Act-3000 Théorie du risque

avec Christopher Blier-Wong et Ihsan Chaoubi

Loi Poisson multivariée et loi gamma multivariée (Séance du vendredi 16 novembre 2018)

Étienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

26 novembre 2018

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières

Loi Poisson multivariée

On adapte la méthode de construction par choc commun pour définir la distribution Poisson multivariée de Teicher.
On fixe les paramètres $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$.
Soit les v.a. indépendantes

$$
\begin{aligned}
K_0 &\sim Pois(\gamma_0) \\
K_1 &\sim Pois(\gamma_1) \\
&\dots \\
K_n &\sim Pois(\gamma_n)
\end{aligned}
$$

avec $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_n)$, $\gamma_i = \lambda_i - \gamma_0$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

On adopte la convention suivante : si $K_i \sim Pois\,(0)$, alors $K_i = 0$.

On définit le vecteur de v.a. $\underline{M}^{(\gamma_0)} = \left(M_1^{(\gamma_0)}, \ldots, M_n^{(\gamma_0)}\right)$ où

$$\begin{aligned} M_1^{(\gamma_0)} &= K_1 + K_0 \\ & \ldots \\ M_n^{(\gamma_0)} &= K_n + K_0. \end{aligned}$$

On déduit

$$M_i^{(\gamma_0)} \sim Pois\,(\lambda_i)\,,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Le vecteur de v.a. $\underline{M}^{(\gamma_0)}$ obéit à une loi Poisson multivariée de Teicher avec une fonction de répartition $F_{\underline{M}^{(\gamma_0)}}$ et une fgp conjointe

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\underline{M}^{(\gamma_0)}}(r_1, ..., r_n) &= E\left[r_1^{M_1^{(\gamma_0)}} \times ... \times r_n^{M_n^{(\gamma_0)}} \right] \\
&= \mathrm{e}^{\gamma_0 \left(\Pi_{i=1}^{n} r_i - 1 \right)} \Pi_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(\lambda_i - \gamma_0)(r_i - 1)},
\end{aligned}
$$

pour $r_i \in [0, 1]$, $i = 1, ..., n$.

Loi Poisson multivariée

Construction

La fonction de masse de probabilité est

$$f_{\underline{M}^{(\gamma_0)}}(m_1, \dots, m_n) = \sum_{j=0}^{\min(m_1;\dots;m_n)} \left(\mathrm{e}^{-\gamma_0} \frac{(\gamma_0)^j}{j!} \times \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-(\lambda_i - \gamma_0)} \frac{(\lambda_i - \gamma_0)^{m_i - j}}{(m_i - j)!} \right),$$

pour $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$.

Loi Poisson multivariée

Construction

La fonction de répartition marginale de $M_i^{(\gamma_0)}$ est notée par $F_{M_i^{(\gamma_0)}} = F_i$, pour $i = 1, 2, ..., n$.

Soit la classe de Fréchet $\mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$ générée par les fonctions de répartition marginales des lois de Poisson avec les paramètres $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Alors, on sait

- $F_{\underline{M}^{(\gamma_0)}} \in \mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$;
- $F_{\underline{M}^{(0)}} = F_{\underline{M}^{\perp}}$ (composantes indépendantes) ;

- Bornes inférieures et supérieures de Fréchet :

$$W\left(m_1,...,m_n\right) \leq F_{\underline{M}(\gamma_0)}\left(m_1,...,m_n\right) \leq M\left(m_1,...,m_n\right)$$

où

$$W\left(m_1,...,m_n\right) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\left(m_i\right) - \left(n-1\right);0\right)$$

et

$$M\left(m_1,...,m_n\right) = \min\left(F_1\left(m_1\right);...;F_1\left(m_1\right)\right),$$

pour tout $\left(m_1,...,m_n\right) \in \mathbb{N}^n$;

- $M(m_1, ..., m_n) =$ fonction de répartition

$$M(m_1, ..., m_n) = F_{\underline{M}^+}(m_1, ..., m_n)$$

(composantes comonotones) ;

- $M(m_1, ..., m_n) =$ fonction de répartition seulement si $n = 2$

$$M(m_1, m_2) = F_{\underline{M}^-}(m_1, m_2)$$

(composantes antimonotones) ;

- Soit $\lambda_i = \lambda$, $i = 1, 2, ..., n$. Alors, $F_{\underline{M}^{(\lambda)}} = F_{\underline{M}^+}$.

