

Modèles de base en assurance de dommages

Étienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

2018-11-07



UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Avant-propos

Source pour le contenu des diapos :

- [Cossette and Marceau, 2018].

Calculs et illustrations :

- Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project.
- Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Avant-propos

Le logiciel GNU R et les bibliothèques sont disponibles sur le site du R Project et du Comprehensive R Archive Network (CRAN) :

<https://cran.r-project.org/>.

L'environnement RStudio est disponible sur le site suivant :

<https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/>.

Packages R recommandés :

| | | |
|-------------------|----------|-----------|
| ActuaR | polynom | statmod |
| copula | pracma | stats |
| lifecontingencies | psych | SuppDists |
| MASS | cubature | Deriv |
| VGAM | flexsurv | |

Table des matières I

- 1 Avant-propos
- 2 Mécanisme d'assurance
- 3 Outils de base
- 4 Mesures de risque et primes
 - Généralités
 - Mise en place
 - Espérances tronquées
 - Prime stop-loss
 - Fonction quantile
 - Théorème de la fonction quantile
 - Méthode inverse de simulation et méthode Monte-Carlo
 - Théorème Transformation intégrale de la probabilité
 - Fonction croissante
 - Mesures VaR et TVaR
 - Évaluation de la VaR et méthode Monte Carlo
 - Évaluation de la TVaR et méthode Monte Carlo

Table des matières II

- Logiciel R
- Illustration numérique

5 Mutualisation des risques d'assurance

- Généralités
- Transformée de Laplace-Stieltjes
- Fonction de génératrice de probabilité
- Méthodes d'approximation
- Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a.
- Propriétés désirables des mesures de risque
- Autres propriétés désirables
- Mesure VaR
- Mesure TVaR
- Preuve no1 de la sous-additivité de la TVaR
- Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR
- Portefeuille homogène de risques d'assurance
- Illustration numérique

Table des matières III

- Mesure de risque invariante à la distribution

6 Définition de X

- Généralités
- Espérance de X
- Variance de X
- Fonction de répartition de X
- TLS de X
- Algorithme de simulation

7 Distributions de fréquence

- Généralités
- Loi de Poisson
- Loi binomiale négative

8 Généralisation des lois de fréquence

- Lois Poisson-mélange
- Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

9 Distributions de sévérité

Table des matières IV

- Généralités
- Caractéristiques générales
- Loi exponentielle
- Loi gamma
- Loi Erlang
- Loi lognormale
- Loi Pareto
- Comparaison des lois gamma, lognormale et de Pareto

10 Illustration numérique

11 Mutualisation en assurance dommages

- Généralités
- Loi Poisson composée

12 Références

Mécanisme d'assurance

Les opérations d'une compagnie d'assurance dommages sont brièvement résumées ci-dessous:

- 1 Souscription et tarification
- 2 Renouvellement et tarification
- 3 Gestion et paiement des sinistres
- 4 Réserves en assurance dommages
- 5 Solvabilité et allocation de capital

Les actuaires interviennent dans chacune de ces étapes

Pour un résumé sur les opérations d'une compagnie d'assurance en lien avec les interventions des actuaires, voir, e.g, [Frees, 2015].

Les calculs pour la tarification, les réserves, la solvabilité et l'allocation de capital reposent sur des modèles de risque (en assurance dommages).

Étapes de la modélisation :

- 1 Données
- 2 Choix du modèle : estimation et calibration
- 3 Quantification : primes et mesures de risques
- 4 Décisions

Gestion des risques (du point de vue de l'assuré) :

- Identification des risques
- Risque transféré vs risque auto-géré
- Risque transféré à un assureur
- Prime demandée par un assureur

Contrat d'assurance :

- Identification des périls couverts par le contrat d'assurance
- Modélisation des coûts éventuels pour un contrat
- Calculs de la prime

L'ensemble de la procédure pour déterminer la prime d'un contrat d'assurance dommages est appelée "tarification".

Les coûts pour un contrat sont modélisés par une v.a. X .

La prime Π est calculée à partir du modèle choisi pour la v.a. X selon des principes de prime.

Les mesures de risque peuvent être considérés à titre de principes de prime.

Dans le contexte de la tarification d'un contrat d'assurance, l'espérance de la v.a. X est considérée comme la prime pure pour le contrat.

Aperçu global de la procédure de tarification ([Parodi, 2014]) :

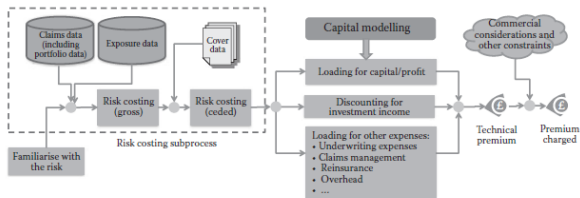


FIGURE 1.8

The high-level pricing process. Our elementary example in Section 1.1 contains these steps, albeit in a rudimentary form.

Mécanisme d'assurance

Aperçu détaillé de la procédure de tarification ([Parodi, 2014]) :

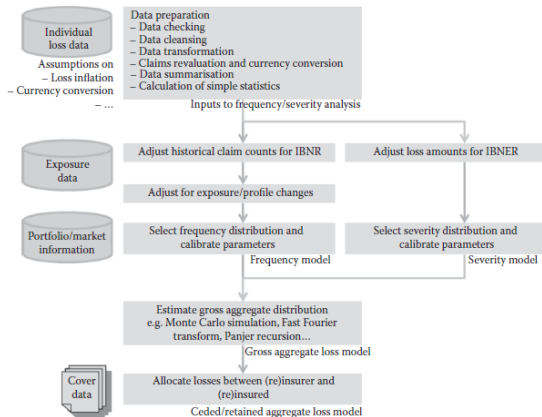


FIGURE 6.1

The risk costing subprocess according to the frequency/severity approach. The main difference between this and the simple example is that frequency and severity are analysed separately and are then combined with, for example, a Monte Carlo simulation. Note that in practice there will be many variations to this simple process, but it is fair to say that this is the 'vanilla' version of the frequency/severity approach.

Outils de base

La modélisation des risques en actuariat, en général, et en actuariat pour l'assurance général repose à la fois sur des notions de probabilité et des méthodes statistiques.

Comme on le verra, le modèle fondamental pour les coûts en assurances dommages repose sur deux composantes :

- nombre de sinistres (v.a. positives discrètes, pour les modèles sur période fixe, ou processus aléatoires de comptage, pour les modèles dynamiques)
- montant d'un sinistre (v.a. positive, généralement continue)

Dans les prochaines sections, on présente les définitions de certaines outils de la théorie des probabilité, en introduisant les notions actuarielles qui s'y rattachent.

Les méthodes statistiques seront introduites plus tard.

On aborde les notions suivantes :

- Fonction stop-loss
- Fonction quantile
- Mesures de risque
- Méthodes de simulation

Mesures de risque et primes

Mesures de risque et primes

Généralités

En actuariat, les coûts d'un contrat, d'une ligne d'affaires, ou d'un portefeuille sont représentés par une v.a. X , appelée *risque*.

Dans le contexte de l'assurances dommages, la v.a. X , qui représente les coûts d'un contrat d'assurance, est positive.

Le contrat d'assurance formalise le transfert d'un risque (v.a. X) de l'assuré vers l'assureur.

En contrepartie, l'assureur demande à l'assuré de lui verser une prime (constante) $\Pi(X)$.

Mesures de risque et primes

Généralités

En émettant plusieurs contrats, l'assureur constitue un portefeuille de risques, représentés par des v.a. X_1, \dots, X_n .

Les v.a. X_1, \dots, X_n peuvent être indépendantes ou dépendantes.

Les coûts d'assurance (souscription) de l'assureur résultent de la somme des v.a. X_1, \dots, X_n :

$$S = X_1 + \dots + X_n.$$

D'un point de vue de l'actuaire de l'assureur, les enjeux en lien avec les opérations d'assurance sont les suivants :

- modéliser à la fois les coûts (risques X_1, \dots, X_n) des différents contrats d'assurances émis par la compagnie d'assurance ;
- modéliser la structure de dépendance régissant les interactions entre ces v.a. ;
- modéliser les coûts (risque global, v.a. S) qui résultent de la mutualisation des coûts des contrats d'assurance.

Mesures de risque et primes

Généralités

Pour mesurer quantitativement le risque d'un contrat ou d'un portefeuille de contrats d'assurance, on a recours à une mesure de risque $\varsigma(Y)$, où $Y = X$ (pour un contrat) et $Y = S$ pour un portefeuille,

Deux exemples importants d'application d'une mesure de risque :

- Tarification : la mesure de risque est utilisée pour calculer la prime :

$$\Pi(X) = \varsigma(X);$$

- Solvabilité : la mesure de risque sert à calculer le capital associé au portefeuille :

$$\text{capital}(S) = \varsigma(S);$$

Mesures de risque et primes

Généralités

L'actuaire de l'assureur doit aussi veiller à modéliser d'autres risques, tels que les risques de taux d'intérêt, de crédit, ou de risques opérationnels.

Pour faciliter la présentation, on s'intéresse dans cet exposé à la modélisation de la v.a. X dans le contexte de l'assurance dommages.

Mesures de risque et primes

Mise en place

Soit une v.a. positive X représentant le risque d'un contrat ou d'un portefeuille.

Notations de bases :

- Fonction de répartition :

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x), x \geq 0;$$

- Espérance (si elle existe) :

$$E[X] = \int_0^{\infty} x dF_X(x);$$

- En actuariat, la prime pure correspond à $E[X]$.

Définition 1

Soit une v.a. X avec $E[X] < \infty$. Les espérances tronquées sont définies par

$$E[X \times 1_{\{X > d\}}] = \int_d^{\infty} x dF_X(x),$$

et

$$E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] = \int_{-\infty}^d x dF_X(x),$$

où $d \in \mathbb{R}$.

Relation :

$$E[X \times 1_{\{X > d\}}] + E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] = E[X \times (1_{\{X > d\}} + 1_{\{X \leq d\}})] = E[X].$$

Mesures de risque et primes

Espérance tronquées

Lorsque X est une v.a. continue, les expressions de $E[X \times 1_{\{X > d\}}]$ et $E[X \times 1_{\{X \leq d\}}]$ deviennent

$$E[X \times 1_{\{X > d\}}] = \int_d^{\infty} x f_X(x) dx,$$

et

$$E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] = \int_{-\infty}^d x f_X(x) dx,$$

où $d \in \mathbb{R}$.

Exemple 1

Soit $X \sim \text{Exp}(\beta)$ dont la fonction de densité est $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. On obtient

$$\begin{aligned} E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] &= \int_0^d x f_X(x) dx \\ &= \int_0^d x \beta e^{-\beta x} dx = -de^{-\beta d} + \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta d}). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} E[X \times 1_{\{X > d\}}] &= \int_d^\infty x f_X(x) dx = \frac{1}{\beta} + de^{-\beta d} - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta d}) \\ &= de^{-\beta d} + \frac{1}{\beta} e^{-\beta d}. \quad \square \end{aligned} \tag{1}$$

Exemple 2

Soit la v.a. continue positive $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ où
 $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. De plus, $F_X(x) = H(x; \alpha, \beta)$
et $\overline{F}(x) = \overline{H}(x; \alpha, \beta)$. On obtient

$$\begin{aligned} E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] &= \int_0^d x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^d \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha+1-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\alpha}{\beta} H(d; \alpha+1, \beta) = E[X] H(d; \alpha+1, \beta). \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} E[X \times 1_{\{X > d\}}] &= E[X] - E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] \\ &= E[X] (1 - H(d; \alpha+1, \beta)) \\ &= E[X] \overline{H}(d; \alpha+1, \beta). \quad \square \end{aligned} \tag{2}$$

La prime *stop-loss*, appelée aussi fonction *stop-loss*, est fréquemment utilisée en actuariat

Définition 2

Soit une v.a. X avec $E[X] < \infty$. La fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$ correspond à

$$\pi_X(d) = E[\max(X - d; 0)], \quad (3)$$

où $d \in \mathbb{R}$.

