2025 年 6 月 24 日

第8课　基本不等式及其应用

知识要点

知识点一、平均值不等式

1. 对于正数a,b称$\dfrac{a+b}{2}$是a,b的算数平均值，并称$\sqrt{ab}$是a,b的几何平均值
2. **平均值不等式:** 两个正数的算术平均值大于等于它们的几何平均值，即对于任意的正数，有
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},\ (a>0,b>0)$$
当且仅当$a=b$时等号成立

三注意:

“一正”： 不等式中的各项必须都是正数;
“二定”： 和定积最大，积定和最小;
“三相等”： 只有满足了不等式中等号成立的条件，才能使用基本不等式求最值.

3. 平均值不等式的变式与推广

(a) 调和平均数$\leq$ 几何平均数$\leq$ 算术平均数$\leq$平方平均数：
$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\ (a>0,b>0,\text{当且仅当}a=b\text{时取等号})$$

(b) 推广：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$是n个正数，则$\dfrac{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n}{n}$称为这$n$个正数的算术平均数，$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n}$称为这个正数的几何平均数，它们的关系是：
$$\frac{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n}$$
当且仅当$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$时等号成立。

题型一:基本不等式基本应用

例题 1

设 $x>0$,证明 $x+\frac{1}{x} \geq 2$,并指出等号成立条件

解析

解:

证明因为 $x>0$,由平均值不等式,得

$$x+\frac{1}{x} \geq 2 \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}=2,$$

且等号只有当 $x=\frac{1}{x}$,即 $x^{2}=1$ 时才成立. 由于 $x>0$,所以 $x=1$.

因此,当且仅当 $x=1$ 时, $x+\frac{1}{x}=2$.

例题 2

证明:若 $x<0$,则 $x+\frac{1}{x} \leq-2$,并指出等号成立条件。

解析

解:

证明根据题意, $a<0$,则 $-a>0$,

左式 $=a+\frac{1}{a}=-\left[(-a)+\left(-\frac{1}{a}\right)\right]$,

又由 $(-a)+\left(-\frac{1}{a}\right) \geq$

$2 \sqrt{(-a) \times\left(-\frac{1}{a}\right)}=2,$

则有 $a+\frac{1}{a} \leq-2$,当且仅当 $a=-1$ 时,等号成立. 故 $a+\frac{1}{a} \leq-2$,当且仅当 $a=-1$ 时, 等号成立.

例题 3

$x \neq 0, x \in R$,则 $x+\frac{1}{x}$ 的取值范围_____；

解析

解：

【答案】(1) $(-\infty,-2] \cup[2,+\infty)$ ；

例题 4

设 $ab>0$,证明 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq 2$,并指出等号成立的条件

解析

解：

证明因为 $ab>0$,所以 a 、 b 同号,因而 $\frac{b}{a}>0, \frac{a}{b}>0$.

由平均值不等式, 得

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq 2 \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}}=2,$$

且等号当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=b$ 时才成立.

例题 5

已知 $a+b=1, a, b \in \mathrm{R}$,求证: $a^{2}+b^{2} \geq \frac{1}{2}$,并指出等号成立的条件.

解析

解：

常用不等式: $2\left(a^{2}+b^{2}\right) \geq(a+b)^{2}$

解对任意给定的实数 a, b ,总有 $a^{2}+b^{2} \geq 2ab$,且等号当且仅当 $a=b$ 时成立.

两边同时加上 $a^{2}+b^{2}$,得 $2\left(a^{2}+b^{2}\right) \geq(a+b)^{2}$,即 $a^{2}+b^{2} \geq \frac{(a+b)^{2}}{2}=\frac{1}{2}$.

等号当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时成立.

注意 $2\left(a^{2}+b^{2}\right) \geq(a+b)^{2}$ 也是我们常用的一个不等式.

例题 6

(6)若对任意 $a>0$, $b>0$,不等式 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{m}{2a+b}$ 恒成立,则 m 的取值范围是______.

解析

解:

【答案】 $(-\infty,9)$.

【解答】解: $\because a>0,b>0,\therefore 2a+b>0,\because$ 不等式 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{m}{2a+b}$ 恒成立,

$\therefore m\leq\frac{2(2a+b)}{a}+\frac{2a+b}{b}=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}$ 恒成立,

$\because \frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=4$,当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$,即 $a=b$ 时取等号, $\therefore m\leq 9$,即 $m\in(-\infty,9]$

例题 7

设 $x\in R$,求函数 $y=x(4-x)$ 的最大值

解析

解:

【答案】 4

例题 8

设 a 、 b 为正数,且 $a+2b=1$,比较 ab 与 $\frac{1}{8}$ 的值的大小

解析

解:

【答案】 $ab<\frac{1}{8}$

例题 9

已知 $y=2x\sqrt{1-x^2}\,(0<x<1)$,求 y 的最大值

解析

解：

【答案】 1

例题 10

若 $x^2+y^2=1$,则 xy 的取值范围.

解析

解：

【答案】 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

例题 11

已知 $a,b\in R^+$, $a^2+\frac{b^2}{2}=1$,求 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值。

解析

解：

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 $a\sqrt{1+b^2}=\sqrt{2}\cdot\left(a\cdot\sqrt{\frac{1+b^2}{2}}\right)\leq\sqrt{2}\left(\frac{a^2+\frac{1+b^2}{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

当且仅当 $a=\sqrt{\frac{1+b^2}{2}}$ 时取等,因此 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

例题 12

若 $0<x<1,0<y<1$,且 $x \neq y$,求在 $x^2+y^2, 2xy, x+y, 2\sqrt{xy}$ 中的最大数和最小数

解析

解：

【答案】【 $x+y$ 】

分析可先用平均值不等式作判断,以减少比较的次数.

解由平均值不等式,知 $x^2+y^2>2xy, x+y>2\sqrt{xy}$.

又 $\because 0<x<1,0<y<1$,

$\therefore x^2<x, y^2<y$.

$\therefore x^2+y^2<x+y$,故最大数为 $x+y$.

而 $x<\sqrt{x}, y<\sqrt{y}$,

$\therefore 2xy<2\sqrt{xy}$,故最小数为 $2xy$.

例题 13

已知 a, b 均为正实数,求证: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,并指出等号成立的条件

解析

解：

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 分析由平均值不等式知 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,故本题只需证明 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$ 和 $\frac{a+b}{2} \leq$ 又易证 $2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2$. $\therefore \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$.

证明 $\because a, b$ 均为正实数, $\therefore \frac{1}{a}>0, \frac{1}{b}>0$. $\therefore \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$,且等号当且仅当 $a=b$ 时成立. 由平均值不等式,得 $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{ab}}>0$. 而由平均值不等式,得 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 显然成立,且等号当且仅当 $a=b$ 时成

$\therefore \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$,且等号当且仅当 $a=b$ 时成立. 立. $\therefore \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

例题 14

如果正数 a,b,c,d 满足 $a+b=cd=4$,那么( )

(A) $ab\leq c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

(B) $ab\geq c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

(C) $ab\leq c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

(D) $ab\geq c+d$,且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

解析

解:

【答案】A

如果 a , b 是正数,则根据均值不等式有: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

,则 $(a+b)^2\geq 4ab$

如果 c , d 是正数,则根据均值不等式有: $c+d\geq 2\sqrt{cd}$

; 则 $cd\leq \dfrac{(c+d)^2}{4}$

$\because a,b,c,d$ 满足 $a+b=cd=4$,

$\therefore 2\sqrt{ab}\leq a+b=cd\leq \dfrac{(c+d)^2}{4}$

当且仅当 $a=b=c=d=2$ 时取等号.

化简即为: $ab\leq c+d$ 且等号成立时 a , b , c , d 的取值唯

-.

故选: A .

(1) $x+\dfrac{1}{x+a}\Rightarrow x+a+\dfrac{1}{x+a}-a$

(2) $x\left(a-bx\right)\Rightarrow bx\left(a-bx\right)\cdot\dfrac{1}{b}$

题型二:配凑法

$$x+\frac{1}{x+a} \quad \Rightarrow \quad x+a+\frac{1}{x+a}-a$$

$$x(a-bx) \quad \Rightarrow \quad bx(a-bx)\cdot\frac{1}{b}$$

例题 15

函数 $y=x+\frac{1}{x-1}\,(x>1)$ 的最小值为_____

解析

解:

【答案】 3

例题 16

已知 $0<x<\frac{1}{2}$,求 $y=\frac{1}{2}x\,(1-2x)$ 的最大值为_____

解析

解:

【答案】 $\frac{1}{16}$

例题 17

已知 $x<\frac{5}{4}$,求函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值。

解析

解:

【答案】因 $4x-5<0$,所以首先要“调整” 符号,又 $(4x-2)\cdot\frac{1}{4x-5}$ 不是常数,所以对 $4x-2$ 要进行拆、凑项, $\because x<\frac{5}{4}$,$\therefore 5-4x>0$,

$\therefore y=4x-2+\frac{1}{4x-5}=-\left(5-4x+\frac{1}{5-4x}\right)+3\leq -2+3=1$

当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$,即 $x=1$ 时,上式等号成立,故当 $x=1$ 时, $y_{\max}=1$ 。

例题 18

已知 $x>\frac{3}{2}, x+\frac{4}{2x-3}$ 的最小值为______.

