Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives (Exercices)

Hélène Cossette et Etienne Marceau

Version : 10 décembre 2018

Table des matières

1 Distributions multivariées et agrégation des risques **11**
1.1 Exercices - traditionnels 11

2 Théorie des copules et agrégation des risques **26**
2.1 Exercices traditionnels 26
2.2 Exercices informatiques 45

Remerciements

À ma femme Hélène et à mes enfants Anne-Sophie et Geneviève, je vous dois toute ma gratitude de m'avoir soutenu, encouragé et enduré pendant cette vaste entreprise.

Préface

Document d'exercices. Le présent ouvrage comprend les exercices en accompagnement à [Cossette, 2017]. Il sert de base pour les cours Act-2001, Act-3000 et Act-7016 de l'École d'actuariat (Université Laval) ainsi que pour le cours Modèles Stochastiques en assurance non-vie (Master Recherche) de l'ISFA (Université Claude Bernard Lyon 1). Il n'y a pas de recoupement avec les exercices avec les exercices de [Marceau, 2013].

Prérequis. Les prérequis pour cet ouvrage sont principalement des cours de bases en mathématiques, en probabilité et en statistique.

Conditions d'utilisation. Cet ouvrage est en cours de rédaction, ce qui implique que son contenu est continuellement révisé et mis à jour. Alors, il peut y avoir encore des erreurs et son contenu doit être encore amélioré. Pour cette raison, le lecteur à inviter à nous communiquer tout commentaire et / ou correction qu'il peut avoir. Les conditions suivantes d'utilisation doivent être respectées :

1. Cet ouvrage a été conçu pour des fins pédagogiques, personnelles et non-commerciales. Toute utilisation commerciale ou reproduction est interdite.
2. Son contenu demeure la propriété de son auteur.

Calculs et illustrations. Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project. Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Le logiciel GNU R et les bibliothèques sont disponibles sur le site du R Project et du Comprehensive R Archive Network (CRAN) :

https ://cran.r-project.org/.

L'environnement RStudio est disponible sur le site suivant :

https ://www.rstudio.com/products/rstudio/download/.

Versions précédentes :

1. 3 avril 2018 ;
2. 3 décembre 2017 ;

3. 28 novembre 2017 ;
4. 24 novembre 2017 ;
5. 16 novembre 2017 ;
6. 8 novembre 2017.

Chapitre 1

Distributions multivariées et agrégation des risques

1.1 Exercices - traditionnels

1. Soit le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ où $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2, F_3)$ (classe de Fréchet) et $F_{X_i} = F_i$ $(i = 1, 2, 3)$ avec

$$\begin{array}{l} \Pr(X_1 = 0) = \Pr(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \\ \Pr(X_2 = 0) = \Pr(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \\ \Pr(X_3 = 0) = \Pr(X_3 = 1) = \frac{1}{2} \end{array} .$$

La fonction de masses de probabilité de $\underline{X}$ est notée par γ où

$$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \gamma(x_1, x_2, x_3),\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A} = \{0, 1\}^3 .$$

On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Questions :

   (a) Quel est le nombre d'éléments dans le support $\mathcal{A}$?

   (b) Hypothèse : La structure de dépendance de $\underline{X}$ est définie de telle sorte que
$$\Pr(S = 1) = \Pr(S = 2) = \frac{1}{2}.$$
Suggestion : Il existe 6 éléments $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A}$, de telle sorte que $\gamma(x_1, x_2, x_3) = \alpha > 0$ et $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 0$ pour les autres éléments.

      i. Indiquer ces 6 éléments et la valeur α de $\gamma(x_1, x_2, x_3)$ pour chacun de ces 6 éléments.

      ii. Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.

      iii. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_2).

iv. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_3).

v. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_2, X_3).

vi. Interpréter la structure de dépendance obtenue.

vii. Écrire l'expression de la fgp de $\underline{X}$.

2. Soit le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ où $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2, F_3)$ (classe de Fréchet) et $F_{X_i} = F_i$ $(i = 1, 2, 3)$ avec

$$\begin{array}{l} \Pr(X_1 = 0) = \Pr(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \\ \Pr(X_2 = 0) = \Pr(X_2 = 4) = \frac{1}{2} \\ \Pr(X_3 = 0) = \Pr(X_3 = 6) = \frac{1}{2} \end{array}.$$

La fonction de masses de probabilité de $\underline{X}$ est notée par γ où

$$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \gamma(x_1, x_2, x_3), \ (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A} = \{0, 2\} \times \{0, 4\} \times \{0, 6\}.$$

On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Questions :

(a) Quel est le nombre d'éléments dans $\mathcal{A}$?

(b) Hypothèse : La structure de dépendance de $\underline{X}$ est définie de telle sorte que $\Pr(S = 6) = 1$. Suggestion : Il existe 2 éléments $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A}$, de telle sorte que $\gamma(x_1, x_2, x_3) > 0$ et $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 0$ pour les autres éléments.

i. Indiquer ces 2 éléments et la valeur de $\gamma(x_1, x_2, x_3)$ pour chacun de ces 2 éléments.

ii. Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.

iii. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_2).

iv. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_3).

v. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_2, X_3).

vi. Interpréter la structure de dépendance obtenue.

vii. Écrire l'expression de la fgp de $\underline{X}$.

(c) (Ordinateur). Hypothèse sur la structure de dépendance de $\underline{X}$: indépendance.

i. Indiquer les valeurs de $\gamma(x_1, x_2, x_3)$ pour tous les éléments de $\mathcal{A}$.

ii. Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.

iii. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_2).

iv. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_3).
v. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_2, X_3).
vi. Interpréter la structure de dépendance obtenue.
vii. Écrire l'expression de la fgp de $\underline{X}$.

(d) Hypothèse sur la structure de dépendance de $\underline{X}$: comonotonicité.
i. Indiquer les valeurs de $\gamma(x_1, x_2, x_3)$ pour tous les éléments de $\mathcal{A}$.
ii. Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.
iii. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_2).
iv. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_3).
v. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_2, X_3).
vi. Interpréter la structure de dépendance obtenue.
vii. Écrire l'expression de la fgp de $\underline{X}$.

(e) (Ordinateur). Hypothèse sur la structure de dépendance de $\underline{X}$: l'expression de $F_{\underline{X}}$ est

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{3} W(F_1(x_1), F_2(x_2)) F_3(x_3) \\ &+ \frac{1}{3} W(F_1(x_1), F_3(x_3)) F_2(x_2) \\ &+ \frac{1}{3} W(F_2(x_2), F_3(x_3)) F_1(x_1) \end{aligned}$$

i. Calculer les valeurs de $\gamma(x_1, x_2, x_3)$ pour tous les éléments de $\mathcal{A}$.
ii. Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.
iii. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_2).
iv. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_3).
v. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_2, X_3).
vi. Interpréter la structure de dépendance obtenue.
vii. Écrire l'expression de la fgp de $\underline{X}$.

3. Soit le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ où $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2, F_3)$ (classe de Fréchet) et $F_{X_i} = F_i$ $(i = 1, 2, 3)$ avec

$$\begin{array}{l} \Pr(X_1 = 0) = \Pr(X_1 = 1) = \Pr(X_1 = 2) = \frac{1}{3} \\ \Pr(X_2 = 0) = \Pr(X_2 = 1) = \Pr(X_1 = 2) = \frac{1}{3} \\ \Pr(X_3 = 0) = \Pr(X_3 = 1) = \Pr(X_1 = 2) = \frac{1}{3} \end{array} .$$

La fonction de masses de probabilité de $\underline{X}$ est notée par γ où

$$\Pr\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3\right) = \gamma\left(x_1, x_2, x_3\right),\ \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathcal{A} = \{0, 1, 2\}^3 .$$

On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Questions :

(a) Quel est le nombre d'éléments dans $\mathcal{A}$?

(b) Hypothèse : La structure de dépendance de $\underline{X}$ est définie de telle sorte que
$$\Pr(S = 3) = 1.$$
Suggestion : Il existe 6 éléments $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A}$, de telle sorte que $\gamma(x_1, x_2, x_3) = \alpha > 0$ et $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 0$ pour les autres éléments.

   i. Indiquer ces 6 éléments et la valeur α de $\gamma(x_1, x_2, x_3)$ pour chacun de ces 6 éléments.
   ii. Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.
   iii. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_2).
   iv. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_3).
   v. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_2, X_3).
   vi. Interpréter la structure de dépendance obtenue.
   vii. Écrire l'expression de la fgp de $\underline{X}$.

(c) (Ordinateur). Hypothèse sur la structure de dépendance de $\underline{X}$: indépendance.

   i. Indiquer les valeurs de $\gamma(x_1, x_2, x_3)$ pour tous les éléments de $\mathcal{A}$.
   ii. Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.
   iii. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_2).
   iv. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_3).
   v. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_2, X_3).
   vi. Interpréter la structure de dépendance obtenue.
   vii. Écrire l'expression de la fgp de $\underline{X}$.

(d) Hypothèse sur la structure de dépendance de $\underline{X}$: comonotonicité.

   i. Indiquer les valeurs de $\gamma(x_1, x_2, x_3)$ pour tous les éléments de $\mathcal{A}$.
   ii. Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.

iii. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_2).
iv. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_3).
v. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_2, X_3).
vi. Interpréter la structure de dépendance obtenue.
vii. Écrire l'expression de la fgp de $\underline{X}$.

4. Soit le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ où $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2, F_3, F_4)$ (classe de Fréchet) et $F_{X_i} = F_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ avec

$$\begin{array}{l} \Pr(X_1 = 0) = \Pr(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \\ \Pr(X_2 = 0) = \Pr(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \\ \Pr(X_3 = 0) = \Pr(X_3 = 1) = \frac{1}{2} \\ \Pr(X_4 = 0) = \Pr(X_4 = 1) = \frac{1}{2} \end{array}.$$

La fonction de masses de probabilité de $\underline{X}$ est notée par γ où

$$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4) = \gamma(x_1, x_2, x_3, x_4), \ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{A} = \{0, 1\}^4.$$

On définit $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.
Questions :

(a) Quel est le nombre d'éléments dans $\mathcal{A}$?
(b) Hypothèse : La structure de dépendance de $\underline{X}$ est définie de telle sorte que
$$\Pr(S = 2) = 1.$$
Suggestion : Il existe 6 éléments $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{A}$, de telle sorte que $\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha > 0$ et $\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ pour les autres éléments.

i. Indiquer ces 6 éléments et la valeur α de $\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pour chacun de ces 6 éléments.
ii. Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.
iii. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_2).
iv. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_3).
v. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_2, X_3).
vi. Interpréter la structure de dépendance obtenue.
vii. Écrire l'expression de la fgp de $\underline{X}$.

(c) (Ordinateur). Hypothèse sur la structure de dépendance de $\underline{X}$: indépendance.

i. Indiquer les valeurs de $\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pour tous les éléments de $\mathcal{A}$.

ii. Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.

iii. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_2).

iv. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_3).

v. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_2, X_3).

vi. Interpréter la structure de dépendance obtenue.

vii. Écrire l'expression de la fgp de $\underline{X}$.

(d) Hypothèse sur la structure de dépendance de $\underline{X}$: comonotonicité.

i. Indiquer les valeurs de $\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pour tous les éléments de $\mathcal{A}$.

ii. Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.

iii. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_2).

iv. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_1, X_3).

v. Identifier la structure de dépendance résultante pour le couple (X_2, X_3).

vi. Interpréter la structure de dépendance obtenue.

vii. Écrire l'expression de la fgp de $\underline{X}$.

5. Démontrer que la fonction de survie $\overline{F}$ de la loi exponentielle est convexe. Développer les expressions de $VaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right)$ et $TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right)$.

6. Démontrer que la fonction de survie $\overline{F}$ de la loi Pareto ($\alpha > 1$) est convexe. Développer les expressions de $VaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right)$ et $TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right)$.

7. Démontrer que la fonction de survie $\overline{F}$ de la loi Weibull ($\tau \in (0,1]$) est convexe. Développer les expressions de $VaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right)$ et $TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right)$.

8. Démontrer que la fonction de survie $\overline{F}$ de la loi gamma ($\alpha \in (0,1]$) est convexe. Développer l'expression de $TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right)$.

