Aujourd'hui, on …

Fait des Legos ® !

Hyperstatisme (h).

La FAMEUSE ~~formule magique~~

L'hyperstatisme, ce n'est pas une formule magique à apprendre par cœur, ça a du sens dans un mécanisme : si tu essaies d'assembler un mécanisme, et que tu dois forcer pour y arriver, ou que tu vois qu'un mécanisme assemblé est « sous tension ou qu'il y a des pièces contraintes par l'assemblage », alors, la boucle assemblée est **hyperstatique**.

Avant propos :

Des pièces parfaites, ça n'existe pas !!

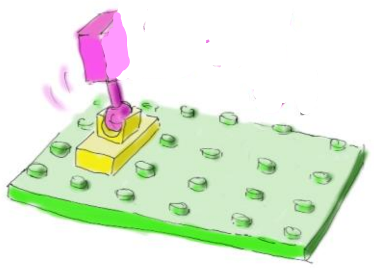
- Des plans vraiment parallèles : NON
- Des cotes vraiment respectées : NON
- Des plans vraiment orthogonaux : NON

Et oui aussi : des plans vraiment plans, non plus.

Donc : quand on assemble des pièces entre elles, le résultat est forcément un peu tordu.

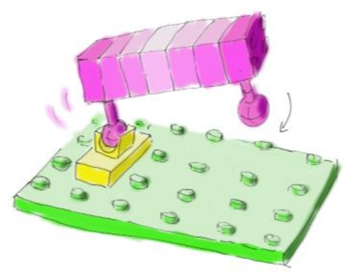
Et ça tombe bien parce que… je ne dessine pas à la règle ;-)

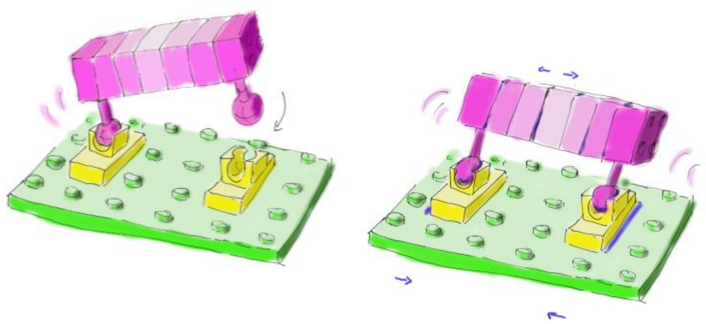
Voilà.



Clic : j'ai pas forcé pour réalisé cet assemblage (sauf pour le clic, mais ça c'est juste pour que la rotule ne se décroche pas). Il n'y a pas de contraintes dans l'ensemble là ! On dit alors qu'il est **isostatique**. Si la rotule est bien faite, avec un petit jeu fonctionnel ou même avec un peu de lubrification, ca tourne très facilement.

Si on continue à assembler des pièces les unes à la suite des autres mais qu'on reste en chaine « ouverte », jamais il n'y aura de difficulté à assembler.



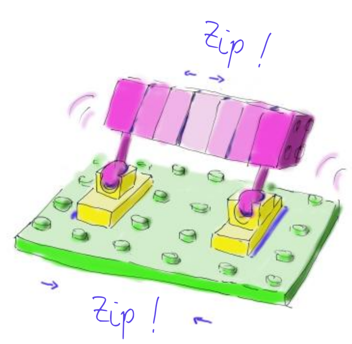


Allons-y, ajoutons une deuxième liaison rotulée entre la plaque et l'assemblage rose. Allez. . . Clic !

Pour pouvoir réaliser l'assemblage, on a un peu **forcé**. Et **ce forçage reste** une fois monté, c'est ḥ ! Ça se voit parce que les petites briquettes roses sont soit archi-écrasées les unes sur les autres, soit se décollent un peu (c'est plus visuel, alors je le dessine dans ce sens).

Et aussi en même temps les supports de rotule jaune ont un peu glissé sur la dalle verte.

Bref, toutes les liaisons de la boucle subissent l'assemblage. Là où il y a du jeu on le 'voit' car ça zipe un

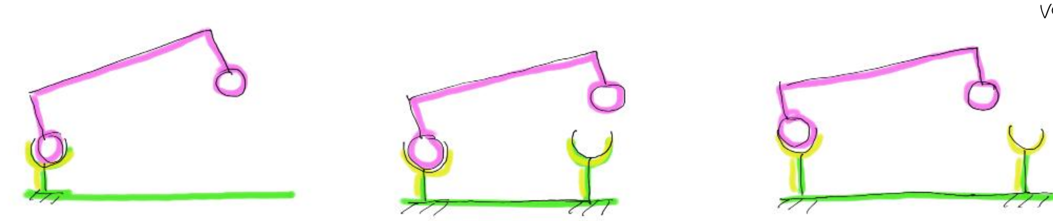


DONC ! On ne peut trouver des contraintes résiduelles (donc de l'hyperstatisme) **QUE** dans les **boucles fermées** !

On sent aussi que ca tourne moins facilement, parce que ces actions mécaniques restantes dans l'assemblage **créent du frottement** dans les liaisons de la boucle. On le sens à la main.

Résumons avec un schéma cinématique :

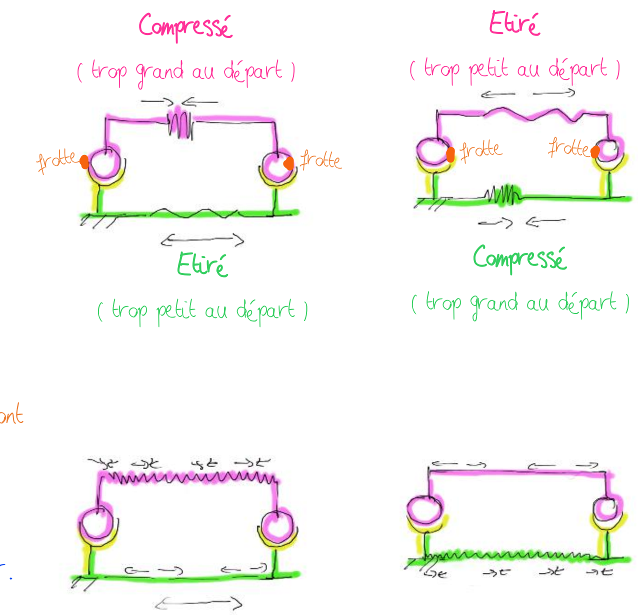
J'exagère beaucoup pour que vous voyez bien d'où vient le problème !



1er clic : aucun souci

Mais rien n'est parfait... les dimensions des pièces roses et jaune ne sont pas pile poil les mêmes...

Alors pour que ça rentre... on force ! L'un s'écrase quand l'autre s'étire, ou l'inverse.



Je l'ai représenté par un ressort, mais en vrai, c'est toute la matière qui se déforme et qui subit les contraintes (ici, de la traction ou de la compression dans l'axe défini par les centres des rotules)

Un mécanisme hyperstatique s'assemble **parce que** les pièces sont souples et **peuvent** un peu **se déformer**.

Sinon Martine... Tu peux te brosser.

Les petits problèmes avec ça (ça étant : une boucle hyperstatique dans un assemblage), c'est que :

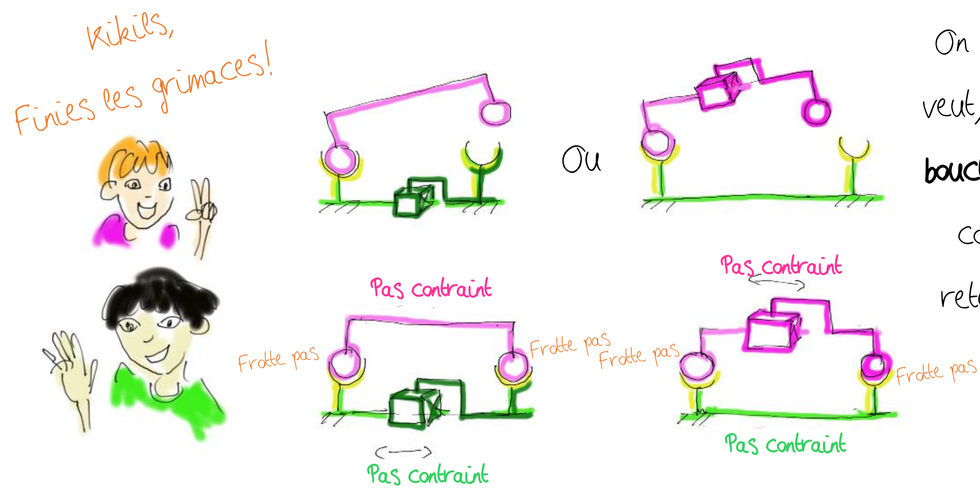
1/ il faut forcer pour réaliser l'assemblage et si on force trop, bah ça peut plastifier, voir même casser quoi !

2/ pendant le mouvement, ces contraintes mécaniques d'assemblage restent.