解析

解:

【解析】(2) $x+\frac{4}{2x-3}=x+\frac{2}{x-\frac{3}{2}}=x-\frac{3}{2}+\frac{2}{x-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\geq 2\sqrt{2}+\frac{3}{2}$,当且仅当 $x-\frac{3}{2}=\frac{2}{x-\frac{3}{2}}$ 时取等.

题型三:换元法

1. 观察形式，型如$y=\frac{ex+f}{ax^2+bx+c}$或$y=\frac{ax^2+bx+c}{ex+f}$;($\frac{\text{一次}}{\text{二次}}$或$\frac{\text{二次}}{\text{一次}}$)
2. 令$t=ex+f$对式子进行配凑成$y=at+\frac{b}{t}$的形式，（对一次式进行整体换元）
3. 再利用基本不等式求最值

例题 19

已知 $x>0$,求函数 $y=\frac{x^2+x+1}{x}$ 的最小值

解析

解:

【答案】 8

例题 20

已知 $x>-1$,求函数 $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ 的最小值

解析

解:

【答案】 1

例题 21

已知 $x > -2$,求函数 $y = \dfrac{x+2}{x^2-x+6}$ 的最小值

解析

解：

【答案】 $\dfrac{4\sqrt{3}+5}{23}$

例题 22

若 $x > -1$,则函数 $y = \dfrac{x+1}{x^2+3x+3}$ 的最大值为_____.

解析

解：

【答案】 $\dfrac{1}{3}$

例题 23

函数 $y = \dfrac{6\sqrt{x^2+2}}{x^2+4}$ 的最大值为_____.

解析

解：

【答案】 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

例题 24

(1)已知 a,b 均为正数,则 $\dfrac{a+2b}{a}+\dfrac{a+b}{b}$ 的最小值是______;

(2)已知 a,b 均为正数,则 $\dfrac{a}{a+2b}+\dfrac{b}{a+b}$ 的最小值是______.

解析

解:

【难度】★★

【答案】(1) $2\sqrt{2}+2$; (2) $2\sqrt{2}-2$

【解析】(1) $\dfrac{a+2b}{a}+\dfrac{a+b}{b}=1+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{b}+1\geq 2+2\sqrt{2}$,当且仅当 $a=\sqrt{2}b$ 时取等.

(2)解法一:设 $\begin{cases} a+2b=x \\ a+b=y \end{cases}$,则 $\begin{cases} a=2y-x \\ b=x-y \end{cases}$,代入原式可得: $\dfrac{2y-x}{x}+\dfrac{x-y}{y}=\dfrac{2y}{x}+\dfrac{x}{y}-2\geq 2\sqrt{2}-2$,

当且仅当 $x=\sqrt{2}y$ 时取等.

解法二: $\dfrac{a}{a+2b}+\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a^2+2ab+2b^2}{a^2+3ab+2b^2}=1-\dfrac{ab}{a^2+3ab+b^2}=1-\dfrac{1}{\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}+3}\geq 2\sqrt{2}-2$,

当且仅当 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{2b}{a}$,即 $b=\sqrt{2}a$ 时等号成立.

题型四: “1” 的代换(齐次化)

题目已知$x+y=m$,求$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}$　或　已知$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=m$,求$x+y$时

(1)把已知条件变成“1”

(2)两式乘起来,用基本不等式

例题 25

设 $a>0,b>0$,且 $a+b=1$,则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为______

解析

解:

【答案】 4

例题 26

设 $a>0, b>0$,且 $a+b=2$,则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为_____

解析

解:

【答案】 2

例题 27

设 $a>0, b>0$,且 $\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$,则 $a+b$ 的最小值为_____

解析

解:

【答案】 $4\sqrt{3}+7$

例题 28

设 $a>0, b>0$,且 $a+b=2$,则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b-1}$ 的最小值为_____

解析

解:

【答案】 4

【注意】题目已知 $x+y=m$,求 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 配凑时未知数的一致性

例题 29

若 x 、 y 为正实数满足 $x+3y=5xy$,求 $3x+4y$ 的最小值

解析

解:

【答案】 5

例题 30

已知 $a>0, b>0$, $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=1$,则 $\mathrm{a}+2\,\mathrm{b}$ 的最小值为_____

解析

解:

【答案】 5

例题 31

设 $x>0, y>0$,且 $x+y=1$,则 $\frac{1}{2x+y}+\frac{2}{y+3}$ 的最小值为_____

解析

解:

【答案】 $\frac{3+2\sqrt{2}}{5}$

例题 32

设 $x>0, y>0$,且 $2x+3y=5$,则 $\frac{1}{x+y}+\frac{2}{y+3}$ 的最小值为_____

解析

解:

【答案】 1

例题 33

若 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角,则 $\dfrac{4}{A}+\dfrac{1}{B+C}$ 的最小值为_____.

解析

解:

【答案】 $\dfrac{9}{\pi}$ (3) $A+B+C=\pi \Rightarrow \dfrac{4}{A}+\dfrac{1}{B+C}=\left(\dfrac{4}{A}+\dfrac{1}{B+C}\right)\cdot(A+B+C)\cdot\dfrac{1}{\pi}=$
$\dfrac{1}{\pi}\left(5+\dfrac{4(B+C)}{A}+\dfrac{A}{B+C}\right)\geq\dfrac{9}{\pi}$,当且
仅当 $A=2(B+C)$ 时取等.

例题 34

已知 $0<x<1$,函数 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-x}$ 的最小值为_____

解析

解:

【备注】本题中1的代换相对隐晦,不妨这样理解,如令 $x'=\dfrac{1}{x},y'=\dfrac{1}{1-x}$,问题就转化
为: $x',y'>0$, $\dfrac{1}{x'}+\dfrac{1}{y'}=1$,求 $x'+2y'$ 的最小值 .

【解析】 $\because 0<x<1$,

$\therefore 0<1-x<1$,

$y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-x}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-x}\right)(x+1-x)$

$=3+\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{2x}{1-x}\geq 3+2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{2x}{1-x}$,

即 $x=\sqrt{2}-1$ 时,等号成立.

例题 35

设 a 、 b 是正实数,且 $a+2b=2$,则 $\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{4b^2}{2b+1}$ 的最小值是_____.

解析

解:

【答案】 1

【解析】(1) $\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{4b^2}{2b+1}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{4b^2}{2b+1}\right)\cdot(a+1+2b+1)$
$=\dfrac{1}{4}\left[a^2+4b^2+\dfrac{a^2(2b+1)}{a+1}+\dfrac{4b^2(a+1)}{2b+1}\right]\geq\dfrac{1}{4}\left(a^2+4b^2+4ab\right)=\dfrac{1}{4}(a+2b)^2=$
1,

当且仅当 $a(2b+1)=2b(a+1)$ 时取等.

例题 36

设 $a+b=2019,b>0$,则当 $a=$ _____时, $\dfrac{1}{2019|a|}+\dfrac{|a|}{b}$ 取的最小值。

解析

解:

【难度】 ⋆⋆⋆

【答案】 $-\dfrac{2019}{2018}$

【解析】 $\dfrac{1}{2019|a|}+\dfrac{|a|}{b}=\dfrac{a+b}{2019^2|a|}+\dfrac{|a|}{b}=\dfrac{a}{2019^2|a|}+\dfrac{b}{2019^2|a|}+\dfrac{|a|}{b}$
$\geq-\dfrac{1}{2019^2}+\dfrac{b}{2019^2|a|}+\dfrac{|a|}{b}\geq-\dfrac{1}{2019^2}+2\sqrt{\dfrac{1}{2019^2}}$,

当且仅当 $\dfrac{b}{2019^2|a|}=\dfrac{|a|}{b}$ 即 $b=-2019a$ 时等号成立, $a+b=2019$,则 $a=-\dfrac{2019}{2018}$
.

