Act-3000 Théorie du risque - Méthode des rectangles et la méthode d'agrégation par discrétisation.

avec Christopher Blier-Wong et Ihsan Chaoubi

Illustrations numériques

Étienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

2018-11-30

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

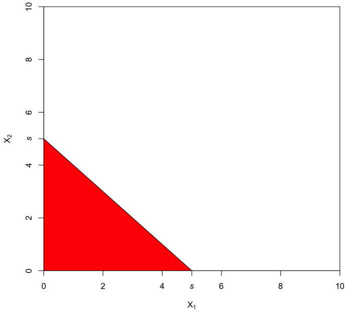
Agenda

Méthode des rectangles

Soit un couple de v.a. continues positives (X_1,X_2), avec $S = X_1 + X_2$. On s'intéresse à la fonction de répartition de S. On a

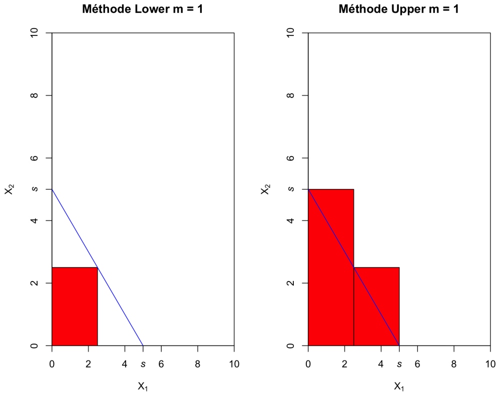
$$\begin{aligned}\Pr(S \leq s) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq s)\\ &= \Pr(X_2 \leq s - X_1).\end{aligned}$$

On trace le graphique de $X_2 \leq s - X_1$ et on veut calculer l'aire sous le graphique.

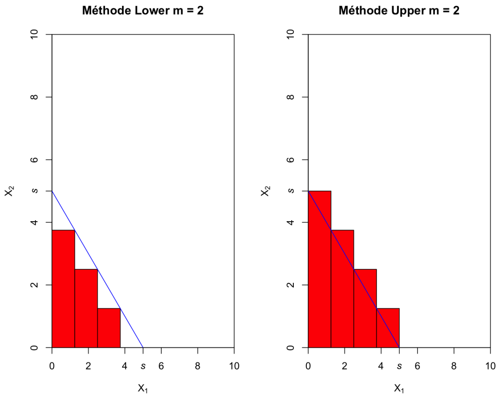


Méthode des rectangles

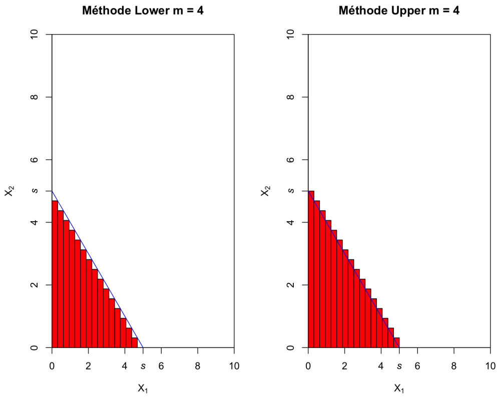
On obtient un triangle. Par contre, le seul outil qu'on a pour calculer l'aire sous ce triangle est la fonction de répartition bivariée, qui forme un rectangle dans le graphique.
⇒ La méthode des rectangles consiste à approximer le triangle en utilisant plusieurs rectangles.



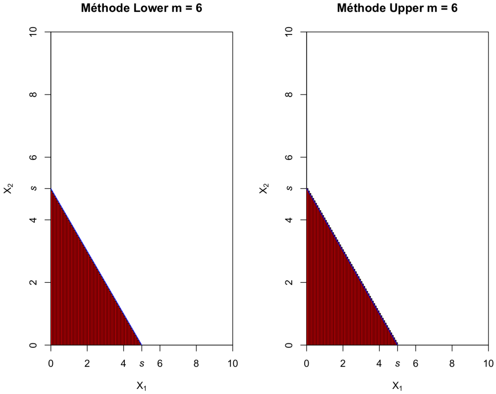
Méthode des rectangles



Méthode des rectangles



Méthode des rectangles



Méthode des rectangles

Pour faire l'estimation de la fonction de répartition, on sépare l'intervalle $[0, s]$ en 2^m régions.

