Act-3000 Théorie du risque

avec Christopher Blier-Wong et Ihsan Chaoubi

Indépendance, Loi Normale MV, et Méthode d'Euler pour l'allocation du capital

Étienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

2018-11-07

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Avant-propos

Avant-propos

Source pour le contenu des diapos :

- [Cossette and Marceau, 2018].

Calculs et illustrations :

- Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project.
- Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Avant-propos

Le logiciel GNU R et les bibliothèques sont disponibles sur le site du R Project et du Comprehensive R Archive Network (CRAN) :

https://cran.r-project.org/.

L'environnement RStudio est disponible sur le site suivant :

https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/.

Table des matières I

Indépendance

Soit un vecteur de n v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$.

Les composantes du vecteur $\underline{X}$ sont dites (mutuellement) indépendantes si et seulement si

$$F_{\underline{X}}(x_1, .., x_n) = F_{X_1}(x_1) ... F_{X_n}(x_n), (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

La relation (1) est essentielle pour vérifier si les composantes d'un vecteur sont indépendantes.

Il est implicite, dans la définition, que les composantes sont **mutuellement** indépendantes.

Indépendance
Exemple

Soit un vecteur de 3 v.a. discrètes $\underline{X} = (X_1,X_2,X_3)$ défini sur $\{0,1\}^3$ avec

$$\Pr(X_1 = 1,X_2 = 0,X_3 = 0) = \Pr(X_1 = 0,X_2 = 1,X_3 = 0) = \frac{1}{4}$$

et

$$\Pr(X_1 = 0,X_2 = 0,X_3 = 1) = \Pr(X_1 = 1,X_2 = 1,X_3 = 1) = \frac{1}{4}.$$

On observe que

$$\Pr(X_1 = 1) = \Pr(X_2 = 1) = \Pr(X_3 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Indépendance

Exemple

Les composantes de $\underline{X}$ sont indépendantes par paire, i.e.,

$$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \Pr(X_1 = x_1) \times \Pr(X_2 = x_2) = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(X_1 = x_1, X_3 = x_3) = \Pr(X_1 = x_1) \times \Pr(X_3 = x_3) = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \Pr(X_2 = x_2) \times \Pr(X_3 = x_3) = \frac{1}{4}$$

pour $x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$.

Par contre, elle ne sont pas mutuellement indépendantes car

$$\Pr(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \neq \Pr(X_1 = 1) \times \Pr(X_2 = 1) \times \Pr(X_3 = 1) = \frac{1}{8}.$$

Loi normale multivariée

On considère la loi normale multivariée pour le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1,\ldots,X_n)^t$ avec le vecteur des moyennes $\underline{\mu} = (\mu_1,\ldots,\mu_n)^t$ et la matrice variance-covariance

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix},$$

où $\underline{\Sigma}$ est une matrice semi-définie positive et $()^t$ désigne la transposée d'une matrice ou d'un vecteur.

Notation : $\underline{X} \sim NormMV\left(\underline{\mu},\underline{\Sigma}\right)$.
En outre, $E\left[X_i\right] = \mu_i$, $\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \sigma_i^2$ $\left(i = 1,2,\ldots,n\right)$ et

$$\mathrm{Cov}\left(X_i,X_{i'}\right) = \sigma_{i,i'} = \rho_{i,i'}\sigma_i\sigma_{i'},$$

$\left(i,\ i' = 1,2,\ldots,n\right)$, où

$$\rho_{i,i'} = \rho\left(X_i,X_{i'}\right) = \frac{\mathrm{Cov}\left(X_i,X_{i'}\right)}{\sigma_i\sigma_{i'}} \in \left[-1,1\right]$$

est le coefficient de corrélation de Pearson de la paire $\left(X_i,X_{i'}\right)$.

Remarques importantes :

- $n = 2,3,4,...$: pour tout (i,i'), les valeurs maximales de $\rho_{i,i'} = 1$ (comotonone) ;
- $n = 2$: pour tout (i,i'), les valeurs minimales de $\rho_{i,i'} = -1$ (antimotonone) ;
- $n = 3,4,...$: pour tout (i,i'), les valeurs minimales de $\rho_{i,i'}$ dépend des valeurs de σ_1, ..., σ_n ;
- $n = 3,4,...$: il est impossible que $\rho_{i,i'} = -1$ pour tout couple (i,i') car la matrice $\underline{\Sigma}$ n'est plus semi-définie positive.

L'expression de la fonction de densité de $\underline{X}$ est

$$f_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}}\left|\underline{\Sigma}\right|^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)^t \underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $\left|\underline{\Sigma}\right|$ est le déterminant de $\underline{\Sigma}$.

L'expression de la fonction de densité de $\underline{X} = (X, Y)$ est

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

Loi normale multivariée

Définition

La f.g.m. multivariée de $\underline{X}$ est

$$\mathcal{M}_{\underline{X}}\left(\underline{s}\right) = \mathrm{e}^{\underline{s}^t \underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{s}^t \underline{\Sigma s}}.$$

On a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{X_1,\ldots,X_n}(s_1,\ldots,s_n) &= \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} s_i\mu_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} s_i s_{i'}\sigma_{i,i'}} \\
&= \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} s_i\mu_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} s_i s_{i'}\rho_{i,i'}\sigma_i\sigma_{i'}}.
\end{aligned}
$$

Dans le cas univarié, pour une v.a. $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, on a la relation $X = \mu + \sigma Z$, où $Z \sim N\left(0,1\right)$.

Dans le cas multivarié, la relation devient

$$\underline{X} = \underline{\mu} + \underline{\sigma}^t \underline{Z}, \tag{2}$$

où $\underline{\sigma}^t = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ et $\underline{Z}$ obéit à une loi normale multivariée standard avec un vecteur de moyenne $(0,\ldots,0)^t$ et une matrice variance-covariance

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

La fonction de répartition conjointe de $\underline{Z}$ est désignée par le symbole $\overline{\Phi}_{\underline{\rho}}$ de telle sorte que

$$\overline{\Phi}_{\underline{\rho}}\left(x_1,\ldots,x_n\right) = F_{Z_1,\ldots,Z_n}\left(x_1,\ldots,x_n\right).$$

De plus, pour $\underline{X} = \underline{\mu} + \underline{\sigma}^t \underline{Z}$, l'expression de la fonction de répartition conjointe de $\underline{X}$ est donnée par

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \overline{\Phi}_{\underline{\rho}}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1},\ldots,\frac{x_n-\mu_n}{\sigma_n}\right).$$

L'algorithme de simulation de réalisations pour la loi normale multivariée standard se décrit comme suit.

