Act-3000 Théorie du risque

avec Christopher Blier-Wong et Ihsan Chaoubi

Illustrations avec des lois multivariées et des copules

Étienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

23 novembre 2018

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières

Calcul de probabilités sur dimension élevée

On introduit la notation suivante :

1. Hypercube $\Rightarrow$ généralisation du carré et du cube à n dimensions
2. Hyperrectangle $\Rightarrow$ généralisation du rectangle et du prisme à n dimensions

Parfois, les hypercubes et les hyperrectangles sont appelés des n-boîtes

- Soit une fonction de répartition $F \in \Gamma\left(F_1, \ldots, F_n\right)$ définie sur $\mathbb{R}^n$
- Soit un vecteur de v.a. $\left(X_1, \ldots, X_n\right)$ avec fonction de répartition F
- On définit les opérateurs différences "Δ"
- L'opérateur satisfait les propriétés de commutativité et de distributivité

- Dimension $n = 1$
- Soit le segment $(a_1, b_1]$
- Alors,

$$\begin{aligned}\Pr\left(X_1 \in (a_1, b_1]\right) &= \Delta_{a_1}^{b_1} F(x_1)\\ &= F_{X_1}(b_1) - F_{X_1}(a_1)\end{aligned}$$

- 2^1 termes

- Dimension $n = 2$
- Soit le rectangle $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$
- Alors,

$$\begin{aligned}
\Pr\left((X_1, X_2) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\right) &= \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} F(x_1, x_2) \\
&= \Delta_{a_2}^{b_2} \left(F(b_1, x_2) - F(a_1, x_2)\right) \\
&= \Delta_{a_2}^{b_2} F(b_1, x_2) - \Delta_{a_2}^{b_2} F(a_1, x_2) \\
&= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - \left(F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2)\right) \\
&= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)
\end{aligned}$$

- 2^2 termes

- Dimension $n = 3$
- Soit l'hyperrectangle $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times (a_3, b_3]$
- Alors,

$$
\begin{aligned}
\Pr\left((X_1, X_2, X_3) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times (a_3, b_3]\right) &= \Delta_{a_3}^{b_3} \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} F(x_1, x_2, x_3) \\
&= \Delta_{a_3}^{b_3} \Delta_{a_2}^{b_2} \left(F(b_1, x_2, x_3) - F(a_1, x_2, x_3)\right) \\
&= \Delta_{a_3}^{b_3} \Delta_{a_2}^{b_2} F(b_1, x_2, x_3) - \Delta_{a_3}^{b_3} \Delta_{a_2}^{b_2} F(a_1, x_2, x_3) \\
&= \Delta_{a_3}^{b_3} \left(F(b_1, b_2, x_3) - F(b_1, a_2, x_3)\right) - \\
&\quad \Delta_{a_3}^{b_3} \left(F(a_1, b_2, x_3) - F(a_1, a_2, x_3)\right)
\end{aligned}
$$

- l'expression devient

$$
\begin{aligned}
\Pr\left((X_1, X_2, X_3) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times (a_3, b_3]\right) &= \Delta_{a_3}^{b_3}\left(F(b_1, b_2, x_3) - F(b_1, a_2, x_3)\right) - \\
&\quad \Delta_{a_3}^{b_3}\left(F(a_1, b_2, x_3) - F(a_1, a_2, x_3)\right) \\
&= \Delta_{a_3}^{b_3} F(b_1, b_2, x_3) - \Delta_{a_3}^{b_3} F(b_1, a_2, x_3) - \\
&\quad \Delta_{a_3}^{b_3} F(a_1, b_2, x_3) + \Delta_{a_3}^{b_3} F(a_1, a_2, x_3) \\
&= \left(F(b_1, b_2, b_3) - F(b_1, b_2, a_3)\right) - \\
&\quad \left(F(b_1, a_2, b_3) - F(b_1, a_2, a_3)\right) - \\
&\quad \left(F(a_1, b_2, b_3) - F(a_1, b_2, a_3)\right) + \\
&\quad \left(F(a_1, a_2, b_3) - F(a_1, a_2, a_3)\right)
\end{aligned}
$$

- finalement, on obtient

$$\begin{aligned}\Pr\left((X_1, X_2, X_3) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times (a_3, b_3]\right) = {} & F(b_1, b_2, b_3) - F(b_1, b_2, a_3) - \\ & F(b_1, a_2, b_3) + F(b_1, a_2, a_3) - \\ & F(a_1, b_2, b_3) + F(a_1, b_2, a_3) + \\ & F(a_1, a_2, b_3) - F(a_1, a_2, a_3)\end{aligned}$$

- 2^3 termes

Méthode fonction de répartition conditionnelle

Soit la copule C pour laquelle les dérivées partielles par rapport à u_1 et u_2

$$C_{2|1}\left(u_2|u_1\right) = \frac{\partial}{\partial u_1} C\left(u_1, u_2\right) \text{ et } C_{1|2}\left(u_1|u_2\right) = \frac{\partial}{\partial u_2} C\left(u_1, u_2\right)$$

Algorithme 1

Procédure générale

1. *On simule les réalisations* $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* V_1 *et* V_2 *où* $V_i \sim U(0,1)$ *pour* $i = 1,2$.
2. *On calcule* $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$ *et* $U_2^{(j)} = C_{2|1}^{-1}\left(V_2^{(j)}|U_1^{(j)}\right)$ *où* $C_{2|1}^{-1}(v|u_1)$ *est la fonction inverse de* $C_{2|1}(u_2|u_1)$, *obtenue en trouvant la solution de* $C_{2|1}(u_2|u_1) = v$.
3. *On répète pour* $j = 1,2,\ldots,m$.