Ce qui n'est pas top top. Ça peut créer des sollicitation alternées si les pièces bougent cycliquement. Par exemple de la flexion alternée dans les arbres tournants, et la fatigue, ça casse les pièces très vite.

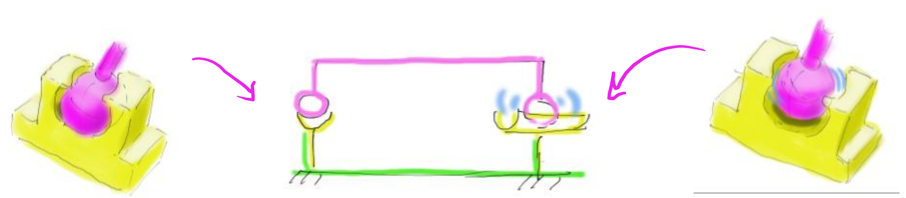
Comment on peut faire alors pour éviter que le mécanisme ne grimace ?

Comme on a compris que les actions mécaniques liées à l'assemblage forment de la traction et de la compression dans la direction définie par les centres des rotules (dans notre exemple), et bien libérons ces contraintes, hop, des petites glissières !



On peut libérer la contrainte là où on veut, l'essentiel, c'est que ce soit **sur la boucle d'assemblage** concernée par cette contrainte. Quel que soit le choix retenu, toutes les pièces de la boucle sont libérées des contraintes d'assemblage.

Une autre solution peut aussi être consister à enlever l'un des appuie dans une rotule, en la remplaçant par une liaison linéaire annulaire. Cette nouvelle liaison moins contraignante pouvant être réalisée juste en rajoutant suffisamment de jeu. Bref, on est toujours dans une solution qui rajoute un degré de liberté « dans le sens » des contraintes de montage.

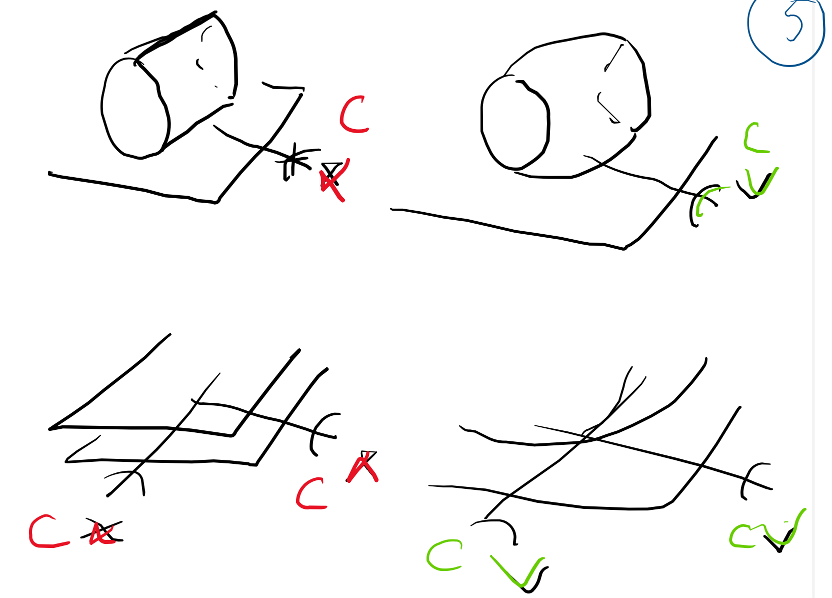


Liaison avec peu de jeu : juste ce qu'il faut pour que ce soit assemblable et que les sphères glissent bien.

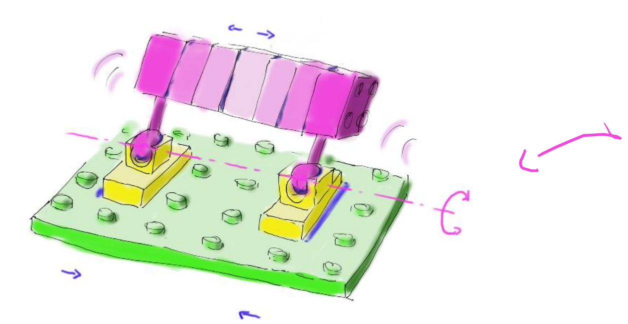
Autre **modèle de liaison** si la liaison a beaucoup de jeu : malgré le fait que les pièce rose ou verte soient mal fabriquées, on peut quand même assembler la boucle sans forcer car la position assemblée sans contrainte s'installera dans l'espace libre.

Si on n'observe pas de forçage sur les pièces du **vrai système**, alors qu'on a fait un **modèle cinématique hyperstatique**, c'est donc qu'il faut changer de modèle de liaison ! Soit parce qu'il y a **des jeux** qui permettent des déplacements plus grands que les défauts de fabrication des pièces, soit en regardant mieux les **surfaces d'appui**.

Par exemple, parfois un plan peut être légèrement bombé pour supprimer des contraintes de parallélisme entre deux plans, un cylindre peut ressembler à un tonneau et donc son appui sur une surface plane n'est plus bloqué en rotation par la droite de contact du cylindre sur le plan, etc...



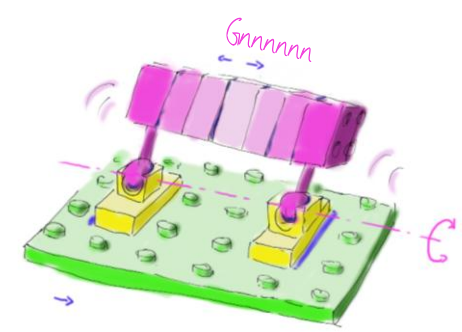
Et comme pour les jeux, ce qui compte c'est que le débattement même si il est limité soit suffisamment important pour laisser la place au mécanisme de se trouver sa position tranquille sans forcer.



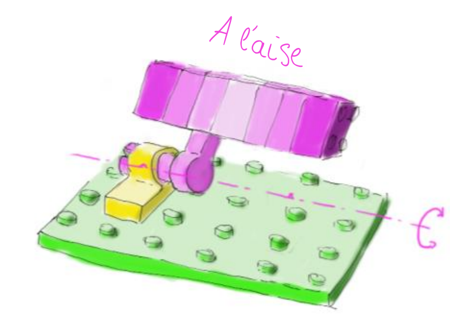
L'assemblage réalisé crée une liaison autorisant une seule rotation autour de l'axe passant par les centres des rotules. On parle de « **liaison pivot équivalente** ».

Alors pourquoi on choisit parfois cette solution hyperstatique et pas juste une liaison pivot sans action résiduelle ? (isostatique puisque format une chaîne ouverte) ??

hyperstatisme VS isostatisme
- le match -



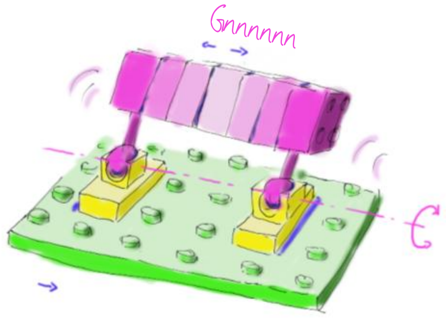
$h > 0$



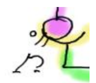
$h = 0$

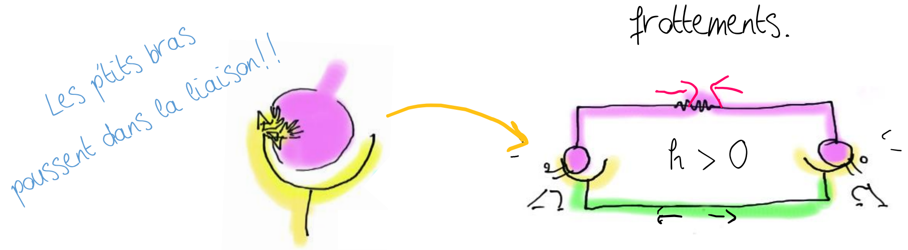
hyperstatique

$h > 0$



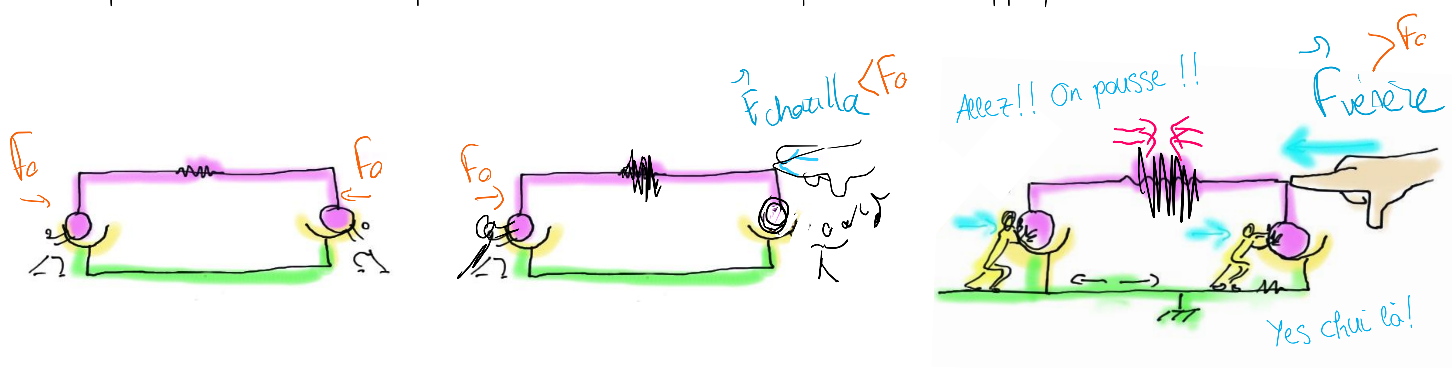
Inconvénients : on force pour fermer la boucle, il reste des **contraintes dans l'assemblage** ce qui n'est pas top s'il y a des mouvements cycliques car cela peut conduire à des ruptures en fatigue ou à des dégradations des surfaces en contact dans les liaisons car il y a des frottements.