9. Démontrer que la fonction de survie $\overline{F}$ de la loi beta ($a = 2, b = 1$) est concave. Alors, dans cette situation, on ne peut pas appliquer la Proposition **??**.

10. Démontrer que la fonction de survie $\overline{F}$ de la loi beta ($a = 1, b = 2$) est convexe. Développer l'expression de $TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right)$.

11. Let (X_1, X_2) be a pair of rvs where $X_1 \sim Exp(1)$ and $X_2 \sim Unif(0,1)$. Show that
$$-1 < -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1.$$

12. Let (X_1, X_2) be a pair of rvs where $X_i \sim LN(\mu_i, \sigma_i^2)$ pour $i = 1, 2$. Show that
$$-1 \leq \rho_P\left(X_1^-, X_2^-\right) = \frac{\left(\mathrm{e}^{-\sigma_1\sigma_2} - 1\right)}{\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2} - 1\right)}} \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq \frac{\left(\mathrm{e}^{\sigma_1\sigma_2} - 1\right)}{\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2} - 1\right)}} = \rho_P\left(X_1^+, X_2^+\right) \leq 1$$

    Examples :

    — For $\sigma_1 = 2$ et $\sigma_2 = 3$, we find $\rho_P\left(X_1^+, X_2^+\right) = 0.6107$ and $\rho_P\left(X_1^-, X_2^-\right) = -0.0015$.

    — For $\sigma_1 = 2$ et $\sigma_2 = 3$, we find $\rho_P\left(X_1^+, X_2^+\right) = 0.99745$ and $\rho_P\left(X_1^-, X_2^-\right) = -0.93936$.

13. Let (M_1, M_2) be a pair of discrete rvs $M_i \sim Binom(5; q_i)$, $i = 1, 2$. Pearson's coefficient is defined with
$$\rho_P(M_1, M_2) = \frac{Cov(M_1, M_2)}{\sqrt{Var(M_1)\,Var(M_2)}}.$$

    We also define $N = M_1 + M_2$.

    (a) If the rvs M_1 and M_2 are comonotonic, compute the values of $\rho_P(M_1, M_2)$ and the values of $f_S(k) = \Pr(S = k)$ for the following combinations :

$q_1 \vert q_2$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$
$\frac{1}{10}$		–	–	–	–
$\frac{2}{10}$			–	–	–
$\frac{3}{10}$				–	–
$\frac{4}{10}$					–
$\frac{5}{10}$					

    (b) If the rvs M_1 and M_2 are countermonotonic, compute the values of $\rho_P(M_1, M_2)$ and the values of $f_S(k) = \Pr(S = k)$ for the following combinations :

$q_1 \vert q_2$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$
$\frac{1}{10}$		–	–	–	–
$\frac{2}{10}$			–	–	–
$\frac{3}{10}$				–	–
$\frac{4}{10}$					–
$\frac{5}{10}$					

14. On considère le couple de v.a. (X_1, X_2) de loi exponentielle bivariée EFGM avec les paramètres $\beta_1 = \frac{1}{10}$, $\beta_2 = \frac{1}{2}$ et le paramètre de dépendance θ.

    Les réalisations des v.a. i.i.d. U_1 et U_2 ($U_1 \sim U_2 \sim Unif\,(0,1)$ sont $U_1^{(1)} = 0.27$ et $U_2^{(j)} = 0.93$.

    Questions :

    (a) Pour $\theta = 1$, produire une réalisation $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$ de (X_1, X_2).

    (b) Pour $\theta = -1$, produire une réalisation $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$ de (X_1, X_2).

15. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) obéissant à une loi exponentielle bivariée EFGM avec $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$. On définit $S = X_1 + X_2$.

    (a) Développer les expressions de f_S, F_S et $E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right]$.

    (b) Calculer $\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)$ pour $\theta = -1$, 0, 1.

    (c) Calculer $E\,[S]$ et $\mathrm{Var}\,(S)$ pour $\theta = -1$, 0, 1.

    (d) Calculer $VaR_\kappa\,(S)$ pour $\theta = -1$, 0, 1 et $\kappa = 0.99$.

    (e) Calculer $TVaR_\kappa\,(S)$ pour $\theta = -1$, 0, 1 et $\kappa = 0.99$.

16. Soit les v.a. indépendantes Y_0, Y_1, Y_2 où

$$Y_0 \sim Exp\left(\gamma = \frac{1}{20}\right),$$

$$Y_1 \sim Y_2 \sim Exp\left(\beta - \gamma = \frac{1}{10}\right).$$

    Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) où $X_1 = \min\,(Y_0; Y_1)$ et $X_2 = \min\,(Y_0; Y_2)$. On définit

$$I_1 = \begin{cases} 1, & X_1 \leq 1 \\ 0, & X_1 > 1 \end{cases} \text{ et } I_2 = \begin{cases} 1, & X_2 \leq 1 \\ 0, & X_2 > 1 \end{cases}.$$

    Pour $N = I_1 + I_2$, calculer $\Pr\,(N = k)$, $k = 0, 1, 2$.

17. Soient les v.a. indépendantes

$$\begin{aligned} W_0 &\sim Gamma\,(\gamma_0, 1)\,, \\ W_1 &\sim Gamma\,(\alpha - \gamma_0, 1)\,, \\ &\ldots \\ W_n &\sim Gamma\,(\alpha - \gamma_0, 1)\,, \end{aligned}$$

    où $0 < \gamma_0 < \alpha$.

    On définit

$$X_1 = \frac{1}{\beta}\,(W_0 + W_1)\,,\ \ldots,\ X_n = \frac{1}{\beta}\,(W_0 + W_n)\,.$$

Mesure de risque. On définit la mesure de risque φ_κ attribuée à une v.a. Y par

$$\varphi_\kappa(Y) = E[Y] + \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$

Inégalité du triangle. Soient des v.a. Y_1,..., Y_n (indépendantes ou non). Selon l'inégalité du triangle pour l'écart-type i.e.

$$\sqrt{\mathrm{Var}(X_1 + ... + X_n)} \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X_1)} + ... + \sqrt{\mathrm{Var}(X_n)}$$

Questions :

(a) Développer les expressions de $E[X_i]$ et de $Var(X_i)$, pour $i = 1, 2, ..., n$.

(b) On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$.

   i. Développer les expressions de $E[S]$ et de $Var(S)$.

   ii. Développer l'expression du bénéfice de mutualisation selon cette mesure.

   iii. Utiliser l'inégalité du triangle pour démontrer le bénéfice de mutualisation est toujours positif pour cette mesure.

   iv. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma_0 = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{1}{100}$, $n = 200$ et $\kappa = 0.95$, calculer le bénéfice de mutualisation.

18. Soit un couple de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ de normale multivariée avec

$$\underline{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)^{tr} \text{ et } \underline{\sigma} = (\sigma_1, ..., \sigma_n)^{tr}$$

("^{tr}" = transposée) et

$$\rho_P(X_i, X_j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ -\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i\neq j}^n \sigma_i \sigma_j} & , i \neq j \end{cases},$$

pour $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.
Identifier (en le démontrant) la loi de $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Interpréter brièvement.

19. Simulation Monte-Carlo :

(a) Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) de loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin (paramètres : $\beta_1 = \frac{1}{1000}$, $\beta_2 = \frac{1}{2000}$ et $\lambda_0 = \frac{1}{3000}$ (dépendance).

On utilise les réalisations indépendantes $U_i^{(j)}$ (de loi uniforme standard) pour produire les réalisations $Y_i^{(j)}$, $i = 0, 1, 2$ et $j = 1, 2, 3$:

j	$U_0^{(j)}$	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$
1	0.12	0.76	0.81
2	0.97	0.45	0.89
3	0.25	0.01	0.94

Produire les réalisations de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ pour $j = 1, 2, 3$.

Produire les réalisations $S^{(j)}$ de $S = X_1 + X_2$, $j = 1, 2, 3$.

(b) Soit un couple de v.a. (X_1, X_2, X_3) de normale trivariée avec

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\rho_P} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

On utilise les réalisations indépendantes $W_i^{(j)}$ pour produire les réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de (X_1, X_2, X_3), pour $j = 1, 2, 3.$:

j	$W_1^{(j)}$	$W_2^{(j)}$	$W_3^{(j)}$
1	-1.2	2.5	0.3
2	0.9	-0.4	0.8
3	3.1	-1.7	-0.6

Utiliser la décomposition de Choleski pour produire les réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de (X_1, X_2, X_3), pour $j = 1, 2, 3$.

Produire les réalisations $S^{(j)}$ de $S = X_1 + X_2 + X_3$, $j = 1, 2, 3$.

(c) Soit un couple de v.a. comonotones (X_1, X_2) avec $X_1 \sim Pareto\,(\alpha = 3, \lambda = 2000)$ et $X_2 \sim Weibull\left(\tau = 0.5, \beta = \frac{1}{2000}\right)$. On produit les trois réalisations suivantes de la loi exponentielle avec moyenne 325 : 743, 221 et 1747. Produire trois réalisations de (X_1, X_2). Produire trois réalisations de $S = X_1 + X_2$.

(d) Soit un couple de v.a. antimonotones (X_1, X_2) avec $X_1 \sim Pareto\,(\alpha = 3, \lambda = 2000)$ et $X_2 \sim Weibull\left(\tau = 0.5, \beta = \frac{1}{2000}\right)$. On produit les trois réalisations suivantes de la loi exponentielle avec moyenne 325 : 743, 221 et 1747. Produire trois réalisations de (X_1, X_2). Produire trois réalwisations de $S = X_1 + X_2$.

20. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) obéissant à une loi gamma bivariée CRMM avec $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.2$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$.
On définit $S = X_1 + X_2$
Questions
(a) Développer l'expression de la fonction de répartition de S.
(b) Pour $\gamma_0 = 0.5$, calculer $F_S(100)$.
(c) Pour $\gamma_0 = 0.5$, calculer $\pi_S(100) = E[\max(S - 100; 0)]$.
(d) Pour $\gamma_0 = 0.5$, calculer $E\left[S \times 1_{\{S>100\}}\right]$.
(e) Reproduire les valeurs du tableau suivant :

γ_0	κ	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$
0	0.95	72.2301	84.5060
0	0.995	100.2088	111.6268
0.5	0.95	75.0652	89.2894
0.5	0.995	107.6104	121.4649
1	0.95	77.7790	93.4458
1	0.995	113.6537	128.8391

(f) Selon le principe de prime exponentiel (voir chapitre 4 de Marceau (2013)), la prime majorée est $\Pi_\kappa(S) = \frac{1}{\kappa}\ln\{M_S(\kappa)\}$. Calculer $\Pi_{0.01}(S)$.

21. Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition bivariée est donnée par

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) \\ &\quad + \theta\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec un paramètre de dépendance $-1 \leq \theta \leq 1$ et avec $\beta_i > 0$.
Questions :
(a) Montrer que les marginales de X_1 et X_2 sont exponentielles i.e. $X_i \sim Exp(\beta_i)$ $(i = 1, 2)$.
(b) Montrer que la fonction de densité bivariée de (X_1, X_2) est

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= (1+\theta)\,\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} + \theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2} \\ &\quad -\theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} - \theta\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2}. \end{aligned}$$

(c) Développer l'expression de $Cov(X_1, X_2)$.
(d) Montrer que le coefficient de corrélation de Pearson est $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\theta}{4}$.
(e) Pour un risque donné Y, le montant de capital à être détenu est

$$\varphi(Y) = E[Y] + 2 \times \sqrt{Var(Y)}.$$

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

— À l'aide de φ, montrer que l'expression du bénéfice $B_{\theta}(X_1, X_2)$ à mutualiser les risques X_1 et X_2 est

$$B_{\theta}(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^{2} \varphi(X_i) - \varphi(S) = 2\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} - \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + \theta\frac{1}{2\beta_1\beta_2}}\right)$$

— Indiquer la valeur de $\theta \in [-1, 1]$ qui maximise $B_{\theta}(X_1, X_2)$.

— Commenter brièvement.

