



**INSA**

INSTITUT NATIONAL  
DES SCIENCES  
APPLIQUÉES  
LYON

# INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

3ÈME ANNÉE BIOINFORMATIQUE ET MODÉLISATION

PROFESSEUR : LAURENT PUJO MENJOUET

---

## Analyse numérique Équation Différentielles

---

*Auteur :*

Hanâ Lbath

Émilie Mathian

Année 2017 - 2018

## Table des matières

1	Questions théoriques	2
2	Exercice 1 Problème raide	9
3	Exercice 2 : Etude de l'erreur relative	14
4	Exercice 3 : Comparaison entre plusieurs modèles	18
5	Exercice 4 : Proie-Prédateur	29
6	Exercice 5 - Un peu de bifurcation	39
7	Exercice 6 - Matlab et les problèmes raides	48
8	Annexes	51

# 1 Questions théoriques

## Problématique

Dans cette section nous considérerons le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} x'(t) = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction Lipschitzienne et donc satisfaisant les propriétés d'existence et d'unicité des solutions. Cette fonction est définie sur un intervalle  $T \in \mathbb{R}$ , tel que  $X \in [t_0; t_0 + T]$ . Résoudre une telle équation, revient à chercher toutes les fonctions  $x$  sur un intervalle  $T$  de  $\mathbb{R}$ , vérifiant cette équation différentielle sur  $T$ . Ceci suppose que l'on soit capable d'intégrer cette fonction.

Si nous ne pouvons pas calculer explicitement l'intégrale de  $f$ , alors nous pouvons tenter d'approcher les solutions du problème de Cauchy  $(\mathcal{C})$ . Pour cela nous discrétisons l'intervalle  $[t_0; t_0 + T]$  tel que :

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n$$

Ainsi nous cherchons à définir les  $X_0, X_1, \dots, X_n$  tels que pour tout  $i=0, \dots, N$  ;  $X_i$  approchent  $X(t_i)$ . On notera ainsi  $X_i$  les solutions approchées et les  $X(t_i)$  les solutions réelles. De plus on pose  $h_i = t_i - t_{i+1}$ , où  $h$  représente un pas de temps. Ainsi on subdivise l'intervalle de temps  $T$  en  $n$  intervalle  $h$  égaux. On a donc  $h = \frac{T}{n}$ .

Pour approcher les solutions  $X_i$  l'idée est d'intégrer les deux membres de notre équation différentielle entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  tel que :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} X'(s) ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, X(s)) ds$$

On peut définir un schéma explicite à un pas :

Un schéma explicite à un pas apportant une solution au problème de Cauchy définit ci-dessus s'écrit de la forme :

$$\begin{cases} x_{n+1} = X_n + h\Phi(t_n, X_n, h) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Un tel schéma est dit explicite à un pas car  $x_{n+1}$  est défini par le calcul du pas précédent c'est à dire  $x_n$ . Par ailleurs la fonction  $\Phi(t_n, X_n, h)$  dépend du schéma choisi. Pour un schéma d'Euler explicite  $\Phi(t_n, X_n, h) = f(t_n, X_n)$

Un schéma doit permettre d'approcher au mieux les valeurs  $X(t_i)$  par les valeurs  $X_i$ . Pour cela on définit les critères de consistance de stabilité et de convergence d'un schéma.

## Notion de consistance et d'ordre de consistance

On définit l'erreur de consistance telle que :

Erreur de consistance noté  $\tau$  :

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + h\Phi(t_n, X_n, h) + \tau_{n+1}$$

Cette erreur peut être interprétée comme l'écart entre la valeur  $X(t_{n+1})$  et  $X(t_n)$ , si on suppose que le pas précédent  $X(t_n)$  n'est pas approximé.

Un problème de Cauchy sera dit consistant si et seulement si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N |\tau_n(h)| = 0$$

On définit également l'ordre de consistance. On dit qu'un schéma explicite à un pas est consistant d'ordre  $P$  avec le problème de Cauchy s'il existe un réel  $K > 0$  tel que :

$$\sum_{n=1}^N |\tau_n(h)| \leq Kh^P$$

Cette notion d'ordre de consistance est essentielle, en effet si un schéma est convergent<sup>1</sup>, l'ordre de consistance nous permet de déduire la vitesse à laquelle, les solutions approximées convergent vers les solutions réelles.

On définit alors l'ordre de consistance tel que :

Pour toute fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^P$  un schéma explicite à un pas est consistant d'ordre au moins  $p$  avec le problème de Cauchy si et seulement si :

$$\Phi(t, x, 0) = f(t, x) \rightarrow \text{Ordre } 1$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \Phi(t, x, 0) = \frac{1}{2} Df(t, x) \rightarrow \text{Ordre } 2$$

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial h^{p-1}} \Phi(t, x, 0) = \frac{1}{p} D^{p-1} f(t, x) \rightarrow \text{Ordre } p$$

Nous démontrerons ce résultat

1. D'après le théorème de Lax un schéma est convergent s'il est stable et consistant.

## Question 1 : Démonstration des ordres de consistance pour un schéma explicite à un pas

On considère le problème de Cauchy (C) tel que :

$$(C) \begin{cases} x'(t) = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

et un schéma explicite à un pas définit précédemment tel que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = X_n + h\Phi(t_n, X_n, h) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Ainsi la fonction

$$\Phi(t_n, X_n, h) = f(t_n, X_n) \quad (1)$$

### a) Démonstration de l'ordre 1 de consistance

Supposons que  $\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$ .

Montrons que (C) est consistant d'ordre au moins 1.

Soit  $N \in \mathbb{N}$ , posons  $h = \frac{T}{N}$ . Notons que  $h = t_{n+1} - t_n$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$x \in \mathcal{C}^1$ , donc :

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) - x(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(u) \, du \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u, x(u)) \, du \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(u, x(u), 0) \, du \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(h) &= x(t_{n+1}) - x(t_n) - h \phi(t_n, x(t_n), h) \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(u, x(u), 0) \, du - h \phi(t_n, x(t_n), h) \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(u, x(u), 0) \, du - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(t_n, x(t_n), h) \, du \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(u, x(u), 0) - \phi(t_n, x(t_n), h) \, du \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u, x(u)) - \phi(t_n, x(t_n), h) \, du \end{aligned}$$

Or, d'une part,  $\phi$  est continue.

Donc  $\phi(t_n, x(t_n), h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \phi(t_n, x(t_n), 0) = f(t_n, x(t_n))$ .

Donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 > 0 / \forall |h| \leq \eta_1, |\phi(t_n, x(t_n), h) - f(t_n, x(t_n))| \leq \varepsilon$

D'autre part,  $f$  est lipschitzienne, donc uniformément continue.

Donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2 > 0 / \forall u, t \in I, |(u, x(u)) - (t, x(t))| \leq \eta_2 \Rightarrow |f(u, x(u)) - f(t, x(t))| \leq \varepsilon$

Soit  $\varepsilon > 0, h \leq \min(\eta_1, \eta_2)$ . Alors :

$$\begin{aligned} |\tau_{n+1}| &= \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u, x(u)) - f(t_n, x(t_n)) - [\phi(t_n, x(t_n), h) - f(t_n, x(t_n))] du \right| \\ &\leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} |f(u, x(u)) - f(t_n, x(t_n))| du + \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\phi(t_n, x(t_n), h) - f(t_n, x(t_n))| du \\ &\leq h\varepsilon + h\varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon h \end{aligned}$$

Donc,  $\sum_{n=1}^N |\tau_{n+1}| \leq \sum_{n=1}^N 2\varepsilon h = (2N\varepsilon)h = 2\varepsilon T$

d'où,  $\sum_{n=1}^N |\tau_{n+1}| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Donc  $(C)$  est consistant d'ordre au moins 1.

## b) Forme explicite de $D^2 f(t, x)$

Ainsi lorsque le pas de temps  $h=0$  :

$$\begin{aligned} D^2 f(t, x) &= D(Df(t, x)) \\ &= D\left[1 \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + f(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}\right] \\ &= D\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) + Df(t, x) \frac{\partial f}{\partial x} + f(t, x) D \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

Or

$$Df(t, x) = 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + f(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}$$

et

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 1 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + f(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$$

et

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 1 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + f(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} D^2 f(t, x) &= 1 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + f(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + f(t, x) \left(1 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + f(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} + f(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{aligned}$$

### c) Démonstration de la consistance dans le cas général

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , posons  $H_p : \text{''}\frac{\partial^{p-1}\phi}{\partial h^{p-1}}(t, x, 0) = \frac{1}{p} D^{p-1} f(t, x)\text{''}$ .

Supposons, pour tout  $k \leq p-1$ ,  $H_k$  (hypothèse de récurrence).

Montrons  $H_p$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$x \in \mathcal{C}^p([t_n, t_{n+1}])$  et  $x \in \mathcal{D}^{p+1}(]t_n, t_{n+1}[)$ . Donc, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe  $c_n \in ]t_n, t_{n+1}[$  tel que :

$$x(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^p \frac{(t_{n+1} - t_n)^k}{k!} \cdot x^{(k)}(t_n) + \frac{(t_{n+1} - t_n)^{p+1}}{(p+1)!} \cdot x^{(p+1)}(c_n)$$

On remarque que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $x^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, x)$ . D'où :

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \sum_{k=1}^p \frac{h^k}{k!} \cdot f^{(k-1)}(t_n, x(t_n)) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \cdot f^{(p)}(c_n, x(c_n)) \quad (-4)$$

En outre,  $\phi$  est  $\mathcal{C}^{p-1}$  par rapport à sa troisième variable sur  $[0, h]$  et  $x$  est  $\mathcal{D}^p$  par rapport à sa troisième variable sur  $]0, h[$ . Donc, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe  $d_n \in ]0, h[$  tel que :

$$\phi(t_n, x(t_n), h) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \phi}{\partial h^k}(t_n, x(t_n), 0) + \frac{h^p}{p!} \cdot \frac{\partial^p \phi}{\partial h^p}(t_n, x(t_n), d_n) \quad (-4)$$

Or,  $\tau_{n+1}(h) = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h \phi(t_n, x(t_n), h)$ . Donc, d'après (1) et (1) :

$$\begin{aligned}\tau_{n+1}(h) &= \sum_{k=1}^p \frac{h^k}{k!} \cdot f^{(k-1)}(t_n, x(t_n)) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \cdot f^{(p)}(c_n, x(c_n)) \\ &\quad - h \left[ \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \phi}{\partial h^k}(t_n, x(t_n), 0) + \frac{h^p}{p!} \cdot \frac{\partial^p \phi}{\partial h^p}(t_n, x(t_n), d_n) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h^{k+1}}{k!} \left( \frac{1}{k+1} \cdot f^{(k)}(t_n, x(t_n)) - \frac{\partial^k \phi}{\partial h^k}(t_n, x(t_n), 0) \right) \\ &\quad + \frac{h^{p+1}}{p!} \left( \frac{1}{p+1} \cdot f^{(p)}(c_n, x(c_n)) - \frac{\partial^p \phi}{\partial h^p}(t_n, x(t_n), d_n) \right)\end{aligned}$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{h^{p+1}}{p!} \left( \frac{1}{p+1} \cdot f^{(p)}(c_n, x(c_n)) - \frac{\partial^p \phi}{\partial h^p}(t_n, x(t_n), d_n) \right)$$

D'où, sur un compact :

$$|\tau_{n+1}(h)| \leq h^{p+1} \left( \frac{1}{(p+1)!} \|f^{(p)}\|_{\infty} + \frac{1}{p!} \left\| \frac{\partial^p \phi}{\partial h^p} \right\|_{\infty} \right)$$

Donc avec  $N = \frac{T}{h}$ ,



$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |\tau_n(h)| &= \sum_{n=0}^{N-1} |\tau_{n+1}(h)| \\ &\leq N.h^{p+1} \left( \frac{1}{(p+1)!} \|f^{(p)}\|_{\infty} + \frac{1}{p!} \left\| \frac{\partial^p \phi}{\partial h^p} \right\|_{\infty} \right) \\ &\leq T. \left( \frac{1}{(p+1)!} \|f^{(p)}\|_{\infty} + \frac{1}{p!} \left\| \frac{\partial^p \phi}{\partial h^p} \right\|_{\infty} \right) .h^p \end{aligned}$$

Donc ce schéma explicite est consistant d'ordre au moins p.