Algorithme 1

Algorithme de simulation pour la loi normale multivariée standard. *Soit un vecteur de v.a.* $(Z_1,\ldots,Z_n)$ *de loi normale multivariée avec* $Z_i \sim N(0,1)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ *et une matrice de corrélation (supposée définie positive)*

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Algorithme (suite)

On peut écrire $\underline{\rho} = \underline{B}\ \underline{B}^t$ *où* $\underline{B}^t$ *est la matrice transposée de la matrice* $\underline{B}$*. La matrice* $\underline{B}$ *est obtenue à l'aide de la décomposition de Choleski*

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

où

$$b_{ij} = \frac{\rho_{ij} - \sum_{l=1}^{j-1} b_{il} b_{jl}}{\sqrt{1 - \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl}^2}},$$

où $1 \leq j \leq i \leq n$ *et* $\sum_{l=1}^{0} () = 0$.

Algorithme (suite)

1. *On génère des réalisations* $Y_1^{(j)},\ldots,Y_n^{(j)}$ *des v.a.* $Y_1,\ldots,Y_n$ *indépendantes de loi normale standard.*
2. *On calcule* $\underline{Z}^{(j)} = \underline{B}\ \underline{Y}^{(j)}$ *où* $\underline{Z}^{(j)} = \left(Z_1^{(j)},\ldots,Z_n^{(j)}\right)^T$ *et* $\underline{Y}^{(j)} = \left(Y_1^{(j)},\ldots,Y_n^{(j)}\right)^T$.

Soit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
La fgm de la v.a. S est

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(s) &= E\left[e^{sS}\right] \\
&= E\left[e^{s(X_1+\ldots+X_n)}\right] \\
&= E\left[e^{sX_1}\ldots e^{sX_n}\right] \\
&= \mathcal{M}_{X_1,\ldots,X_n}(s,\ldots,s).
\end{aligned}$$

On obtient

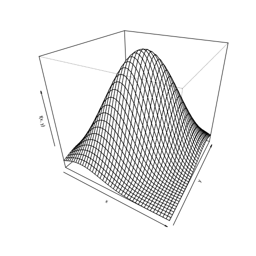
$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(s) &= E\left[\mathrm{e}^{sS}\right] \\
&= \mathcal{M}_{X_1,\ldots,X_n}(s,\ldots,s) \\
&= \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} s\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} s^2 \rho_{i,i'}\sigma_i\sigma_{i'}} \\
&= \mathrm{e}^{s\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right) + \frac{1}{2}s^2\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n}\rho_{i,i'}\sigma_i\sigma_{i'}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{s\mu_S + \frac{1}{2}s^2\sigma_S^2}.
\end{aligned}
$$

Alors, à l'aide de la f.g.m. de $\underline{X}$, on déduit que $S \sim N\left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$ où $\mu_S = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ et

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i'=1, i' \neq i}^{n} \sigma_{ii'}.$$

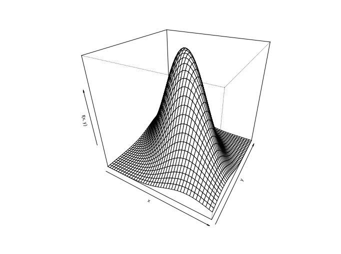
Exemple 1

Tracer $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$, *pour* $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ *et* $\rho_{1,2} = \rho_{2,1} = 0.6$.



Exemple 2

Tracer $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$, *pour* $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ *et* $\rho_{1,2} = \rho_{2,1} = -0.6$.



Exemple 3

Soit $\underline{X} = (X_1,\ldots,X_n) \sim NormMV\left(\underline{\mu},\underline{\Sigma}\right)$ *avec* $\mu_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, *et* $\sigma_{i,i'} = 1$, *pour toutes les paires* (i,i'), *avec* $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$. *Identifier la loi de* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exemple 4

Soit $\underline{X} = (X_1,...,X_n) \sim NormMV\left(\underline{\mu},\underline{\Sigma}\right)$ *avec* $\mu_i = 0$ $(i = 1,2,...,n)$*,* $\sigma_{i,i} = 1$ $(i = 1,2,...,n)$*, et* $\sigma_{i,i'} = -\frac{1}{n-1}$ *(pour toutes les paires* (i,i')*, avec* $i \neq j \in \{1,2,...,n\}$*). Identifier la loi de* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$*.*

Exemple 5

Soit $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3) \sim NormMV\left(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}\right)$ *avec* $\mu_i = 0$ $(i = 1,2,3)$*,* $\sigma_{i,i} = 1$ $(i = 1,2,\ldots,n)$*,* $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = 0.2$*,* $\sigma_{1,3} = \sigma_{3,1} = 0.3$ *et* $\sigma_{2,3} = \sigma_{3,2} = 0.5$. *Questions :*

1. *Effectuer la décomposition de Choleski.*
2. *Soit les v.a. indépendantes* (W_1, W_2, W_3) *avec* $W_i \sim Norm(0,1)$*,* $i = 1,2,3$. *La première réalisation* $\left(W_1^{(1)}, W_2^{(1)}, W_3^{(1)}\right)$ *de* (W_1, W_2, W_3) *est la suivante :* $(0.31, -1.62, 2.05)$. *Calculer la réalisation* $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}\right)$ *de* (X_1, X_2, X_3)*.*
3. *Set.seed(2018). Effectuer 1000 réalisations de* (X_1, X_2, X_3)*. Représenter ces réalisations dans un graphique 3-D.*

Exemple 6

Soit $\underline{X} = (X_1,...,X_n) \sim NormMV\left(\underline{\mu},\underline{\Sigma}\right)$ *avec* $\mu_i = 0$ $(i = 1,2,...,n)$, $\sigma_{i,i} = 1$ $(i = 1,2,...,n)$, *et* $\sigma_{i,i'} = a \in \left[-\frac{1}{n-1},1\right]$ *(pour toutes les paires* (i,i'), *avec* $i \neq j \in \{1,2,...,n\}$*). Identifier la loi de* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exemple 7

Soit $\underline{X} = (X_1,\ldots,X_n) \sim NormMV\left(\underline{\mu},\underline{\Sigma}\right)$ *avec* $\mu_i = 0$ *(*$i = 1,2,\ldots,n$*),* $\sigma_{i,i} = 1$ *(*$i = 1,2,\ldots,n$*), et* $\sigma_{i,i'} = a^{|i-i'|}$ *avec* $a \in [0,1]$ *(pour toutes les paires* (i,i')*, avec* $i \neq j \in \{1,2,\ldots,n\}$*). Identifier la loi de* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$*.*

Allocation de capital

On considère un portefeuille de n risques X_1, ..., X_n.
On définit

$$S = X_1 + ... + X_n.$$

On établit la procédure suivante pour l'allocation du capital :

- Établir la loi multivariée (conjointe) pour les coûts ou les pertes X_1,...,X_n.
- Choisir une mesure de risque pour établir le capital total.
- Appliquer la mesure de risque sur le montant total des coûts ou des pertes.
- Dans le cas d'un effet de diversification positif, choisir un principe d'allocation pour établir la part de capital par risque.

