Miquel's Theorem 4.36 米勒定理

Exercise 127 习题

已知 $A(-1,0)$，$B(3,0)$。P 是圆 $O: x^2+y^2=36$ 上的一个动点，则 $\sin\angle APB$ 的最大值为：____________________。

Analysis 解析思路

Solution Strategy 解题思路：

1. 考虑圆的对称性，仅研究上半圆。取点 P，使 $\triangle ABP$ 的外接圆与动圆 O 相切于点 P。
2. 另取一点 P_1，则易见 $\angle APB > \angle AP_1B$。故 $\triangle ABP$ 的外接圆 E 与圆 O 相切时，有最大的 $\angle APB$。
3. 考虑 $0 < \angle APB < \frac{\pi}{2}$，即此时有最大的 $\sin\angle APB$。

Detailed Calculation 具体计算：

设外接圆圆心 $E(1,t)$，则其半径 $R_E = EB$。
根据两圆内切条件，圆心距等于半径差，即 $OE = R_O - R_E$。

$$R_E = \sqrt{(3-1)^2+t^2} = \sqrt{4+t^2} \quad (1)$$

$$OE = \sqrt{(1-0)^2+t^2} = \sqrt{1+t^2} \quad (2)$$

$$R_O = 6 \quad (3)$$

代入得 $\sqrt{4+t^2} = 6-\sqrt{1+t^2}$，解得 $\sqrt{4+t^2} = \frac{13}{4}$。

Final Answer 最终答案：

根据正弦定理：$$\boxed{\sin\angle APB = \frac{AB}{2R_E} = \frac{4}{2\times\frac{13}{4}} = \frac{8}{13}}$$

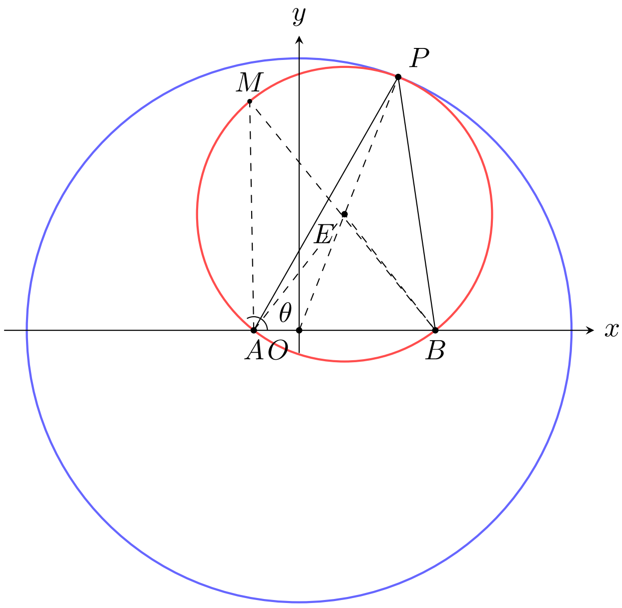

图 1: *Figure 4.49 - Miquel's Theorem Geometry* 图 4.49 - 米勒定理几何示意图

Extension 知识拓展

该题为米勒定理的变式，最大临界角的证明，依然采用了圆周角大于圆外角的方式。具体问题的原型为 $\angle MON$ 一边 ON 上有定点 A, B，另一边 OM 上有动点 P，求 $\angle APB$ 何时最大。不难证明 $\triangle APB$ 的外接圆与 OM 相切于点 P。证明方式与本题一致，都是另取一点，利用圆周角大于圆外角处理。