Soit la fonction stop-loss d'une v.a. discrète $\pi_M(k) = E[\max(M - k; 0)]$, $k \in \mathbb{N}$.

- On considère une portefeuille $n = 2$.
- On fixe $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = 10$.
- On définit les v.a. $S^{(\gamma_0)} = M_1^{(\gamma_0)} + M_2^{(\gamma_0)}$ (avec $\gamma_0 \in [0, 5]$) $S^+ = M_1^+ + M_2^+$, $S^- = M_1^- + M_2^-$, et $S^\perp = M_1^\perp + M_2^\perp$.

On observe que

$$\begin{aligned} f_{M_1^+,M_2^+}(m_1,m_2) &= F_{M_1^+,M_2^+}(m_1,m_2) - F_{M_1^+,M_2^+}(m_1-1,m_2) \\ &\quad - F_{M_1^+,M_2^+}(m_1,m_2-1) + F_{M_1^+,M_2^+}(m_1-1,m_2-1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_{M_1^-,M_2^-}(m_1,m_2) &= F_{M_1^-,M_2^-}(m_1,m_2) - F_{M_1^-,M_2^-}(m_1-1,m_2) \\ &\quad - F_{M_1^-,M_2^-}(m_1,m_2-1) + F_{M_1^-,M_2^-}(m_1-1,m_2-1) \end{aligned}$$

pour $(m_1,m_2) \in \mathbb{N}^2$, avec $F_{M_1^+,M_2^+}(m_1,m_2) = F_{M_1^-,M_2^-}(m_1,m_2) = 0$, si $m_1 = -1$ ou $m_2 = -1$.

Les espérances sont

$$E\left[M_1^+ M_2^+\right] = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} m_1 m_2 f_{M_1^+, M_2^+}(m_1, m_2)$$

et

$$E\left[M_1^- M_2^-\right] = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} m_1 m_2 f_{M_1^-, M_2^-}(m_1, m_2)$$

Les coefficients de corrélation de Pearson sont

$$\rho_P\left(M_1^+, M_2^+\right) = \frac{Cov\left(M_1^+, M_2^+\right)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}$$

$$\rho_P\left(M_1^-, M_2^-\right) = \frac{Cov\left(M_1^-, M_2^-\right)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}$$

et

$$\rho_P\left(M_1^{(\gamma_0)}, M_2^{(\gamma_0)}\right) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}.$$

De plus, on a

$$f_{S^+}(k) = \sum_{j=0}^{k} f_{M_1^+, M_2^+}(j, k-j)$$

et

$$f_{S^-}(k) = \sum_{j=0}^{k} f_{M_1^-, M_2^-}(j, k-j).$$

À l'aide des fgp, on démontre que

$$S^{\perp} \sim Pois\left(\lambda = 15\right)$$

et

$$S^{(\gamma_0)} \sim PoisComp\left(\lambda = 15 - \gamma_0; F_C\right)$$

où la v.a. $C \in \{1, 2\}$ avec $\Pr\left(C = 1\right) = \frac{15-2\gamma_0}{15-\gamma_0}$ et $\Pr\left(C = 2\right) = \frac{\gamma_0}{15-\gamma_0}$.