- La méthode *lower* des rectangles:
  La notation de l'estimation de $F_S(s)$ par la méthode *lower* est $A_S^{(l,m)}$.

$$A_S^{(l,m)} = \sum_{i=1}^{2^m-1} \left(F_{X_1,X_2}\left(\frac{i}{2^m}s, \frac{2^m-i}{2^m}s\right) - F_{X_1,X_2}\left(\frac{i-1}{2^m}s, \frac{2^m-i}{2^m}s\right)\right)$$

- La méthode *upper* des rectangles:
  La notation de l'estimation de $F_S(s)$ par la méthode *upper* est $A_S^{(u,m)}$.

$$A_S^{(u,m)} = \sum_{i=1}^{2^m} \left(F_{X_1,X_2}\left(\frac{i}{2^m}s, \frac{2^m+1-i}{2^m}s\right) - F_{X_1,X_2}\left(\frac{i-1}{2^m}s, \frac{2^m+1-i}{2^m}s\right)\right)$$

Méthode des rectangles

- La méthode lower sous-estime la fonction de répartition (et sur-estime la VaR, sur-estime l'espérance). On remarque qu'il faut calculer $2^m - 1$ rectangles.
- La méthode upper sur-estime la fonction de répartition (et sous-estime la VaR, sous-estime l'espérance). On remarque qu'il faut calculer 2^m rectangles.
- $$\lim_{m \to \infty} A_S^{(l,m)} = \lim_{m \to \infty} A_S^{(u,m)} = F_S(s).$$

Agenda

Méthode d'agrégation par discrétisation

On considère un couple de v.a. continues et positives (X_1,X_2) dont la structure de dépendance est définie par

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)).$$

où C est une copule.
On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut évaluer $F_S(s)$ pour $s \in \mathbb{R}^+$.
La fonction de densité conjointe est donnée par

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = c(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2))\, f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2).$$

et la fonction de densité de S s'écrit

$$f_S(s) = \int_0^s f_{X_1,X_2}(x_1,s-x_1)\,\mathrm{d}x_1.$$

De plus, on déduit que $F_S(s) = \int_0^s f_S(t)\,\mathrm{d}t$.

Méthode d'agrégation par discrétisation

L'idée est d'évaluer approximativement les v.a. continues et positives X_1 et X_2 par des v.a. discrètes $\widetilde{X}_1$ et $\widetilde{X}_2$ où

$$\widetilde{X}_i \in \{0h, 1h, 2h, \ldots\},$$

pour $i = 1,2$ et pour un pas de discrétisation $h > 0$.
La fonction de répartition conjointe $F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}$ de $\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right)$ est définie en fonction de la même copule C que celle qui est associée à F_{X_1,X_2} et des fonctions de répartition marginales $F_{\widetilde{X}_i}(x_i)$ de $\widetilde{X}_i$ $(i = 1,2)$:

$$F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1h, k_2h) = C\left(F_{\widetilde{X}_1}(k_1h), F_{\widetilde{X}_2}(k_2h)\right),$$

pour k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$.

Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de $\left(\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2\right)$ sont déterminées comme suit.

Pour $k_1 = 0, k_2 = 0$, on a

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0,0) = F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0,0).$$

Pour $k_1 \in \mathbb{N}^+$ et $k_2 = 0$, on a

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h,0) = F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h,0) - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}((k_1 - 1) h,0).$$

Pour $k_1 = 0$ et $k_2 \in \mathbb{N}^+$, on a

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0,k_2 h) = F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0,k_2 h) - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0,(k_2 - 1) h).$$

Enfin, pour $k_1 \in \mathbb{N}^+$ et $k_2 \in \mathbb{N}^+$, on a

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, k_2 h) &= F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, k_2 h) \\ &- F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, (k_2-1)h) \\ &- F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}((k_1-1)h, k_2 h) \\ &+ F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}((k_1-1)h, (k_2-1)h). \end{aligned}$$

On approxime la v.a. S par la $\widetilde{S} = \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 \in \{0h, 1h, 2h, \ldots\}$. La fonction de masse de probabilité de $\widetilde{S}$ est donnée par

$$f_{\widetilde{S}}(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(jh, (k-j)h),$$

pour $k \in \mathbb{N}$.
Ensuite, il est aisé de calculer $F_{\widetilde{S}}(kh)$ et toutes fonctions de $\widetilde{S}$, notamment les mesures de risque $VaR_\kappa(\widetilde{S})$ et $TVaR_\kappa(\widetilde{S})$.

