2) = \begin{cases} u_1 & , \; 0 \leq u_2 \leq \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq u_1 \leq 2u_2 \\ u_2 & , \; 0 \leq u_2 \leq \frac{1}{2} \text{ et } 2u_2 \leq u_1 \leq 1 \\ \frac{u_1}{2} & , \; \frac{1}{2} \leq u_2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq u_1 \leq 2 - 2u_2 \\ u_1 + u_2 - 1 & , \; \frac{1}{2} \leq u_2 \leq 1 \text{ et } 2 - 2u_2 \leq u_1 \leq 1 \end{cases} .$$

4. Cette copule n'est pas symétrique.
5. Cette copule est singulière et son support est composée de deux diagonales :
   - diagonale #1 décroissante de $(0,1)$ à $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ;
   - diagonale #2 croissante de $(0,0)$ à $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
6. C'est un exemple de couple de v.a. $(U_1, U_2)$ où les v.a. $U_1$ et $U_2$ sont identiquement distribuées mais qui ne sont pas échangeables, c.-à-d., il existe des couples $(u_1, u_2)$ tel que

$$F_{U_1,U_2}\,(u_1,u_2) \neq F_{U_1,U_2}\,(u_2,u_1)\,.$$

7. $\rho_P\,(U_1, U_2) = 0$

## 16 Méthodes des rectangles

1. Soit le couple de v.a. positives $(X_1, X_2)$ dont la fonction de répartition est $F_{X_1,X_2}$ dont la fonction de répartition est absolument continue.
2. On définit $S = X_1 + X_2$.
3. Approximation *lower* $A_S^{(l,m)}(s)$ de $F_S(s)$ par la méthode des rectangles avec $m \in \mathbb{N}^+$ :

$$A_S^{(l,m)}(s) = \sum_{i=1}^{2^m-1} \left( F_{X_1,X_2}\left(\frac{i}{2^m}s, \frac{2^m-i}{2^m}s\right) - F_{X_1,X_2}\left(\frac{(i-1)}{2^m}s, \frac{2^m-i}{2^m}s\right)\right),\ s \geq 0.$$

4. Approximation *upper* $A_S^{(l,m)}(s)$ de $F_S(s)$ par la méthode des rectangles avec $m \in \mathbb{N}^+$ :

$$A_S^{(u,m)}(s) = \sum_{i=1}^{2^m} \left( F_{X_1,X_2}\left(\frac{i}{2^m}s, \frac{2^m+1-i}{2^m}s\right) - F_{X_1,X_2}\left(\frac{i-1}{2^m}s, \frac{2^m+1-i}{2^m}s\right)\right),\ s \geq 0.$$

5. Code R pour les deux méthodes :

```
#### Methodes des rectangles ####
CalculerRepartition <- function(m, s)
{
pas<-s/(2^m)
ylower<-seq(pas,s-pas,by=pas)
yupper<-seq(pas,s, by=pas)
a.lower<-sum(sapply(ylower,function(t)Fy1y2(t,s-t)-Fy1y2(t-pas,s-t)))
a.upper<-sum(sapply(yupper,function(t)Fy1y2(t,s-t+pas)-Fy1y2(t-pas,s-t+pas)))
}
```

# 17 D'où vient le mot *copule* ?

1. Copule (logique) : Verbe d'un jugement en tant qu'il exprime une relation entre le sujet et le prédicat. L'assertion réside dans la copule. (Le petit Robert de la langue française, 2015).
2. Copule (linguistique) : Mot qui relie le sujet au prédicat. Le verbe "être" est une copule. (Le petit Robert de la langue française, 2015).
3. Copule (linguistique, un peu plus détaillé) : 1. Le verbe *être* est appelé *copule* quand, dans une phrase de base, il constitue avec un attribut (adjectif, syntagme nominal ou syntagme prépositionnel) le prédicat d'un syntagme nominal. La copule sert à énoncer les propriétés qui définissent le sujet dans des phrases prédicatives (ex : Pierre est heureux, Pierre sera un ingénieur, Pierre était à la maison). On distingue la copule *être* et l'auxiliaire *être* des phrases passives ou l'auxilaire être des verbes intransitifs. On étend parfois le terme de copule à des verbes comme *devenir*, *sembler*, *paraître*, *rester*. 2. La conjonction *et* est dite *copule* quand elle lie deux (ou plus de deux) phrases ou contiuant de phrases. (Larousse. Le Dictionnaire de linguistique et des sciences du langage, 2011).
4. Histoire du mot (en linguistique) : Nom féminin (1482) emprunté au latin classique *copula* "lien, union" spécialement "liaison de mots" et, en latin chrétien, "lien moral", "union dans le mariage", issu par composition d'un *co-apula* dérivé de *cum* "avec" de *apere* "attacher". (Le Robert. Dictionnaire historique de la langue française. 1994.)
5. Histoire de la naissance du mot *copule* en probabilité, statistique et mathématique par celui qui l'a "inventé" (ou "emprunté" plutôt) : "*Having worked out the basic properties of these functions, I wrote about them to Fréchet, in English. He asked me to write a note about them in French. While writing this, I decided I needed a name for these functions. Knowing the word "copula" as a grammatical term for a word or expression that links a subject and predicate, I felt that this would make an appropriate name for a function that links a multidimensional distribution to its one-dimensional margins, and used it as such. Fréchet received my note, corrected one mathematical statement, made some minor corrections to my French, and had the note published by the Statistical Institute of the University of Paris as Sklar (1959).*" (Sklar (1996)).

# 18 Compendium

1. Compendium (Le Petit Robert, 2018) : n.m. Abrégé.
2. Compendium (Le Grand Larousse, 2017) : n.m. Résumé d'une science, d'une doctrine.