Analytic Geometry 4.1

Theorem

圆锥曲线的统一定义： 平面内与一定点（焦点）和一条定直线（准线）的距离比为常数 e（离心率）的点的轨迹称为圆锥曲线。

当 $0 < e < 1$ 时为椭圆；当 $e = 1$ 时为抛物线；当 $e > 1$ 时为双曲线。

椭圆的重要公式

标准椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的重要公式：

1. **离心率：** $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$，其中 $c^2 = a^2 - b^2$
2. **焦点坐标：** $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$
3. **准线方程：** $x = \pm\frac{a^2}{c}$
4. **焦点弦长公式：** 过焦点的弦长 $|AB| = \frac{2b^2}{a} \cdot \frac{1}{1-e^2\cos^2\theta}$
5. **切线方程：** 椭圆上点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$

特别提醒：椭圆的离心率越小，椭圆越接近圆形

例题：椭圆的焦点弦性质

题目： 已知椭圆 $C : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$，$F$ 为其右焦点，直线 l 过点 F 且倾斜角为 $60°$，求直线 l 与椭圆 C 的交点弦长。

解题分析：

Step 1：确定椭圆参数

- $a^2 = 9$，$b^2 = 5$，故 $a = 3$，$b = \sqrt{5}$
- $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4$，故 $c = 2$
- 右焦点 $F(2, 0)$，离心率 $e = \frac{2}{3}$

Step 2：求直线方程

- 直线 l 的斜率为 $k = \tan 60° = \sqrt{3}$
- 直线方程：$y = \sqrt{3}(x - 2)$

Step 3：联立求解联立 $\begin{cases} y=\sqrt{3}(x-2) \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1 \end{cases}$

化简得：$8x^2-18x+9=0$

Step 4：计算弦长由韦达定理：$x_1+x_2=\frac{9}{4}$，$x_1x_2=\frac{9}{8}$

弦长 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{\frac{81}{16}-\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}$

答案：$\frac{3}{2}$

Exercise 4.1

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (其中 $a>b>0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $(2,1)$。

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 设直线 $l: y=kx+m$ 与椭圆相交于 A、B 两点，若 A、B 关于直线 $y=2x$ 对称，求直线 l 的方程。

Analysis

Solution Strategy 解题思路：

1. **第一问**：利用离心率公式 $e=\frac{c}{a}$ 和椭圆过定点条件建立方程组
2. **第二问**：利用对称性质，若两点关于直线对称，则：
    - 连线中点在对称轴上
    - 连线斜率与对称轴斜率乘积为 -1

Detailed Calculation 具体计算：

第一问：由 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $c^2=\frac{3a^2}{4}$。

由 $c^2=a^2-b^2$，得 $b^2=a^2-c^2=\frac{a^2}{4}$。

椭圆过点 $(2,1)$，代入得：$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$

将 $b^2=\frac{a^2}{4}$ 代入：$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}=1$

解得 $a^2=8$，$b^2=2$。

椭圆方程：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$

第二问：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，中点 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$。

由对称性质：

$$\text{中点在对称轴上：}\frac{y_1+y_2}{2}=2\cdot\frac{x_1+x_2}{2} \tag{1}$$

$$\text{斜率关系：}k\cdot 2=-1\text{即}k=-\frac{1}{2} \tag{2}$$

联立椭圆方程与直线方程，利用韦达定理可得： $\boxed{y=-\dfrac{1}{2}x+1}$

Note

解题要点：

- 对称问题的核心在于利用对称轴的性质
- 椭圆离心率 $e=\frac{c}{a}$ 是连接 a、b、c 的桥梁
- 联立方程时要注意判别式 $\Delta>0$ 的条件