Relation : Soit une v.a. positive X avec $E[X] < \infty$.

$$\pi_X(0) = E[X].$$

Prime stop-loss et espérance tronquée : Comme

$$\max(X - d; 0) = X \times 1_{\{X > d\}} - d \times 1_{\{X > d\}},$$

on déduit

$$\pi_X(d) = E[X \times 1_{\{X > d\}}] - d \times \overline{F}_X(d),$$

où $d \in \mathbb{R}$.

Mesures de risque et primes

Prime *stop-loss*

Si la v.a. X obéit à une loi continue, (3) devient

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} (x - d) f_X(x) dx. \quad (4)$$

De plus, si la v.a. X est continue positive, l'expression (4) pour la fonction *stop-loss* devient

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} \overline{F}_X(x) dx.$$

Exemple 3

Soit la v.a. $X \sim \text{Exp}(\beta)$. La fonction stop-loss est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_d(X) &= E[\max(X - d; 0)] \\ &= \int_d^\infty \overline{F}_X(x) dx \\ &= \int_d^\infty e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{1}{\beta} e^{-\beta d}. \quad \square\end{aligned}$$

Exemple 4

Soit la v.a. $X \sim Ga(\alpha, \beta)$.

La fonction stop-loss est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_d(X) &= E[\max(X - d; 0)] \\ &= E[X \times 1_{\{X > d\}}] - d\bar{F}_X(d) \\ &= E[X] \bar{H}(d; \alpha + 1, \beta) - d\bar{H}(d; \alpha, \beta),\end{aligned}$$

for $d \geq 0$. \square

Mesures de risque et primes

Prime *stop-loss*

Si la v.a. $X = Kh$ ($h \in \mathbb{R}^+$) où K obéit à une loi discrète dont le support est \mathbb{N} et si $d = hk_0$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$, on a

$$\pi_X(d) = \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0h; 0) f_X(kh) = h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \overline{F}_X(kh).$$

Les définitions de plusieurs mesures de risque reposent en grande partie sur la fonction quantile.

On débute avec la définition de base de la fonction quantile.

Définition 3

Soit la v.a. X avec fonction de répartition F_X . On définit la fonction inverse F_X^{-1} de F_X par

$$F_X^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\},$$

pour $u \in (0,1)$.

La fonction quantile de X correspond à la fonction inverse F_X^{-1} .

Mesures de risque et primes

Fonction quantile

Si la v.a. X est continue, alors F_X^{-1} correspond à la seule valeur x_u telle que $F_X(x_u) = u$.

Pour certaines lois continues, il est possible d'obtenir une expression fermée pour la fonction quantile.

Autrement, on a recours à des méthodes d'optimisation numérique pour évaluer la valeur $F_X^{-1}(u)$ pour une valeur fixée $u \in (0,1)$.

Exemple 5

Soit la v.a. $X \sim \text{Exp}(\beta)$ dont la fonction de répartition est $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$, $x \geq 0$.

L'expression fermée de la fonction quantile est déterminée en isolant x dans la relation $F_X(x) = u$, $u \in (0,1)$.

On obtient $F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\beta} \ln(1 - u)$. \square

Théorème 1

Théorème de la fonction quantile Soit une v.a. X avec fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1} . Soit une v.a. $U \sim U(0,1)$. Alors, la fonction de répartition de $F_X^{-1}(U)$ est F_X , i.e., $F_X^{-1}(U) \sim X$.

On fait la preuve en deux étapes.

Étape no1 - v.a. continues

On suppose que la v.a. X est continue.

Comme les évènements $\{F_X^{-1}(U) \leq x\}$ et $\{U \leq F_X(x)\}$ coïncident, alors on a

$$\Pr(F_X^{-1}(U) \leq x) = \Pr(U \leq F_X(x)).$$

De la fonction de répartition de $U \sim U(0,1)$, on déduit

$$\Pr(F_X^{-1}(U) \leq x) = \Pr(U \leq F_X(x)) = F_X(x).$$

Étape no2 - cas général

Maintenant, on considère le cas général incluant le cas précédent mais aussi le cas d'une v.a. X dont la fonction de répartition peut avoir des sauts et des portions horizontales . Le cas des v.a. discrètes est aussi inclus.

On doit vérifier que les événements $\{F_X^{-1}(U) \leq x\}$ et $\{U \leq F_X(x)\}$ coïncident.

Fonction quantile

Théorème de la fonction quantile - Preuve

Étape no2 - cas général (suite)

D'abord, on suppose que $x \geq F_X^{-1}(u)$, pour $u \in (0,1)$.

Puisque

$$F_X^{-1}(u) = \inf \{y \in \mathbb{R}, F_X(y) \geq u\},$$

alors $F_X(x) \geq u$, pour $u \in (0,1)$.

Bref, on a $x \geq F_X^{-1}(u) \Rightarrow F_X(x) \geq u$, pour $u \in (0,1)$.

Étape no2 - cas général (suite)

Ensuite, on suppose que $F_X(x) \geq u$, ce qui implique

$$x \geq F_X^{-1}(u) = \inf \{y \in \mathbb{R}, F_X(y) \geq u\},$$

pour $u \in (0,1)$.

Puisque les évènements $\{F_X^{-1}(U) \leq x\}$ et $\{U \leq F_X(x)\}$ coïncident, on a

$$\Pr(F_X^{-1}(U) \leq x) = \Pr(U \leq F_X(x)) = F_X(x).$$

Mesures de risque et primes

Théorème de la fonction quantile - Illustration

Illustration:

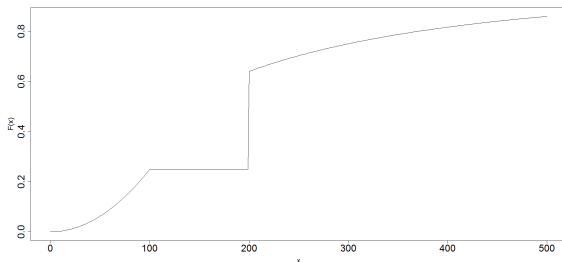


Figure: Fonction de répartition avec un saut et une partie horizontale.

Mesures de risque et primes

Théorème de la fonction quantile - Représentation

Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F et une fonction quantile F^{-1} .

Soit une v.a. $U \sim Unif(0,1)$.

Selon ce théorème, on peut représenter la v.a. X comme suit :

$$X = F^{-1}(U). \quad (5)$$

La représentation en (5) est fort utile.

Par exemple, la méthode de simulation inverse découle de la représentation en (5).

Mesures de risque et primes

Théorème de la fonction quantile - Espérance

On suppose $E[X] < \infty$. En utilisant la représentation en (5), on a

$$E[X] = E[F^{-1}(U)] = \int_0^1 F^{-1}(u) du. \quad (6)$$

De plus, soit une fonction φ tel que $E[\varphi(X)] < \infty$. Alors, on a

$$E[\varphi(X)] = E[\varphi(F^{-1}(U))] = \int_0^1 \varphi(F^{-1}(u)) du. \quad (7)$$

Les résultats en (6) et (7) servent à justifier la méthode Monte Carlo.

Mesures de risque et primes

Méthode inverse de simulation et méthode Monte Carlo

Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F_X et une fonction quantile F_X^{-1} .

Soit une v.a. $U \sim Unif(0,1)$ dont on simule m réalisations $U^{(1)}, \dots, U^{(m)}$ à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires.

Algorithme 1

Méthode inverse de simulation :

- Simuler m réalisations $U^{(1)}, \dots, U^{(m)}$ de la v.a. $U \sim \text{Unif}(0,1)$.
- Simuler m réalisations $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$ de la v.a. X avec les m réalisations $U^{(1)}, \dots, U^{(m)}$:

$$X^{(j)} = F_X^{-1}(U^{(j)}) \quad (\text{théorème de la fonction quantile}),$$

pour $j = 1, \dots, m$.

Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F_X et une fonction quantile F_X^{-1} .

Idée de la méthode Monte-Carlo :

- Contexte : Soit une fonction φ tel que $E[\varphi(X)] < \infty$.
- But : Évaluer $\zeta = E[\varphi(X)]$.
- Appliquer le théorème de la fonction quantile

$$\zeta = E[\varphi(X)] = E[\varphi(F_X^{-1}(U))] = \int_0^1 \varphi(F_X^{-1}(u))du.$$

- Approximer l'intégrale $\zeta = \int_0^1 \varphi(F_X^{-1}(u))du$ par une moyenne empirique.
- Convergence de la moyenne empirique vers ζ en vertu de la loi des grands nombres.

Algorithme 2

Méthode Monte-Carlo :

- Simuler m réalisations $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$ de la v.a. X .
- Calculer l'approximation $\tilde{\zeta}_m$ de $\zeta = E[\varphi(X)]$ avec

$$\tilde{\zeta}_m = \frac{1}{m} \times \sum_{j=1}^m \varphi(X^{(j)})$$

Par la loi des grands nombres, l'approximation $\tilde{\zeta}_m$ converge vers ζ avec probabilité 1 quand le nombre m de réalisations tend vers ∞ .

Mesures de risque et primes

Méthode inverse de simulation et méthode Monte Carlo

La variance de $\tilde{\zeta}$ est

$$\text{Var}(\tilde{\zeta}) = \frac{1}{m} \text{Var}(\varphi(X)).$$

En vertu du théorème central limite, l'erreur $(\tilde{\zeta} - \zeta)$ est approximativement normale avec moyenne 0 et écart type $\frac{\sqrt{\text{Var}(\varphi(X))}}{\sqrt{m}}$.

Cela signifie que la qualité de l'approximation obtenue par simulation s'améliore d'un facteur d'ordre \sqrt{m} .

Le terme $\frac{\sqrt{\text{Var}(\varphi(X))}}{\sqrt{m}}$ est habituellement appelé l'erreur standard.

Mesures de risque et primes

Méthode inverse de simulation et méthode Monte Carlo

Souvent, comme $\text{Var}(\varphi(X))$ ne peut pas être évaluée avec exactitude, on l'estime à l'aide de l'estimateur échantillonnal classique

$$\widehat{\text{Var}}(\varphi(X)) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \left(\varphi(X^{(j)}) - \tilde{\zeta} \right)^2. \quad (8)$$

On se base sur la distribution asymptotique de l'erreur $(\tilde{\zeta} - \zeta)$ afin de construire un intervalle de confiance de niveau α (e.g. 95 %) pour ζ dont les bornes sont fournies par

$$\tilde{\zeta} \pm \frac{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\varphi(X))}}{\sqrt{m}} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Mesures de risque et primes

Méthode inverse de simulation et méthode Monte Carlo

Généralement, comme la valeur $\sqrt{\text{Var}(\varphi(X))}$ ne peut pas être obtenue, on utilise (8) pour calculer les bornes de l'intervalle de confiance

$$\tilde{\zeta} \pm \frac{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\varphi(X))}}{\sqrt{m}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Théorème 2

Transformation intégrale de la probabilité Soit une v.a. continue X avec une fonction de répartition F_X et une fonction quantile F_X^{-1} . Alors, $F_X(X) \sim Unif(0,1)$.

