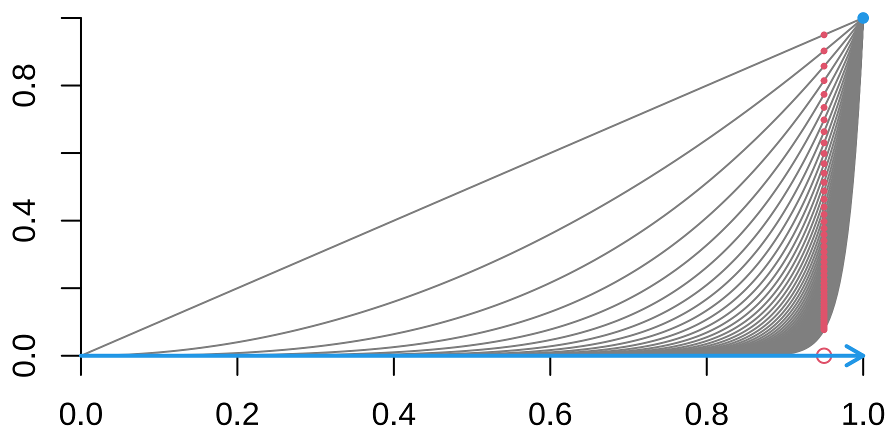
Ejercicios

Ejercicio 1

Definimos, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

En el gráfico siguiente, se muestra la sucesión f_n, con $n \in \{1, \dots, 50\}$, en puntos rojo, se representa la sucesión (ahora sucesión real) $f_n(0.95)$ (para $n \in \{1, \dots, 50\}$). En azul se representa el límite puntual.

```
N <- 50
x <- .95
f <- function(x, n) x^n

par(mai = c(.5,.5,.1,.1))
curve(f(x, 0), ylim = c(0, 1), type = "n", axes = F)
axis(1, pos = 0)
axis(2, pos = 0)
invisible(sapply(1:N, function(n) {
  curve(f(x, n), add = T, col = "grey50", n = 301)
} ))

points(x, 0, col = 2)
invisible(sapply(1:N, \(n) {
  points(x, f(x,n), pch = 20, col = 2, cex = .5)
}))
arrows(0,0,1,0, col = 4, lwd = 2, len = .1)
points(1,1,col = 4, pch = 20)
```



Se pide:

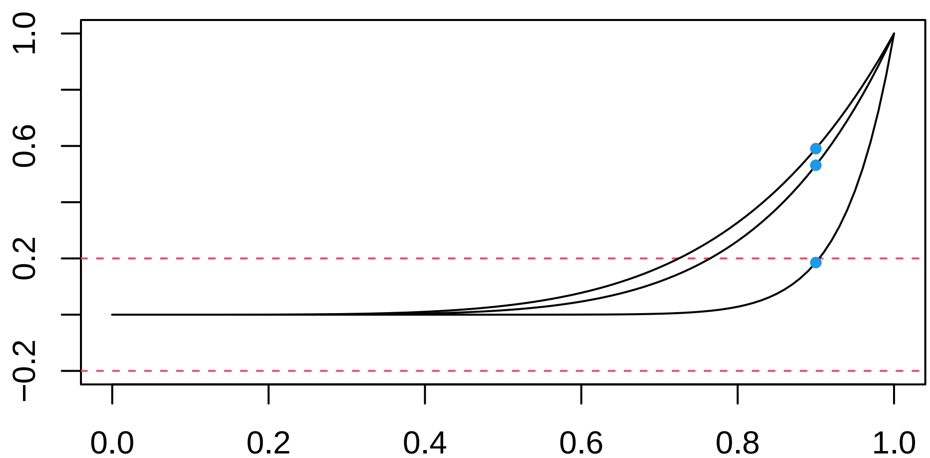
1) Dado $\varepsilon > 0$ encontrar $n_0(x) := \min\{n \in \mathbb{N} : x^n < \varepsilon\}$.
2) Elegir tres valores $\{x_1, x_2, x_3\}$ en (0,1) y graficar (con 3 colores, en un mismo par de ejes) los primeros 100 términos de las sucesiones $\{f_n(x_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{f_n(x_2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f_n(x_3)\}_{n\in\mathbb{N}}$. ¿Qué sucede con esas sucesiones?

Comentarios sobre el ejercicio. En el gráfico de abajo, se representan f_5, f_6 y f_{16}. A su vez, se graficaron los bordes de la banda dada por $(-\varepsilon, \varepsilon)$, con $\varepsilon = 0.2$, y se representan con puntos azules los pares $(x_0, f_5(x_0))$, $(x_0, f_6(x_0))$ y $(x_0, f_{16}(x_0))$, con $x_0 = 0.9$

El gráfico sugiere que para el valor de x_0 fijado, $n = 16$ es el primer natural que hace que $x^n < \varepsilon$. Estamos interesados en saber, para cualquier $x \in [0,1]$ (¿o deberíamos decir [0,1)?), cuál es el primer natural n que hace que $x^n < \varepsilon$.