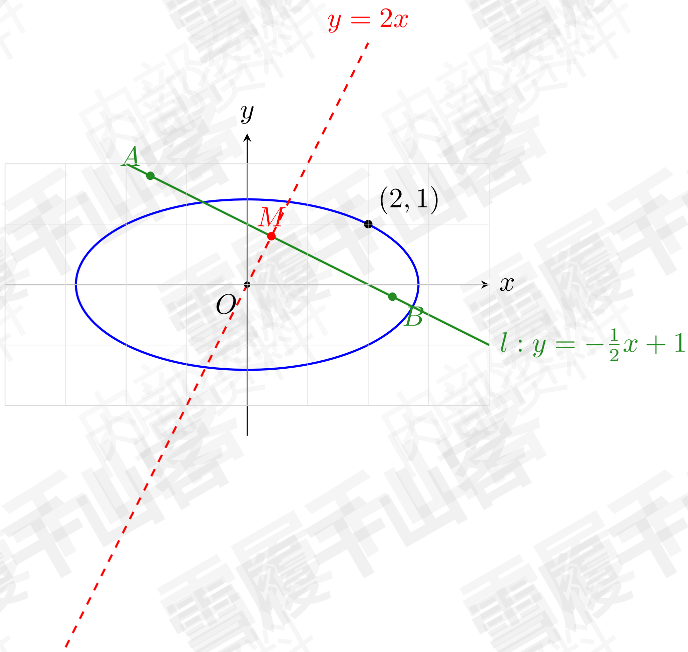

图 1: *Figure 4.1 - Ellipse and Symmetric Line* 图 4.1 - 椭圆与对称直线

Extension

拓展思考：

1. **一般化问题**：若椭圆上两点关于直线 $y=kx+c$ 对称，如何求解？
2. **双曲线情形**：类似问题在双曲线中如何处理？

3. **参数方程法**：利用椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 求解对称问题

相关定理：

- 焦点弦性质：过焦点的弦具有特殊的调和性质
- 切线方程：椭圆上一点的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

Infinite Series 5.2

数列与级数的重要公式

递推数列与无穷级数的核心公式：

1. 等差数列：$a_n = a_1 + (n-1)d$，$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$

2. 等比数列：$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$，$S_n = \begin{cases} na_1 & 若 q = 1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & 若 q \neq 1 \end{cases}$

3. 无穷等比级数：$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$ （当 $|q| < 1$ 时收敛）

4. 调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

5. 递推关系变换：对于 $a_{n+1} = f(a_n)$ 型递推，常用换元法：
   - 取倒数：$b_n = \frac{1}{a_n}$
   - 线性变换：$b_n = a_n + c$ 或 $b_n = ka_n$

技巧提示：遇到分式递推时，优先考虑取倒数变换

Exercise 5.1

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n+2}$ $(n \geq 1)$。
(1) 证明：$\frac{1}{a_n}$ 是等差数列；
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(3) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的值。

例题：无穷级数的收敛性判断

题目： 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ 的收敛性，并求其近似值（精确到小数点后 3 位）。

解题过程：

Step 1：判断收敛性这是一个交错级数，形式为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$，其中 $u_n = \frac{1}{n^2+1}$。
检验 Leibniz 判别法条件：

- $u_n > 0$ 对所有 $n \geq 1$ 成立
- $u_{n+1} < u_n$：$\frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1}$ 成立
- $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$

Step 2：绝对收敛性判断 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

由于 $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数绝对收敛。
Step 3：近似计算计算前 10 项和：$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \approx 0.915$

结论：0.915

Analysis

Analysis Method 分析方法：
这是典型的递推数列问题，关键在于找到合适的变换使得新数列具有简单的递推关系。
第一问：对递推关系取倒数：

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n+2}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a_n}$$

设 $b_n = \frac{1}{a_n}$，则 $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}$，$b_1 = 1$。
显然 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列。
第二问：

$$b_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

因此：$\boxed{a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{n+1}}$

第三问：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

由于调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，所以原级数发散。

答案：

Note

解题关键点：

- 递推数列问题优先考虑变量替换
- 取倒数是处理分式递推的常用技巧
- 判断级数收敛性要结合具体的判别法