Les valeurs de coefficients de corrélation de Pearson sont fournies dans le tableau suivant :

$\rho_P\left(M_1^-, M_2^-\right)$	$\rho_P\left(M_1^{(0)}, M_2^{(0)}\right)$	$\rho_P\left(M_1^{(1)}, M_2^{(1)}\right)$	$\rho_P\left(M_1^{(3)}, M_2^{(3)}\right)$	$\rho_P\left(M_1^{(5)}, M_2^{(5)}\right)$	$\rho_P\left(M_1^+, M_2^+\right)$
-0.9705450	0.0000000	0.1414214	0.4242641	0.7071068	0.9868026

Les valeurs des fonctions *stop-loss* sont fournies dans le tableau suivant :

k	$\pi_{S^-}(k)$	$\pi_{S^{(0)}}(k)$	$\pi_{S^{(1)}}(k)$	$\pi_{S^{(3)}}(k)$	$\pi_{S^{(5)}}(k)$	$\pi_{S^+}(k)$
0	15.00000	15.00000	15.00000	15.00000	15.00000	15.00000
5	10.00000	10.00111	10.00195	10.00533	10.01227	10.02039
10	5.00000	5.13684	5.17109	5.24871	5.33439	5.41195
15	0.39777	1.53654	1.63612	1.82009	1.98761	2.12844
20	0.00278	0.21230	0.26768	0.37618	0.48167	0.57795
30	0.00000	0.00036	0.00098	0.00347	0.00790	0.01472
40	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00003	0.00010
50	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Loi gamma multivariée

Loi gamma multivariée

Construction

On adapte la méthode de construction par choc commun pour définir la distribution Gamma multivariée de CRMM.
On fixe les paramètres $\alpha_1, ..., \alpha_n > 0$ et $\beta_1, ..., \beta_n > 0$.
Soit les v.a. indépendantes

$$\begin{aligned} Y_0 &\sim Gamma\left(\gamma_0, 1\right) \\ Y_1 &\sim Gamma\left(\gamma_1, 1\right) \\ &\ldots \\ Y_n &\sim Gamma\left(\gamma_n, 1\right) \end{aligned}$$

avec $0 \leq \gamma_0 \leq \min\left(\alpha_1; ...; \alpha_n\right)$, $\gamma_i = \alpha_i - \gamma_0$ $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$.
On adopte la convention suivante : si $Y_i \sim Gamma\left(0, \beta\right)$, alors $Y_i = 0$.

On définit le vecteur de v.a. $\underline{X}^{(\gamma_0)} = \left(X_1^{(\gamma_0)}, ..., X_n^{(\gamma_0)}\right)$ où

$$
\begin{aligned}
X_1^{(\gamma_0)} &= \frac{1}{\beta_1}\left(Y_1 + Y_0\right) \\
&\dots \\
X_n^{(\gamma_0)} &= \frac{1}{\beta_n}\left(Y_n + Y_0\right).
\end{aligned}
$$

En exercice, on déduit

$$X_i^{(\gamma_0)} \sim Gamma\left(\alpha_i, \beta_i\right),$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
Le vecteur de v.a. $\underline{X}^{(\gamma_0)}$ obéit à une loi Gamma multivariée CRMM avec une fonction de répartition $F_{\underline{X}^{(\gamma_0)}}$.

En exercice, on obtient la TLS conjointe

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\underline{X}^{(\gamma_0)}}(t_1, \ldots, t_n) &= E\left[\mathrm{e}^{-t_1 X_1^{(\gamma_0)}} \times \ldots \times \mathrm{e}^{-t_n X_n^{(\gamma_0)}}\right] \\
&= \left(\frac{1}{1 + \frac{t_1}{\beta_1} + \ldots + \frac{t_n}{\beta_n}}\right)^{\gamma_0} \Pi_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{t_i}{\beta_i}}\right)^{\gamma_i - \gamma_0},
\end{aligned}$$

pour $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

La fonction de répartition marginale de $X_i^{(\gamma_0)}$ est notée par $F_{X_i^{(\gamma_0)}} = F_i$, pour $i = 1, 2, ..., n$.