La copule de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM) se présente comme une forme de pertubation de la copule indépendance

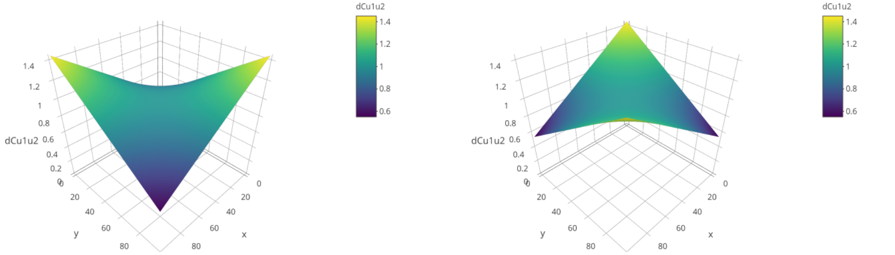
$$C_{\alpha}\left(u_1,u_2\right) = u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 \left(1 - u_1\right)\left(1 - u_2\right), \tag{1}$$

pour $\alpha \in [-1,1]$.

- Le cas particulier est $C_0(u_1, u_2) = C^{\perp}(u_1, u_2)$.
- La fonction de densité est

$$c(u_1, u_2) = 1 + \alpha(1 - 2u_1)(1 - 2u_2).$$

Fonction de densité pour $\alpha = -\frac{9}{20}$ et $\alpha = \frac{9}{20}$



- La copule introduit une relation de dépendance modérée qui peut être positive ($\alpha > 0$) ou négative ($\alpha < 0$).
- Pour $\alpha > 0$, on observe une concentration modérée des réalisations de la copule autour de la diagonale $u_1 = u_2$ de la surface $[0,1] \times [0,1]$.
- Pour $\alpha < 0$, on observe une concentration modérée des réalisations de la copule autour de la diagonale $u_1 = 1 - u_2$ de la surface $[0,1] \times [0,1]$.

On obtient

$$
\begin{aligned}
C_{2|1}\left(u_2|u_1\right) &= \frac{\partial}{\partial u_1} u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 \left(1 - u_1\right)\left(1 - u_2\right) \\
&= u_2 + \alpha u_2 (1 - 2u_1)(1 - u_2).
\end{aligned}
$$

La fonction inverse de $C_{2|1}(u_2|u_1)$ est obtenue en trouvant la solution de $C_{2|1}(u_2|u_1) = v$. On obtient

$$
\begin{aligned}
u_2 + \alpha u_2(1 - 2u_1)(1 - u_2) &= v \\
u_2(1 + \alpha(1 - 2u_1)) - \alpha(1 - 2u_1)u_2^2 &= v
\end{aligned}
$$

Soit $w = \alpha(2u_1 - 1) - 1$. Alors, on on obtient

$$
\alpha(1 - 2u_1)u_2^2 + u_2 w + v = 0
$$

Méthode de la fonction de répartition conditionnelle

EFGM

La solution à l'équation quadratique est

$$\frac{-w \pm \sqrt{w^2 - 4v\alpha(1 - 2u_1)}}{2\alpha(1 - 2u_1)}.$$

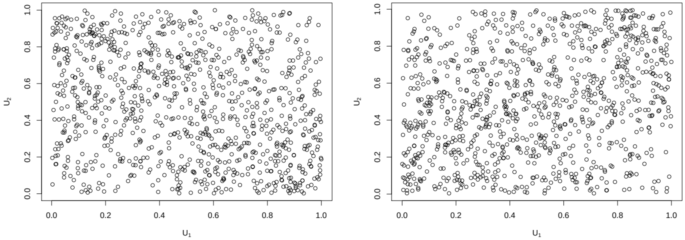
On sélectionne la solution positive et on simplifie l'équation pour obtenir l'algorithme de simulation.

Algorithme 2

Simulation des réalisations de (U_1,U_2)

1. *On simule les réalisations* $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* V_1 *et* V_2 *où* $V_i \sim U(0,1)$ *pour* $i = 1,2$.
2. *On pose* $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$.
3. *On définit* $W_1^{(j)} = \alpha\left(2U_1^{(j)} - 1\right) - 1$ *et*
$$W_2^{(j)} = \left(1 - \alpha\left(2U_1^{(j)} - 1\right)\right)^2 + 4\alpha V_2^{(j)}\left(2U_1^{(j)} - 1\right).$$
4. *On calcule* $U_2^{(j)} = \frac{2V_2^{(j)}}{\left(\sqrt{W_2^{(j)}} - W_1^{(j)}\right)}$.

Simulation pour $\alpha = -0.5$ et $\alpha = 0.5$.



- On présente maintenant une méthode générale de simulation dans un contexte de la théorie des copules
- Soit $\underline{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ où $F_{\underline{U}} = C$, où C est une copule de dimension n.
- Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ où $F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_n) = C\left(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)\right)$
- Cette représentation est équivalente à la représentation suivante :

$$
\begin{aligned}
X_1 &= F_1^{-1}(U_1) \\
&\ldots \\
X_n &= F_n^{-1}(U_n)
\end{aligned}
$$

Algorithme 3

Pour $j = 1, \ldots, n_{sim}$

1. *Générer* $\underline{U}^{(j)}$ *de* $\underline{U}$ *où* $F_{\underline{U}} = C$
2. *Générer* $\underline{X}^{(j)}$ *de* $\underline{X}$ *avec* $X_i^{(j)} = F_i^{-1}\left(U_i^{(j)}\right)$

- Pour que la fonction de densité existe, la copule doit être absolument continue.
- Puisqu'une copule est une fonction de répartition on obtient la fonction de densité en dérivant par rapport à u_1 et u_2
- $c(u_1, u_2) = \frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial u_2}C\left(u_1,u_2\right)$

Construction de quelques copules

Soit un couple de v.a. (Z_1, Z_2) de loi normale bivariée standard avec des marginales $F_{Z_1}(x) = F_{Z_2}(x) = \Phi(x)$ et fonction de répartition

$$F_{Z_1,Z_2}(x_1, x_2) = \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{\underline{\alpha}}(x_1, x_2), \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

et

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in [-1,1]$.

La copule normale est obtenue en appliquant la partie #1 du théorème de Sklar avec

$$C_{\alpha}^{N}\left(u_1,u_2\right) = F_{Z_1,Z_2}\left(F_{Z_1}^{-1}(x_1), F_{Z_2}^{-1}(x_2)\right)$$
$$C_{\alpha}^{N}\left(u_1,u_2\right) = F_{Z_1,Z_2}\left(\Phi^{-1}(x_1), \Phi^{-1}(x_2)\right)$$

qui devient

$$C_{\alpha}^{N}\left(u_1,u_2\right) = \overline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}\left(u_1\right), \Phi^{-1}\left(u_2\right)\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2$, et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in [-1,1]$.