## Question 2

Un schéma de Runge-Kutta à s-stages explicite est donné par le système suivant, avec  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et  $x_0$  donné :

$$(RK) \begin{cases} X_i = x_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_n + c_j h, X_j) \text{ avec } i \in \llbracket 1, s \rrbracket \\ x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i h, X_i) \end{cases}$$

Soit  $t \in I, x \in \mathcal{C}^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^n)$

D'après la question 1 :

un schéma de Runge-Kutta à s-stages, explicite à un pas est consistant d'ordre au moins 2 si et seulement si  $\frac{\partial \phi}{\partial h}(t, x, 0) = \frac{1}{2} Df(t, x)$  (1)

Donc, en posant  $a = t + c_i h$  et en remarquant que si  $h = 0$ ,  $a=t$  et  $X_i = x$  :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^s b_i \left[ c_i \cdot \frac{\partial f}{\partial a}(a, X_i) + \frac{\partial f}{\partial X_i}(a, X_i) \cdot \frac{dX_i}{dh} \right] = \frac{1}{2} Df(t, x) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^s b_i \left[ c_i \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \cdot \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t, x) \right) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + f(t, x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2} \text{ et } \sum_{i=1}^s b_i \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 2 Exercice 1 Problème raide

Soit le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} u'(t) = -150u(t) + 30 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

### 1 Solutions exactes du problème $\mathcal{C}$

a. Soit l'équation :

$$u'(t) + 150u(t) = 30 \quad (1)$$

(1) est une équation linéaire d'ordre 1 telle que :

$$a(t)u'(t) + b(t)u = d(t)$$

où  $a(t)=1$ ,  $b(t)=150$  et  $d(t)=30$ .  $a$ , et  $b$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . On multiplie chaque membre de (1) par :

$$e^{\int_0^t b(s) ds} = e^{\int_0^t 150 ds} = e^{150t}$$

(1) peut alors s'écrire telle que :

$$(e^{(150t)}.u(t))' = 30e^{(150t)}$$

On intègre chaque membre entre 0 et  $t$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} e^{(150t)}u(t) &= u(0) + \int_0^t 30.e^{(150s)}ds \\ u(t) &= e^{-150t} \left[ 1 + \frac{30}{150}e^{(150t)} - \frac{30}{150} \right] \\ u(t) &= \frac{4}{5}e^{-150t} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ainsi sur  $I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u : t \rightarrow \frac{4}{5}e^{-150t} + \frac{1}{5}$  est solution du problème de Cauchy ( $\mathcal{C}$ .)

b. On calcul à présent la limite de  $u$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4}{5}e^{-150t} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

## 2. Schéma d'Euler explicite

Un schéma d'Euler explicite d'un problème de Cauchy est défini tel que :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + hf(t, U_n) \\ U(0) = 1 \end{cases}$$

Or la fonction  $f(t, U_n) = -150U_n + 30$ , ainsi on en déduit  $U_{n+1}$  telle que :

$$U_{n+1} = U_n - 150U_nh + 30h$$

On définit la suite  $V_n$  telle que :

$$\begin{cases} V_n = U_n - \frac{1}{5} \\ V_0 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

ainsi  $V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{1}{5}$  et donc :

$$V_{n+1} = U_n - 150U_nh + 30h - \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} V_{n+1} = U_n - 150U_nh + 30h - \frac{1}{5} \\ = (1 - 150h)(U_n - \frac{1}{5}) \end{cases}$$

$V_n$  est donc une suite géométrique de raison  $q = 1 - 150h$  et de premier terme  $V_0 = \frac{4}{5}$ . On peut ainsi exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$  et de  $h$ . En effet  $U_n = V_n + \frac{1}{5}$ .  $U_n$  peut donc s'écrire comme :

$$U_n = \frac{4}{5}(1 - 150h)^n + \frac{1}{5}$$

En posant  $h = \frac{1}{50}$ ,  $U_n$  s'écrit comme

$$U_n = \frac{4}{5}(-2)^n$$

.

Nous cherchons à présent la limite de cette suite lorsque  $n$  tend vers l'infini :

Si  $n$  est pair :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} = +\infty$$

Si  $n$  est impair :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} = -\infty$$

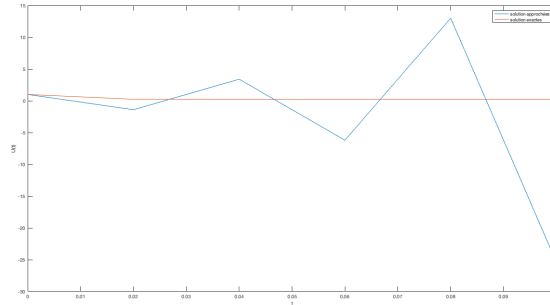


FIGURE 1 – Variation de  $U$  en fonction du temps : solution exacte (rouge), solution approchée par un schéma explicite d'Euler (bleu)

La figure 1 correspond à l'exécution du programme correspondant à la méthode d'Euler explicite (Cf : Annexe - programme exercice 1 ) simultanément à celui de la solution exacte du problème de Cauchy considéré.

### 3. Schéma d'Euler implicite

a. schéma d'Euler implicite du problème de Cauchy ( $\mathcal{C}$ ) se définit tel que :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + hf(t_{n+1}, U_{n+1}) \\ U(0) = 1 \end{cases}$$

où  $f : t, u \rightarrow -150u + 30$ . Ainsi on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$U_{n+1} = \frac{1}{1+150h}U_n + \frac{30h}{1+150h}$$

b. On considère la suite  $(V_n)_n$  définit précédemment et donc :

$$V_{n+1} = \frac{1}{1+150h}U_n + \frac{30h}{1+150h} - \frac{1}{5}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{1+150h}(U_n - \frac{1}{5})$$

c.  $(V_n)_n$  est donc une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{1+150h}$ , ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = V_0 \left( \frac{1}{1+150h} \right)^n = \frac{4}{5} \left( \frac{1}{1+150h} \right)^n$$

Or  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = V_n + \frac{1}{5}$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{4}{5} \left( \frac{1}{1 + 150h} \right)^n + \frac{1}{5}$$

Si on pose  $h = \frac{1}{50}$  alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{4}{5} \left( \frac{1}{4} \right)^n + \frac{1}{5}$$

. **d.** On peut définir la limite de ce schéma lorsque  $n$  tend vers l'infini, on calcul ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{5}$$

**e.**

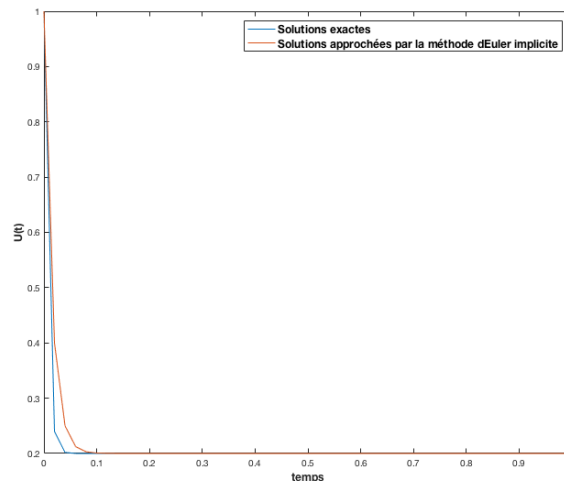


FIGURE 2 – Variation de  $U$  en fonction du temps : solution exacte (rouge) , solution approchée par un schéma implicite d'Euler (bleu) (Cf :programme en annexe - Exercice 1)

**f.** Les problèmes raides sont caractérisés par des régions où localement la constante de Lipschitz ( $L$ ) est très grande, ici lorsque  $t \rightarrow 0$ . Nous introduisons donc une nouvelle notion de stabilité, la  $a$ -stabilité testé par le test linéaire standard (TLS) :

$$\begin{cases} U' = -LU, & L > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

La solution du TLS est donc  $U(t) = U_0 e^{-Lt}$  pour  $t \in [0, T]$ .

Ainsi on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| = |-Lx + Ly| = L|x - y|$$

On dit alors qu'un schéma est a-stable si et seulement si ce schéma appliqué au TLS donne une solution  $U_n \rightarrow 0$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , quelque soit  $L > 0$  et quelque soit le pas  $h$  choisi.

Pour le schéma d'Euler explicite on définit  $f : U \rightarrow -LX$  avec  $L > 0$  soit :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n - hLU_n = U_n(1 - hL), & L > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

En exprimant  $U_n$  en fonction de  $n$  on a :

$$\begin{aligned} U_0 &= U_0(1 - hL) \\ U_1 &= U_0(1 - hL)^2 \\ U_3 &= U_0(1 - hL)^3 \\ &\dots \\ U_n &= U_0(1 - hL)^n \end{aligned}$$

D'après la définition de la a-stabilité le schéma est a-stable si  $U_n \rightarrow 0 \quad \forall L > 0$  et  $\forall h$ ; or  $U_n \rightarrow 0$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} ||1 - hL|| &< 1 \\ \Rightarrow 2 &> hL > 0 \\ \Rightarrow \frac{2}{L} &> h > 0 \end{aligned}$$

Ainsi lorsque  $L \rightarrow +\infty$ ,  $h$  doit diminuer. En conclusion le schéma explicite d'Euler n'est pas a-stable.

Pour le schéma d'Euler implicite on définit de la même manière  $f : U \rightarrow -LX$ , et on test ce schéma par rapport au TLS on a donc :

$$\begin{cases} f(t, U) = -LU, & L > 0 \\ U_{n+1} = U_n - hLU_{n+1} \\ U_{n+1}(1 + Lh) = U_n \end{cases}$$

En exprimant  $U_n$  en fonction de  $n$  on a :

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 \frac{1}{1+Lh} \\ U_2 &= U_1 \left( \frac{1}{1+Lh} \right)^2 \\ U_3 &= U_2 \left( \frac{1}{1+Lh} \right)^3 \\ &\vdots \\ U_{n+1} &= U_n \left( \frac{1}{1+Lh} \right)^n \end{aligned}$$

Ainsi  $U_n \rightarrow 0$  si :

$$\left\| \frac{1}{1+Lh} \right\| < 1$$

Or  $1+Lh > 1$  donc  $\frac{1}{1+Lh} < 1$ ,  $\forall h > 0$  et  $\forall L > 0$ . Ainsi  $U_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Nous concluons donc que le schéma d'Euler implicite est a-stable.

Grâce à cette propriété nous pouvons expliquer la convergence du modèle implicite observée [fig.2], à contrario du modèle explicite [fig.1]

### 3 Exercice 2 : Etude de l'erreur relative

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(C_2) \begin{cases} y'(t) = 4e^{0.8t} - 0.5y(t) \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad (\mathcal{E}_2)$$

#### 1. Résolution explicite du problème de Cauchy $\mathcal{C}_2$

On considère l'équation  $(\mathcal{E}_2)$  qui est une équation linéaire telle que :

$$a(t)y' + b(t)y = d(t)$$

Où  $a(t)=1$ ,  $b(t)=0.5$  et  $d(t)=4e^{0.8t}$ . Cette EDO linéaire non homogène est définie sur un intervalle  $t = [0, 4]$ . On multiplie chaque membre de l'équation par :

$$e^{\int_0^t b(s)ds} = e^{\int_0^t 0.5ds} = e^{0.5t}$$

On a alors :

$$\left( e^{0.5t} y(t) \right)' = 4e^{1.3t}$$

On intègre entre 0 et t et on obtient :

$$\begin{aligned} e^{0.5t}y(t) - 2 &= \int_0^t 4e^{1.3s} ds \\ y(t) &= e^{-0.5t} \left[ 2 + \frac{4}{1.3}e^{1.3t} - \frac{4}{1.3} \right] \\ y(t) &= -\frac{1.4}{1.3}e^{-0.5t} + \frac{4}{1.3}e^{0.8t} \end{aligned}$$

Ainsi  $y(t) = -\frac{1.4}{1.3}e^{-0.5t} + \frac{4}{1.3}e^{0.8t}$  est solution de l'EDO  $(\mathcal{E}_2) \forall t \in \mathbb{R}$ . Afin de vérifier l'existence et l'unicité des solutions nous devons nous assurer que la fonction  $f(t, y) = 4e^{0.8t} - 0.5y(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Cette fonction est en effet continue sur  $\mathbb{R}$  et dont la dérivée par rapport à y est :

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = 3.2e^{0.8t}$$

Celle ci est donc définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi nous pouvons conclure que cette fonction est de classe  $(\mathcal{C}^1)$ . Elle est donc Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable sur au voisinage de  $(t_0, y_0)$  c'est à dire qu'il existe une constante  $L > 0$  tel que :

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y||$$

Le théorème d'existence et d'unicité des solutions peut donc s'appliquer à notre problème de Cauchy.

## 2. Convergence et ordre de convergence du problème de Cauchy $\mathcal{C}_2$ par un schéma explicite d'Euler

Le schéma explicite d'Euler de notre problème peut s'écrire telle que :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(4e^{0.8t_n} - 0.5y_n) \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Ce système est consistant d'ordre au moins 1 si :

$$\Phi(t_n, y_n, 0) = f(t, y)$$

Selon notre équation  $\Phi(t_n, y_n, h) = e^{0.8t_n} - 0.5y_n$  ;  $\Phi$  ne dépend donc pas de h et nous avons bien :

$$\Phi(t_n, y_n, 0) = 4e^{0.8t_n} - 0.5y_n \quad \text{où} \quad f(t, y) = 4e^{0.8t_n} - 0.5y_n$$

Nous conclure que notre schéma est consistant d'ordre au moins 1. Pour vérifier s'il est consistant d'ordre au moins 2 nous devons nous assurer que

$$\frac{\partial \Phi(t_n, y_n, 0)}{\partial h} = \frac{1}{2}Df(t, y)$$



Calculons à présent  $\frac{1}{2}Df(t, y)$  :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Df(t, y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f(t, y)\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(4 \times 0.8e^{0.8t}\right) - 0.5(4e^{0.8t} - 0.5y) \\ &= 0.6e^{0.8t} + 0.125y\end{aligned}$$

Or  $\frac{\partial \Phi(t_n, y_n, 0)}{\partial h} = 0$ . De ce fait notre schéma explicite d'Euler est consistant d'ordre au moins 1 seulement. Nous pouvons généraliser notre conclusion en constatant que  $(\frac{\partial f}{\partial t} + f(t, y)\frac{\partial f}{\partial y}) \neq 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}^2$  sauf si  $f(t, y) = 0$ .

