Aujourd'hui, on parle de...

La galère à mettre en mouvement des solides et à les tenir

Les propriétés inertielles d'un solide

Allons à la rencontre de trois athlètes de renom :

Rouge, Vert.e et Bleue !

Quoi? Tu les connais pas ? Bah...
Il n'est jamais trop tard!

Vert.e se la joue vintage, avec des altères des années 20

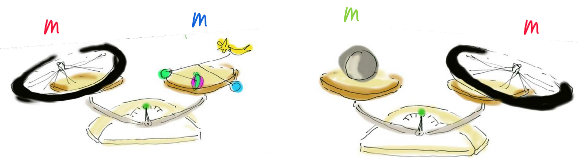
Rouge, est fan de récup' et s'est fait des altères avec des roues

Et Bleue . . Est une artiste. Elle a créé une espèce de système solaire, parce que « trop cool » !

Chacun.e a fabriqué ses propres altères
La seule contrainte qu'on leur avait donné c'était que chacune des charges « pèse le même poids ».
En réalité, elles ont la même « **masse m** ».

Comme ça, nos athlètes sont à égalité pour attaquer la séance ..

On va voir ...

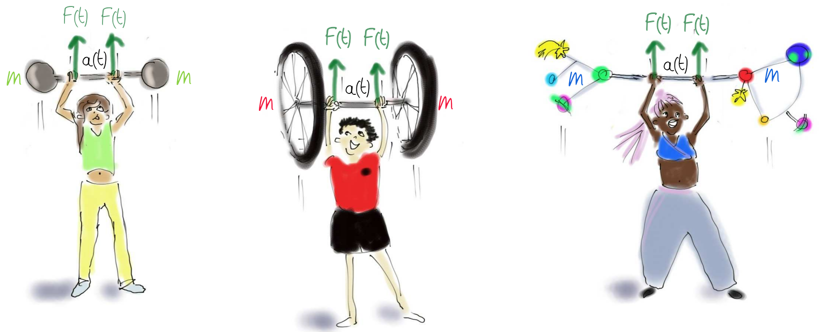


Allez, on les rejoins à la salle !

workout 1
Levé de barres !

Pour l'échauffement, on leur demande de lever la barre, puis une fois stabilisée, d'attaquer des séries de développés. Les bras commencent par récupérer le poids de l'altère, et c'est le même pour tt le monde ($F = m.g$) mais c'est de la statique, c'est pas ce qui nous intéresse. Nous on veut regarder ce qui se passe quand ça bouge ! Allez ! Haut - bas ! Haut - bas !

Important !! les barres Ne tournent pas pour cet exo et les bras sont bien centrés sur la barre !



Comme Vert.e, Rouge et Bleue font exactement **le même mouvement** (accélérer et freiner vers le haut puis accélérer et freiner vers le bas) avec la **même masse m**
leurs 6 bras font exactement **les mêmes efforts** F(t) (pousser et retenir puis tirer et retenir) .

C'est donc un peu fatiguant mais c'est pareil pour tout le monde ! Pour évaluer ça, créons un indice de galère à mettre en translation :

Si l'une des altères était plus lourde, il y aurait un plus grand effort à fournir. Ce serait pareil si l'un des athlètes augmentait le rythme.

Ça mathématiquement ça se traduit avec l'équation de résultante du PFD : $F(t) = \boxed{m}.a(t)$ *

L'indice de galère pour un mouvement de translation est en fait ici : la masse.

> Voilà. C'est tout pour la **masse**. Elle est liée à **l'effort** à fournir pour permettre la **translation** d'un solide. Plus elle est grande, plus on galère à moduler la vitesse de translation, mais la forme de l'objet n'a pas d'importance.

On se repose 5 minutes... et on y retourne !

* Équation vectorielle, cf principe fondamental de la dynamique pour plus de détail

Workout 2
Les trucs qui tournent !

Reposons les barres sur leurs supports, comme ça, plus d'effort à fournir pour récupérer le poids des altères.

Et t'as vu, j'ai mis un p'tit manchon* pour que ça tourne facilement !