- On fixe le capital total de risque pour l'ensemble du portefeuille à l'aide d'une mesure de risque choisie ς, $\varsigma(S) = C_{TOT}(S)$ et le capital économique est $CE_{TOT}(S) = C_{TOT}(S) - E[S]$.
- On définit par C_i la part du capital (contribution au risque) allouée au risque i $(i = 1,2,\ldots,n)$.
- La régle d'allocation doit tenir compte des relations de dépendance entre les risques.
- La règle doit être additive, ce qui signifie que la relation $C_{TOT}(S) = \sum_{i=1}^{n} C_i$ doit être respectée.

- Elle doit aussi pouvoir être appliquée pour un portefeuille de plusieurs contrats.
- Elle doit permettre un juste partage entre les risques du bénéfice réalisé à la mutualisation des risques.
- Dans ce chapitre, on présente les règles d'allocation de capital, notamment les règles basées sur la covariance, sur la VaR et sur la TVaR.
- On étudie en détails l'évaluation des contributions selon les règles basées sur la TVaR.

Pour les mesures de risque, on a présenté des propriétés désirables.
Il existe aussi des propriétés pour les methodes d'allocation de capital.
Soit un vecteur de v.a. $(X_1,...,X_n)$.
On définit

$$S = X_1 + ... + X_n \, .$$

- Soit une mesure de risque π_κ pour un niveau de confiance κ, pour $\kappa \in \,]0{,}1[$.
- On détermine le capital total avec

$$\pi_\kappa\left(S\right).$$

Soit une méthode selon laquelle la part allouée au risque i est

$$C_i = \pi_k\left(X_i; S\right).$$

Propriété 2

Allocation complète. *Le montant total de capital est alloué aux n risques*

$$\pi_\kappa\left(S\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{n} \pi_k\left(X_i; S\right).$$

Propriété 3

Diversification. *Pour $i = 1,2,...,n$, on a*

$$C_i = \pi_k\left(X_i; S\right) \leq \pi_\kappa\left(X_i\right)$$

i.e. la contribution allouée au risque i (au sein du portefeuille) doit être inférieure au capital pour X_i seulement (sans faire partie du portefeuille).

On présente quelques notions sur les fonctions homogènes et le théorème d'Euler ainsi que leur application en actuariat.

Definition 4

Soit $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ avec valeur dans $\mathbb{R}$. La fonction φ est dite homogène de dégré m si

$$\varphi(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^m \varphi(x_1,\ldots,x_n),$$

pour tout $\lambda > 0$.

On fournit quelques exemples de fonctions homogènes.

Exemple 8

Soit

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$. *Alors, on a*

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) &= a_1 \lambda x_1 + \ldots + a_n \lambda x_n \\ &= \lambda \varphi(x_1,\ldots,x_n), \end{aligned}$$

ce qui implique que φ *est homogène avec degré 1.* ∎

Exemple 9

Soit

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = b \times x_1 \times \ldots \times x_n$$

avec $b \in \mathbb{R}$. *Alors, on a*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) &= b \times \lambda x_1 \times \ldots \times \lambda x_n \\ &= \lambda^n \varphi(x_1,\ldots,x_n),\end{aligned}$$

ce qui implique que φ *est homogène avec degré n.* ■

Exemple 10

Soit

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = a_1 x_1^m + \ldots + a_n x_n^m$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$. *Alors, on constate*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) &= a_1 \lambda^m x_1^m + \ldots + a_n \lambda^m x_n^m \\ &= \lambda^m \varphi(x_1,\ldots,x_n),\end{aligned}$$

ce qui implique que φ *est homogène avec degré* m. ■

Exemple 11

Soit

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = a_1 x_1^5 + a_n x_2^3 x_3^2$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$. *Alors, comme*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3) &= a_1\lambda^5 x_1^5 + a_2\lambda^3 x_2^3\lambda^2 x_3^2\\ &= \lambda^5\varphi(x_1,x_2,x_3),\end{aligned}$$

on déduit que φ *est homogène avec degré 5.* ■

Exemple 12

Les fonctions

$$\ln\left(x_1 + \ldots + x_n\right)$$

et

$$\exp\left(x_1 + \ldots + x_n\right)$$

ne sont pas homogènes. ■

Le résultat suivant est important.

Theorem 5

Théorème d'Euler. *Soit* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *une fonction définie sur* $\mathbb{R}^n$ *avec valeur dans* $\mathbb{R}$, *que l'on suppose différentiable en tout point. Si la fonction* φ *est (positivement) homogène de degré* m, *alors on a*

$$m\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Preuve

Si $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ *est homogène d'ordre* m*, on sait que*

$$\varphi(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^m \varphi(x_1,\ldots,\lambda_n) \tag{4}$$

pour tout $\lambda > 0$*. On dérive de part d'autre par rapport à* λ *et on pose* $\lambda = 1$*. Du côté gauche de l'égalité en (4), on a*

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\varphi(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} &= \left.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)}{\partial(\lambda x_i)} \times \frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=1} \\
&= \left.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)}{\partial(\lambda x_i)} \times x_i\right|_{\lambda=1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i} \times x_i.
\end{aligned}$$

Preuve (suite)

Ensuite, pour le côté droit de l'égalité en (4), on a

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\left(\lambda^m\varphi\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} &= \left.m\lambda^{m-1}\varphi\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right|_{\lambda=1} \\ &= m\varphi\left(x_1,\ldots,x_n\right).\end{aligned}$$

Remarque 6

Pour $m = 1$, *(4) devient*

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x_1,\ldots,x_n). \tag{5}$$

Ainsi, la fonction φ *correspond à la somme des contributions de chaque variable* x_i, *qui correpond à*

$$C_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i \frac{\partial \varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i} \tag{6}$$

pour $i = 1,2,\ldots,n$.