例题 37

非零实数 x 、 y 、 z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$,则 $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$ 的最小值是_____。

解析

解:

【难度】★★

【解析】1的妙用,可以从局部和整体妙用1,这也是针对于这类问题的基本思路。

答案是9

例题 38

若正数 a,b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$, $\frac{1}{a-1}+\frac{9}{b-1}$ 的最小值为______。

解析

解:

【答案】 6

【解答】解: $\because$ 正数 a,b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1, \therefore a>1$,且 $b>1$;

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ 变形为 $\frac{a+b}{ab}=1, \therefore ab=a+b, \therefore ab-a-b=0, \therefore (a-1)(b-1)=1, \therefore a-1=\frac{1}{b-1}$;

$\therefore a-1>0, \therefore \frac{1}{a-1}+\frac{9}{b-1}=\frac{1}{a-1}+9(a-1)\geq 2\sqrt{\frac{1}{a-1}\cdot 9(a-1)}=6$,

当且仅当 $\frac{1}{a-1}=9(a-1)$,即 $a=1\pm\frac{1}{3}$ 时取 “ $=$ ” (由于 $a>1$,故取 $a=\frac{4}{3}$),

$\therefore \frac{1}{a-1}+\frac{9}{b-1}$ 的最小值为 6 ;

题型五:消元法

(1)写：根据问题形式写出基本不等式

(2)换：求谁留谁，把另一个通过条件整体替换掉

(3)解：将ab或$a+b$视作整体，解二次不等式

例题 39

设 a,b 为正实数,且 $ab=a+b+3$,则求 ab 和 $a+b$ 的取值范围

解析

解:

【答案】 $[9,+\infty)$ $[6,+\infty)$

例题 40

若 x , y 为正实数,满足 $x+2y+2xy=8$,则求 $x+2y$ 的最小值

解析

解:

【答案】 8

例题 41

若 x , y 为正实数,满足 $2x+3y+xy=6$,则求 $2xy$ 的最小值

解析

解:

【答案】 0

例题 42

已知 $a>0$, $b>0$,当 $(a+4b)^2+\frac{1}{ab}$ 取到最小值时, $b=$ _____;

解析

解:

【难度】★★★

【答案】(1) $\frac{1}{4}$; (2)16

【解析】(1)由 $(a+4b)^2+\frac{1}{ab}\geq\left(2\sqrt{a\cdot 4b}\right)^2+\frac{1}{ab}=16ab+\frac{1}{ab}\geq 2\sqrt{16}=8$,

当且仅当 $\begin{cases} a=4b \\ 16ab=\frac{1}{ab} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}$ 时取等号.

例题 43

设 $a>b>0$,求 $a^2+\dfrac{16}{b\left(a-b\right)}$ 的最小值.

解析

解:

解法一: $a^2+\dfrac{16}{b\left(a-b\right)}\geq a^2+\dfrac{16}{\left[\frac{b+(a-b)}{2}\right]^2}=a^2+\dfrac{64}{a^2}\geq 16$,

两次等号同时成立条件: $\begin{cases} b=(b-a) \\ a^2=\frac{64}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2\sqrt{2} \\ b=\sqrt{2} \end{cases}$;

解法二: $a^2+\dfrac{16}{b\left(a-b\right)}=\left[b+\left(a-b\right)\right]^2+\dfrac{16}{b\left(a-b\right)}=\left[b^2+\left(a-b\right)^2\right]+\left[2b\left(a-b\right)+\dfrac{16}{b\left(a-b\right)}\right]$

$\geq 2b\left(a-b\right)+\left[2b\left(a-b\right)+\dfrac{16}{b\left(a-b\right)}\right]=4b\left(a-b\right)+\dfrac{16}{b\left(a-b\right)}\geq 16$,

两次等号同时成立条件: $\begin{cases} b=(b-a) \\ 4b\left(a-b\right)=\frac{16}{b(a-b)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2\sqrt{2} \\ b=\sqrt{2} \end{cases}$.

例题 44

当 $0<x<a$ 时,不等式 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\geq 2$ 恒成立,求 a 的最大值.

解析

解:

【难度】★★

【答案】 2

【解析】方法一: (基本不等式) 由 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x^2(a-x)^2}}=\frac{2}{x(a-x)}\geq \frac{2}{\frac{[x+(a-x)]^2}{4}}=\frac{8}{a^2}$,

当且仅当 $x=\frac{a}{2}$ 时,取到最小值. 即 $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\right)_{\min}=\frac{8}{a^2}$ 恒成立.

所以 $\frac{8}{a^2}\geq 2$,则 $a\leq 2$,故实数 a 的最大值为 2 .

方法二:(构造齐次式)

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\right)\cdot a^2=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\right)\cdot[x+(a-x)]^2=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\right)\cdot\left[x^2+2(a-x)x+(a-x)^2\right]$$

$$=2+\left[\frac{2x}{(a-x)}+\frac{2(a-x)}{x}\right]+\left[\frac{(a-x)^2}{x^2}+\frac{x^2}{(a-x)^2}\right]\geq 2+4+2=8$$,即 $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\right)_{\min}=\frac{8}{a^2}$,同上.

题型六:基本不等式的应用

例题 45

(1)证明:(1)周长为常数的所有矩形中正方形的面积最大

(2)面积相同的所有矩形中正方形的周长最小.

解析

解:

证明(1)设矩形的周长为常数 $l>0$,而其长、宽分别为 x 、 $y>0$,就有 $2x+2y=l$. 此矩形的面积为 $S=xy$. 由平均值不等式, 有

$$S=xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{l}{4}\right)^2,$$

当且仅当 $x=y=\frac{l}{2}$,即矩形为正方形时,面积 S 取得最大值 $\frac{l^2}{16}$.

(2)设矩形的面积为常数 $S>0$,而其长、宽仍分别设为 x 、 $y>0$,就有 $xy=S$. 此矩形的周长为 $l=2\left(x+y\right)$. 由平均值不等式, 有

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}=\sqrt{S},$$

所以 $l=2\left(x+y\right)\geq4\sqrt{S}$,且当且仅当 $x=y=\sqrt{S}$,即矩形为正方形时,周长 l 取最小值 $4\sqrt{S}$.

例题 46

在城市旧城改造中,某小区为了升级居住环境,拟在小区的闲置地中规划一个面积为 $200\ \mathrm{m}^2$ 的矩形区域 (如图所示),按规划要求: 在矩形内的四周安排 $2m$ 宽的绿化,绿化造价为 $200\mathrm{C}/\mathrm{m}^2$,中间区域地面硬化以方便后期放置各类健身器材,硬化造价为 $100\mathrm{C}/\mathrm{m}^2$. 设矩形的长为 $x\,(m)$.

images/01968fa5-d2e3-7182-940c-34b4aef08981_12_254_442_426_307_0.jpg

(1)设总造价 y (元)表示为长度 $x\,(\mathrm{m})$ 的函数;

(2)当 $x\,(\mathrm{~m})$ 取何值时,总造价最低,并求出最低总造价.

解析

解:

【答案】(1) $y=18400+400\left(x+\dfrac{200}{x}\right), x\in(4,50)$;

(2)当 $x=10\sqrt{2}$ 时,总造价最低为 $18400+8000\sqrt{2}$ 元.

【解析】(1)由矩形的长为 $x\,(\mathrm{~m})$,则矩形的宽为 $\dfrac{200}{x}\,(\mathrm{~m})$,

则中间区域的长为 $x-4\,(\mathrm{~m})$,宽为 $\dfrac{200}{x}-4\,(\mathrm{~m})$,则定义域为 $x\in(4,50)$,

则 $y=100\times\left[(x-4)\left(\dfrac{200}{x}-4\right)\right]+200\left[200-(x-4)\left(\dfrac{200}{x}-4\right)\right]$,

整理得 $y=18400+400\left(x+\dfrac{200}{x}\right), x\in(4,50)$.

(2) $x+\dfrac{200}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{200}{x}}=20\sqrt{2}$,当且仅当 $x=\dfrac{200}{x}$ 时取等号,即 $x=10\sqrt{2}\in(4,50)$,

所以当 $x=10\sqrt{2}$ 时,总造价最低为 $18400+8000\sqrt{2}$ 元.

