Revisão - Testes de hipótese

1. Nome do teste
2. identificar a(s) v.a(s) em causa
3. condições de aplicação do teste
4. formular H_0 e H_1
5. valor da estatística do teste e a sua distribuição
6. zona de rejeição, escrever o critério de rejeição
7. conclusão do teste de hipóteses para o nivel α

EXTRA

8. calcular o intervalo correspondente
9. calcular o valor-p do teste

1. Teste do Friedman -(Rank sum Test)

- Este método usa-se quando as observações estão distribuidas por três ou mais situações experimentais
- É um teste não paramétrico que resulta útil quando não é posível usar a ANOVA devido a que não se pode assumir que os dados são normais.

THE USE OF RANKS TO AVOID THE ASSUMPTION OF NORMALITY IMPLICIT IN THE ANALYSIS OF VARIANCE

By Milton Friedman

National Resources Committee

1937

Most projects involving the collection and analysis of statistical data have for one of their major aims the isolation of factors which account for variation in the variable studied. The statistical tool ordinarily employed for this purpose is the analysis of variance. Frequently, however, the data are sufficiently extensive to indicate that the assumptions necessary for the valid application of this technique are not justified. This is especially apt to be the case with social and economic data where the normal distribution is likely to be the exception rather than the rule. This difficulty can be obviated, however, by

Situações experimentais comuns nas quais é usado o teste de Friedman.

Situação 1: Randomized Block Designs

- Existem K tratamentos
- Pretende-se estudar o efecto do tratamento numa variável de resposta, mas há variabilidade devido a outro fator
- se a variabilidade do segundo fator pode ser agrupada é possível detetar as diferênças entre os tratamentos.
- O objetivo é controlar a variavilidade do segundo fator, isto é posivel juntando as unidades similares num bloco
- a condição é que as unidades são homogénias dentro do bloco e o tratamento é aleatório em cada bloco.

Situação 1: Randomized Block Designs

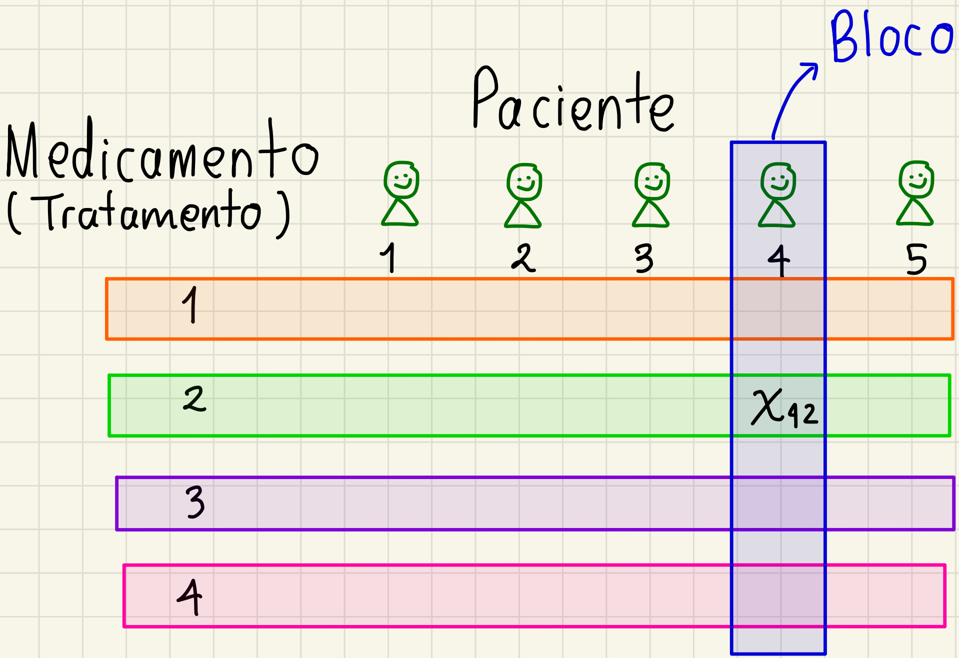
Suponha que um investigador quer estudar o efeito de 4 fertilizantes num campo de algodão. O investigador sabe que as condições do solo nas 8 áreas experimentais são muito variáveis. Assim, o investigador quer desenhar uma experiência para detectar diferenças entre os 4 fertilizantes na presença de uma variável que não é de interesse (as 8 áreas).

