Trovare la trasf di Fourier che soddisfa questa condizione,

$$t\,x(t) + x'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

Faccio trasformata da tutti e due i lati

$$\frac{1}{(-i2\pi)}\frac{dX(f)}{df} + (i2\pi f)X(f) = (i2\pi f)$$

Moltiplico per $-i2\pi$

$$\frac{dX(f)}{df} + (4\pi^2 f)X(f) = 4\pi^2 f$$

Questa è un eq diff lineare del primo ordine

Per un'equazione del tipo: $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$ le soluz. sono:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx + K\right]$$

$$X(f) = e^{-\int 4\pi^2 f\,df}\left[\int 4\pi^2 f\,e^{\int 4\pi^2 f\,df}df + K\right]$$

$$= e^{-2\pi f^2}\left[2\pi^2 f\,e^{2\pi f^2} + K\right]$$

$$= 2\pi^2 f + K e^{-2\pi f^2}$$

Trovare la trasf. di Fourier di:

$$x(t) = t^{-\frac{1}{2}}$$

La trasformata esiste perché assolutamente integrabile

Derivo a destra e a sinistra

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}}$$

Moltiplico entrambi i lati per t per ritrovare $x(t)$

$$t \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$$

$$t \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{2} x(t)$$

Applico la trasformata

$$\frac{1}{(-\cancel{i2\pi})} \frac{d}{df}\left[\cancel{i2\pi} f X(f)\right] = +\frac{1}{2} X(f)$$

$$\frac{d}{df}\left[f X(f)\right] = \frac{1}{2} X(f)$$

$$X(f) + f \frac{dX(f)}{df} = \frac{1}{2} X(f)$$

$$f \frac{dX(f)}{df} = -\frac{1}{2} X(f)$$

Variabili separabili

$$\frac{dX(f)}{X(f)} = -\frac{1}{2} \frac{df}{f}$$

$$\ln(X(f)) = -\frac{1}{2} \ln f + c$$

$$X(f) = \frac{K}{\sqrt{f}}$$

Generalmente nelle tracce c'è un "suggerimento" per trovare K.

[1

$$x(t) = \frac{1}{t^2+1} \qquad t > 0$$

$$h(t) = t \qquad 0 < t < 3$$

Conviene risolverlo nel dominio del tempo.

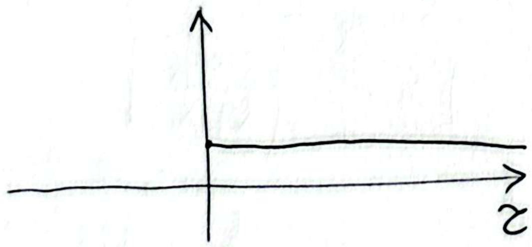
$$y(t) = \int x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Calcolo la primitiva di

$$y(t) = \int_a^b \frac{1}{\tau^2+1}(t-\tau)\, d\tau$$

$$\int \frac{t}{\tau^2+1} d\tau - \int \frac{\tau}{\tau^2+1} d\tau = t \arctan \tau - \frac{1}{2} \ln(\tau^2+1)$$

Ora trovo gli estremi di integrazione

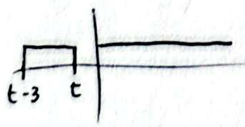


$x(\tau)$ è definita per $\tau > 0$

$h(t-\tau)$ è definita così: $0 < t-\tau < 3 \longrightarrow t-3 < \tau < t$

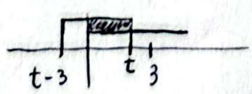
Ora considero i casi:

Se $t < 0$



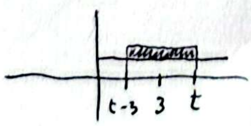
No parti in comune, $y = 0$

Se $0 < t < 3$



In questo caso $\int_0^t$ → Fai i conti

Se $t > 3$



In questo caso $\int_{t-3}^{t}$ → Fai i conti

Trovare la trasformata di Fourier di

$$x(t) = \frac{1}{t^2+1} \quad \forall t$$

Ci ricordiamo che $\beta e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+4\pi^2 f^2}$, per dualità $\beta e^{-\alpha|f|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+4\pi^2 t^2}$

Prendo $\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+4\pi^2 t^2}$ e divido num. e den. per $4\pi^2$.

$$\frac{\frac{2\alpha\beta}{4\pi^2}}{\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2+t^2}$$

. A questo punto impongo che $\frac{\alpha}{2\pi}=1 \longrightarrow \alpha = 2\pi$.

$$\frac{\frac{4\pi\beta}{4\pi^2}}{1+t^2}$$

. Ora impongo che $\frac{\beta}{\pi} = 1 \longrightarrow \beta = \pi$

Quindi trovo $\pi e^{-2\pi|f|}$

Un canale trasmissivo in banda traslata, con banda netta 20 MHz ha un rapporto segnale rumore di 28 dB. Con modulazione PSK/QAM qual è il massimo bit rate possibile? Con $P_{bit} = 10^{-6}$.