Remarque 7

À partir de (6), on observe que

$$\begin{aligned} C_i(x_1,...,x_n) &= x_i \frac{\partial \varphi(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} \\ &= \lim_{h\to 0} x_i \frac{\varphi(x_1,...,x_i+h,...,x_n) - \varphi(x_1,...,x_i,...,x_n)}{h} \end{aligned} \tag{7}$$

En posant $h = \varepsilon x_i$, (7) devient

$$\begin{aligned} C_i(x_1,...,x_n) &= \lim_{\varepsilon\to 0} x_i \frac{\varphi(x_1,...,(1+\varepsilon)x_i,...,x_n) - \varphi(x_1,...,x_i,...,x_n)}{(1+\varepsilon)x_i - x_i} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(x_1,...,(1+\varepsilon)x_i,...,x_n) - \varphi(x_1,...,x_i,...,x_n)}{\varepsilon} \\ &= \left.\frac{\partial \varphi(x_1,...,\lambda_i x_i,...,x_n)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda_i=1}, \end{aligned} \tag{8}$$

pour $i = 1,2,...,n$.

À la suite de la Remarque 7, on déduit le corollaire suivant.

Corollary 8

Pour une fonction homogène d'ordre 1 et dérivable φ, (5) devient

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial \varphi(\lambda_1 x_1,\ldots,\lambda_n x_n)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x_1,\ldots,x_n),\end{aligned}$$

i.e. la contribution de la variable est

$$C_i(x_1,\ldots,x_n) = \left.\frac{\partial \varphi(\lambda_1 x_1,\ldots,\lambda_n x_n)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1}.$$

Remarque 9

Approximation de la contribution. *Dans les circonstances où on ne peut pas identifier la forme analytique pour (8), on recours à l'approximation*

$$C_i\left(x_1,\ldots,x_n\right) \simeq \frac{\varphi\left(x_1,\ldots,\left(1+\varepsilon\right)x_i,\ldots,x_n\right) - \varphi\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n\right)}{\varepsilon}$$

avec un choix très petit pour ε (e.g. 10^{-3} ou 10^{-4}).

- Soit un portefeuille constitué de n risques (contrats, lignes d'affaires, etc.) $X_1,...,X_n$.
- Le théorème 5 d'Euler est très utile pour établir la contribution d'un risque X_i au risque global $S = X_1 + ... + X_n$ du portefeuille.
- Soit une mesure positivement homogène d'ordre 1 $\zeta(S) = \zeta(X_1 + ... + X_n)$.

À partir du Corollaire 8, on obtient le résultat suivant.

Corollary 10

La contribution d'un risque X_i au risque global $S = X_1 + ... + X_n$ du portefeuille est donnée par

$$C^{\zeta}\left(X_i\right) = \left.\frac{\partial\zeta\left(\lambda_1 X_1,...,\lambda_n X_n\right)}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1} \tag{9}$$

de telle sorte que

$$\zeta\left(S\right) = \zeta\left(X_1 + ... + X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i\left(X_1,...,X_n\right).$$

Exemple 13

Les mesures de risque

$$TVaR_\kappa(X_1 + ... + X_n)$$

et

$$VaR_\kappa(X_1 + ... + X_n)$$

sont homogènes positives d'ordre 1.
En effet, on a

$$VaR_\kappa(\lambda X_1 + ... + \lambda X_n) = \lambda VaR_\kappa(X_1 + ... + X_n)$$

et

$$TVaR_\kappa(\lambda X_1 + ... + \lambda X_n) = \lambda TVaR_\kappa(X_1 + ... + X_n)$$

pour $\lambda > 0$. ■

Exemple 14

La mesure de risque

$$\sqrt{Var\left(X_1+\ldots+X_n\right)}$$

est homogène positive avec ordre 1, car

$$\begin{aligned}\sqrt{Var\left(X_1+\ldots+X_n\right)} &= \sqrt{Var\left(\lambda X_1+\ldots+\lambda X_n\right)}\\ &= \sqrt{\lambda^2 Var\left(X_1+\ldots+X_n\right)}\\ &= \lambda\sqrt{Var\left(X_1+\ldots+X_n\right)}.\end{aligned}$$

■

Exemple 15

En revanche, la variance

$$Var\left(X_1 + ... + X_n\right)$$

est homogène positive avec ordre 2, parce qu'on a

$$\begin{aligned} Var\left(X_1 + ... + X_n\right) &= Var\left(\lambda X_1 + ... + \lambda X_n\right) \\ &= \lambda^2 Var\left(X_1 + ... + X_n\right). \end{aligned}$$

■

On considère trois mesures de risque pour lesquelles on peut identifier la forme de la contribution.

Soit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On mesure le risque global du portefeuille à l'aide la mesure écart-type de S qui est donnée par $\zeta(S) = \sqrt{Var(S)}$, où

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(X_1 + \ldots + X_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} Cov(X_i, X_j). \end{aligned}$$

On désire identifier la contribution de chaque risque X_i au risque global du portefeuille. À l'aide de 9, on a

$$\begin{aligned}
C^{\sqrt{Var}}(X_i) &= \left.\frac{\partial\varphi(\lambda_1 X_1,\ldots,\lambda_n X_n)}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1} \\
&= \left.\frac{\partial\sqrt{Var(\lambda_1 X_1+\ldots+\lambda_n X_n)}}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1} \\
&= \left.\frac{\partial\sqrt{\sum_{i=1}^n Var(\lambda_i X_i)+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\neq i}^n Cov(\lambda_i X_i,\lambda_j X_j)}}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1} \\
&= \left.\frac{\partial\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 Var(X_i)+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1,j\neq i}^n \lambda_i\lambda_j Cov(X_i,X_j)}}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1}
\end{aligned}$$

qui devient

$$
\begin{aligned}
C^{\sqrt{Var}}(X_i) &= \frac{1}{2}\frac{2\lambda_i Var(X_i) + 2\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_j Cov(X_i,X_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} Var(\lambda_i X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} Cov(\lambda_i X_i,\lambda_j X_j)}}\Bigg|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1} \\
&= \frac{Var(X_i) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} Cov(X_i,X_j)}{\sqrt{Var(S)}} \\
&= \frac{Cov(X_i,S)}{\sqrt{Var(S)}}.
\end{aligned}
$$

Allocation de capital

Mesure écart-type et contribution

Donc, la contribution du risque i au risque global est

$$C^{\sqrt{Var}}(X_i) = \frac{Cov(X_i,S)}{\sqrt{Var(S)}}.$$

Comme prévu, on observe

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} C^{\sqrt{Var}}(X_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{Cov(X_i,S)}{\sqrt{Var(S)}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} Cov(X_i,S)}{\sqrt{Var(S)}} \\
&= \frac{Var(S)}{\sqrt{Var(S)}} \\
&= \sqrt{Var(S)}.
\end{aligned}$$

Corollary 11

Soit la mesure $\zeta(S) = \sqrt{Var(S)}$, *où* $S = X_1 + \ldots + X_n$. *Alors, la contribution du risque* X_i *au risque global est*

$$C^{\sqrt{Var}}(X_i) = \frac{Cov(X_i, S)}{\sqrt{Var(S)}}.$$

Pour le prochain exemple, on a recours au lemme suivant.