Le Théorème 2 est fréquemment utilisé dans le contexte de la théorie des copules.

Note : L'expression "transformation intégrale de la probabilité" est utilisée par la Revue Canadienne de Statistique pour traduire l'expression anglaise "probability integral transform".

Selon la proposition suivante, la fonction quantile d'une transformation croissante d'une v.a. s'exprime comme cette transformation de la fonction quantile de cette v.a.

Proposition 1

Soit une v.a. X . Si φ est une fonction croissante, alors on a

$$F_{\varphi(X)}^{-1}(u) = \varphi\left(F_X^{-1}(u)\right), \quad (9)$$

pour $u \in (0,1)$.

Mesures de risque et primes

Mesures VaR et TVaR

La mesure *Value at Risk* (VaR) est une mesure de risque très populaire en actuariat et en gestion des risques.

Définition 4

Soit $0 < \kappa < 1$. La mesure VaR avec un niveau de confiance κ associée à la v.a. X est définie par $VaR_{\kappa}(X) = F_X^{-1}(\kappa)$.

Ainsi, la probabilité que la v.a. X prenne une valeur supérieure à la VaR est moindre ou égale à $1 - \kappa$.

Mesures de risque et primes

Mesures VaR et TVaR

Toutefois, la mesure VaR ne donne pas d'information sur le comportement de la distribution au delà de la VaR.

Par exemple, pour une v.a. continue X et pour $\kappa = 99.99\%$, cela signifie qu'il y a une probabilité de 0.01% que la v.a. X prenne une valeur qui est supérieure à $VaR_{99.99\%}(X)$ sans nous préciser l'ampleur de la valeur que X peut prendre si elle excède la VaR.

Mesures de risque et primes

Mesure VaR et TVaR

La mesure *Tail Value at Risk* (TVaR) est proposée comme une alternative à la mesure VaR.

Définition 5

Soit $0 \leq \kappa < 1$. La mesure TVaR avec un niveau de confiance κ est définie par

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{1 - \kappa} \int_{\kappa}^1 VaR_u(X) du, \quad (10)$$

avec $TVaR_0(X) = \int_0^1 VaR_u(X) du = E[X]$.

Proposition 2

Soit une v.a. X avec $E[X] < \infty$. Alors, à partir de (10), on déduit les deux expressions suivantes :

1 Expression avec la prime stop-loss :

$$TVaR_{\kappa}(X) = VaR_{\kappa}(X) + \frac{1}{1-\kappa} \Pi_X(VaR_{\kappa}(X)) \quad (11)$$

2 Expression avec l'espérance tronquée :

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} E[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa} VaR_{\kappa}(X) (F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa). \end{aligned} \quad (12)$$

Preuve

Démonstration de (11). On a

$$\begin{aligned}TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 VaR_u(X) du \\&= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 (VaR_u(X) - VaR_{\kappa}(X) + VaR_{\kappa}(X)) du \\&= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 (VaR_u(X) - VaR_{\kappa}(X)) du + \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 (VaR_{\kappa}(X)) du \\&= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 (F_X^{-1}(u) - VaR_{\kappa}(X)) du + \frac{1}{1-\kappa} VaR_{\kappa}(X) (1-\kappa) \\&= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(F_X^{-1}(U) - VaR_{\kappa}(X); 0)] + VaR_{\kappa}(X) \\&= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] + VaR_{\kappa}(X) \text{ (Th. Fn. Quantile)}\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

Preuve

Démonstration de (2). De (11), on déduit

$$\begin{aligned}TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] + VaR_{\kappa}(X) \\&= \frac{1}{1-\kappa} E[(X - VaR_{\kappa}(X)) \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] + VaR_{\kappa}(X) \\&= \frac{1}{1-\kappa} E[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] \\&\quad - \frac{1}{1-\kappa} VaR_{\kappa}(X) \times E[1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] + VaR_{\kappa}(X) \\&= \frac{1}{1-\kappa} E[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] \\&\quad - \frac{1}{1-\kappa} (VaR_{\kappa}(X) \times (1 - F_X(VaR_{\kappa}(X))) - (1-\kappa) VaR_{\kappa}(X)) \\&= \frac{1}{1-\kappa} \{E[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] + VaR_{\kappa}(X) (F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa)\}\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

Mesures de risque et primes

Mesures VaR et TVaR

Soit une v.a. continue X .

Alors, on a

$$(F_X(\text{VaR}_\kappa(X)) - \kappa) = 0.$$

De (2), on déduit

$$\text{TVaR}_\kappa(X) = \frac{1}{1 - \kappa} E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_\kappa(X)\}}], \quad (13)$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

Exemple 6

Soit la v.a. $X \sim \text{Exp}(\beta)$, avec

$$\text{VaR}_\kappa(X) = F_X^{-1}(1 - \kappa) = -\frac{1}{\beta} \ln(1 - \kappa).$$

Or,

$$\Pi_X(\text{VaR}_\kappa(X)) = \frac{1}{\beta} e^{-\beta \text{VaR}_\kappa(X)} = \frac{1 - \kappa}{\beta}.$$

De (11), on déduit

$$\text{TVaR}_\kappa(X) = \text{VaR}_\kappa(X) + \frac{1}{\beta}. \quad \square$$

Exemple 7

Soit la v.a. $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ où F_X^{-1} n'a pas de forme fermée.

La fonction quantile de la loi gamma est fournie dans le logiciel R.

Avec (2) et (13), on obtient

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}]}{1 - \kappa} = \frac{E[X] \overline{H}(VaR_{\kappa}(X); \alpha + 1, \beta)}{1 - \kappa}. \quad \square$$

Mesures de risque et primes

Évaluation de la VaR et méthode Monte Carlo

Soit une v.a. X dont on a produit m réalisations $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$. Une approximation de F_X est fournie à l'aide de la fonction de répartition empirique définie par

$$F^{(m)}(x) \simeq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m 1_{\{X^{(j)} \leq x\}}. \quad (14)$$

Puisque $F^{(m)}$ est une fonction de répartition associée à une distribution discrète, il en découle que l'approximation de $VaR_{\kappa}(X)$ est

$$VaR_{\kappa}(X) \simeq F^{(m)-1}(\kappa) = \inf \left\{ X^{(j)}, i = 1, 2, \dots, m ; F^{(m)}(X^{(j)}) \geq \kappa \right\}.$$

Mesures de risque et primes

Évaluation de la TVaR et méthode Monte Carlo

Soit le vecteur de réalisations classées en ordre croissant de X , que l'on note par $(X^{[1]}, \dots, X^{[m]})$.

On fixe j_0 tel que $F^{(m)-1}(\kappa) = X^{[j_0]}$.

En utilisant les expressions (10) et (2) pour la TVaR conjointement avec (14), l'approximation de $TVaR_\kappa(X)$ correspond à

$$\begin{aligned} & TVaR_\kappa(X) \\ & \approx \frac{1}{1-\kappa} \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X^{(j)} \times 1_{\{X^{(j)} > F^{(m)-1}(\kappa)\}} \right) \\ & \quad + \frac{1}{1-\kappa} \left(F^{(m)-1}(\kappa) \left(F^{(m)} \left(F^{(m)-1}(\kappa) \right) - \kappa \right) \right) \\ & \approx \frac{1}{1-\kappa} \left(\frac{1}{m} \sum_{j=j_0+1}^m X^{[j]} + X^{[j_0]} \left(F^{(m)} \left(X^{[j_0]} \right) - \kappa \right) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Mesures de risque et primes

Évaluation de la TVaR et méthode Monte Carlo

Supposons que $m \times \kappa$ est un entier.

Alors cet entier est j_0 . Il en résulte que $(F^{(m)}(X^{[j_0]}) - \kappa) = 0$ et (15) devient

$$\begin{aligned}TVaR_{\kappa}(X) &\simeq \frac{1}{m(1-\kappa)} \sum_{j=1}^m X^{(j)} \times 1_{\{X^{(j)} > X^{[j_0]}\}} \\ &= \frac{1}{m-j_0} \sum_{j=j_0+1}^m X^{[j]},\end{aligned}$$

ce qui correspond à la moyenne des $m - j_0$ plus grandes réalisations de X .

Mesures de risque et primes

Évaluation de la TVaR et méthode Monte Carlo

Proposition 3

Soit une v.a. X avec fonction de répartition F_X . Soit une suite de v.a. i.i.d. X_1, \dots, X_n où $X_i \sim X$, $i = 1, 2, \dots, n$. Alors, on a

$$TVaR_\kappa(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=[n\kappa]+1}^n X^{[j]}}{[n(1-\kappa)]} \quad (p.s.), \quad (16)$$

où $[u]$ correspond à la partie entière de u .

Preuve

Voir la preuve de la proposition 4.1 dans [Acerbi and Tasche, 2002] ainsi que le développement aux pages 1494 et 1495 de cet article.

Lois continues paramétriques et logiciel R :

- Loi uniforme : `dunif()`, `punif()`, `qunif()`, `runif()` ;
- Loi exponentielle : `dexp()`, `pexp()`, `qexp()`, `rexp()` ;
- Loi gamma : `dgamma()`, `pgamma()`, `qgamma()`, `rgamma()` ;
- Loi lognormale : `dlnorm()`, `plnorm()`, `qlnorm()`, `rlnorm()`.

Lois discrètes paramétriques et logiciel R :

- Loi Poisson : `dpois()`, `ppois()`, `qpois()`, `rpois()` ;
- Loi binomiale négative : `dnbinom()`, `pnbinom()`, `qnbinom()`, `rnbinom()`.

Mesures de risque et primes

Illustration numérique

Illustration numérique à faire en classe.

Mutualisation des risques d'assurance

Mutualisation des risques d'assurance

Généralités

Les opérations d'assurance sont fondées sur la possibilité de mutualiser les risques d'assurance.

On considère un portefeuille de n risques X_1, \dots, X_n .

Le risque global correspond à aux coûts totaux du portefeuille définis par la v.a.

$$S = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Les coûts totaux espérés du portefeuille sont donnés par

$$E[S] = \sum_{i=1}^n E[X_i].$$

Mutualisation des risques d'assurance

Généralités

Le calcul de $\varsigma(S)$ requiert d'évaluer F_S .

L'évaluation de F_S représente un défi important.

Les risques X_1, \dots, X_n peuvent être indépendants ou dépendants entre eux, ce qui a un impacte sur l'évaluation de F_S .

On peut recourir à la transformée de Laplace-Stietjes et la fonction génératrice de probabilité pour identifier la loi de S ou évaluer F_S .

Définition 6

Soit une v.a. positive X . La transformée de Laplace-Stieltjes (TLS) de la v.a. X est définie par l'espérance suivante :

$$\mathcal{L}_X(t) = E[e^{-tX}] = \int_0^{\infty} e^{-tx} dF_X(x), \quad (17)$$

pour $t \in [0, \infty)$.

Remarques :

- Puisque la v.a. X est positive, l'espérance en (17) est finie pour tout $t > 0$.
- Alors, \mathcal{L}_X existe peu importe la loi de v.a. X .

