

# ADPS 25L — Laboratorium 2 (rozwiązania)

Dariusz Kopka

## Zadanie 1 (1 pkt)

### Treść zadania

Rozkład Poissona jest często używany do modelowania ruchu ulicznego (o małym natężeniu). Plik skrety.txt zawiera liczby pojazdów skręcających na pewnym skrzyżowaniu w prawo w przeciągu trzystu 3-minutowych przedziałów czasu (dane zostały zebrane o różnych porach dnia).

- Wczytaj dane za pomocą komendy `scan('skrety.txt')`.
- Dopasuj do danych rozkład Poissona, tj. wyestymuj parametr  $\lambda$  rozkładu Poissona, zapisz jego wartość w sprawozdaniu.
- Sprawdź i opisz zgodność rozkładu o wyestymowanym parametrze  $\lambda$  z zarejestrowanymi danymi porównując graficznie empiryczną i teoretyczną funkcję prawdopodobieństwa. Użyj funkcji `table()` i `dpois()` analogicznie jak w przykładzie 4 laboratorium 1.
- Metodą bootstrapu nieparametrycznego oszacuj odchylenie standardowe estymatora parametru  $\lambda$ , zapisz jego wartość w sprawozdaniu.

### Rozwiązanie

Wczytaj dane za pomocą komendy `scan('skrety.txt')`.

```
dane <- scan('skrety.txt')
```

Dopasuj do danych rozkład Poissona, tj. wyestymuj parametr  $\lambda$  rozkładu Poissona, zapisz jego wartość w sprawozdaniu.

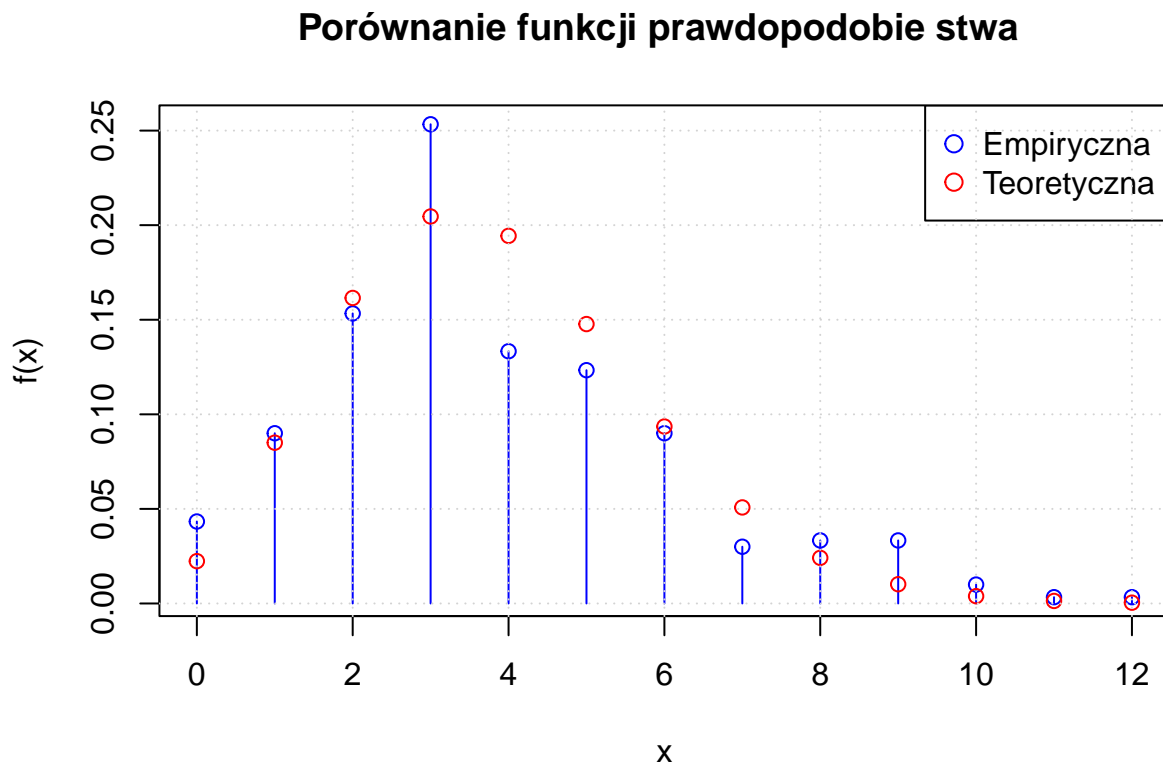
```
Arg <- 0:max(dane)
Freq <- as.numeric(table(factor(dane, levels = Arg))) / length(dane)
est_lambda <- mean(dane)
```

Estymatorem parametru  $\lambda$  rozkładu Poissona wyznaczonym metodą momentów jest średnia arytmetyczna z próby. W tym przypadku:  $\hat{\lambda} = 3.8$ .

Sprawdź i opisz zgodność rozkładu o wyestymowanym parametrze  $\lambda$  z zarejestrowanymi danymi porównując graficznie empiryczną i teoretyczną funkcję prawdopodobieństwa. Użyj funkcji `table()` i `dpois()` analogicznie jak w przykładzie 4 laboratorium 1.

```
teoretyczna <- dpois(Arg, lambda = est_lambda)

plot(Freq~Arg, col = 'blue', type = 'h',
     main = "Porównanie funkcji prawdopodobieństwa",
     xlab = "x", ylab = "f(x)")
points(Freq~Arg, col = 'blue')
points(teoretyczna~Arg, col = "red")
legend("topright", legend = c("Empiryczna", "Teoretyczna"),
      col = c("blue", "red"), pch = c(1, 1), pt.cex = 1.2)
grid()
```



Analiza zgodności empirycznej funkcji prawdopodobieństwa z teoretycznym rozkładem Poissona o parametrycznej wartości  $\lambda = 3.8$  wskazuje na dobrą zgodność w zakresie niższych wartości zmiennej losowej  $x \in 0, 1, 2$ . W tym przedziale różnice między wartościami empirycznymi a teoretycznymi są minimalne.