22. Simulation Monte-Carlo. Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) de loi exponentielle mélange bivariée construite par "common frailties". On utilise les réalisations indépendantes $U_i^{(j)}$ (de loi uniforme standard, $i = 0, 1, 2$) pour produire (dans l'ordre) les réalisations $\Theta^{(j)}$, $X_1^{(j)}$, et $X_2^{(j)}$:

j	$U_0^{(j)}$	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$
1	0.12	0.76	0.81
2	0.97	0.45	0.89
3	0.25	0.01	0.94

Hypothèses :

— Soit $\Theta \sim Gamma\left(\frac{1}{5}, 1\right)$.

— Soit $\Theta \sim GeomType2(q = \frac{1}{10})$.

— Soit $\Theta \sim Logar\left(\gamma = \frac{1}{3}\right)$.

Questions :

— Pour chaque hypothèse, produire les réalisations de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ pour $j = 1, 2, 3$.

— Pour chaque hypothèse, produire les réalisations $S^{(j)}$ de $S = X_1 + X_2$, $j = 1, 2, 3$.

23. Soit le vecteur de v.a. $\underline{M} = (M_1, ..., M_n)$ obéissant à la distribution Poisson multivariée avec les paramètres λ_1, ..., λ_n et α_0. On définit $N = M_1 + ... + M_n$.

    (a) Développer l'expression de $\Pr(N = 0)$.

    (b) Développer l'expression de la f.g.m. de $\underline{M}$.

    (c) Développer l'expression de la covariance pour (M_i, M_j), $i \neq j$.

    (d) Développer les expressions de l'espérance et de la variance de N.

    (e) Développer l'expression de la f.g.m. de N.

24. Soit le vecteur de v.a. $\underline{\Theta} = (\Theta_1, ..., \Theta_n)$ obéissant à une loi gamma multivariée CRMM de paramètres α_1, ..., α_n, γ_0, β_1, ..., β_n, avec $\alpha_i = \beta_i = r_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Soit le vecteur de v.a. $\underline{M} = (M_1, ..., M_n)$ obéissant à la distribution Poisson-Gamma multivariée prise 2 CRMM avec les paramètres λ_1, ..., λ_n, r_1, ..., r_n et γ_0. On définit $N = M_1 + ... + M_n$.

   (a) Développer l'expression de $\Pr(N=0)$.
   (b) Développer l'expression de la f.g.m. de $\underline{M}$.
   (c) Développer l'expression de la covariance pour (M_i, M_j), $i \neq j$.
   (d) Développer les expressions de l'espérance et de la variance de N.
   (e) Développer l'expression de la f.g.m. de N.

25. Soit le couple de v.a. $\underline{M} = (M_1, M_2)$ obéissant à une loi Poisson mélange bivariée prise 2, de paramètres λ_1 et λ_2. Le couple de v.a. (Θ_1, Θ_2) obéit à une loi exponentielle bivariée Downton-Moran, avec $\beta_1 = \beta_2 = 1$. On définit la v.a. $N = M_1 + M_2$.
   (a) Développer les expressions des f.g.m. de M_1 et M_2.
   (b) Développer l'expression de $\Pr(N=0)$.
   (c) Développer l'expression de la f.g.m. de $\underline{M}$.
   (d) Développer l'expression de la covariance pour (M_1, M_2).
   (e) Développer les expressions de l'espérance et de la variance de N.
   (f) Développer l'expression de la f.g.m. de N.
   (g) Développer l'algorithme de simulation des réalisations de $\underline{M}$.

26. Soit $U^{(j)}$ la réalisation de la v.a. $U \sim Unif(0,1)$ produite par le générateur du logiciel R. On fixe `set.seed(19661122)`.
   Soit le couple de la v.a. $\underline{M} = (M_1, M_2)$ obéissant à la loi Poisson bivariée Teicher avec $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\rho_P(M_1, M_2) = 0.4$. On définit $N = M_1 + M_2$.
   Convention : on utilise $U^{(3(j-1)+1)}$ pour produire une réalisation $K_1^{(j)}$de K_1, $U^{(3(j-1)+2)}$ pour produire une réalisation $K_2^{(j)}$de K_2, $U^{(3(j-1)+3)}$ pour produire une réalisation $K_0^{(j)}$de K_0, pour $j = 1, 2, ..., m$.
   (a) Identifier la valeur du paramètre γ_0.
   (b) Calculer les valeurs exactes de $E[N]$ et $Var(N)$.
   (c) (Ordi). Produire $m = 1000000$ réalisations $\underline{M} = (M_1, M_2)$.
      i. Utiliser les simulations pour calculer une approximation de $\rho_P(M_1, M_2)$ et comparer avec la valeur exacte.
      ii. Utiliser les simulations pour calculer une approximation de $f_N(k)$, pour $k = 0, 1, ..., 20$.
      iii. Utiliser les simulations pour calculer une approximation de $VaR_\kappa(N)$, pour $\kappa = 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.
      iv. Utiliser les simulations pour calculer une approximation de $TVaR_\kappa(N)$, pour $\kappa = 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.

27. Soit un couple de v.a. (Θ_1, Θ_2) de loi gamma bivariée CRMM avec $\alpha_1 = r_1 = 2$, $\alpha_2 = r_2 = 3$ et $\gamma_0 = 1$. Le couple de v.a. (M_1, M_2) est défini de telle sorte que $(M_1|\Theta_1 = \theta_1)$ et $(M_2|\Theta_2 = \theta_2)$ sont conditionnellement

indépendantes et $(M_i|\Theta_i = \theta_i) \sim Pois(\theta_i\lambda_i)$ pour $i = 1, 2$. On fixe $\lambda_1 = 2.5$ et $\lambda_2 = 2.5$. On définit $N = M_1 + M_2$. Soient trois v.a. indépendantes Y_0, Y_1 et Y_2 où $Y_0 \sim Ga(\gamma_0, 1)$, $Y_1 \sim Ga(\alpha_1 - \gamma_0, 1)$ et $Y_2 \sim Ga(\alpha_2 - \gamma_0, 1)$, avec $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\alpha_1; \alpha_2)$. On définit les v.a. Θ_1 et Θ_2 par $\Theta_i = \frac{1}{\beta_i}(Y_0 + Y_i)$ pour $i = 1, 2$.

Convention : on utilise $U^{(5(j-1)+1)}$ pour produire une réalisation $Y_1^{(j)}$de Y_1, $U^{(5(j-1)+2)}$ pour produire une réalisation $Y_2^{(j)}$de Y_2, $U^{(5(j-1)+3)}$ pour produire une réalisation $Y_0^{(j)}$de Y_0, $U^{(5(j-1)+4)}$ pour produire une réalisation $M_1^{(j)}$de M_1, $U^{(5(j-1)+5)}$ pour produire une réalisation $M_2^{(j)}$de M_2, pour $j = 1, 2, ..., m$.

(a) Calculer les valeurs exactes de $Cov(M_1, M_2)$, de $\rho_P(M_1, M_2)$, de $E[N]$ et $Var(N)$.

(b) (Ordi). Produire $m = 1000000$ réalisations $\underline{M} = (M_1, M_2)$.

i. Utiliser les simulations pour calculer une approximation de $\rho_P(M_1, M_2)$ et comparer avec la valeur exacte.

ii. Utiliser les simulations pour calculer une approximation de $f_N(k)$, pour $k = 0, 1, ..., 50$.

iii. Utiliser les simulations pour calculer une approximation de $VaR_\kappa(N)$, pour $\kappa = 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.

iv. Utiliser les simulations pour calculer une approximation de $TVaR_\kappa(N)$, pour $\kappa = 0.1, 0.5, 0.9, 0.99$.

28. Soit la paire de v.a. discrètes (M_1, M_2) dont la f.g.p. est

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1, t_2) &= \left(1 - \frac{\lambda_1(t_1 - 1)}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)} \\ &\times \left(1 - \frac{\lambda_2(t_2 - 1)}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)} \\ &\times \left(1 - \frac{\lambda_1(t_1 - 1)}{r_1} - \frac{\lambda_2(t_2 - 1)}{r_2}\right)^{-\gamma_0}. \end{aligned}$$

On définit la v.a. $N = M_1 + M_2$.

(a) Démontrer que la f.g.p. de la v.a. N est

$$\begin{aligned} P_N(t) &= \left(1 - \frac{\lambda_1(t - 1)}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)} \left(1 - \frac{\lambda_2(t - 1)}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)} \\ &\times \left(1 - \left(\frac{\lambda_1}{r_1} + \frac{\lambda_2}{r_2}\right)(t - 1)\right)^{-\gamma_0}. \end{aligned}$$

(b) On fixe $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $r_1 = 4$ et $r_2 = 3$. On déduit que $M_1 \sim BN\left(r = 4, \beta = \frac{1}{4}\right)$ et $M_2 \sim BN\left(r = 3, \beta = \frac{2}{3}\right)$. Pour $N = M_1 +$

M_2, on a $E[N] = 3$. Utiliser la FFT pour calculer $f_N(k)$, pour $= 0, 1, 2, ..., 20$. (Suggestion : appliquer la FFT avec des vecteurs comprenant 1024 éléments).

(c) Calculer $VaR_\kappa(N)$ et $TVaR_\kappa(N)$ pour $\gamma_0 = 0$ et 2.

Chapitre 2

Théorie des copules et agrégation des risques

2.1 Exercices traditionnels

1. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C_\alpha^{Frank}$, with $\alpha = 5$.
   Let $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$ and $X_2 \sim LNorm\,(\mu = \ln(100) - 0.32, \sigma = 0.8)$.
   (a) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.
      i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.
      ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100, 100)$, $F_{X_1,X_2}(200, 100)$, $F_{X_1,X_2}(100, 300)$.
   (b) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1 - U_2)$.
      i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.
      ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100, 100)$, $F_{X_1,X_2}(200, 100)$, $F_{X_1,X_2}(100, 300)$.
   (c) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1 - U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.
      i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.
      ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100, 100)$, $F_{X_1,X_2}(200, 100)$, $F_{X_1,X_2}(100, 300)$.
   (d) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1 - U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1 - U_2)$.
      i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.
      ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100, 100)$, $F_{X_1,X_2}(200, 100)$, $F_{X_1,X_2}(100, 300)$.
2. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C_\alpha^{Clayton}$, with $\alpha = 5$.
   Let $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$ and $X_2 \sim LNorm\,(\mu = \ln(100) - 0.32, \sigma = 0.8)$.
   (a) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.
      i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100,100)$, $F_{X_1,X_2}(200,100)$, $F_{X_1,X_2}(100,300)$.

(b) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100,100)$, $F_{X_1,X_2}(200,100)$, $F_{X_1,X_2}(100,300)$.

(c) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100,100)$, $F_{X_1,X_2}(200,100)$, $F_{X_1,X_2}(100,300)$.

(d) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100,100)$, $F_{X_1,X_2}(200,100)$, $F_{X_1,X_2}(100,300)$.

3. Let $\underline{U} = (U_1,U_2) \sim C_{\alpha}^{Gumbel}$, with $\alpha = 5$.
Let $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$ and $X_2 \sim LNorm\,(\mu = \ln(100) - 0.32, \sigma = 0.8)$.

(a) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100,100)$, $F_{X_1,X_2}(200,100)$, $F_{X_1,X_2}(100,300)$.

(b) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100,100)$, $F_{X_1,X_2}(200,100)$, $F_{X_1,X_2}(100,300)$.

(c) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100,100)$, $F_{X_1,X_2}(200,100)$, $F_{X_1,X_2}(100,300)$.

(d) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100,100)$, $F_{X_1,X_2}(200,100)$, $F_{X_1,X_2}(100,300)$.

4. Let $\underline{U} = (U_1,U_2) \sim C_{\alpha}^{EFGM}$, with $\alpha = 1$.
Let $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$ and $X_2 \sim LNorm\,(\mu = \ln(100) - 0.32, \sigma = 0.8)$.

(a) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100,100)$, $F_{X_1,X_2}(200,100)$, $F_{X_1,X_2}(100,300)$.

(b) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100,100)$, $F_{X_1,X_2}(200,100)$, $F_{X_1,X_2}(100,300)$.

(c) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100, 100)$, $F_{X_1,X_2}(200, 100)$, $F_{X_1,X_2}(100, 300)$.

