Перевод из одной системы координат в другую

Данный проект представляет собой программу, которая переводит из Декартовых координат в Кепплеровы элементы и обратно. Эти возможности заключены в 2 функции (для языков C++ и $Python$): **From_Kep_to_Dec**, **From_Dec_to_Kep**.

Программа перевод из кепплеровых элементов в декартовы (**From_Kep_to_Dec**) принимает на вход массив из 6 кепплеровых элементов и значение гравитационного параметра. Элементы массива расположены в следующем порядке: $\boldsymbol{i}$ - наклонение, Ω - долгота восходящего узла, $\boldsymbol{a}$ - большая полуось, $\boldsymbol{e}$ - эксцентриситет, ω - аргумент перицентра, ν - истинная аномалия. Угловые параметры задаются в градусах, а параметры расстояния в километрах. Гравитационный параметр имеет размерность км$^3c^{-2}$. На выходе из функции получается массив, где первые 3 элемента отвечают за координаты спутника, а следующие 3 за проекции его скорости на заданные оси.

Для перевода из декартовых координат в кепплеровы элементы (**From_Dec_to_Kep**) на вход принимается массив координат, массив проекций скорости и гравитационный параметр. На выходе получается массив из 6 кепплеровых элементов в аналогичном порядке, как и для функции **From_Kep_to_Dec**. Угловые параметры также заданы в градусах, а расстояния в километрах.

1. Перевод из Кеплеровых в Декартовы

Здесь будут представлены основные соотношения, которые использовались при переводе из кеплеровых элементов в декартовы координаты.

Известно, что кеплеровы элементы связаны с системой координат $A\xi\eta\zeta$, где орбита лежит в одной из плоскостей, образованной осями. В этой системе спутник имеет следующие координаты:

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ b \sin E \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где E - эксцентричная аномалия, e - эксцентриситет, a - большая полуось, b - малая полуось. Неизвестные величины могут быть вычислены из изветных:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}, \tag{3}$$

где ν - истинная аномалия.

Для перехода в декартовы координаты воспользуемся матрицей перехода со следующими элементами:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i,\\
b_{12} &= -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i,\\
b_{13} &= \sin\Omega\sin i,\\
b_{21} &= \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i,\\
b_{22} &= -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i,\\
b_{23} &= -\cos\Omega\sin i,\\
b_{31} &= \sin\omega\sin i,\\
b_{32} &= \cos\omega\sin i,\\
b_{33} &= \cos i,
\end{aligned} \tag{4}$$

где Ω - долгота восходящего узла, ω - аргумент перицентра, i - наклонение.

В системе координат Axyz, положение спутника вычисляется как:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{B}\begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ b\sin E \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

Для нахождения направления скорости необходимо найти напраление касательной, которая указывала бы на вращение против часовой стрелки. Уравнение касательной в системе координат, связанной с центром эллипса задаётся как:

$$\frac{\xi'\xi'_0}{a^2} + \frac{\eta'\eta'_0}{b^2} = 1, \tag{6}$$

где (ξ'_0, η'_0) - координаты точки касания в плоскости орбиты. Штрихованные координаты и нештрихованные связаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
\xi' &= \xi + a\cdot e,\\
\eta' &= \eta.
\end{aligned} \tag{7}$$

С учётом этого и предшествующих соотношений нормаль к касательной задаётся как (для удобства уравнение касательной было домножено на a^2):

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos E \\ \dfrac{\sin E}{\sqrt{1-e^2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Касательная тогда находится как:

$$\tau = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin E}{\sqrt{1-e^2}} \\ \cos E \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Далее нормируем вектор и домножаем на матрицу перехода $\mathbf{B}$, чтобы получить единичный вектор направления скорости. Модуль скорости выражается как:

$$V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{a} \right)}. \tag{10}$$

2. Перевод из Декартовых в Кеплеровы

Сначала найдем долготу восходящего узла и наклонение орбиты. Для этого вычислим единичный вектор нормали к плоскости орбиты:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{V}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{V}|}. \tag{11}$$

В системе координат $A\xi\eta\zeta$ этот вектор имеет проекции $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 1$, тогда в системе координат $Axyz$ $\mathbf{k}$ имеет вид:

$$\mathbf{k} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\Omega \sin i \\ -\cos\Omega \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Отсюда находим наклонение орбиты и долготу восходящего узла при $\sin i \neq 0$.

Параметр орбиты:

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{V})^2}{\mu}. \tag{13}$$

Эксцентриситет:

$$e = \sqrt{1 + h\frac{c^2}{\mu^2}}, \tag{14}$$

где константа энергии имеет вид:

$$h = V^2 - \frac{2\mu}{r}. \tag{15}$$

Из уравнения орбиты в полярной форме найдём косинус истинной аномалии:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}. \tag{16}$$

Для нахождения точного значения угла истинной аномалии необходимо знать знак синуса. Его можно найти из проекции радиальной компоненты скорости:

$$V_r = \frac{(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r})}{r} = \frac{c}{p}e\sin\nu. \tag{17}$$

Пусть $\mathbf{r}^o = \mathbf{r}/r$ и $\mathbf{b}^o = \mathbf{I}\cos\Omega + \mathbf{J}\sin\Omega$ - единичные векторы вдоль $\mathbf{r}$ и линии узлов, $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ - единичные векторы координатных осей Ax и Ay. Тогда:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^o\cdot\mathbf{r}^o &= \cos(\omega+\nu), \\ (\mathbf{b}^o\times\mathbf{r}^o)\mathbf{k} &= \sin(\omega+\nu). \end{aligned} \tag{18}$$

Из этих соотношений легко определить аргумент перицентра.