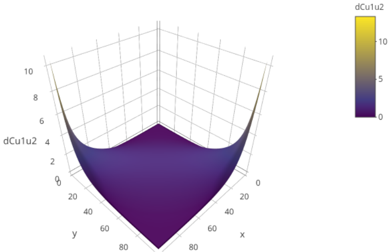
- Contrairement aux copules présentées précédemment, la copule normale n'a pas de forme analytique.
- Les cas particuliers sont
  - $C_0\left(u_1,u_2\right) = C^{\perp}\left(u_1,u_2\right)$
  - $C_1\left(u_1,u_2\right) = C^{+}\left(u_1,u_2\right)$
  - $C_{-1}\left(u_1,u_2\right) = C^{-}\left(u_1,u_2\right)$.

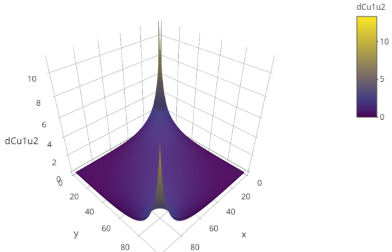
L'expression de la fonction de densité $c(u_1, u_2)$ est

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(u_1)^2 - 2\alpha\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2) + \Phi^{-1}(u_2)^2\right)}{2(1-\alpha^2)}} \mathrm{e}^{\frac{\left(\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2\right)}{2}}.$$

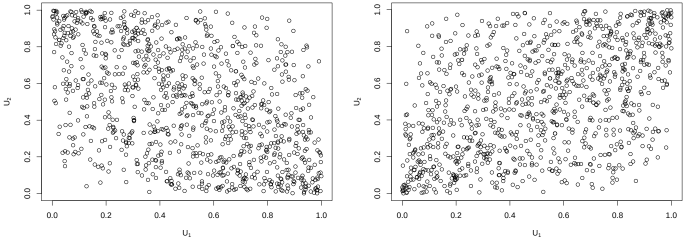
- On a
$$C_{2|1}\left(u_2|u_1\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(u_2\right) - \alpha\Phi^{-1}\left(u_1\right)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right).$$
- Lorsque $\alpha > 0$, la copule introduit une relation de dépendance positive entre les composantes de $\underline{U}$.
- Lorsque $\alpha < 0$, la copule introduit une relation de dépendance négative entre les composantes de $\underline{U}$.
- La copule normale est complète.

Fonction de densité pour $\alpha = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$





Simulation pour $\alpha = -0.5$ et $\alpha = -0.5$



Construction de quelques copules

Exemple 1

Soit (X_1, X_2) avec $F_{X_1,X_2} \in \Gamma(F_1, F_2)$ où

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{(x_1+1)(e^{x_2}-1)}{x_1+2e^{x_2}-1}, & (x_1, x_2) \in [-1, 1] \times [0, \infty) \\ 1 - e^{-x_2}, & (x_1, x_2) \in (1, \infty) \times (0, \infty) \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Identifier $F_{X_1} = F_1, F_{X_2} = F_2$ et C
2. Identifier les bornes inférieur et supérieur sur $\Gamma(F_1, F_2)$
3. Générer des réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ selon la méthode conditionnelle

1. Identifier $\boldsymbol{F_{X_1}} = \boldsymbol{F_1}, F_{X_2} = F_2$ et C

Cas # 1 :

$$
\begin{aligned}
F_{X_1}(x) &= \lim_{x_2\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\
&= \lim_{x_2\to\infty} \frac{(x_1+1)\left(e^{x_2}-1\right)}{x_1+2e^{x_2}-1} \\
&= \frac{\infty}{\infty}.
\end{aligned}
$$

On applique la règle de l'Hôpital et on obtient

$$
\begin{aligned}
F_{X_1}(x) &= \lim_{x_2\to\infty} \frac{(x_1+1)e^{x_2}}{2e^{x_2}} \\
&= \frac{x_1+1}{2}
\end{aligned}
$$

1. Identifier $\boldsymbol{F_{X_1} = F_1}, F_{X_2} = F_2$ et C

Cas # 1 :

$$
\begin{aligned}
F_{X_1}(x) &= \lim_{x_2 \to \infty} 1 - e^{-x_2} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

On obtient

$$
F_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1+1}{2}, & -1 \leq x_1 \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}
$$

Alors, on conclut que $X_1 \sim Unif(-1, 1)$.

1. Identifier $F_{X_1} = F_1$, $\boldsymbol{F_{X_2} = F_2}$ et C
Cas # 1 :

$$\begin{aligned} F_{X_2}(x_2) &= F_{X_1,X_2}(1, x_2) \\ &= \frac{2\left(e^{x_2} - 1\right)}{1 + 2e^{x_2} - 1} \\ &= \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2}} \\ &= 1 - e^{-x_2} \end{aligned}$$

1. Identifier $F_{X_1} = F_1$, $\boldsymbol{F_{X_2} = F_2}$ et C

Cas # 2 :

$$
\begin{aligned}
F_{X_2}(x_2) &= F_{X_1,X_2}(\infty, x_2) \\
&= 1 - e^{-x_2}
\end{aligned}
$$

On obtient

$$F_{X_2}(x_2) = 1 - e^{-x_2}$$

alors, on conclut que $X_2 \sim Exp(1)$.

