3) (10 punti) Sia data la forma differenziale
$\omega = \left(\dfrac{-(y-1)}{x^2+y^2-4x-2y+5}+y\right)dx+\left(\dfrac{x-2}{x^2+y^2-4x-2y+5}-x\right)dy$. Sia $\underline{\gamma}$ la curva percorsa interamente una volta in senso antiorario il cui sostegno ha equazione $x^2/9+y^2/16=1$. Si calcoli
$\oint_{\underline{\gamma}} \omega$

3) Scriviamo la forma come

$$\omega = \left(\frac{-(y-1)}{x^2+y^2-4x-2y+5}dx+\frac{x-2}{x^2+y^2-4x-2y+5}dy\right)+(ydx-xdy) \doteq \omega_1+\omega_2$$

ω_1 è definita dappertutto tranne nel punto $P\equiv(2,1)$ ed è chiusa ma non esatta. Il cammino racchiude P e per il Lemma di Gauss–Green l'integrale è lo stesso se integrassimo su una circonferenza centrata in P ottenendo 2π (**non zero**. Per calcolare $\oint_{\underline{\gamma}}(ydx-xdy)$ scriviamo $\underline{\gamma}(t)=(3\cos t, 4\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$ da cui l'integrale pari a -24π e il risultato è -22π.

Errori comuni Scriviamo la forma come $\omega = A(x,y)dx+B(x,y)dy$. **Non** si può procedere nel seguente modo usando erroneamente il Lemma di Gauss–Green

$$\oint_{\underline{\gamma}}\omega = \iint_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1}(B_x-A_y)dxdy = \iint_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1}(-2)dxdy = -24\pi$$

in quanto A e B non sono definite in $(2,1)$ che sta **dentro** il cammino di integrazione.

---

3) (10 punti) Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2-4x+4}dx+\dfrac{3x^2+3y^2-11x+10}{x^2+y^2-4x+4}dy$.
Sia inoltre dato l'insieme $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon x^2/9+y^2=1,\ x\ge 0\}$ e sia $\underline{\gamma}(t)$ una curva regolare semplice il cui sostegno è S e percorsa nel verso che va dalle y negative alle y positive. Calcolare
$\int_{\underline{\gamma}}\omega$

3) Si può risolvere in molti modi. Il più semplice probabilmente è il seguente. La forma è definita dappertutto tranne in $(2,0)$ ed è chiusa. sia $\underline{\sigma}(t)=(0,-t)$, $-1\le t\le 1$. La curva $\gamma\cup\sigma$ è chiusa. Detta $\underline{\rho}(t)=(2+\frac{\cos t}{2},\frac{\sin t}{2})$, per il Lemma di Gauss–Green $\oint_{\underline{\gamma\cup\sigma}}\omega=\oint_{\underline{\rho}}\omega=2\pi$ (sulla curva ρ si esegue il calcolo esplicitamente) da cui $\oint_{\underline{\gamma}}\omega = 2\pi-\oint_{\underline{\sigma}}\omega = 2\pi+\int_{-1}^{1}\frac{3t^2+10}{t^2+4}dt = \pi+6+2\arctan 2$

Seconda soluzione Se disegnamo una "salsiccia" a forma di $\supset$ intorno alla curva $\underline{\gamma}$ che non tocca la curva e non contiene all'interno il punto $(2,0)$, tale insieme è semplicemente connesso e quindi la forma ivi definita è esatta e quindi si può definire il potenziale.

$$\overline{U}(x,y)=\int\frac{-y}{(x-2)^2+y^2}dx+c(y) = -\arctan\frac{x-2}{y}+c(y)$$

e viene fuori che $c(y)=3y$. Il potenziale definito dentro la "salsiccia" è

$$U(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{x-2}{-y}+3y, & y>0\\ -\pi+\arctan\dfrac{x-2}{-y}+3y, & y<0\\ -\pi/2 & y=0\end{cases}$$

Bisognerebbe verificare che la funzione $U(x,y)$ e C^1 sul semipiano destro. Il risultato è $U(0,1)-U(0,-1)=\arctan 2+3-(-\pi+\arctan(-2)-3)=6+\pi+2\arctan 2$

3) (7.5 punti) Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{2x^2+2xy+4x^2y^2+4xy^3+y^4}{(2x+y)^2}dx - \frac{x^2(1+4x^2+4xy+y^2)}{(2x+y)^2}dy \doteq A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

(non chiusa, $A_y - B_x = 2x+2y$). Si calcoli l'integrale curvilineo esteso alla curva $\underline{\gamma}$ percorsa una sola volta in senso antiorario il cui sostegno ha equazione $x^2-4x+y^2=-3$

Detta $A(x,y)dx+B(x,y)dy = \omega$ la forma si verifica che $A_y - B_x = 2x+2y$ per cui $(A-y^2)_y = (B+x^2)_x$ per cui la forma $\omega' = (A-y^2)dx - (B+x^2)dy$ è chiusa. La curva giace nella parte di piano $x \geq 1$ e non si verifica mai $y+2x=0$. Basta mostrare che la distanza fra il centro della circonferenza e la retta $y+2x=0$ è maggiore del raggio 1 ed essendo $\sqrt{8-8/\sqrt{5}} > 1$ l'integrale curvilineo è ben definito e la curva giace in un sottoinsieme semplicemente connesso del piano; la forma ω' è esatta.