Soit la classe de Fréchet $\mathcal{CF}\left(F_1, \ldots, F_n\right)$ générée par les fonctions de répartition marginales des lois de Gamma avec les paramètres $\left(\alpha_1, \beta_1\right), \ldots, \left(\alpha_n, \beta_n\right)$. Alors, on sait

- $F_{\underline{X}^{(\gamma_0)}} \in \mathcal{CF}\left(F_1, \ldots, F_n\right)$;
- $F_{\underline{X}^{(0)}} = F_{\underline{X}^{\perp}}$ (composantes indépendantes) ;
- bornes inférieures et supérieures de Fréchet :

$$W\left(x_1, \ldots, x_n\right) \leq F_{\underline{X}^{(\gamma_0)}}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \leq M\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

où

$$W\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\left(x_i\right) - (n-1) ; 0\right)$$

et

$$M\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \min\left(F_1\left(x_1\right) ; \ldots ; F_1\left(x_1\right)\right),$$

pour tout $\left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}^+ \times \ldots \times \mathbb{R}^+$;

- $M(x_1, ..., x_n) =$ fonction de répartition

$$M(x_1, ..., x_n) = F_{\underline{X}^+}(x_1, ..., x_n)$$

  (composantes comonotones) ;
- $M(x_1, ..., x_n) =$ fonction de répartition seulement si $n = 2$

$$M(x_1, x_2) = F_{\underline{X}^-}(x_1, x_2)$$

  (composantes antimonotones) ;
- Soit $\alpha_i = \alpha$, $i = 1, 2, ..., n$. Alors, $F_{\underline{X}^{(\alpha)}} = F_{\underline{X}^+}$.

Loi gamma multivariée

Construction

On définit les v.a. suivantes :

$$
\begin{aligned}
S_n^{(\gamma_0)} &= X_1^{(\gamma_0)} + \ldots + X_n^{(\gamma_0)} \\
S_n^{+} &= X_1^{+} + \ldots + X_n^{+} \\
S_2^{-} &= X_1^{-} + X_2^{-} \\
S_n^{\perp} &= X_1^{\perp} + \ldots + X_n^{\perp}.
\end{aligned}
$$

On considère une portefeuille $n = 2$. On fixe $\alpha_1 = \beta_1 = 2$ et $\alpha_2 = \beta_2 = 3$.
Démontrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S(\gamma_0)}(t) &= \mathcal{L}_{\underline{X}(\gamma_0)}(t,t) \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta_1}+\frac{t}{\beta_2}}\right)^{\gamma_0}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta_1}}\right)^{\alpha_i-\gamma_0}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta_2}}\right)^{\alpha_i-\gamma_0}, \end{aligned}$$

pour $t \geq 0$.

À l'aide $\mathcal{L}_{S(\gamma_0)}(t)$, démontrer que

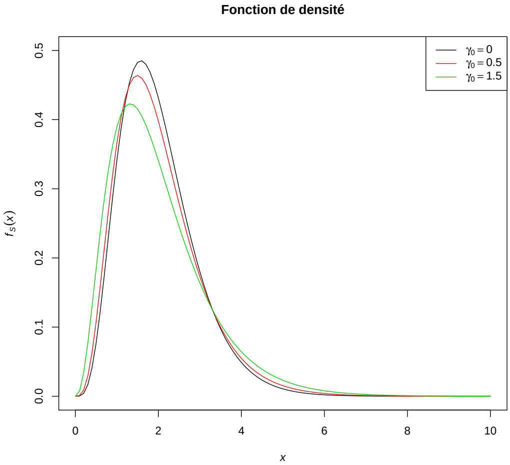
$$f_{S(\gamma_0)}(x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} p(k)\, h(x; a+k, \beta_2)$$

en indiquant la forme de $p(k)$, la valeur de a, et la valeur de k_0.

- Pour $\gamma_0 = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $f_{S^{(\gamma_0)}}(x)$, pour $x \geq 0$, sur un graphique.
- Pour $\gamma_0 = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $VaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$, pour $\kappa \in (0,1)$, sur un graphique.
- Pour $\gamma_0 = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $TVaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$, pour $\kappa \in (0,1)$, sur un graphique.