Grupo (Fertilizante)	Bloco – (Área) 1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								

Situação 2: Simple repeated measure design

- Existem K tratamentos
- Nas ciências biomédicas, farmacêuticas, e sociais, as unidades experimentais são pessoas
- cada unidade/pessoa tem uma resposta diferente ao tratamento
- é possível controlar esta variabilidade ao fazer um design no qual cada unidade recebe os K tratamentos.
- a ordem do tratamento é igual para todas as unidades
- carry-over effect: a aplicação do tratamento j pode influênciar o tratamento $j+1$
- condição: não há carry-over effect

Situação 2: Simple repeated measure design



X_{42} =
tempo de reação
de 4 ao M=2.

2. identificar a(s) v.a(s) em causa

- Os dados são organizados da seguinte maneira:

Grupo \ Bloco	1	2	3	....	n
1	x_{11}	x_{21}	.	. .	x_{n1}
2	x_{12}				
⋮					
K	x_{1K}				x_{nK}

3. condições de aplicação do teste

- Observações em distintos blocos são independentes
  - ↳ podem não ser independentes no mesmo bloco
- Os dados podem ser ordinais ou contínuos.

4. formular H_0 e H_1

H_0: todas as observações dos K blocos (cada uma de tamanho n) são da mesma população

H_1: existe um $i \neq i'$ tal que as populações do bloco i, i' são diferentes.

H_0: $M_1 = M_2 = \cdots = M_K$

H_1: $M_i \neq M_{i'}$ para alguns $i = i'$

M_i é a mediana do bloco i

- Se H_0 é verdadeira $\Rightarrow$ o efeito do tratamento é o mesmo
- Se H_0 é falsa $\Rightarrow$ há um tratamento cujo efeito é diferente de algum outro tratamento
- válido para a situação 1 e 2.

5. valor da estatística do teste e a sua distribuição

	Tratamento				
Bloco	1	2	3	...	K
1	R_{11}	R_{21}	R_{31}		R_{K1}
2	R_{12}	R_{22}			R_{K2}
⋮					
b	R_{1b}	R_{2b}			R_{Kb}
Soma dos ranks	R_1	R_2			R_K

Fazer o rank para cada bloco $\{1, \dots, k\}$

- se H_0 está certa $\Rightarrow$ todos os tratamentos têm o mesmo efeito

$\Rightarrow$ os ranks são aleatórios em cada linha

- Se H_0 é falsa ⇒ não há variabilidade nos ranks
- o teste pretende determinar se os dados são diferentes do padrão de H_0.

	Tratamento				
Bloco	1	2	3	. . .	K
1	R_{11}	R_{21}	R_{31}		R_{K1}
2	R_{12}	R_{22}			R_{K2}
⋮					
b	R_{1b}	R_{2b}			R_{Kb}
Suma dos ranks	R_1	R_2			R_K

Fazer o rank para cada bloco $\{1, \ldots, K\}$

- se H_0 é verdadeira ⇒ $R_1, R_2, \ldots, R_K$ são semelhantes.

se H_0 é falsa ⇒ pelo menos uma R_i é suficientemente diferente de qualquer outra R_j.

qualquer

* para um valor α, R_{ij} = rank do tratamento i no bloco j

* R_i = soma dos ranks do tratamento i.

Estatística de teste:

- $$\chi_F^2 = \frac{12}{bK(K+1)} \sum_{i=1}^{K} \left(R_i - \frac{b(K+1)}{2} \right)^2$$

valor esperado de R_i se H_0 é verdadeira.

- A distribuição assimptótica de χ_F^2 é $\chi_F^2 \sim \chi^2_{(K-1)}$, $df = K-1$

- $\chi_F^2 = \frac{12}{bK(K+1)} \sum_{i=1}^{K} R_i^2 - 3b(K+1)$ $\qquad W = \frac{12 \sum_{i=1}^{K} R_i^2 - 3b^2K(K+1)^2}{b^2K(K^2-1)}$

Zona de rejeição:

- χ_F^2: Rejeitar H_0 si $\chi_F^2 \geq \chi_\alpha^2$ $\qquad \chi_\alpha^2 =$ valor da cauda direita para uma χ^2 com $df = K-1$.

TABLE I

STANDARD DEVIATIONS AT DIFFERENT INCOME LEVELS* OF EXPENDITURES ON THE MAJOR CATEGORIES DURING 1935–36 OF 246 MINNEAPOLIS AND ST. PAUL FAMILIES OF WAGE-EARNERS AND LOWER SALARIED CLERICAL WORKERS†