例题 47

某汽车运输公司,购买了一批豪华大客车投入运营,据市场分析每辆客车运营总利润 y (单位: 10 万元)与运营年数 $x\,(x \in N)$ 为二次函数关系,则每辆客车运营多少年,其运营的年平均利润最大? 并求最大年平均利润。

images/01968fa5-d2e3-7182-940c-34b4aef08981_13_975_392_436_315_0.jpg

解析

解:

【难度】★

【答案】 x = 5 ,最大年平均利润是 20 万元。

例题 48

某单位用木料制作如图所示的框架,框架的下部是边长分别为 x 、 y (单位: m)的矩形. 上部是等腰直角三角形. 要求框架围成的总面积 $8\ \mathrm{cm}^2$. 问 x 、 y 分别为多少 (精确到 0.001 m) 时用料最省?

解析

解:

【答案】由题意得

$$\mathrm{xy}+\frac{1}{4}\mathrm{x}^2=8, \therefore \mathrm{y}=\frac{8-\frac{x^2}{4}}{x}=\frac{8}{x}-\frac{x}{4}\left(0<\mathrm{x}<4\sqrt{2}\right).$$

images/01968fa5-d2e3-7182-940c-34b4aef08981_13_1050_874_299_443_0.jpg

于定, 框架用料长度为

$$1=2x+2y+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)x+\frac{16}{x}\geq 4\sqrt{6+4\sqrt{2}}.$$

当 $\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\mathrm{x}=\frac{16}{x}$,即 $\mathrm{x}=8-4\sqrt{2}$ 时等号成立.

此时, $\mathrm{x}\approx 2.343, \mathrm{y}=2\sqrt{2}\approx 2.828$.

故当 x 为 2.343 m , y 为 2.828 m 时,用料最省.

例题 49

在面积为 π 的圆中作一个内接矩形,使它的面积最大. 求此矩形面积的最大值及此时矩形的各边长.

解析

解:

【答案】 $2, \sqrt{2}, \sqrt{2}$

$\because$ 圆的面积为 π

$\therefore$ 圆的半径 $r=1 \therefore y=2\sqrt{1^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ 设矩形宽为 $x\,(0<x<2)$,长为 $y\,(0<y<2)$ 面积

$\because$ 圆的半径的平方 $=$ 宽的一半的平方+长的一 $s=2x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{4x^2-x^4}$ 半的平方

,即 $r^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\sqrt{-(x^2-2)^2+4}$

$\therefore \frac{y}{2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ 当 $x^2=2$ 时,即 $x=\sqrt{2}$, s 有最大值2 矩形长 $=\sqrt{2}$,宽 $=\sqrt{2}$

题型七:综合题

例题 50

(1)设实数 x,y 满足 $2x+y=1$.

(I)求 $4x^2+y^2+3xy$ 的最小值;

(II)若 $x>0,y>0$,求 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\sqrt{2xy}$ 的最小值.

解析

解:

【答案】 $\frac{7}{8}$.

【解答】解:(I)因为 $2x+y=1$,则 $y=1-2x$,

所以 $4x^2+y^2+3xy=4x^2+(1-2x)^2+3x(1-2x)=4x^2+1+4x^2-4x+3x-6x^2=2x^2-x+1=2\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)+1=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+1$, 当 $x=\frac{1}{4}$ 时, $2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$ 取得最小值,最小值为 $\frac{7}{8}$, 所以当 $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{2}$ 时, $4x^2+y^2+3xy$ 取得最小值 $\frac{7}{8}$.

(II)因为 $x>0,y>0,2x+y=1$, 所以 $\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)(2x+y)=4+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geq 4+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}=4$, 当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$,即 $2x=y=\frac{1}{2}$ 时取等号, 又因为 $2x+y\geq 2\sqrt{2x\cdot y}=2\sqrt{2xy}$, 所以 $-\sqrt{2xy}\geq-\frac{2x+y}{2}=-\frac{1}{2}$,当且仅当 $2x=y=\frac{1}{2}$ 时等号成立, 所以 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\sqrt{2xy}\geq 8-\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$,当且仅当 $2x=y=\frac{1}{2}$ 时等号成立, 所以 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\sqrt{2xy}$ 的最小值为 $\frac{15}{2}$.

例题 51

若实数 x 、 y 、 m 满足 $|x-m|<|y-m|$,则称 x 比 y 更接近 m .

(1)若4比 $\left(x^2-3x\right)$ 更接近 0,求 x 的取值范围;

(2)对任意两个不相等的正数 a 、 b ,判断并证明: $(a+b)$ 和 $\left(\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\right)$ 哪个更接近 $2\sqrt{ab}$

解析

解:

(1) 由题意,得 $\left|x^2-3x\right|>4, \therefore x^2-3x>4$ 或 $x^2-3x<-4$. $\therefore x\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$;

(2) $\because a>0, b>0$,且 $a\neq b, \therefore a+b>2\sqrt{ab}$, $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}>2\sqrt{ab}$. $\therefore\left|\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}-2\sqrt{ab}\right|-\left|a+b-2\sqrt{ab}\right|=\left(\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}-2\sqrt{ab}\right)-(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}-(a+b)=\frac{b^2-ab}{a}+\frac{a^2-ab}{b}=\frac{b}{a}(b-a)+\frac{a}{b}(a-b)=(a-b)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\frac{(a-b)\left(a^2-b^2\right)}{ab}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}>0$,则 $\left|\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}-2\sqrt{ab}\right|>|a+b-2\sqrt{ab}|$. $\therefore(a+b)$ 比 $\left(\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\right)$ 更接近 $2\sqrt{ab}$

例题 52

若 $a>0, b>0$,且 $a+b=4$,则下列不等式恒成立的是( )

A. $a^2+b^2\geq 8$ B. $\frac{1}{ab}\geq\frac{1}{4}$ C. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq 2\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq 1$

解析

解:

【答案】 ABC .

【解答】解: A . 因为 $a>0, b>0$,且 $a+b=4$,所以 $b=4-a$,所以 $a^2+b^2=a^2+(4-a)^2=2a^2-8a+16$, 根据二次函数性质可知,当 $a=b=2$ 时, a^2+b^2 取最小值 8,故有 $a^2+b^2\geq 8$ 成立, A 正确; B . 因为 $a>0, b>0, a+b=4$,所以 $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=4$,当且仅当 $a=b=2$ 时取等号, 所以 $\frac{1}{ab}\geq\frac{1}{4}$,故 B 正确. C : 因为 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}\leq a+b+a+b=8$,当且仅当 $a=b=2$ 时取等号, 所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq 2\sqrt{2}, C$ 正确; D : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}\right)=\frac{1}{4}\left(2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq\frac{1}{4}(2+2)=1$,当且仅当 $a=b=2$ 时取等号, D 错误.

例题 53

下列说法正确的有( )

A. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ 的最小值为 2

B. 已知 $x>1$,则 $y=2x+\dfrac{4}{x-1}-1$ 的最小值为 $4\sqrt{2}+1$

C. 若正数 x,y 为实数,若 $x+2y=3xy$,则 $2x+y$ 的最大值为 3

D. 设 x,y 为实数,若 $9x^2+y^2+xy=1$,则 $3x+y$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

解析

解：

【答案】 BD . 【解答】解: 对于 A ,当 $x<0$ 时, $y<0$,故 A 错误,对于 B ,当 $x>1$ 时, $x-1>0$, $\therefore y=2x+\dfrac{4}{x-1}-1=2(x-1)+\dfrac{4}{x-1}+1\geq 2\sqrt{8}+1=4\sqrt{2}+1$,当且仅当 $x=\sqrt{2}+1$ 时,等号成立,故 B 正确,对于 C ,若正数 x 、 y 满足 $x+2y=3xy$,则 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3$,

$\therefore 2x+y=\dfrac{1}{3}(2x+y)\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}+5\right)\geq\dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{4}+5\right)=3$,当且仅当 $x=y=1$ 时,等号成立, 故 C 错误,

对于 $D, 1=9x^2+y^2+xy=9x^2+y^2+6xy-5xy=(3x+y)^2-\dfrac{5}{3}\cdot 3x^*y\geq(3x+y)^2-\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{(3x+y)^2}{4}=\dfrac{7}{12}(3x+y)^2$, 所以 $(3x+y)^2\leq\dfrac{12}{7}$,可得 $-\dfrac{2\sqrt{21}}{7}\leq 3x+y\leq\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$,当且仅当 $y=3x$ 时,等号成立,故 $3x+y$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$, 故 D 正确.