1. Identifer $F_{X_1} = F_1, F_{X_2} = F_2$ et $\boldsymbol{C}$

On obtient

$$
\begin{aligned}
C(u_1, u_2) &= F_{X_1,X_2}\left(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)\right) \\
&= \frac{(2u_1 - 1)\left(e^{-\ln(1-u_2)}\right)}{2u_1 - 1 + 2e^{-\ln(1-u_2)} - 1} \\
&= \frac{2u_1\left(\frac{1}{1-u_2} - 1\right)}{2u_1 + \frac{2}{1-u_2} - 2} \\
&= \frac{u_1 \frac{u_2}{1-u_2}}{u_1 + \frac{1}{1-u_2} - 1}
\end{aligned}
$$

1. Identifer $F_{X_1} = F_1, F_{X_2} = F_2$ et $\boldsymbol{C}$

Ensuite, l'équation devient

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= \frac{u_1 \frac{u_2}{1-u_2}}{u_1 + \frac{1}{1-u_2} - 1} \\ &= \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2} \end{aligned}$$

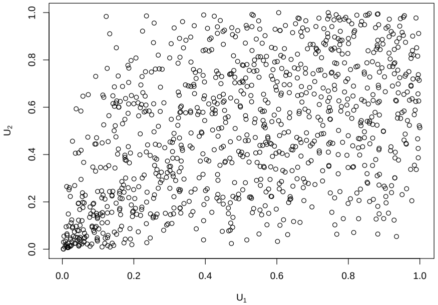
2. Identifier les bornes inférieure et supérieure sur $\Gamma(F_1, F_2)$
   - La borne inférieure est
   $$\max\left(\frac{x_1+1}{2} + 1 - e^{-x_2} - 1; 0\right)$$
   - La borne supérieure est
   $$\min\left(\frac{x_1+1}{2}, 1 - e^{-x_2}\right)$$

3. Générer des réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ selon la méthode conditionnelle

$$
\begin{aligned}
C_{2|1}(u_2|u_1) &= \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2} \\
&= \frac{u_2(u_1 + u_2 - u_1 u_2) - u_1 u_2 (1 - u_2)}{(u_1 + u_2 - u_1 u_2)^2}
\end{aligned}
$$

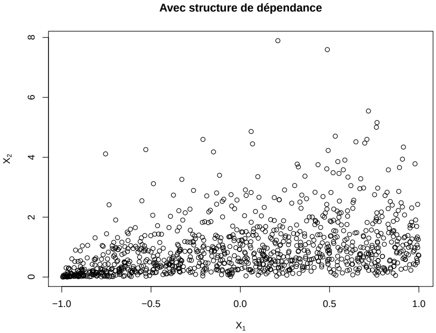
3. Générer des réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ selon la méthode conditionnelle

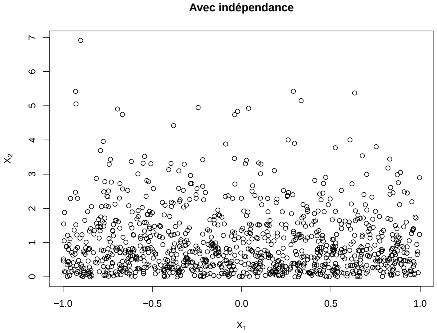
Génération des U



3. Générer des réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ selon la méthode conditionnelle

Génération des X





Soit (X_1, X_2) avec $F_{X_1,X_2} \in \Gamma(F_1, F_2)$ où

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{(1+x_1)^2-1}{(1+x_1)^2+e^{-x_2}(1+x_1)^2-e^{-x_2}}, & (x_1, x_2) \in [0,\infty) \times (-\infty, \infty) \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Identifier $F_{X_1} = F_1, F_{X_2} = F_2$ et C
2. Identifier les bornes inférieur et supérieur sur $\Gamma(F_1, F_2)$
3. Générer des réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ selon la méthode conditionnelle

1. Identifier $\boldsymbol{F_{X_1} = F_1, F_{X_2} = F_2}$ et C.

$$\begin{aligned} F_1(x_1) &= \lim_{x_2\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\ &= \frac{(1+x_1)^2-1}{(1+x_1)^2} \\ &= 1-\left(\frac{1}{1+x_1}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(x_2) &= \lim_{x_1\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\ &= \lim_{x_1\to\infty} \frac{(1+x_1)^2-1}{(1+x_1)^2+e^{-x_2}(1+x_1)^2-e^{-x_2}} = \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

1. Identifier $F_{X_1} = F_1$, $\boldsymbol{F_{X_2} = F_2}$ et C.
On applique la règle de l'Hôpital

$$F_2(x_2) = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{2\,(1 + x_1)}{2(1 + e^{-x_2})(1 + x_1)} = \frac{\infty}{\infty}$$

On applique la règle de l'Hôpital

$$F_2(x_2) = \frac{1}{1 + e^{-x_2}}, \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

1. Identifier $F_{X_1} = F_1, F_{X_2} = F_2$ et $\boldsymbol{C}$.

$$F_1^{-1}(y) = ?$$

$$\begin{aligned}
\frac{(1+x_1)^2 - 1}{(1+x^2)} &= y \\
(1+x_1)^2 - 1 &= y(1+x_1)^2 \\
(1+x_1)^2(1-y) &= 1 \\
(1+x_1)^2 &= \frac{1}{1-y} \\
x_1 &= \sqrt{\frac{1}{1-y}} - 1
\end{aligned}$$

1. Identifier $F_{X_1} = F_1, F_{X_2} = F_2$ et $\boldsymbol{C}$.

$$F_2^{-1}(y) = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^{-x_2}} &= y \\ 1+e^{-x_2} &= \frac{1}{y} \\ e^{-x_2} &= \frac{1}{y} - 1 \\ x_2 &= -\ln\left(\frac{1}{y} - 1\right) \end{aligned}$$

1. Identifier $F_{X_1} = F_1, F_{X_2} = F_2$ et $\boldsymbol{C}$.

$$
\begin{aligned}
C(u_1, u_2) &= F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right) \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{\frac{1}{1-u_1}}-1\right)^2-1}{\left(1+\sqrt{\frac{1}{1-u_1}}-1\right)^2\left(1+\exp\left\{-\left(-\ln\left(\frac{1}{u_2}-1\right)\right)\right\}\right)-\exp\left\{-\left(-\ln\left(\frac{1}{u_2}-1\right)\right)\right\}}
\end{aligned}
$$

Construction de quelques copules

Exemple 2 (solution)