Agenda

Copules et marginales exponentielles

Soit un couple de v.a. (X_1,X_2) avec $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1,F_2)$ où $F_i(x) = 1 - e^{-x}$, $i = 1,2$.
La fonction de répartition de (X_1,X_2) est donnée par

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C(F_1(x_1),F_2(x_2)),$$

pour $(x_1,x_2) \in [0,\infty)^2$, où C est une copule.
On définit

$$S = X_1 + X_2.$$

Copules et marginales exponentielles

On définit

$$\begin{aligned}\pi_\kappa &= \Pr\left(X_2 > VaR_\kappa\left(X_2\right)|X_1 > VaR_\kappa\left(X_1\right)\right)\\ &= \Pr\left(X_1 > VaR_\kappa\left(X_1\right)|X_2 > VaR_\kappa\left(X_2\right)\right)\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.
On définit

$$\begin{aligned}\zeta_{(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]} &= \Pr\left((X_1,X_2) \in (a_1,b_1] \times (a_2,b_2]\right)\\ &= \Pr\left(a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2\right)\end{aligned}$$

pour $0 \leq a_i < b_i \leq \infty$, $i = 1,2$.

Copule de Clayton

On suppose que C est la copule de Clayton avec un paramètre de dépendance $\alpha = 3$.

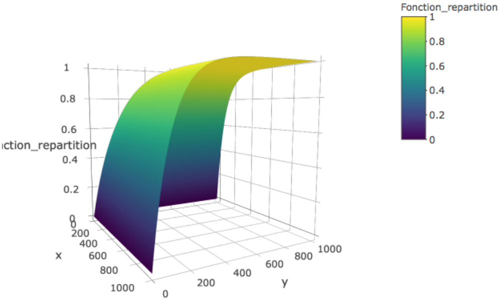


Figure: La courbe de $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$, pour $(x_1,x_2) \in [0,\infty)^2$.

-

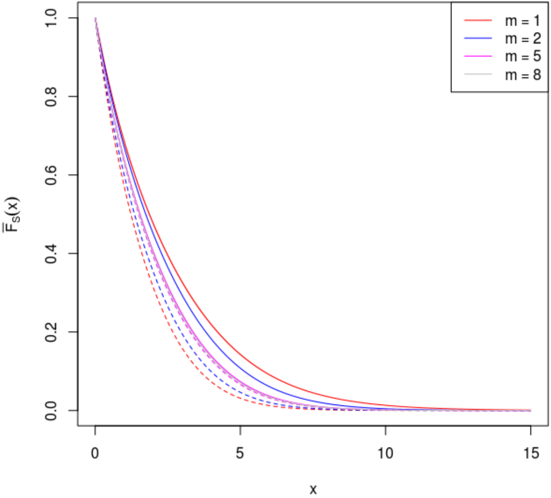
κ	π_κ
0.9	0.308589949
0.99	0.038836781
0.999	0.003988038
0.9999	0.000399880

-

$$\zeta_{(1,3]\times(1,3]} = 0.186775.$$

- En utilisant la méthode des rectangles avec $m = 1,2,5,8$, on calcule les bornes de $\overline{F}_S(x)$, pour différentes valeurs de x.

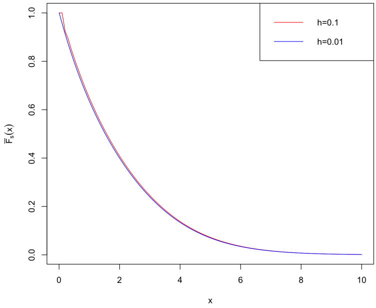
Copule de Clayton



Copule de Clayton

On fixe $m = 20$ pour les approximations suivantes.

- Utiliser la méthode de discrétisation avec $h = \frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$, pour calculer les bornes de $\overline{F}_S(x)$, pour différentes valeurs de x.



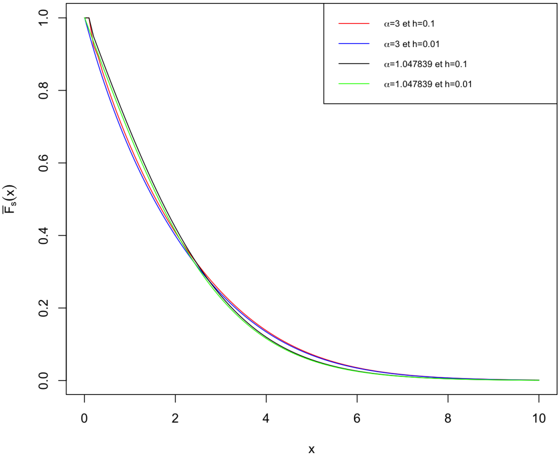
- En utilisant la méthode de discrétisation avec $h = \frac{1}{100}$, on obtient

$$\rho_p(X_1,X_2) = 0.5532102.$$

- En utilisant la méthode de discrétisation et en fixant $\rho_p(X_1,X_2) = 0.3$, on obtient

$$\alpha_{0.3}(X_1,X_2) = 1.047839.$$

Copule de Clayton



Copule de Gumbel

On suppose que C est la copule de Gumbel.