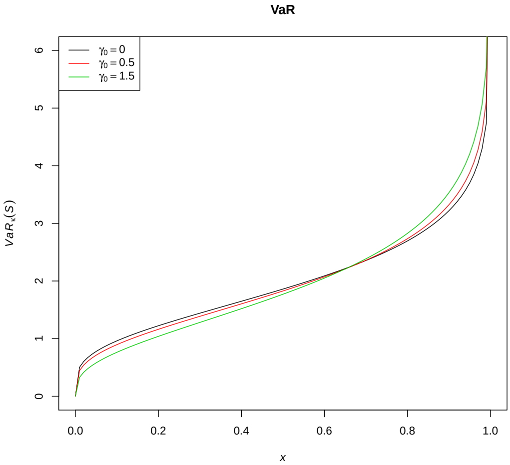
Loi gamma multivariée

Exemple no1



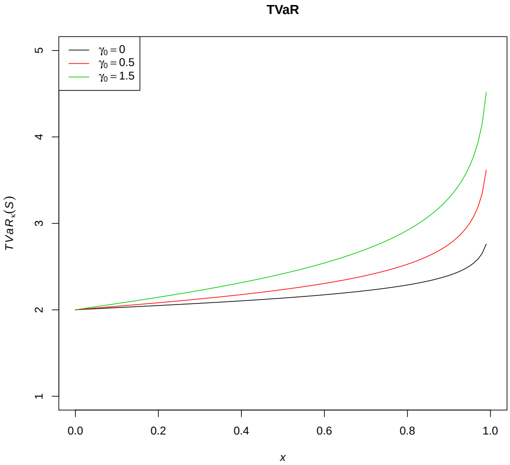
Loi gamma multivariée

Exemple no1



Loi gamma multivariée

Exemple no1



On fixe $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta = \alpha$, et $\gamma_0 = \gamma$.
On définit

$$\begin{aligned} W_n^{(\gamma_0)} &= \frac{1}{n} S_n^{(\gamma_0)} \\ W_n^{+} &= \frac{1}{n} S_n^{+} \\ W_n^{\perp} &= \frac{1}{n} S_n^{\perp}. \end{aligned}$$

Selon les paramètres choisis, on observe

$$E\left[W_n^{(\gamma_0)}\right] = E\left[W_n^{+}\right] = E\left[W_n^{\perp}\right] = 1$$

pour $n \in \mathbb{N}^{+}$.

Démontrer que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n^{(\gamma_0)}}(t) &= \mathcal{L}_{S_n^{(\gamma_0)}}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \mathcal{L}_{\underline{X}^{(\gamma_0)}}\left(\frac{t}{n}, \ldots, \frac{t}{n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\alpha}}\right)^{\gamma}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{n\alpha}}\right)^{n(\alpha-\gamma)},
\end{aligned}
$$

pour $t \geq 0$.

À l'aide $\mathcal{L}_{W_n^{(\gamma_0)}}(t)$, démontrer que

$$f_{W_n^{(\gamma_0)}}(x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} p(k)\, h(x; a+k, n\beta)$$

en indiquant la forme de $p(k)$, la valeur de a, et la valeur de k_0.

À l'aide $\mathcal{L}_{W_n^{(\gamma_0)}}(t)$, démontrer que $W_n^{(\gamma_0)}$ converge en distribution vers la v.a. Z où $Z - \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right) \sim Gamma(\gamma, \beta)$, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n^{(\gamma_0)}}(x) = F_Z(x),$$

pour tout $x \geq 0$.