Dla wartości  $x = 3$  obserwuje się istotne dodatnie odchylenie empirycznej częstości względem wartości teoretycznej — szczyt rozkładu empirycznego jest wyraźnie wyższy niż przewidywany przez model. Odchylenie to jest częściowo kompensowane przez ujemne różnice dla kolejnych wartości zmiennej losowej  $x \in 4, 5$ , gdzie empiryczna funkcja prawdopodobieństwa znajduje się poniżej odpowiadającej jej wartości teoretycznej.

W dalszej części rozkładu (dla  $x \geq 6$ ) zgodność między funkcją empiryczną a modelem teoretycznym poprawia się, a różnice stają się marginalne. Model Poissona z wartością  $\lambda = 3.8$  można uznać za adekwatny do opisu badanych danych.

Metodą bootstrapu nieparametrycznego oszacuj odchylenie standardowe estymatora parametru  $\lambda$ , zapisz jego wartość w sprawozdaniu.

```
K <- 1000
n <- 500
boot_res <- replicate(K, {
  boot_dane = sample(dane, replace = T)
  mean(boot_dane)
})
sd_mean = sd(boot_res)
```

Szacunkowe odchylenie standardowe estymatora parametru  $\lambda$  wynosi 0.1335794.

---

## Zadanie 2 (1 pkt)

### Treść zadania

- Dla wybranej jednej spółki notowanej na GPW oblicz wartości procentowych zmian najwyższych cen w dniu (high) w ciągu ostatnich dwóch lat i wykreśl ich histogram.
- Wyestymuj wartość średnią oraz wariancję procentowych zmian najwyższych cen dla wybranej spółki, zapisz te wartości w sprawozdaniu.
- Na podstawie histogramu i wykresu funkcji gęstości prawdopodobieństwa wyznaczonej dla wyestymowanych parametrów (wartość średnia i wariancja) zweryfikuj zgrubnie, czy możemy przyjąć, że procentowe zmiany najwyższych cen w dniu mają rozkład normalny.
- Zakładając, że zmiany najwyższych cen w dniu mają rozkład normalny wyznacz 90%, 95% i 99% przedziały ufności dla wartości średniej i wariancji procentowych zmian najwyższych cen w dniu dla wybranej spółki. Porównaj wyniki uzyskane dla różnych przedziałów ufności.

### Rozwiązanie

Dla wybranej jednej spółki notowanej na GPW oblicz wartości procentowych zmian najwyższych cen w dniu (high) w ciągu ostatnich dwóch lat i wykreśl ich histogram.

```
ticker = list("NEUCA" = 'neu')
# Wykorzystuję tu funkcję, którą napisałem w sprawozdaniu do pierwszego laboratorium.
akcje <- get_stock(ticker[[1]], start_date = "2024-03-28", end_date = "2025-03-29")
akcje$Date <- as.Date(akcje$Date)
akcje$High <- as.numeric(akcje$High)

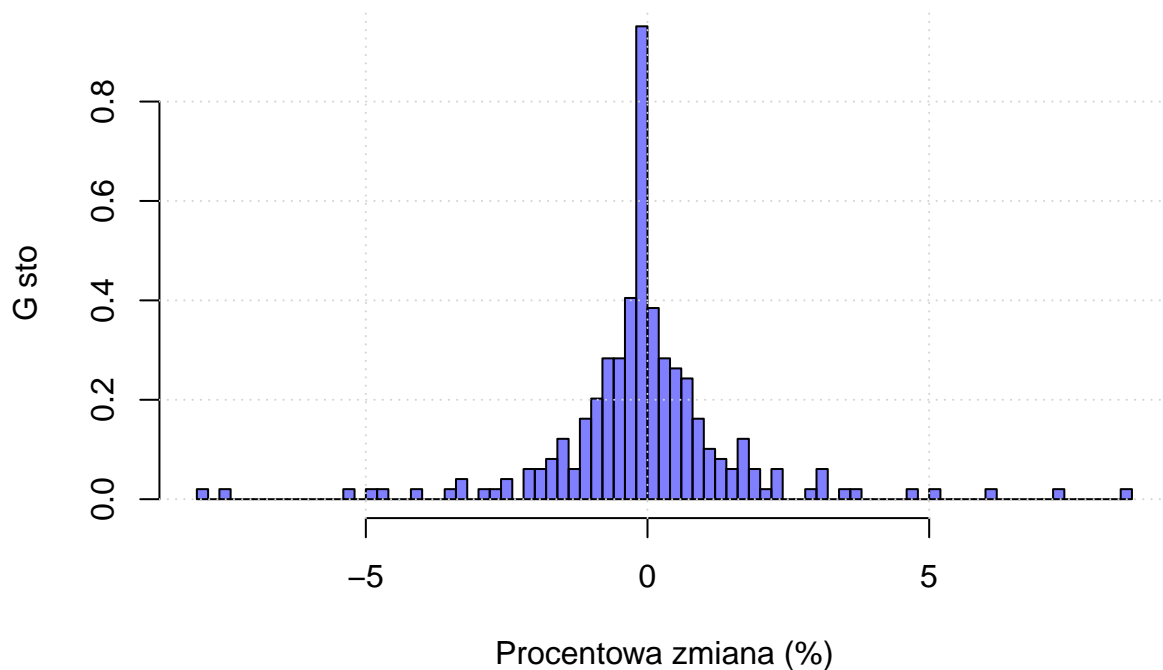
akcje$HighChange <- c(NA, 100 * diff(akcje$High) / head(akcje$High, -1))
dane <- na.omit(akcje$HighChange)

hist(akcje$HighChange,
     breaks = 60,
```

```
col = rgb(0, 0, 1, 0.5),
border = "black",
main = paste0(names(ticker[1]), " - histogram procentowych zmian",
              "\n najwyższego dziennego kursu"),

ylab = "Gęstość",
xlab = "Procentowa zmiana (%)",
probability = TRUE)
grid()
```