Lemma 12

Soit une v.a. continue Y. Alors, on a

$$b = \frac{E\left[Y \times 1_{\{Y=b\}}\right]}{f_Y(b)} = E\left[Y|Y=b\right].$$

Soit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On mesure le risque global du portefeuille à l'aide de la mesure VaR de S qui est donnée par $\zeta(S) = VaR_\kappa(S)$, où

$$VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(X_1 + ... + X_n).$$

Pour simplifier la présentation, on suppose que les v.a. $X_1 ... , X_n$ sont continues.

Selon le lemme 12, on observe que

$$VaR_\kappa\left(X_1 + ... + X_n\right) = E\left[X_1 + ... + X_n | X_1 + ... + X_n = VaR_\kappa\left(X_1 + ... + X_n\right)\right]$$

Pour déterminer la contribution de chaque risque X_i au risque global du portefeuille. À l'aide du Théorème 5 d'Euler et de (8), on a

$$
\begin{aligned}
C_\kappa^{VaR}(X_i) &= \left.\frac{\partial E\left[\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n | S = VaR_\kappa(S)\right]}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1} \\
&= E\left[\lambda_i X_i | S = VaR_\kappa(S)\right]\big|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1} \\
&= E\left[X_i | S = VaR_\kappa(S)\right] \\
&= \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S=VaR_\kappa(S)\}}\right]}{f_S(VaR_\kappa(S))}.
\end{aligned}
$$

Pour le développement, on ne multiplie pas les v.a. $X_1,\ldots,X_n$ qui sont présentent dans la condition, car il faut considérer cette condition comme une contrainte i.e. on travaille avec la contrainte que la somme des v.a. est égale $b = VaR_\kappa(S)$. Bref, la contribution du risque i au risque global est

$$C_\kappa^{VaR}(X_i) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S=VaR_\kappa(S)\}}\right]}{f_S\left(VaR_\kappa(S)\right)}.$$

Comme prévu, on observe

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} C_{\kappa}^{VaR}(X_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]}{f_S(VaR_{\kappa}(S))} \\
&= \frac{E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]}{f_S(VaR_{\kappa}(S))} \\
&= \frac{E\left[S \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]}{f_S(VaR_{\kappa}(S))} \\
&= VaR_{\kappa}(S).
\end{aligned}$$

Corollary 13

Soit la mesure $\zeta(S) = VaR_\kappa(S)$, *où* $S = X_1 + \ldots + X_n$. *Alors, la contribution du risque* X_i *au risque global est*

$$C_\kappa^{VaR}(X_i) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S = VaR_\kappa(S)\}}\right]}{f_S(VaR_\kappa(S))}. \tag{10}$$

Soit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On mesure le risque global du portefeuille à l'aide de la mesure TVaR de S qui est donnée par
$\zeta(S) = TVaR_{\kappa}(S)$, où

$$TVaR_{\kappa}(S) = TVaR_{\kappa}(X_1 + ... + X_n).$$

Pour simplifier la présentation, on suppose que les v.a. $X_1...,X_i$ sont continues.

On sait que

$$
\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(X_1 + \ldots + X_n) &= E\left[(X_1 + \ldots + X_n) \mid S > VaR_{\kappa}(S)\right] \\
&= \frac{E\left[(X_1 + \ldots + X_n) \times 1_{\{S > VaR_{\kappa}(S)\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \int_{VaR_{\kappa}(X_1+\ldots+X_n)}^{\infty} E\left[(X_1 + \ldots + X_n) \times 1_{\{S=y\}}\right] dy.
\end{aligned}
$$

À partir de (10), on déduit

$$
\begin{aligned}
C_\kappa^{TVaR}(X_i) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_\kappa(X_1+\ldots+X_n)}^{\infty} E\left[X_i \times 1_{\{S=y\}}\right] dy \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X_i \times 1_{\{S>VaR_\kappa(X_1+\ldots+X_n)\}}\right] dy.
\end{aligned}
$$

Corollary 14

Soit la mesure $\zeta(S) = TVaR_\kappa(S)$*, où* $S = X_1 + \ldots + X_n$*. Alors, la contribution du risque* X_i *au risque global est*

$$C_\kappa^{TVaR}(X_i) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right]}{1-\kappa}. \tag{11}$$

Comme on l'indique dans la remarque 9, si on ne parvient pas à identifier la forme analytique pour (9), on utilise l'approximation donnée par

$$C_i \simeq \frac{\zeta\left(X_1,\ldots,\left(1+\varepsilon\right)X_i,\ldots,X_n\right)-\zeta\left(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n\right)}{\varepsilon}$$

avec un choix d'une très petite valeur pour ε (e.g. 10^{-3} ou 10^{-4}).

On considère un portefeuille d'un nombre n élevé de risques représentés par le vecteur de v.a. $(X_1,...,X_n)$. Les coûts pour l'ensemble du portefeuille sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Pour parvenir à évaluer les différentes quantités de risque (e.g. mesures de risque, mesures de solvabilité, primes *stop-loss*, etc.) définies en fonction des coûts totaux du portefeuille et à évaluer les contributions associées à chaque risque, il arrive en pratique que la seule possibilité repose sur les méthodes fondées sur la simulation stochastique.

Dans cette section, on explique la procédure pour évaluer approximativement les contributions selon les règles basées sur sur la VaR et sur la TVaR.

On suppose que l'on a produit les m réalisations

$$\left\{\left(X_1^{(j)},...,X_n^{(j)}\right),j=1,2,...,m\right\}$$

de $(X_1,...,X_n)$ et $\left\{S^{(j)},j=1,2,...,m\right\}$ de S.

Condition 15

Dans cette section, on suppose que $\kappa \times m \in \mathbb{N}$.