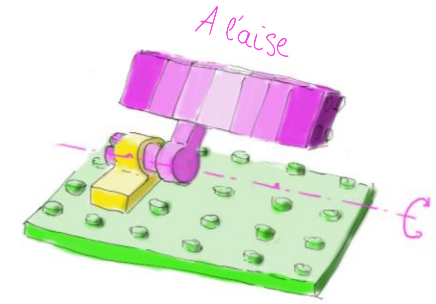


On peut réduire les contrainte en étant vigilant·e aux **géométries** des pièces lors de la fabrication, et parfois, cela coûte vraiment très cher (s'il faut changer de procédé de fabrication par exemple). La seule façon de **supprimer** les contraintes, c'est qu'il y ait plus de jeu que de défauts.

Avantages : La structure étant préchargée, lorsqu'il n'y a pas d'actions extérieures, la position relative des pièces est connue car les pièces sont appuyées l'une sur l'autre.



Quand l'effort extérieur a vaincu la précharge et le jeu, les pièces sont en appui des 2 côtés. Il y a donc deux paires de bras pour reprendre les effort. **Dans la direction de l'hyperstatisme** cette solution est donc **plus raide** que sa voisine isostatique (meme si la paire de bras de droite est moins écrasée donc retient un peu moins que celle de gauche)

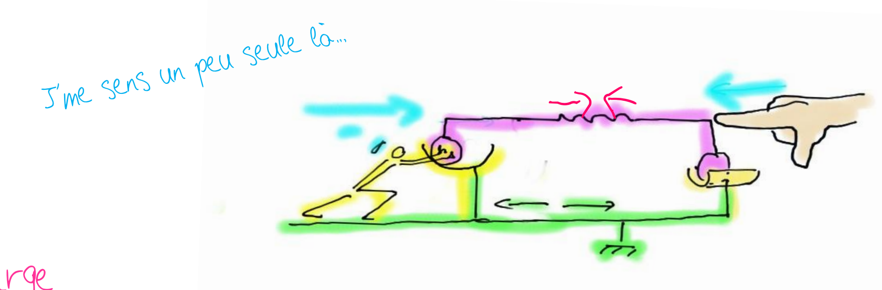


isostatique

$h = 0$

Avantages : on ne force pas pour assembler les pièces, et il n'y a **pas de contraintes** résiduelles. Si on utilise une solution technique cinématiquement équivalente (comme ici une liaison pivot), on peut aussi réduire le nombre de pièces. Mais ce n'est pas toujours le cas : par exemple la solution (rotule/linéaire annulaire) n'a pas moins de pièce, mais elle est isostatique.

Inconvénients : Sans sollicitation extérieure, les pièces **gigottent** dans le jeu fonctionnel. Leur **position relative est imprécise** et en plus cela peut créer des chocs, conduire à des écaillages, etc...



Les actions mécaniques dans la direction de l'hyperstatisme évité ne sont reprises que par **une seule liaison** qui doit pousser deux fois plus fort que ses voisines, la pauvre! Quand il n'y a qu'une seule paire de bras à la rescousse, l'assemblage est **plus souple** dans la direction de la contrainte hyperstatique car à charge égale, cette solution conduit à un déplacement relatif des pièces beaucoup plus important : **élasticité des pièces + écrasement des surfaces de contact**.

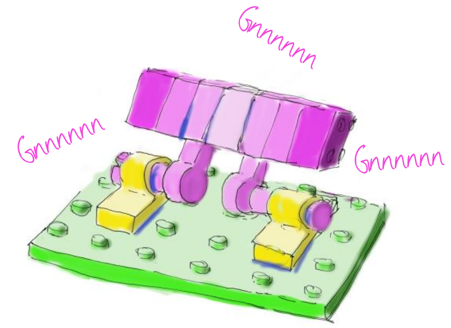
Nous avons vu le cas simple des assemblages bi-rotulés, qui sont hyperstatiques h=1.

Voyons un assemblage nettement plus contraignant avec 2 liaisons pivots en parallèle.

Et comprenons physiquement pourquoi dans cet assemblage h=5.

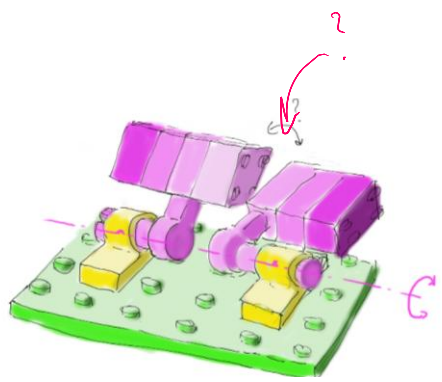
Clic, le premier, fastoche!

Et oui, on est en boucle ouverte, donc... h=0 !

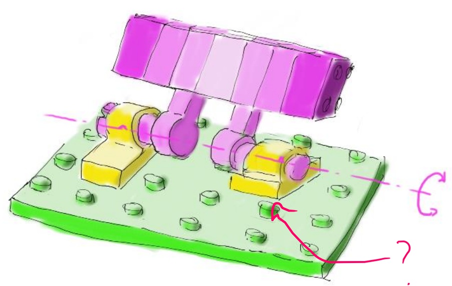


Je continue la construction en boucle ouverte... ça reste facile. La question c'est : que se passe-t-il quand je vais devoir refermer la boucle?! Au niveau des pièces roses ? Au niveau de la pièce jaune sur le support ? Au niveau de l'axe? Bref, n'importe où sur la boucle!

Ce qu'on a vu juste avant, c'est qu'il fallait **imaginer les pièces bien tordues et super mal fabriquées**, exagérer tout ce qui pourrait etre mal aligné et mal positionné.

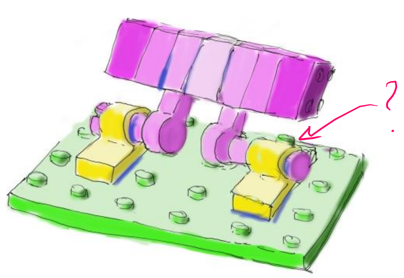


Essayons de fermer la boucle par exemple entre deux pièces roses.

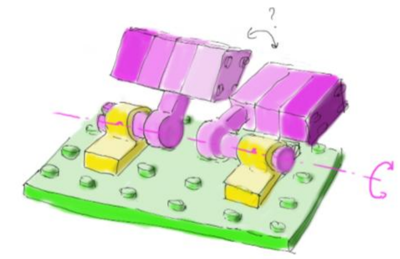


Ou bien entre le support jaune et la dalle verte.

Ou bien entre l'axe rose et l'alésage jaune.

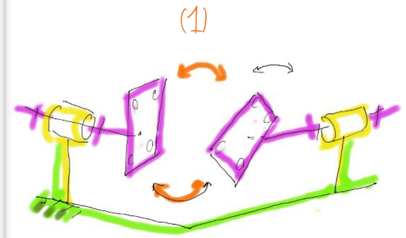


On pourrait faire ce raisonnement dans n'importe quelle liaison de la boucle, mais on va se contenter de trois exemples c'est déjà bien !



En imaginant comment clipper au niveau des pièces roses

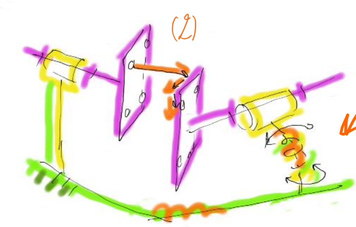
Comme les pièces sont mal fabriquées, les plans des pièces roses n'ont aucune chance d'être (1) parallèles, (2) collées et (3) au bon endroit pour s'assembler sans forcer.



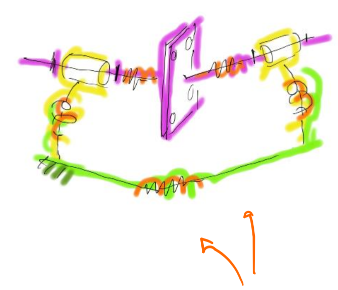
On peut donc imaginer dans un premier temps faire fléchir ou tordre les pièces pour mettre les **plans bien parallèles** (1)

On a forcé en appliquant **2 couples**, et ça... ça crée des **contraintes dans toutes les pièces qui sont sur la branche**: sur la rose, sur la jaune, sur la verte !