1. Identifier $F_{X_1} = F_1, F_{X_2} = F_2$ et $\boldsymbol{C}$.

$$
\begin{aligned}
C(u_1, u_2) &= \frac{\frac{1}{1-u_1} - 1}{\frac{1}{1-u_1}\frac{1}{u_2} - \left(\frac{1}{u_2} - 1\right)} \\
&= \frac{\frac{u_1}{1-u_1}}{\frac{1}{1-u_1}\frac{1}{u_2} - \left(\frac{1}{u_2} - 1\right)} \\
&= \frac{u_1}{\frac{1}{u_2} - \frac{1-u_1}{u_2} + 1 - u_1} \\
&= \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2}
\end{aligned}
$$

2. Identifier les bornes inférieur et supérieur sur $\Gamma(F_1, F_2)$
   - La borne inférieure est

$$\max\left(1 - \frac{1}{(1+x_1)^2} + \frac{1}{1+e^{-x_2}} - 1; 0\right)$$

   - La borne supérieure est

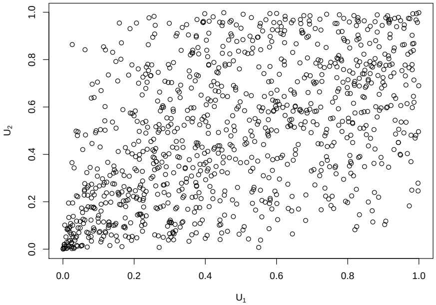
$$\min\left(1 - \frac{1}{(1+x_1)^2}, \frac{1}{1+e^{-x_2}}\right)$$

3. Générer des réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ selon la méthode conditionnelle

$$
\begin{aligned}
C_{2|1}(u_2|u_1) &= \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2} \\
&= \frac{u_2(u_1 + u_2 - u_1 u_2) - u_1 u_2 (1 - u_2)}{(u_1 + u_2 - u_1 u_2)^2}
\end{aligned}
$$

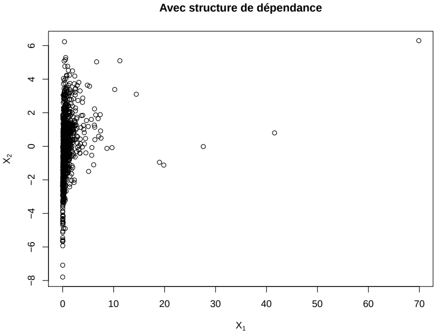
3. Générer des réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ selon la méthode conditionnelle

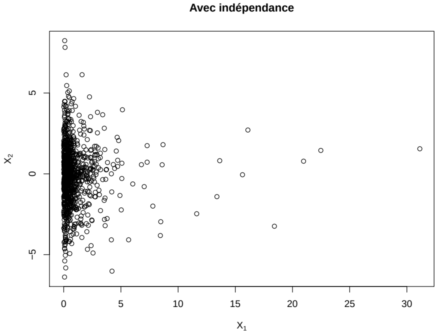
Génération des U



3. Générer des réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ selon la méthode conditionnelle

Génération des X





Exemples variés

- Soit $\underline{N} = (\underline{N}_1, \underline{N}_2)$
- $\underline{N}_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$
- $\underline{N}_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$
- $N_1(t) = K_1(t) + K_0(t), t \geq 0$
- $N_2(t) = K_2(t) + K_0(t), t \geq 0$

- $K_1(t) \sim Pois(\alpha_1 t)$
- $K_2(t) \sim Pois(\alpha_2 t)$
- $K_0(t) \sim Pois(\alpha_0 t)$
- $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1, \lambda_2)$
- $\alpha_1 = \lambda_1 - \alpha_0$
- $\alpha_2 = \lambda_2 - \alpha_0$
- On définit $S(t) = N_1(t) + N_2(t)$
- On définit $W_1 = \{W_{1,j}, j = 1, 2, \dots\}$
- On définit $W_2 = \{W_{2,j}, j = 1, 2, \dots\}$

Questions :

1. Montrer que $N_1 = ProcPois(\lambda_1)$
2. Montrer que $N_2 = ProcPois(\lambda_2)$
3. Montrer que $S = ProcPois$
4. Montrer que $(W_{1,1}, W_{2,1})$ obéit à une loi Marshall Olkin exponentielle

1. Montrer que $N_1 = ProcPois(\lambda_1)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{N_1(t)}(r) &= E\left[r^{N_1(t)}\right] \\
&= E\left[r^{K_0(t)+K_1(t)}\right].
\end{aligned}
$$

Ensuite, par l'indépendance de K_0 et K_1, on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{N_1(t)}(r) &= E\left[r^{K_0(t)}\right] E\left[r^{K_1(t)}\right] \\
&= e^{\alpha_0 t(r-1)} e^{(\lambda_1-\alpha_0)t(r-1)} \\
&= e^{\lambda_1 t(r-1)},
\end{aligned}
$$

qui correspond à la fgp d'un processus de Poisson avec intensité λ_1.

2. Montrer que $N_2 = ProcPois(\lambda_2)$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{N_2(t)}(r) &= E\left[r^{N_2(t)}\right] \\ &= E\left[r^{K_0(t)+K_2(t)}\right].\end{aligned}$$

Ensuite, par l'indépendance de K_0 et K_2, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{N_2(t)}(r) &= E\left[r^{K_0(t)}\right]E\left[r^{K_2(t)}\right] \\ &= e^{\alpha_0 t(r-1)}e^{(\lambda_2-\alpha_0)t(r-1)} \\ &= e^{\lambda_2 t(r-1)},\end{aligned}$$

qui correspond à la fgp d'un processus de Poisson avec intensité λ_2.