(d) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100, 100)$, $F_{X_1,X_2}(200, 100)$, $F_{X_1,X_2}(100, 300)$.

5. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C_\alpha^{AMH}$, with $\alpha = 0.9$.
Let $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$ and $X_2 \sim LNorm\left(\mu = \ln(100) - 0.32, \sigma = 0.8\right)$.

(a) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100, 100)$, $F_{X_1,X_2}(200, 100)$, $F_{X_1,X_2}(100, 300)$.

(b) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100, 100)$, $F_{X_1,X_2}(200, 100)$, $F_{X_1,X_2}(100, 300)$.

(c) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100, 100)$, $F_{X_1,X_2}(200, 100)$, $F_{X_1,X_2}(100, 300)$.

(d) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

ii. Compute $F_{X_1,X_2}(100, 100)$, $F_{X_1,X_2}(200, 100)$, $F_{X_1,X_2}(100, 300)$.

6. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C_\alpha^{Normal}$, with $\alpha = 0.6$.
Let $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$ and $X_2 \sim Pareto\left(\alpha = 2.5, \lambda = 150\right)$.
You will find belows sampled values of the iid rvs $Y_1 \sim Norm(0,1)$ and $Y_2 \sim Norm(0,1)$:

j	$Y_1^{(j)}$	$Y_2^{(j)}$
1	-0.45	0.76
2	2.67	1.31
3	3.93	-2.18

(a) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

ii. Compute 3 sampled values of (X_1, X_2).

(b) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$.

i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

ii. Compute 3 sampled values of (X_1, X_2).

(c) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$.

   i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

   ii. Compute 3 sampled values of (X_1,X_2).

(d) Let $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1-U_1)$ and $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U_2)$.

   i. Derive the expression for $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

   ii. Compute 3 sampled values of (X_1,X_2).

7. Let $\underline{U} = (U_1,...,U_n) \sim C$.
Let $X_i \sim X \sim Pareto(\alpha = 2.5, \lambda = 150)$, $i = 1,...,n$.
We define

$$F_{\underline{X}}(x_1,...,x_n) = C\left(F_{X_1}(x_1.\ ),...,F_{X_n}(x_n)\right).$$

Let $M_n = \max(X_1,...,X_n)$.
Questions :

(a) Compute $\overline{F}_X(1000)$.

(b) For $C = C_\alpha^{Gumbel}$ with $\alpha = 5$, compute $\overline{F}_{M_n}(1000)$, for $n = 10,100,1000$.

(c) For $C = C_\alpha^{Clayton}$ with $\alpha = 5$, compute $\overline{F}_{M_n}(1000)$, for $n = 10,100,1000$.

(d) For $C = C_\alpha^{Frank}$ with $\alpha = 5$, compute $\overline{F}_{M_n}(1000)$, for $n = 10,100,1000$.

(e) For $C = C^+$, compute $\overline{F}_{M_n}(1000)$, for $n = 10,100,1000$.

(f) For $C = C^\perp$, compute $\overline{F}_{M_n}(1000)$, for $n = 10,100,1000$.

8. Let (Y_1,Y_2) be a pair of positive continuous rvs with a bivariate cdf given by

$$F_{Y_1,Y_2}(x_1,x_2) = 1-\left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+x_1}\right)^{\alpha_1\theta}+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+x_2}\right)^{\alpha_2\theta}-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+x_1}\right)^{\alpha_1\theta}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+x_2}\right)^{\alpha_2\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

for $x_1,x_2 \geq 0$, $\lambda_1,\lambda_2 > 0$, $\alpha_1,\alpha_2 > 1$ and $\theta \geq 1$.
Questions :

(a) Find the marginals $F_{Y_1}(x_1)$ and $F_{Y_2}(x_2)$. Identify the marginal distribution of Y_1 and Y_2.

(b) Let $C(u_1,u_2)$ be the copula associated to F_{Y_1,Y_2} such that

$$F_{Y_1,Y_2}(x_1,x_2) = C\left(F_{Y_1}(x_1),F_{Y_2}(x_2)\right),$$

for $x_1,x_2 \geq 0$,

(c) Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$. Develop the conditional cdf of U_2 given $U_1 = u_1$ i.e. find the expression of

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \Pr(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1).$$

(d) Let $\underline{X} = (X_1, X_2)$ be a pair of positive continuous rvs with a bivariate cdf given by

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

for $x_1, x_2 \geq 0$, with

$$\begin{aligned} X_1 &\sim LNorm(\mu = \ln(100) - 0.32, 0.8) \\ X_2 &\sim Exp\left(\frac{1}{200}\right). \end{aligned}$$

Let $\theta = 2$.

i. Compute $\Pr(X_1 \leq 200, X_2 > 100)$.

ii. Let 0.76 and 0.83 be two independent sampled values from the standard uniform distribution.

— Use the conditional method to simulate a sampled value of $\underline{U}$.

— Simulate a sampled value of $\underline{X}$.

9. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$ where C is the normal copula

$$C_\alpha^N(u_1, u_2) = \underline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\right),$$

for $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$, with

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

and $\alpha \in [-1, 1]$.
Let (X_1, X_2) a pair of continuous rvs for which the cdf is defined with

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\alpha^N(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)).$$

Also, $X_1 \sim Pareto(1.9, 900)$ et $X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$.
We define $S = X_1 + X_2$.
Let $\alpha = 0.7$.
Let W_1 and W_2 be iid rvs with $W_1 \sim W_2 \sim Norm(0, 1)$.

We provide the following sampled values of W_1 and W_2 :

j	$W_1^{(j)}$	$W_2^{(j)}$
1	1.41	-0.32
2	1.07	0.98
3	-0.75	1.87

Questions :

(a) With the sampled values of W_1 and W_2, simulate 3 sampled values of (U_1, U_2).

(b) With the sampled values of (U_1, U_2), simulate 3 sampled values of (X_1, X_2).

(c) With the sampled values of (X_1, X_2), simulate 3 sampled values of S.

(d) With those sampled values, calculate an approximation of $E\left[X_1 \times 1_{\{S>2000\}}\right]$.

10. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$ where C is the normal copula

$$C_\alpha^N(u_1, u_2) = \underline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\right),$$

for $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$, with

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

and $\alpha \in [-1, 1]$.
Let (X_1, X_2) a pair of continuous rvs for which the cdf is defined with

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\alpha^N\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right).$$

Also, $X_1 \sim Pareto\,(1.9, 900)$ et $X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$.
We define $S = X_1 + X_2$.
Let $\alpha = 0.7$.
Let W_1 and W_2 be iid rvs with $W_1 \sim W_2 \sim Norm\,(0, 1)$.
We provide the following sampled values of W_1 and W_2 :

j	$W_1^{(j)}$	$W_2^{(j)}$
1	1.41	-0.32
2	1.07	0.98
3	-0.75	1.87

Questions :

(a) With the sampled values of W_1 and W_2, simulate 3 sampled values of (U_1, U_2).

(b) With the sampled values of (U_1, U_2), simulate 3 sampled values of (X_1, X_2).

(c) With the sampled values of (X_1, X_2), simulate 3 sampled values of S.

(d) With those sampled values, calculate an approximation of $E\left[X_1 \times 1_{\{S>2000\}}\right]$.

11. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$ where C is the AMH copula

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{1 - \alpha(1-u_1)(1-u_2)}, \quad (u_1, u_2) \in [0,1]^2 \quad \text{and} \quad \alpha \in [-1, 1].$$

Questions :

(a) Show that, if $-1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, then

$$C_{\alpha_1}(u_1, u_2) \leq C_{\alpha_2}(u_1, u_2)$$

for any $(u_1, u_2) \in [0,1]^2$.

(b) Let $\alpha = 0.8$. Let 0.91, 0.76, and 0.83 be three independent sampled values from the standard uniform distribution. Use the simulation method for Archimedean copula to simulate a sampled value of $\underline{U}$.

(c) Let $\underline{X} = (X_1, X_2,)$, $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$ and $X_2 \sim LNorm\,(2, 0.9)$. Also, let $X_i = F_{X_i}^{-1}(U_i)$, $i = 1, 2$. Use the sampled value of $\underline{U}$ to simulate a sampled value of $\underline{X}$.

12. Let $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3) \sim C$ where C is the Clayton copula

$$C_\theta(u_1, u_2, u_3) = \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + u_3^{-\alpha} - 2\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad (u_1, u_2, u_3) \in [0,1]^3 \quad \text{and} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Let $\psi(t) = L_\Theta(t) = E\left[\mathrm{e}^{-\Theta t}\right]$, such that

$$C_\theta(u_1, u_2, u_3) = \psi\left(\psi^{-1}(u_1) + \psi^{-1}(u_2) + \psi^{-1}(u_3)\right), \quad (u_1, u_2, u_3) \in [0,1]^3.$$

Questions :

(a) By definition of $L_\Theta(t)$, we have

$$\begin{aligned} F_{\underline{U}}(u_1, u_2, u_3) &= \int_0^\infty F_{\underline{U}|\Theta=\theta}(u_1, u_2, u_3) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\infty F_{U_1|\Theta=\theta}(u_1) F_{U_2|\Theta=\theta}(u_2) F_{U_3|\Theta=\theta}(u_3) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

for $(u_1, u_2, u_3) \in [0,1]^3$. Provide the expression for $F_{U_i|\Theta=\theta}(u_i)$, $i = 1, 2, 3$.

(b) Let $\alpha = 8$. For $\theta = 5$, calculate ...

— ... $F_{U_i|\Theta=\theta}(0.8)$, $i = 1, 2, 3$.

— ... $F_{\underline{U}|\Theta=\theta}(0.8, 0.8, 0.8)$.

(c) Let $\alpha = 8$. Let $\underline{I} = (I_1, I_2, I_3)$, $I_i \sim Bern\,(0.1)$, $i = 1, 2, 3$. Let $I_i = F_{I_i}^{-1}(U_i)$, $i = 1, 2, 3$. Let $N = I_1 + I_2 + I_3$. Use the representation in (24a) for the following sub-questions :

i. ... identify the (conditional) distribution of $(N|\Theta = \theta)$;
ii. ... provide the expressiin of the (conditional) pmf of $(N|\Theta = \theta)$;
iii. ... compute $\Pr(N = k|\Theta = 2)$, $k = 0, 1, 2, 3$.
iv. ... compute $\Pr(N = k|\Theta = 5)$, $k = 0, 1, 2, 3$.
v. ... compute $\Pr(N = k)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

13. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$ where C is the EFGM copula

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2),$$

with $\alpha = 0.8$.
Let $\underline{X} = (X_1, X_2,)$ with

$$F_{X_1}(x_1) = 0.8 + 0.2 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-x_1}\right), \; x_1 \geq 0,$$

adnd

$$F_{X_2}(x_2) = 0.9 + 0.1 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_2}{2}}\right), \; x_2 \geq 0.$$

Also, let $X_i = F_{X_i}^{-1}(U_i)$, $i = 1, 2$.
We define $S = X_1 + X_2$.
Questions :

(a) Calculate $\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0)$
(b) Calculate $\Pr(X_1 \leq 3, X_2 = 0)$.
(c) Calculate $\Pr(X_1 = 0, X_2 \leq 3)$.
(d) Calculate $\Pr(X_1 \leq 3, X_2 \leq 3)$.
(e) Develop the expression for $\overline{F}_{X_1,X_2}$, calculate $E[X_1 X_2]$, and calculate $Cov(X_1, X_2)$.

— There are at least two approaches

— Approach #1 :

$$E[X_1 X_2] = \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

— Approach #2 :

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= E\left[X_1 X_2 \times 1_{\{X_1=0\}} \times 1_{\{X_2=0\}}\right] \\ &\quad + E\left[X_1 X_2 \times 1_{\{X_1=0\}} \times 1_{\{X_2>0\}}\right] \\ &\quad + E\left[X_1 X_2 \times 1_{\{X_1>0\}} \times 1_{\{X_2=0\}}\right] \\ &\quad + E\left[X_1 X_2 \times 1_{\{X_1>0\}} \times 1_{\{X_2>0\}}\right]. \end{aligned}$$

Recall that the joint distribution of (X_1, X_2) is absolutely continuous for $X_1 > 0$ and $X_2 > 0$

(f) Calculate $\Pr(S = 0)$, $E[S]$, $Var(S)$.

