Facultades de Ciencias/Ingeniería/Ciencias Económicas y de Administración
Licenciatura en Estadística

Probabilidad II
Primer semestre de 2024
Práctico 2

1. Consideremos el experimento aleatorio que consiste en sortear un número al azar del intervalo $[0,1]$ con distribución uniforme. Definamos la sucesión de eventos $A_n =$ "el número sorteado es menor a $1/n$".

   - Definir adecuadamente un espacio muestral Ω que permita definir los conjuntos A_n.
   - Describa formalmente los sucesos A_n.
   - ¿Estos sucesos son independientes?
   - ¿La sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona?

   ¿Qué ocurre si el experimento es repetido N veces de forma independiente y los sucesos $\{A_n\}_{1\leq n\leq N}$ se definen en base al resultado del n-ésimo sorteo? Repita el mismo análisis que para el caso anterior (definir un espacio muestral adecuado, definir los sucesos y responder las dos preguntas).

2. Sean X, Y dos variables aleatorias a valores reales definidas sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   Decimos que X e Y son **iguales casi seguramente** (y se escribe $X \overset{cs}{=} Y$) si hay probabilidad 1 de que sean iguales, es decir,

   $$\mathbb{P}(X = Y) = 1.$$

   Por otro lado, decimos que X e Y son **iguales en distribución** (se escribe $X \overset{d}{=} Y$) si para todo $A \in \mathcal{A}$ se verifica:

   $$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A).$$

   - Mostrar que esta definición de igualdad en distribución implica la igualdad de las funciones de distribución.
   - Probar que si $X \overset{cs}{=} Y$ entonces $X \overset{d}{=} Y$. Probar con un contra ejemplo que el recíproco no se cumple.

3. Sea $\{X_i : \Omega \to \mathbb{R}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ otra v.a. definida sobre el mismo Ω. Decimos que X_n converge en probabilidad a X (y lo anotamos $X_n \xrightarrow{P} X$) si para todo $\epsilon > 0$ se verifica que

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

   • Mostrar que si $X_n \xrightarrow{P} X$ y $Y_n \xrightarrow{P} Y$, entonces la $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

   Esto significa que si tenemos dos sucesiones que convergen en probabilidad, la sucesión de la suma de ellas converge en probabilidad a la suma de los límites.

4. Sea $\{X_i : \Omega \to \mathbb{R}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli(p), y sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua.

   Definamos $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$. Ya sabemos que $Y_n := \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

   • Probar que $f(Y_n) \xrightarrow{P} f(p)$.

5. Sea $\{X_i : \Omega \to \mathbb{R}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con una misma distribución F.

   Para todo $x \in \mathbb{R}$, definimos la función de distribución empírica como en el punto x como $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i\in(-\infty,x]\}}$.

   • Probar que $F_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$.

6. Supongamos que tenemos un grupo de n personas que usan Facebook. Identificamos a cada persona con los números $\{1,\dots,n\}$. Supongamos que las primeras k personas son todas amigas entre sí y además deciden tener amistad con las restantes $n-k$ personas de forma aleatoria (con probabilidad $1/2$ se hacen amigos/as). Las personas $\{k+1, k+2,\dots,n\}$ deciden ser amigas entre sí también de forma aleatoria con probabilidad $1/2$.

   Nota: la amistad es recíproca y siempre es aceptada, una persona no puede ser amiga de sí misma1.

   Podemos construir una matriz con entradas a_{ij}, de forma que $a_{ij} = 1$ si la persona i y la j son amigas, y vale 0 si no.

   Las entradas de esta matriz son variables aleatorias,
   • ¿qué distribución tienen?

   Definimos que el grado de una persona en la red como la cantidad de amigos que tiene. El grado de la persona i es $g_n(i) = \sum_{l=1}^{n} a_{il}$.

   • Probar que existe una constante c, tal que si $k > c\sqrt{n\log n}$ entonces existe un valor M tal que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(g_n(i) < M) = 0$ si $i \le k$, y $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(g_n(i) > M) = 0$ si $i > k$.

7. Un caminante se paseaba por los campos tirando una moneda de forma independiente. De pronto se topa con una anciana que tenía en su mano el resultado de sortear un número al azar con distribución uniforme en [0,1]. El caminante, con aires de querer estafarla, le propone intercambiar ese número por el resultado de las tiradas de su moneda que, asegura, es un experimento que viene haciendo desde sus vidas pasadas, y le creemos cuando dice que es de duración infinita.

   La anciana acepta el cambio, ambos quedan contentos con el trueque y el caminante queda con la satisfacción de creer que ha salido ganando (¿es mejor tener el número o tener las infinitas tiradas de la moneda?). Por fin, se había quitado de encima toda esa carga de una eternidad de resultados de tiradas de monedas.

   Un tiempo después, el caminante se vuelve a cruzar con la anciana, y ahora la ve con una sucesión de infinitos números uniformes en [0,1] y además, ¡independientes!. El caminante no da crédito a la situación (ver la figura 1) y se siente decepcionado. ¿Qué pensarían sus antepasados de que él hubiera entregado esa rica herencia familiar, y que la anciana (ver figura 2) hubiera logrado transformar en algo aparentemente más valioso?

   • Ayudar al caminante en su reflexión.

Figura 1: El caminante tomando un mate mientras piensa cómo pudo suceder todo eso.

Figura 2: La anciana después de tener la sucesión de uniformes independientes.