知识要点

知识点二、三角不等式

三角不等式：两个实数和的绝对值小于等于他们绝对值的和，即对于任意给定的实数a,b，有

$$|a+b| \le |a|+|b|$$

且等号当且仅当$ab \ge 0$时成立

如果a,b是实数，那么

1. $||a|-|b|| \le |a+b| \le |a|+|b|$且左等号当且仅当$ab \le 0$时成立；且右等号当且仅当$ab \ge 0$时成立

2. $||a|-|b|| \le |a-b| \le |a|+|b|$且左等号当且仅当$ab \ge 0$时成立；且右等号当且仅当$ab \le 0$时成立

推论：$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \le |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$,当且仅当$ab \ge 0$时成立

综合题

使用三角不等式或者前面学的绝对值不等式解题

例题 54

(1)写出不等式 $|x+y| \le |x|+|y|$ 等号成立的一个充要条件是_____，

一个充分非必要条件是_____，

一个必要非充分条件是_____；

(2)写出不等式 $|x|-|y| \le |x-y|$ 等号成立的一个充要条件是_____；

(3)写出不等式 $|x|-|y| \le |x+y|$ 等号成立的一个充要条件是_____；

(4)写出不等式 $|x-y| \le |x|+|y|$ 等号成立的一个充要条件是_____.

解析

解：

【答案】(1)“ $xy \ge 0$ ”或“ $x=ky,k>0$ ”；“ $x=0$ ”；“ $xy \ge -1$ ”

(2) “ $xy \ge y^2$ ” (3) “ $xy+y^2 \le 0$ ” (4)“ $xy \le 0$ ”(答案不唯一)

例题 55

代数式 $y=|x-4|+|x-6|$ 的最小值为_____

解析

解:

【答案】 2

【解析】 $y=|x-4|+|x-6| \geq |x-4+6-x|=2$.

例题 56

已知 $|x|<\frac{a}{4},|y|<\frac{a}{6}$. 求证: $|2x-3y|<a$.

解析

解:

【答案】证明 $\because |x|<\frac{a}{4},|y|<\frac{a}{6}, \therefore |2x|<\frac{a}{2},|3y|<\frac{a}{2}$,

根据绝对值三角不等式可得 $|2x-3y| \leq |2x|+|3y|<\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$.

例题 57

已知 $|x-a|<\frac{c}{2},|y-b|<\frac{c}{2}$,求证 $|(x+y)-(a+b)|<c$.

解析

解:

【答案】证明 $|(x+y)-(a+b)|=|(x-a)+(y-b)| \leq |x-a|+|y-b|$ (1)

$\because |x-a|<\frac{c}{2},|y-b|<\frac{c}{2}, \therefore |x-a|+|y-b|<\frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c$ (2)

由 (1),(2) 得: $|(x+y)-(a+b)|<c$

例题 58

x 为实数,且 $|x-5|+|x-3|<m$ 有解,则 m 的取值范围是_____

解析

解:

【答案】 $m>2$

例题 59

已知关于 x 的不等式 $|x+1|-|x-2|>t$ 有解,则实数 t 的取值范围是_____.

解析

解:

【答案】 $t<3$

例题 60

若存在实数 x ,使得 $|x-1|+|x+2|<a$ 成立,则实数 a 的取值范围为_____.

解析

解:

【答案】 $a>3$

例题 61

若不等式 $|x-2|+|x+3|>a$,对于 $x\in\mathbf{R}$ 均成立,那么实数 a 的取值范围是_____.

解析

解:

【答案】 $(-\infty,5)$

例题 62

不等式 $|x-a|+|x-3|>4$ 对一切实数 x 恒成立,求实数 a 的取值范围.

解析

解:

【答案】 $a>7$ 或 $a<-1$

【详解】因为 $|x-a|+|x-3|=|x-a|+|3-x|\geq|x-a+3-x|=|3-a|$,当且仅当 $x-a=3-x$ 时取等号,

即当 $x=\dfrac{3+a}{2}$ 时取等号,所以 $|x-a|+|x-3|$ 最小值是 $|3-a|$,要想不等式 $|x-a|+|x-3|>4$ 对一切实数

x 恒成立,只需 $|3-a|>4$,解得 $a>7$ 或 $a<-1$.

例题 63

存在实数 x ,使得不等式 $|x+3|+|x-1|\leq a^2-3a$ 有解,则实数 a 的取值范围为_____.

解析

解:

【答案】 $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$.

【详解】由绝对值不等式的性质,可得 $|x+3|+|x-1|\geq|(x+3)-(x-1)|=4$,当且仅当

$(x+3)\cdot(x-1)\leq 0$ 时等号成立,要使得不等式 $|x+3|+|x-1|\leq a^2-3a$ 有解,转化为

$(|x+3|+|x-1|)_{\min}\leq a^2-3a$ 恒成立,

所以 $a^2-3a\geq 4$,解得 $a\geq 4$ 或 $a\leq -1$,即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$.

例题 64

若关于 x 的不等式 $|x-1|+|ax-1|\geq 2x$ 对于任意 $x>0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是_____.

解析

解:

【答案】 $a\leq -1$ 或 $a\geq 3$;

【解析】 $|x-1|+|ax-1|\geq 2x\Leftrightarrow\left|\frac{1}{x}-1\right|+\left|\frac{1}{x}-a\right|\geq 2\Leftrightarrow|t-1|+|t-a|\geq 2\,(t>0)$.

所以 $(|t-1|+|t-a|)_{\min}=|(t-1)-(t-a)|=|a-1|\geq 2$,解得 $a\leq -1$ 或 $a\geq 3$,故答案为: $a\leq -1$ 或 $a\geq 3$;

例题 65

若对任意 $a\in(1,+\infty)$,存在实数 x ,使得 $|x-a|-\left|x+\dfrac{1}{a-1}\right|+x^2+a^2\leq 2ax+a+m$ 成立,则实数 m 的最小值是______.

解析

解:

【答案】 $-2-2\sqrt{2}$

【详解】解: 因为对任意 $a\in(1,+\infty)$,存在实数 x ,使得 $|x-a|-\left|x+\dfrac{1}{a-1}\right|+x^2+a^2\leq 2ax+a+m$ 成立,所以对任意 $a\in(1,+\infty)$,存在实数 x ,使得 $|x-a|-\left|x+\dfrac{1}{a-1}\right|+(x-a)^2\leq a+m$ 成立,

因为 $|x-a|-\left|x+\dfrac{1}{a-1}\right|+(x-a)^2\geq -\left|a+\dfrac{1}{a-1}\right|$,当且仅当 $x=a$ 时等号成立,

所以有 $-\left|a+\dfrac{1}{a-1}\right|\leq a+m$ 对任意 $a\in(1,+\infty)$ 恒成立,

即 $-m\leq 2a+\dfrac{1}{a-1}=2(a-1)+\dfrac{1}{a-1}+2$ 对任意 $a\in(1,+\infty)$ 恒成立,

由于 $2(a-1)+\dfrac{1}{a-1}+2\geq 2\sqrt{2}+2$,当且仅当 $2(a-1)=\dfrac{1}{a-1}$,即 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$ 时等号成立;

所以 $-m\leq 2\sqrt{2}+2$,即 $m\geq -2\sqrt{2}-2$. 所以实数 m 的最小值是 $-2-2\sqrt{2}$

【课后作业】

一、填空题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.把答案填在答题卡中的横线上

作业 1

(2010·湖北·一模)当 $x>1$ 时, $x+\frac{4}{x-1}$ 的最小值为_____.

解析

解：

【答案】 5

【难度】 0.65

【知识点】基本不等式求和的最小值

【分析】构造乘积为定值, 应用基本不等式求出最小值即可.

【详解】因为 $x>1$,

则 $x+\frac{4}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}+1 \geq 2\sqrt{(x-1)\times\left(\frac{4}{x-1}\right)}+1=2\sqrt{4}+1=5$,

当 $x-1=\frac{4}{x-1}, x=3$ 时, $x+\frac{4}{x-1}$ 的最小值为 5 .

故答案为:5 .

作业 2

(22-23 高一上·湖北武汉·期中) 若实数 $x>1, y>1$,且 $x+2y=5$,则 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}$ 的最小值为______.

解析

解:

【答案】 $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

【难度】 0.85

【知识点】基本不等式 “1” 的妙用求最值

【分析】由已知变形可得出 $(x-1)+2(y-1)=2$,将 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}$ 与 $\frac{1}{2}[(x-1)+2(y-1)]$ 相乘,展开后利用基本不等式可求得 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}$ 的最小值.

