千寻蹊径 复数专题

Example

已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2。椭圆 Γ 在点 P 处的切线为 l，$Q \in l$，且满足直线 QF_1 与切线 l 的夹角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，则点 Q 在以 $C(0, \pm c\cot\theta)$ 为圆心，$\frac{a}{\sin\theta}$ 为半径的圆上。

Analysis

我们在复数平面中研究该问题。设椭圆中心为原点，焦点为 $f_1=-c, f_2=c$，动点 Q 为复数 q。利用椭圆的反射性质，焦点 F_1 关于切线 l 的对称点 F_1' (复数为 f_1') 满足：

$$|f_1'-c|=2a \tag{1}$$

点 Q 在切线 l 上，而 l 是 F_1F_1' 的垂直平分线，因此 $|q-f_1|=|q-f_1'|$。又因直线 QF_1 与切线 l 的夹角为 θ，可知 $\angle F_1QF_1'=2\theta$。由此得到：

$$\frac{f_1'-q}{f_1-q}=e^{\pm i2\theta}$$

解出 f_1':

$$f_1'=q+(f_1-q)e^{\pm i2\theta} \tag{2}$$

将方程 (2) 代入方程 (1)，并令 $f_1=-c$。通过一系列代数和三角恒等式变换，可得：

$$\begin{aligned}
|(q+(-c-q)e^{\pm i2\theta})-c| &= 2a\\
|q(1-e^{\pm i2\theta})-c(1+e^{\pm i2\theta})| &= 2a\\
|q\cdot e^{\pm i\theta}(\mp 2i\sin\theta)-c\cdot e^{\pm i\theta}(2\cos\theta)| &= 2a\\
|q(\mp 2i\sin\theta)-2c\cos\theta| &= 2a\\
2\sin\theta\left|q+\frac{c\cos\theta}{\pm i\sin\theta}\right| &= 2a\\
2\sin\theta\,|q\mp ic\cot\theta| &= 2a
\end{aligned}$$

最终得到点 Q 的轨迹方程：

$$|q-(\pm ic\cot\theta)|=\frac{a}{\sin\theta}$$

此方程为圆的标准形式 $|z-z_0|=R$，其中圆心 $z_0=\pm ic\cot\theta$ (即 $C(0,\pm c\cot\theta)$)，半径 $R=\frac{a}{\sin\theta}$

Note

解题要点：

- 利用直角三角形的几何意义，将原式中各项arcsin统一转换为更便于运算的arctan形式
- 运用“复数相乘，辐角相加”的核心原理，把复杂的角度求和问题转化为复数乘法运算
- 根据实部与虚部符号判断其所在象限，并对主值进行修正，从而确定最终的角度和

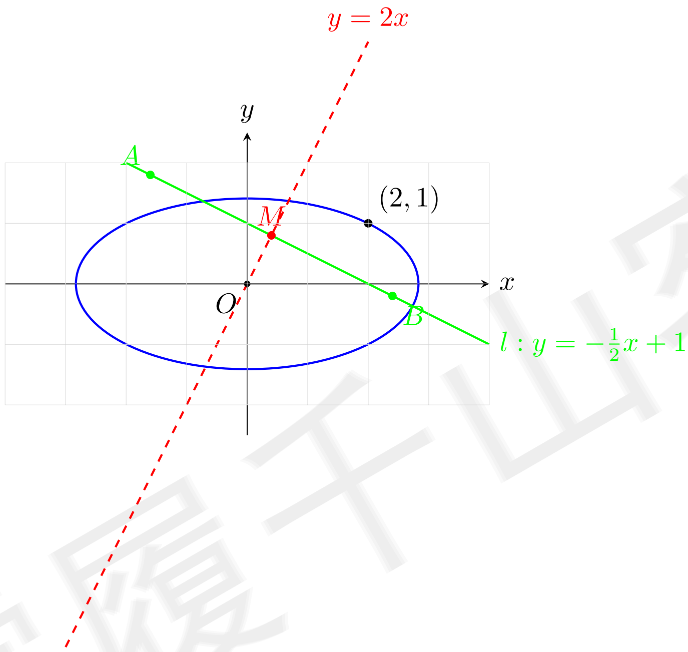

图 1: ***Figure 4.1 - Ellipse and Symmetric Line*** **图 4.1 - 椭圆与对称直线**

Extension

拓展思考：

1. **一般化问题：** 若椭圆上两点关于直线 $y = kx + c$ 对称，如何求解？
2. **双曲线情形：** 类似问题在双曲线中如何处理？
3. **参数方程法：** 利用椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 求解对称问题

相关定理：

- 焦点弦性质：过焦点的弦具有特殊的调和性质
- 切线方程：椭圆上一点的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

Infinite Series 5.2

Summary

5.1 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$ $(n\geq 1)$。
(1) 证明：$\frac{1}{a_n}$ 是等差数列；
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(3) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的值。

Formula

Analysis Method 分析方法：
这是典型的递推数列问题，关键在于找到合适的变换使得新数列具有简单的递推关系。
第一问： 对递推关系取倒数：

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n}$$

设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，则 $b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}$，$b_1=1$。
显然 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列。
第二问：

$$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$$

因此：
第三问：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+1}=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

此级数发散（调和级数）。

Exercise

级数收敛性判断：

- 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散
- p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，$p\leq 1$ 时发散
- 比值判别法和根值判别法的应用条件