Nous intéressons à présent à la stabilité de ce schéma explicite d'Euler. Rappelons qu'un schéma est stable si  $\forall t \in [t_0; t_0 + T]$  pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  avec  $h < T$ , il existe un réel strictement positif  $L$  tel que :

$$\|\Phi(t, x, h) - \Phi(t, y, h)\| \leq L\|x - y\|$$

Or dans le cadre d'un schéma explicite d'Euler  $\Phi(t, x, h) = f(t, x)$  et  $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$ . Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}\|\Phi(t, x, h) - \Phi(t, y, h)\| &\leq L\|x - y\| \\ \|f(t, x) - f(t, y)\| &\leq L\|x - y\|\end{aligned}$$

Nous avons démontré précédemment que la fonction  $f(t, y)$  est localement Lipschitzienne. Nous pouvons ainsi conclure qu'un schéma explicite d'Euler est consistant d'ordre 1 et stable. D'après le théorème de Lax ceci implique que ce schéma est convergent d'ordre 1.

### 3. Étude de l'erreur relative

Nous calculons les valeurs exactes et approchées par le schéma d'Euler explicite du problème de Cauchy  $\mathcal{C}^2$ , pour  $t$  allant de 0 à 4 avec un pas de 1. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

t	Valeurs exactes	Valeurs approchées	Erreur relative %
0	2	2	0
1	6.1946	5	19.29
2	14.8439	11.4022	23.19
3	33.6772	25.5132	24.24
4	75.3399	56.8493	24.22

TABLE 1 – L'erreur relative est ici en pourcentage et approximée à  $10^{-2}$  selon la formule :  $\left| \frac{ValeurExacte - ValeurApprochée}{ValeurExacte} \right| \times 100$

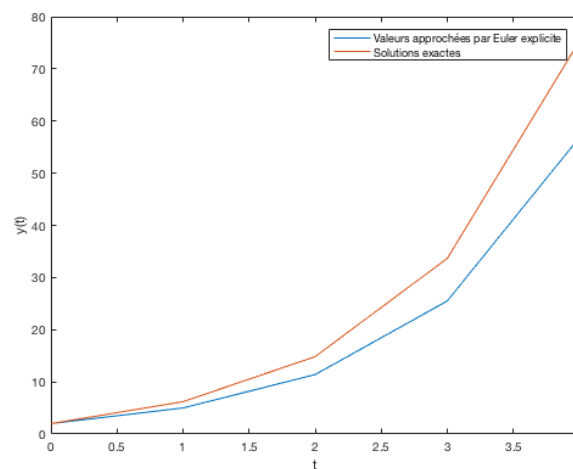


FIGURE 3 – Représentation des valeurs exactes (rouge) et des valeur approchées par un schéma d'Euler explicite (bleu)

Sur ce graphique L'écart entre la solution exacte et la solution approchée par le schéma d'Euler explicite croît avec le temps

## 4 Exercice 3 : Comparaison entre plusieurs modèles

Soit le problème de Cauchy :

$$(C_3) \begin{cases} x'(t) = -tx & (E_3) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

### 1. Solutions exactes du problème de Cauchy $(C_3)$

On considère le problème de Cauchy :  $(E_3)$  est une équation linéaire homogène telle que :

$$a(t)x' + b(t)x = 0$$

où  $a(t) = 1$  et  $b(t) = t$ , deux fonctions continues sur un intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

On multiplie chaque membre par :

$$e^{\int_0^t b(s)ds} = e^{\int_0^t s} = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$(E_3)$  s'écrit alors telle que  $\left(e^{\frac{1}{2}t^2}x(t)\right)' = 0$ . En intégrant chaque membre entre 0 et  $t$  on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}t^2}x(t) - x_0 &= 0 \\ x(t) &= x_0 e^{-\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

$\left(e^{-\frac{1}{2}t^2}, I\right)$  est une solution globale dans  $\mathbb{R}$  car  $a(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

### 2. Existence et unicité des solutions

Pour prouver l'existence et l'unicité des solutions du problème de Cauchy  $(C_3)$  nous devons montrer que  $f : t \rightarrow x'(t) = -tx$  est une fonction de classe  $C^1$  :

- $f(t, x) = -tx$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ;
- $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = -t$ , la fonction  $f(t, x)$  est donc dérivable par rapport à sa variable  $x$  ;
- la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

La fonction  $f(t, x)$  est donc de classe  $C^1$ . On en déduit que  $f$  est localement Lipschitzienne au voisinage de  $(t_0, x_0)$  par rapport à sa seconde variable. D'après le théorème de Cauchy Lipschitz, les solutions de  $(C^3)$  existent et sont uniques sur un intervalle au voisinage de  $V_0$ .

### 3. Étude de la stabilité de trois modèles

Rappelons qu'un schéma explicite à un pas s'écrit tel que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Un tel schéma est dit stable s'il existe  $L > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \quad |\Phi(t_n, x_n, h) - \Phi(t_n, y_n, h)| \leq L|x - y|$$

### 3.1 Étude de la stabilité du schéma d'Euler

Le schéma d'Euler explicite est défini tel que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

d'où  $\Phi(t_n, x_n, h) = f(t_n, x_n)$ .

Étudions la stabilité de ce schéma, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}$  où  $t \in [0, T]$  et  $0 < h < T$ , on peut écrire :

$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ , en effet nous avons démontré que  $f$  est localement Lipschitzienne. Or comme  $\Phi(t_n, x_n, h) = f(t, x)$  et  $\Phi(t_n, y_n, h) = f(t, y)$  on a donc bien :

$$|\Phi(t_n, x_n, h) - \Phi(t_n, y_n, h)| \leq L|x - y|$$

Nous pouvons donc conclure que ce réel  $L > 0$  existe, et donc que le schéma explicite d'Euler est stable.

### 3.2 Étude de la stabilité du schéma du point milieu

Le schéma du point milieu s'écrit tel que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

alors  $\Phi(t_n, x_n, h) = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n))$ .

Étudions la stabilité de ce schéma, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}$  où  $t \in [0, T]$  et  $0 < h < T$ , on peut écrire :

$$\Phi(t_n, x_n, h) - \Phi(t_n, y_n, h) = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)) - f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n))$$

Or comme  $f$  est localement Lipschitzienne on peut écrire :

$$\begin{aligned} & f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)) - f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)) \\ & \leq L|x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n) - y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)| \\ & \leq L|x_n - y_n| + \frac{h}{2}|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)| \\ & \leq L|x_n - y_n| + \frac{h}{2}L|x_n - y_n| \\ & \leq K|x_n - y_n| \end{aligned}$$

avec  $K = (L + \frac{h}{2}L^2)$  où  $K > 0$ .

Nous concluons donc que le schéma du point milieu est stable.

### 3.3 Étude de la stabilité du schéma de Runge Kutta 4

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

FIGURE 4 – Tableau de Butcher équivalent au schéma de Runge Kutta à 4 stage

Le schéma explicite d'un schéma de Runge Kutta à s-stage est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} X_i = x_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_n + c_j h, X_j) & i = 1, \dots, j \\ x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i h, X_i) & n = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

Ainsi on calcul d'après le tableau de Butcher équivalent au schéma de Runge Kutta 4 :

$$\begin{aligned} X_1 &= x_n \\ X_2 &= x_n + \frac{h}{2} f(t_n + \frac{h}{2}, X_1) \\ X_3 &= x_n + \frac{h}{2} f(t_n + \frac{h}{2}, X_2) \\ X_4 &= x_n + h f(t_n + h, X_3) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \left( \frac{1}{6} f(t, X_1) + \frac{1}{3} f(t + \frac{h}{2}, X_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} f(t + \frac{h}{2}, X_3) + \frac{1}{6} f(t + h, X_4) \right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(f(t, X_1) + 2f(t + \frac{h}{2}, X_2) + 2f(t + \frac{h}{2}, X_3) + f(t + h, X_4))$$

Étudions la stabilité de ce schéma, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}$  où  $t \in [0, T]$  et  $0 < h < T$ , on a :

$$\begin{aligned} \Phi(t_n, x_n, h) - \Phi(t_n, y_n, h) &= \frac{1}{6}(f(t, X_1) + 2f(t + \frac{h}{2}, X_2) + 2f(t + \frac{h}{2}, X_3) + f(t + h, X_4) \\ &\quad - f(t, Y_1) - 2f(t + \frac{h}{2}, Y_2) - 2f(t + \frac{h}{2}, Y_3) - f(t + h, Y_4)) \\ &= \frac{1}{6}(\textcolor{red}{f(t, X_1)} - \textcolor{red}{f(t, Y_1)} + \textcolor{blue}{2f(t + \frac{h}{2}, X_2)} - \textcolor{blue}{2f(t + \frac{h}{2}, Y_2)} + \textcolor{green}{2f(t + \frac{h}{2}, X_3)} - \textcolor{green}{2f(t + \frac{h}{2}, Y_3)} \\ &\quad + \textcolor{brown}{f(t + h, X_4)} - \textcolor{brown}{f(t + h, Y_4)}) \end{aligned}$$

On calcul la stabilité pour chaque membre.

Pour  $\textcolor{red}{f(t, X_1)} - \textcolor{red}{f(t, Y_1)}$  étant donné que  $f$  est Lipschitzienne on a :

$$|f(t, X_1) - f(t, Y_1)| \leq L_1|X_1 - Y_1| \leq L_1|x - y| \quad (1)$$

Pour  $\textcolor{blue}{f(t + \frac{h}{2}, X_2)} - \textcolor{blue}{f(t + \frac{h}{2}, Y_2)}$  on a :

$$\begin{aligned} ||f(t + \frac{h}{2}, X_2) - f(t + \frac{h}{2}, Y_2)|| &\leq L_2||X_2 - Y_2|| \\ &\leq L_2||f(t + \frac{h}{2}, X_1) - f(t + \frac{h}{2}, Y_1)|| \\ &\leq L_2||x - y|| + \frac{h}{2} (f(t, X_1) - f(t, Y_1)) || \end{aligned}$$

Or d'après (1) on peut écrire :

$$\begin{aligned} |f(t + \frac{h}{2}, X_2) - f(t + \frac{h}{2}, Y_2)| &\leq L_2||x - y|| + \frac{h}{2}L_1|x - y| \\ &\leq K|x - y| \quad (2) \end{aligned}$$

Où  $K = L_2(1 + \frac{h}{2}L_1)$

Pour  $f(t + \frac{h}{2}, X_3) - f(t + \frac{h}{2}, Y_3)$  on a :

$$\begin{aligned} \|f(t + \frac{h}{2}, X_3) - f(t + \frac{h}{2}, Y_3)\| &\leq L_3 \|X_3 - Y_3\| \\ &\leq L_3 \|f(t + \frac{h}{2}, X_2) - f(t + \frac{h}{2}, Y_2)\| \\ &\leq L_2 \|x - y\| + \frac{h}{2} \|(f(t, X_2) - f(t, Y_2))\| \end{aligned}$$

Or d'après (2) :

$$\begin{aligned} \|f(t + \frac{h}{2}, X_3) - f(t + \frac{h}{2}, Y_3)\| &\leq L_3 \|x - y\| + \frac{h}{2} K \|x - y\| \\ &\leq M \|x - y\| \quad (3) \end{aligned}$$

où  $M = L_3(1 + \frac{h}{2}K)$

Pour  $f(t + h, X_4) - f(t + h, Y_4)$  on a :

$$\begin{aligned} \|f(t + h, X_4) - f(t + h, Y_4)\| &\leq L_4 \|X_4 - Y_4\| \\ &\leq L_4 \|f(t + h, X_3) - f(t + h, Y_3)\| \\ &\leq L_4 \|x - y\| + h \|(f(t, X_3) - f(t, Y_3))\| \end{aligned}$$

Or d'après (3) on a :

$$\|f(t + h, X_4) - f(t + h, Y_4)\| \leq L_4 \|x - y\| + hM \|x - y\| \leq N \|x - y\|$$

avec  $N = L_4(1 + hM)$

**Finalement** on a :

$$\Phi(t_n, x_n, h) - \Phi(t_n, y_n, h) \leq \frac{1}{6}(L_1 \|x - y\| + 2K \|x - y\| + 2M \|x - y\| + N \|x - y\|) \leq P \|x - y\|$$

avec  $P = \frac{1}{6}(L_1 + 2K + 2M + N)$ ,  $P > 0$ . On en conclut que le schéma de Runge Kutta 4 est stable.