Gráficar $n_0(x)$ como función de x en el intervalo [0,1), y analizar qué pasa cuando $x \to 1$.

```
eps <- .2
x0 <- .9

par(mai = c(.5,.5,.1,.1))
plot(0, 0, type="n", xlim = 0:1, ylim = c(-eps,1))
abline(h = c(-eps, eps), col = 2, lty = 2)

n <- 5
curve(f(x, n), add = T)
points(x0, f(x0,n), pch = 20, col = 4)

n <- 6
curve(f(x, n), add = T)
points(x0, f(x0,n), pch = 20, col = 4)


n <- 16
curve(f(x, n), add = T)
points(x0, f(x0,n), pch = 20, col = 4)
```



Ejercicio 2

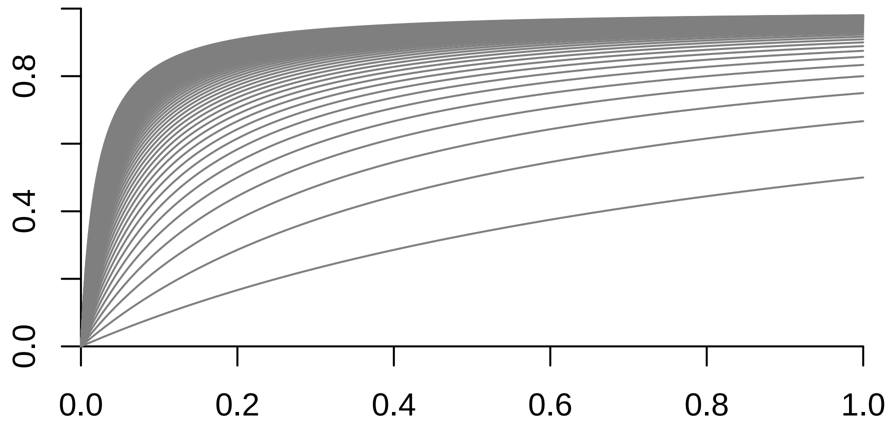
Para los siguientes casos, estudiar si existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

En el caso de que exista, dar la expresión de la función límite, estudiar si la convergencia es uniforme y agregar en el código de **R** un comando para añadir el gráfico de la función límite en otro color.

- Caso $\{f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}, f_n(x) = nx/(nx+1)$

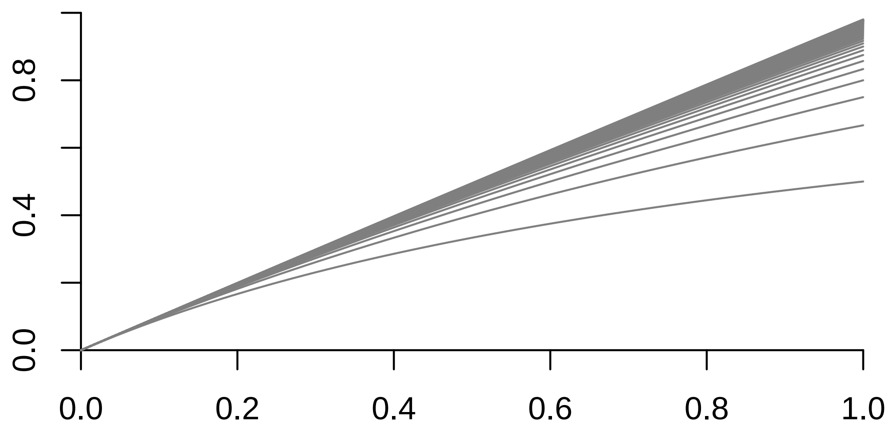
```
f <- function(x, n) n*x / (n*x + 1)
N <- 50

par(mai = c(.5,.5,.1,.1))
```

```r
curve(f(x, 0), ylim = c(0, 1), type = "n", axes = F)
axis(1, pos = 0)
axis(2, pos = 0)
invisible(sapply(1:N, function(n) {
  curve(f(x, n), add = T, col = "grey50", n = 301)
} ))
```



- Caso $\{f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}, f_n(x) = nx/(n+x)$