### NEUCA – histogram procentowych zmian najwyższego dziennego kursu



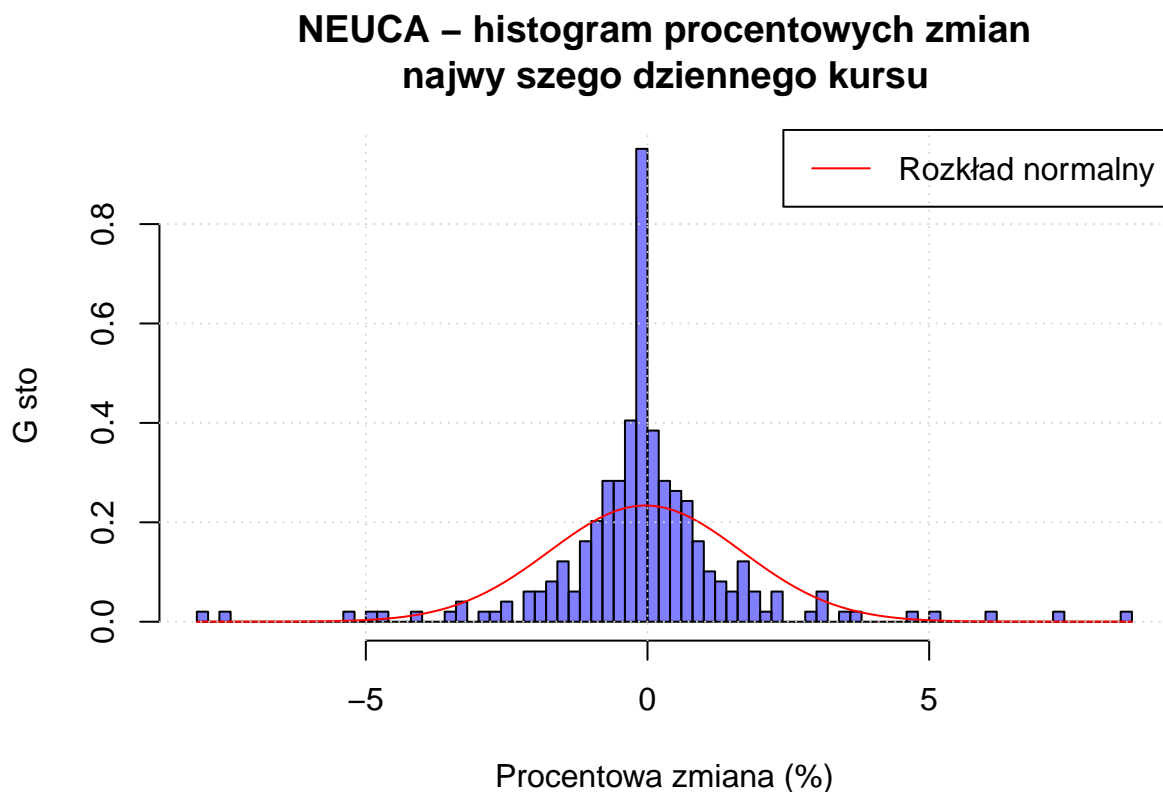
Wyestymuj wartość średnią oraz wariancję procentowych zmian najwyższych cen dla wybranej spółki, zapisz te wartości w sprawozdaniu.

```
sd_mean <- mean(dane)
sd_var <- var(dane)
sd_sd <- sd(dane)
```

Średnia dziennych procentowych zmian najwyższej ceny akcji spółki NEUCA w analizowanym okresie wynosiła -0.0355634 %, natomiast wariancja tych zmian wyniosła 2.9077215.

Na podstawie histogramu i wykresu funkcji gęstości prawdopodobieństwa wyznaczonej dla wyestymowanych parametrów (wartość średnia i wariancja) zweryfikuj zgrubnie, czy możemy przyjąć, że procentowe zmiany najwyższych cen w dniu mają rozkład normalny.

```
hist(akcje$HighChange,
     breaks = 60,
     col = rgb(0, 0, 1, 0.5),
     border = "black",
     main = paste0(names(ticker[1]), " - histogram procentowych zmian",
                   "\n najwyższego dziennego kursu"),
     ylab = "Gęstość",
     xlab = "Procentowa zmiana (%)",
     probability = TRUE)
curve(dnorm(x, mean = sd_mean, sd = sd_sd),
      col = "red", lwd = 1, add = TRUE)
legend("topright",
      legend = "Rozkład normalny",
      col = "red",
      lty = 1
)
grid()
```



Na podstawie graficznego porównania histogramu zmienności procentowej maksymalnej ceny dziennej ceny akcji spółki NEUCA z rozkładem normalnym wygenerowanym dla wyestymowanych wartości  $\mu = -0.0355634$  i  $\sigma = 1.7052042$  można zauważyć, że wartości empiryczne są znacznie bardziej skoncentrowane wokół średniej. W obrębie wartości średnich rozkład przeszacowuje, a w obrębie wartości skrajnych

niedoszacowuje częstości występowania. Na tej podstawie można stwierdzić, że rozkład normalny nie odzwierciedla poprawnie danych empirycznych.

