

## 1 考点知识汇总

数学部分近年考察常常与函数，导数，概率，几何，集合，数论等知识综合考察，新高考中难度有较多提升，本次讲义主要从数列与函数综合角度讨论数列应用。

### 1.1 典型数列递推求通项

#### 定理 1.1 线性递推关系

线性递推关系： $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2} (n \geq 3)$  其特征方程为  $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$  根据特征方程的解，有三种情况：

- (1)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，其通项为： $a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$ ，其中  $A, B$  为待定系数，根据初始条件  $a_1, a_2$  进行求解。
- (2)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ，其通项为  $a_n = (A + Bn)\lambda^n$ 。
- (3) 将此方程无实数解，即根为共轭复根时， $a_n = r^n(C \cos(n\theta) + D \sin(n\theta))$ ，其中  $C, D$  为实数，根据  $a_1, a_2$  求解，特别地，当  $r = 1$  时， $\{a_n\}$  是周期数列，周期是  $\frac{2\pi}{\theta}$ 。

### 1.2 分式递推关系

#### 定理 1.2 分式递推关系

分式递推关系  $a_{n+1} = \frac{ba_n + c}{da_n + e}$ ，这里我们利用不动点方程 ( $x = f(x)$ ， $x$  称为  $f(x)$  的不动点)  $x = \frac{bx + c}{dx + e} \Rightarrow dx^2 + (e - b)x - c = 0$ ，同样这里有三种情况：

- (1) 不动点方程有两个不相等实根  $x_1 \neq x_2$ ， $b_n = \frac{a_n - x_1}{a_n - x_2}$ ， $\{b_n\}$  是等比数列，公比可以根据  $b_1, b_2$  计算。
- (2) 不动点方程有两个相等实根  $x_1 = x_2 = x_0$ ， $c_n = \frac{1}{a_n - x_0}$ ， $\{c_n\}$  是等差数列，公差根据  $c_1, c_2$  计算。
- (3) 不动点有两个共轭复根的时候， $b_n = \frac{a_n - x_1}{a_n - x_2}$  是复数等比数列，可以利用  $b_1, b_2$  求出复公比  $k = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，可得： $b_n = b_1 k^{n-1}$ ，再解出  $a_n$  即可，特别地，当  $r = 1$  时， $\{b_n\}$  为周期数列，周期是  $\frac{2\pi}{\theta}$ 。

### 1.3 典型数列求和

#### 定理 1.3 平方数数列前 $n$ 项和

平方数数列前  $n$  项和：

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## 提示

可以采用裂项法:  $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n$$