Condition 16

Dans cette section, on fait aussi l'hypothèse que les v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ *sont continues.*

Remarque 17

Les deux hypothèses sont faites pour simplifier la présentation. Le cas plus général est traité en détail dans le chapitre 10 de Marceau (2013).

- L'ensemble des réalisations classées en ordre croissant de S est noté par $\left\{S^{[j]}, j = 1, 2, \ldots, m\right\}$.
- On fixe j_0 tel que $F_m^{-1}(\kappa) = X^{[j_0]}$ où F_n est la fonction de répartition empirique déterminée à partir des réalisations $\left\{S^{(j)}, j = 1, 2, \ldots, m\right\}$. Bref, $j_0 = \kappa m$.
- La valeur de $VaR_\kappa(S)$ est déterminée approximativement par $F_m^{-1}(\kappa)$. On fixe $VaR_\kappa(S) \simeq \widehat{VaR}_\kappa(S) = F_m^{-1}(\kappa) = S^{[j_0]}$.

On rappelle l'expression de l'approximation de $TVaR_{\kappa}(S)$ qui est donnée par

$$\begin{aligned}
\widehat{TVaR}_{\kappa}(S) &\simeq \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} S^{(j)} \times 1_{\{S^{(j)} > \widehat{VaR}_{\kappa}(S)\}}\right) \\
&= \frac{1}{m-j_0}\sum_{j=j_0+1}^{m} S^{[j]}.
\end{aligned}$$

Les approximations des contributions au risque X_i selon les règles basées sur la VaR et la TVaR sont données respectivement par

$$C_{\kappa}^{VaR}(X_i) \simeq \widetilde{C}_{\kappa}^{VaR}(X_i) = \sum_{j=1}^{m} X_i^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)}=S^{[j_0]}\right\}}$$

et

$$\begin{aligned} C_{\kappa}^{TVaR}(X_i) &\simeq \widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_i) = \frac{1}{(1-\kappa)\,m} \sum_{j=1}^{m} X_i^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)}>S^{[j_0]}\right\}} \\ &= \frac{1}{m-j_0} \sum_{j=1}^{m} X_i^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)}>S^{[j_0]}\right\}}, \end{aligned}$$

pour $i = 1,2,\ldots,n$.

Exemple 16

On considère un portefeuille avec trois v.a. continues X_1, X_2, *et* X_3. *On a reproduit le tableau ci-dessous 10 réalisations du vecteur* (X_1,X_2,X_3) *:*

j	$X_1^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$S^{(j)}$	rang
1	442	636	4159	5237	5
2	1545	1620	2436	5601	6
3	3733	1933	7860	13526	10
4	1915	1637	2147	5699	7
5	1197	1448	1363	4008	3
6	2503	195	265	2963	1
7	918	1185	1131	3234	2
8	959	672	2718	4349	4
9	1991	1770	4137	7898	9
10	2667	2505	639	5811	8

Exemple (suite)

On fournit dans le tableau suivant les valeurs de $\widetilde{VaR}$ et des contributions de chaque risque à cette mesure :

κ	$\widetilde{C}_{\kappa}^{VaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{VaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{VaR}(X_3)$	$\widetilde{VaR}_{\kappa}(S)$
0.7	1915	1637	2147	5699
0.8	2667	2505	639	5811
0.9	1991	1770	4137	7898

Exemple (suite)

On fournit dans le tableau suivant les valeurs de $\widetilde{TVaR}$ et des contributions de chaque risque à cette mesure :

κ	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_3)$	$\widetilde{TVaR}_{\kappa}(S)$
0.7	2797	2069.33	4212	9078.33
0.8	2862	1851.5	5998.5	10712
0.9	3733	1933	7860	13526

Exemple (suite)

Dans le tableau suivant, on observe que $\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_i) \leq \widetilde{TVaR}_{\kappa}(X_i)$, *pour chaque valeur de* κ *et chaque risque* X_i $(i = 1,2,3)$ *:*

κ	$\widetilde{TVaR}_{\kappa}(X_1)$	$\widetilde{TVaR}_{\kappa}(X_2)$	$\widetilde{TVaR}_{\kappa}(X_3)$
0.7	2967.67	2069.33	5385.33
0.8	3200	2219	6009.5
0.9	3733	2505	7860

Cette relation découle de la propriété de sous-additivité de la mesure TVaR. Comme la mesure VaR n'est pas sous-additive, on n'observe pas une telle relation. Par exemple,
$\widetilde{C}_{0.8}^{VaR}(X_2) = 2505 > \widetilde{VaR}_{0.9}(X_2) = 1770$.

- Soit un portefeuille de n risques X_1, ..., X_n.
- Dans les sections précédentes, on a considéré le cas où les v.a. sont continues (et souvent indépendantes).
- Dans les prochaines sections, on considères des v.a. continues ou discrètes, dépendantes ou indépendantes.

La contribution au risque X_i selon la règle basée sur la VaR est

$$C_i = VaR_\kappa\left(X_i; S\right) = E\left[X_i | S = VaR_\kappa\left(S\right)\right]. \tag{12}$$

On vérifie que la relation

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} C_i &= \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i | S = VaR_\kappa\left(S\right)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | S = VaR_\kappa\left(S\right)\right] \\ &= E\left[S | S = VaR_\kappa\left(S\right)\right] = VaR_\kappa\left(S\right)\end{aligned}$$

est satisfaite.

Selon la règle basée sur la mesure TVaR, la contribution au risque X_i est donnée par

$$C_i = TVaR_\kappa\left(X_i; S\right) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] + E\left[X_i \times 1_{\{S = VaR_\kappa(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa}, \tag{13}$$

avec

$$\beta = \begin{cases} \frac{(\Pr(S \leq VaR_\kappa(S)) - \kappa)}{\Pr(S = VaR_\kappa(S))}, \text{ si } \Pr\left(S = VaR_\kappa\left(S\right)\right) > 0 \\ 0, \text{ si } \Pr\left(S = VaR_\kappa\left(S\right)\right) = 0 \end{cases}.$$

On déduit

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} TVaR_{\kappa}(X_i;S) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S>VaR_{\kappa}(S)\}}\right] + E\left[X_i \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[S \times 1_{\{S>VaR_{\kappa}(S)\}}\right] + E\left[S \times 1_{\{S=VaR_{\kappa}(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[S \times 1_{\{S>VaR_{\kappa}(S)\}}\right] + VaR_{\kappa}(S)\Pr(S=VaR_{\kappa}(S))\beta}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[S \times 1_{\{S>VaR_{\kappa}(S)\}}\right] + VaR_{\kappa}(S)(\Pr(S\leq VaR_{\kappa}(S))-\kappa)}{1-\kappa} \\
&= TVaR_{\kappa}(S),
\end{aligned}
$$

confirmant que la relation $C_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} C_i$ est satisfaite.