Pour que le challenge suivant soit équitable, chacun.e doit atteindre la même vitesse de rotation dans le même laps de temps (on impose la **même accélération angulaire** quoi !).

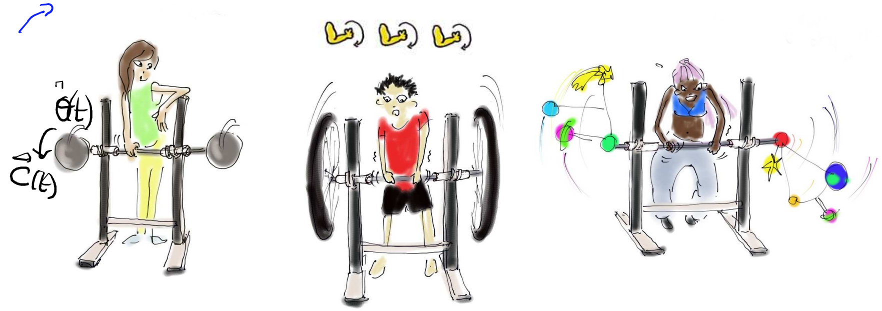
GOOO !

Franchement... ça va !

Déconne pas je galère de ouf !

Pourtant on y arrivait pareil au développé !

Je vous propose cette fois un indice de galère à faire tourner



Même si la masse est la même, elle n'est pas répartie de la même manière et c'est ça la galère de Rouge et de Bleue

Pour Vert.e la matière est très proche de l'axe de rotation, alors que pour Rouge et Bleue la matière est très loin de l'axe !

Dans le Workout 1 il fallait fournir un **effort** pour mettre en **translation** une **masse**
Dans le Workout 2 il faut fournir un **couple** pour mettre en **rotation** ce qu'on appelle une **inertie**

C'est ce que traduit l'équation de moment du PFD : $C(t) = \boxed{J}.\ddot{\theta}(t)$ *

L'inertie, c'est l'indice de galère pour un mouvement de rotation

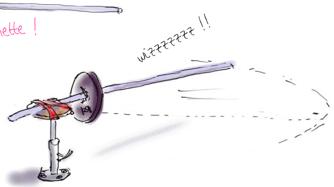
> Plus précisément, on parle de **moment d'inertie**. Plus il est grand, plus on galère à accélérer angulairement. Il est lié au **couple** à fournir. L'inertie c'est un peu plus compliqué que la masse car elle **dépend de la géométrie du solide et de l'axe autour duquel on tourne**.

On va voir ça !

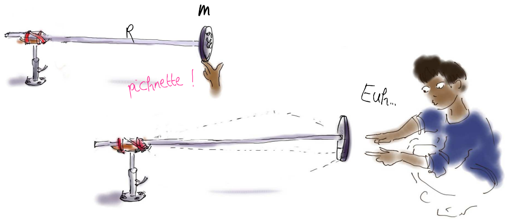
Pourquoi quand une masse est plus loin il faut plus « coupler* » ?

(* forcer, mais en couple :-))

Plaçons une masse à une distance r de l'axe de rotation d'un tabouret. Et poussons un peu pour accélérer la masse.

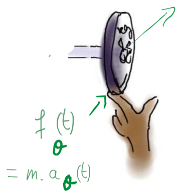


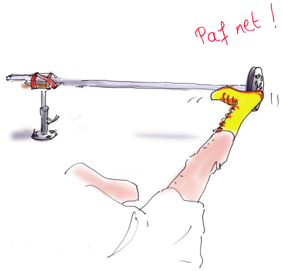
Si on décale la masse à une distance R et qu'on ne se foule pas plus ...