3. Montrer que $S = ProcPois$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{S(t)}(r) &= E\left[r^{S(t)}\right] \\
&= E\left[r^{2K_0(t)+K_1(t)+K_2(t)}\right].
\end{aligned}
$$

Ensuite, par l'indépendance de K_0, K_1 et K_2, on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{S(t)}(r) &= E\left[r^{2K_0(t)}\right]E\left[r^{K_1(t)}\right]E\left[r^{K_2(t)}\right] \\
&= e^{\alpha_0 t(r^2-1)}e^{(\lambda_1-\alpha_0)t(r-1)}e^{(\lambda_2-\alpha_0)t(r-1)} \\
&= e^{(\lambda_1+\lambda_2-\alpha_0)t\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2-2\alpha_0}{\lambda_1+\lambda_2-\alpha_0}r+\frac{\alpha_0}{\lambda_1+\lambda_2-\alpha_0}r^2-1\right)}
\end{aligned}
$$

3. Montrer que $S = ProcPois$

- On conclut que S obéit à un processus de Poisson composé
- $S = ProcPoisComp(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_0, F_B)$
- $\Pr(B = 1) = \frac{\lambda_1+\lambda_2-2\alpha_0}{\lambda_1+\lambda_2-\alpha_0}$
- $\Pr(B = 2) = \frac{\alpha_0}{\lambda_1+\lambda_2-\alpha_0}$
- $\Pr(B = k) = 0, \;\; k \neq \{1, 2\}$

4. Montrer que $(W_{1,1}, W_{2,1})$ obéit à une loi Marshall Olkin exponentielle
   - On présente premièrement la construction de la loi Marshall Olkin exponentielle.
   - Soit les v.a. Y_0, Y_1 et Y_2 indépendantes de loi exponentielle avec paramètres α_0, α_1 et α_2.
   - On définit $W_1 = \min(Y_0, Y_1)$ et $W_2 = \min(Y_0, Y_2)$

4. Montrer que $(W_{1,1}, W_{2,1})$ obéit à une loi Marshall Olkin exponentielle

- On identifie la fonction de survie de W_1 :

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{W_1}(x) &= \Pr(W_1 > x) \\
&= \Pr(\min(Y_0, Y_1) > x) \\
&= \Pr(Y_0 > x, Y_1 > x).
\end{aligned}
$$

- Puisque les v.a. Y_1 et Y_0 sont indépendantes, on obtient

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{W_1}(x) &= \Pr(Y_0 > x, Y_1 > x) \\
&= \Pr(Y_0 > x) \Pr(Y_1 > x) \\
&= e^{-\alpha_0 x} e^{-\alpha_1 x} \\
&= e^{-\lambda_1 x}
\end{aligned}
$$

4. Montrer que $(W_{1,1}, W_{2,1})$ obéit à une loi Marshall Olkin exponentielle

- On identifie la fonction de survie de W_2 :

$$\begin{aligned}\overline{F}_{W_2}(x) &= \Pr(W_2 > x) \\ &= \Pr(\min(Y_0, Y_2) > x) \\ &= \Pr(Y_0 > x, Y_2 > x).\end{aligned}$$

- Puisque les v.a. Y_2 et Y_0 sont indépendantes, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{F}_{W_2}(x) &= \Pr(Y_0 > x, Y_2 > x) \\ &= \Pr(Y_0 > x)\Pr(Y_2 > x) \\ &= e^{-\alpha_0 x} e^{-\alpha_2 x} \\ &= e^{-\lambda_2 x}\end{aligned}$$

4. Montrer que $(W_{1,1}, W_{2,1})$ obéit à une loi Marshall Olkin exponentielle

- On identifie la fonction de survie de W_1, W_2 :

$$\begin{aligned}\overline{F}_{W_1,W_2}(x_1, x_2) &= \Pr(W_1 > x_1, X_2 > x_2)\\ &= \Pr(\min(Y_0, Y_1) > x_1, \min(Y_0, Y_2) > x_2)\\ &= \Pr(\min(Y_0, Y_1) > x_1, \min(Y_0, Y_2) > x_2)\\ &= \Pr(Y_0 > x_1, Y_1 > x_1, Y_0 > x_2, Y_1 > x_2).\end{aligned}$$

- Ensuite, puisque Y_0, Y_1 et Y_2 sont indépendantes, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{F}_{W_1,W_2}(x_1, x_2) &= \Pr(Y_0 > x_1, Y_1 > x_1, Y_0 > x_2, Y_1 > x_2)\\ &= \Pr(Y_0 > \max(x_1, x_2)) \Pr(Y_1 > x_1) \Pr(Y_2 > x_2)\\ &= e^{-\alpha_0 \max(x_1,x_2)} e^{-\alpha_1 x_1} e^{-\alpha_2 x_2}\\ &= e^{-\alpha_0 \max(x_1,x_2)+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2}\end{aligned}$$

4. Montrer que $(W_{1,1}, W_{2,1})$ obéit à une loi Marshall Olkin exponentielle

- On identifie maintenant la distribution de $(W_{1,1}, W_{2,1})$.
- On a

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{W_{1,1},W_{2,1}}(t_1, t_2) &= \Pr(W_{1,1} > t_1, W_{2,1} > t_2) \\
&= \Pr(N_1(t_1) = 0, N_2(t_2) = 0) \\
&= \Pr(K_0(t_1) + K_1(t_1) = 0, K_0(t_2) + K_2(t_2) = 0) \\
&= \Pr(K_0(t_1) = 0, K_1(t_1) = 0, K_0(t_2) = 0, K_2(t_2) = 0) \\
&= \Pr(K_0(\max(t_1, t_2)) = 0, K_1(t_1) = 0, K_2(t_2) = 0).
\end{aligned}
$$

4. Montrer que $(W_{1,1}, W_{2,1})$ obéit à une loi Marshall Olkin exponentielle

- Ensuite, puisque K_0, K_1 et K_2 sont indépendants, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{F}_{W_{1,1},W_{2,1}}(t_1,t_2) &= e^{-\alpha_0 \max(t_1,t_2)} e^{-\alpha_1 t_1} e^{-\alpha_2 t_2} \\ &= e^{-\alpha_0 \max(t_1,t_2)+\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2}\end{aligned}$$

- La fonction de survie correspond à la fonction de répartition de la loi Marshall Olkin bivariée.