(g) Develop the expression for $F_S(x)$, $x \geq 0$. Calculate $F_S(5)$. Hint :

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 + X_2 \leq x) &= E\left[1_{\{X_1+X_2\leq x\}}\right] \\ &= E\left[1_{\{X_1+X_2\leq x\}} \times 1_{\{X_1=0\}} \times 1_{\{X_2=0\}}\right] \\ &\quad +E\left[1_{\{X_1+X_2\leq x\}} \times 1_{\{X_1=0\}} \times 1_{\{X_2>0\}}\right] \\ &\quad +E\left[1_{\{X_1+X_2\leq x\}} \times 1_{\{X_1>0\}} \times 1_{\{X_2=0\}}\right] \\ &\quad +E\left[1_{\{X_1+X_2\leq x\}} \times 1_{\{X_1>0\}} \times 1_{\{X_2>0\}}\right]. \end{aligned}$$

(h) Let $B_1 = (X_1|X_1 > 0)$ and $B_1 = (X_2|X_2 > 0)$. Identify the expression of F_{B_1,B_2}.

14. Soit le copule de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule normale qui est définie par

$$C_\alpha^N(u_1, u_2) = \overline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\right),$$

pour $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$, et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in [-1, 1]$.
On fixe $\alpha = 0.7$.
De plus, $X_1 \sim Pareto(1.9, 900)$ et $X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$.
On définit $S = X_1 + X_2$.
On a produit les réalisations (indépendantes) suivantes d'une loi $Norm(0, 1)$ pour simuler les réalisations de U_1 et U_2 :

j	pour $Z_1^{(j)}$	pour $Z_2^{(j)}$
1	1.41	−0.32
2	1.07	0.98
3	−0.75	1.87

Note : Soit un couple de v.a. indépendantes (W_1, W_2) avec $W_1 \sim Norm(0, 1)$ et $W_2 \sim Norm(0, 1)$.
Questions :

(a) Soit le couple de v.a. (Y_1, Y_2), où $Y_1 = W_1$ et $Y_2 = cW_1 + \sqrt{1 - c^2}W_2$. Montrer que (Y_1, Y_2) obéit à une loi normale standard bivariée avec un coefficient de corrélation de Pearson égal à c.

i. Développer l'expression de la fgm de (W_1, W_2).

ii. Développer l'expression de la fgm de W_1.
iii. Développer l'expression de la fgm de W_2.
iv. Conclure à partir de ces 3 éléments.

(b) Produire les 3 réalisations de (U_1, U_2).
(c) Produire les 3 réalisations de (X_1, X_2).
(d) Produire les 3 réalisations de S.
(e) À partir de ces réalisations, calculer une approximation de $E\left[X_1 \times 1_{\{S>2000\}}\right]$.

15. Soit la v.a. $\Theta \sim Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$ avec
   — $E[\Theta] = \frac{1}{\alpha}$
   — $M_\Theta(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ (fgm)
   — $L_\Theta(t) = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ (transformée de Laplace-Stieltjes)

   Soit un couple de v.a. (Y_1, Y_2) où

$$(Y_1|\Theta = \theta) \sim Exp(\theta)$$

$$(Y_2|\Theta = \theta) \sim Exp(\theta)$$

   sont conditionnellement indépendantes.
   Questions :

   (a) Développer les expressions de

$$\overline{F}_{Y_1}(x_1) = \Pr(Y_1 > x_1)$$

   et

$$\overline{F}_{Y_2}(x_2) = \Pr(Y_2 > x_2).$$

   (b) Développer l'expression de

$$\overline{F}_{Y_1,Y_2}(x_1, x_2) = \Pr(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2).$$

   (c) En invoquant clairement le résultat approprié, identifier la copule de survie de telle sorte

$$\overline{F}_{Y_1,Y_2}(x_1, x_2) = C\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1), \overline{F}_{Y_2}(x_2)\right).$$

   (d) Pour la suite, on appelle la copule de survie C trouvée en (15c) seulement "copule" (on "drop" le terme "de survie").

   i. Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) où
      — $F_{X_1}(x_1) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_1}{100}}$, $x_1 \geq 0$
      — $F_{X_2}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_2}{200}}$, $x_2 \geq 0$

— $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$.

ii. Soit la réalisation $\Theta^{(1)} = 5$ de Θ pour $\alpha = \frac{1}{2}$. Soit la réalisation $\left(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}\right)$ de la paire de v.a. indépendantes de loi uniforme standard (V_1, V_2) : $V_1^{(1)} = 0.32$ et $V_2^{(1)} = 0.81$.

— **Utiliser la méthode de construction de la copule** C pour proposer une méthode de simulation d'une réalisation $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ de la paire (U_1, U_2) dont la fonction de répartition est la copule C.

— Utiliser $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ pour simuler une réalisation $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$ de la paire (X_1, X_2).

16. Soit une paire de v.a. (X_1, X_2) avec

$$X_i \sim Norm(0,1),\ i = 1,2,$$

et

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C_\alpha(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

avec

$$C_\alpha(u_1,u_2) = \alpha \min(u_1,u_2) + (1-\alpha)\max(u_1+u_2-1;0).$$

Questions :

(a) Fournir une interprétation de la loi bivariée définie par cette fonction de répartition.

(b) On définit $S = X_1 + X_2$. En utilisant l'interprétation en (16a), démontrer que l'expression de $F_S(x)$ est donnée par

$$F_S(x) = \begin{cases} \alpha\Phi\left(\frac{x}{2}\right) & ,x < 0 \\ (1-\alpha) + \alpha\Phi\left(\frac{x}{2}\right) & ,x \geq 0 \end{cases},$$

où Φ désigne la fonction de répartition d'une loi normale standard.

(c) Développer (et calculer) la valeur de α de telle sorte que $Cov(X_1, X_2) = 0$.

(d) On fait les calculs suivants avec la valeur de α obtenue en (16c).

i. Faire un graphique des couples de points associés à C_α.

ii. Tracer la courbe de F_S sur un graphique.

iii. Calculer $VaR_{0.01}(S)$ et $VaR_{0.99}(S)$.

17. On considère un vecteur de v.a. (U_1, U_2, U_3) avec

$$U_1 \sim U_2 \sim U_3 \sim Unif(0,1).$$

Soit la v.a. $\Theta \sim Gamma\left(0.25, 1\right)$ avec une fonction de répartition G_{Θ} et une transformée de Laplace-Stieltjes $L_{\Theta}\left(t\right) = E\left[\mathrm{e}^{-t\Theta}\right]$.
L'expression de la fonctiond de répartition conjointe de (U_1, U_2, U_3) est

$$F_{U_1,U_2,U_3}\left(u_1, u_2, u_3\right) = C\left(u_1, u_2, u_3\right).$$

On peut représenter $C\left(u_1, u_2, u_3\right)$ sous la forme

$$C\left(u_1, u_2, u_3\right) = \int_0^{\infty} F_{U_1,U_2,U_3|\Theta=\theta}\left(u_1, u_2, u_3\right) f_{\Theta}\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta.$$

Questions :

(a) Développer l'expression de $F_{U_1,U_2,U_3|\Theta=\theta}\left(u_1, u_2, u_3\right)$.
(b) Développer l'expression de $F_{U_1,U_2,U_3}\left(u_1, u_2, u_3\right)$.
(c) Calculer $\Pr\left(U_1 \leq 0.2, U_2 \leq 0.5, U_3 \leq 0.8 | V = 8\right)$.
(d) Calculer $\Pr\left(U_1 \leq 0.2, U_2 \leq 0.5, U_3 \leq 0.8\right)$.

18. On considère un couple de v.a. (X_1, X_2) obéissant à la loi exponentielle bivariée avec fonction de répartition conjointe

$$F_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right) = 1 - \left(e^{-2x_1} + e^{-2x_2} - e^{-2(x_1+x_2)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

pour $x_1, x_2 \geq 0$ avec marginales

$$F_{X_i}\left(x\right) = 1 - e^{-x_i},$$

pour $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$.
On définit la v.a $S = X_1 + X_2$.
Questions :

(a) Calculer les valeurs de $F_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right)$ pour les cases vides du tableau suivant :

$x_1 \backslash x_2$	1	2	3	4
1	non			
2				
3			non	non
4			non	non

(b) Définition : $A_S^{(l,m)}\left(x\right)$ = approximation de $F_S\left(x\right)$ avec la méthode des rectangles *lower* pour $m \in \mathbb{N}^+$.

i. Calculer $A_S^{(l,1)}\left(4\right)$.
ii. Calculer $A_S^{(l,2)}\left(4\right)$.

(c) Définition : $A_S^{(u,m)}\left(x\right)$ = approximation de $F_S\left(x\right)$ avec la méthode des rectangles *upper* pour $m \in \mathbb{N}^+$.

i. Calculer $A_S^{(u,1)}(4)$.

ii. Calculer $A_S^{(u,2)}(4)$.

(d) Ordonner les valeurs $A_S^{(l,m_1)}(x)$, $A_S^{(u,m_1)}(x)$, $A_S^{(l,m_2)}(x)$, $A_S^{(u,m_2)}(x)$ et $F_S(x)$ pour tout $x \geq 0$ et $1 \leq m_1 < m_2$.

19. Soit un couple de v.a. continues (X_1, X_2) avec $F_{X_1,X_2} \in CF(F_1, F_2)$ (note : $F_{X_1} = F_1$ et $F_{X_2} = F_2$) et

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)), \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Le rho de Spearman est défini par

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho_P(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)) = \rho_P(U_1, U_2) = \rho_S(U_1, U_2),$$

où (U_1, U_2) est un couple de v.a. (dont les marginales sont de loi uniforme standard) avec

$$F_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = C(u_1, u_2), \ u_1, u_2 \in [0, 1].$$

Note : on déduit

$$\rho_S(U_1, U_2) = \frac{E[U_1, U_2] - E[U_1] E[U_2]}{\sqrt{Var(U_1) Var(U_2)}}$$

avec

$$E[U_1, U_2] = \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 c(u_1, u_2) \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2$$

et

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2).$$

Questions :

(a) Démontrer que

$$E[U_1, U_2] = \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2.$$

(b) Démontrer que

$$\rho_S(U_1, U_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2.$$

i. Soit $C = C_\alpha$ où C_α est la copule de Gumbel avec $\alpha \geq 1$. Démontrer que $\rho_S(U_1, U_2) \geq 0$, pour $\alpha \geq 1$.

ii. Soit $C = C_\alpha$ où C_α est la copule de Clayton avec $\alpha \geq 0$. Démontrer que $\rho_S(U_1, U_2) \geq 0$, pour $\alpha \geq 0$.

iii. Soit $C = C_\alpha$ où C_α est la copule de Frank avec $\alpha \geq 0$. Démontrer que $\rho_S(U_1, U_2) \geq 0$, pour $\alpha \geq 0$.

20. Let (Y_1, Y_2) be a pair of positive continuous rvs with a bivariate cdf given by

$$F_{Y_1,Y_2}(x_1, x_2) = 1 - \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + x_1} \right)^{\alpha_1 \theta} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + x_2} \right)^{\alpha_2 \theta} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + x_1} \right)^{\alpha_1 \theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + x_2} \right)^{\alpha_2 \theta} \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

for $x_1, x_2 \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ and $\theta \geq 1$.

Questions :

(a) Find the marginals $F_{Y_1}(x_1)$ and $F_{Y_2}(x_2)$. Identify the marginal distribution of Y_1 and Y_2.

(b) Let $C(u_1, u_2)$ be the copula associated to F_{Y_1,Y_2} such that

$$F_{Y_1,Y_2}(x_1, x_2) = C(F_{Y_1}(x_1), F_{Y_2}(x_2)),$$

for $x_1, x_2 \geq 0$,

(c) Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$. Develop the conditional cdf of U_2 given $U_1 = u_1$ i.e. find the expression of

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \Pr(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1).$$

(d) Let $\underline{X} = (X_1, X_2)$ be a pair of positive continuous rvs with a bivariate cdf given by

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

for $x_1, x_2 \geq 0$, with

$$\begin{aligned} X_1 &\sim LNorm(\mu = \ln(100) - 0.32, 0.8) \\ X_2 &\sim Exp\left(\frac{1}{200}\right). \end{aligned}$$

Let $\theta = 2$.

i. Compute $\Pr(X_1 \leq 200, X_2 > 100)$.

ii. Let 0.76 and 0.83 be two independent sampled values from the standard uniform distribution.