Zakładając, że zmiany najwyższych cen w dniu mają rozkład normalny wyznacz 90%, 95% i 99% przedziały ufności dla wartości średniej i wariancji procentowych zmian najwyższych cen w dniu dla wybranej spółki. Porównaj wyniki uzyskane dla różnych przedziałów ufności.

```
lev <- c(0.9, 0.95, 0.99)
n <- length(akcje$HighChange)

przedzialy <- function(lev) {
  w = sd_sd * qt((1 + lev) / 2, n - 1) / sqrt(n)
  mean_min = sd_mean - w
  mean_max = sd_mean + w

  a = (1 - lev)/2
  b = (1 - lev)/2 # b = a
  var_min = (n - 1) * sd_sd^2 / qchisq(1 - b, n - 1)
  var_max = (n - 1) * sd_sd^2 / qchisq(a, n-1)
  data.frame(
    lev,
    mean_min,
    mean_max,
    var_min,
    var_max)
}

df <- do.call(rbind, lapply(lev, przedzialy))
```

Granice 90% przedziału ufności dla wartości **średniej** wynoszą: -0.2143, 0.1432

Granice 95% przedziału ufności dla wartości **średniej** wynoszą: -0.2488, 0.1777

Granice 99% przedziału ufności dla wartości **średniej** wynoszą: -0.3166, 0.2455

Granice 90% przedziału ufności dla wartości **wariancji** wynoszą: 2.5230, 3.3940

Granice 95% przedziału ufności dla wartości **wariancji** wynoszą: 2.4560, 3.4973

Granice 99% przedziału ufności dla wartości **wariancji** wynoszą: 2.3318, 3.7115

Przedziały ufności wyznaczone dla poziomów ufności 90%, 95% i 99% pokazują, że wraz ze wzrostem poziomu ufności rośnie szerokość zakresu wartości. Jest to logiczne następstwo zwiększania poziomu ufności - jeśli chcemy z większym prawdopodobieństwem oszacować wartość parametru - zwiększamy szerokość przedziału z którego ten parametr szacujemy.

W przypadku przedziałów ufności wartości średniej przedziały są symetryczne względem estymatora, co wynika wprost ze wzorów  $\text{mean\_min} = \text{sd\_mean} - w$  oraz  $\text{mean\_max} = \text{sd\_mean} + w$ . Przedziały dla wariancji nie wykazują podobnej charakterystyki, ale również widać wzrost szerokości przedziałów wraz ze wzrostem poziomu ufności.

## Zadanie 3 (1,5 pkt.)

### Treść zadania

Rzucona pinezka upada ostrzem do dołu lub do góry. Doświadczenie to można opisać rozkładem Bernoulliego z parametrem  $p$  będącym prawdopodobieństwem tego, że pinezka upadnie ostrzem do góry.

Rozkład parametru  $p$  można opisać rozkładem beta o parametrach  $\alpha$  i  $\beta$ . Wartość średnia i wariancja w rozkładzie beta zależą od parametrów rozkładu w następujący sposób:

$$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \mathbb{V}X = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}, \quad \text{dominanta} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}.$$

- Na podstawie przypuszczanej (a priori) wartości oczekiwanej parametru  $p$  zaproponuj wartości parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  rozkładu a priori parametru  $p$ . Narysuj rozkład a priori parametru  $p$  (wykorzystaj funkcję `dbeta()`).
- Rzuć pinezką 20 razy i zanotuj wyniki kolejnych rzutów (1 - pinezka upada ostrzem do góry, 0 - pinezka upada ostrzem do dołu). Wyznacz i narysuj rozkład a posteriori parametru  $p$  oraz oblicz wartość bayesowskiego estymatora  $\hat{p}$ . W rozważanym przypadku rozkład a posteriori parametru  $p$  jest również rozkładem beta o parametrach:

$$\alpha_{\text{post}} = \alpha_{\text{prior}} + \sum_{i=1}^n x_i, \quad \beta_{\text{post}} = \beta_{\text{prior}} + n - \sum_{i=1}^n x_i, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

- Rzuć pinezką jeszcze 20 razy i zanotuj wyniki. Wyznacz i narysuj rozkład a posteriori oparty na wszystkich 40 rzutach oraz oblicz wartość bayesowskiego estymatora  $\hat{p}$  w tym przypadku. Porównaj wyniki z wynikami uzyskanymi po pierwszych 20 rzutach.
- Korzystając ze wzoru na wariancję rozkładu Beta wyznacz i porównaj wariancje rozkładów a priori, a posteriori po 20 rzutach i a posteriori po 40 rzutach.

### Rozwiązanie

Na podstawie przypuszczanej (a priori) wartości oczekiwanej parametru  $p$  zaproponuj wartości parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  rozkładu a priori parametru  $p$ . Narysuj rozkład a priori parametru  $p$  (wykorzystaj funkcję `dbeta()`).

```
# intuicyjnie zakładam, że prawdopodobieństwo sukcesu
# (pinezka upadła ostrzem do góry) wynosi 0.7
p <- 0.7
# EX = p # wartość oczekiwana
# p = alpha / (alpha + beta)
# alpha = 0.7 * (alpha + beta)
# alpha = 0.7*alpha + 0.7*beta
# alpha * 0.3 = 0.7 * beta
# alpha = (0.7/0.3) * beta
alpha_priori <- 7 # zaproponowana wartość alpha spełniająca równanie
beta_priori <- 3 # zaproponowana wartość beta spełniająca równanie

var_priori <- (alpha_priori * beta_priori) /
              ((alpha_priori + beta_priori)**2 * 2)
```