Les deux règles tiennent compte de la structure de dépendance du vecteur aléatoire $(X_1,...,X_n)$. Au premier abord, elles semblent difficiles d'application. À cette fin, on examine en détail l'application de ces deux règles. En premier lieu, on va identifier quelques cas où il est possible d'obtenir l'expression analytique de la contribution de X_i $(i = 1,2,...,n)$. Ensuite, on va traiter des méthodes pour évaluer les contributions lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir des expressions analytiques. De plus, on verra qu'il est beaucoup plus aisé d'appliquer la règle basée sur la TVaR (et sur la VaR) que la règle basée sur la covariance dans le contexte de portefeuille avec un grand nombre de risques comme c'est souvent le cas en pratique.

On considère un portefeuille où les v.a. $X_1,...,X_n$ sont continues ce qui implique que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est aussi continue.

En posant $VaR_\kappa(S) = s_0$, l'expression de la contribution selon la règle basée sur la VaR de X_i $(i = 1,\ldots,n)$ devient

$$VaR_\kappa(X_i; S) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S=s_0\}}\right]}{f_S(s_0)},$$

où

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] = \int_0^s x f_{X_i,S_{-i}}(x, s-x)\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

avec $S_{-i} = \sum_{l=1,l\neq i}^{n} X_l$.

De même, selon la règle basée sur la TVaR, la contribution du risque X_i est donnée par

$$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right]}{1-\kappa}, \tag{15}$$

où

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = \int_{s_0}^{\infty} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] \mathrm{d}s.$$

On a aussi

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = E\left[X_i\right] - E\left[X_i \times 1_{\{S\leq s_0\}}\right],$$

avec

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = \int_0^{s_0} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] \mathrm{d}s. \tag{16}$$

- Dans le prochain exemple, on traite un portefeuille constitué de deux risques indépendants.
- Soient les v.a. indépendantes $X_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1{,}2$, avec $\beta_1 > \beta_2$.
- On définit $S = X_1 + X_2$

La fonction de répartition de la v.a. S est

$$F_S(x) = H(x; \beta_1, \beta_2) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{2-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}, & \beta_1 = \beta_2 = \beta \quad \text{(Erlang)} \\ \sum_{i=1}^{2} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{2} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(1 - e^{-\beta_i x}\right), & \beta_1 \neq \beta_2 \quad \text{(Erlang généralisée)} \end{cases}, \tag{17}$$

L'espérance tronquée de la v.a. S correspond à

$$E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right] = \zeta\left(b;\beta_1,\beta_2\right) = \begin{cases} \frac{2}{\beta}\overline{H}\left(b;\beta,\beta\right) = \frac{2}{\beta}\left(\mathrm{e}^{-\beta b}\sum_{j=0}^{2}\frac{(\beta b)^j}{j!}\right), & \beta_1 = \beta_2 = \beta \\ \sum_{i=1}^{2}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{2}\frac{\beta_j}{\beta_j-\beta_i}\right)\left(b\mathrm{e}^{-\beta_i b} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta_i b}}{\beta_i}\right), & \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}, \tag{18}$$

L'expression en (14) devient

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1 \times 1_{\{S=s\}}\right] &= \int_0^s x f_{X_1,X_2}(x, s-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^s x f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(indépendance)} \\
&= \int_0^s x \beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x} \beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2 (s-x)} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

et on obtient

$$E\left[X_1 \times 1_{\{S=s\}}\right] = \begin{cases} \frac{1}{\beta} h\left(x;3,\beta\right), & \beta_1 = \beta_2 = \beta \\ \beta_1 \beta_2 \left(\frac{e^{-\beta_2 s}}{(\beta_1-\beta_2)^2} - \frac{e^{-\beta_1 s}}{(\beta_1-\beta_2)^2} - \frac{s}{(\beta_1-\beta_2)} e^{-\beta_1 s} \right), & \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}, \tag{19}$$

Ensuite, on remplace (19) dans (14)

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1 \times 1_{\{S>b\}}\right] &= \xi_1\left(b;\beta_1,\beta_2\right) \\
&= \int_0^{s_0} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] \mathrm{d}s \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\beta}\overline{H}\left(b;3,\beta\right), & \beta_1 = \beta_2 = \beta \\ \frac{\beta_2 e^{-\beta_1 b}\left(b+\frac{1}{\beta_1}\right)}{(\beta_2-\beta_1)} - \left(\frac{\beta_2 e^{-\beta_1 b}}{(\beta_1-\beta_2)^2} - \frac{\beta_1 e^{-\beta_2 b}}{(\beta_1-\beta_2)^2}\right), & \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases},
\end{aligned}
$$

- On considère un exemple constitué de n risques indépendants obéissant à des lois gamma de paramètres de forme différents et de paramètres d'échelle identiques.
- Soient les v.a. indépendantes $X_1,...,X_n$ avec $X_i \sim Ga(\alpha_i,\beta)$. Alors, $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Ga(\alpha_S,\beta)$ avec $\alpha_S = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Pour établir la contribution de X_i, on a besoin de trouver $E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]$ où

$$\begin{aligned}
E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] &= \int_0^s x f_{X_i}(x) f_{S_{-i}}(s-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^s x h(x;\alpha_i,\beta)\, h(s-x;\alpha_S-\alpha_i,\beta)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^s x \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha_i)}\beta^{\alpha_i}\left(x^{\alpha_i-1}\right)\frac{e^{-\beta(s-x)}}{\Gamma(\alpha_S-\alpha_i)}\beta^{\alpha_S-\alpha_i}\left((s-x)^{\alpha_S-\alpha_i-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^s \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha_i)}\frac{\alpha_i}{\alpha_i}\frac{\beta}{\beta}\beta^{\alpha_i}\left(x^{\alpha_i+1-1}\right)\frac{e^{-\beta(s-x)}}{\Gamma(\alpha_S-\alpha_i)}\beta^{\alpha_S-\alpha_i}\left((s-x)^{\alpha_S-\alpha_i-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\alpha_i}{\beta}\int_0^s \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha_i+1)}\beta^{\alpha_i+1}\left(x^{\alpha_i+1-1}\right)\frac{e^{-\beta(s-x)}}{\Gamma(\alpha_S-\alpha_i)}\beta^{\alpha_S-\alpha_i}\left((s-x)^{\alpha_S-\alpha_i-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\alpha_i}{\beta} h(s;\alpha_S+1,\beta).
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>b\}}\right] = \int_b^{\infty} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] \mathrm{d}s = \int_b^{\infty} \frac{\alpha_i}{\beta} h\left(s; \alpha_S + 1, \beta\right) \mathrm{d}s$$

qui devient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>b\}}\right] = \frac{\alpha_i}{\beta} \overline{H}\left(b; \alpha_S + 1, \beta\right). \tag{20}$$