### 3.a) Analyse graphique des solutions

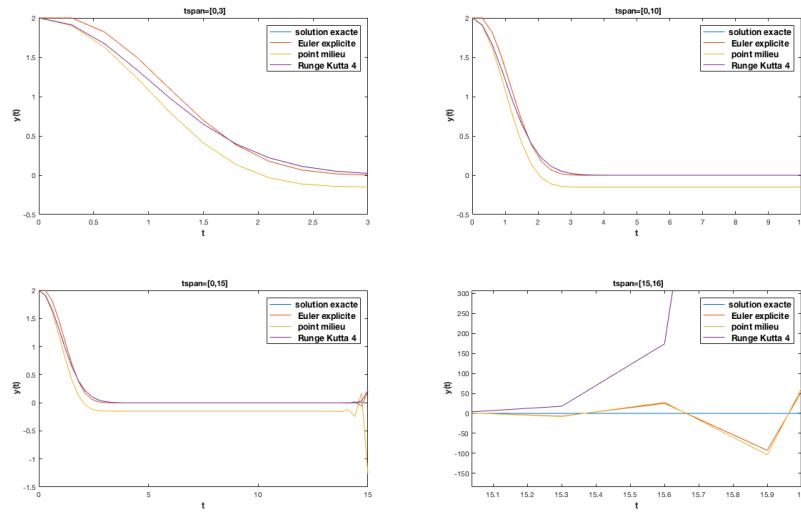


FIGURE 5 – Variation de l'intervalle de temps :  $x_0 = 2$  ,  $h = 0.3$

Si  $t \in [0, 11]$  le schéma de Runge Kutta 4 approxime au mieux les solutions (les écarts entre les solutions approximées et les solutions exactes est si faible qu'ils ne sont pas visible sur le graphique). Le schéma du point milieu s'éloigne des solutions exactes lorsque  $t$  augmente. À contrario le schéma d'Euler explicite approxime bien les solutions si  $t$  est faible mais s'éloigne de ces dernières si  $t$  augmente.

Si  $t > 11$  le schéma de Runge Kutta 4 s'éloigne de la solution  $x(t) = 0$ . Il en est de même pour les solutions approximées par le schéma du point milieu et le schéma d'Euler explicite.



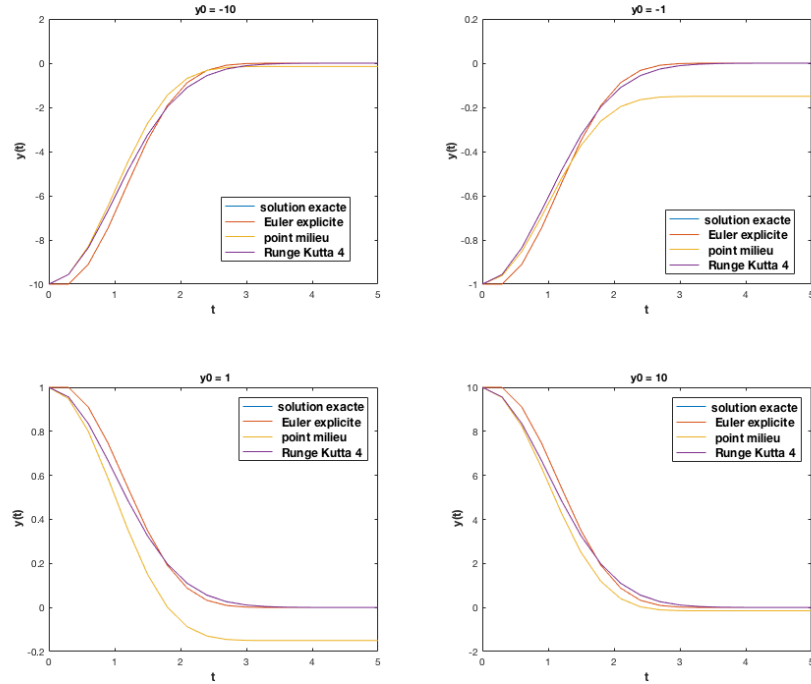


FIGURE 6 – Variation de la condition initiale :  $t \in [0, 5]$  ,  $h = 0.3$

En se plaçant sur un intervalle de temps  $t$  constant où  $t \in [0, 4]$  Quelque soit  $x_0$  le schéma de Runge Kutta 4 approxime bien les solutions exactes. Lorsque  $x_0$  est faible (-10) ou grand (10), les solutions proposées par le schéma du point milieu et le schéma d'Euler explicite approchent les solutions exactes seulement lorsque  $t$  augmente. Enfin dans le cas où  $x_0 \in [-1, 1]$  les solutions du schéma d'Euler explicite convergent vers les solutions exactes contrairement à celles approximées par le schéma du point milieu, qui conservent un écart constant.

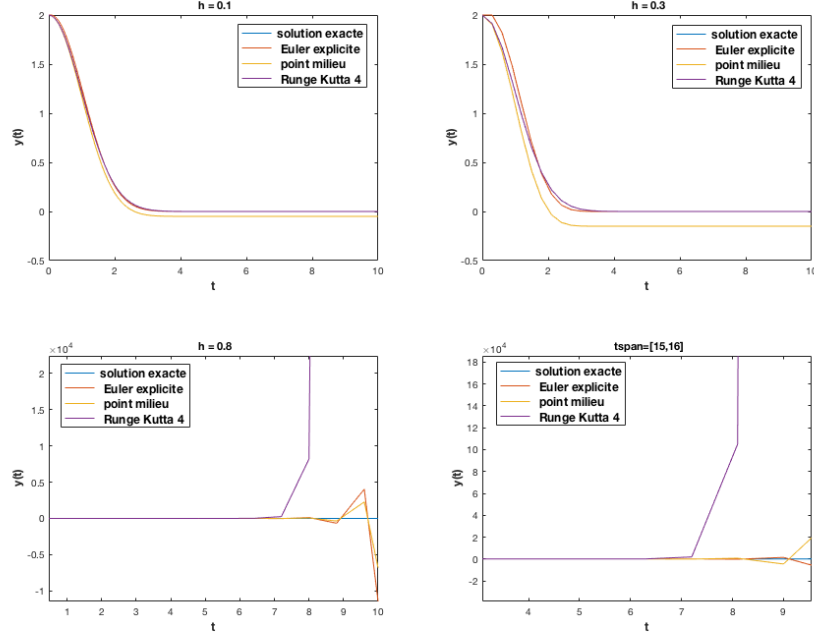


FIGURE 7 – Variation du pas de temps :  $x_0 = 2$  ,  $h = 0.3$

Si  $h$  est faible (respectivement 0.1 et 0.3) les solutions approximées par le schéma d'Euler explicite et de Runge Kutta 4 convergent vers les solutions exactes lorsque  $t$  augmente. En revanche si  $h$  est grand (respectivement 0.6 et 0.9) aucun des schémas étudiés n'est stable.

### 3.b. Interprétation mathématique de ces résultats

Pour conclure à la stabilité de la solution  $x \equiv 0$ , nous considérons une perturbation  $x_p$ , analyser la stabilité de cette solution revient alors à vérifier si :

$$x(t) = 0 + x_p \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty$$

. **Interprétation du schéma d'Euler explicite :**

Le schéma d'Euler explicite tel que :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) = (1 - t_n n)x_n$$

peut s'exprimer comme la suite géométrique :

$$(1 - t_n)^n x_0$$

Pour étudier la stabilité de la solution  $x \equiv 0$  pour ce schéma nous devons calculer les paramètres  $t$  et  $h$  pour lesquels :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - ht_n)^n x_0 = 0$$

Ainsi la solution  $x \equiv 0$  est stable si la raison de cette suite est nulle, on obtient donc les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} -1 &< 1 - t_n h < 1 \\ \Leftrightarrow -2 &< -t_n h < 0 \\ \Leftrightarrow 0 &< h t_n < \frac{2}{h} \\ \Leftrightarrow t &< \frac{2}{h} \\ \Leftrightarrow t &< \frac{2N}{T} \end{aligned}$$

Rappelons que  $h = \frac{T}{N}$ . Ainsi lorsque  $T$  augmente  $\frac{2N}{T}$  décroît donc :

$$\frac{2N}{T} \rightarrow 0$$

, lorsque  $T \rightarrow \infty$ . Donc il existe un  $t_i$  telle que pour tout  $t > t_i$ ,  $t > \frac{2N}{T}$ . Donc  $x_p = x_n$  ne tend pas vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . En conclusion lorsque  $h$  augmente la solution  $x \equiv 0$  est instable.

$t_n$  devient supérieur à  $\frac{2}{h}$  et la stabilité est perdue. La convergence de la suite ne dépend nullement de la condition initiale choisie.

#### Interprétation du schéma du point milieu :

Le schéma du point milieu peut s'écrire tel que :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)\right) \\ &= x_n + h \left[ -\left(t + \frac{h}{2}\right) \left(x_n - t \frac{h}{2}\right) \right] \\ &= x_n \left( 1 - \frac{h^2}{2} + \left(-h + \frac{h^3}{4}\right) t + \frac{h^2}{2} t^2 \right) \end{aligned}$$

Le schéma du point milieu peut donc s'écrire tel une suite géométrique telle que :

$$x_n = x_0 \left( 1 - \frac{h^2}{2} + \left(-h + \frac{h^3}{4}\right) t + \frac{h^2}{2} t^2 \right)^n$$

À l'instar de l'exemple précédent nous recherchons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 \left( 1 - \frac{h^2}{2} + \left(-h + \frac{h^3}{4}\right) t + \frac{h^2}{2} t^2 \right)^n = 0$$

La raison de cette suite s'annule si :

$$-1 < 1 - \frac{h^2}{2} + \left(-h + \frac{h^3}{4}\right)t + \frac{h^2}{2}t^2 < 1$$

On obtient donc deux inéquation :

$$\begin{aligned} -2 &< -\frac{h^2}{2} + \left(-h + \frac{h^3}{4}\right)t + \frac{h^2}{2}t^2 \\ \Leftrightarrow 2 - \frac{h^2}{2} + \left(-h + \frac{h^3}{4}\right)t + \frac{h^2}{2}t^2 &> 0 \quad (1) \end{aligned}$$

et l'inéquation :

$$-\frac{h^2}{2} + \left(-h + \frac{h^3}{4}\right)t + \frac{h^2}{2}t^2 < 0 \quad (2)$$

Étudions le polynôme associé à l'inéquation 1 :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left(-h + \frac{h^3}{4}\right)^2 - 4\frac{h^2}{2}\left(2 - \frac{h^2}{2}\right) \\ &= h^2 - \frac{h^4}{2} + \frac{h^6}{16} - 4h^2 + h^4 \\ &= -3h^2 - \frac{h^4}{2} + \frac{h^6}{16} \\ &= h^2\left(-3 + \frac{h^2}{2} + \frac{(h^2)^4}{16}\right) \quad h > 0 \end{aligned}$$

Nous cherchons le signe de  $\Delta_1$  en fonction  $h^2$ , en posant  $H = h^2$  :

$$\Delta_1 = H\left(-3 + \frac{H}{2} + \frac{H^2}{16}\right)$$

Pour cela nous calculons les racines du polynôme  $-3 + \frac{H}{2} + \frac{H^2}{16}$  :

$$\Delta_H = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{16} \times -3 = 1$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_{1_H} &= 4 \\ \lambda_{2_H} &= -12 \end{aligned}$$

En conclusion  $\Delta_1 > 0$  si  $h^2 > 4$  soit  $h > 2$ . Nous ne considérons pas le cas  $h^2 < -12$ , comme  $h > 0$ . Deuxièmement le pas de temps devant être généralement "petit",  $\Delta_1 < 0$  et n'admet pas de racines réelles.

Étudions à présent le polynôme associé à l'inéquation 2 :

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \left(-h + \frac{h^3}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{h^2}{2}\right)\left(\frac{-h^2}{2}\right) \\ &= h^2 - \frac{h^4}{2} + \frac{h^6}{16} + h^4 \\ &= \left(h + \frac{h^3}{4}\right)\end{aligned}$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}\lambda_{2.1} &= \frac{h - \frac{h^3}{4} + \sqrt[3]{\Delta_2}}{h^2} = \frac{2}{h} \\ \lambda_{2.2} &= \frac{h - \frac{h^3}{4} + \sqrt[3]{\Delta_2}}{h^2} = \frac{-h}{2}\end{aligned}$$

Le polynôme est donc inférieur à 0 si  $t < \frac{h}{2}$ .

En conclusion la raison de la suite s'annule si  $t < \frac{2}{h}$ . À l'instar du schéma d'Euler explicite la solution approchée converge vers les solutions exactes lorsque  $t$  augmente.

#### Interprétation du schéma de Runge Kutta 4 :

Le schéma de Runge Kutta 4 peut s'écrire tel que :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(f(t, X_1) + 2f(t + \frac{h}{2}, X_2) + 2f(t + \frac{h}{2}, X_3) + f(t + h, X_4))$$

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n(1 - ht_n + \frac{h^2 t_n^2}{2} - \frac{h^3 t_n^3}{6} + \frac{h^4 t_n^4}{24} + \frac{h^3 t_n}{6} - \frac{19h^4 t_n^2}{72} \\ &\quad + \frac{13h^5 t_n^3}{144} - \frac{19h^3 t_n}{144} + \frac{9h^6 t_n^2}{144} + \frac{h^7 t_n}{72} - \frac{h^2}{2} + \frac{3h^4}{24} - \frac{h^6}{78})\end{aligned}$$

$h$  étant un paramètre fixé on peut récrire la raison telle que :

$$\begin{aligned}f_h(t_n) &= (1 - ht_n + \frac{h^2 t_n^2}{2} - \frac{h^3 t_n^3}{6} + \frac{h^4 t_n^4}{24} + \frac{h^3 t_n}{6} - \frac{19h^4 t_n^2}{72} \\ &\quad + \frac{13h^5 t_n^3}{144} - \frac{19h^3 t_n}{144} + \frac{9h^6 t_n^2}{144} + \frac{h^7 t_n}{72} - \frac{h^2}{2} + \frac{3h^4}{24} - \frac{h^6}{78})\end{aligned}$$

On étudie donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 (f_h(t_n))^n = 0$$

Ceci implique :

$$-1 < f_h(t_n) < 1$$

Or  $f_h(t_n)$  étant un polynôme de degré 4 avec  $a = \frac{h^4}{24} > 0$ , on en déduit :

$$\lim_{t_n \rightarrow +\infty} f_h(t_n) = +\infty$$

Nous concluons donc que lorsque  $t$  augmente la solution approximée par le schéma de Runge Kutta 4 s'éloigne des solutions réelles.