- Soit le couple de v.a. (X_1, X_2)
- $(X_1|\Theta = \theta) \sim Exp(\theta)$
- $(X_2|\Theta = \theta) \sim Exp(\theta)$
- $\Theta \sim Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$

Questions :

1. Identifier $F_{X_1} = F_1, F_{X_2} = F_2$
2. Identifier $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$
3. Identifier la copule associée C

1. Identifier $\boldsymbol{F_{X_1} = F_1}, F_{X_2} = F_2$
   - On obtient

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1}(x) &= E_{\Theta}\left[\overline{F}_{X_1|\Theta=\theta}(x)\right] \\
&= E\left[e^{-\Theta x}\right] \\
&= \mathcal{L}_{\Theta}(x) \\
&= \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

1. Identifier $F_{X_1} = F_1, \boldsymbol{F_{X_2} = F_2}$
   - On obtient

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_2}(x) &= E_\Theta\left[\overline{F}_{X_2|\Theta=\theta}(x)\right] \\
&= E\left[e^{-\Theta x}\right] \\
&= \mathcal{L}_\Theta(x) \\
&= \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

   - On remarque que X_1 et X_2 obéissent à une loi Pareto

2. Identifier $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$
   - On obtient

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= E_\Theta\left[\overline{F}_{X_1|\Theta=\theta}(x_1)\overline{F}_{X_2|\Theta=\theta}(x_2)\right] \\
&= E\left[e^{-\Theta x_1} e^{-\Theta x_2}\right] \\
&= \mathcal{L}_\Theta(x_1 + x_2) \\
&= \left(\frac{1}{1 + x_1 + x_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

   - On remarque que (X_1, X_2) obéit à une loi Pareto bivariée

3. Identifier la copule associée C

- On présente une version modifiée de la partie 1 du théorème de Sklar :

$$C(u_1, u_2) = \overline{F}_{X_1,X_2}\left(\overline{F}_{X_1}^{-1}(u_1), \overline{F}_{X_2}^{-1}(u_2)\right)$$

- On obtient

$$\begin{aligned} \overline{F}_X^{-1}(x) &= u \\ \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} &= u \\ x &= u^{-\alpha} - 1 \end{aligned}$$

3. Identifier la copule associée C
   - On obtient

$$
\begin{aligned}
C(u_1, u_2) &= \left(1 + u_2^{-\alpha} - 1 + u_1^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \\
&= \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}
$$

   - La copule est associée est appelée Clayton

Illustration de quelques copules

On présente maintenant les copules archimédiennes

La copule de Clayton est représentée par

$$C_\alpha\left(u_1,u_2\right) = \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2$ et $\alpha > 0$.

Les cas limites sont

$$\lim_{\alpha\to 0} C_\alpha\left(u_1,u_2\right) = C^{\perp}\left(u_1,u_2\right)$$

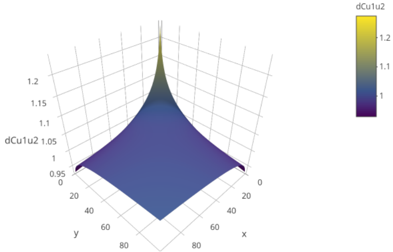
et

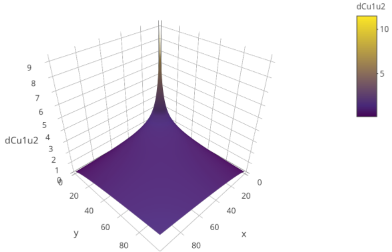
$$\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha\left(u_1,u_2\right) = C^{+}\left(u_1,u_2\right).$$

L'expression de la fonction de densité est

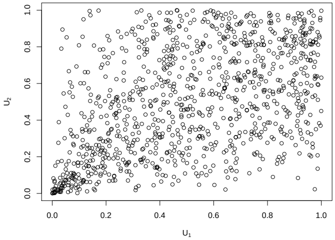
$$c\left(u_1,u_2\right) = \frac{1+\alpha}{\left(u_1 u_2\right)^{\alpha+1}}\left(u_1^{-\alpha}+u_2^{-\alpha}-1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}}.$$

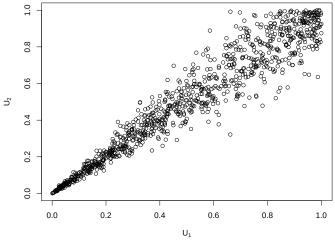
Fonction de densité pour $\alpha = \frac{99}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$





Simulation pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$





L'expression de la copule de Frank est

$$C_{\alpha}\left(u_1,u_2\right) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\alpha u_1} - 1\right)\left(e^{-\alpha u_2} - 1\right)}{\left(e^{-\alpha} - 1\right)}\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2$ et $\alpha \neq 0$.

Les cas limites sont

- $\lim_{\alpha \to -\infty} C_\alpha (u_1, u_2) = C^- (u_1, u_2)$
- $\lim_{\alpha \to 0} C_\alpha (u_1, u_2) = C^\perp (u_1, u_2)$,
- $\lim_{\alpha \to \infty} C_\alpha (u_1, u_2) = C^+ (u_1, u_2)$.

La fonction de densité est

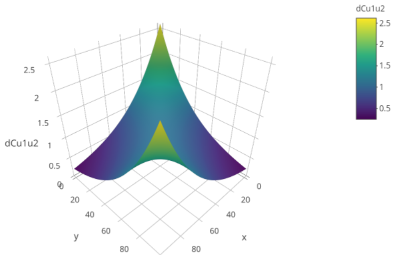
$$c\left(u_1,u_2\right) = \frac{\alpha \mathrm{e}^{-\alpha\left(u_1+u_2\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha\left(u_1+u_2\right)}-\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-\mathrm{e}^{-\alpha u_2}+\mathrm{e}^{-\alpha}\right)^2}.$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}\left(u_2|u_1\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha u_1}\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)}.$$

La copule de Frank est complète.

Fonction de densité pour $\tau = 0.25$ et $\tau = 0.5$



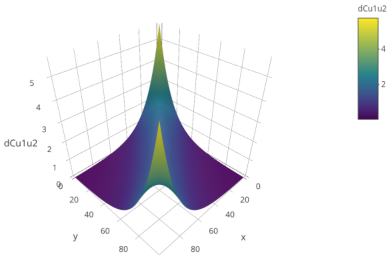
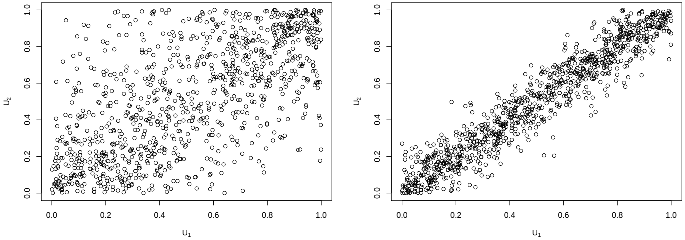


Illustration de quelques copules

Frank

Simulation pour $\alpha = 5$ et $\alpha = 20$.