— Use the conditional method to simulate a sampled value of $\underline{U}$.

— Simulate a sampled value of $\underline{X}$.

21. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$ where C is the normal copula

$$C_\alpha^N(u_1, u_2) = \underline{\Phi_\alpha}\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\right),$$

for $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$, with

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

and $\alpha \in [-1, 1]$.
Let (X_1, X_2) a pair of continuous rvs for which the cdf is defined with

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\alpha^N (F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)).$$

Also, $X_1 \sim Pareto\,(1.9, 900)$ et $X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$.
We define $S = X_1 + X_2$.
Let $\alpha = 0.7$.
Let W_1 and W_2 be iid rvs with $W_1 \sim W_2 \sim Norm\,(0, 1)$.
We provide the following sampled values of W_1 and W_2 :

j	$W_1^{(j)}$	$W_2^{(j)}$
1	1.41	−0.32
2	1.07	0.98
3	−0.75	1.87

Questions :

(a) With the sampled values of W_1 and W_2, simulate 3 sampled values of (U_1, U_2).
(b) With the sampled values of (U_1, U_2), simulate 3 sampled values of (X_1, X_2).
(c) With the sampled values of (X_1, X_2), simulate 3 sampled values of S.
(d) With those sampled values, calculate an approximation of $E\left[X_1 \times 1_{\{S>2000\}}\right]$.

22. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$ where C is the normal copula

$$C_\alpha^N(u_1, u_2) = \underline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\right),$$

for $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$, with

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

and $\alpha \in [-1, 1]$.
Let (X_1, X_2) a pair of continuous rvs for which the cdf is defined with

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\alpha^N (F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)).$$

Also, $X_1 \sim Pareto\,(1.9, 900)$ et $X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$.

We define $S = X_1 + X_2$.
Let $\alpha = 0.7$.
Let W_1 and W_2 be iid rvs with $W_1 \sim W_2 \sim Norm\,(0,1)$.
We provide the following sampled values of W_1 and W_2 :

j	$W_1^{(j)}$	$W_2^{(j)}$
1	1.41	−0.32
2	1.07	0.98
3	−0.75	1.87

Questions :

(a) With the sampled values of W_1 and W_2, simulate 3 sampled values of (U_1, U_2).
(b) With the sampled values of (U_1, U_2), simulate 3 sampled values of (X_1, X_2).
(c) With the sampled values of (X_1, X_2), simulate 3 sampled values of S.
(d) With those sampled values, calculate an approximation of $E\left[X_1 \times 1_{\{S>2000\}}\right]$.

23. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$ where C is the AMH copula

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{1 - \alpha(1-u_1)(1-u_2)}, \quad (u_1, u_2) \in [0,1]^2 \quad \text{and} \quad \alpha \in [-1, 1].$$

Questions :

(a) Show that, if $-1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, then

$$C_{\alpha_1}(u_1, u_2) \leq C_{\alpha_2}(u_1, u_2)$$

for any $(u_1, u_2) \in [0,1]^2$.
(b) Let $\alpha = 0.8$. Let 0.91, 0.76, and 0.83 be three independent sampled values from the standard uniform distribution. Use the simulation method for Archimedean copula to simulate a sampled value of $\underline{U}$.
(c) Let $\underline{X} = (X_1, X_2,)$, $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$ and $X_2 \sim LNorm\,(2, 0.9)$. Also, let $X_i = F_{X_i}^{-1}(U_i)$, $i = 1, 2$. Use the sampled value of $\underline{U}$ to simulate a sampled value of $\underline{X}$.

24. Let $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3) \sim C$ where C is the Clayton copula

$$C_\theta(u_1, u_2, u_3) = \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + u_3^{-\alpha} - 2\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad (u_1, u_2, u_3) \in [0,1]^3 \quad \text{and} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Let $\psi(t) = L_\Theta(t) = E\left[\mathrm{e}^{-\Theta t}\right]$, such that

$$C_\theta(u_1, u_2, u_3) = \psi\left(\psi^{-1}(u_1) + \psi^{-1}(u_2) + \psi^{-1}(u_3)\right), \quad (u_1, u_2, u_3) \in [0,1]^3.$$

Questions :

(a) By definition of $L_{\Theta}(t)$, we have

$$
\begin{aligned}
F_{\underline{U}}(u_1,u_2,u_3) &= \int_0^{\infty} F_{\underline{U}|\Theta=\theta}(u_1,u_2,u_3) f_{\Theta}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\infty} F_{U_1|\Theta=\theta}(u_1) F_{U_2|\Theta=\theta}(u_2) F_{U_3|\Theta=\theta}(u_3) f_{\Theta}(\theta)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

for $(u_1,u_2,u_3) \in [0,1]^3$. Provide the expression for $F_{U_i|\Theta=\theta}(u_i)$, $i = 1,2,3$.

(b) Let $\alpha = 8$. For $\theta = 5$, calculate ...

— ... $F_{U_i|\Theta=\theta}(0.8)$, $i = 1,2,3$.

— ... $F_{\underline{U}|\Theta=\theta}(0.8, 0.8, 0.8)$.

(c) Let $\alpha = 8$. Let $\underline{I} = (I_1, I_2, I_3)$, $I_i \sim Bern\,(0.1)$, $i = 1,2,3$. Let $I_i = F_{I_i}^{-1}(U_i)$, $i = 1,2,3$. Let $N = I_1 + I_2 + I_3$. Use the representation in (24a) for the following sub-questions :

i. ... identify the (conditional) distribution of $(N|\Theta = \theta)$;

ii. ... provide the expressiin of the (conditional) pmf of $(N|\Theta = \theta)$;

iii. ... compute $\Pr(N = k|\Theta = 2)$, $k = 0,1,2,3$.

iv. ... compute $\Pr(N = k|\Theta = 5)$, $k = 0,1,2,3$.

v. ... compute $\Pr(N = k)$, $k = 0,1,2,3$.

25. Let $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$ where C is the EFGM copula

$$C_{\alpha}(u_1,u_2) = u_1u_2 + \alpha u_1 u_2 (1-u_1)(1-u_2),$$

with $\alpha = 0.8$.
Let $\underline{X} = (X_1, X_2,)$ with

$$F_{X_1}(x_1) = 0.8 + 0.2 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-x_1}\right), \; x_1 \geq 0,$$

adnd

$$F_{X_2}(x_2) = 0.9 + 0.1 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_2}{2}}\right), \; x_2 \geq 0.$$

Also, let $X_i = F_{X_i}^{-1}(U_i)$, $i = 1,2$.
We define $S = X_1 + X_2$.
Questions :

(a) Calculate $\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0)$

(b) Calculate $\Pr(X_1 \leq 3, X_2 = 0)$.

(c) Calculate $\Pr(X_1 = 0, X_2 \leq 3)$.

(d) Calculate $\Pr(X_1 \leq 3, X_2 \leq 3)$.

(e) Develop the expression for $\overline{F}_{X_1,X_2}$, calculate $E[X_1X_2]$, and calculate $Cov(X_1, X_2)$.

(f) Calculate $\Pr(S=0)$, $E[S]$, $Var(S)$.

(g) Develop the expression for $F_S(x)$, $x \geq 0$. Calculate $F_S(5)$. Hint :

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1+X_2 \leq x) &= E\left[1_{\{X_1+X_2\leq x\}}\right] \\
&= E\left[1_{\{X_1+X_2\leq x\}} \times 1_{\{X_1=0\}} \times 1_{\{X_2=0\}}\right] \\
&\quad +E\left[1_{\{X_1+X_2\leq x\}} \times 1_{\{X_1=0\}} \times 1_{\{X_2>0\}}\right] \\
&\quad +E\left[1_{\{X_1+X_2\leq x\}} \times 1_{\{X_1>0\}} \times 1_{\{X_2=0\}}\right] \\
&\quad +E\left[1_{\{X_1+X_2\leq x\}} \times 1_{\{X_1>0\}} \times 1_{\{X_2>0\}}\right].
\end{aligned}$$

(h) Let $B_1 = (X_1|X_1>0)$ and $B_1 = (X_2|X_2>0)$. Identify the expression of F_{B_1,B_2}.

26. Let C be the EFGM copula. For $U=(U_1,U_2)\sim C$, show that

$$\rho_S(U_1,U_2) = \tfrac{\alpha}{3} \quad \text{and} \quad \tau(U_1,U_2) = \tfrac{2\alpha}{9}.$$

27. Let $\underline{X} = (X_1,X_2)$ be a pair of continuous rvs with cdf

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right).$$

We have the following set of pairs of observations, denoted by $\{(x_{1,j},x_{2,j}), j=1,2,...,5\}$:

j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$
1	10	1701
2	101	8924
3	45	3420
4	34	5061
5	89	2985

Questions :

(a) Compute the empirical estimator $\rho_S(X_1,X_2)$. Answer : 0.6

(b) Compute the empirical estimator $\tau(X_1,X_2)$. Answer : 0.4

28. Let $\underline{X} = (X_1,X_2)$ be a pair of continuous rvs with cdf

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right)$$

with

$$C_\alpha(u_1,u_2) = \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

for $u_i \in [0,1]$, $i=1,2$, $\alpha=8$, and

$$X_1 \sim Beta(2,1) \quad \text{and} \quad X_2 \sim LNorm(\mu = \ln(10)-0.5, \sigma=1).$$

Question : Define the probability of concordance for the pair (X_1,X_2) and compute its value.

29. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule de survie $\overline{C}(u_1, u_2)$ associée à la copule de Clayton $C(u_1, u_2)$ (avec un paramètre de dépendance $\alpha = 5$), une marginale Pareto pour X_1 ($X_1 \sim Pa(2.5, 1.5)$) et une marginale Pareto pour X_2 ($X_2 \sim Pa(2.2, 1.8)$).

    (a) Développer l'expression de la copule de survie $\widehat{C}(u_1, u_2)$ associée à la copule de Clayton.

    (b) Développer l'expression de F_{X_1,X_2}. Calculer $F_{X_1,X_2}(25, 30)$ et $\Pr(X_1 > 25, X_2 > 30)$.

    (c) Développer les expressions de $\widehat{C}_{2|1}(u_1, u_2)$ et de $F_{X_2|X_1=x_1}(x_2)$. Calculer $F_{X_2|X_1=25}(30)$.

    (d) Développer les expressions de $\widehat{c}(u_1, u_2)$ et de f_{X_1,X_2}. Calculer $f_{X_1,X_2}(25, 30)$.

    (e) On définit $S = X_1 + X_2$. Utiliser la méthode des carrés pour évaluer une approximation de $\Pr(S \leq 40)$ avec $n = 20$.

30. Soient la copule de Clayton, la copule de survie associée à la copule de Clayton et la copule de Gumbel dont les paramètres de dépendance sont calculés de telle sorte que le tau de Kendall est de 50 %. Calculer $C(u_1, u_2)$ pour les trois copules ainsi que la copule d'indépendance et la copule borne supérieure de Fréchet en fixant $u_1 = u_2 = 0.99$.

31. Soient les v.a. $X_1 \sim Pa(1.5, 5)$ et $X_2 \sim LN(6, 2^2)$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$. Calculer les valeurs $\underline{VaR}_{\kappa}^{(n)}(S)$ et $\overline{VaR}_{\kappa}^{(n)}(S)$ pour $\kappa = 0.95$ et 0.995 avec $n = 10^6$.

32. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule C, une marginale Pareto pour X_1 ($X_1 \sim Pa(1.5, 15)$) et une marginale Pareto pour X_2 ($X_2 \sim Pa(2.2, 18)$). On définit $S = X_1 + X_2$. Dans les questions suivantes, on considère les copules de Clayton et de Gumbel de telle sorte que le tau de Kendall est de 0.6.

