Glivenko-Cantelli y etc.

24 de junio de 2024

- Ej, $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P}$ unif y $X_n = \mathbb{1}\{\omega \in [0, 1/n)\}$. ¿$\lim_n F_n(x)$?

- Ej, $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P}$ unif y $X_n = \mathbb{1}\{\omega \in [0, 1/n)\}$. ¿$\lim_n F_n(x)$?
- Es distinto, si tenemos una **muestra** $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ y $F_n(x) = \texttt{ecdf}(\vec{X})(x)$. Reflexionar la diferencia y ¿$\lim_n F_n(x)$?
  - Por facilidad: asumimos F es continua, pero vale en general.

- Ej, $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P}$ unif y $X_n = \mathbb{1}\{\omega \in [0,1/n)\}$. ¿$\lim_n F_n(x)$?
- Es distinto, si tenemos una **muestra** $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ y $F_n(x) = \texttt{ecdf}(\vec{X})(x)$. Reflexionar la diferencia y ¿$\lim_n F_n(x)$?
  - Por facilidad: asumimos F es continua, pero vale en general.
- Sabíamos por ejercicios prácticos que $F_n(x) \to F(x)$, pero ahora vimos que [SPOILER ALERT] $\sup_{\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0$.

- Ej, $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P}$ unif y $X_n = \mathbb{1}\{\omega \in [0, 1/n)\}$. ¿$\lim_n F_n(x)$?
- Es distinto, si tenemos una **muestra** $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ y $F_n(x) = \texttt{ecdf}(\vec{X})(x)$. Reflexionar la diferencia y ¿$\lim_n F_n(x)$?
  - Por facilidad: asumimos F es continua, pero vale en general.
- Sabíamos por ejercicios prácticos que $F_n(x) \to F(x)$, pero ahora vimos que [SPOILER ALERT] $\sup_{\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0$.
- F_n 🤝 μ_n (la **medida empírica**, ver práctico 3).
  $\mu_n \to \mu \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} f d\mu$ para toda f continua y acotada.

- Ej, $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P}$ unif y $X_n = \mathbb{1}\{\omega \in [0, 1/n)\}$. ¿$\lim_n F_n(x)$?
- Es distinto, si tenemos una **muestra** $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ y $F_n(x) = \texttt{ecdf}(\vec{X})(x)$. Reflexionar la diferencia y ¿$\lim_n F_n(x)$?
  - Por facilidad: asumimos F es continua, pero vale en general.
- Sabíamos por ejercicios prácticos que $F_n(x) \to F(x)$, pero ahora vimos que [SPOILER ALERT] $\sup_{\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0$.
- F_n 🤝 μ_n (la **medida empírica**, ver práctico 3).

  $\mu_n \to \mu \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} f d\mu$ para toda f continua y acotada.

  $\boxed{\text{Si } f = \mathbb{1}_{(-\infty,x]}, \text{ por G-C, } \sup_{x\in\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,x]} d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,x]} d\mu| \to 0}$

- Ej, $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P}$ unif y $X_n = \mathbb{1}\{\omega \in [0, 1/n)\}$. ¿$\lim_n F_n(x)$?

- Es distinto, si tenemos una **muestra** $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ y $F_n(x) = \texttt{ecdf}(\vec{X})(x)$. Reflexionar la diferencia y ¿$\lim_n F_n(x)$?
  - Por facilidad: asumimos F es continua, pero vale en general.

- Sabíamos por ejercicios prácticos que $F_n(x) \to F(x)$, pero ahora vimos que [SPOILER ALERT] $\sup_{\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0$.

- F_n 🤝 μ_n (la **medida empírica**, ver práctico 3).
  $\mu_n \to \mu \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} f d\mu$ para toda f continua y acotada.
  $$\boxed{\text{Si } f = \mathbb{1}_{(-\infty,x]}, \text{ por G-C, } \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,x]} d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,x]} d\mu \right| \to 0}$$

- ¿Podemos cambiar $\mathbb{1}_{(-\infty,x]}$ por $\mathbb{1}_B$ con B medible?