fonttitle
fonttitle//
attach boxed title to top left
attach boxed title to top left//

公式

I. 铅直渐近线 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$，则称 $l: x=x_0$ 为 $f(x)$ 的铅直渐近线.

II. 水平渐近线 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$，则称 $l: y=y_0$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线.

III. 斜渐近线 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$，则称 $l: y=kx+b$ 为 $f(x)$ 的斜渐近线. 其中:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}(f(x)-kx)\right]=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k.$$

fonttitle
fonttitle//
attach boxed title to top left
attach boxed title to top left//

例题 71

(2025 新 TS 联考) 设曲线 $\Gamma: x^2(x-y)=2$，则下列叙述正确的是：______________。

A. 曲线 Γ 的图象仅在第一、三象限内.

B. 曲线 Γ 的渐近线为 $y=x$ 和 y 轴.

C. 曲线 Γ 与曲线 $L: y^2(y-x)=2$ 关于直线.

D. 曲线 Γ 与圆 $O: x^2+y^2=2$ 交于 A,B 两点，则线段 AB 的弦长为 $\sqrt{2}+1$.

fonttitle

fonttitle//

attach boxed title to top left

attach boxed title to top left//

解析

渐近线

易见 $\Gamma : y = x - \frac{2}{x^2}$，且 $x \neq 0, y \neq x$，所以 Γ 无渐近线。

若 $x \to \pm\infty$，则 $y - x = -\frac{2}{x^2} \to 0$，即 $y \to x$。故 $y = x$ 为 Γ 的斜渐近线。

单调性

易有 $y' = 1 + \frac{4}{x^3}$，可见 $x > 0$ 时，Γ 单调递增。$\left(-\infty, -\sqrt[3]{4}\right)$ 时，Γ 单调递减；

且 $x < 0$ 时，$\Gamma \leq -2\sqrt{3} - 2^{1-1} = -2 - \sqrt{2}$。

交点

由于 $x - 2$ 与 $x > 0$ 时，Γ 的图象关于 $x = 0$ 时的无关，且 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1 + \frac{2(x_2 + x_1)}{(x_1 x_2)^2} > 1 + \frac{4}{\sqrt{(x_1 x_2)^3}} > 1 + \sqrt{2}$。

fonttitle

fonttitle//

attach boxed title to top left

attach boxed title to top left//

测验 2Q

分别求三种曲线 $y = x + \frac{1}{x}$，$y = x - \frac{1}{x}$，$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线。