### Conclusion :

Aucun des schéma étudié est A-stable car la stabilité de la solution  $x \equiv 0$  dépend de  $h$  et de  $t$ . Lorsque  $t$  augmente nous avons démontré que la solution s'écarte de la solution exacte. De même plus  $h$  augmente plus vite la convergence est rompue. Remarquons par ailleurs que le choix de la condition initiale n'influence pas la convergence des schéma vers 0, étant donné l'équation des suites. Enfin nous avons démontré que si  $h$  croît la solution  $x \equiv 0$  est instable.

## 5 Exercice 4 : Proie-Prédateur

$$(\mathcal{PP}) \begin{cases} y_1'(t) = 1.2y_1(t) - 0.6y_1(t)y_2(t) \\ y_2'(t) = -0.8y_2(t) + 0.3y_1(t)y_2(t) \\ y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

1) Le problème de Cauchy  $\mathcal{PP}$  correspond au modèle de dynamique des population établit par Lotka-Volterra. Ce modèle peut être généralisé tel que :

$$(\mathcal{PP}) \begin{cases} y_1'(t) = a_1y_1(t) + c_1y_1(t)y_2(t) \\ y_2'(t) = a_2y_2(t) + c_2y_1(t)y_2(t) \\ y_1(0) = y_{1.0} \\ y_2(0) = y_{2.0} \end{cases}$$

Les fonctions  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  représentent l'évolution les effectifs des populations 1 et 2 au cours du temps, tandis que  $y_{1.0}$  et  $y_{2.0}$  sont les effectifs initiaux de ces deux populations.

Dans notre cas d'étude en l'absence de la population 2 la population de 1 a une croissance exponentielle avec un taux de croissance malthusien  $a_1 = 1.2$ . À l'inverse en l'absence de la population 1 la population de 2 décroît exponentiellement avec un taux de croissance malthusien  $a_2 = -0.8$ .

Le second membre du système d'équation est le terme d'interaction. Cette interaction est proportionnelle à  $y_1 y_2$  représentant la probabilité de rencontre entre les deux populations. Le type d'interaction est quant à lui défini par le signes des constantes  $c_1$  et  $c_2$ . Pour le problème de Cauchy ( $\mathcal{PP}$ ) considéré  $c_1 = -0.6 < 0$ . Biologiquement ceci se traduit par une diminution des effectifs de la population 1 en présence des individus de la population 2. Ce sont donc les proies. À contrario  $c_2 = 0.3 > 0$ , implique que les effectifs de la population 2 augmente en présence de la population 1. Ce sont donc les prédateurs.

2) Programme Matlab :

- a) Cf : Annexe - Programme de l'exercice 4 - Système d'équations différentielles 8
- b) Cf : Annexe - Programme de l'exercice 4 - Initialisation du workspace 8
- c) Cf : Annexe - Programme de l'exercice 4 - Représentation des données 8

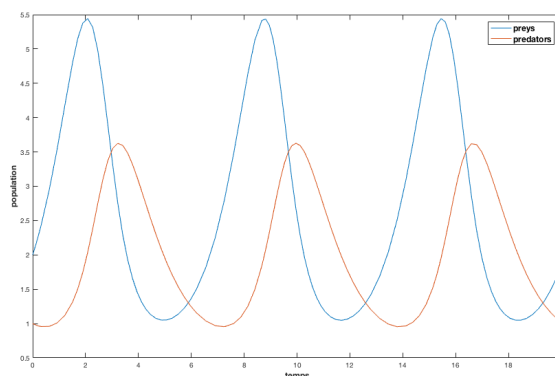


FIGURE 8 – Chroniques du modèle Proies-Prédateur : Représentation de l'évolution des effectifs des populations 1 et 2 au cours du temps

Ce graphique illustre l'interaction entre les populations 1 et 2. En effet leur dynamique est liée et s'explique en différentes phases :

1. Si les prédateurs sont peu nombreux l'effectif des proies augmente.
2. L'augmentation du nombre de proies représente une hausse des ressources disponibles pour les prédateurs, dont l'effectif croît avec retard.
3. L'augmentation du nombre de prédateurs limite la croissance des proies dont l'effectif atteint un maximum.
4. La décroissance de l'effectif des proies stoppe celle des prédateurs. Le nombre de prédateur atteint donc un maximum.
5. La diminution de l'effectif des prédateurs permet alors l'augmentation de l'effectif de la population de proies.

On constate que ce système est conservatif, i.e. la dynamique proies-prédateurs suit un schéma répété au cours du temps, avec des extremums équivalents.



d) La commande

```
plot(y(:,1),(:,2))
```

prend en entrée les toutes les lignes de la colonne 1 du vecteur y et de même pour la colonne 2. Elle permet la de réaliser le graphique suivant :

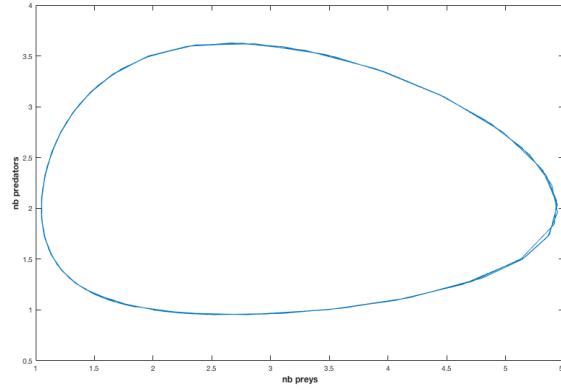


FIGURE 9 – Portrait de phase : Représentation de l'effectif des prédateurs en fonction de celui des proies

Ce graphique se révèle intéressant pour l'étude des points de stabilité du système notés  $y_1^*$  et  $y_2^*$  qui vérifient :

$$\begin{cases} y_1^* = 0 \\ y_2^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = f(y_1, y_2) \\ y_2^* = f(y_1, y_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(a_1 + c_1 y_2) = 0 \\ y_2(a_2 + c_2 y_1) = 0 \end{cases}$$

On a le point d'équilibre trivial (0,0).

De plus, si  $(a_1 + c_1 y_2) = 0$  alors  $y_2 = \frac{-a_1}{c_1}$  et  $y_2^* = 0$  implique que  $y_1 = \frac{-a_2}{c_2}$ . On note  $(y_1^*, y_2^*)$  le point d'équilibre  $(\frac{-a_1}{c_1}, \frac{-a_2}{c_2})$ .

La matrice Jacobienne A telle que :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g}{\partial y_1} & \frac{\partial g}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 y_2 & c_1 y_1 \\ c_2 y_2 & a_2 + c_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de la matrice Jacobienne au point d'équilibre  $(y_1^*, y_2^*)$  correspond à :

$$A_{(y_1^*, y_2^*)} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \frac{-a_2}{c_2} \\ c_2 \frac{-a_1}{c_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $\text{Det} A_{(y_1^*, y_2^*)} > 0$  et  $\text{Tr} A_{(y_1^*, y_2^*)} = 0$ , la linéarisation prévoit des centres. Pour prouver l'existence de ces centres, nous devons calculer une fonction intégrale première

$H : D(\in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial y_2} &= \frac{y_1(a_1 + c_1 y_2)}{y_2(a_2 + c_2 y_1)} \\ \partial y_2 \frac{a_1 + c_1 y_2}{y_2} &= \partial y_1 \frac{a_1 + c_1 y_2}{y_2} \\ a_1 \ln(y_2) + c_1 y_2 &= a_2 \ln(y_1) + c_1 y_1 + K \\ a_1 \ln(y_2) + c_1 y_2 - a_2 \ln(y_1) - c_1 y_1 &= K\end{aligned}$$

On pose  $H(y_1, y_2) = a_1 \ln(y_2) + c_1 y_2 - a_2 \ln(y_1) - c_1 y_1$ . Alors  $H(y_1, y_2)' = \frac{\partial H}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial H}{\partial y_2} y_2'$  avec  $\frac{\partial H}{\partial y_1} = \frac{-a_2}{y_1} - c_2$  et  $\frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{a_1}{y_2} + c_1$  On a alors :

$$H(y_1, y_2)' = \left( \frac{-a_2}{y_1} - c_2 \right) y_1(a_1 + c_1 y_2) + \left( \frac{a_1}{y_2} + c_1 \right) y_2(a_2 + c_2 y_1) = 0$$

Les trajectoires du système  $(\mathcal{PP})$  sont donc donné par les courbes de niveaux  $H(y_1, y_2) = a_1 \ln(y_2) + c_1 y_2 - a_2 \ln(y_1) - c_1 y_1$ . Pour montrer que les trajectoires se referment autour du point d'équilibre  $(y_1^*, y_2^*)$  nous devons montrer que la fonction  $H(y_1, y_2)$  admet un extremum en ce point. Par développement en série de Taylor on obtient :

$$\begin{aligned}H(y_1, y_2) &= H(y_1^*, y_2^*) + \frac{\partial H}{\partial y_1} \big|_{(y_1^*, y_2^*)} (y_1 - y_1^*) \\ &+ \frac{\partial H}{\partial y_2} \big|_{(y_1^*, y_2^*)} (y_2 - y_2^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2} \big|_{(y_1^*, y_2^*)} (y_1 - y_1^*)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial y_2^2} \big|_{(y_1^*, y_2^*)} (y_2 - y_2^*)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial y_1} \big|_{(y_1^*, y_2^*)} (y_2 - y_2^*)(y_1 - y_1^*)\end{aligned}$$

Or

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y_1} \big|_{(y_1^*, y_2^*)} &= \frac{-a_2}{y_1^*} - c_2 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y_2} \big|_{(y_1^*, y_2^*)} &= \frac{a_1}{y_2^*} + c_1 = 0 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2} \big|_{(y_1^*, y_2^*)} &= \frac{-a_2}{y_1^{*2}} = \frac{-c_2^2}{a_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y_2^2} \big|_{(y_1^*, y_2^*)} &= \frac{a_1}{y_2^{*2}} = \frac{-c_1^2}{a_1} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial y_1} \big|_{(y_1^*, y_2^*)} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Donc finalement  $H(y_1, y_2) = H(y_1^*, y_2^*) + \frac{1}{2} \frac{-c_2^2}{a_2} (y_1 - y_1^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{-c_1^2}{a_1} (y_2 - y_2^*)^2$  Au voisinage du point d'équilibre  $(y_1^*, y_2^*)$   $H(y_1, y_2) - H(y_1^*, y_2^*)$  est de signe constant et  $< 0$ . Ainsi la fonction intégrale première  $H$  admet un minimum local, les trajectoires du système  $(\mathcal{PP})$  se referment autour du point  $(y_1^*, y_2^*)$ . Ceci prouve l'existence de centre. Dans le cas où :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.2 \\ a_2 &= -0.8 \\ c_1 &= -0.6 \\ c_2 &= 0.3 \end{aligned}$$

Les points d'équilibres sont  $(0,0)$  et  $(y_1^*, y_2^*) = (\frac{8}{3}, 2)$ . Les matrices Jacobiennes aux points d'équilibre sont :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix} \quad A_{(\frac{8}{3}, 2)} = \begin{pmatrix} 0 & -3.2 \\ 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

Au point  $(0,0)$   $\text{Det}A_{(0,0)} < 0$ , et les valeurs propres sont de signes opposées, on conclut à un équilibre de type point selle. Nous n'étudions pas d'avantage ce point d'équilibre, en effet du point de vu biologique il n'a pas de sens. Au point  $(\frac{8}{3}, 2)$ , d'après la linéarisation prévoit des centres et d'après la démonstration précédente nous pouvons conclure sur l'existence de ces derniers.

Les isoclines verticales sont calculées telles que  $y_1' = 0$  donc soit  $y_1 = 0$  ou  $y_2 = \frac{-a_1}{c_1} = 2$ . Les isoclines horizontales sont calculées telles que  $y_2' = 0$  donc soit  $y_2 = 0$  ou  $y_1 = \frac{-a_2}{c_2} = \frac{8}{3}$ .