【详解】因为实数 $x>1, y>1$,且 $x+2y=5$,则 $(x-1)+2(y-1)=2$,

所以, $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}=\frac{1}{2}[(x-1)+2(y-1)]\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}\right)=\frac{1}{2}\left[3+\frac{x-1}{y-1}+\frac{2(y-1)}{x-1}\right]$

$\geq \frac{1}{2}\left[3+2\sqrt{\frac{x-1}{y-1}\cdot\frac{2(y-1)}{x-1}}\right]=\frac{3}{2}+\sqrt{2},$

当且仅当 $\begin{cases} x-1=\sqrt{2}(y-1) \\ (x-1)+2(y-1)=2 \end{cases}$ 时,即当 $\begin{cases} x=2\sqrt{2}-1 \\ y=3-\sqrt{2} \end{cases}$ 时,等号成立.

因此, $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

作业 3

(2023·山西大同·模拟预测) 已知 $a>0, b>0, a \geq \frac{1}{a}+\frac{2}{b}, b \geq \frac{1}{b}+\frac{2}{a}$,则 $a+b$ 的最小值为______.

解析

解：

【答案】 $2\sqrt{3}$

【难度】 0.65

【知识点】由不等式的性质证明不等式、基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】由已知可得 $a+b \geq \frac{3}{a}+\frac{3}{b}$,结合基本不等式求 $(a+b)^2$ 的最小值,再求 $a+b$ 的最小值.

【详解】因为 $a \geq \frac{1}{a}+\frac{2}{b}, b \geq \frac{1}{b}+\frac{2}{a}$,

所以 $a+b \geq \frac{3}{a}+\frac{3}{b}$,又 $a>0, b>0$,

所以 $(a+b)^2 \geq\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)(a+b)=6+\frac{3b}{a}+\frac{3a}{b} \geq 12$,当且仅当 $a=b=\sqrt{3}$ 时取等号.

所以 $a+b \geq 2\sqrt{3}$,当且仅当 $a=b=\sqrt{3}$ 时取等号.

所以 $a+b$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$.

故答案为: $2\sqrt{3}$.

作业 4

(23-24 高一上·广东河源·阶段练习) 若正数 x, y 满足 $\frac{1}{x}+\frac{8}{y}=1$,则 $x+2y$ 的最小值为______.

解析

解：

【答案】 25

【难度】 0.65

【知识点】基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】由题可得 $x+2y=(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{8}{y}\right)$,化简利用基本不等式即可得出结论.

【详解】 $\because$ 正数 x, y 满足 $\frac{1}{x}+\frac{8}{y}=1$,

$\therefore x+2y=(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{8}{y}\right)=1+16+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y} \geq 17+2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{8x}{y}}=25$,

当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{8x}{y}$ 即 $y=10, x=5$ 时取等号.

故答案为: 25.

作业 5

(23-24 高一下·河北·期末) 已知 $a>0,b>0$,且 $9a+b=ab$,则 $a+4b$ 的最小值为______.

解析

解:

【答案】 49 【难度】 0.65 【知识点】基本不等式求和的最小值、基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】由 $9a+b=ab$ 可得 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=1$,即有 $(a+4b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)=37+\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}$,再由基本不等式可得最小值,

注意等号成立的条件.

【详解】因为 $a>0,b>0$ 且 $9a+b=ab$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=1$,

所以 $a+4b=(a+4b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)=1+36+\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}\geq 37+2\sqrt{\frac{4b}{a}\times\frac{9a}{b}}=37+12=4$,

当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{9a}{b}$ 即 $a=7,b=\frac{21}{2}$ 时取等号,

所以 $a+4b$ 最小值为 49 .

故答案为: 49 .

作业 6

(23-24 高一下·云南曲靖·阶段练习) 已知 $x>0$, $y>0$,且 $x+y=3$,则 $\frac{y}{x+1}+\frac{1}{y}$ 的最小值为______.

解析

解:

【答案】 $\frac{5}{4}$

【难度】 0.65

【知识点】基本不等式“1”的妙用求最值、基本不等式求和的最小值

【分析】根据分母特点,将 $x+y=3$ 化为 $(x+1)+y=4$,将 $\frac{1}{y}$ 化为 $\frac{4}{4y}$. 然后用基本不等式即可.

【详解】由于 $x+y=3$,因此 $(x+1)+y=4$,

则 $\frac{y}{x+1}+\frac{1}{y}=\frac{y}{x+1}+\frac{4}{4y}=\frac{y}{x+1}+\frac{(x+1)+y}{4y}=\frac{y}{x+1}+\frac{x+1}{4y}+\frac{1}{4}\geq 2\sqrt{\frac{y}{x+1}\cdot\frac{x+1}{4y}}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$,

当且仅当 $y=\frac{4}{3},x=\frac{5}{3}$ 时取等号.

故答案为: $\frac{5}{4}$.

作业 7

(24-25 高一上一全国. 课前预习) 若不等式 $\frac{x}{x^2+3x+1} \le a$ 对一切正实数 x 都成立,则实数 a 的取值范围是______.

解析

解:

【答案】 $\left[\frac{1}{5},+\infty\right)$

【难度】 0.65

【知识点】基本不等式求和的最小值、一元二次不等式在某区间上的恒成立问题

【分析】由题意 $a \ge \frac{x}{x^2+3x+1}\ (x>0)$ 恒成立,即 $a \ge \left(\frac{x}{x^2+3x+1}\right)_{\max}$,然后由基本不等式求 $\frac{x}{x^2+3x+1}$ 的

最大值即可.

【详解】由题意 $a \ge \frac{x}{x^2+3x+1}$ 恒成立,即 $a \ge \left(\frac{x}{x^2+3x+1}\right)_{\max}$,

因为 $x>0$,所以 $\frac{x}{x^2+3x+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}+3} \le \frac{1}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+3} = \frac{1}{5}$,

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$,即 $x=1$ 时等号成立,

所以 $\frac{x}{x^2+3x+1}$ 的最大值为 $\frac{1}{5}$,

所以 $a \ge \frac{1}{5}$.

故答案为: $\left[\frac{1}{5},+\infty\right)$.

作业 8

(23-24 高二下·浙江绍兴·期中) 已知 $a>0,b>0$,且 $a+2b=1$,则 $\frac{1}{b}+\frac{8}{a+b}$ 的最小值为_____.

解析

解:

【答案】 $9+4\sqrt{2}/4\sqrt{2}+9$

【难度】 0.65

【知识点】基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】先变形: $\frac{1}{b}+\frac{8}{a+b}=\left(\frac{1}{b}+\frac{8}{a+b}\right)[(a+b)+b]=\frac{a+b}{b}+\frac{8b}{a+b}+9$,再根据基本不等式求最值.

【详解】因为 $a+2b=1$,

所以 $\frac{1}{b}+\frac{8}{a+b}=\left(\frac{1}{b}+\frac{8}{a+b}\right)[(a+b)+b]=\frac{a+b}{b}+\frac{8b}{a+b}+9$

$\geq 2\sqrt{\frac{a+b}{b}\cdot\frac{8b}{a+b}}+9=4\sqrt{2}+9$

当且仅当 $\frac{a+b}{b}=\frac{8b}{a+b}$,即 $b=\frac{2\sqrt{2}-1}{7},a=\frac{9-4\sqrt{2}}{7}$ 取等号,

所以 $\frac{1}{b}+\frac{8}{a+b}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}+9$.

故答案为: $4\sqrt{2}+9$.

作业 9

(23-24 高三下·江西·阶段练习) 设 $a,b\in \mathrm{R}_+$,若 $a+4b=4$,则 $\dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ 的最小值为______.

解析

解:

【答案】 $2\sqrt{2}$

【难度】 0.65

【知识点】基本不等式求积的最大值【分析】运用基本不等式求出 ab 的范围,再对 $\dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ 的分子运用基本不等式,放缩为 $2\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{ab}}}$,再根据等号成立条件, 运用不等式的传递性求解即可.

【详解】由 $a,b\in \mathrm{R}_+,a+4b=4$,得 $4=a+4b\geq 2\sqrt{a\cdot 4b}=4\sqrt{ab}$,所以 $\sqrt{ab}\leq 1$,当且仅当 $a=4b=2$ 时取等号,

$$\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\geq \frac{2\sqrt{\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{b}}}{\sqrt{ab}}=2\sqrt{\frac{2\sqrt{ab}}{ab}}=2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{ab}}},$$

当且仅当 $\sqrt{a}=2\sqrt{b}$ 时取等号,

所以 $\dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{ab}}}\geq 2\sqrt{2}$,两个不等式等号成立条件相同,

所以 $\dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\geq 2\sqrt{2}$,当且仅当 $a=2,b=\dfrac{1}{2}$ 时, $\dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ 取得最小值 $2\sqrt{2}$.

故答案为: $2\sqrt{2}$.