Category of expenditure	Annual family income						
	$750–1,000	$1,000–1,250	$1,250–1,500	$1,500–1,750	$1,750–2,000	$2,000–2,250	$2,250 2,500
Housing	$103.3	$68.42	$89.53	$77.94	$100.0	$108.2	$184.9
Household operation	42.19	44.31	60.91	73.90	43.87	61.74	102.3
Food	71.27	81.88	100.71	86.52	100.3	90.75	100.6
Clothing	37.59	60.05	56.97	60.79	71.82	83.04	117.1
Furnishings and equipment	58.31	52.73	96.04	60.42	104.33	89.78	85.77
Transportation	46.27	82.18	129.8	181.0	172.33	164.8	246.8
Recreation	19.00	23.07	38.70	45.81	59.03	50.69	55.18
Personal care	8.31	8.43	9.16	14.28	10.63	15.84	12.50
Medical care	20.15	33.48	60.08	69.35	114.34	45.28	101.6
Education	3.16	4.12	12.73	18.95	8.89	41.52	66.33
Community welfare	4.12	18.87	8.54	12.92	25.30	19.85	16.76
Vocation	7.68	11.18	10.44	10.95	10.54	13.96	14.39
Gifts	5.29	10.91	11.22	25.26	42.25	48.80	69.38
Other	6.00	5.57	22.23	2.45	6.24	1.00	4.00

TABLE II

RANKING OF INCOME LEVELS BY SIZE OF STANDARD DEVIATION FOR EACH CATEGORY OF EXPENDITURE*

Category of expenditure	Annual family income						
	$750–1,000	$1,000–1,250	$1,250–1,500	$1,500–1,750	$1,750–2,000	$2,000–2,250	$2,250–2,500
Housing	5	1	3	2	4	6	7
Household operation	1	3	4	6	2	5	7
Food	1	2	7	3	5	4	6
Clothing	1	3	2	4	5	6	7
Furnishings and equipment	2	1	6	3	7	5	4
Transportation	1	2	3	6	5	4	7
Recreation	1	2	3	4	7	5	6
Personal care	1	2	3	6	4	7	5
Medical care	1	2	4	5	7	3	6
Education	1	2	4	5	3	6	7
Community welfare	1	5	2	3	7	6	4
Vocation	1	5	2	4	3	6	7
Gifts	1	2	3	4	5	6	7
Other	5	4	7	2	6	1	3
a. Total	23	36	53	57	70	70	83
b. Mean rank	1.643	2.571	3.786	4.071	5.000	5.000	5.929
c. Deviation	−2.357	−1.429	−.214	.071	1.000	1.000	1.929

Sum of squared deviations = 13.3692 $K-1=6$

$\chi_r^2 = 40.108$

* The figures in this table are derived from Table I.

Aplicação do Teste no R

y = variavel de resposta

groups = tratamento

Block = bloco

Grupo	Bloco 1	2	3	...	n
1	x_{11}	x_{21}	...		x_{n1}
2	x_{12}				
⋮					
K	x_{1K}				x_{nK}

y	Grupo	Bloco
x_{11}	1	1
x_{21}	1	2
⋮	⋮	⋮
x_{nK}	K	n

How to perform Friedman's test in R.

- Non-parametric alternative to the repeated measures of ANOVA.
- Determine whether or not there is a statistically significant difference between the means of three or more groups, the same subjects show up in each group.
- y = vector of response values

groups = a vector of values indicating the group an observ. belongs to

blocks = a vector of values indicating the "blocking" variable

The test statistic is a chi-squared an the output

Plan:

1. Explain the test theory
2. Explain how to do the test in R.
3. Write an exercise sheet.
4. Point out to some subtleties when considering the test.
5. When is it better to consider this test over ANOVA.

Q1: Questions to ask: What are the degrees of freedom?

Q2: If the test indicates there is stat. significant differences between the groups, how do I follow up in finding out what are the groups that differ?

Q3: What happens when there are some ties?

Q4: Are we assuming equality of variances across groups just as in the ANOVA case?

Q5: Do we need equal sample sizes?

Example:

Reaction time of 5 patients on four different groups.

Question: Want to compare the reaction time of the drug in each patient.

patient

Drug	1	2	3	4	5
1	30	.	.	.	.
2	28	.	.	.	.
3	16	.	.	.	.
4	34	.	.	.	.

each block

Drug

Score = reaction time, this is the response variable.

y = response variable = score

groups = type of drug.

Block = person

H_0 = the reaction time is the same for each drug across all patients

H_1 = there is evid. to conclude that the response type is diff. across each level.

We perform the test an co

tipo ~~de~~ droga medicamento paciente

To do the test in R you need to tell what are the blocks and what are the groups

groups → the treatment either random or fixed

blocks → things with similar charact.

11.6. One-Way Randomized Block design.

- In a randomized block design, we first group the experimental units into sets, or blocks, of relatively similar units and then we randomly allocate treatments within each block.
- Deside blocks to each row of the block assign a treatment at random