千寻蹊径

复数专题

Theorem

复数的辐角 (Argument of a Complex Number)
复数 $z = x + yi$ 对应的辐角 θ 是指在复平面上，从正实轴逆时针旋转到向量 OZ（O 为原点，Z 为复数 z 对应的点）时所形成的角。辐角通常用 $\arg(z)$ 表示。它的计算方式取决于复数 z 所在的象限：

1. 当 $x > 0$ 时，$\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
2. 当 $x < 0$ 且 $y \geq 0$ 时，$\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$
3. 当 $x < 0$ 且 $y < 0$ 时，$\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$
4. 当 $x = 0$ 且 $y > 0$ 时，$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$
5. 当 $x = 0$ 且 $y < 0$ 时，$\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

需要注意的是，复数的辐角有无限多个值，它们相差 2π 的整数倍。我们通常会指定一个**主辐角** (Principal Argument)，记作 $\mathrm{Arg}(z)$，它的取值范围是 $(-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi)$。在大多数情况下，我们默认采用 $(-\pi, \pi]$ 作为主辐角的范围。

Example

计算和式:

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) + \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)$$

Analysis

Solution Strategy :

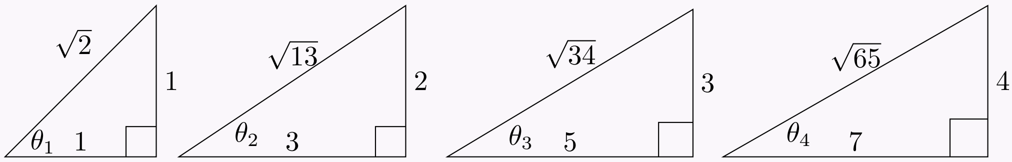
1. 通过数形结合，将每个 arcsin 转换为 arctan 的形式
2. 利用复数及其辐角的性质，算出最后得到的复数辐角
3. 或者利用反正切的和差公式进行化简，得到结果

Detailed Calculation :

对于原式 $S = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) + \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)$：

- 角 $\theta_1 = \arctan(1) \implies z_1 = 1 + i$
- 角 $\theta_2 = \arctan(2/3) \implies z_2 = 3 + 2i$

- 角 $\theta_3 = \arctan(3/5) \implies z_3 = 5 + 3i$
- 角 $\theta_4 = \arctan(4/7) \implies z_4 = 7 + 4i$



总角度 S 是总乘积 $Z = z_1z_2z_3z_4$ 的辐角

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= (1+i)(3+2i) = (3-2) + (2+3)i = 1+5i \\
z_3z_4 &= (5+3i)(7+4i) = (35-12) + (20+21)i = 23+41i \\
Z &= (z_1z_2)(z_3z_4) = (1+5i)(23+41i) \\
&= (23-205) + (41+115)i \\
&= -182 + 156i
\end{aligned}$$

我们需要求解 $\tan(S) = -6/7$，且 S 位于第二象限
反正切函数 $\arctan(-6/7)$ 的主值在第四象限。为了得到第二象限的角，我们需要加上 π。

$$S = \pi + \arctan\left(-\frac{6}{7}\right)$$

根据性质 $\arctan(-x) = -\arctan(x)$，可得最终结果

$$\boxed{S = \pi - \arctan\left(\frac{6}{7}\right)}$$

Note

解题要点：

- 利用直角三角形的几何意义，将原式中各项arcsin统一转换为更便于运算的arctan形式
- 运用“复数相乘，辐角相加”的核心原理，把复杂的角度求和问题转化为复数乘法运算
- 根据实部与虚部符号判断其所在象限，并对主值进行修正，从而确定最终的角度和

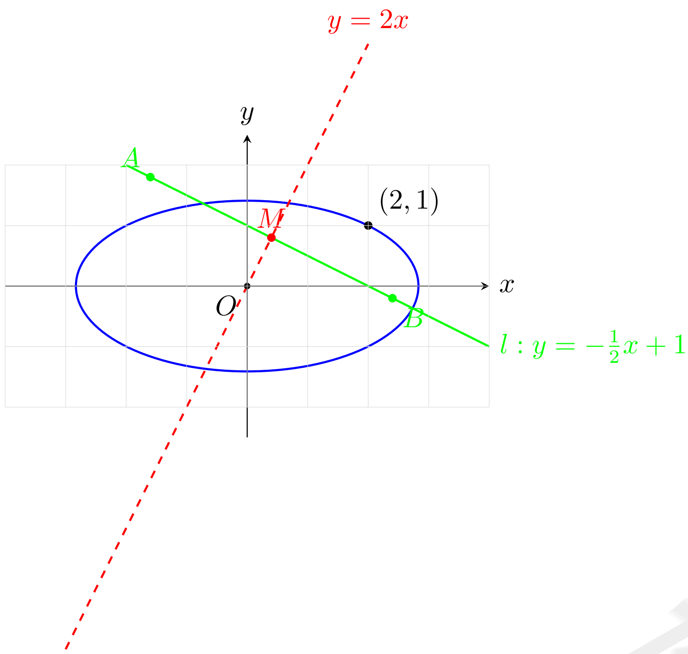


图 1: ***Figure 4.1 - Ellipse and Symmetric Line*** **图 4.1 - 椭圆与对称直线**

Extension

拓展思考：

1. **一般化问题：** 若椭圆上两点关于直线 $y = kx + c$ 对称，如何求解？
2. **双曲线情形：** 类似问题在双曲线中如何处理？
3. **参数方程法：** 利用椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 求解对称问题

相关定理：

- 焦点弦性质：过焦点的弦具有特殊的调和性质
- 切线方程：椭圆上一点的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

Infinite Series 5.2

Summary

5.1 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$ $(n\geq 1)$。
(1) 证明：$\frac{1}{a_n}$ 是等差数列；
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(3) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的值。

Formula

Analysis Method 分析方法：
这是典型的递推数列问题，关键在于找到合适的变换使得新数列具有简单的递推关系。
第一问： 对递推关系取倒数：

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n}$$

设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，则 $b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}$，$b_1=1$。
显然 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列。
第二问：

$$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$$

因此：
第三问：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+1}=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

此级数发散（调和级数）。

Exercise

级数收敛性判断：

- 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散
- p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，$p\leq 1$ 时发散
- 比值判别法和根值判别法的应用条件