Je représente ça par des **ressorts oranges**. Un ressort représente **plusieurs contraintes** (ici : deux couples par ressort).

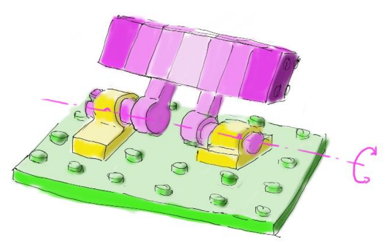


Une fois que ça c'est fait, pour que les pions tombent bien en face, il faut tirer/pousser avant/arrière et haut bas (2), puis en profondeur (3) pour coller les 2 plans : donc ça crée trois contraintes de plus (sous **3 forces**) dans toutes les pièces de la boucle.



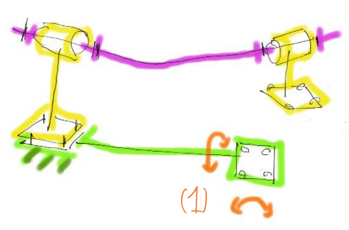
Ça y est! La boucle est fermée ! Et on sait que **toutes les pièces et liaisons subissent chacune 5 actions mécaniques** (2 couples et 3 forces) ! h = 5 !!

Dans chaque dessin de zigouigoui ressort, il y a 2 forçages pour orienter et 3 forçages pour positionner : 5 « forçages » en tout parcourent la boucle d'assemblage.

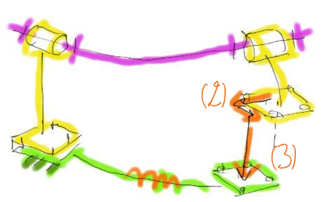


En imaginant comment clipper au niveau des pièces jaune-vert

Dans cette situation, comme tout est tordu, et que les jeux ne sont pas grands, les plaques jaune et vertes ne sont ni parallèles, ni au bon endroit. Voici ce qu'on pourrait faire pour les assembler.

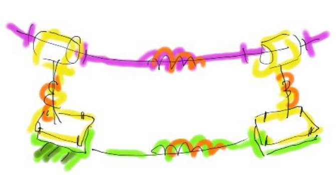


On peut commencer par tordre les pièces pour mettre les **plans parallèles** (1)



Puis pousser/tirer pour assembler le tout, c'est-à-dire faire le clipage :

en face (2) **et les deux plans l'un sur l'autre** (3)



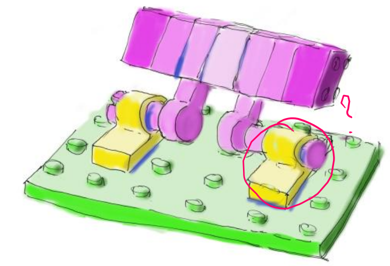
À la fin de l'assemblage, on retrouve EXACTEMENT les mêmes sollicitation dans toutes les pièces de la boucle que dans le cas précédent.

Evidemment : c'est le MEME mécanisme !

Allez, on s'en fait une p'tite troisième pour le plaisir, et après on s'arrête pour cette boucle où l'on a des pivots en parallèle.

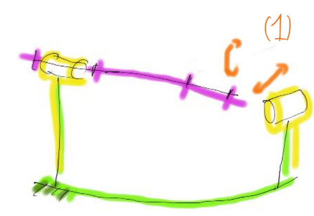
Nb : c'est toujours une bonne idée de commencer à mettre les trucs (axes, plans) parallèles ou perpendiculaires avant de penser à ajuster leur localisation

On commence par imaginer les **rotations**, puis ensuite les **translation**.



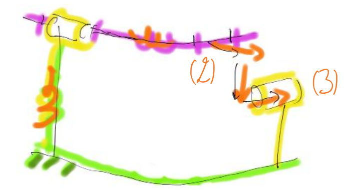
Cette fois on essaie de fermer la boucle entre l'axe de la pièce rose et le trou cylindrique de la pièce jaune.

Là encore, comme tout est tordu au démarrage, et que les jeux ne sont pas assez grands, ça ne rentrera pas sans forcer.

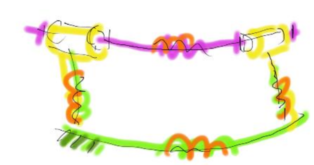


Première opération, on fait fléchir par exemple la barre rose pour rendre **parallèle** les axes de la barre et du cylindre (1).

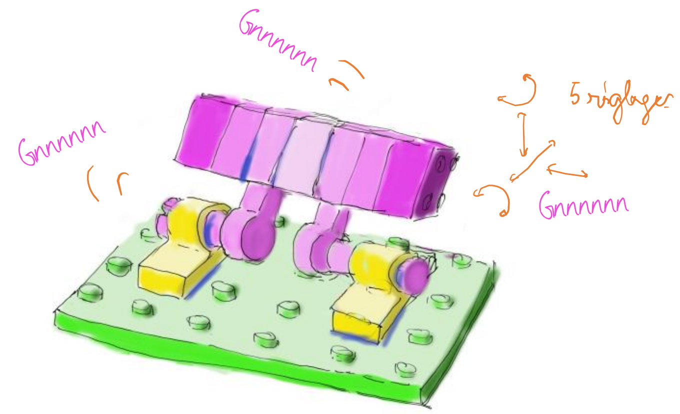
Nb valable pour tous les cas précédents : 2 couples suffisent, car si on tord la barre sur elle-même, ça n'apporte rien à la montabilité !



Une fois que c'est bien parallèle, on ajuste les distances en appuyant ou tirant pour que les axes soient confondus (2), puis on tire ou pousse sur la barre pour que les arrêts axiaux soient au bon endroit (3).



Et voilà, ça fait à nouveau les **5 sollicitations dans chaque pièce et dans chaque liaison** : 2 couples et 3 efforts dans la boucle une fois qu'elle est fermée.

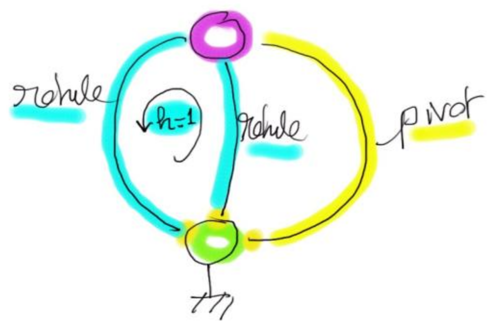


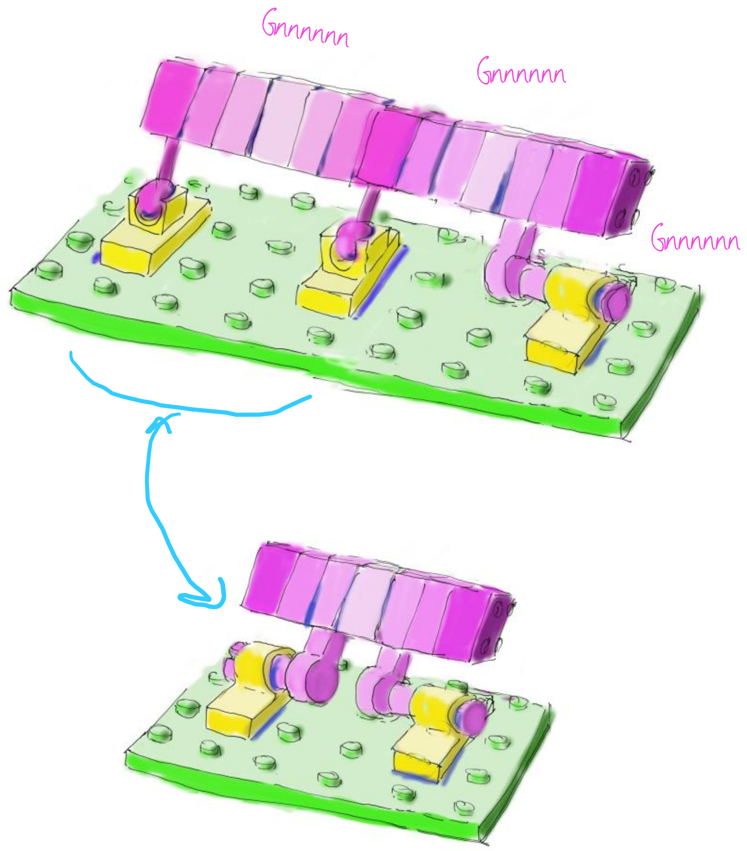
Clic ! h=5

Non seulement on a la valeur de l'hyperstatisme, mais en plus **on sait à quoi ça correspond !**

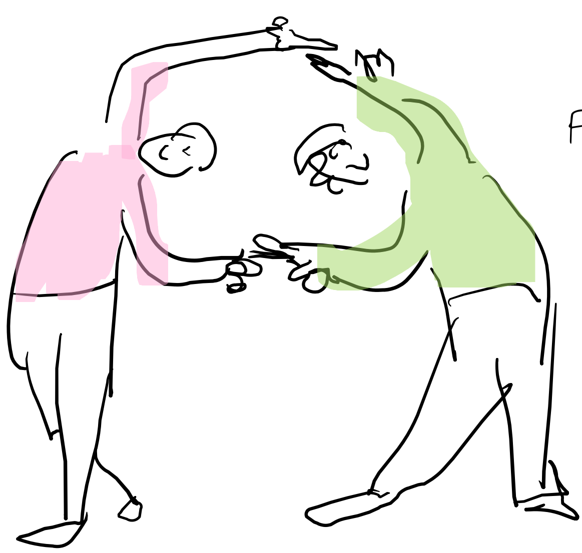
Pour finir sur le sujet (et on aura fait un bon tour de la question!) : sur les deux exemples précédents, on a vu **1 seule boucle assemblée**. Maintenant, on peut imaginer des assemblages un peu plus compliqués contenant **plusieurs boucles d'assemblage** et réutiliser notre compréhension de chaque boucle.

