千寻蹊径 复数专题

Theorem

复数的辐角 (Argument of a Complex Number)
复数 $z = x + yi$ 对应的辐角 θ 是指在复平面上，从正实轴逆时针旋转到向量 OZ（O 为原点，Z 为复数 z 对应的点）时所形成的角。辐角通常用 $\arg(z)$ 表示。它的计算方式取决于复数 z 所在的象限：

1. 当 $x > 0$ 时，$\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
2. 当 $x < 0$ 且 $y \geq 0$ 时，$\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$
3. 当 $x < 0$ 且 $y < 0$ 时，$\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$
4. 当 $x = 0$ 且 $y > 0$ 时，$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$
5. 当 $x = 0$ 且 $y < 0$ 时，$\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

需要注意的是，复数的辐角有无限多个值，它们相差 2π 的整数倍。我们通常会指定一个**主辐角** (Principal Argument)，记作 $\operatorname{Arg}(z)$，它的取值范围是 $(-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi)$。在大多数情况下，我们默认采用 $(-\pi, \pi]$ 作为主辐角的范围。

Example

需要要计算和式

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) + \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)$$

Analysis

Solution Strategy

1. 通过数形结合，将每个 arcsin 转换为 arctan 的形式。
2. 利用复数辐角的性质,算出最后得到的复数辐角.
3. 或者利用反正切的和差公式进行化简,最后得到一个简单的结果.

Detailed Calculation 具体计算：

第一问： 由 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $c^2 = \frac{3a^2}{4}$。
由 $c^2 = a^2 - b^2$，得 $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{a^2}{4}$。
椭圆过点 $(2, 1)$，代入得：$\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$

将 $b^2 = \frac{a^2}{4}$ 代入：$\frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2} = 1$

解得 $a^2 = 8$，$b^2 = 2$。

$$\boxed{\text{椭圆方程：}\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1}$$

第二问： 设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，中点 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$。

由对称性质：

$$\text{中点在对称轴上：}\frac{y_1+y_2}{2} = 2 \cdot \frac{x_1+x_2}{2} \tag{1}$$

$$\text{斜率关系：}k \cdot 2 = -1\text{fi即}k = -\frac{1}{2} \tag{2}$$

联立椭圆方程与直线方程，利用韦达定理可得：$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 1}$

Note

解题要点：

- 对称问题的核心在于利用对称轴的性质
- 椭圆离心率 $e = \frac{c}{a}$ 是连接 a、b、c 的桥梁
- 联立方程时要注意判别式 $\Delta > 0$ 的条件

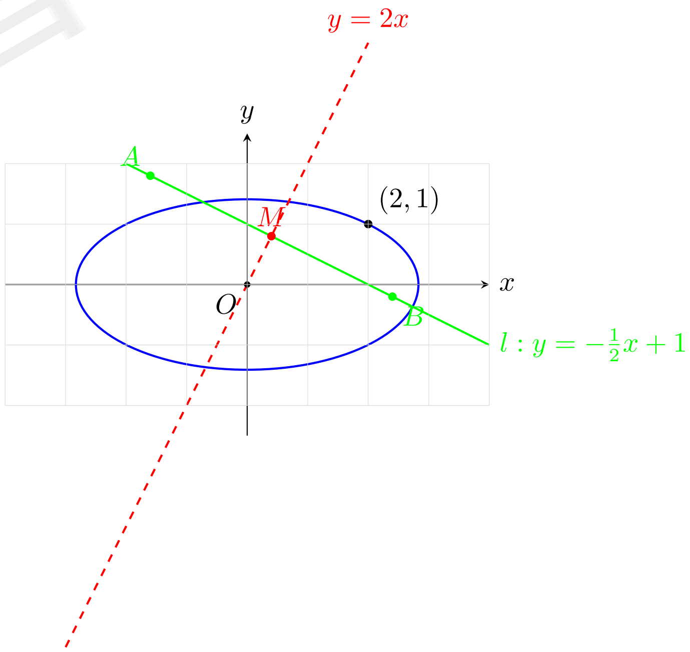

图 1: ***Figure 4.1 - Ellipse and Symmetric Line*** 图 4.1 - 椭圆与对称直线

Extension

拓展思考：

1. **一般化问题：** 若椭圆上两点关于直线 $y = kx + c$ 对称，如何求解？
2. **双曲线情形：** 类似问题在双曲线中如何处理？
3. **参数方程法：** 利用椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 求解对称问题

相关定理：

- 焦点弦性质：过焦点的弦具有特殊的调和性质
- 切线方程：椭圆上一点的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$

雪履千山客

Infinite Series 5.2

Summary

5.1 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$ $(n\geq 1)$。
(1) 证明：$\frac{1}{a_n}$ 是等差数列；
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(3) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的值。

Formula

Analysis Method　分析方法：
这是典型的递推数列问题，关键在于找到合适的变换使得新数列具有简单的递推关系。
第一问： 对递推关系取倒数：

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n}$$

设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，则 $b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}$，$b_1=1$。
显然 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列。
第二问：

$$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$$

因此：
第三问：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+1}=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

此级数发散（调和级数）。

Exercise

级数收敛性判断：

- 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散
- p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，$p\leq 1$ 时发散
- 比值判别法和根值判别法的应用条件