

公式

- I. 铅直渐近线 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$, 则称 $l: x = x_0$ 为 $f(x)$ 的铅直渐近线.
- II. 水平渐近线 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$, 则称 $l: y = y_0$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线.
- III. 斜渐近线 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, 则称 $l: y = kx + b$ 为 $f(x)$ 的斜渐近线. 其中:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} (f(x) - kx) \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

例题 71

(2025 新 TS 联考) 设曲线 $\Gamma: x^2(x - y) = 2$, 则下列叙述正确的是:

_____。

- A. 曲线 Γ 的图象仅在第一、三象限内.
- B. 曲线 Γ 的渐近线为 $y = x$ 和 y 轴.
- C. 曲线 Γ 与曲线 $L: y^2(y - x) = 2$ 关于直线.
- D. 曲线 Γ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 交于 A, B 两点, 则线段 AB 的弦长为 $\sqrt{2} + 1$.

解析

渐近线

易见 $\Gamma: y = x - \frac{2}{x^2}$, 且 $x \neq 0, y \neq x$, 所以 Γ 无渐近线。

若 $x \rightarrow \pm\infty$, 则 $y - x = -\frac{2}{x^2} \rightarrow 0$, 即 $y \rightarrow x$. 故 $y = x$ 为 Γ 的斜渐近线。

单调性

易有 $y' = 1 + \frac{4}{x^3}$, 可见 $x > 0$ 时, Γ 单调递增。 $(-\infty, -\sqrt[3]{4})$ 时, Γ 单调递减;

且 $x < 0$ 时, $\Gamma \leq -2\sqrt{3} - 2^{1-1} = -2 - \sqrt{2}$ 。

交点

由于 $x - 2$ 与 $x > 0$ 时, Γ 的图象关于 $x = 0$ 时的无关, 且 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1 + \frac{2(x_2 + x_1)}{(x_1 x_2)^2} > 1 + \frac{4}{\sqrt{(x_1 x_2)^3}} > 1 + \sqrt{2}.$$

测验 2Q

分别求三种曲线 $y = x + \frac{1}{x}$, $y = x - \frac{1}{x}$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线。