**3 a)** Afin d'étudier les différents contextes biologiques nous devons faire varier les constantes du système ( $a_1, a_2, c_1, c_2$ , et les effectifs initiaux). Dans le cas où :

- $c_1 < 0$  et  $c_2 > 0$  (cas précédent) alors la population 1 sont les proies et la population 2 sont les prédateurs et  $a_1 > 0$  et  $a_2 < 0$
- $c_2 < 0$  et  $c_1 > 0$  alors la population 2 sont les proies et la population 1 sont les prédateurs et  $a_2 > 0$  et  $a_1 < 0$
- $c_1 < 0$  et  $c_2 < 0$  alors les populations 1 et 2 sont en compétition pour l'accès aux ressources et  $a_1 > 0$  et  $a_2 > 0$ . Autrement dit les deux populations ont une croissance exponentielle en l'absence l'une de l'autre.
- $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$  alors les populations 1 et 2 sont en symbiose et  $a_1 < 0$  et  $a_2 < 0$ . Autrement dit les deux populations décroissent exponentiellement en l'absence l'une de l'autre.

- Les autres cas sont faiblement représentatifs d'un modèle biologique. Nous pourrions par exemple étudier un cas théorique où  $c_1 < 0$  et  $c_2 > 0$  et  $a_1 < 0$  et  $a_2 > 0$ .
- En faisant varier les effectifs initiaux, dans les cas extrêmes les deux populations ne pourront co-exister.

Les graphiques suivants illustrent les différents cas énumérés :

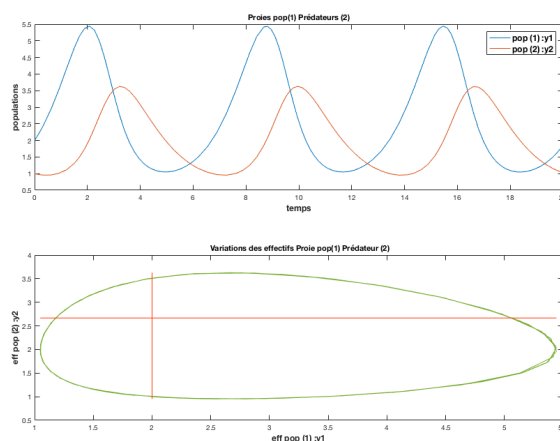


FIGURE 10 – cas 1 :  $c_1 < 0$  et  $c_2 > 0$

La population 1 sont les proies, la population 2 joue le rôle de prédateurs.

Paramètres :  $y_{10} = 2$ ,  $y_{21} = 1$ ,  $c_1 = -0.6$ ,  $c_2 = 0.3$ ,  $a_1 = 1.2$ ,  $a_2 = -0.8$ . Le graphique du haut est une représentation des chronique des population 1 et 2. Le graphique du bas est le portrait de phase. Les droites (rouges) représentent l'isocline horizontale et l'isocline verticale.

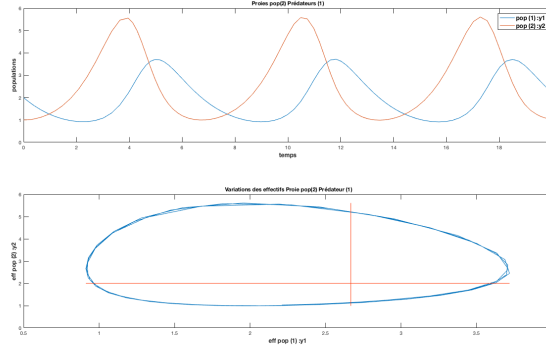


FIGURE 11 – cas 2 :  $c_1 > 0$  et  $c_2 < 0$

Situation symétrique de la figure précédente où La population 1 sont les prédateurs, la population 2 joue le rôle de proies.

Paramètres :  $y_{10} = 2$ ,  $y_{20} = 1$ ,  $c_1 = 0.3$ ,  $c_2 = -0.6$ ,  $a_1 = -0.8$ ,  $a_2 = 1.2$ .

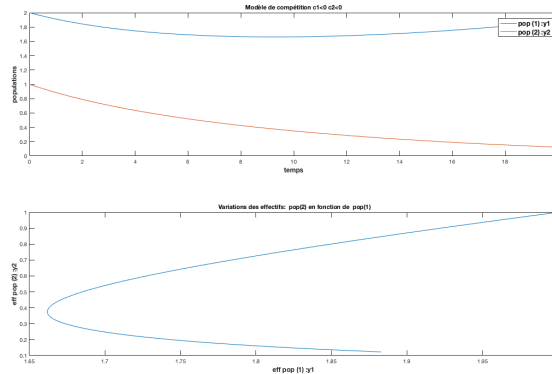


FIGURE 12 – cas 3 :  $c_2 < 0$  et  $c_1 < 0$  - Modèle de compétition

Paramètres :  $y_{10} = 2$ ,  $y_{20} = 1$ ,  $c_1 = -0.08$ ,  $c_2 = -0.08$ ,  $a_1 = 0.03$ ,  $a_2 = 0.035$ . Nous avons choisi des valeurs équivalente pour les constante  $c_1$  et  $c_2$ , pour comparer les dynamique dans un cas de compétition. En revanche les paramètres  $a$  ont été fixés tels que  $a_2 > a_1$  pour compenser les effectifs initiaux tels que  $y_{10} > y_{20}$ .

Calculons la matrice Jacobienne au point d'équilibre dans le cas où  $c_2 < 0$  et  $c_1 < 0$  :

$$A_{(y_1^*, y_2^*)} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \frac{-a_2}{c_2} \\ c_2 \frac{-a_1}{c_1} & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_{(y_1^*, y_2^*)} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \frac{a_2}{c_2} \\ c_2 \frac{a_1}{c_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $TrA = 0$  et  $DetA < 0$ , le point d'équilibre  $(y_1^*, y_2^*)$  est donc un point selle.

Soulignons la non vraisemblance biologique d'une telle équation en effet d'après ce modèle la compétition induit la disparition de l'une des deux espèces.

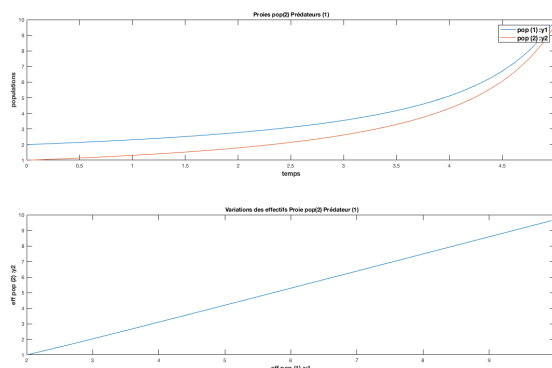


FIGURE 13 – cas 4 :  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$

Modèle de symbiose mutualiste

Paramètres :  $y_{10} = 2$ ,  $y_{20} = 1$ ,  $c_1 = 0.03$ ,  $c_2 = 0.035$ ,  $a_1 = 0.1$ ,  $a_2 = 0.11$ . De même que pour la situation précédente les taux de croissance malthusien ont été fixé tels que  $a_2 > a_1$  pour compenser les effectifs initiaux tels que  $y_{10} > y_{20}$ . Par ailleurs les constante  $c_1$  et  $c_2$  tendent vers 0 pour éviter l'explosion des effectifs.

De même que pour les cas précédents la linéarisation prévoit des centres au point d'équilibre  $(y_1^*, y_2^*)$ . Cependant l'étude du portrait de phase démontre une croissance linéaire des deux espèces, jusqu'à un certains temps. Remarquons qu'en l'absence d'un terme de freinage logistique, les populations 1 et 2 augmentent exponentiellement. Ce système ne permet donc pas de modéliser une situation de symbiose mutualiste.

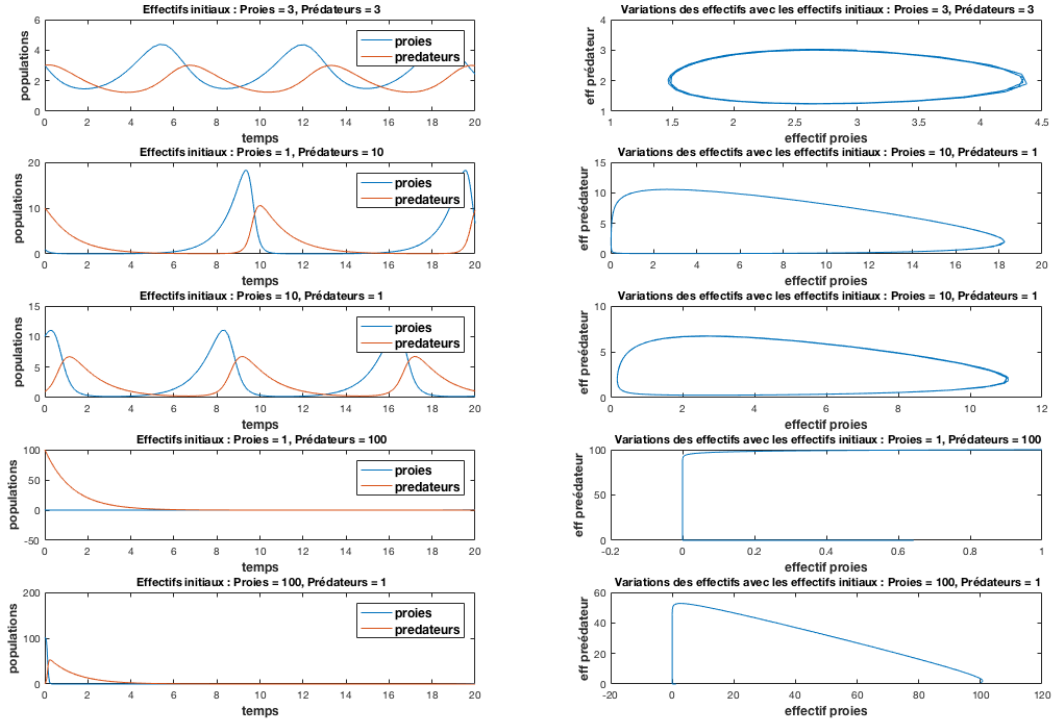


FIGURE 14 – Étude des chroniques et des portraits de phase pour différentes conditions initiales

D'après le système initial :

$$(\mathcal{PP}) \begin{cases} y_1'(t) = 1.2y_1(t) - 0.6y_1(t)y_2(t) \\ y_2'(t) = -0.8y_2(t) + 0.3y_1(t)y_2(t) \end{cases}$$

On constate que la variation des conditions initiales au delà d'un certain seuil (e.g.  $y_{1.0} = 100$  et  $y_{2.0} = 1$  et respectivement  $y_{1.0} = 1$  et  $y_{2.0} = 100$ ) abouti à la disparition des deux espèces. C'est une évidence en ce qui concerne la dynamique des prédateurs dont l'effectif décroît en l'absence de proies.

## 6 Exercice 5 - Un peu de bifurcation

On considère le problème de Cauchy suivant, pour  $y \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$  :

$$(C_4) \begin{cases} x'(t) = dx(t) - x^3(t) + c, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

1) Si  $c = 0$ , alors :

$C_4$  s'écrit :

$$(C_4) \begin{cases} x'(t) = dx(t) - x^3(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Posons pour tout  $t \in [0, +\infty[, f : x \mapsto dx(t) - x^3(t)$ .

### Etude des équilibres

$$\begin{aligned} x'(t) = 0 &\Leftrightarrow f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow dx(t) - x^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(d - x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = d \end{aligned}$$

**Si  $d \leq 0$  :** Il n'y a qu'un seul équilibre :  $x^* = 0$  qui est asymptotiquement stable.  
En effet :



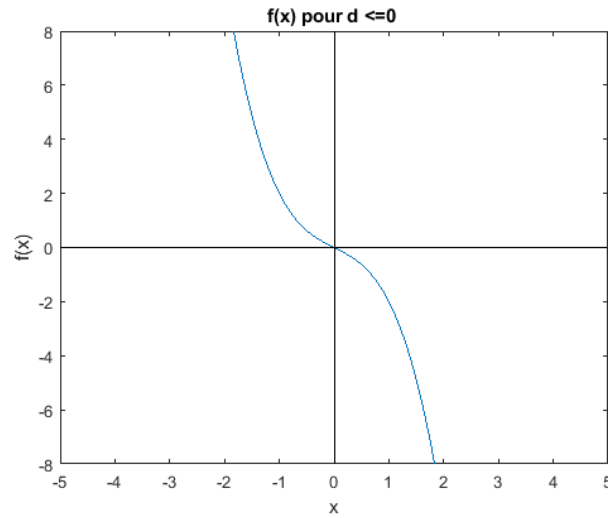


FIGURE 15 –  $f(x)$  pour  $d \leq 0$  (simulation pour  $d = -1$ )

**Si  $d > 0$  :** Il y a deux équilibres :  $x^* = 0$  qui est instable ,  $x_1 = \sqrt{d}$  et  $x_2 = -\sqrt{d}$  qui sont asymptotiquement stables. En effet :

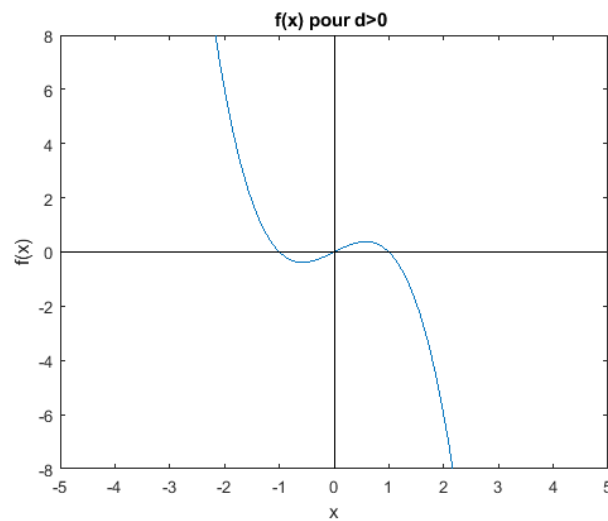


FIGURE 16 –  $f(x)$  pour  $d > 0$  (simulation pour  $d = 1$ )

On a donc le diagramme de bifurcation suivant :

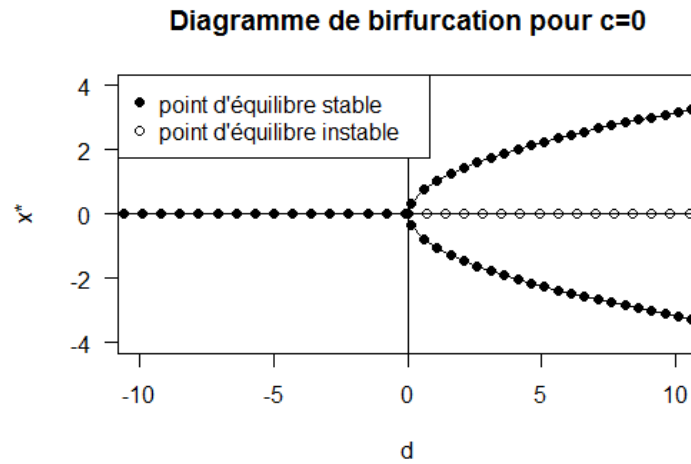


FIGURE 17 – diagramme de bifurcation pour  $c = 0$

2) On suppose  $d \neq 0$ .

