Si F^{-1} es la inversa generalizada, y U ∼Unif(0,1), entonces para cualquier F de distribución,

$$F^{-1}(U) \sim F.$$

Recordemos la definición

$$F^{-1}(p) = \text{ínf}\{x : F(x) \geq p\}.$$

Recordar que:

1. F^{-1} es no decreciente.

2. Si $p \in (0,1)$, entonces $\text{ínf}\{x : F(x) \geq p\} = \text{mín}\{x : F(x) \geq p\}$.

Ver que:

1. $F(F^{-1}(p)) = F(\text{mín}\{t; F(t) \geq p\}) = \text{mín}\{F(t) : F(t) \geq p\} \geq p$

2. $F^{-1}(F(x))) = \text{mín}\{t; F(t) \geq F(x)\} \leq x$

3. Se da la igualdad $\{(p,x); p \leq F(x)\} = \{(p,x); F^{-1}(p) \leq x\}$.

   Para ver el punto 3, asumamos que $p \leq F(x)$ y apliquemos F^{-1} (que es no decreciente)

$$F^{-1}(p) \leq F^{-1}(F(x)) \overset{2)}{\leq} x.$$

   Asumamos ahora que $F^{-1}(p) \leq x$ y apliquemos F (es no decreciente)

$$p \overset{1)}{\leq} F(F^{-1}(p)) \leq F(x).$$

Para demostrar lo que queremos, vamos a usar el punto 3 de forma que se empiecen a ver los ω para ver la V.A. uniforme y la probabilidad.

Podemos versionar el punto 3 diciendo que, para todo x, son iguales los **eventos:**

$$\{\omega : U(\omega) \leq F(x)\} = \{\omega : F^{-1}(U(\omega)) \leq x\}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) &= \mathbb{P}(\{\omega : F^{-1}(U(\omega)) \leq x\}) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega : U(\omega) \leq F(x)\}) \\
&= \mathbb{P}(U \leq F(x)) \qquad\qquad = F(x)
\end{aligned}$$

Ejercicio: Mostrar que si X es una variable aleatoria cuya función de distribución F es continua, entonces $F(X) \sim Unif(0,1)$.