Facultades de Ciencias/Ingeniería/Ciencias Económicas y de Administración
Licenciatura en Estadística

Probabilidad II
Primer semestre de 2024
Práctico 3

1. Se define una sucesión de experimentos independientes, cada uno consiste en sortear un número real al azar entre 0 y 1 con distribución uniforme. Se define la sucesión de variables aleatorias $X_n := \mathbb{1}_{\{[0,1/n]\}}(\omega_n)$, $n \geq 1$, donde ω_n es el resultado del n-ésimo experimento.

    a) Estudiar el límite casi seguro y en probabilidad de X_n.

    b) Estudiar lo mismo para el caso en que $X_n := \mathbb{1}_{\{[0,1/n^2]\}}(\omega_n)$.

2. ¿Es posible que $X_n \stackrel{cs}{\to} 0$, pero $\mathbb{E}(X_n) \to \infty$?

3. Sea X v.a. tal que $\mathbb{P}(X = k) = C/k^2$ para todo $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, donde C es una constante. ¿Existe $\mathbb{E}(X)$? Mostrar que, sin embargo, se pueden ordenar los términos $\{k\mathbb{P}(X = k)\}$ para que su suma valga 0.

4. Si $X_n \sim \text{Unif}\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$, $n \geq 1$, demostrar que X_n converge en distribución, y hallar su distribución límite.

5. Mostrar que $d_2(X,Y) = \sqrt{\mathbb{E}(X-Y)^2}$ es una distancia en el conjunto de las variables aleatorias con momento de segundo orden finito. Verificar que $d_2(X_n, Y) \to 0$ implica $X_n \xrightarrow{P} Y$, pero $X_n \xrightarrow{P} Y$ no implica que $d_2(X_n, Y) \to 0$.

6. Se define $d_P(X,Y) := \mathbb{E}(1 - \exp(-|X-Y|))$. Demostrar que

    a) $d_P(X,Y)$ es una distancia en el espacio de todas las v.a. reales. Para la desigualdad triangular se sugiere usar (y demostrar) que $1 - uv \leq 1 - u + 1 - v$ para todo $u, v \in [0,1]$.

    b) si $Y, X_1, X_2, \ldots$ es una sucesión de v.a. reales entonces $d_P(X_n, Y) \to 0$ si y sólo si $X_n \xrightarrow{P} Y$.

7. Supongamos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión monótona no decreciente de variables aleatorias, esto es $X_n \geq X_{n+1}$ que tiene límite en probabilidad, $X_n \xrightarrow{P} X$. Mostrar que $X_n \stackrel{cs}{\to} X$.

8. Supongamos que Y es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro 1, y modela el precio de un determinado activo.

    Una persona contrata un seguro, para garantizarse comprar el activo a un valor fijo $K > 0$, en el caso que el valor del activo supere el valor K. El costo que paga por el seguro es αK, con $\alpha \in (0,1)$.

    ¿Cuál es el gasto esperado que tiene la persona para hacerse del activo?

9. Sean X_n va positivas. Probar que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(X_n\right).$$

10. **Ejercicios complementarios de la sección 5.4.7**

    a) Sea X una va que toma valores en $\mathbb{Z}_+$. Probar que

    $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

    b) Utilizando aproximaciones por simples, probar que si $X \geq 0$ una va, entonces

    $$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq t)\, dt.$$

11. Mostrar que si X es una variable aleatoria cuya función de distribución F es continua, entonces $F(X) \sim Unif(0,1)$.

12. Sea X integrable, y A_n conjuntos disjuntos tales que A es su unión. Entonces probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{A_n\}}) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{A\}}).$$