En remplaçant (20) dans (15), il en résulte que

$$TVaR_{\kappa}(X_i; S) = \frac{\alpha_i}{\beta} \frac{\overline{H}\left(VaR_{\kappa}\left(S\right); \alpha_S + 1, \beta\right)}{1 - \kappa}, \tag{21}$$

fournissant un rare cas où le montant alloué selon la règle basée sur la TVaR coïncide avec celui déterminé selon la règle simple basée sur l'espérance.

Soit un vecteur de v.a. $(X_1,..,X_n)$ obéissant à une loi normale multivariée avec

$$\underline{\mu} = (\mu_1,...,\mu_n)^{tr} \text{ et } \underline{\sigma} = (\sigma_1,...,\sigma_n)^{tr}$$

("^{tr}" $=$ transposée) et une matrice de coefficients de corrélation de Pearson dont les éléments sont

$$\rho_P(X_i,X_j) = \rho_{i,j}$$

pour $i,j \in \{1,2,....,n\}$.

Allocation de capital

Exemple très important – variables aléatoires dé pendantes de loi normale multivariée

- On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- On sait

$$S \sim Norm\left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$$

avec

$$\mu_S = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

et

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j .$$

Alors, on déduit

$$
\begin{aligned}
VaR_{\kappa}(S) &= \mu_S + \sigma_S \times \Phi^{-1}(\kappa) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j} \times \Phi^{-1}(\kappa) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1, j \neq i}^{n} Cov(X_i, X_j)} \times \Phi^{-1}(\kappa).
\end{aligned}
$$

Allocation de capital

Exemple très important – variables aléatoires dé pendantes de loi normale multivariée

et

$$
\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(S) &= \mu_S + \sigma_S \times \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1,j\neq i}^{n}\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j} \times \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}E\left[X_i\right] + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}Var\left(X_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1,j\neq i}^{n}Cov\left(X_i,X_j\right)} \times \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Pour obtenir la contribution selon la VaR, on utilise le corollaire 8 et l'expression de la contribution pour l'écart-type i.e. la contribution de la variable est

$$
\begin{aligned}
C^{\zeta}\left(X_i\right) &= VaR_{\kappa}\left(X_i;S\right) \\
&= \left.\frac{\partial\zeta\left(\lambda_1 X_1,\ldots,\lambda_n X_n\right)}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1} \\
&= E\left[X_i\right] + \frac{Var\left(X_i\right)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n} Cov\left(X_i,X_j\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}} \times \Phi^{-1}\left(\kappa\right).
\end{aligned}
$$

Pour obtenir la contribution selon la TVaR, on utilise le corollaire 8 et l'expression de la contribution pour l'écart-type i.e. la contribution de la variable est

$$
\begin{aligned}
C^{\zeta}\left(X_i\right) &= TVaR_{\kappa}\left(X_i;S\right) \\
&= \left.\frac{\partial\zeta\left(\lambda_1X_1,...,\lambda_nX_n\right)}{\partial\lambda_i}\right|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1} \\
&= E\left[X_i\right] \\
&\quad+\frac{Var\left(X_i\right)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}Cov\left(X_i,X_j\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\times\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}\left(\kappa\right)\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Pour chaque risque X_i et selon la TVaR, le bénéfice de mutualisation est

$$
\begin{aligned}
& TVaR_\kappa\left(X_i\right) - TVaR_\kappa\left(X_i; S\right) \\
= \quad & E\left[X_i\right] + \sqrt{Var\left(X_i\right)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} \\
& -E\left[X_i\right] + \frac{Var\left(X_i\right) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} Cov\left(X_i, X_j\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}} \times \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} \\
= \quad & \left(\sqrt{Var\left(X_i\right)} - \frac{Var\left(X_i\right) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} Cov\left(X_i, X_j\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2} \\
= \quad & \sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1 - \frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Allocation de capital

Exemple très important – variables aléatoires dé pendantes de loi normale multivariée

On peut montrer que

$$\sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1-\frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right)\times\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}\left(\kappa\right)\right)^2}\geq 0$$

ou

$$\sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1-\frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right)\times\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}=0$$

quand

$$\rho_{i,j}=1$$

pour tout couple (i,j).

Pour chaque risque X_i et selon la VaR, le "bénéfice" de mutualisation est

$$
\begin{aligned}
& VaR_\kappa\left(X_i\right)-VaR_\kappa\left(X_i;S\right) \\
= \; & E\left[X_i\right]+\sqrt{Var\left(X_i\right)}\times\Phi^{-1}(\kappa) \\
& -E\left[X_i\right]+\frac{Var\left(X_i\right)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}Cov\left(X_i,X_j\right)}{\sqrt{Var(S)}}\times\Phi^{-1}(\kappa) \\
= \; & \left(\sqrt{Var\left(X_i\right)}-\frac{Var\left(X_i\right)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}Cov\left(X_i,X_j\right)}{\sqrt{Var(S)}}\right)\times\Phi^{-1}(\kappa) \\
= \; & \sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1-\frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var(S)}}\right)\times\Phi^{-1}(\kappa).
\end{aligned}
$$

Allocation de capital

Exemple très important – variables aléatoires dé pendantes de loi normale multivariée

Pour $\kappa \in \left]0{,}0.5\right[$, on peut montrer que

$$\sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1-\frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right)\times\Phi^{-1}\left(\kappa\right)\leq 0$$

Pour $\kappa \in \left]0.5,1\right[$, on peut montrer que

$$\sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1 - \frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right) \times \Phi^{-1}\left(\kappa\right) \geq 0$$

Pour $\kappa = 0.5$, on a

$$\sqrt{Var\left(X_i\right)}\left(1-\frac{\sqrt{Var\left(X_i\right)}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sqrt{Var\left(X_j\right)}\rho_{i,j}}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\right)\times\Phi^{-1}\left(\kappa\right)=0.$$

Références

Références I

Cossette, H. and Marceau, E. (2018).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.