Cette fois la pièce rose est liée au support vert via deux rotules et une liaison pivot. On a **plusieurs boucles en parallèle** !



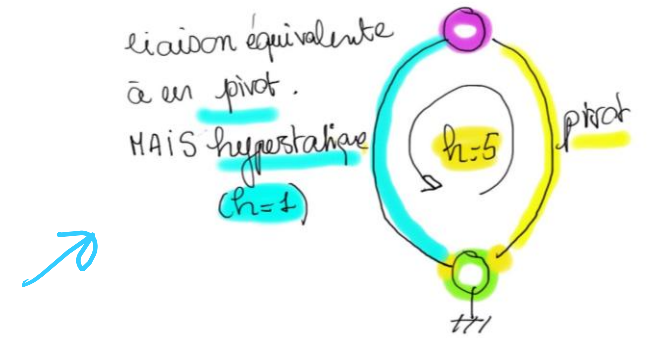


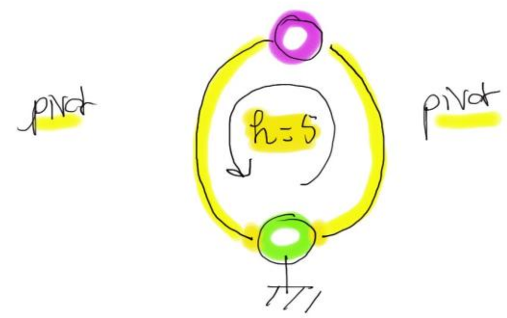
Cinématiquement ça ressemble à ça
Mais l'un des deux guidage en rotation est réalisé par deux rotules en parallèle



Fusion des trucs vus dans les pages d'avant !

On peut regarder la boucle bleue : l'assemblage des deux rotules en parallèle agit cinématiquement comme une liaison pivot. Mais on sait qu'elle engendre des contraintes dans son assemblage (h=1)



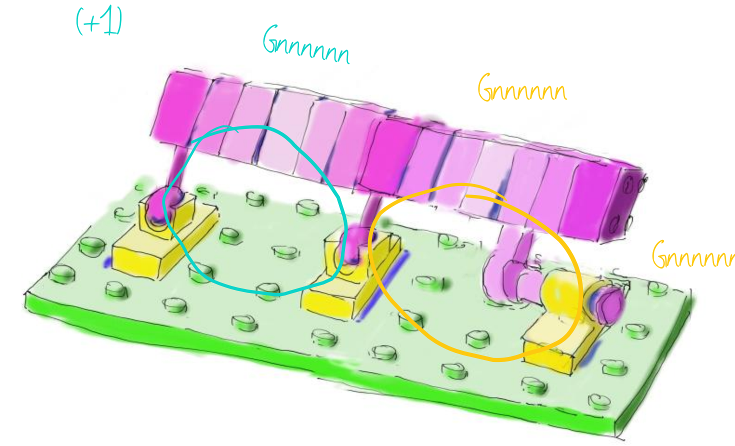


Par ailleurs, on connait les contraintes dans une boucle formée par deux liaisons pivots en parallèle (il y en a 5)

C'est fini, on connait le nombre et la nature de l'ensemble des contraintes dans l'assemblage qui contient deux rotules et une pivot en parallèle!

$$h = 1 + 5$$

Entre les deux rotules, ça tire/pousse (+1)



Entre la rotule du milieu et la liaison pivot, ça tord/fléchi/pousse-tire dans les directions vues au dessus (+5)

Allez, maintenant un peu de mise en équations pour celles ou ceux qui aiment !

On peut étudier un assemblage sur les deux aspects complémentaires que sont : le mouvement et les actions mécaniques.

D'un côté, on utilise les **inconnues** de mouvement dans les liaisons
I_c pour inconnues cinématiques

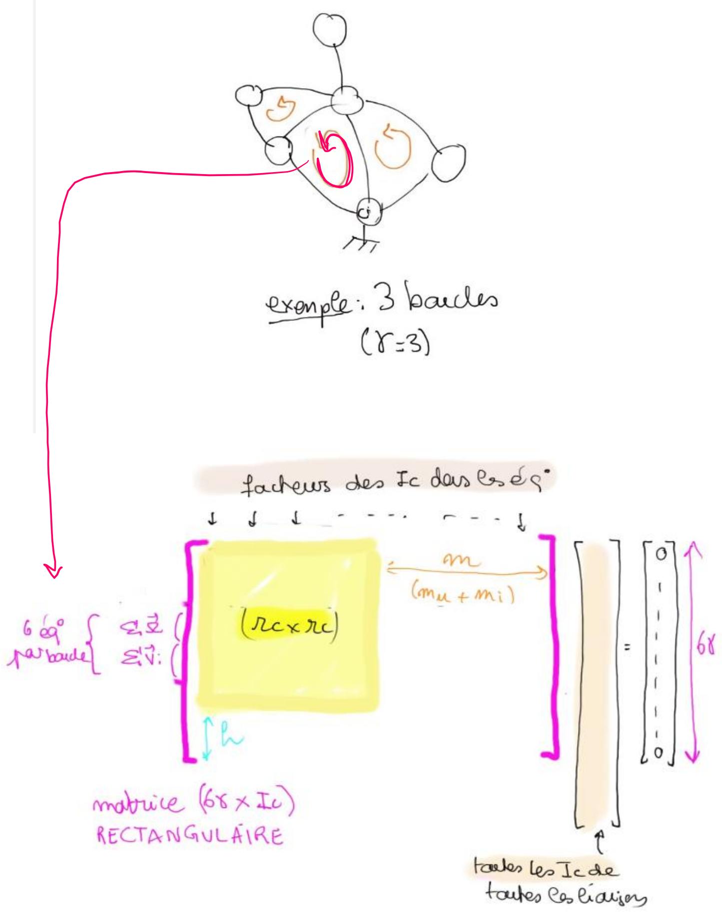
de l'autre, on utilise les **inconnues** d'actions mécaniques dans les liaisons
I_s pour inconnues statiques

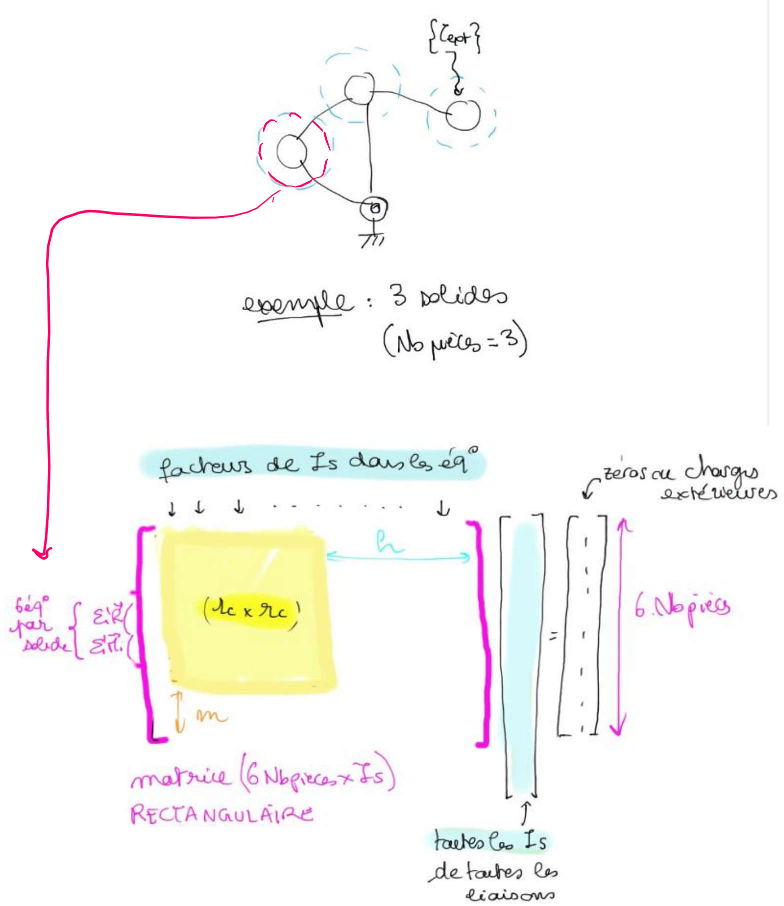
Et on peut écrire des équations suivantes sur ces inconnues :

D'un côté, les équations de fermetures cinématiques pour chacune des boucles

de l'autre, isoler chaque solide (sauf le bâti) et écrire un équilibre statique (PFS) dessus

En écriture matricielle, ça donne ça :



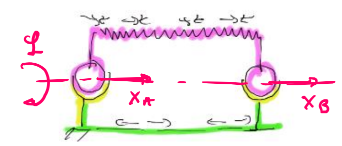


rc et rs sont les **rangs** des **matrices** cinématiques et statiques.
Leur valeur représente le nombre d'équations indépendantes qui décrivent le comportement cinématique ou statique.