Supponiamo che con una 2PSK $\frac{S}{N} = \frac{E_b}{n_0}$ dato che $h = 1$

2 PSK $\frac{E_b}{n_0} = \frac{S}{N} = 28$ dB 10,5 dB

$\frac{E_b}{n_0}$ minimo

4 PSK $\frac{E_b}{n_0} = \frac{S}{N2}$ = 3 dB in meno = 25 dB 10,5

16 QAM $\frac{E_b}{n_0} = \frac{S}{N4}$ = 6 db in meno = 22 dB 14,5 dB

64 QAM $\frac{E_b}{n_0} = \frac{S}{N6} =$ 20.3 dB 19 dB

Abbiamo trovato, se andassimo avanti "scavalcherebbe".
Ora moltiplico la banda minima per 6 bit/simbolo e ottengo 120 Mbps.

$$6 \ \frac{\text{bit}}{\text{simbolo}} \cdot 20 \text{ MHz} = 120 \text{ Mbps}$$

Su una banda traslata 10 MHz si vogliono trasmettere 48 Mbps.
Quale deve essere il massimo valore del ROLLOFF e il minimo valore del rapporto $\frac{S}{N}$? Per $P_b = 10^{-8}$?

Sappiamo che $B_{eff} = B_{min}(1+\rho)$.

Notiamo che con 10 MHz e 4 bit/simbolo al massimo arriviamo a 40 Mbps. (Se Rolloff fosse 0)

Quindi passiamo a 6 bit/simbolo.

Per trasmettere 48 Mbps avrei bisogno di una banda pari a $\frac{48}{6}$ MHz $= 8$ MHz.

Quindi $B_m = 8$ MHz

$$B_{eff} = B_{min}(1+\rho)$$

$$10 = 8(1+\rho)$$

$$10 = 8 + 8\rho$$

$$18 = 8\rho$$

$$\rho = \frac{18}{8}$$

A questo punto $P_b \simeq \dfrac{2 \cdot e^{-\frac{\gamma}{7}}}{3 \cdot 3\pi} = 10^{-8}$

Ora ricavo γ.

Dopodiché sappiamo che $\frac{S}{N} = \frac{E_b}{N_0} \cdot h$ con $h = 6$.

E trovo $\frac{S}{N}$.

Sistema radio con banda minima 1 MHz ha in ricezione $\frac{S}{N} = 500$ 7

Determinare massimo bit rate ricevibile con $P_{bit} = 10^{-6}$.

Si prendono le varie modulazioni e si vede $\frac{E_b}{N_0}$

2 PSK $\frac{E_b}{N_0} = 500 = 27\ dB$ Per avere 10^{-6} ho bisogno di 10.5 dB

4 PSK $\frac{E_b}{N_0} = 24\ dB$ Sempre 10.5 dB

16 QAM $\frac{E_b}{N_0} = 21\ dB$ Solo a 14.5 dB

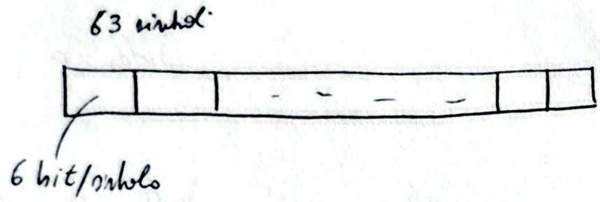
64 QAM $\frac{E_b}{N_0} = 19,5\ dB$ Solo a 19,5 dB

Uso quindi la 64QAM, 6 bit/simbolo.

Massimo bit rate $= 1\ MHz \cdot 6$ bit/simbolo $= 6$ Mbps

Un sistema a banda traslata usa 64QAM con una prob. di errore di simbolo di 10^{-3}. Ha 64 valori.
A parità di modulazione, banda del sistema, ed R_b, si usa un codice di REED SOLOMON che corregge 3 errori.
Qual è la nuova P_s?

Il nostro codice ha 64 valori, 6 bit/simbolo.
Quindi parole di 63 simboli, ciascuno con 6 bit/simbolo.