作业 10

(23-24 高二下·天津滨海新·阶段练习) 若 $x>0, y>-2$,且 $x+y=1$,则 $\frac{x^{2}+1}{x}+\frac{y^{2}}{y+2}$ 的最小值为______.

解析

解:

【答案】 2

【难度】 0.65 【知识点】基本不等式“1”的妙用求最值、条件等式求最值

【分析】通分后利用已知化简,然后再变形为 $\frac{4}{y+2}+\frac{1}{x}$,利用常数代换,结合基本不等式可得.

【详解】因为 $x+y=1$,所以 $\frac{x^{2}+1}{x}+\frac{y^{2}}{y+2}=\frac{\left(x^{2}+1\right)(y+2)+x y^{2}}{x(y+2)}=\frac{x y(x+y)+2 x^{2}+y+2}{x(y+2)}=\frac{x y+2 x^{2}+y+2}{x(y+2)}=\frac{x(y+2 x)+y+2}{x(y+2)}=\frac{x(x+1)+y+2}{x(y+2)}=\frac{x+1}{y+2}+\frac{1}{x}=\frac{2-y}{y+2}+\frac{1}{x}=\frac{4}{y+2}+\frac{1}{x}-1$, 由于 $x+y=1$,所以 $x+y+2=3$,且 $x>0, y+2>0$,

所以 $\frac{4}{y+2}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{y+2}+\frac{1}{x}\right)(x+y+2)=\frac{1}{3}\left(5+\frac{4 x}{y+2}+\frac{y+2}{x}\right) \geq \frac{1}{3}(5+2 \sqrt{4})=3$,

所以 $\frac{4}{y+2}+\frac{1}{x}-1 \geq 2$,当且仅当 $\left\{\begin{array}{l}\frac{4 x}{y+2}=\frac{y+2}{x} \\ x+y=1\end{array}\right.$,即 $x=1, y=0$ 时等号成立,

所以 $\frac{x^{2}+1}{x}+\frac{y^{2}}{y+2}$ 的最小值为 2.

故答案为: 2

作业 11

(2016 高二. 全国. 竞赛) 设 $a>b>0$,则 $a^2+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{a\left(a-b\right)}$ 的最小值为______.

解析

解:

【答案】 4

【难度】 0.65

【知识点】基本不等式求和的最小值

【分析】变形得 $a^2+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{a\left(a-b\right)}=a^2-ab+\dfrac{1}{a\left(a-b\right)}+ab+\dfrac{1}{ab}$,再利用基本不等式即可求出结果.

【详解】因为 $a>b>0$,则 $a^2>ab$,即 $a^2-ab>0$,

则 $a^2+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{a\left(a-b\right)}=a^2-ab+\dfrac{1}{a\left(a-b\right)}+ab+\dfrac{1}{ab}$

$\geq 2\sqrt{(a^2-ab)\times\dfrac{1}{a\left(a-b\right)}}+2\sqrt{ab\times\dfrac{1}{ab}}=4,$

当且仅当 $\dfrac{1}{a\left(a-b\right)}=a\left(a-b\right),ab=\dfrac{1}{ab}$ 时取等号,此时 $a=\sqrt{2},b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

故答案为: 4 .

作业 12

(23-24 高一上· 山东菏泽·阶段练习) 若两个正实数 x, y 满足 $x+y=3$,且不等式 $\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}>m$ 恒成立,则实数 m 的取值范围为______.

解析

解：

【答案】 $(-\infty, 9)$

【难度】 0.65

【知识点】基本不等式求和的最小值、基本不等式“1”的妙用求最值、基本不等式的恒成立问题

【分析】 根据等式变形,利用常值代换法凑项,运用基本不等式求得 $\left(\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}\right)_{\min}$ 即得.

【详解】因为两个正实数 x, y 满足 $x+y=3$,则 $(x+1)+y=4$,

故 $\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}\right)[(x+1)+y]=\frac{y}{x+1}+\frac{4(x+1)}{y}+5$

$\geq 2\sqrt{\frac{y}{x+1}\cdot\frac{4(x+1)}{y}}+5=9$,当且仅当 $x=\frac{1}{3}, y=\frac{8}{3}$ 时取等号,

因不等式 $\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}>m$ 恒成立,则 $m<\left(\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}\right)_{\min}$,故 $m<9$.

故答案为: $(-\infty, 9)$.

二、单选题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

作业 13

(23-24 高一上·广东深圳·期中) $x^2+\dfrac{10}{x^2+1}$ 的最小值为( )

A. $2\sqrt{10}-1$ B. $2\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{5}-1$ D. 10

解析

解:

【答案】A

【难度】 0.85

【知识点】基本不等式求和的最小值

【分析】由题意可得 $x^2+\dfrac{10}{x^2+1}=x^2+1+\dfrac{10}{x^2+1}-1$,再由基本不等式求解即可.

【详解】 $x^2+\dfrac{10}{x^2+1}=x^2+1+\dfrac{10}{x^2+1}-1\geq 2\sqrt{\left(x^2+1\right)\cdot\dfrac{10}{x^2+1}}-1=2\sqrt{10}-1$

,

当且仅当 $x^2+1=\dfrac{10}{x^2+1}$,即 $x=\pm\sqrt{\sqrt{10}-1}$ 时,等号成立.

所以 $x^2+\dfrac{10}{x^2+1}$ 的最小值为 $2\sqrt{10}-1$.

故选: A.

作业 14

(24-25 高一上·全国·课后作业) 若 $0<x<4$,则 $\sqrt{2x(4-x)}$ 有( )

A. 最小值 0 B. 最大值 2

C. 最大值 $2\sqrt{2}$ D. 不能确定

解析

解:

【答案】 C

【难度】 0.65

【知识点】基本不等式求积的最大值

【分析】根据基本不等式求乘积的最大值, 再检验最小值的情况即可得解.

【详解】由基本不等式,得 $\sqrt{2x(4-x)}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x(4-x)}\leq\sqrt{2}\cdot\dfrac{x+(4-x)}{2}=2\sqrt{2}$

,

当且仅当 $x=4-x$,即 $x=2$ 时等号成立,

故 $\sqrt{2x(4-x)}$ 有最大值 $2\sqrt{2}$,故 C 正确, BD 错误;

令 $\sqrt{2x(4-x)}=0$,解得 $x=0$ 或 $x=4$, 又 $0<x<4$,所以 $\sqrt{2x(4-x)}$ 取不到函数值 0,故 A 错误. 故选: C.

作业 15

(2024·河南信阳·模拟预测) $a>0,b>0,\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$,则 $\frac{1}{a-1}+\frac{3}{b-2}$ 的最小值为 ( )

A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{6}$ D. 6

解析

解：

【答案】 C

【难度】 0.65 【知识点】条件等式求最值、基本不等式求和的最小值【分析】由已知可得 $(a-1)(b-2)=2$,利用基本不等式求 $\frac{1}{a-1}+\frac{3}{b-2}$ 的最小值. 【详解】 $a>0,b>0,\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$,则 $ab=2a+b$,且 $a>1,b>2$, 整理得到 $(a-1)(b-2)=2$, 所以 $\frac{1}{a-1}+\frac{3}{b-2}\geq 2\sqrt{\frac{3}{(a-1)(b-2)}}=\sqrt{6}$,当且仅当 $\frac{1}{a-1}=\frac{3}{b-2}$,即 $a=\frac{\sqrt{6}}{3}+1,b=\sqrt{6}+2$ 时取等号. 即 $\frac{1}{a-1}+\frac{3}{b-2}$ 的最小值为 $\sqrt{6}$.

故选: C.

作业 16

(20-21 高三下·湖南·阶段练习) 数学里有一种证明方法叫做 Proofswithoutwords, 也称之为无字证明,一般是指仅用图象语言而无需文字解释就能不证自明的数学命题,由于这种证明方法的特殊性, 无字证明被认为比严格的数学证明更为优雅. 现有如图所示图形,在等腰直角三角形 VABC 中,点 O 为斜边 AB 的中点,点 D 为斜边 AB 上异于顶点的一个动点,设 $AD=a, BD=b$,则该图形可以完成的无字证明为( )

images/01968fa5-d2e3-7182-940c-34b4aef08981_26_183_1568_396_253_0.jpg

A. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,(a>0, b>0)$ B. $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,(a>0, b>0)$

C. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}\,(a>0, b>0)$ D. $a^2+b^2 \geq 2\sqrt{ab}\,(a>0, b>0)$

解析

解:

【答案】B 【难度】 0.85 【知识点】不等式、由基本不等式证明不等关系【分析】通过图形,并因为 $AD=a, BD=b$,所以 $OC=\frac{a+b}{2}, OD=\left|\frac{a-b}{2}\right|$,从而可以通过勾股定理求得 CD ,又因为 $CD \geq OC$,从而可以得到答案.