Posons pour tout  $t \in [0, +\infty[, g : x \mapsto dx(t) - x^3(t) + c$ .

### Etude des équilibres

$$\begin{aligned}
 x'(t) = 0 &\Leftrightarrow g(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow dx - x^3 - c = 0 \\
 &\Leftrightarrow x(d - x^2) - c = 0
 \end{aligned}$$

a. On suppose  $d \leq 0$ .

**Si  $c > 0$  :** Il n'existe qu'un seul équilibre qui est asymptotiquement stable. En effet :

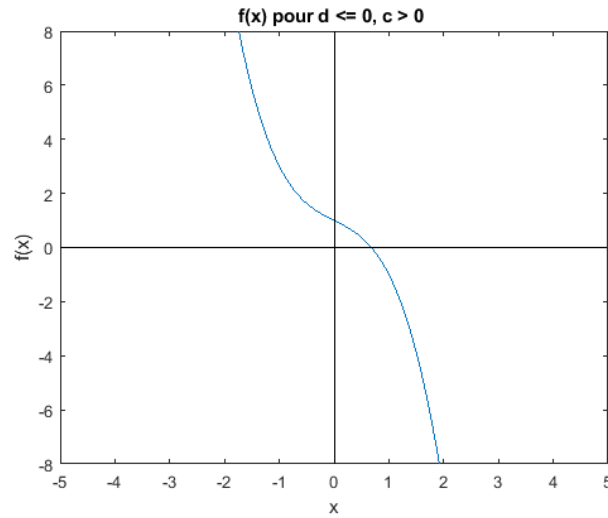


FIGURE 18 –  $f(x)$  pour  $d \leq 0$  et  $c > 0$  (simulation pour  $d = 1, c = 1$ )

**Si  $c < 0$  :** Il n'existe qu'un seul équilibre qui est asymptotiquement stable. En effet :

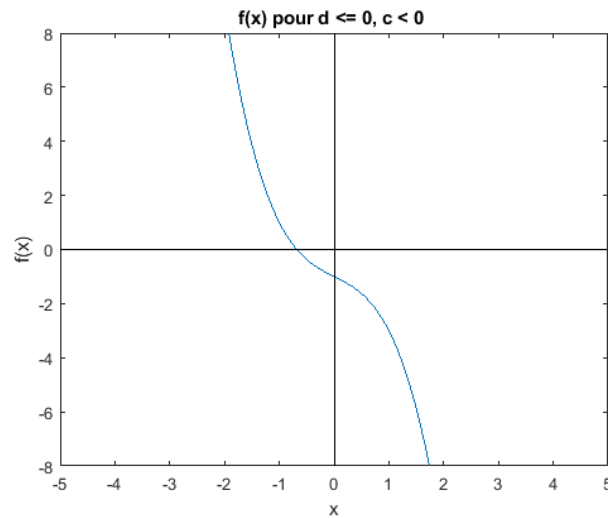


FIGURE 19 –  $f(x)$  pour  $d \leq 0$  et  $c < 0$  (simulation pour  $d = 1, c = -1$ )

Nous avons ainsi obtenu le diagramme de bifurcation suivant :

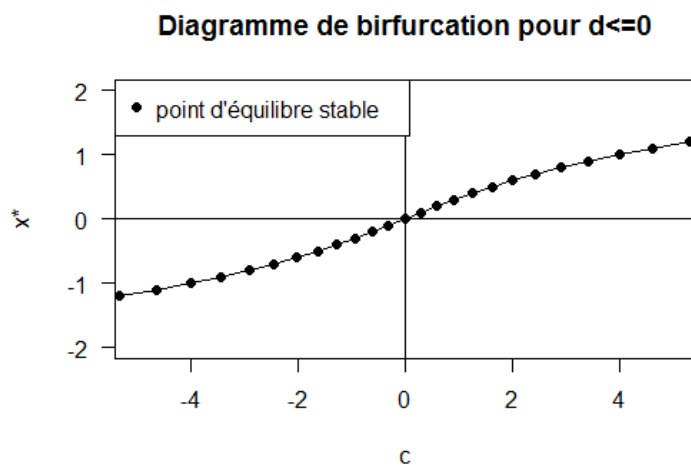


FIGURE 20 – diagramme de bifurcation pour  $d \leq 0$

**b.** On suppose  $d > 0$ .

On pose  $c^* = \frac{2d}{3} \sqrt{\frac{d}{3}}$ , obtenu en effectuant le tableau de variation de  $g$ .

**Si  $0 < c < c^*$  :** Il existe trois points d'équilibre :  $x_1 < x_2 < x_3$ .  $x_1$  et  $x_3$  sont asymptotiquement stables et  $x_2$  est instable. En effet :

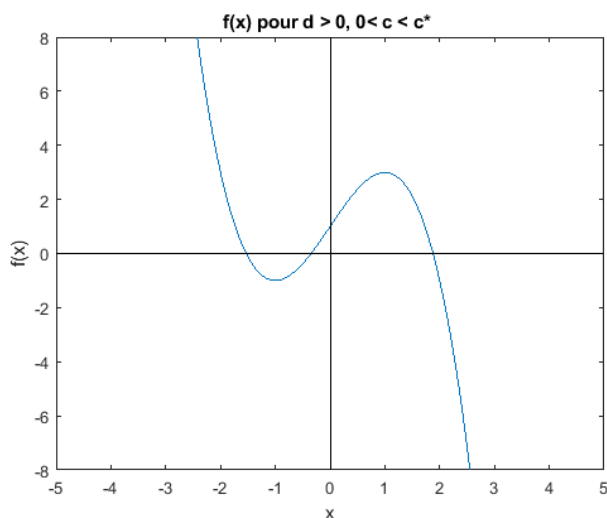


FIGURE 21 –  $f(x)$  pour  $d > 0$  et  $0 < c < c^*$  (simulation pour  $d = 3, c = 1$ )

**Si  $c^* < c$  :** Il n'existe qu'un seul équilibre qui est asymptotiquement stable. En effet :

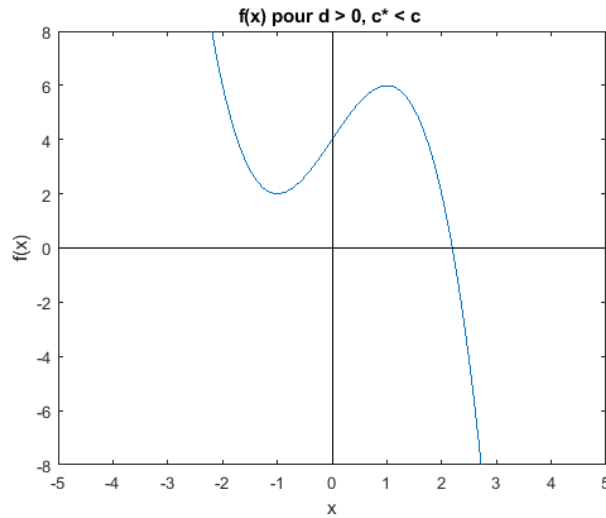


FIGURE 22 –  $f(x)$  pour  $d \leq 0$  et  $c > c^*$  (simulation pour  $d = 1, c = -1$ )

**Si  $c = c^*$  :** Il existe deux équilibres  $x_1 < x_2$ .  $x_1$  est un shunt positif et  $x_2$  est un équilibre asymptotiquement stable. En effet :

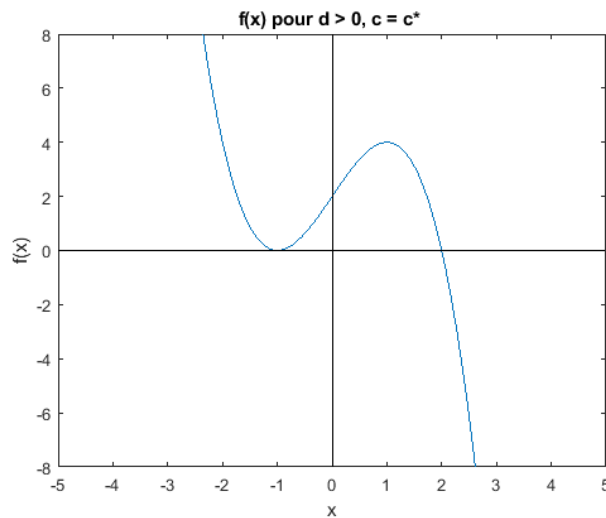


FIGURE 23 –  $f(x)$  pour  $d \leq 0$  et  $c = c^*$  (simulation pour  $d = 1, c = -1$ )

**Si  $-c^* < c < 0$  :** Il existe trois points d'équilibre :  $x_1 < x_2 < x_3$ .  $x_1$  et  $x_3$  sont asymptotiquement stables et  $x_2$  est instable. En effet

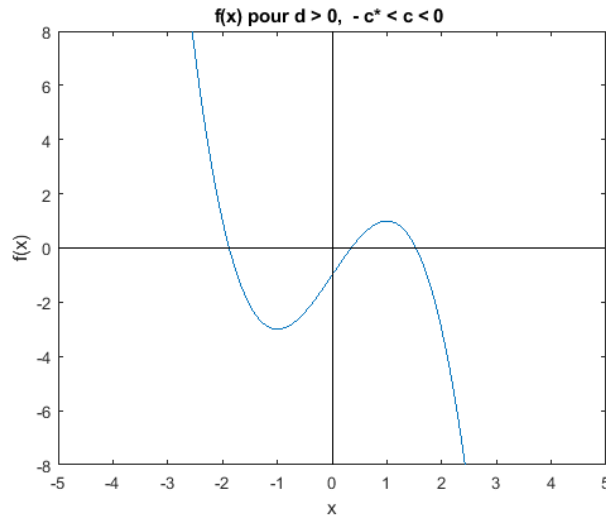


FIGURE 24 –  $f(x)$  pour  $d \leq 0$  et  $-c^* < c < 0$  (simulation pour  $d = 1, c = -1$ )

**Si  $-c^* = c$  :** Il existe deux équilibres  $x_1 < x_2$ .  $x_2$  est un shunt positif et  $x_1$  est un équilibre asymptotiquement stable. En effet :

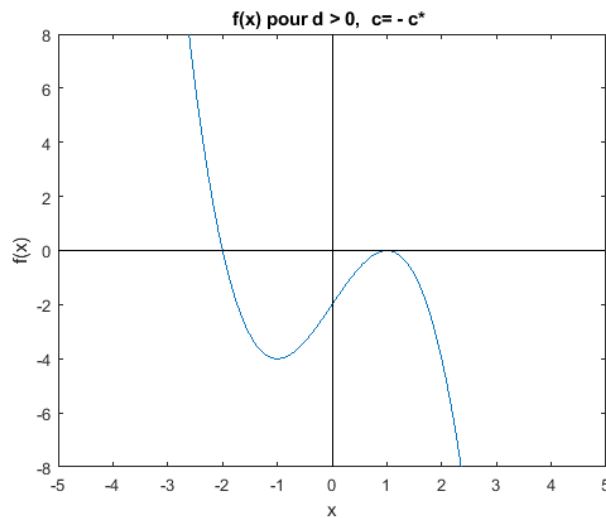


FIGURE 25 –  $f(x)$  pour  $d \leq 0$  et  $-c^* = c$  (simulation pour  $d = 1, c = -1$ )