Prima soluzione Calcoliamo il potenziale $U(x,y)$ di ω'

$$B+x^2 = \frac{-x^2}{(2x+y)^2} \to U(x,y) = \int \frac{-x^2 dy}{(2x+y)^2} = \frac{x^2}{(2x+y)} + Q(x)$$

$$U_x = \frac{2x(2x+y)-2x^2}{(2x+y)^2} + Q'(x) = A - y^2 = \frac{2x^2+2xy}{(2x+y)^2} \implies Q'(x) = 0$$

e quindi $U(x,y) = x^2/(2x+y)$. Sappiamo che

$$U_x = A - y^2, \qquad U_y = B + x^2$$

$$\oint_{\underline{\gamma}} \omega = \oint_{\underline{\gamma}} (Adx+Bdy) = \oint_{\underline{\gamma}} (U_x+y^2)dx + (U_y - x^2)dy = \oint_{\underline{\gamma}} (y^2dx - x^2dy) =$$

$x = 2+\cos t,\ y = \sin t$ da cui

$$\int_0^{2\pi} (-S^3 - (4+4C+C^2)C)dt = \int_0^{2\pi} \left[-S(1-C^2) - 4C - 4C^2 + C(1-S^2)\right] dt = -4\pi$$

Seconda soluzione Applichiamo Gauss-Green

$$\oint (Adx+Bdy) = \iint (B_x - A_y)dx\,dy = \iint (-2x-2y)dx\,dy = \int_0^1 drr \int_0^{2\pi} (-2(2+rC)-2rS)dt = -4\pi$$

e infatti

$$\iint (-2x-2y)dx\,dy = \oint (y^2dx - x^2dy)$$

4) (7.5) Sia data la forma differenziale

$\omega = \dfrac{xy^2(2-xy^2)}{(-1+xy^2)^2}dx + \dfrac{x^2(2y+1-2xy^2+x^2y^4)}{(-1+xy^2)^2}dy$. Calcolare $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}(t) = (t, \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi/6$.

Mostrare che l'integrale curvilineo è ben definito fa parte dell'esercizio

La curva su cui integrare non incontra mai il grafico della funzione $y = 1/\sqrt{x}$ altrimenti l'integrale non è definito. La dimostrazione dopo.

Scriviamo la forma come $A(x,y)dx + B(x,y)dy$ e osserviamo che $A_y - B_x = -2x$ da cui $A_y - (B-x^2)_x = 0$ e quindi la forma $Adx + (B-x^2)dy$ è esatta giacendo la curva in un semplicemente connesso.

$$\int \frac{xy^2(2-xy^2)}{(1-xy^2)^2}dx = \int \left[\frac{xy^2-1}{(1-xy^2)^2} + \frac{1}{(1-xy^2)^2} + \frac{xy^2(1-xy^2)}{(1-xy^2)^2}\right]dx =$$
$$= \int \left[\frac{-1}{1-xy^2} + \frac{1}{(1-xy^2)^2} + \frac{xy^2}{1-xy^2}\right]dx = \int \left[\frac{1}{(1-xy^2)^2} - 1\right]dx = \frac{1}{y^2(1-xy^2)} - x + c(y) =$$
$$= \frac{1}{y^2} + \frac{x}{1-xy^2} - x + c(y)$$

Deriviamo rispetto a y e otteniamo

$$\frac{-2}{y^3} + \frac{2x^2y}{(1-xy^2)^2} + c'(y) = \frac{x^2(2y+1-2xy^2+x^2y^4)}{(-1+xy^2)^2} - x^2 = \frac{2x^2y}{(-1+xy^2)^2} \implies c(y) = \frac{-1}{y^2}$$

e quindi il potenziale della forma differenziale $Adx + (B-x^2)dy$ è $\dfrac{x}{1-xy^2} - x = \dfrac{x^2y^2}{1-xy^2} \doteq U(x,y)$ e quindi $Adx + Bdy = \left(\dfrac{x^2y^2}{1-xy^2}\right)_x dx + \left(\dfrac{x^2y^2}{1-xy^2}\right)_y dy + x^2dy$. L'integrale curvilineo

è ora facilmente calcolabile.

$$U(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}) - U(0,1) + \int_{\underline{\gamma}} x^2dy = \frac{\pi^2}{6(8-\pi)} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{72} - \sqrt{3} + 2,$$