Mutualisation des risques d'assurance

Transformée de Laplace-Stieltjes

Le résultat suivant permet d'identifier la TLS d'une somme de v.a. indépendantes.

Il est aussi utile pour l'évaluation numérique de F_S .

Proposition 4

Soit les v.a. indépendantes X_1, \dots, X_n dont les TLS sont $\mathcal{L}_{X_i}(r)$, pour $i = 1, \dots, n$. On définit la v.a. $S = X_1 + \dots + X_n$. Alors, la TLS de la v.a. S est donnée par

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \dots \times \mathcal{L}_{X_n}(t),$$

pour $t \in [0, \infty)$.

Mutualisation des risques d'assurance

Transformée de Laplace-Stieltjes

Preuve

La TLS de la v.a. S est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= E[e^{-tS}] = E[e^{-t(X_1 + \dots + X_n)}] \\ &= E[e^{-tX_1} \times \dots \times e^{-tX_n}] \\ &= E[e^{-tX_1}] \times \dots \times E[e^{-tX_n}] \text{ [v.a. indépendantes]} \\ &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \dots \times \mathcal{L}_{X_n}(t),\end{aligned}$$

pour $t \in [0, \infty)$.

Exemple 8

Soit les v.a. indépendantes X_1, \dots, X_n avec $X \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$, pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Alors, la TLS de la v.a. S est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= \mathcal{L}_{X_1}(t) \times \dots \times \mathcal{L}_{X_n}(t) \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_1} \times \dots \times \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_n} = \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}\end{aligned}$$

pour $t \in [0, \infty)$.

On déduit que $S \sim \text{Gamma}(\alpha_1 + \dots + \alpha_n, \beta)$.

Mutualisation des risques d'assurance

Fonction de génératrice de probabilité

Soit une v.a. discrète positive X dont le support est $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$.

La fonction de masse de probabilité (f.m.p.) est notée par

$$f_X(k) = \Pr(X = k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

On introduit la notion de fonction génératrice de probabilité (fgp) pour une v.a. discrète positive.

La fgp est à la fois une espérance d'une fonction de la v.a. X et une série de puissances.

La fgp est utile dans les aspects de la modélisation et des différents calculs à effectuer en actuariat.

Mutualisation des risques d'assurance

Fonction de génératrice de probabilité

Définition 7

La fonction génératrice de probabilités (fgp) de la v.a. X est définie par

$$\mathcal{P}_X(r) = E[r^X] = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) r^k,$$

pour tout nombre complexe r tel que $|r| \leq 1$ (en particulier pour des nombres réels $r \in [0,1]$).

La fonction de génératrice de probabilité (f.g.p.) de la v.a. X permet de représenter la f.m.p. de la v.a. M sous la forme d'une série de puissances.

Les coefficients de cette série de puissances correspondent aux valeurs de la fonction de masse de probabilité.

Mutualisation des risques d'assurance

Fonction de génératrice de probabilité

Propriétés :

- $\mathcal{P}_X(0) = f_X(0)$
- $\mathcal{P}_X(1) = 1.$

On retrouve les coefficients (i.e., les valeurs de la fonction de masse de probabilité de la v.a. X) de la fgp en utilisant le théorème suivant.

Mutualisation des risques d'assurance

Fonction de génératrice de probabilité

Théorème 3

Fonction de masse de probabilité. La valeur de $f_X(k)$ est calculée à partir de $\mathcal{P}_X(t)$ avec

$$f_X(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{dr^k} \mathcal{P}_X(r) \right|_{r=0}. \quad (18)$$

La fgp d'une v.a. discrète positive X définit la distribution de cette v.a. :

- Soit deux v.a. discrètes positives X et Y dont \mathcal{P}_X et \mathcal{P}_Y sont identiques.
- Alors, selon le Théorème 3, les v.a. X et Y ont la même distribution.

Mutualisation des risques d'assurance

Fonction de génératrice de probabilité

Le résultat suivant permet d'identifier la fgp d'une somme de v.a. discrètes indépendantes.

Il est aussi utile pour l'évaluation numérique de F_S .

Proposition 5

Soit les v.a. discrètes positives (avec support \mathbb{N}) indépendantes X_1, \dots, X_n dont les fgp sont $\mathcal{P}_{X_i}(r)$, pour $i = 1, \dots, n$. On définit la v.a. $S = X_1 + \dots + X_n$. Alors, la fgp de la v.a. S est donnée par

$$\mathcal{P}_S(r) = \mathcal{P}_{X_1}(r) \times \dots \times \mathcal{P}_{X_n}(r),$$

pour $r \in [0, 1]$.

Mutualisation des risques d'assurance

Fonction de génératrice de probabilité

Preuve

La fgp de la v.a. S est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(r) &= E[r^S] = E[r^{X_1 + \dots + X_n}] \\ &= E[r^{X_1} \times \dots \times r^{X_n}] \\ &= E[r^{X_1}] \times \dots \times E[r^{X_n}] \text{ [v.a. indépendantes]} \\ &= \mathcal{P}_{X_1}(r) \times \dots \times \mathcal{P}_{X_n}(r),\end{aligned}$$

pour $r \in [0,1]$.

Mutualisation des risques d'assurance

Fonction de génératrice de probabilité

Exemple 9

Soit les v.a. indépendantes X_1, \dots, X_n , avec $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$, pour $i = 1, \dots, n$. On définit la v.a. $S = X_1 + \dots + X_n$.

Alors, la fgp de la v.a. S est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(r) &= \mathcal{P}_{X_1}(r) \times \dots \times \mathcal{P}_{X_n}(r) \\ &= e^{\lambda_1(r-1)} \times \dots \times e^{\lambda_n(r-1)} \\ &= e^{\lambda_1(r-1) + \dots + \lambda_n(r-1)} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(r-1)},\end{aligned}$$

pour $r \in [0, 1]$.

On déduit que $S \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

Mutualisation des risques d'assurance

Méthodes d'approximation

Généralement, on ne parvient pas à identifier la loi de S .

On doit recourir à des méthodes d'approximation :

- Méthodes d'approximation basées sur les moments ;
- Méthodes numériques basées sur des relations récursives ;
- Méthodes basées sur la simulation Monte-Carlo.

Les méthodes numériques basées sur des relations récursives sont présentées plus loin.

Mutualisation des risques d'assurance

Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a.

Soit une v.a. Z qui est définie en fonction des v.a. X_1, \dots, X_n i.e.
 $Z = \phi(X_1, \dots, X_n)$.

La forme explicite de la fonction de répartition F_Z ne peut être obtenue et on peut produire des réalisations de X_1, \dots, X_n .

La procédure pour simuler la réalisation j , $Z^{(j)}$ ($j = 1, \dots, m$), de la v.a. Z est décrite comme suit.

Mutualisation des risques d'assurance

Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a.

Algorithme 3

Simulation d'une fonction de v.a.

1 Étape 1. On simule les réalisations de $(X_1^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$ de (X_1, \dots, X_n) .

2 Étape 2. On évalue $Z^{(j)} = \phi(X_1^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$.

On répète pour $j = 1, 2, \dots, m$.

Un exemple de fonction intéressante pour analyser le comportement aléatoire du risque global d'un portefeuille d'assurance est

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Mutualisation des risques d'assurance

Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a.

Illustration numérique à faire en classe.

Mutualisation des risques d'assurance

Propriétés désirables des mesures de risque

Les mesures de risque peuvent être utilisées dans différents contextes, notamment :

- item calcul du capital pour un portefeuille ;
- calcul de la prime pour un contrat d'assurance ;
- outils de comparaison.

On présente les propriétés désirables d'une mesure de risque ς_{κ} .

Mutualisation des risques d'assurance

Propriétés désirables des mesures de risque

Propriété 1

Homogénéité. Soient un risque X et un scalaire $a \in \mathbb{R}^+$. Une mesure ς_κ est homogène si

$$\varsigma_\kappa(aX) = a\varsigma_\kappa(X),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Une modification d'unité monétaire apportée au risque X conduit à une modification du même ordre pour la valeur obtenue avec la mesure de risque.

Mutualisation des risques d'assurance

Propriétés désirables des mesures de risque

Propriété 2

Invariance à la translation. Soient un risque X et un scalaire $a \in \mathbb{R}$. Une mesure ς_{κ} est invariante à la translation si

$$\varsigma_{\kappa}(X + a) = \varsigma_{\kappa}(X) + a,$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Par exemple, pour la v.a. perte définie par $L = X - \pi$ où π correspond à la prime associée à X , il est justifié d'avoir $\varsigma_{\kappa}(L) = \varsigma_{\kappa}(X) - \pi$.

Mutualisation des risques d'assurance

Propriétés désirables des mesures de risque

Propriété 3

Monotonocité. Soient deux risques X_1 et X_2 tels que $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$. Une mesure ς_κ est monotone si

$$\varsigma_\kappa(X_1) \leq \varsigma_\kappa(X_2),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Interprétation :

- Prime : Si le risque X_2 est plus dangereux que le risque X_1 , il est raisonnable que la mesure de risque mène à une prime plus élevée pour le risque X_2 que celle qui est calculée pour le risque X_1 .
- Capital : Si le risque X_2 est plus dangereux que le risque X_1 , il est raisonnable que la mesure de risque conduise à un capital pour le risque X_2 supérieur à celui calculé pour le risque X_1 .

Mutualisation des risques d'assurance

Propriétés désirables des mesures de risque

Propriété 4

Sous-additivité. Soient n risques X_1, \dots, X_n . La mesure ς_κ est sous-additive si

$$\varsigma_\kappa(X_1 + \dots + X_n) \leq \varsigma_\kappa(X_1) + \dots + \varsigma_\kappa(X_n),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

La propriété de sous-additivité est très importante relativement à la mutualisation des risques.

Mutualisation des risques d'assurance

Propriétés désirables des mesures de risque

Il est intéressant d'examiner le bénéfice de mutualisation qui résulte de la mise en commun des risques X_1, \dots, X_n .

Le bénéfice de mutualisation est défini par

$$B_{\kappa}^{\varsigma}(S) = \sum_{i=1}^n \varsigma_{\kappa}(X_i) - \varsigma_{\kappa}(S)$$

Comme la mutualisation des risques est le fondement de l'assurance, il est souhaitable que $B_{\kappa}^{\varsigma}(S)$ soit positif.

Soit ς une mesure sous-additive. Alors, on observe

$$B_{\kappa}^{\varsigma}(S) = \sum_{i=1}^n \varsigma_{\kappa}(X_i) - \varsigma_{\kappa}(S) \geq 0,$$

pour tout $\kappa \in (0,1)$.

Mutualisation des risques d'assurance

Propriétés désirables des mesures de risque

La notion de mesure cohérente a été introduite par [Artzner et al., 1999].

Definition 1

Mesure de risque cohérente. On dit qu'une mesure de risque ς_K est *cohérente* si les propriétés 1, 2, 3 et 4 sont satisfaites.

Mutualisation des risques d'assurance

Autres propriétés désirables des mesures de risque

Dans la littérature actuarielle (voir e.g. [Denuit et al., 2006]), les trois propriétés suivantes sont aussi jugées désirables.

Mutualisation des risques d'assurance

Autres propriétés désirables des mesures de risque

Propriété 5

Marge de risque non excessive. La mesure ς_{κ} ne doit pas induire une marge de risque excessive. Si $X \leq x_{\max}$, alors on a $\varsigma_{\kappa}(X) \leq x_{\max}$, pour $0 < \kappa < 1$.

