Analytic Geometry 4.1

Theorem

圆锥曲线的统一定义： 平面内与一定点（焦点）和一条定直线（准线）的距离比为常数 e（离心率）的点的轨迹称为圆锥曲线。
当 $0 < e < 1$ 时为椭圆；当 $e = 1$ 时为抛物线；当 $e > 1$ 时为双曲线。

Exercise

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $(2, 1)$。
(1) 求椭圆的标准方程；
(2) 设直线 $l : y = kx + m$ 与椭圆相交于 A、B 两点，若 A、B 关于直线 $y = 2x$ 对称，求直线 l 的方程。

Analysis

Solution Strategy **解题思路：**

1. **第一问：** 利用离心率公式 $e = \frac{c}{a}$ 和椭圆过定点条件建立方程组
2. **第二问：** 利用对称性质，若两点关于直线对称，则：
   - 连线中点在对称轴上
   - 连线斜率与对称轴斜率乘积为 -1

Detailed Calculation **具体计算：**

第一问： 由 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $c^2 = \frac{3a^2}{4}$。
由 $c^2 = a^2 - b^2$，得 $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{a^2}{4}$。
椭圆过点 $(2, 1)$，代入得：$\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$
将 $b^2 = \frac{a^2}{4}$ 代入：$\frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2} = 1$
解得 $a^2 = 8$，$b^2 = 2$。

$$\boxed{\text{椭圆方程：} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1}$$

第二问： 设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，中点 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$。
由对称性质：

$$\text{中点在对称轴上：} \frac{y_1 + y_2}{2} = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{1}$$

$$\text{斜率关系：} k \cdot 2 = -1\text{fi即}k = -\frac{1}{2} \tag{2}$$

联立椭圆方程与直线方程，利用韦达定理可得： $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 1}$

Note

解题要点：

- 对称问题的核心在于利用对称轴的性质
- 椭圆离心率 $e = \frac{c}{a}$ 是连接 a、b、c 的桥梁
- 联立方程时要注意判别式 $\Delta > 0$ 的条件

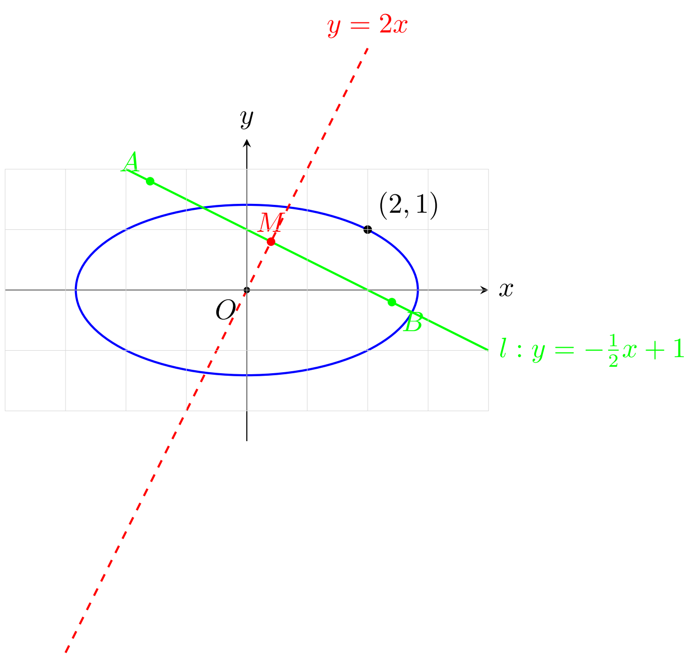

图 1: ***Figure 4.1 - Ellipse and Symmetric Line*** **图 4.1 - 椭圆与对称直线**

Extension

拓展思考：

1. **一般化问题：** 若椭圆上两点关于直线 $y = kx + c$ 对称，如何求解？
2. **双曲线情形：** 类似问题在双曲线中如何处理？

3. **参数方程法：** 利用椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 求解对称问题

相关定理：

- 焦点弦性质：过焦点的弦具有特殊的调和性质
- 切线方程：椭圆上一点的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$

Infinite Series 5.2

Exercise

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$ $(n\geq 1)$。
(1) 证明：$\frac{1}{a_n}$ 是等差数列；
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(3) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的值。

Analysis

Analysis Method **分析方法：**
这是典型的递推数列问题，关键在于找到合适的变换使得新数列具有简单的递推关系。
第一问： 对递推关系取倒数：

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n}$$

设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，则 $b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}$，$b_1=1$。
显然 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列。
第二问：

$$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$$

因此：$\boxed{a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{2}{n+1}}$

第三问：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+1}=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

此级数发散（调和级数）。

Note

级数收敛性判断：

- 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散
- p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，$p\leq 1$ 时发散
- 比值判别法和根值判别法的应用条件