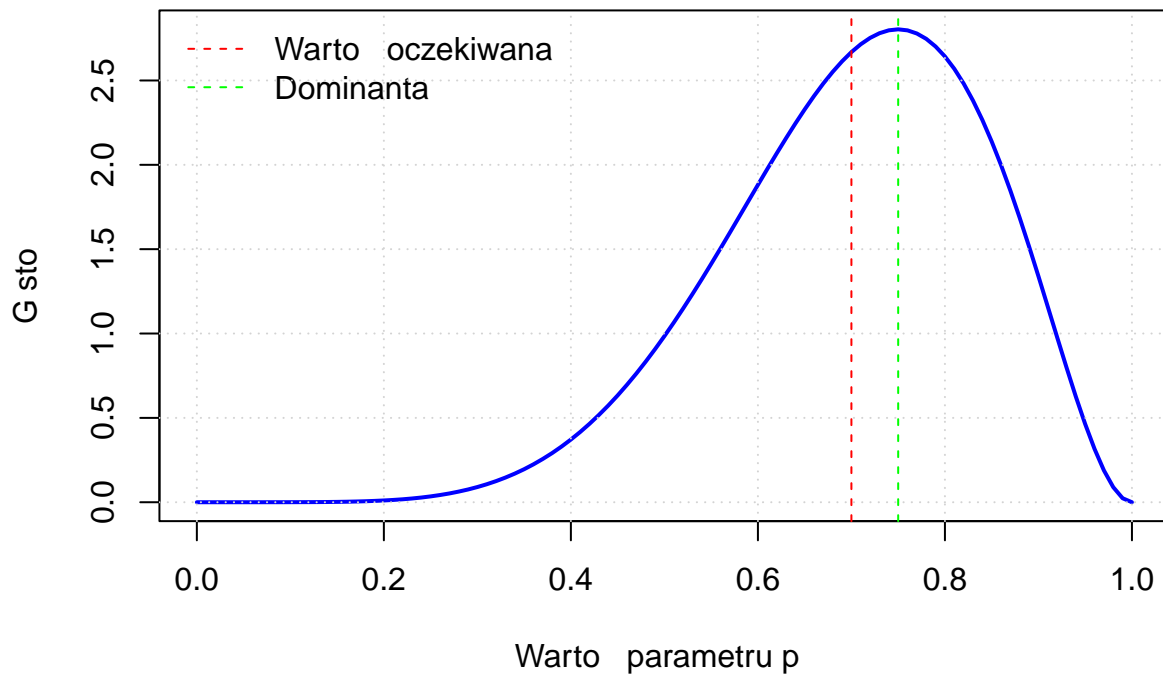
```

(alpha_priori + beta_priori + 1))
dominanta_priori <- (alpha_priori - 1) / (alpha_priori + beta_priori - 2)
sd_priori <- sqrt(var_priori)

curve(dbeta(x, alpha_priori, beta_priori),
      main = "Rozkład a priori parametru 'p' wg rozkładu Beta(7, 3)",
      xlab = "Wartość parametru p",
      ylab = "Gęstość",
      type = "l",
      lwd = 2,
      col = "blue")
abline(v = p, col = "red", lty = 2)
abline(v = dominanta_priori, col = "green", lty = 2)
legend("topleft", legend = c("Wartość oczekiwana", "Dominanta"),
      col = c("red", "green"), lty = 2, bty = "n")
grid()

```

### Rozkład a priori parametru 'p' wg rozkładu Beta(7, 3)



Przy założonym prawdopodobieństwie sukcesu  $p = 0.7$  zaproponowane wartości parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  wynoszą odpowiednio 7 i 3. Wartość oczekiwana jest równa prawdopodobieństwu sukcesu tj.  $\mathbb{E}X = p = 0.7$ . Dla tak dobranych parametrów wariancja  $\mathbb{V}X = 0.0190909$  a dominanta jest równa 0.75. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa jest przesunięty w prawo względem wartości oczekiwanej.



Rzucić pinezką 20 razy i zanotuj wyniki kolejnych rzutów (1 - pinezka upada ostrzem do góry, 0 - pinezka upada ostrzem do dołu). Wyznacz i narysuj rozkład a posteriori parametru  $p$  oraz oblicz wartość bayesowskiego estymatora  $\hat{p}$ . W rozważanym przypadku rozkład aposteriori parametru  $p$  jest również rozkładem beta o parametrach:

$$\alpha_{\text{post}} = \alpha_{\text{prior}} + \sum_{i=1}^n x_i, \quad \beta_{\text{post}} = \beta_{\text{prior}} + n - \sum_{i=1}^n x_i, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