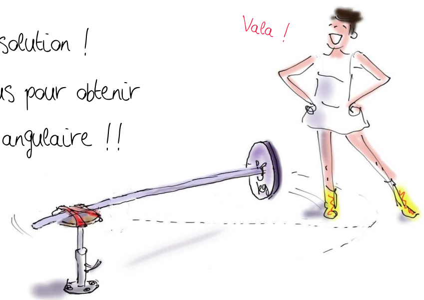
Nb : Le tabouret est vissé au sol et la barre est archi bien scotchée sur le siège

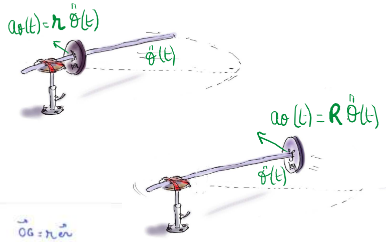
Si on regarde le mouvement tangent au cercle décrit par la masse, sa capacité d'accélération linéaire $a_\theta(t)$ est liée à l'effort appliqué $f_\theta(t)$. Donc avec le même effort appliqué, la masse accélère de la même manière dans la direction tangente au cercle ($\vec{\theta}$) mais en terme de rotation de la barre, plus la masse est loin, moins la barre aura tourné !





T'as deviné la solution ! Il faut se donner plus pour obtenir le même mouvement angulaire !!



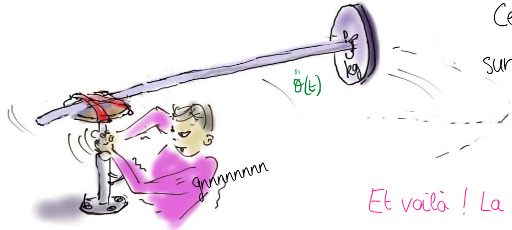


Et oui, pour une même accélération angulaire $\ddot{\theta}(t)$ l'accélération tangente $a_\theta(t)$ de la masse déportée est plus grande. Donc... la force à appliquer est plus importante

La force qui permet d'accélérer la masse comme il faut c'est donc $F = m\,a_\theta(t) = m.\ R.\ddot{\theta}(t)$

(voir workout1 ou PFD en résultante)

$\vec{OG} = r\,\vec{e_r}$
$\vec{V}(G, M/0) = r\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$
$\vec{a}(G, M/0) = r\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$



Cette action exprimée en terme de couple sur l'axe est donc encore multipliée par R.

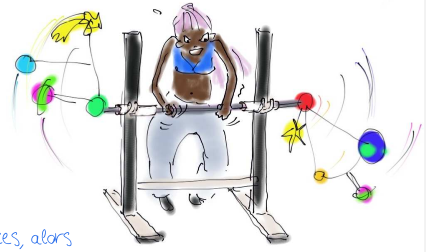
$$C = m.R^2.\ddot{\theta}(t)$$

Et voilà ! La difficulté à mettre en rotation est à la fois proportionnelle à la masse qu'on déplace, mais aussi à la distance AU CARRE ! Un R à cause de l'accélération linéaire à fournir et un R à cause du fait que c'est un couple. Plus de raison de se planter sur les unités.

Conclusion sur nos indices de difficulté à mettre un solide en mouvement :

translation	$f = m.a$	m, c'est la difficulté à mettre en translation.
rotation	$C = m.R^2.\ddot{\theta}$	$m.R^2$ J, c'est la difficulté à mettre en rotation.

Aaah OK logique alors que je galère parce que pour moi la masse de mes altères est répartie très loin de l'axe de rotation !



Et moi j'ai un peu de toutes les distances, alors je galère mais un peu moins que toi.

Elles sont mieux alors tes altères, la chance

Pas si vite !!

Elles sont mieux du point de vue du couple moteur à fournir si on veut les accélérer mais il n'y a pas que ça...

C'est bon? Vous avez récupéré pendant l'explication? On passe au Workout 3 !

Workout 3

Les actions parasites !

Pour cet exercice, on soulève les barres et on les tiens par les manchons.
Je me charge de lancer les altères en rotation toutes à la **même vitesse de rotation constante** et ensuite je vous laisse tenir tout ça…

C'est comme pour le workshop 1. je retiens le poids quoi.

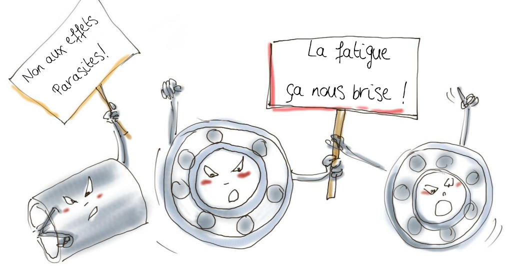
Ouais pareil, cette fois ça va.