En effet, on observe

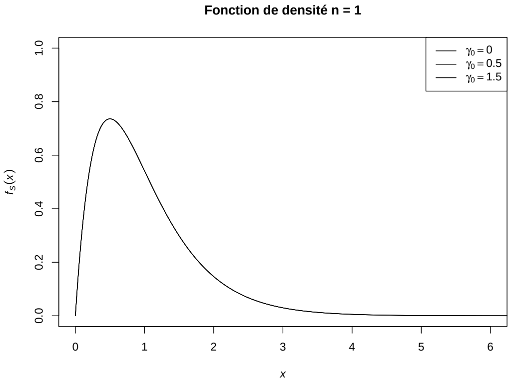
$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n^{(\gamma_0)}}(t) = \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\alpha}}\right)^{\gamma} \mathrm{e}^{-t\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right)} = F_Z(x),$$

Valeurs numériques avec $\alpha = 2$:

- Pour $n = 1$ et $\gamma = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $f_{W_n^{(\gamma_0)}}(x)$, pour $x \geq 0$, sur un graphique.
- Pour $n = 10$ et $\gamma = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $f_{W_n^{(\gamma_0)}}(x)$ ainsi que celles de $f_{W_n^{\perp}}(x)$ et $f_{W_n^{+}}(x)$, pour $x \geq 0$, sur un graphique.
- Pour $n = 100$ et $\gamma = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $f_{W_n^{(\gamma_0)}}(x)$ ainsi que celles de $f_{W_n^{\perp}}(x)$ et $f_{W_n^{+}}(x)$, pour $x \geq 0$, sur un graphique.
- Pour $n \to \infty$ et $\gamma = 0$, 0.5, 1.5, tracer les valeurs de $f_{W_n^{(\gamma_0)}}(x)$ ainsi que celles de $f_{W_n^{\perp}}(x)$ et $f_{W_n^{+}}(x)$, pour $x \geq 0$, sur un graphique.

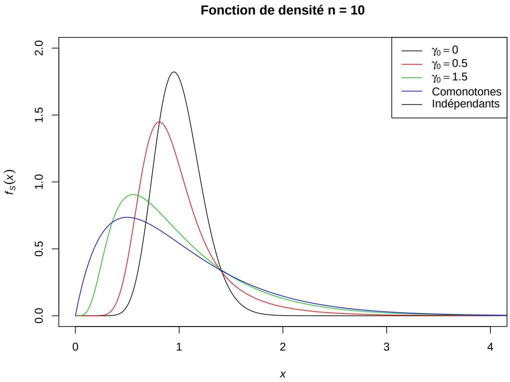
Loi gamma multivariée

Exemple no2



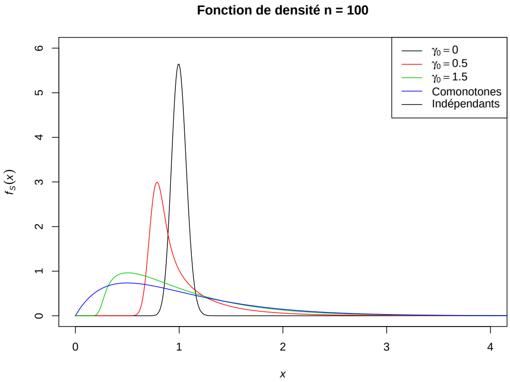
Loi gamma multivariée

Exemple no2



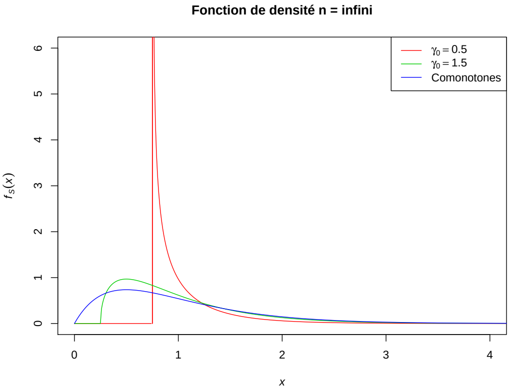
Loi gamma multivariée

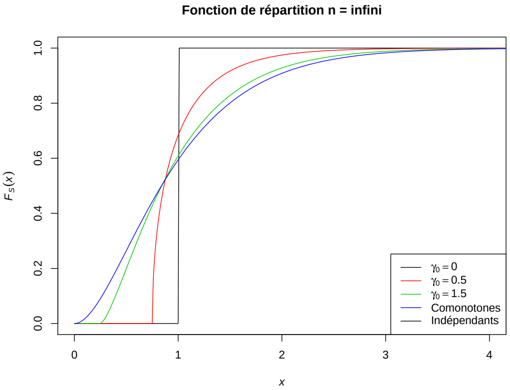
Exemple no2



Loi gamma multivariée

Exemple no2





Loi gamma multivariée

Exemple no3

Écrire un algorithme de simulation basée sur la méthode de construction.