Interprétation :

- Prime : Il est injustifié d'exiger une prime supérieure au montant maximal que les coûts d'un risque ou d'un portefeuille peut prendre.
- Capital : Il est injustifié de détenir un capital en excédent du montant maximal que les coûts d'un risque ou d'un portefeuille peut prendre.

Mutualisation des risques d'assurance

Autres propriétés désirables des mesures de risque

Propriété 6

Marge de risque positive. On doit avoir $\varsigma_{\kappa}(X) \geq E[X]$, pour $0 < \kappa < 1$.

Interprétation :

- Prime : Le capital minimum doit être supérieure à la prime pure sinon il y aura ruine certaine.
- Capital : Le capital minimum doit excéder les coûts espérés sinon il y aura ruine certaine.

Mutualisation des risques d'assurance

Autres propriétés désirables des mesures de risque

Propriété 7

Marge de risque justifiée. Soit a une constante quelconque. On doit toujours avoir $\varsigma_{\kappa}(a) = a$, pour $0 < \kappa < 1$.

Interprétation :

- Prime : Il n'est pas approprié de demander une prime différente de a si les coûts pour un contrat correspondent à la constante a .
- Capital : Il n'est pas justifié de détenir un capital différent de a si les coûts pour un portefeuille correspondent à la constante a .

Mutualisation des risques d'assurance

Mesure VaR

La mesure VaR satisfait aux propriétés suivantes :

- Invariance à la translation ;
- Homogénéité ;
- Monotonicité ;
- Elle n'introduit pas une marge de risque excessive ;
- Elle n'introduit pas une marge de risque injustifiée.

La mesure VaR ne satisfait pas aux propriétés suivantes :

- Sous-additivité ;
- Elle n'introduit pas une marge de risque positive pour tout $\kappa \in (0,1)$.

Mutualisation des risques d'assurance

Mesure VaR

Exemple 10

Soient les v.a. indépendantes X_1 et X_2 où $X_i \sim \text{Exp}(0.1)$. On sait que $X_1 + X_2 \sim \text{Erlang}(2, 0.1)$. Il est clair avec les valeurs de $\text{VaR}_\kappa(X_1 + X_2)$ et $\text{VaR}_\kappa(X_1) + \text{VaR}_\kappa(X_2)$ qui sont fournies dans le tableau suivant que la mesure VaR n'est pas sous-additive :

| κ | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.8 | 0.9 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\text{VaR}_\kappa(X_1) + \text{VaR}_\kappa(X_2)$ | 0.2107 | 0.4463 | 1.3863 | 3.2189 | 4.6052 |
| $\text{VaR}_\kappa(X_1 + X_2)$ | 0.5318 | 0.8244 | 1.6783 | 2.9943 | 3.8897 |

Mutualisation des risques d'assurance

Mesure TVaR

La mesure TVaR satisfait aux propriétés suivantes :

- Invariance à la translation ;
- Homogénéité ;
- Monotonicité ;
- Sous-additivité ;
- Elle n'introduit pas une marge de risque excessive ;
- Elle introduit une marge de risque positive pour tout $\kappa \in (0,1)$;
- Elle n'introduit pas une marge de risque injustifiée.

[Embrechts and Wang, 2015] proposent 7 preuves de la sous-additivité de la TVaR.

On présente 2 d'entre elles.

Mutualisation des risques d'assurance

Preuve no1 de la sous-additivité de la TVaR

On suit la démonstration fournie dans [McNeil et al., 2015].

Soit une suite de v.a. i.i.d. X_1, \dots, X_n où $X_i \sim X, i = 1, 2, \dots, n$.

Pour un entier m tel que $1 \leq m+1 \leq n$, l'égalité suivante est vérifiée

$$\sum_{j=m+1}^n X^{[j]} = \sup \{ X_{i_{m+1}} + \dots + X_{i_n}; 1 \leq i_{m+1} \leq \dots \leq i_n \leq m+1 \}.$$

Mutualisation des risques d'assurance

Preuve no1 de la sous-additivité de la TVaR

Soit un couple de v.a. (X,Y) dont la fonction de répartition est désignée par $F_{X,Y}$.

Soient la suite de couple de v.a. i.i.d. $(X_1,Y_1), (X_2,Y_2), \dots, (X_n,Y_n)$
où $(X_i,Y_i) \sim (X,Y)$ pour $i = 1,2,\dots,n$.

Mutualisation des risques d'assurance

Preuve no1 de la sous-additivité de la TVaR

On définit $S = X + Y$ et $S_i = X_i + Y_i$, pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Par la Proposition 3, on a

$$TVaR_{\kappa}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=[n\kappa]+1}^n S^{[j]}}{[n(1-\kappa)]} \text{ (p.s.)},$$

où $S^{[1]} \leq S^{[2]} \leq \dots \leq S^{[n-1]} \leq S^{[n]}$ sont les statistiques d'ordre de S_1, \dots, S_n et $[a]$ correspond à la partie entière de a .

Mutualisation des risques d'assurance

Preuve no1 de la sous-additivité de la TVaR

On a

$$\begin{aligned}\sum_{j=[n\kappa]+1}^n S_{j:n} &= \sup \left\{ S_{i_{[n\kappa]+1}} + \dots + S_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq \dots \leq i_n \leq [n\kappa] + 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ X_{i_{[n\kappa]+1}} + \dots + X_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq \dots \leq i_n \leq [n\kappa] + 1 \right\} \\ &\quad + \sup \left\{ Y_{i_{[n\kappa]+1}} + \dots + Y_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq \dots \leq i_n \leq [n\kappa] + 1 \right\} \\ &= \sum_{j=[n\kappa]+1}^n X_{j:n} + \sum_{j=[n\kappa]+1}^n Y_{j:n}.\end{aligned}$$

Il suffit de diviser par $[n(1-\kappa)]$ et de faire tendre $n \rightarrow \infty$ et on déduit le résultat voulu en appliquant la Proposition 3.

Mutualisation des risques d'assurance

Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR

On a

$$TVaR_{\kappa}(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{\varphi(x)\}$$

ce qui signifie

$$TVaR_{\kappa}(X) \leq \varphi(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour $\alpha \in (0,1)$, on a

$$TVaR_{\kappa}(\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y) \leq x + \frac{1}{1-\kappa} \pi_{\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y}(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On choisit

$$x_{\alpha} = \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1-\alpha) \times VaR_{\kappa}(Y)$$

.

Mutualisation des risques d'assurance

Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR

On a

$$\begin{aligned} & TVaR_{\kappa}(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y) \\ \leq & x_0 + \frac{1}{1 - \kappa} \pi_{\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y}(x_0) \\ = & x_0 + \frac{1}{1 - \kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y - x_0; 0)] \\ = & \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y) \\ & + \frac{1}{1 - \kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y - \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y); 0)]. \end{aligned}$$

La fonction

$$E[\max(W; 0)]$$

est convexe.

Mutualisation des risques d'assurance

Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR

Alors, on a

$$\begin{aligned} & TVaR_{\kappa}(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y) \\ \leq & \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y) \\ & + \frac{1}{1 - \kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y - \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y); 0)] \\ = & \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y) \\ & + \frac{1}{1 - \kappa} \times E[\max(\alpha \times (X - VaR_{\kappa}(X)) + (1 - \alpha) \times (Y - VaR_{\kappa}(Y)); 0)] \\ \leq & \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y) \\ & + \frac{1}{1 - \kappa} \times \alpha E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] \\ & + \frac{1}{1 - \kappa} \times (1 - \alpha) E[\max(Y - VaR_{\kappa}(Y); 0)] \\ = & \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + \frac{1}{1 - \kappa} \times \alpha E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] \\ & + (1 - \alpha) \times VaR_{\kappa}(Y) + \frac{1}{1 - \kappa} \times (1 - \alpha) E[\max(Y - VaR_{\kappa}(Y); 0)] \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in (0,1)$.

Mutualisation des risques d'assurance

Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR

La relation est vraie pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} & TVaR_{\kappa} \left(\frac{1}{2} \times X + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times Y \right) \\ \leq & \frac{1}{2} \times VaR_{\kappa}(X) + \frac{1}{1 - \kappa} \times \frac{1}{2} E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] \\ & + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times VaR_{\kappa}(Y) + \frac{1}{1 - \kappa} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) E[\max(Y - VaR_{\kappa}(Y); 0)] \end{aligned}$$

Mutualisation des risques d'assurance

Preuve no2 de la sous-additivité de la TVaR

Avec la propriété d'homogénéité de la TVaR, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}TVaR_{\kappa}(X+Y) &\leq \frac{1}{2} \times VaR_{\kappa}(X) + \frac{1}{1-\kappa} \times \frac{1}{2}E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \times VaR_{\kappa}(Y) + \frac{1}{1-\kappa} \times \frac{1}{2}E[\max(Y - VaR_{\kappa}(Y); 0)]\end{aligned}$$

On multiplie par "2" et on obtient le résultat désiré.

Mutualisation des risques d'assurance

Portefeuille homogène de risques d'assurance

Soit un portefeuille homogène de n risques d'assurance (indépendants ou pas) X_1, \dots, X_n , avec $X_i \sim X$, pour $i = 1, 2, \dots, n$, avec fonction de répartition F_X , TLS \mathcal{L}_X , et espérance $E[X] < \infty$.

Les coûts d'assurance du portefeuille sont définis par la v.a.

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

On définit la part allouée à chaque risque par la v.a. W_n où

$$W_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

La v.a. W_n correspond à la part attribuée à la suite d'un partage / allocation équitable des coûts du portefeuille parmi les membres du portefeuille.

Comme ce partage résulte de la mutualisation, il est intéressant de comparer le comportement de la part W_n à celui d'un risque

Mutualisation des risques d'assurance

Portefeuille homogène de risques d'assurance

Espérance de W_n : on a

$$E[W_n] = E[X],$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.

VaR de W_n : puisque la VaR est une mesure homogène, on a

$$VaR_\kappa(W_n) = VaR_\kappa\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}VaR_\kappa(S_n),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.

Mutualisation des risques d'assurance

Portefeuille homogène de risques d'assurance

TVaR de W_n :

- Puisque la TVaR est une mesure homogène et sous-additive, on a

$$\begin{aligned}TVaR_\kappa(W_n) &= TVaR_\kappa\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}TVaR_\kappa(S_n) \\&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n TVaR_\kappa(X_i) = \frac{1}{n}n \times TVaR_\kappa(X) \\&= TVaR_\kappa(X),\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.

- Alors, le bénéfice de mutualisation par risque positif, e.g.,

$$B_\kappa^S(W_n) = \varsigma_\kappa(X) - \varsigma_\kappa(W_n) \geq 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.

Mutualisation des risques d'assurance

Portefeuille homogène de risques d'assurance

Variance de W_n :

■ Hypothèses additionnelles :

- ▶ $Var(X) < \infty$;
- ▶ $Cov(X_i, X_j) = Cov(X_1, X_2) \in [-\frac{1}{n} Var(X), \infty)$ pour $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

■ On a

$$Var(W_n) = \frac{1}{n} Var(X) + \frac{n-1}{n} Cov(X_1, X_2),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.