Deve correggere 3 errori, quindi ha bisogno di 6 simboli.

$$(63, 57, 3)$$

$$1 - P_p = \sum_{k=0}^{3} \binom{63}{k} P_s^k (1-P_s)^{63-k}$$

Da qui trovo P_p. con $P_s = 10^{-3}$

$$P_s = \frac{d}{63} \cdot P_p$$

Trovo d: $\longrightarrow$ $\frac{d_{min} - 1}{2} = 3$ errori $\longrightarrow$ $d = 7$

E ho fatto

Il segnale $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ è modulato di frequenza, determinare la fase del segnale modulato.

Sappiamo che la freq. istantanea è $f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt}$

Quindi

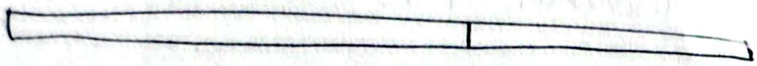
$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varphi(t) = 2\pi\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\pi \operatorname{arctg} t + C$$

Un sistema di trasmissione antipodale invia su un canale Trame da 2500 byte con $P_b = 10^{-5}$ in assenza di codifica. Successivamente si decide che un campo di 1300 byte della trama deve essere protetto e si adotta un codice BCH $(15, \overset{5}{\cancel{15}})$ che corregge 3 errori.

Qual è la probabilità di errore di bit su quel campo con lo stesso canale?

20000 bit



(15, 5, 3) significa che per ogni 5 bit di informazione si mandano 15 bit totali. Quindi $1300 \cdot 3 = 3900$ byte

3900 byte protetti dal codice

1200 byte non protetti

In totale 5100 byte.

Quindi ho aumentato il rate.

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)' = \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{2500}{5100}$$

Per calcolare $\frac{E_b}{N_0}$ vecchio $10^{-5} \simeq \frac{e^{-\gamma}}{3\pi}$. Ricavo γ.

antipodale

Metto γ qui

Ricavo nuovo γ.

Ricavo nuova P_{bit}

$$1 - P_p = \sum_{k=0}^{3} \binom{15}{k} (10^{-x})^k (1-10^{-x})^{15-k}$$

Ora $P_b = \frac{d\,P_p}{15}$

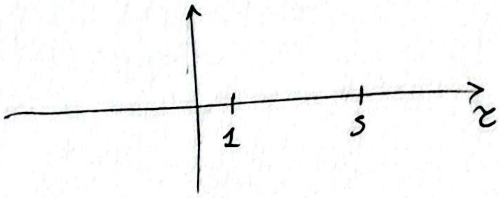
$h(t) = \log(t+1) \qquad 1<t<5$

$x(t) = \dfrac{1}{t^2} \qquad t>4$

$$y(t) = \int_a^b \frac{1}{(t-\tau)^2} \log(\tau+1)\, d\tau$$

Faccio i vari casi

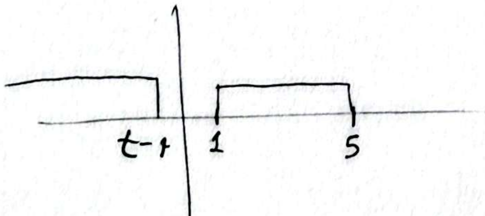
Per quanto riguarda $h(t)$, il suo argomento è τ, che è compreso fra 1 e 5.



Per $x(t)$ è cambiato, ora è $t-\tau$.

$t-\tau>4$

$\tau<t-4$



Se $t-4<1$ non c'è intersezione, $\longrightarrow$ Se $t<5$ $y=0$

Se $1<t-4<5$, quindi se $5<t<9$ i limiti sono $\int_1^{t-4}$

Se $t-4>5$, quindi $t>9$, i limiti sono $\int_1^5$

Faccio la primitiva ... ——.

Il risultato sarebbe così:

Per $t<5$ $\quad y(t)=0$

Per $5<t<9$ $\quad y(t)=\dots$

Per $t>9$ $\quad y(t)=\dots$

Per un segnale modulato, il segnale informativo è $\frac{1}{1+t^2}$, determinare il relativo inviluppo complesso, in caso di modulazione di frequenza.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt}$$

Il segnale deve esser scritto $\cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)]$

$$\cos[2\pi f_0 t + 2\pi \operatorname{arctg} t]$$

sarebbe come dire $e^{i2\pi \operatorname{arctg} t}$

Calcola trasf. Fourier.

$$x(t) = e^{i \operatorname{arctg} t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{1+t^2} e^{i \operatorname{arctg} t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{1+t^2} x(t)$$