【详解】 $\because$ VABC 等腰直角三角形, O 为斜边 AB 的中点, $AD=a, BD=b$

$\therefore OC=\frac{a+b}{2},\ OD=\left|\frac{a-b}{2}\right|$

$\because OC \perp AB$

$\therefore CD^2=OC^2+OD^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}$

$\therefore CD=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

而 $CD \geq OC$,所以 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}\,(a>0, b>0)$,故选项 B 正确.

故选:B

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

作业 17

(23-24 高一上·广东深圳·期中) 已知 $a^2+8b^2=4$.

(1)若 a 与 b 均为正数,求 ab 的最大值;

(2)若 a 与 b 均为负数,求 $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}$ 的最小值.

解析

解:

【答案】(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\frac{25}{4}$

【难度】 0.65

【知识点】基本不等式求积的最大值、基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】(1)根据基本不等式和为定值求解乘积的最值即可;

(2)利用基本不等式“1”的巧用求解最值即可.

【详解】(1)因为 a 与 b 均为正数,所以 $a^2+8b^2=4\geq 2\sqrt{a^2\cdot 8b^2}=4\sqrt{2}ab$,

当且仅当 $a^2=8b^2$,即 $a=2\sqrt{2}b=\sqrt{2}$ 时,等号成立,

所以 $ab\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 ab 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)因为 a 与 b 均为负数,所以 $a^2>0,b^2>0$,

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}=\frac{1}{4}\left(a^2+8b^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)=\frac{1}{4}\left(17+\frac{8b^2}{a^2}+\frac{2a^2}{b^2}\right)\geq\frac{1}{4}\left(17+2\sqrt{16}\right)=\frac{25}{4}$,

当且仅当 $\frac{8b^2}{a^2}=\frac{2a^2}{b^2}$,即 $a=\sqrt{2}b=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时,等号成立,

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}$ 的最小值为 $\frac{25}{4}$.

作业 18

(23-24 高一上·山东聊城·阶段练习) (1) 已知 $12<a<60,15<b<36$, 求 $a-2b$ 的取值范围.

(2)已知 $x>0,y>0$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,求使不等式 $x+y\geq m$ 恒成立的实数 m 的取值范围.

解析

解:

【答案】(1) $-60<a-2b<30$; (2) $m\leq 16$

【难度】 0.65

【知识点】利用不等式求值或取值范围、基本不等式“1”的妙用求最值、基本不等式的恒成立问题

【分析】(1)根据不等式的性质通过乘积及和的运算得出式子范围即可;

(2)通过基本不等式 1 的活用得出最小值即可转化恒成立问题求参.

【详解】(1)因为 $15<b<36$,所以 $-72<-2b<-30$.

又 $12<a<60$,所以 $12-72<a-2b<60-30$,即 $-60<a-2b<30$.

(2) 由 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,

则 $x+y=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=10+\frac{9x}{y}+\frac{y}{x}\geq 10+2\sqrt{\frac{9x}{y}\frac{y}{x}}=16$.

当且仅当 $\begin{cases} x+y=16 \\ \frac{9x}{y}=\frac{y}{x} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=4 \\ y=12 \end{cases}$ 时取到最小值 16.

若 $x+y\geq m$ 恒成立,则 $m\leq 16$.

作业 19

(23-24 高一上·江苏·阶段练习) (1) 若 $x<0$,求 $y=\frac{12}{x}+3x$ 的最大值.

(2)已知 $0<x<\frac{1}{3}$,求 $y=x(1-3x)$ 的最大值.

解析

解：

【答案】(1)-12(2) $\frac{1}{12}$

【难度】 0.65

【知识点】基本不等式求积的最大值、基本不等式求和的最小值

【分析】(1)由已知结合基本不等式求出 $-y=-\frac{12}{x}+(-3x)$ 的最小值即可得 $y=\frac{12}{x}+3x$ 的最大值.

(2)先用配凑法将 $y=x(1-3x)$ 变形为 $y=\frac{1}{3}\times 3x(1-3x)$,再利用基本不等式即可求解.

【详解】(1)因为 $x<0$,所以 $-x>0$,

所以 $-y=-\frac{12}{x}+(-3x)\geq 2\sqrt{-\frac{12}{x}\times(-3x)}=2\times 6=12$,

当且仅当 $-\frac{12}{x}=-3x$ 即 $x=-2$ 时取等号,

所以 $y=\frac{12}{x}+3x\leq -12$ 即 $y=\frac{12}{x}+3x$ 最大值为 -12 .

(2)因为 $0<x<\frac{1}{3}$,

所以 $0<3x<1$,则 $1-3x>0$,

所以 $y=x(1-3x)=\frac{1}{3}\times 3x(1-3x)\leq\frac{1}{3}\left[\frac{3x+(1-3x)}{2}\right]^2=\frac{1}{12}$,

当且仅当 $3x=1-3x$ 时,即 $x=\frac{1}{6}$ 时取等号,

所以 $y=x(1-3x)$ 的最大值是 $\frac{1}{12}$.

作业 20

(23-24 高一上·江苏南京·期中) (1) 设 a,b,c,d 为实数,求证: $ab+bc+cd+ad\le a^2+b^2+c^2+d^2$;

(2)已知 $a,b\in\mathbf{R}$,求证: $\dfrac{6^a}{36^{a+1}+1}\le\dfrac{5}{6}-b+\dfrac{b^2}{3}$.

解析

解:

【答案】(1)证明见解析；(2)证明见解析

【难度】 0.65

【知识点】由基本不等式证明不等关系、作差法比较代数式的大小

【分析】(1)利用作差法化简证明即可；

(2)利用基本不等式结合配方法证明即可.

【详解】(1)因为 $2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-2(ab+bc+cd+ad)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(a-d)^2\ge 0$,

当且仅当 $a=b=c=d$ 时,等号成立,

所以 $2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge 2(ab+bc+cd+ad)$,

所以 $ab+bc+cd+ad\le a^2+b^2+c^2+d^2$;

(2)因为 $6^{a+2}+\dfrac{1}{6^a}\ge 2\sqrt{6^{a+2}\cdot\dfrac{1}{6^a}}=12$,当且仅当 $6^{a+2}=\dfrac{1}{6^a}$,即 $a=-1$ 时取等号,

所以 $\dfrac{6^a}{36^{a+1}+1}=\dfrac{1}{6^{a+2}+\frac{1}{6^a}}\le\dfrac{1}{12}$,当且仅当 $6^{a+2}=\dfrac{1}{6^a}$,即 $a=-1$ 时取等号,

因为 $\dfrac{5}{6}-b+\dfrac{b^2}{3}=\dfrac{1}{3}\left(b-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{12}\ge\dfrac{1}{12}$,

综上 $\dfrac{6^a}{36^{a+1}+1}\le\dfrac{5}{6}-b+\dfrac{b^2}{3}$.

作业 21

(24-25 高一上·上海·课后作业) (1) 已知 x 、 y 都是正数,求证: $(x+y)\left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right) \geq 8x^3y^3$;

(2)已知 $a>0$, $b>0$, $c>0$,求证: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c$.

解析

解:

【答案】(1)证明见解析;(2)证明见解析

【难度】 0.65

【知识点】由基本不等式证明不等关系

【分析】(1)对 $x+y, x^2+y^2, x^3+y^3$ 分别利用基本不等式,然后将得到的式子相乘可得结论;

(2)对 $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}$ 分别利用基本不等式,然后将得到的式子相加化简可得结论.

【详解】证明:(1) $\because x$ 、 y 都是正数,

$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy}>0,\ x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2}>0,\ x^3+y^3 \geq 2\sqrt{x^3y^3}>0$,

$\therefore (x+y)\left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right) \geq 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{x^2y^2}\cdot 2\sqrt{x^3y^3}=8x^3y^3$,

当且仅当 $x=y$ 时,等号成立.

(2) $\because a>0, b>0, c>0$,

$\therefore \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b} \geq 2c, \frac{bc}{a}+\frac{ab}{c} \geq 2b, \frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq 2a$,

$\therefore 2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right) \geq 2(a+b+c)$,

故 $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c$,当且仅当 $\frac{bc}{a}=\frac{ac}{b}=\frac{ab}{c}$,

即 $a=b=c$ 时等号成立.