On considère un portefeuille $n = 3$ risques.
On fixe $\alpha_1 = \beta_1 = 2$, $\alpha_2 = \beta_2 = 3$, et $\alpha_3 = \beta_3 = 4$.
Pour effectuer les calculs demandés, on utilise la méthode de simulation Monte-Carlo avec les paramètres suivants :

- nombre de simulations : $m = 100000$;
- `set.seed(2018)`.

Pour $\gamma_0 = 0$, 0.5, 1.5, on évalue approximativement les quantités suivantes :

- $VaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$ et les contributions $C_\kappa^{VaR}\left(X_i^{(\gamma_0)}\right)$ basée sur la règle d'Euler, pour $\kappa = 1 - \frac{1}{10^j}$, $j = 1, 2, 3, 4$;
- $TVaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$ et les contributions $C_\kappa^{TVaR}\left(X_i^{(\gamma_0)}\right)$ basée sur la règle d'Euler, pour $\kappa = 1 - \frac{1}{10^j}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Loi gamma multivariée

Exemple no4

$\gamma_0 = 0$

κ	$C_{\kappa}^{VaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{VaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{VaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$VaR_{\kappa}\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.017415	1.786410	0.2992175	4.103043
0.99	2.287821	2.231084	1.1588997	5.677804
0.999	2.090065	3.672269	1.3287001	7.091034
0.9999	5.440871	2.623617	0.3996309	8.464119

κ	$C_{\kappa}^{TVaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{TVaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_{\kappa}^{TVaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$TVaR_{\kappa}\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.093387	1.641081	1.066283	4.800751
0.99	3.141991	1.930183	1.209309	6.281483
0.999	4.253396	2.052436	1.313135	7.618967
0.9999	5.760619	1.872141	1.180103	8.812863

Loi gamma multivariée

Exemple no4

$\gamma_0 = 0.5$

κ	$C_\kappa^{VaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{VaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{VaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$VaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.140645	0.9175122	1.234240	4.292397
0.99	2.434492	2.3611347	1.614523	6.410150
0.999	2.966123	3.0316724	2.774799	8.772595
0.9999	4.639027	3.7548733	2.696342	11.090242

κ	$C_\kappa^{TVaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{TVaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{TVaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$TVaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.192300	1.787483	1.247891	5.227675
0.99	3.313145	2.390686	1.690832	7.394663
0.999	4.295816	3.248918	2.242175	9.786909
0.9999	5.782719	3.649601	2.548460	11.980780

UNIVERSITÉ LAVAL

Loi gamma multivariée

Exemple no4

$\gamma_0 = 1.5$

κ	$C_\kappa^{VaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{VaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{VaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$VaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.075341	1.501833	1.104101	4.681275
0.99	3.125972	2.556567	1.816267	7.498806
0.999	4.234186	3.217113	2.647751	10.099050
0.9999	5.554900	4.218299	2.842858	12.616057

κ	$C_\kappa^{TVaR}\left(X_1^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{TVaR}\left(X_2^{(\gamma_0)}\right)$	$C_\kappa^{TVaR}\left(X_3^{(\gamma_0)}\right)$	$TVaR_\kappa\left(S^{(\gamma_0)}\right)$
0.9	2.407525	2.023599	1.473276	5.904399
0.99	3.665116	2.863381	2.107845	8.636341
0.999	4.825608	3.703921	2.677929	11.207458
0.9999	6.102415	4.286741	3.492603	13.881759

Références

Références I