Il y a donc rc équations pour Ic inconnues et rs équations pour Is inconnues

La mobilité m c'est **le nombre d'inconnues cinématiques que l'on ne peut pas déterminer** à partir des rc équations à disposition.
Cela veut dire que l'on ne peut pas prédire tous les mouvements de toutes les pièces en écrivant uniquement ces équations (il manque des équations sur ces inconnues). Pour compter physiquement les mobilités sur un mécanisme, on imagine tout ce qui peut encore bouger de façon indépendante après assemblage.

L'hyperstatisme h c'est **le nombre d'inconnues statiques que l'on ne peut pas déterminer** à partir des rs équations à disposition.
Cela veut dire que l'on ne peut pas prédire toutes les actions mécaniques dans toutes les liaisons en écrivant uniquement ces équations (il manque des équations sur ces inconnues)
Pour compter physiquement l'hyperstatisme on regarde les contraintes après assemblage, c'est ce que j'ai raconté plus haut !



Par exemple, quand deux rotules sont assemblées en parallèle, on peut prédire pour chaque liaison les translations des pièces et leur orientation **SAUF** pour l'une d'entre elles : on ne peut pas prédire la rotation autour de l'axe passant par les centres des rotules. Cela veut aussi dire que **l'on peut encore tourner** cette pièce lorsque la boucle est assemblée.

Par exemple, on ne peut pas prédire la répartition des actions dans la direction de l'entraxe des rotules car on ne dispose que d'une équation pour les deux inconnues statiques XA et XB.
Pour prédire cette répartition, il faudrait ajouter une équation : celle qui tendra compte de la déformation des pièces selon x !

Quand on écrit les relations sur les dimensions du système, on obtient...

$\rightarrow h = 6\gamma - r_c \quad ; r_c = I_c - m$

$\rightarrow \boxed{h = 6\gamma - I_c + m}$

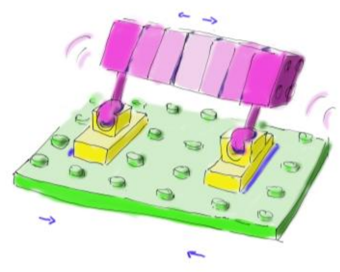
$\rightarrow h = I_s - r_s \quad ; r_s = 6\text{ Nb pièces} - m$

$\rightarrow \boxed{h = I_s - 6\text{ Nb pièces} + m}$

Et voila !! La fameuse formule vient de là !
formule qui n'est magique que si on sait anticiper les mobilités, en particulier ne pas oublier les mobilités internes ... et ça, c'est tout un programme)

Illustrons cela sur les exemples précédents. et rassurons-nous sur le fait qu'on retrouve bien … le degré d'hyperstatisme compris avec le sens physique !

Dans notre exemple nous avons **une boucle cinématique** et **une pièce sur laquelle réaliser un PFS** (la pièce rose)



Approche cinématique

Fermeture cinématique : $\{\mathcal{V}_{1/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\vec{0}\}$

↳ expression A par ex.

$$
\begin{array}{cc|cccccc}
 & & \dot\varphi_A & \dot\theta_A & \dot\psi_A & \dot\varphi_B & \dot\theta_B & \dot\psi_B \\
\hline
\Sigma\vec{R} & \cdot\vec{x} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & \cdot\vec{y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & \cdot\vec{z} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\Sigma\vec{V}_i & \cdot\vec{x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \cdot\vec{y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AB \\
 & \cdot\vec{z} & 0 & 0 & 0 & 0 & AB & 0
\end{array}
\begin{bmatrix} \dot\varphi_A \\ \dot\theta_A \\ \dot\psi_A \\ \dot\varphi_B \\ \dot\theta_B \\ \dot\psi_B \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

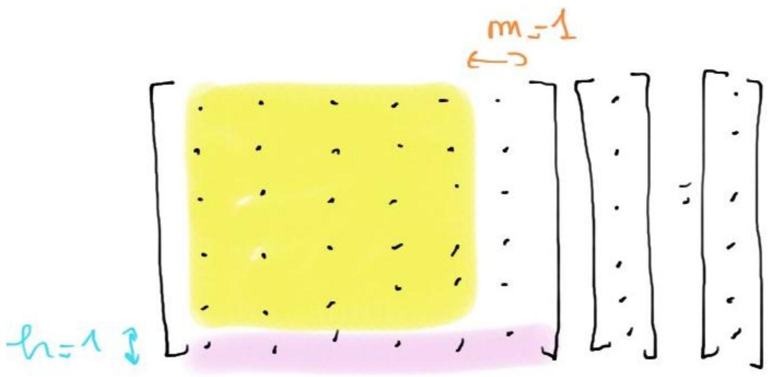
ici $\underbrace{\vec{V}_A(\text{rotule A})}_{0} + \underbrace{\vec{V}_A(\text{rotule B})}_{\vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_B}$

$AB\,\vec{x} \wedge (\dot\varphi_B\,\vec{x} + \dot\theta_B\,\vec{y} + \dot\psi_B\,\vec{z})$

$= AB\,\dot\theta_B\,\vec{z} - AB\,\dot\psi_B\,\vec{y}$

pas de $\vec{x}$

$\Rightarrow$ rang matrice cinématique = 5



Youpi, la formule marche !

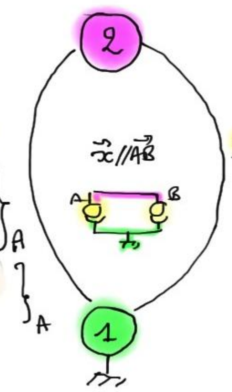
$h = 6 \times 1 - 3 \times 2 + 1 = 1$ ✓

Pour deux rotules en parallèle, il y a 6 inconnues cinématiques et 6 inconnues statiques

rotule centre A

$\{\mathcal{T}\}_{1\to2} = \left\{ \begin{matrix} X_A\vec{x} + Y_A\vec{y} + Z_A\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$

$\{\mathcal{V}\}_{2/1} = \left\{ \begin{matrix} \dot\varphi_A + \dot\theta_A + \dot\psi_A \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$



rotule centre B

$\{\mathcal{T}\}_{1\to2} = \left\{ \begin{matrix} X_B\vec{x} + Y_B\vec{y} + Z_B\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B$

$\{\mathcal{V}\}_{1/2} = \left\{ \begin{matrix} \dot\varphi_B + \dot\theta_B + \dot\psi_B \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B$

Approche statique

PFS au solide 2 $\{\mathcal{T}_A\} + \{\mathcal{T}_B\} = \{\vec{0}\}$

↳ expression A par ex

$$
\begin{array}{cc|cccccc}
 & & X_A & Y_A & Z_A & X_B & Y_B & Z_B \\
\hline
\Sigma\vec{R} & \cdot\vec{x} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & \cdot\vec{y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & \cdot\vec{z} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\Sigma\vec{M}_i & \cdot\vec{x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \cdot\vec{y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AB \\
 & \cdot\vec{z} & 0 & 0 & 0 & 0 & AB & 0
\end{array}
\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

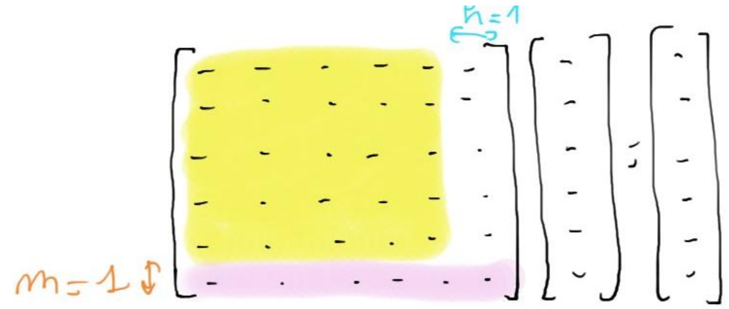
ici, $\underbrace{\vec{M}_A(\text{rotule A})}_{0} + \underbrace{\vec{M}_A(\text{rotule B})}_{\vec{AB} \wedge \vec{R}_B}$

$AB\,\vec{x} \wedge (X_B\,\vec{x} + Y_B\,\vec{y} + Z_B\,\vec{z})$

$= AB\,Y_B\,\vec{z} - AB\,Z_B\,\vec{y}$

pas de $\vec{x}$

$\Rightarrow$ rang matrice PFS = 5



Truc de ouf, ça marche encore !