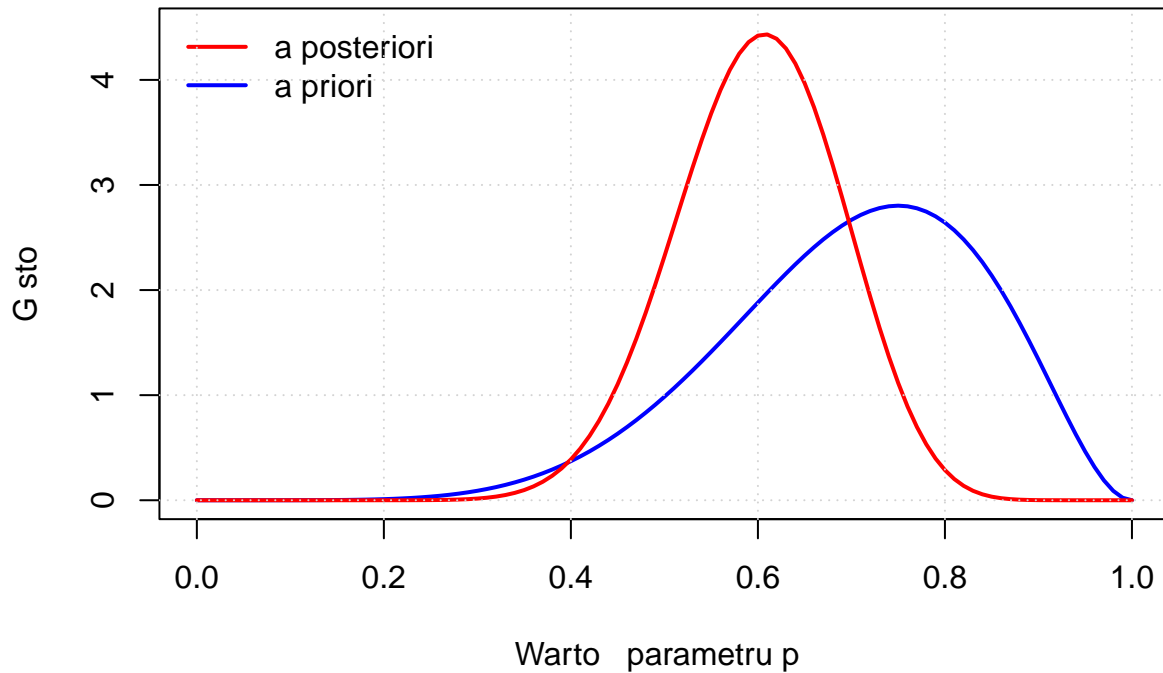
```
n <- 20 #liczba rzutów (pojedynczych prób)
praw_proba1 <- c(1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1)
alpha_post <- alpha_priori + sum(praw_proba1)
beta_post <- beta_priori + n - sum(praw_proba1)

p_hat <- alpha_post / (alpha_post + beta_post)

var_post <- (alpha_post * beta_post) /
  ((alpha_post + beta_post)**2 *
   (alpha_post + beta_post + 1))
dominanta_post <- (alpha_post - 1) / (alpha_post + beta_post - 2)
sd_post <- sqrt(var_post)

curve(dbeta(x, alpha_priori, beta_priori),
      main = "Rozkład a priori vs. a posteriori",
      xlab = "Wartość parametru p",
      ylab = "Gęstość",
      type = "l",
      lwd = 2,
      col = "blue",
      ylim = c(0, 4.5))
curve(dbeta(x, alpha_post, beta_post),
      add = T,
      lwd = 2,
      col = 'red')
legend("topleft", legend = c("a posteriori", "a priori"),
      col = c("red", "blue"), lty = 1, lwd = 2, bty = "n")
grid()
```

## Rozkład a priori vs. a posteriori



Wyznaczono parametry  $\alpha_{post} = 18$  oraz  $\beta_{post} = 12$ .

Bayesowski estymator parametru  $p$  to wartość oczekiwana z rozkładu a posteriori (w tym przypadku rozkładu  $\text{Beta}(18, 12)$ ) a zatem  $\hat{p} = 0.6$ .

Rzuć pinezką jeszcze 20 razy i zanotuj wyniki. Wyznacz i narysuj rozkład a posteriori oparty na wszystkich 40 rzutach oraz oblicz wartość bayesowskiego estymatora  $\hat{p}$  w tym przypadku. Porównaj wyniki z wynikami uzyskanymi po pierwszych 20 rzutach.

```
praw_proba2 <- c(0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)
alpha_post2 <- alpha_priori + (sum(praw_proba1) + sum(praw_proba2))
beta_post2 <- beta_priori + 2*n - (sum(praw_proba1) + sum(praw_proba2))

p_hat2 <- alpha_post2 / (alpha_post2 + beta_post2)

var_post2 <- (alpha_post2 * beta_post2) /
  ((alpha_post2 + beta_post2)**2 *
   (alpha_post2 + beta_post2 + 1))
dominanta_post2 <- (alpha_post2 - 1) / (alpha_post2 + beta_post2 - 2)
sd_post2 <- sqrt(var_post2)

curve(dbeta(x, alpha_priori, beta_priori),
      main = "Rozkład a priori vs. a posteriori",
      xlab = "Wartość parametru p",
      ylab = "Gęstość",
```

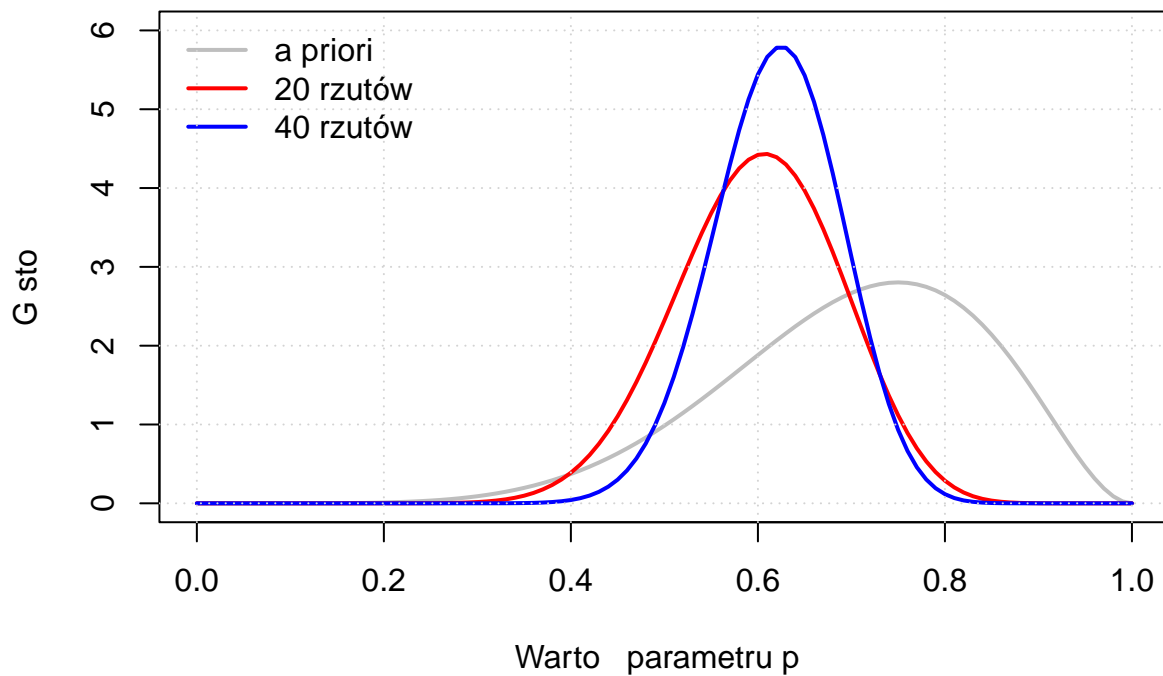
```

type = "l",
lwd = 2,
col = "gray",
ylim = c(0, 6))
curve(dbeta(x, alpha_post, beta_post),
      add = T,
      lwd = 2,
      col = 'red')
curve(dbeta(x, alpha_post2, beta_post2),
      add = T,
      lwd = 2,
      col = 'blue')

legend("topleft", legend = c("a priori", "20 rzutów", "40 rzutów"),
      col = c("grey", "red", "blue"), lty = 1, lwd = 2, bty = "n")
grid()