    (a) Calculer $\Pr(X_1 > 100, X_2 > 200)$ et $\Pr(X_1 > 100 | X_2 > 200)$.

    (b) Utiliser la méthode des carrés pour évaluer $\Pr(S \leq 500)$ avec $n = 20$.

33. Soit le couple de v.a. (U_1, U_2) dont la fonction de répartition est définie par la copule de Fréchet avec $\alpha = 1 - \beta$ et les marginales sont de loi uniforme standard. Le paramètre β de la copule est fixé de telle sorte que le coefficient de corrélation de Pearson pour (U_1, U_2) soit nul. Soit le couple de v.a. (V_1, V_2) indépendantes et de loi uniforme standard.

    (a) Calculer la valeur de β.

    (b) Développer l'expression de $F_S(x)$ pour $S = U_1 + U_2$.

    (c) Développer l'expression de $F_T(x)$ pour $T = V_1 + V_2$.

    (d) Comparer les valeurs de F_S et F_T et commenter.

34. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est définie par la copule de Fréchet avec $\alpha = 1 - \beta$ et les marginales sont de loi exponentielle avec paramètre 1. Le paramètre β de la copule est fixé de telle sorte que le coefficient de corrélation de Pearson pour (X_1, X_2) soit nul. Soit le couple de v.a. (Y_1, Y_2) indépendantes et de loi exponentielle avec paramètre 1.
    (a) Calculer la valeur de β.
    (b) Développer l'expression de $F_S(x)$ pour $S = X_1 + X_2$.
    (c) Développer l'expression de $F_T(x)$ pour $T = Y_1 + Y_2$.
    (d) Comparer les valeurs de F_S et F_T et commenter.

2.2 Exercices informatiques

1. On définit la copule de Frank par

$$C_\alpha(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(\mathrm{e}^{-\alpha u_1} - 1)(\mathrm{e}^{-\alpha u_2} - 1)}{(\mathrm{e}^{-\alpha} - 1)}\right)$$

pour $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$.
Soit une paire de v.a. continues (R_1, R_2) où

$$F_{R_1,R_2}(x_1, x_2) = C_\alpha(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

où (ATTENTION AUX VALEURS DES PARAMÈTRES)

$$\begin{aligned} \alpha &= 5 \\ R_1 &\sim Norm\left(\mu_1 = 0.06, \sigma_1^2 = 0.15^2\right) \\ R_2 &\sim Norm\left(\mu_2 = 0.05, \sigma_2^2 = 0.2^2\right). \end{aligned}$$

Soit une paire de v.a. continues (X_1, X_2) où

$$\begin{aligned} X_1 &= 30\mathrm{e}^{R_1} \\ X_2 &= 20\mathrm{e}^{R_2}. \end{aligned}$$

On définit

$$S = X_1 + X_2.$$

Pour faire les calculs, on utilise la méthode de discrétisation *lower* avec un pas de discrétisation $h = 1$ dans le contexte de la théorie des copules.
Notation : On approxime les v.a. X_1, X_2 et S par les v.a. $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$ (définies sur $\{0, 1, 2, ..., m\}$) et $\widetilde{S}$ (définie sur $\{0, 1, 2, ..., 2m\}$) pour $m = 100$.
Questions (expliquer la démarche et indiquer clairement les valeurs demandées) :

(a) On observe que

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right)$$

avec

$$\begin{array}{lll} X_1 & \sim & LNorm\left(\mu = \alpha_1, \sigma = \beta_1\right) \\ X_2 & \sim & LNorm\left(\mu = \alpha_2, \sigma = \beta_2\right). \end{array}$$

Sous-questions :

i. Expliquer quelle est la copule C en indiquant clairement le résultat évoqué de la théorie des copules.

ii. Indiquer clairement les paramètres α_1, α_2, β_1 et β_2.

(b) Méthode *lower* de discrétisation dans le contexte de distribution bivariée.

i. Décrire la méthode.

ii. Donner l'expression pour calculer $f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1,k_2)$, $k_1,k_2 \in \{0,1,2,...,m\}$)

iii. Calculer $f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(30,20)$ et $f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(35,25)$.

(c) Donner les expressions pour calculer $f_{\widetilde{S}}(k)$ et $F_{\widetilde{S}}(k)$, $k \in \{0,1,2,...,2m\}$)

(d) Calculer $F_{\widetilde{S}}(k)$, pour $k = 40$, 60 et 70.

(e) Calculer et comparer $E[S]$ et $E\left[\widetilde{S}\right]$. Ne pas oublier de fournir les expressions pour faire les calculs.

(f) Calculer $VaR_{0.05}\left(\widetilde{S}\right)$ et $VaR_{0.95}\left(\widetilde{S}\right)$.

(g) Calculer $TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ pour $\kappa = 0.95$. Ne pas oublier de fournir l'expression pour calculer $TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$.

2. Soit un couple de v.a. (U_1, U_2) où

$$F_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = C_\alpha(u_1,u_2)$$

est une copule archimédienne. Soit un couple de v.a. (U_1', U_2') où

$$U_1^{'} = 1 - U_1$$

et

$$U_2^{'} = 1 - U_2.$$

Soit les couples de v.a. continues positives (X_1, X_2) et (X_1', X_2') où

$$F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1,F_2) \text{ et } F_{X_1',X_2'} \in \mathcal{CF}(F_1,F_2)$$

avec $F_1(x) = F_2(x)$, $x \geq 0$. De plus, $X_i = F_i^{-1}(U_i)$ et $X_i' = F_i^{-1}(U_i')$, pour $i = 1, 2$.
On définit $S = X_1 + X_2$ et $S' = X_1' + X_2'$.
Pour l'approche Monte-Carlo, on utilise la méthode de simulation propre aux copules archimédiennes. Les calculs sont effectués avec `set.seed(2017)`. Le nombre de réalisations est $m = 1000000$.
Questions :

(a) Développer l'expression de $F_{U_1',U_2'}$ en fonction de $C_\alpha(u_1, u_2)$.

(b) Démontrer que

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\alpha(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

et

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\alpha\left(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)\right)$$

pour x_1, $x_2 \geq 0$.

(c) Soit C_α une copule de Clayton.

— Hypothèse 1 : F_1 et F_2 sont les fonctions de répartition pour une loi gamma avec $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\beta = \frac{1}{4}$.

— Hypothèse 2 : F_1 et F_2 sont les fonctions de répartition pour une loi lognormale avec espérance 1 et variance 4.

Effectuer les calculs suivants pour $\alpha = 5$ et pour les deux hypothèses.

i. Soit

$$\eta_\kappa(X_1, X_2) = \Pr(X_2 \leq VaR_\kappa(X_2) | X_1 \leq VaR_\kappa(X_1))$$

et

$$\gamma_\kappa(X_1, X_2) = \Pr(X_2 > VaR_\kappa(X_2) | X_1 > VaR_\kappa(X_1)).$$

— Calculer les valeurs exactes de $\eta_\kappa(X_1, X_2)$ et $\eta_\kappa(X_1', X_2')$, pour $\kappa = \frac{1}{10^3}$ et $\kappa = \frac{1}{10^6}$.

— Calculer les valeurs exactes de $\gamma_\kappa(X_1, X_2)$ et $\gamma_\kappa(X_1', X_2')$, pour $\kappa = 1 - \frac{1}{10^3}$ et $\kappa = 1 - \frac{1}{10^6}$.

— Interpréter ces valeurs.

ii. Calculer numériquement $\rho_P(U_1, U_2)$ et $\rho_P(U_1', U_2')$.

iii. Calculer numériquement $\rho_P(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1', X_2')$.

iv. Simuler m réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ de (U_1, U_2).

v. Avec les réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$, produire m réalisations $\left(U_1'^{(j)}, U_2'^{(j)}\right)$ de (U_1', U_2').

vi. Avec les réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ et $\left(U_1^{\prime(j)}, U_2^{\prime(j)}\right)$, produire m réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ de (X_1, X_2) et $\left(X_1^{\prime(j)}, X_2^{\prime(j)}\right)$ de (X_1', X_2').

vii. Avec les réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ et $\left(X_1^{\prime(j)}, X_2^{\prime(j)}\right)$, produire m réalisations $S^{(j)}$ de S et $S^{\prime(j)}$ de S'.

viii. Avec les réalisations $S^{(j)}$et $S^{\prime(j)}$, calculer les approximations de $VaR_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(S')$, $TVaR_\kappa(S)$, $TVaR_\kappa(S')$, pour $\kappa = 0.9$, 0.99, 0.999, 0.9999.

Effectuer les calculs suivants pour les deux hypothèses et pour α tel que $\rho_P(X_1, X_2) = \rho_P(X_1', X_2') = 0.5$.

i. Évaluer numériquement les 4 valeurs possibles du paramètres α.

ii. Simuler m réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ de (U_1, U_2).

iii. Avec les réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$, produire m réalisations $\left(U_1^{\prime(j)}, U_2^{\prime(j)}\right)$ de (U_1', U_2').

iv. Avec les réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ et $\left(U_1^{\prime(j)}, U_2^{\prime(j)}\right)$, produire m réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ de (X_1, X_2) et $\left(X_1^{\prime(j)}, X_2^{\prime(j)}\right)$ de (X_1', X_2').

v. Avec les réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ et $\left(X_1^{\prime(j)}, X_2^{\prime(j)}\right)$, produire m réalisations $S^{(j)}$ de S et $S^{\prime(j)}$ de S'.

vi. Avec les réalisations $S^{(j)}$et $S^{\prime(j)}$, calculer les approximations de $VaR_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(S')$, $TVaR_\kappa(S)$, $TVaR_\kappa(S')$, pour $\kappa = 0.9$, 0.99, 0.999, 0.9999.

(d) Refaire (2c) pour la copule de Frank.

(e) Refaire (2c) pour la copule de Gumbel.

3. Soit les vecteurs v.a. continues positives $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ et $\underline{X}' = (X_1', ..., X_n')$ où

$$F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, ..., F_n) \text{ et } F_{\underline{X}'} \in \mathcal{CF}(F_1, ..., F_n)$$

avec $F_i(x) = F(x)$, $x \geq 0$. On définit

$$F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = C_\alpha(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$$

et

$$\overline{F}_{\underline{X}'}(x_1, ..., x_n) = C_\alpha\left(\overline{F}_1(x_1), ..., \overline{F}_n(x_n)\right),$$

où C_α est une copule archimédienne.
On définit $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $W_n' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i'$.
Hypothèses pour F :

— Hypothèse 1 : $F(x) = 1 - \exp(-x)$, $x \geq 0$.

— Hypothèse 2 : $F(x) = 1 - \left(\frac{1.5}{1.5+x}\right)^{2.5}$, $x \geq 0$.

— Hypothèse 3 : $F(x) = 1 - \left(\frac{0.5}{0.5+x}\right)^{1.5}$, $x \geq 0$.

Pour l'approche Monte-Carlo, on utilise la méthode de simulation propre aux copules archimédiennes. Les calculs sont effectués avec `set.seed(2017)`. Le nombre de réalisations est $m = 1000000$.
Questions pour les Hypothèses 1, 2 et 3 à $n = 10^j$, pour $j = 2, 4, 6$:

(a) Calculer la valeur exacte $E[W_n]$ et $E[W'_n]$.
(b) Si possible, évaluer approximativement $\sqrt{Var(W_n)}$.
(c) Évaluer approximativement $\Pr\left(W_n > F^{-1}(\kappa)\right)$, à $\kappa = 1 - \frac{1}{10^l}$ pour $l = 2, 4, 6$.
(d) Évaluer approximativement $\Pr\left(W'_n > F^{-1}(\kappa)\right)$, à $\kappa = 1 - \frac{1}{10^l}$ pour $l = 2, 4, 6$.
(e) Évaluer approximativement $VaR_\kappa(W_n)$ et $VaR_\kappa(W'_n)$, à $\kappa = 1 - \frac{1}{10^l}$ pour $l = 2, 4, 6$.
(f) Évaluer approximativement $TVaR_\kappa(W_n)$ et $TVaR_\kappa(W'_n)$, à $\kappa = 1 - \frac{1}{10^l}$ pour $l = 2, 4, 6$.
(g) Interpréter les résultats.