Mutualisation des risques d'assurance

Portefeuille homogène de risques d'assurance

Limites de la variance de W_n :

■ Hypothèses additionnelles :

- $Var(X) < \infty$;
- $Cov(X_i, X_j) = Cov(X_1, X_2) \in [0, \infty)$ pour $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

■ Si les v.a. X_1, \dots, X_n mutuellement indépendantes, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(W_n) = 0$$

⇒ "diversification complète du risque d'assurance".

■ Sinon, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(W_n) = Cov(X_1, X_2) \geq 0$$

⇒ "diversification incomplète du risque d'assurance".

Mutualisation des risques d'assurance

Portefeuille homogène de risques d'assurance

TLS de W_n :

■ On a

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = E[e^{-tW_n}] = E[e^{-\frac{t}{n}S_n}] = \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.

■ Hypothèse additionnelle :

- ▶ Les v.a. X_1, \dots, X_n sont indépendantes.
- ▶ On a

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = (\mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right))^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.

Mutualisation des risques d'assurance

Portefeuille homogène de risques d'assurance

TLS de W_n et loi des grands nombres pour risques indépendants :

- Hypothèse additionnelle : v.a. X_1, \dots, X_n indépendantes.
- Loi des grands nombres (sans supposer $Var(X) < \infty$) :
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, on a

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = (\mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right))^n.$$

- On utilise l'approximation

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = (\mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right))^n \approx \left(1 - \frac{t}{n}E[X]\right)^n$$

- On prend la limite pour $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}E[X]\right)^n = e^{-tE[X]}$$

- Conclusion : W_n converge en distribution vers la v.a. Z où $\Pr(Z = E[X]) = 1$.

Mutualisation des risques d'assurance

Portefeuille homogène de risques d'assurance

Soit les v.a. i.i.d. X_1, \dots, X_n , avec $X_i \sim X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$
($i = 1, 2, \dots, n$).

Alors, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{W_n}(t) &= \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\ &= \left(\mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta + \frac{t}{n}}\right)^{n \times \alpha} \\ &= \left(\frac{n\beta}{n\beta + t}\right)^{n \times \alpha}\end{aligned}$$

pour $t \in [0, 1]$.

Mutualisation des risques d'assurance

Portefeuille homogène de risques d'assurance

On déduit que

$$W_n \sim \text{Gamma}(n\alpha, n\beta)$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$.

Mutualisation des risques d'assurance

Portefeuille homogène de risques d'assurance

Comme prévu, on observe

$$E[W_n] = \frac{\alpha n}{\beta n} = \frac{\alpha}{\beta} = E[X]$$

et

$$\text{Var}(W_n) = \frac{\alpha n}{(\beta n)^2} = \frac{1}{n} \times \frac{\alpha}{\beta^2} \leq \frac{1}{n} \times \text{Var}(X),$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$.

Mutualisation des risques d'assurance

Illustration numérique

Illustration numérique à faire en classe.

Mutualisation des risques d'assurance

Mesure de risque invariante à la distribution

Une mesure de risque ς est dite distribution-invariante (*law invariant*) si la mesure dépend uniquement de la distribution de la v.a. X .

Soit deux v.a. X_1 et X_2 avec $F_{X_1} = F_{X_2} = F_X$. Alors, pour une mesure distribution-invariante on a

$$\varsigma(X_1) = \varsigma(X_2).$$

Entre d'autres termes, une mesure de risque est "distribution-invariante" si elle attribue la même valeur à deux contrats (ou pertes) ayant la même loi de probabilité (voir, e.g., [Frittelli and Gianin, 2005]).

Les mesures VaR et TVaR sont distribution-invariantes.

Définition de X

Définition de X

Généralités

Soit la v.a. X représentant les coûts pour un risque en assurances dommages.

Exemples pour X :

- coûts pour un contrat d'assurances dommages (auto, habitation, risques divers)
- coûts pour un contrat d'assurances commerciales
- coûts totaux pour une ligne d'affaire
- coûts totaux pour une classe de risque

Expressions équivalentes :

- Assurances non-vie
- Assurances IARD (Incendie, Accident, Risque Divers)
- Assurances générales

Définition de X

Convention pour une somme aléatoire : $\sum_{k=1}^0 a_k = 0$.

La v.a. X est définie selon une somme aléatoire, i.e.,

$$X = \sum_{k=1}^M B_k. \quad (19)$$

Définitions :

- v.a. discrète positive M : nombre de sinistres (fréquence);
- v.a. positive B_k : montant du k ième sinistre, $k = 1, 2, \dots$.

Dénominations pour la v.a. M :

- v.a. de fréquence;
- v.a. de comptage ;
- v.a. de dénombrement.

Définition de X

Généralités

Hypothèses :

- $\underline{B} = B_k, k \in \mathbb{N}^+$: suite de v.a. iid, $B_k \sim B, k \in \mathbb{N}^+$;
- la v.a. M et la suite \underline{B} sont indépendantes .

Interprétation :

- On suppose l'indépendance mutuelle entre les montants de sinistres.
- On suppose que les montants de sinistres ont le même comportement aléatoire.
- On suppose que le nombre de sinistres et les montants "ne s'influence pas mutuellement".

Définition de X

Espérance de X

Proposition 6

Espérance de la v.a. X .

- *Hypothèse additionnelle : $E[M] < \infty$ et $E[B] < \infty$.*
- *Alors, on a*

$$E[X] = E[M] \times E[B]. \quad (20)$$

Définition de X

Espérance de X

Preuve

L'espérance de la v.a. X est obtenue en conditionnant sur la v.a. de dénombrement M :

$$E[X] = E_M[E[X|M]]$$

Or, on a $E[X|M] = M \times E[B]$. Finalement, on conclut
$$E[X] = E[M \times E[B]] = E[M]E[B].$$

Interprétation :

- En actuariat, l'espérance de la v.a. X correspond à la prime pure pour le contrat d'assurance.

Définition de X

Variance de X

Proposition 7

- *Hypothèse additionnelle : $E[M^2] < \infty$ et $E[B^2] < \infty$.*
- *Alors, on a*

$$\text{Var}(X) = E[M] \times \text{Var}(B) + \text{Var}(M) \times (E[B])^2. \quad (21)$$

Définition de X

Variance de X

Preuve

La variance de la v.a. X est obtenue en conditionnant sur la v.a. de dénombrement M :

$$\text{Var}(X) = E_M[\text{Var}(X|M)] + \text{Var}_M(E[X|M]).$$

Selon les hypothèses du modèle, on a

$$\text{Var}(X|M) = M \times \text{Var}(B).$$

Ensuite,

$$\text{Var}(X) = E[M \times \text{Var}(B)] + \text{Var}(M \times E[B]).$$

On conclut que

$$\text{Var}(X) = E[M] \times \text{Var}(B) + \text{Var}(M) \times (E[B])^2.$$

Définition de X

Fonction de répartition de X

Proposition 8

La fonction de répartition de la v.a. X est donnée par

$$F_X(x) = f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) F_{B_1+\dots+B_k}(x), \quad (22)$$

pour $x \in [0, \infty)$.

Preuve

...

Définition de X

TLS de X

Proposition 9

La TLS de la v.a. X est donnée par

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{L}_B(t)), \quad (23)$$

pour $t \in [0, \infty)$.

Preuve

...

Définition de X

Algorithme de simulation

...

Distributions de fréquence

Distributions de fréquence

Généralités

En actuariat, les principales lois pour la v.a. de fréquence sont les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative.

Les lois de X correspondantes sont alors appelées lois Poisson composée, binomiale composée et binomiale négative composée.

Comme la loi de Poisson est au cœur de la modélisation des risques en assurance IARD, on s'intéresse aussi aux extensions de cette loi obtenues par mélange.

Distributions de fréquence

Loi de Poisson

La loi de Poisson est fondamentale en actuariat, en particulier en assurance dommages :

- Notation : $M \sim Pois(\lambda)$
- Paramètre : $\lambda > 0$
- Support : $k \in \mathbb{N}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- Espérance : $E[M] = \lambda$
- Variance : $\text{Var}(M) = \lambda$
- Fgp : $\mathcal{P}_M(r) = \exp\{\lambda(r - 1)\}$, $r \in [0, 1]$

Distributions de fréquence

Loi binomiale négative

La loi binomiale négative est une extension de la loi de Poisson :

- Notation : $M \sim BN(r, q)$
- Paramètres : $r \in \mathbb{R}^+, q \in (0, 1)$
- Support : $k \in \mathbb{N}$
- Fonction de masse de probabilité :
$$\Pr(M = k) = \binom{r+k-1}{k} (q)^r (1-q)^k$$
- Espérance : $E[M] = r \frac{1-q}{q}$
- Variance : $\text{Var}(M) = r \frac{1-q}{q^2} = \frac{E[M]}{q} \geq E[M]$
- Fgp : $\mathcal{P}_M(t) = \left(\frac{q}{1-(1-q)t} \right)^r, t \in [0, 1]$

Généralisation des lois de fréquence

Généralisation des lois de fréquence

Généralités

Il est possible de procéder de différentes façons pour généraliser les trois principales lois discrètes : mélange de la loi de Poisson ; modification de la masse à 0 ; et composition.

Généralisation des lois de fréquence

Lois Poisson-mélange

Souvent, dans les applications pratiques, la loi de Poisson n'offre pas une description adéquate du comportement des données. Dans ces circonstances, les lois Poisson-mélange jouent un rôle important dans la modélisation du comportement de la fréquence.

Généralisation des lois de fréquence

Lois Poisson-mélange

Soit une v.a. Θ positive de telle sorte que $E[\Theta] = 1$, $\text{Var}(\Theta) < \infty$ et $M_{\Theta}(t)$ existe. La v.a. Θ influence la v.a. M de la façon suivante.

On suppose que la loi conditionnelle de M est donnée par

$(M|\Theta = \theta) \sim \text{Pois}(\lambda\theta)$ avec $\lambda > 0$. Cela signifie que $E[M|\Theta] = \Theta\lambda$, $\text{Var}(M|\Theta) = \Theta\lambda$ et $\mathcal{P}_{M|\Theta}(t) = E[t^M|\Theta] = e^{\Theta\lambda(t-1)}$.

Généralisation des lois de fréquence

Lois Poisson-mélange

On peut s'imaginer que M correspond au nombre de sinistres pour un contrat d'assurance automobile. Comme on ne connaît pas les habitudes de conduite du conducteur, on introduit une incertitude quant au paramètre de la loi de Poisson.

Généralisation des lois de fréquence

Lois Poisson-mélange

Quelle est la loi de M ? Tout d'abord, en conditionnant sur Θ , on constate que

$$E[M] = E_{\Theta} [E[M|\Theta]] = E[\Theta\lambda] = \lambda \times 1 = \lambda. \quad (24)$$

Puis, en conditionnant à nouveau sur Θ , on obtient

$$\begin{aligned} \text{Var}(M) &= E_{\Theta} [\text{Var}(M|\Theta)] + \text{Var}_{\Theta} (E[M|\Theta]) \\ &= E[\Theta\lambda] + \text{Var}_{\Theta} (\Theta\lambda) = \lambda + \lambda^2 \text{Var}_{\Theta} (\Theta). \end{aligned} \quad (25)$$

Généralisation des lois de fréquence

Lois Poisson-mélange

En poursuivant l'interprétation fournie plus haut, l'incertitude quant au comportement du conducteur n'affecte pas l'espérance mais son influence conduit à une variance de M qui est supérieure à son espérance. Ainsi, la présence du mélange ajoute de la surdispersion par rapport à la loi de Poisson dans le comportement du nombre de sinistres.