```

## Rozkład a priori vs. a posteriori



Dla czterdziestu rzutów pinezką wyznaczono parametry  $\alpha_{post2} = 31$  oraz  $\beta_{post2} = 19$ .

Bayesowski estymator parametru  $p$  to wartość oczekiwana z rozkładu a posteriori (w tym przypadku) rozkładu  $\text{Beta}(31, 19)$  a zatem  $\hat{p}_2 = 0.62$ .

Korzystając ze wzoru na wariancję rozkładu Beta wyznacz i porównaj wariancje rozkładów a priori, a posteriori po 20 rzutach i a posteriori po 40 rzutach.

```
var_priori <- (alpha_priori * beta_priori) /  
              ((alpha_priori + beta_priori)**2 * (alpha_priori + beta_priori + 1))  
var_post <- (alpha_post * beta_post) /  
            ((alpha_post + beta_post)**2 * (alpha_post + beta_post + 1))  
var_post2 <- (alpha_post2 * beta_post2) /  
             ((alpha_post2 + beta_post2)**2 * (alpha_post2 + beta_post2 + 1))
```

Wariancje dla rozkładów a priori, po 20 rzutach i po 40 rzutach wynoszą odpowiednio: 0.0190909, 0.0077419, 0.0046196.

Dla wartości a priori wariancja jest stosunkowo wysoka. Oznacza to, że niepewność co do wartości parametru  $p$  jest wysoka. Z każdym dostarczeniem dodatkowych wyników pomiarów niepewność się zmniejsza co jasno obrazuje zmniejszająca się wartość wariancji po 20 a następnie po 40 próbach.

---

## Zadanie 4 (1,5 pkt.)

### Treść zadania

Plik fotony.txt zawiera odstępy między chwilami rejestracji kolejnych fotonów promieniowania gamma wykonywanymi za pomocą teleskopu kosmicznego Comptona (CGRO) w roku 1991.

- Wczytaj dane za pomocą komendy `scan('fotony.txt')`
- Metodą momentów oraz metodą największej wiarygodności wyznacz estymaty parametrów rozkładu gamma odpowiadające zarejestrowanym danym. Porównaj wyniki uzyskane dla obu metod.
- Narysuj na jednym wykresie histogram odstępów oraz funkcje gęstości rozkładu gamma o parametrach wyestymowanych za pomocą obu metod.
- Metodą bootstrapu parametrycznego wyznacz dla obu metod (momentów oraz największej wiarygodności) odchylenia standardowe estymatorów parametrów rozkładu gamma ( $\alpha$  i  $\beta$ ) oraz ich przedziały ufności na poziomie ufności 95%. Porównaj wyniki uzyskane dla obu metod.

### Rozwiązanie

Wczytaj dane za pomocą komendy `scan('fotony.txt')`

```
fotony <- scan('fotony.txt')
```

Metodą momentów oraz metodą największej wiarygodności wyznacz estymaty parametrów rozkładu gamma odpowiadające zarejestrowanym danym. Porównaj wyniki uzyskane dla obu metod.

```
# Metoda momentów
m1 = mean(fotony)
m2 = mean(fotony^2)
alpha_mom = m1^2/(m2- m1^2)
beta_mom = (m2- m1^2)/m1
```

Wartości estymatorów parametrów wyznaczone metodą momentów wynoszą:  $\hat{\alpha} = 1.0655$ ,  $\hat{\beta} = 73.6241$ .

```
# Metoda największej wiarygodności
fun = function(x) digamma(x) - log(x) - mean(log(fotony)) + log(mean(fotony))
alpha_nw1 = uniroot(fun, lower = 0.5, upper = 4)$root
beta_nw1 = mean(fotony)/alpha_nw1
```

Wartości estymatorów parametrów wyznaczone metodą największej wiarygodności wynoszą:  $\hat{\alpha} = 1.052$ ,  $\hat{\beta} = 74.5733$ .

Narysuj na jednym wykresie histogram odstępów oraz funkcje gęstości rozkładu gamma o parametrach wyestymowanych za pomocą obu metod.