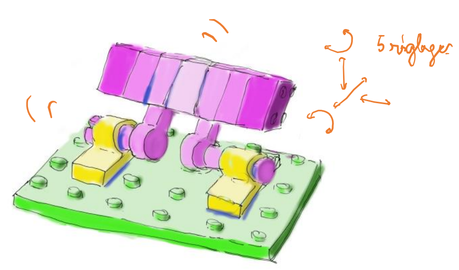
$h = 3 \times 2 - 6 \times 1 + 1 = 1$ ✓

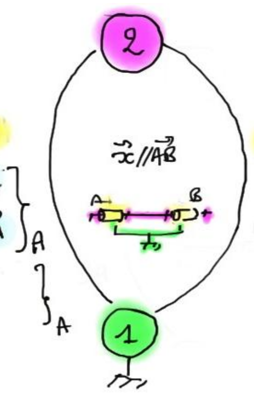
Oui, mais parce que tu as bien 'anticipé' m=1, ce qui n'est pas toujours facile, surtout quand il y a des mouvements pas utiles !

On recommence avec les deux pivots en parallèle

il y a :

2 inconnues cinématiques et 10 inconnues statiques





pivot axe $\vec{AB}$

$$\{\mathcal{T}\}_{1\to 2} = \begin{Bmatrix} \vec{X_A} + \vec{Y_A} + \vec{Z_A} \\ \vec{M_{yA}} + \vec{M_{zA}} \end{Bmatrix}_A \qquad \{\mathcal{V}\}_{2/1} = \begin{Bmatrix} \vec{\dot\varphi_A} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

pivot axe $\vec{AB}$

$$\{\mathcal{T}\}_{1\to 2} = \begin{Bmatrix} \vec{X_B} + \vec{Y_B} + \vec{Z_B} \\ \vec{M_{yB}} + \vec{M_{zB}} \end{Bmatrix}_B \qquad \{\mathcal{V}\}_{1/2} = \begin{Bmatrix} \vec{\dot\varphi_B} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

Approche cinématique

Fermeture cinématique : $\{\mathcal{V}_{1/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\vec{0}\}$

↳ expression A par ex.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \cdot\dot\varphi_A & \cdot\dot\varphi_B \end{array} \\ \begin{array}{l} \Sigma\vec{\Omega} \begin{cases} \cdot\vec{x} \\ \cdot\vec{y} \\ \cdot\vec{z} \end{cases} \\ \Sigma\vec{V} ; \begin{cases} \cdot\vec{x} \\ \cdot\vec{y} \\ \cdot\vec{z} \end{cases} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \dot\varphi_A \\ \dot\varphi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pas de $\cdot\vec{y}$ $\cdot\vec{z}$ →

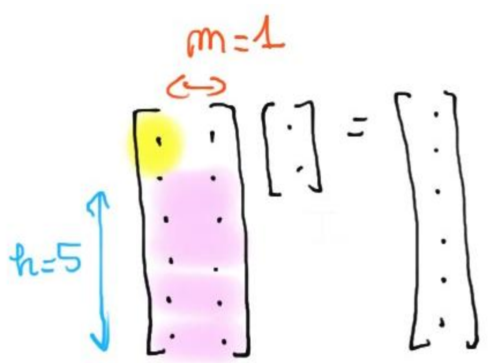
ici $\underbrace{\vec{V}_A(\text{roulette A})}_{0} + \underbrace{\vec{V}_A(\text{roulette B})}_{\vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_B}$

$AB\,\vec{x} \wedge (\dot\varphi_B\,\vec{x})$

$= \vec{0}$

pas de $\cdot\vec{x}$ $\cdot\vec{y}$ $\cdot\vec{z}$

$\Rightarrow$ rg matrice cinématique $= 1$



$h = 6 \times 1 - 1 \times 2 + 1 = 5$ ✓

Approche statique

PFS au solide 2 $\{\mathcal{T}_A\} + \{\mathcal{T}_B\} = \{\vec{0}\}$

↳ expression A par ex

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} \cdot X_A & \cdot Y_A & \cdot Z_A & \cdot M_{yA} & \cdot M_{zA} & \cdot X_B & \cdot Y_B & \cdot Z_B & \cdot M_{yB} & \cdot M_{zB} \end{array} \\ \begin{array}{l} \Sigma\vec{R} \begin{cases} \cdot\vec{x} \\ \cdot\vec{y} \\ \cdot\vec{z} \end{cases} \\ \Sigma\vec{M}_i \begin{cases} \cdot\vec{x} \\ \cdot\vec{y} \\ \cdot\vec{z} \end{cases} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -AB & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & AB & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ M_{yA} \\ M_{zA} \\ X_B \\ Y_B \\ Z_B \\ M_{yB} \\ M_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ici, $\underbrace{\vec{M}_A(\text{pivot A})} + \vec{M}_A(\text{pivot B})$

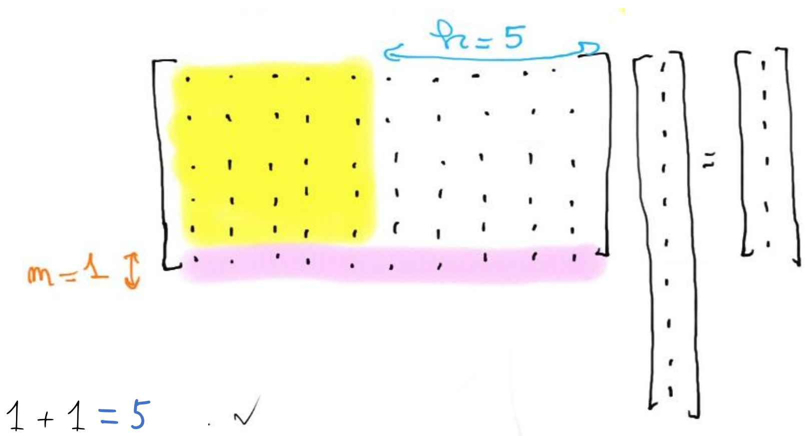
$M_{yA}\vec{y} + M_{zA}\vec{z} + (\vec{AB} \wedge \vec{R_B} + M_{yB}\vec{y} + M_{zB}\vec{z})$

$= M_{yA}\vec{y} + M_{zA}\vec{z} + (AB\,\vec{x} \wedge (X_B\vec{x} + Y_B\vec{y} + Z_B\vec{z}) + M_{yB}\vec{y} + M_{zB}\vec{z})$

$= M_{yA}\vec{y} + M_{zA}\vec{z} + AB\,Y_B\,\vec{z} - AB\,Z_B\,\vec{y} + M_{yB}\vec{y} + M_{zB}\vec{z}$

pas de $\vec{x}$

$\Rightarrow$ rang matrice PFS $= 5$



$h = 5 \times 2 - 6 \times 1 + 1 = 5$ ✓

Mobilité utile, mobilité interne

Ici, on s'est intéressé à la rotation de la pièce rose.
Comme cette rotation persiste après assemblage, m=1

Il est possible que cette rotation ne serve jamais à rien, et qu'on se fiche complètement de la position angulaire de cette bielle sur son axe. Bon, ça n'empêche pas qu'on ne peut pas anticiper cette rotation en utilisant les équations dont nous disposons.

Ici on parlera de **mobilité interne mi** , pour dire gentiment 'inutile' ou « qui va bouger alors qu'on lui demande rien »... ou qu'on risque d'oublier, alors... vigilance je vous dis !!

Il est aussi possible que cette rotation nous intéresse, par exemple si c'est un axe motorisé qui entraine ensuite d'autres pièces. Mais ça n'empêche pas qu'en étudiant juste la boucle bi-rotulée, on ne puisse pas savoir quelle est sa position angulaire.

et là on parlera de **mobilité utile mu**, moins facile à oublier, car sinon, c'est qu'on a un peu zappé la fonction du mécanisme.

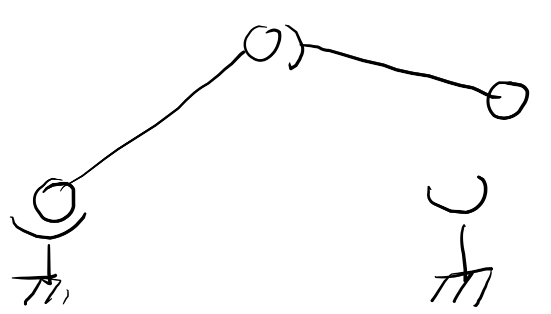
Quoi qu'il en soit, ce qui nous intéresse pour calculer h grâce à la fée des rangs , **c'est m, donc mi + mu**.

N'empêche, moi j'aime mieux comprendre où est la source de l'hyperstatisme, comme ça je peux relâcher les contraintes facilement si j'en ai envie!