Généralisation des lois de fréquence

Lois Poisson-mélange

On identifie la loi de M par l'intermédiaire de sa f.g.p. qui est donnée par

$$\mathcal{P}_M(t) = E[t^M] = E_{\Theta}[E[t^M|\Theta]] = E[e^{\Theta\lambda(t-1)}] = M_{\Theta}(\lambda(t-1)). \quad (26)$$

Généralisation des lois de fréquence

Lois Poisson-mélange

La v.a. Θ peut être discrète ou continue. Si la v.a. Θ est continue positive avec une fonction de densité f_{Θ} alors la fonction de masse de probabilité de M est donnée par

$$\Pr(M = k) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\theta} \frac{(\lambda\theta)^k}{k!} f_{\Theta}(\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{N}^+.$$

Autrement, si la v.a. Θ est discrète avec support \mathbb{N}^+ , la fonction de masse de probabilité de M est donnée par

$$\Pr(M = k) = \sum_{\theta=1}^{\infty} e^{-\lambda\theta} \frac{(\lambda\theta)^k}{k!} \Pr(\Theta = \theta), \quad k \in \mathbb{N}^+.$$

Généralisation des lois de fréquence

Lois Poisson-mélange

Le choix de la loi de Θ a un impact important sur le comportement de la v.a. M .

On examine trois cas particuliers de loi Poisson-mélange : la loi Poisson-gamma (ou binomiale négative), la loi Poisson-inverse gaussienne et la loi Poisson-lognormale.

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

Soit une v.a. $\Theta \sim Ga(\alpha = r, \beta = r)$ de telle sorte que $E[\Theta] = \frac{r}{r} = 1$, $\text{Var}(\Theta) = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$ et $M_{\Theta}(t) = \left(\frac{r}{r-t}\right)^r$. Alors, la v.a. M obéit à la loi Poisson-gamma, notée $M \sim P - Ga(\lambda, r)$.

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

En fait, la loi Poisson-gamma correspond à la loi binomiale négative.

À partir de (24), (25) et (26), on obtient $E[M] = \lambda$,

$\text{Var}(M) = \lambda + \frac{\lambda^2}{r}$ et

$$\mathcal{P}_M(t) = \left(\frac{r}{r-s}\right)^r = \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{r}(t-1)}\right)^r. \quad (27)$$

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

En fixant $\frac{\lambda}{r} = \frac{1-q}{q}$ (ce qui implique $q = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{r}}$), on retrouve la première paramétrisation de la loi binomiale négative où

$$\mathcal{P}_M(t) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1-q}{q}(t-1)} \right)^r = \left(\frac{q}{1 - (1-q)t} \right)^r,$$

avec $E[M] = \lambda = r \frac{1-q}{q}$ et

$$\text{Var}(M) = \lambda + \frac{\lambda^2}{r} = r \frac{1-q}{q^2}.$$

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

Dans l'exemple suivant, on illustre l'impact du choix des paramètres r et q de la loi binomiale négative sur le comportement aléatoire des coûts d'un contrat d'assurance.

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

Début de l'exemple. Les coûts pour une ligne d'affaires sont définis par la v.a. $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $B \sim Exp(\beta = 1)$. Les paramètres r et q de la v.a. de fréquence M sont fixés de telle sorte que $E[M] = 200$. On considère 4 couples de valeurs pour (r, q) : $(1, \frac{1}{201})$, $(2, \frac{1}{101})$, $(5, \frac{1}{41})$ et $(25, \frac{1}{9})$.

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

Dans le tableau suivant, on indique les valeurs de $VaR_{0.5}(X)$, $VaR_{0.995}(X)$, $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$:

| r | q | $VaR_{0.5}(X)$ | $VaR_{0.995}(X)$ | $TVaR_{0.5}(X)$ | $TVaR_{0.995}(X)$ |
|-----|-----------------|----------------|------------------|-----------------|-------------------|
| 1 | $\frac{1}{201}$ | 138.320 | 1063.959 | 339.320 | 1264.95 |
| 2 | $\frac{1}{101}$ | 167.509 | 748.435 | 306.217 | 861.41 |
| 5 | $\frac{1}{41}$ | 186.499 | 511.316 | 271.108 | 567.14 |
| 25 | $\frac{1}{9}$ | 196.973 | 332.139 | 235.481 | 352.00 |

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

Pour une valeur de κ fixée, on observe que la valeur de $TVaR_{\kappa}(X)$ augmente lorsque le paramètre r diminue (de telle sorte que l'espérance du nombre de sinistres reste identique). Fin de l'exemple.

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

On observe également

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} E[M] &= \lambda \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Var}(M) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda + \frac{\lambda^2}{r} = \lambda \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{P}_M(t) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{r}(t-1)} \right)^r = e^{\lambda(t-1)}.\end{aligned}\quad (28)$$

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

D'après (28), si $r \rightarrow \infty$ de telle sorte que l'espérance de M reste égale λ , la variance de M tend vers λ et la loi de M tend vers la loi de Poisson de paramètre λ .

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

Début de l'exemple. Soient les v.a. M_1, \dots, M_5 où

$$M_i \sim BN\left(r = r_i, q = \left(1 + \frac{2}{r_i}\right)^{-1}\right), i = 1, 2, 3, 4,$$

avec $r_1 = 0.5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 100$, et $M_5 \sim Pois(\lambda = 2)$ de telle sorte que $E[M_i] = 2$, $i = 1, 2, \dots, 5$.

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

Dans le tableau ci-dessous, on fournit les valeurs de la fonction de masse de probabilité pour les cinq v.a. :

| k | $f_{M_1}(k)$ | $f_{M_2}(k)$ | $f_{M_3}(k)$ | $f_{M_4}(k)$ | $f_{M_5}(k)$ |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0 | 0.447214 | 0.333333 | 0.250000 | 0.138033 | 0.135335 |
| 1 | 0.178885 | 0.222222 | 0.250000 | 0.270653 | 0.270671 |
| 2 | 0.107331 | 0.148148 | 0.187500 | 0.267999 | 0.270671 |
| 3 | 0.071554 | 0.098765 | 0.125000 | 0.178668 | 0.180447 |
| 4 | 0.050088 | 0.065844 | 0.078125 | 0.090209 | 0.090224 |
| 5 | 0.036063 | 0.043896 | 0.046875 | 0.036791 | 0.036089 |
| 10 | 0.008461 | 0.005781 | 0.002686 | 0.000049 | 0.000038 |
| 15 | 0.002273 | 0.000761 | 0.000122 | 0.000000 | 0.000000 |
| 20 | 0.000646 | 0.000100 | 0.000005 | 0.000000 | 0.000000 |

Généralisation des lois de fréquence

Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

Quand la valeur de r augmente, les valeurs des fonctions de masse de probabilité tendent comme prévu vers celles de la loi de Poisson. \square
Fin de l'exemple.

Distributions de sévérité

Distributions de sévérité

Généralités

Le choix de la distribution du montant d'un sinistre est crucial dans la modélisation du risque X .

En actuariat, on a généralement recours à une loi continue avec un support compris dans \mathbb{R}^+ pour modéliser le comportement aléatoire du montant d'un sinistre.

Dans la majorités des contextes d'application en assurance dommage et en assurance maladie, les distributions des montants de sinistre possède une asymétrie positive.

Distributions de sévérité

Caractéristiques générales

Par convention, les distributions pour les montants de sinistres sont continues et positives.

Pour l'analyse des durées de vie et de la distribution du montant d'un sinistre, on a recours à la fonction d'excès-moyen (espérance de durée de vie résiduelle en analyse des durées de vie) que l'on définit par

$$e_X(d) = E[X - d | X > d] = \frac{\pi_X(d)}{1 - F_X(d)}. \quad (29)$$

Cette fonction est notamment utile dans l'analyse graphique effectuée lors de l'estimation des paramètres de lois continues.

Distributions de sévérité

Loi exponentielle

- Notation : $X \sim \text{Exp}(\beta)$
- Paramètre : $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$
- Fonction de survie : $\overline{F}_X(x) = e^{-\beta x}$
- Espérance : $E[X] = \frac{1}{\beta}$
- Variance : $\text{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$
- TLS : $\mathcal{L}_X(t) = \frac{\beta}{\beta+t}, t > -\beta$
- Moments d'ordre k : $E[X^k] = \left(\frac{1}{\beta}\right)^k k!$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = -\frac{1}{\beta} \ln(1 - \kappa)$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + E[X]$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_X(d) = \frac{1}{\beta} e^{-\beta d} = E[X] \overline{F}(d)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_X(d) = \frac{1}{\beta}$

Distributions de sévérité

Loi gamma

La loi Gamma est une extension de la loi exponentielle.

Elle est fréquemment utilisée en actuariat.

- Notation : $X \sim Ga(\alpha, \beta)$
- Paramètres : $\alpha > 0, \beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0$
- Fonction de répartition : notée $H(x; \alpha, \beta)$, forme non explicite pour $\alpha \notin \mathbb{N}^+$
- Fonction de survie : notée $\overline{H}(x; \alpha, \beta)$, forme non explicite pour $\alpha \notin \mathbb{N}^+$
- Espérance : $E[X] = \frac{\alpha}{\beta}$
- Variance : $\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

Distributions de sévérité

Loi gamma

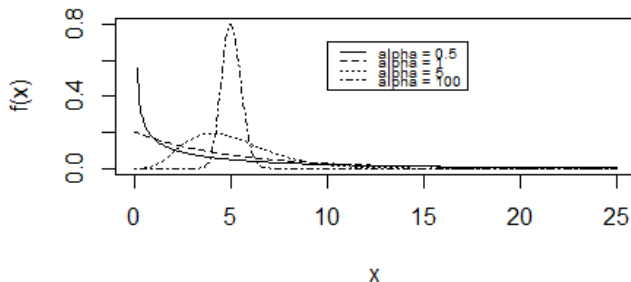
- TLS : $\mathcal{L}_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha, t > -\beta$
- Moments d'ordre k : $E[X^k] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha+i)}{\beta^k}$
- Mesure VaR : outil d'optimisation si $\alpha \neq 1$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \frac{\alpha}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(X); \alpha+1, \beta)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{\alpha}{\beta} \overline{H}(d; \alpha+1, \beta) - d \overline{H}(d; \alpha, \beta)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\overline{H}(d; \alpha+1, \beta)}{\overline{H}(d; \alpha, \beta)} - d$

Distributions de sévérité

Loi gamma

Courbes de la fonction de densité pour la loi gamma avec $\alpha = 0.5, 1, 5, 100$ de telle sorte que l'espérance est égale à 5.

Fonction de densité de la loi gamma



Si on suppose que $B \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, on obtient des formes fermées pour $F_X(x)$, $TVaR_\kappa(X)$, et $\Pi_X(x)$:
(...)

Distributions de sévérité

Loi Erlang

La loi Erlang est un cas particulier de la loi gamma, avec $\alpha \in \mathbb{N}^+$.