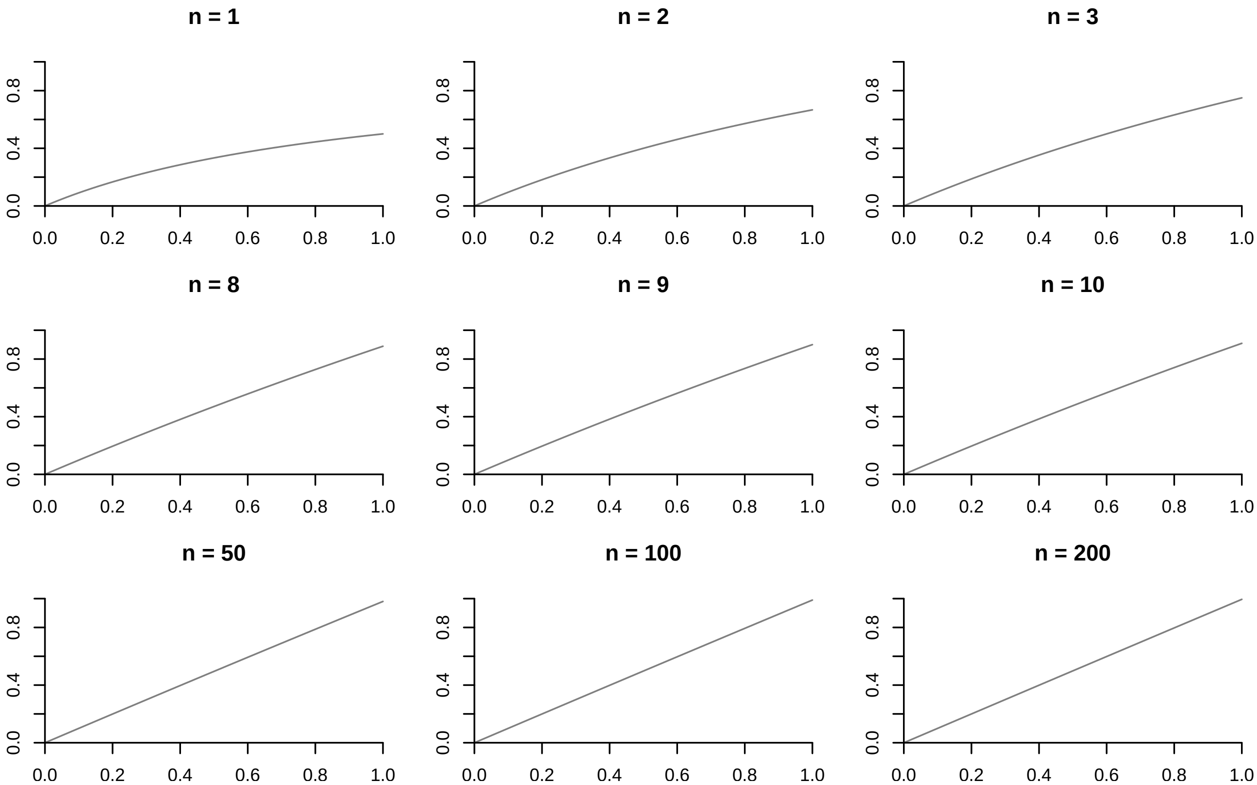
```r
f <- function(x, n) n*x/(n+x)
N <- 50

par(mai = c(.5,.5,.1,.1))
curve(f(x, 0), ylim = c(0, 1), type = "n", axes = F)
axis(1, pos = 0)
axis(2, pos = 0)
invisible(sapply(1:N, function(n) {
  curve(f(x, n), add = T, col = "grey50", n = 301)
} ))
```



A modo de yapa, (y lo pueden usar en el siguiente ejercicio) el siguiente código, grafica algunos elementos de la misma sucesión de funciones, pero utiliza un panel distinto para cada función. Como se ve, se eligieron 9 índices, y se grafica f_n para n en ese conjunto de índices.

```r
f <- function(x, n) n*x/(n+x)
par(mfrow = c(3,3), mai = c(.2,.3,.5,.1))
indices <- c(1,2,3,8,9,10,50,100,200)
invisible(sapply(indices, function(n) {
```

```
  curve(f(x, n), col = "grey50", n = 301, axes = F, main = sprintf("n = %s", n), ylim = c(0,1))
  axis(1, pos = 0)
  axis(2, pos = 0)
}))
```



Ejercicio 3

Sea $\{f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida mediante

$$f_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} \sin\big((2j-1)\pi x\big)$$

El análisis "a mano" de esta sucesión de funciones puede ser trabajoso, por eso vamos a usar la computadora para este ejemplo.

Se pide:

1) Representar "unas cuantas" funciones de esta sucesión (pueden ser los gráficos superpuestos o en distintos paneles, como crean que queda mejor). Pueden reciclar algo de los códigos anteriores para esto.
2) ¿Qué podrían decir de la función límite? ¿Pueden bosquejar un gráfico de esa función límite?
3) Dar algún argumento para decir si hay o no convergencia uniforme.