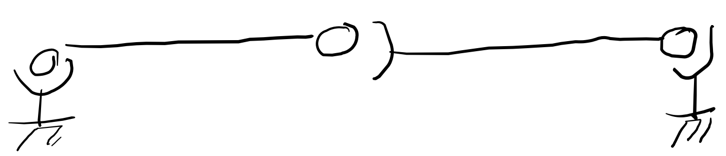
Si les liaisons en parallèle combinées ne permettent pas de bloquer certains mouvements, on ne peut pas déterminer la position dans l'espace, par exemple avec les 2 rotules en parallèle, il est impossible de déterminer la position angulaire de la pièce autour de l'axe AB

si on bloque 2 fois le meme mouvemen, par exemple le déplacement dans la direction de l'entraxe des rotulest, on a 1 seule équation qui fera intervenir 2 inconnues statiques

Fiche spéciale mobilités?



$h = 0$



$h = 1$!

Pour compter le rang il est souvent pratique de procéder par élimination des lignes en regardant les lignes de zéros, ou celles qui sont le multiple d'une autre par exemple.

Ajouter suggestion de pab : 2 bielles en série, alignées ou pas.

Boucle ouverte -> pas de difff a calculer les postions ou actions mécaniques

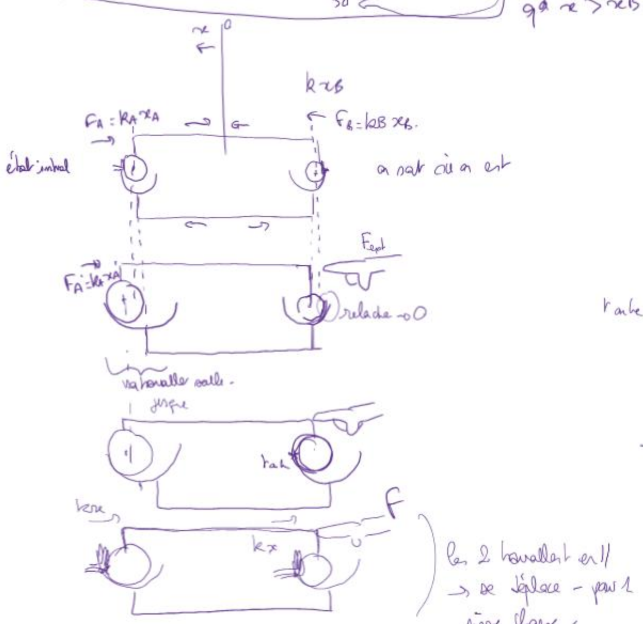
$\boxed{k_A(x_A+x) - k_B(x_B-x) = F_{ext}}$ quand $x < x_B \rightarrow$ B agit $\rightarrow k(x_A+x) = F_{ext} + k_B(x_B-x)$

qd $x > x_B$ et < jeu $\rightarrow k_A x_A + k_A x = F_{ext}$ précharge.

si $x_A = x_B$ et $k_A = k_B$

$k(x_0+x) = F_{ext} + k(x_0-x)$

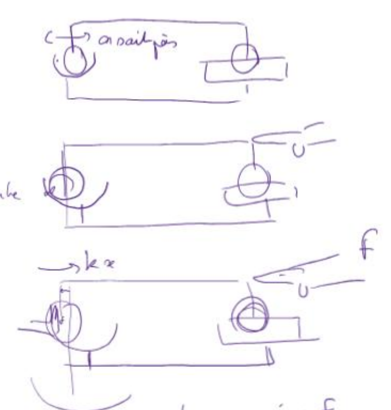
$\Rightarrow F_{ext} = 2kx$.



$kx + kx = F$

$\Rightarrow 2kx = F$

2x + raide. $x = \frac{F}{2k}$.



1 seul bras pour récup F

→ s'écrase 2x plus pour 1 même F.

$kx = F$

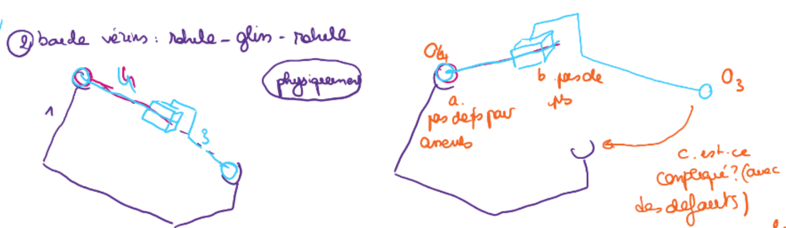
$x = \frac{F}{k}$

pas d'incertitude /choc sur jeu

+ + raide qd ds 2 rachent.

② boucle vérins : rotule – glis – rotule

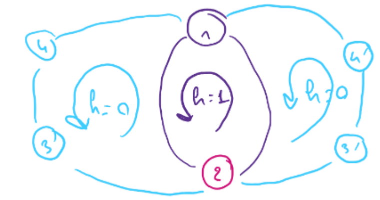
physiquement



→ NON on peut régler la distance O_1O_3 et l'orientat° (O_1O_3)

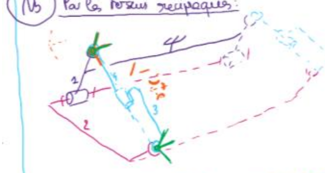
⇒ $h=0$

③ Assemblage de ces cd :



le calcul que vous faites h=5 ne se justifie QUE par les 2 pivots en //.

Nb Par les torseurs réciproques :



1) liaison 1/4 : rotule → 3 glis passant par la rotule, pas de couple

liaison 4/3 : glissière → 2 glis ⊥ axe (pas nécessairement X axe), 3 couples

⇒ $\mathcal{L}_{143}$: il reste 2 glisseurs passant par la rotule et ⊥ axe glis

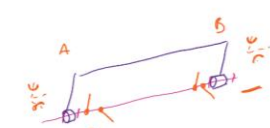
2) liaison 3/2 : rotule → 3 glis passant par le centre rotule, pas de couple

⇒ $\mathcal{L}_{1432}$: il reste rien (sauf cas pathologique où les 2 rotules sont confondues.

3) liaison 2/1 : piv : 3 glism et 2 couples mais on s'en fiche car $\mathcal{L}_{1432}$ a déjà fait sauter toutes les contraintes

cd : dans la boucle 1-4-3-2-1 aucune difficulté qd on forme le mécanisme ⇒ h:0 dans cette boucle.

idem ds la boucle 1-4'-3'-2-1.



il reste à regarder la boucle avec les 2 pivots en //

liaison 1/2 A : piv → 2 couples ⊥ axe
→ 3 glisseurs dont 2 passant par axe et ⊥ axe

liaison 1/2 B : piv → idem

⇒ $\mathcal{L}$ $1_A/2/1_B$: les 5 torseurs de base réciproques sont compatibles

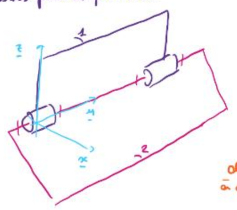
cd : pour réaliser cet assemblage, il faut

1/ tordre 1 et 2 autour des 2 direct° ⊥ axe afin de rendre // l'axe piv côté 1 et côté 2

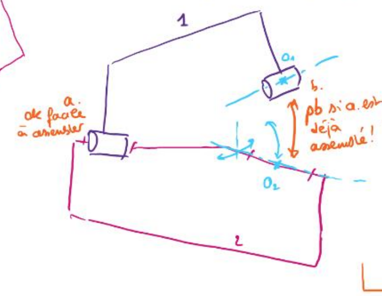
2) pousser/tirer sur 1 et 2 pour rendre coincidents les "centres" des pivots : dans les 3 directions.

Justifier les degrés d'hyperstatisme

① 2 liaisons pivot en parallèle



physiquement : 1 et 2 sont forcément mal fabriqués –
→ se représenter les défauts puis essayer d'assembler.



pb si a. est déjà assemblé ! ···→

il faut

1) rendre les axes //

⟹ 2 rotat° $\vec{x}$, $\vec{z}$

2) les axes sont alors //
mais pas confondus + O_1 et O_2 doivent être confondus (car arrêt axial).

⟹ 3 translat° $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$

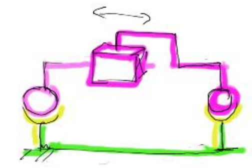
pour rendre O_2 et O_1 coïncidents.

ccl : h = 5 : 5 contraintes d'assemblage.

<u>Nb</u> : cela peut être vu comme → on a défini 2 fois les 5 contraintes géom
↳ 1 fois avec la géom de 1
↳ 1 ——— 2

→ il faut forcer : 3 efforts et 2 couples dans la boucle pour assembler le tout.

Application ?



Deux liaisons rotule en parallèle, on le retrouve dans la quasi-totalité des solutions de **montage de vérins**. Si la tige peut translater dans le corps de vérin, alors le montage est isostatique. Si la tige est bloqué, le vérin s'apparente à une bielle et alors la contrainte hyperstatique existe (verrouillage mécanique des éléments ou huile supposée incompressible).