Segundo parcial – 30 de junio

1. (15pt) Sea $X_{n,p}$ una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros (n, p).[1] Considere su función generatriz de probabilidad $\varphi(s) = \mathbb{E}(s^{X_{n,p}})$, con $s \in \mathbb{R}$.

   a) Probar que $\varphi(s) = (ps + q)^n$, $(s \in \mathbb{R})$, donde $q = 1 - p$.

   b) Probar que $\varphi'(1) = \mathbb{E}(X_{n,p})$, y que $\varphi''(1) = \mathbb{E}(X_{n,p}(X_{n,p} - 1))$. Concluir de las relaciones anteriores que $\mathrm{Var}(X_{n,p}) = npq$.

2. (10pt) Sea X una variable aleatoria con función de distribución F. Consideremos la sucesión de variables aleatorias $X_n = X + 1/n$, con $n \in \mathbb{N}$. Probar que X_n tiende en distribución a X .

3. (20pt) Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias en L^2 centradas. Supongamos que las variables aleatorias son no correlacionadas, i.e. $\mathbb{E}(X_i X_j) = 0$ si $i \neq j$.

   a) Probar que $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)$.

   b) Probar que si además se tiene $\mathrm{Var}(X_i) \leq C\sqrt{n}$, con C constante, entonces $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{L^2} 0$.

4. (15pt) Considere una sucesión de variables aleatorias X_n, y X en L^2.

   a) Probar que si X_n converge a X en L^2, entonces X_n convege en probabilidad a X.

   b) Probar que el recíproco no es cierto dando un contraejemplo.

[1] Recordar que $X_{n,p}$ toma valores $0, 1, \ldots, n$ con probabilidades $\mathbb{P}(X_{n,p} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, para $k = 0, 1, \ldots, n$.