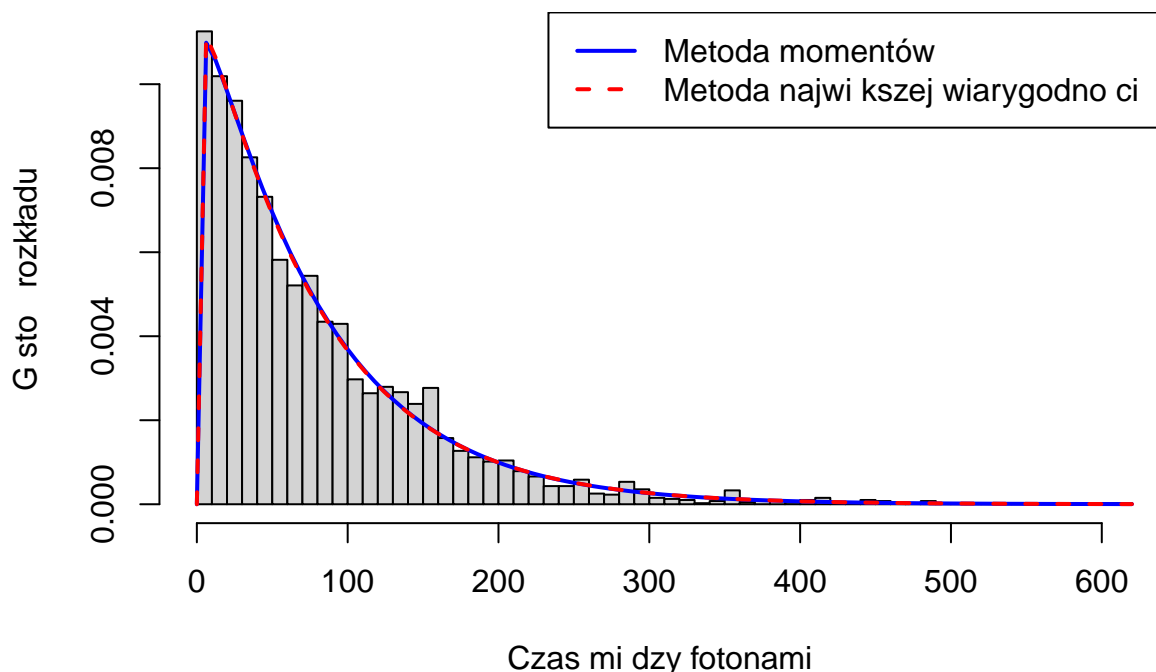
```
hist(fotony, breaks = 80, probability = TRUE,
     main = "Histogram odstępów i funkcja gęstości rozkładu gamma",
     xlab = "Czas między fotonami",
     ylab = "Gęstość rozkładu",
     col = "lightgray")

curve(dgamma(x, shape = alpha_mom, scale = beta_mom),
      col = "blue", lty = 1, lwd = 2, add = TRUE)

curve(dgamma(x, shape = alpha_nw1, scale = beta_nw1),
      col = "red", lty = 2, lwd = 2, add = TRUE)

legend("topright",
      legend = c("Metoda momentów", "Metoda największej wiarygodności"),
      col = c("blue", "red"), lty = c(1, 2), lwd = 2)
```

## Histogram odst pów i funkcja g sto ci rozkładu gamma



Metodą bootstrapu parametrycznego wyznacz dla obu metod (momentów oraz największej wiarygodności) odchylenia standardowe estymatorów parametrów rozkładu gamma ( $\alpha$  i  $\beta$ ) oraz ich przedziały ufności na poziomie ufności 95%. Porównaj wyniki uzyskane dla obu metod.

```
K = 1000
n <- length(fotony)

# Metoda momentów
boot_res_mom = replicate(K, {
  boot_dane = rgamma(n, shape = alpha_mom, scale = beta_mom)

  m1 = mean(boot_dane)
  m2 = mean(boot_dane^2)
  alpha_boot_mom = m1^2/(m2- m1^2)
  beta_boot_mom = (m2- m1^2)/m1

  c(alpha_boot_mom, beta_boot_mom)
})
sd_alpha_mom = sd(boot_res_mom[1,])
sd_beta_mom = sd(boot_res_mom[2,])
ci_alpha_mom <- quantile(boot_res_mom[1, ], c(0.05, 0.95))
ci_beta_mom <- quantile(boot_res_mom[2, ], c(0.05, 0.95))

boot_res_nw1 = replicate(K, {
```

```

boot_dane = rgamma(n, shape = alpha_nw1, scale = beta_nw1)

# Metoda największej wiarygodności
fun = function(x) digamma(x) - log(x) - mean(log(boot_dane)) + log(mean(boot_dane))
alpha_boot_nw1 = uniroot(fun, lower = 0.5, upper = 4)$root
beta_boot_nw1 = mean(boot_dane)/alpha_boot_nw1

c(alpha_boot_nw1, beta_boot_nw1)
})

sd_alpha_nw1 = sd(boot_res_nw1[1,])
sd_beta_nw1 = sd(boot_res_nw1[2,])
ci_alpha_nw1 <- quantile(boot_res_nw1[1, ], c(0.05, 0.95))
ci_beta_nw1 <- quantile(boot_res_nw1[2, ], c(0.05, 0.95))

```

Bootstrap parametryczny metodą momentów wykazał odchylenia standardowe parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  na poziomie odpowiednio 0.0340624 i 2.5309434. Na poziomie ufności 95% przedział ufności dla parametru  $\alpha$  to (1.014336, 1.1256545), a dla parametru  $\beta$  to (69.5203314, 77.6623083).

Dla metody największej wiarygodności wyniki odchyłeń standardowych to dla parametru  $\alpha = 0.0214533$ ,  $\beta = 1.8802649$ . Przedział ufności dla poziomu ufności 95% to (1.0176318, 1.0876041), a dla parametru  $\beta$  to (71.4812243, 77.7349354).

Metoda największej wiarygodności zwróciła mniejsze wartości odchyłeń parametrów  $\alpha$  (MoM = 0.0340624 vs. NW = 0.0214533) oraz  $\beta$  (Mom = 2.5309434 vs. NW = 1.8802649) co oznacza, że metoda największej wiarygodności lepiej przybliżyła wartości parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ .

Taki sam wniosek można wysnuć na podstawie analizy przedziałów ufności. Dla metody największej wiarygodności przedziały w przypadku obu parametrów są węższe.