**Si  $c < -c^*$  :** Il n'existe qu'un seul équilibre qui est asymptotiquement stable. En effet :

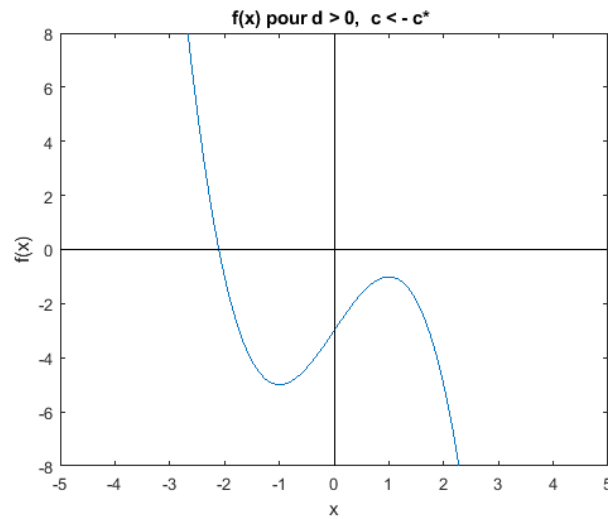


FIGURE 26 –  $f(x)$  pour  $d \leq 0$  et  $-c^* > c$  (simulation pour  $d = 1, c = -1$ )

Nous avons ainsi obtenu le diagramme de bifurcation suivant :

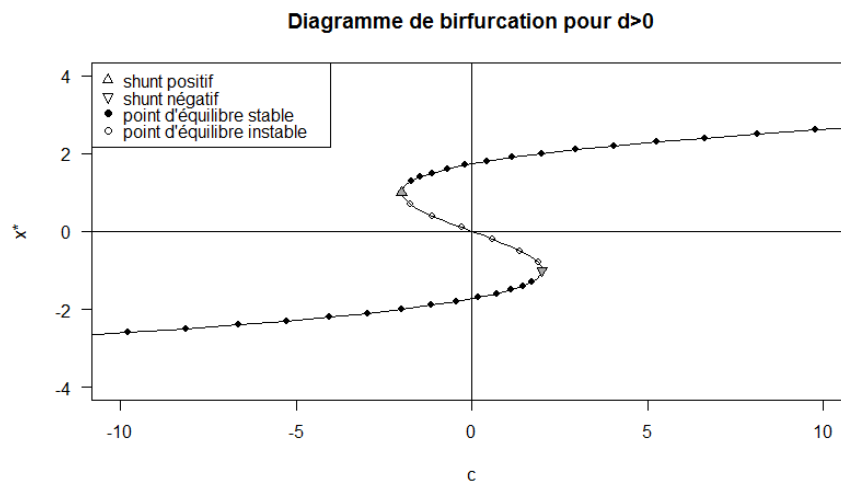


FIGURE 27 – diagramme de bifurcation pour  $d > 0$

3) Nous avons ainsi obtenu le diagramme de bifurcation en 3D suivant :

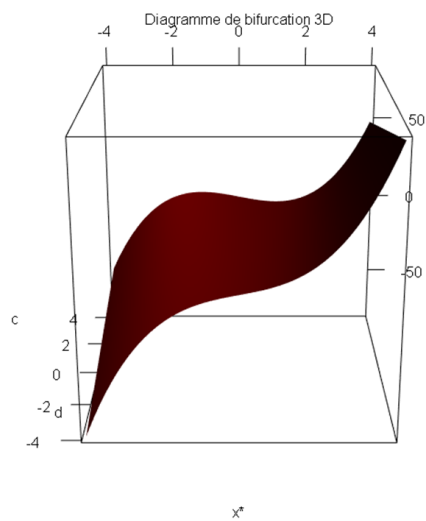


FIGURE 28 – diagramme de bifurcation en 3D



## 7 Exercice 6 - Matlab et les problèmes raides

On considère l'équation de Van der Pol suivante :

$$(\mathcal{VDP}) \begin{cases} y''(t) - \mu(1 - y^2(t))y'(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

1) Posons  $y_1 = y$  et  $y_2 = y'$ . Alors  $y'_1 = y_2$  et  $(\mathcal{VDP})$  s'écrit :

$$(\mathcal{VDP}) \begin{cases} y'_2 = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \\ y'_1 = y_2 \end{cases}$$

2) a. Nous avons obtenu le graphe suivant pour  $\mu = 1$  :

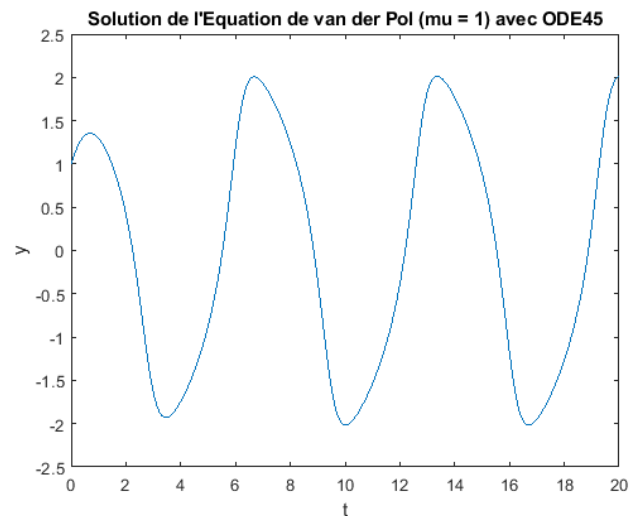


FIGURE 29 – Solution de  $(\mathcal{VDP})$  pour  $\mu = 1$  avec ode45

b. Nous avons obtenu la figure suivante :

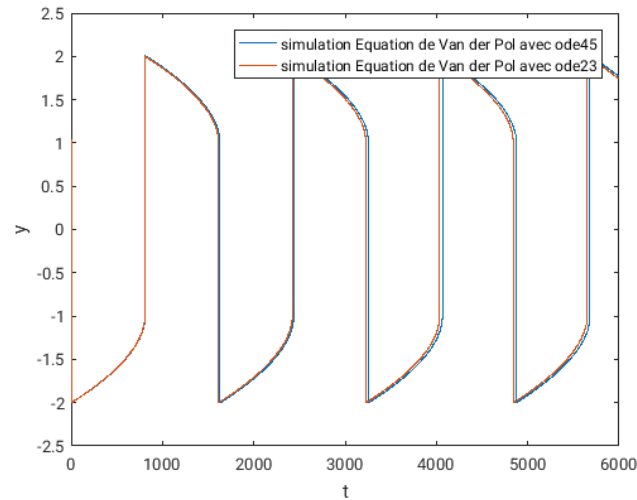


FIGURE 30 – Solution de (VDP) pour  $\mu = 1000$  avec ode45 et ode23

Nous remarquons qu'augmenter  $\mu$  augmente la raideur des oscillations. En outre, les solutions obtenues par ode23 et ode45 se superposent assez bien.

En revanche, en utilisant ode23, nous avons obtenu un temps d'exécution de **52,05 secondes**, alors qu'en utilisant ode45 nous avons obtenu un temps d'exécution de **132,65 secondes**. Cela nous semble logique, puisque ode45 utilise une méthode de Runge-Kutta avec plus de stages que la méthode ode23 qui se limite aux ordre 2 et 3.

3) En faisant varier  $\mu$ , nous avons obtenu les courbes en 3D suivantes :

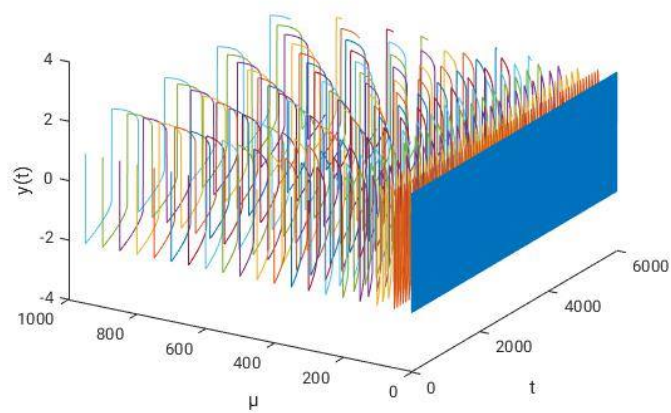


FIGURE 31 – Solutions de (VDP) avec ode45

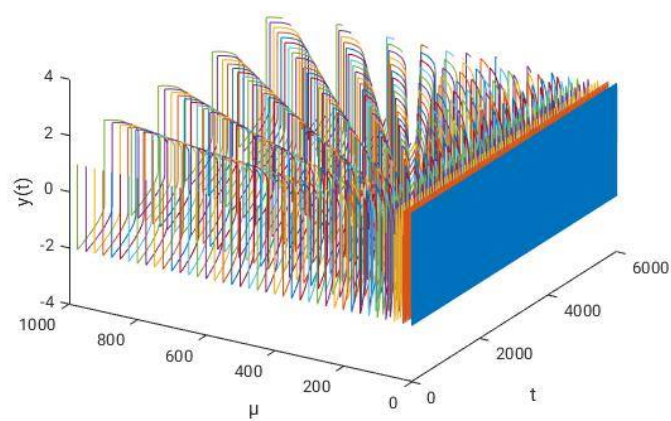


FIGURE 32 – Solutions de (VDP) avec ode23

## 8 Annexes

### Programme de l'exercice 1

Schéma d'Euler Explcite :

```
function [t,y]=EulODE (dydt, tspan,y0,h)
%[t, y] = EulODE (dydt, tspan,y0,h) :
% utilise la méthode d'Euler explicite pour résoudre l'équation
% différentielle ordinaire (EDO) donnée.
% INPUT : les données à rentrer sont :
% dydt = nom du fichier Matlab qui évalue l'EDO
% tspan = [ti, tf ] où ti et tf sont les valeurs initiales
% et finale de la variable t.
% y0 = condition initiale.
% h = pas de temps %
% OUTPUT : les données qui sortiront seront :
% t = vecteur des différents temps tj .
% y = vecteur des solutions approchées par la méthode d'Euler
ti = tspan(1) ;
tf =tspan(2);
t=(ti :h:tf);
n = length(t) ;
if t(n) < tf
t(n + 1) = tf ;
n=n+1;
end
y = y0 * ones(n, 1) ;
for i = 1 : n - 1
y(i + 1) = y(i) + feval(dydt, t(i), y(i)) * (t(i + 1) -t(i)) ;
end
plot(t,y)
```

### Équation différentielle linéaire N°1 :

Nous avons créé un second fichier nommé "EDOex1.m" afin d'appeler la méthode d'Euler pour le calcul de la fonction  $U(t)$ . Ce fichier contient le programme ci-dessous :

```
function y_exact= f(t,y)
```

```
y_exact = exp(-150*t)+ (1/5)
end
```

**Schéma d'Euler Implicite :**

```
% Programmation d'une arithmético-géométrique
%Initialisation de la suite
%Puis calcul par récurrence
U(1)= 1
for i= 2:1:50
U(i+1) = (U(i)+30*h)/ (1+150*h)
end
```

### Programme de l'exercice 3

**Solution exacte :**

```
function y_exact3= f(t ,y0 )
y_exact3 = y0*exp(-0.5*(t.^2))
end
```

**Équation différentielle :**

```
function dydt=diffeq(t,y)
dydt= -t*y;
end
```

**Schéma du point milieu :**

```
function [t,y]=EulODE_half_point (dydt, tspan,y0,h)

ti = tspan(1) ;
tf =tspan(2);
t=(ti :h:tf);
n = length(t) ;
if t(n) < tf
t(n + 1) = tf ;
```

```
n=n+1;
end
y = y0 * ones(n, 1) ;
for i = 1 : n - 1

y(i + 1) = y(i) + feval(dydt, t(i)+(h/2), y(i)+(h/2)) * (t(i + 1) -t(i)) ;
end
```

#### Schéma de Runge Kutta 4 :

```
function [t,y]=RK4 (dydt, tspan,y0,h)

ti = tspan(1) ;
tf =tspan(2);
t=(ti :h:tf);
n = length(t) ;
if t(n) < tf
t(n + 1) = tf ;
n=n+1;
end
y = y0 * ones(n, 1) ;
for i = 1 : n - 1
    Y1 = feval(dydt, t(i) , y(i));
    Y2 = feval(dydt, t(i) + (h/2) , y(i) +(h/2)*Y1 );
    Y3 = feval (dydt, t(i) + (h/2) , y(i) +(h/2)*Y2);
    Y4 = feval (dydt, t(i) + h , y(i) +h *Y3);

    y(i + 1) = y(i) + (1/6)*h* (Y1 + 2*Y2 + 2*Y3 +Y4) ;
end
```

#### Programme de l'exercice 4

##### Système d'équations différentielles :

```
function yp=predprey(t,y)
%Le premier vecteur représente la dynamique de la population 1
%Le second vecteur représente la dynamique de la population 2
```

```
yp=[1.2*y(1)-0.6*y(1)*y(2)  
;-0.8*y(2)+0.3*y(1)*y(2)] ;
```

**Initialisation du workspace :**

```
tspan=[0,20]  
y0=[2,1]
```

**Représentation des données :**

```
plot(t,y)  
xlabel('\fontsize{12}\btemps')  
ylabel('\fontsize{12}\bfpopulation')  
legend('\fontsize{12}\bfpreys','\fontsize{12}\bfpredators')
```