4. Soit un couple de v.a. $\left(U_1^{(\alpha,\beta)}, U_2^{(\alpha,\beta)}\right)$ avec

$$F_{U_1^{(\alpha,\beta)}, U_2^{(\alpha,\beta)}}(u_1, u_2) = C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2), \ u_1, u_2 \in [0,1],$$

et $C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2)$ est la copule de Fréchet

$$C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \alpha C^+(u_1, u_2) + \beta C^-(u_1, u_2) + (1 - \alpha - \beta) C^\perp(u_1, u_2), \ u_1, u_2 \in [0,1],$$

pour $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1]$, et $\alpha + \beta \leq 1$.
On définit $T^{(\alpha,\beta)} = U_1^{(\alpha,\beta)} + U_2^{(\alpha,\beta)}$.
Soit le couple de v.a. continues $\left(X_1^{(\alpha,\beta)}, X_2^{(\alpha,\beta)}\right)$ dont les fonctions de répartition marginales sont F_1 et F_2 et dont la représentation est définie par

$$X_1^{(\alpha,\beta)} = F_1^{-1}\left(U_1^{(\alpha,\beta)}\right) \text{ et } X_2^{(\alpha,\beta)} = F_2^{-1}\left(U_2^{(\alpha,\beta)}\right).$$

On définit $S^{(\alpha,\beta)} = X_1^{(\alpha,\beta)} + X_2^{(\alpha,\beta)}$.
Questions :

(a) Démontrer que

$$\rho_S\left(U_1^{(\alpha,\beta)}, U_2^{(\alpha,\beta)}\right) = \alpha - \beta.$$

Suggestion : conditionner.

(b) Développer l'expression de $F_{T^{(\alpha,\beta)}}$.

(c) Développer l'expression de $\rho_S\left(X_1^{(\alpha,\beta)}, X_2^{(\alpha,\beta)}\right)$.

(d) Soit $F_1 = F_2 = F$ avec $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, $x \geq 0$.

i. Développer l'expression de $F_{S^{(\alpha,\beta)}}(x)$.

ii. Tracer et comparer les courbes de $F_{S^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}}(x)$ et $F_{S^{(0,0)}}(x)$.

iii. Quelle est la structure de dépendance associée à $\left(X_1^{(0,0)}, X_2^{(0,0)}\right)$?

iv. Quelle est la valeur de $\rho_S\left(X_1^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}, X_2^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\right)$ et celle de $\rho_S\left(X_1^{(0,0)}, X_2^{(0,0)}\right)$?

v. Utiliser l'optimisation numérique pour calculer $VaR_\kappa\left(S^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\right)$ et $TVaR_\kappa\left(S^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\right)$ pour $\kappa = 0.01$ et $\kappa = 0.99$.

(e) Soit $F_1 = F_2 = F$ avec $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, $x \geq 0$.

i. On sait que $\rho_P\left(X_1^{(1,0)}, X_2^{(1,0)}\right) = 1$ et $\rho_P\left(X_1^{(0,1)}, X_2^{(0,1)}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{6}$. Développer l'expression de α de telle sorte que $\rho_P\left(X_1^{(\alpha,1-\alpha)}, X_2^{(\alpha,1-\alpha)}\right) = 0$.

ii. Développer l'expression de $F_{S^{(\alpha,1-\alpha)}}(x)$.

iii. Tracer et comparer les courbes de $F_{S^{(\alpha,1-\alpha)}}(x)$ et $F_{S^{(0,0)}}(x)$.

iv. Quelle est la structure de dépendance associée à $\left(X_1^{(0,0)}, X_2^{(0,0)}\right)$?

v. Utiliser l'optimisation numérique pour calculer $VaR_\kappa\left(S^{(\alpha,1-\alpha)}\right)$ et $TVaR_\kappa\left(S^{(\alpha,1-\alpha)}\right)$ pour $\kappa = 0.01$ et $\kappa = 0.99$.

(f) Soit F_i la fonction de répartition d'une loi lognormale de paramètres (μ_i, σ_i), $i = 1, 2$.

i. Développer les expressions de $\rho_P\left(X_1^{(1,0)}, X_2^{(1,0)}\right) = 1$ et $\rho_P\left(X_1^{(0,1)}, X_2^{(0,1)}\right)$.

ii. Développer l'expression de α de telle sorte que $\rho_P\left(X_1^{(\alpha,1-\alpha)}, X_2^{(\alpha,1-\alpha)}\right) = 0$.

iii. Développer l'expression de $F_{S^{(\alpha,1-\alpha)}}(x)$.

iv. Tracer la courbe de $F_{S^{(\alpha,1-\alpha)}}(x)$ avec

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = \ln(10) - \frac{\sigma}{2}$$

et

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 1.$$

Utiliser l'optimisation numérique pour calculer $VaR_{\kappa}\left(S^{(\alpha,1-\alpha)}\right)$ et $TVaR_{\kappa}\left(S^{(\alpha,1-\alpha)}\right)$ pour $\kappa = 0.01$ et $\kappa = 0.99$.

5. Soit une v.a. discrète $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ avec $\Pr(\Theta = \theta_j) = \frac{1}{4}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Soit un couple de v.a. $\left(U_1^{(\alpha)}, U_2^{(\alpha)}\right)$ avec

$$F_{U_1^{(\alpha)},U_2^{(\alpha)}}(u_1, u_2) = C_{\alpha}(u_1, u_2), \; u_1, u_2 \in [0, 1],$$

et $C_{\alpha}(u_1, u_2)$ est une copule avec un paramètre de dépendance α.
La v.a. Θ et le couple $\left(U_1^{(\alpha)}, U_2^{(\alpha)}\right)$ sont indépendants. On définit le couple de v.a. $\left(W_1^{(\alpha)}, W_2^{(\alpha)}\right)$ de telle sorte que

$$\left(\left(W_1^{(\alpha)}, W_2^{(\alpha)}\right)|\Theta = \theta_j\right) = \begin{cases} W_1^{(\alpha)} = U_1^{(\alpha)} \text{ et } W_2^{(\alpha)} = U_2^{(\alpha)} & , \; j = 1 \\ W_1^{(\alpha)} = U_1^{(\alpha)} \text{ et } W_2^{(\alpha)} = 1 - U_2^{(\alpha)} & , \; j = 2 \\ W_1^{(\alpha)} = 1 - U_1^{(\alpha)} \text{ et } W_2^{(\alpha)} = U_2^{(\alpha)} & , \; j = 3 \\ W_1^{(\alpha)} = 1 - U_1^{(\alpha)} \text{ et } W_2^{(\alpha)} = 1 - U_2^{(\alpha)} & , \; j = 4 \end{cases}.$$

On définit $T^{(\alpha)} = W_1^{(\alpha)} + W_2^{(\alpha)}$.
Soit le couple de v.a. continues $\left(X_1^{(\alpha)}, X_2^{(\alpha)}\right)$ dont les fonctions de répartition marginales sont F_1 et F_2 et dont la représentation est définie par

$$X_1^{(\alpha)} = F_1^{-1}\left(W_1^{(\alpha)}\right) \text{ et } X_2^{(\alpha)} = F_2^{-1}\left(W_2^{(\alpha)}\right).$$

On définit $S^{(\alpha)} = X_1^{(\alpha)} + X_2^{(\alpha)}$.
Questions :

(a) Développer l'expression de $F_{W_1^{(\alpha)},W_2^{(\alpha)}}(u_1, u_2) = C_{\alpha}^{inc}(u_1, u_2)$, $u_1, u_2 \in [0, 1]$.

(b) Développer l'expression de $F_{X_1^{(\alpha)},X_2^{(\alpha)}}$.

(c) Développer l'expression de $\rho_S\left(X_1^{(\alpha)}, X_2^{(\alpha)}\right)$.

(d) On a recours à la simulation Monte Carlo pour effectuer les calculs suivants, avec un nombre $m = 1000000$ de réalisations (`set.seed(2017)`). On simule le vecteur $\left(\Theta^{(j)}, U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$, pour $j = 1, 2, ..., m$.

— On choisit la copule de Clayton, avec $\alpha = 5$.

— H1 : $F_1 = F_2 = F$ où F est la fonction de répartition d'une loi normale ($\mu = 0$, $\sigma = 1$).

— H2 : $F_1 = F_2 = F$ où F est la fonction de répartition d'une loi lognormale ($\mu = -\frac{1}{2}$, $\sigma = 1$)..

— H3 : $F_1 = F_2 = F$ où F est la fonction de répartition d'une loi exponentielle ($\beta = 1$).

— H3 : $F_1 = F_2 = F$ où F est la fonction de répartition d'une loi Pareto ($\alpha = 2.5$, $\lambda = 1.5$).

Questions (pour H1, H2, H3, H4) :

i. Tracer la courbe de $F_{T^{(\alpha)}}$. Comparer avec la courbe correspondante en supposant les v.a. indépendantes.
ii. Tracer la courbe de $F_{S^{(\alpha)}}$. Comparer avec la courbe correspondante en supposant les v.a. indépendantes.
iii. Calculer $VaR_\kappa\left(S^{(\alpha)}\right)$ et $TVaR_\kappa\left(S^{(\alpha)}\right)$, $\kappa = \frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1000}$.

6. Let $\underline{X} = (X_1, X_2)$ be a pair of continuous rvs with cdf

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right),$$

where

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2)$$

We have the following set of pairs of observations, denoted by $\{(x_{1,j}, x_{2,j}), j = 1, 2, ..., 5\}$:

— values of $x_{1,j}$ $(j = 1, ..., 5)$: 543 275 38 584 150

— values of $x_{2,j}$ $(j = 1, ..., 5)$: 1509 1613 2130 4002 7366

Questions :

(a) Compute the empirical estimator $\rho_S(X_1, X_2)$. Answer : 0.2

(b) Compute the empirical estimator $\tau(X_1, X_2)$. Answer : 0.2

(c) We apply the semi-parametric method of estimation in order to estimate the dependence parameter α of the copula.

i. Derive the expression of $l(\alpha)$, the log-likelihood function, with the set of 5 pairs of observations.
ii. Calculate $l(-0.5)$. Answer : 0.1267064
iii. Calculate $l(0.5)$. Answer : -0.19552

7. Let $\underline{X} = (X_1, X_2)$ be a pair of continuous rvs with cdf

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right)$$

We have a set of 1000 pairs of observations. We assume that

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2)$$

and

$$X_1 \sim Exp(\beta) \quad \text{and} \quad X_2 \sim Norm\left(\mu, \sigma^2\right).$$

We apply the semi-parametric method of estimation. The parameters of the marginal distributions are estimated using the ML method esimation method.

The following values have been computed :

— log-likelihood function $l(\alpha)$, for $\alpha = -1, -0.9, ...0, 0.1, ..., 1$:

$>$ -149.134 -118.265 -94.852 -75.665 -59.449 -45.535 -33.511 -23.106

$>$ -14.133 -6.460 0.000 5.305 9.483 12.534 14.430 15.103

$>$ 14.432 12.210 8.053 1.112 -13.259

— score function $\frac{\mathrm{d}l(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$, for $\alpha = -1, -0.9, ...0, 0.1, ..., 1$:

$>$ 374.567 262.592 210.107 175.582 149.806 129.145 111.774 96.635

$>$ 83.050 70.544 58.756 47.389 36.169 24.813 12.992 0.271

$>$ -14.015 -31.037 -53.362 -89.316 -360.775

— empiral mean and unadjusted sample empiral variance of the observation of X_1 :

$>$ 303 and 94596

— empiral mean and unadjusted sample empiral variance of X_2 :

$>$ 2000 and 164932

Questions :

(a) Using the provided values and linear interpolation, compute the estimator $\widehat{\alpha}$ and the value of the log-likelihood function at that value.

(b) Using the provided values, compute the ML estimators of β, μ et σ.

(c) Using your results, calcule an estimation of $F_{X_1,X_2}(500, 2500)$.

Bibliographie

[Cossette, 2017] Cossette, H., M. E. (2017). *Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.* Document de référence.

[Marceau, 2013] Marceau, É. (2013). *Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat : modèles sur une période.* Springer.