On définit la copule de Gumbel par

$$C_\alpha(u_1,u_2) = \exp\left(-\{(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\}^{(1/\alpha)}\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2$ et $\alpha \geq 1$.

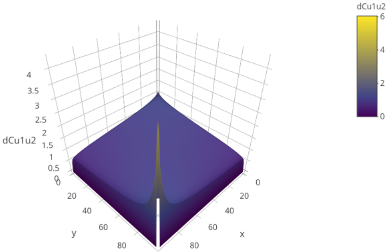
Les cas limites sont

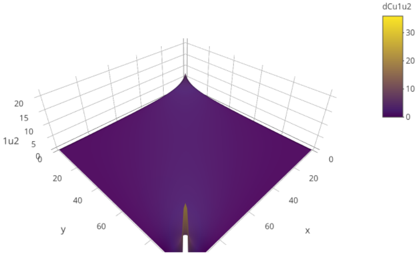
- $\lim_{\alpha \to 1} C_\alpha (u_1, u_2) = C^\perp (u_1, u_2)$
- $\lim_{\alpha \to \infty} C_\alpha (u_1, u_2) = C^+ (u_1, u_2)$.

La fonction de densité est

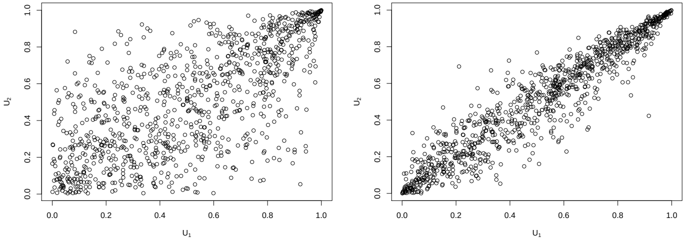
$$
\begin{aligned}
& c\left(u_1,u_2\right) \\
= \quad & C_\alpha(u_1,u_2) \times \frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}(-\ln u_2)^{\alpha-1}}{u_1 u_2} \\
& \times \left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-2} \left(\alpha - 1 + \left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right).
\end{aligned}
$$

Fonction de densité pour $\alpha = \frac{1}{0.9}$ et $\alpha = 2$





Simulation pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 5$.



L'expression de la copule de Ali-Mikhail-Haq est donnée par

$$\begin{aligned} C_\alpha(u_1,u_2) &= \frac{u_1 u_2}{1-\alpha(1-u_1)(1-u_2)} \\ &= u_1 u_2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha(1-u_1)(1-u_2)\right)^k, \end{aligned} \tag{2}$$

pour $\alpha \in [-1,1]$.

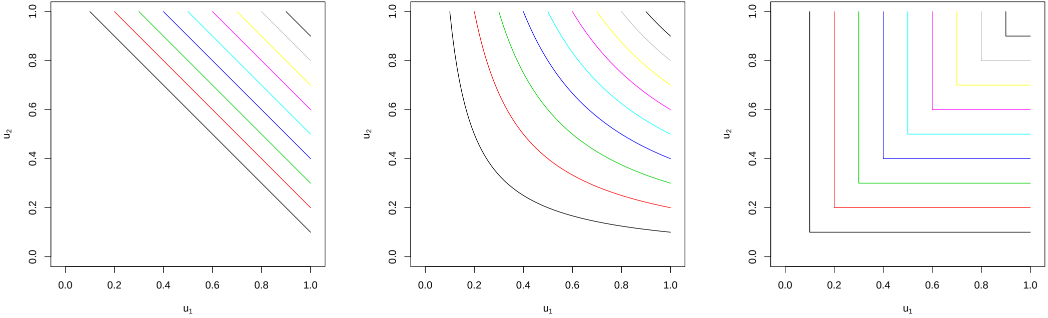
- Un cas particulier est $C_0(u_1,u_2) = C^{\perp}(u_1,u_2)$.

La fonction de densité est

$$c(u_1,u_2) = \frac{1-\alpha+2\alpha\frac{u_1u_2}{1-\alpha(1-u_1)(1-u_2)}}{(1-\alpha(1-u_1)(1-u_2))^2}.$$

On présente maintenant les copules avec singularités

On présente les courbes de contour pour les cas antimonotones, indépendantes et comonotones



La copule de Fréchet est une combinaison convexe des copules borne inférieure de Fréchet, indépendance et borne supérieure de Fréchet avec

$$C_{\alpha,\beta}(u_1,u_2) = \alpha C^{+}(u_1,u_2) + \beta C^{-}(u_1,u_2) + (1-\alpha-\beta)\, C^{\perp}(u_1,u_2),$$

pour $\alpha,\beta \in [0,1]$, $\alpha+\beta \leq 1$.

Les cas particuliers sont

- $C_{0,0}(u_1,u_2) = C^{\perp}(u_1,u_2)$,
- $C_{1,0}(u_1,u_2) = C^{+}(u_1,u_2)$
- $C_{0,1}(u_1,u_2) = C^{-}(u_1,u_2)$.

La copule de Fréchet est complète.

La copule de Marshall-Olkin est définie par

$$C_{\alpha,\beta}(u_1,u_2) = \min\left(u_1^{1-\alpha}u_2; u_1u_2^{1-\beta}\right) = \begin{cases} u_1^{1-\alpha}u_2, & \text{si } u_1^{\alpha} \geq u_2^{\beta} \\ u_1u_2^{1-\beta}, & \text{si } u_1^{\alpha} \leq u_2^{\beta} \end{cases},$$

pour $\alpha,\beta \in [0,1]$.

Les cas particuliers sont

- $C_{0,0}\left(u_1,u_2\right) = C^{\perp}\left(u_1,u_2\right)$
- $C_{1,1}\left(u_1,u_2\right) = C^{+}\left(u_1,u_2\right)$