- Notation : $X \sim \text{Erl}(n, \beta)$
- Paramètres : $n \in \mathbb{N}^+, \beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\beta x}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}$
- Fonction de survie : $\overline{F}_X(x) = e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}$
- Espérance : $E[X] = \frac{n}{\beta}$
- Variance : $\text{Var}(X) = \frac{n}{\beta^2}$

Distributions de sévérité

Loi Erlang

- Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^n, t < \beta$
- Moments d'ordre k : $E[X^k] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n+i)}{\beta^k}$
- Mesure VaR : outil d'optimisation si $n \neq 1$
- Mesure $TVaR$:
$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{1-\kappa} \frac{n}{\beta} \left(e^{-\beta VaR_{\kappa}(X)} \sum_{j=0}^n \frac{(\beta VaR_{\kappa}(X))^j}{j!} \right)$$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{n}{\beta} \overline{H}(d; n+1, \beta) - d \overline{H}(d; n, \beta)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{n}{\beta} \frac{\overline{H}(d; n+1, \beta)}{\overline{H}(d; n, \beta)} - d$

Distributions de sévérité

Loi lognormale

La loi lognormale est fréquemment utilisée en actuariat, notamment pour la modélisation des montants de sinistres dans la modélisation des montants de sinistres en assurance dommage (e.g. IARD ou non-vie), et en gestion quantitative des risques. Son mode est supérieur à 0 et son coefficient d'asymétrie est positif. Sa fonction d'excès moyen est croissante. Avec ces deux paramètres, elle possède une très grande flexibilité pour la modélisation.

Distributions de sévérité

Loi lognormale

Notation : $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$

Paramètres : $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$

Support : $x \in \mathbb{R}^+$

Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$

Fonction de répartition : $F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$

Espérance : $E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

Variance : $\text{Var}(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$

Fonction génératrice des moments : forme non analytique

Moments d'ordre k : $E[X^k] = e^{k\mu + k^2 \frac{\sigma^2}{2}}$

Espérance tronquée : $E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] = \exp(\mu + \sigma^2/2) \Phi\left(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)$

Distributions de sévérité

Loi lognormale

Mesure VaR : $VaR_{\kappa}(X) = \exp(\mu + \sigma VaR_{\kappa}(Z))$

Mesure $TVaR$:

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{1 - \kappa} e^{\mu + \sigma^2/2} (1 - \Phi(VaR_{\kappa}(Z) - \sigma))$$

Fonction *stop-loss* :

$$\pi_d(X) = e^{\mu + \sigma^2/2} (1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})) - d[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]$$

Distributions de sévérité

Loi lognormale

Fonction d'excès-moyen :

$$e_d(X) = \frac{1}{[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]} e^{\mu + \sigma^2/2} (1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})) - d$$

Espérance limitée :

$$E[\min(X; d)] = e^{\mu + \sigma^2/2} \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma}) + d[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]$$

Distributions de sévérité

Loi Pareto

La loi de Pareto est aussi une loi fondamentale en actuariat pour la modélisation des montants de sinistres. Elle possède 2 paramètres et elle est fréquemment utilisée pour la modélisation des sinistres de montants élevés. Avec un mode se trouvant à 0, son espérance existe si $\alpha > 1$ et sa variance existe si $\alpha > 2$. Le moment d'ordre n existe à la condition que $\alpha > n$. Parmi ses caractéristiques importantes, on mentionne aussi que sa fonction d'excédent moyen est linéaire et croissante.

Distributions de sévérité

Loi Pareto

Notation : $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$

Paramètres : $\alpha > 0, \lambda > 0$

Support : $x \in \mathbb{R}^+$

Fonction de densité : $f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}$

Fonction de répartition : $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha$

Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha$

Espérance (pour $\alpha > 1$) : $E[X] = \frac{\lambda}{\alpha - 1}$

Variance (pour $\alpha > 2$) : $\text{Var}(X) = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}$

Fonction génératrice des moments : n'existe pas

Distributions de sévérité

Loi Pareto

Moments d'ordre k (pour $\alpha > k \in \mathbb{N}^+$): $E[X^k] = \frac{\lambda^k k!}{\prod_{i=1}^k (\alpha - i)}$

Moments d'ordre k : $E[X^k] = \frac{\lambda^k \Gamma(k+1) \Gamma(\alpha - k)}{\Gamma(\alpha)}$, si $-1 < k < \alpha$

Distributions de sévérité

Loi Pareto

Espérance tronquée (pour $\alpha > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\lambda}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda + d)^{\alpha-1}}\right) - d \left(\frac{\lambda}{\lambda + d}\right)^{\alpha}$$

Mesure VaR : $VaR_{\kappa}(X) = \lambda \left((1 - \kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \right)$

Mesure $TVaR$ (pour $\alpha > 1$) : $TVaR_{\kappa}(X) = \lambda \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} (1 - \kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \right)$

Fonction *stop-loss* (pour $\alpha > 1$) : $\pi_d(X) = \frac{\lambda}{\alpha-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+d} \right)^{\alpha-1}$

Distributions de sévérité

Loi Pareto

Fonction d'excès-moyen (pour $\alpha > 1$) : $e_d(X) = \frac{\lambda+d}{\alpha-1}$, si $\alpha > 1$

Espérance limitée (pour $\alpha > 1$) : $E[\min(X; d)] = \frac{\lambda}{\alpha-1} [1 - (\frac{\lambda}{\lambda+d})^{\alpha-1}]$

Distributions de sévérité

Comparaison des lois gamma, lognormale et de Pareto

Dans le prochain exemple, on compare les lois gamma, lognormale et de Pareto dont les 2 paramètres sont fixés de telle sorte que leur espérance et leur variance soient identiques. On illustre notamment que l'espérance et la variance d'une v.a. n'offre qu'une connaissance partielle et très limitée du comportement aléatoire de cette dernière, car il existe une panoplie de lois satisfaisant ces deux contraintes.

Distributions de sévérité

Comparaison des lois gamma, lognormale et de Pareto

Soient les v.a. B_1 , B_2 et B_3 représentant le montant d'un sinistre dont l'espérance et la variance sont 3 et 18 où

$$B_1 \sim LN\left(\ln(3) - \frac{\ln(3)}{2}, \ln(3)\right),$$

$$B_2 \sim Ga(1/2, 1/6) \text{ et } B_3 \sim Pa(3, 6).$$

Distributions de sévérité

Comparaison des lois gamma, lognormale et de Pareto

L'impact du choix de la loi sur les valeurs des mesures VaR et TVaR est significatif comme on l'observe dans les deux tableaux ci-dessous :

| κ | $VaR_{\kappa}(B_1)$ | $VaR_{\kappa}(B_2)$ | $VaR_{\kappa}(B_3)$ |
|----------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.5 | 1.7321 | 1.3648 | 1.5595 |
| 0.95 | 9.7119 | 11.5244 | 10.2865 |
| 0.99 | 19.8392 | 19.9047 | 21.8495 |
| 0.995 | 25.7685 | 23.6383 | 29.0882 |

| κ | $TVaR_{\kappa}(B_1)$ | $TVaR_{\kappa}(B_2)$ | $TVaR_{\kappa}(B_3)$ |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0 | 3 | 3 | 3 |
| 0.5 | 5.1163 | 5.5720 | 5.3393 |
| 0.95 | 16.5211 | 16.7460 | 18.4298 |
| 0.99 | 30.1768 | 25.3475 | 35.7743 |
| 0.995 | 37.9774 | 29.1421 | 46.6323 |

Distributions de sévérité

Comparaison des lois gamma, lognormale et de Pareto

Par conséquent, il est important, pour obtenir des résultats adéquats, de connaître la distribution du montant de sinistre.

Illustration numérique

Illustration numérique à faire en classe.

Mutualisation en assurance dommages

Mutualisation en assurance dommages

Généralités

On examine les coûts d'un portefeuille constitué de contrats d'assurance dommages.

On considère un cas particulier.

Mutualisation en assurance dommages

Poisson composée

La proposition suivante contient un résultat important en actuariat.

Proposition 10

Soient les v.a. indépendantes X_1, \dots, X_n où

$$X_i \sim PComp(\lambda_i; F_{B_i}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Alors, $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim PComp(\lambda_S, F_C)$, où $\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S} F_{B_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S} F_{B_2}(x) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_S} F_{B_n}(x).$$

Mutualisation en assurance dommages

Poisson composée

Preuve

La TLS de X_i est donnée par

$$\mathcal{L}_{X_i}(t) = \mathcal{P}_{M_i}(\mathcal{L}_{B_i}(t)) = e^{\{\lambda_i(\mathcal{L}_{B_i}(t)-1)\}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Mutualisation en assurance dommages

Poisson composée

Preuve

L'expression de la TLS de $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= E[e^{tS_n}] = E[e^{t(\sum_{i=1}^n X_i)}] = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(\mathcal{L}_{B_i}(t)-1)} = e^{\{\lambda_S(\mathcal{L}_C(t)-1)\}},\end{aligned}$$

en posant $\lambda_S = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ et

$$\mathcal{L}_C(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S} \mathcal{L}_{B_1}(t) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S} \mathcal{L}_{B_2}(t) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_S} \mathcal{L}_{B_n}(t). \quad (30)$$

Mutualisation en assurance dommages

Poisson composée

Preuve

On déduit de (30) que la distribution de C est un mélange des distributions de B_1, \dots, B_n . D'après (30), cela implique que F_C est une combinaison convexe de F_{B_1}, \dots, F_{B_n} , soit

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S} F_{B_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S} F_{B_2}(x) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_S} F_{B_n}(x).$$

Mutualisation en assurance dommages

Poisson composée

Preuve

Comme

$$\mathcal{L}_S(t) = e^{\lambda_S(\mathcal{L}_C(t)-1)} = \mathcal{P}_N(\mathcal{L}_C(t)) \quad (31)$$

est la TLS d'une loi Poisson composée, on déduit de (31) que $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim PComp(\lambda_S, F_C)$ telle que

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^N C_k, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases},$$

avec les hypothèses usuelles, $N = \sum_{i=1}^n M_i \sim Pois(\lambda_S)$ et $C_k \sim C$ pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Une interprétation de ce résultat fondamental en actuariat est fournie dans la remarque suivante.

Remarque 1





Le risque global s'analyse en considérant le portefeuille comme une seule entité. Il importe peu de savoir de quel assuré (risque) provient un sinistre. Comme S obéit à une loi Poisson composée, tous les résultats liés à cette loi sont valides pour ce cas particulier. Pour que ce résultat soit valide, il n'est pas nécessaire de supposer que les v.a. M_1, M_2, \dots, M_n soient identiquement distribuées ou que les v.a. B_1, B_2, \dots, B_n soient identiquement distribuées.

Références

Références I

-  Acerbi, C. and Tasche, D. (2002).
On the coherence of expected shortfall.
Journal of Banking & Finance, 26(7):1487–1503.
-  Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999).
Coherent measures of risk.
Mathematical finance, 9(3):203–228.
-  Cossette, H. and Marceau, E. (2018).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.
-  Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., and Kaas, R. (2006).
Actuarial theory for dependent risks: measures, orders and models.
John Wiley & Sons.

Références II

-  Embrechts, P. and Wang, R. (2015).
Seven proofs for the subadditivity of expected shortfall.
Dependence Modeling, 3(1).
-  Frees, E. W. (2015).
Analytics of insurance markets.
Annual Review of Financial Economics, 7:253–277.
-  Frittelli, M. and Gianin, E. R. (2005).
Law invariant convex risk measures.
In *Advances in mathematical economics*, pages 33–46. Springer.
-  McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. (2015).
Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools.
Princeton University Press.

Références III



Parodi, P. (2014).
Pricing in general insurance.
CRC Press.