Et toi ?

Non mais vous rigolezzzzzz !!!
J'ai l'impression de faire du canoé !
En plus de soulever la barre, ça pousse dans un bras et ça tire dans l'autre, en alternance !!!!
Pourquoi c'est facile pour rouge maintenant ??

Si les bras de Bleue ressentent des actions mécaniques différentes et oscillantes, cela veut dire que dans le guidage* il y a des couples « parasites », perpendiculaires à l'axe de rotation et eux-mêmes tournants.

Et ça… en général on essaie d'éviter car qui dit actions mécaniques alternées dit … fatigue* dans le guidage.

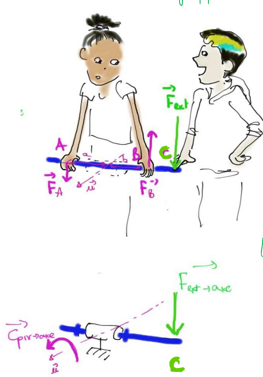


Nb : ces charges parasites existaient déjà dans le Workout 2 mais c'est le banc qui les subissait pour nous permettre de nous concentrer exclusivement sur le couple moteur.
Bleue ne les ressentait donc pas.

**

Si j'appuie là :

Dans tes bras il y a un déséquilibre de forces F_A et F_B

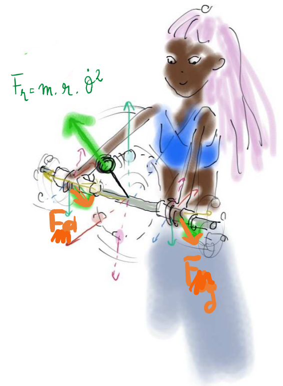


Et si on remplace tes bras par une liaison pivot

C'est pareil. Le couple que tes bras ont récupéré est normal à l'axe :

$\vec{C}_{pivot \to axe} = (F_A a + F_B b)\vec{u}$

Si on ne regarde qu'un seule masse, comme elle tourne à une vitesse angulaire $\dot{\theta}$, elle est projetée vers l'extérieur (la fameuse force centrifuge Fr ***)

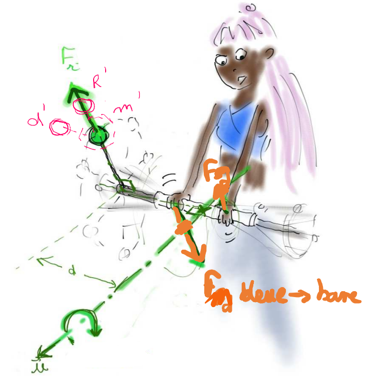


Si la masse est **centrée** sur ses bras, Bleue retient la force centrifuge Fr avec ses bras. Chaque bras doit repousser de la même façon $F_{main\ gauche} = F_{main\ droite}$ et ces efforts tournent pour s'opposer en permanence à Fr.

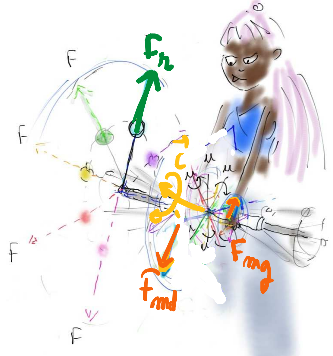
Il n'y a donc **pas de couple parasite** dans la liaison pivot mais un effort tournant à retenir.
On pourrait dire que Bleue a l'impression de faire **de la barque**.

L'indice de galère type barque : c'est m.R.
Jeu de mot…ahahah

Si on décale latéralement la masse, d'une distance d, la force tournante Fr est encore là mais en plus elle génère un couple autour d'un axe u à cause du déport d.
C'est ce que Bleue ressent avec ses bras comme deux charges $F_{main\ gauche}$ et $F_{main\ droite}$ différentes et opposées **



$|\vec{C}| = d.F_r = d.mR\dot{\theta}^2$



Si la masse est plus loin (d'), plus excentrée (r'), plus lourde (m') plus rapide ($\dot{\theta}'$) Bleue va ramer!
jeu de mot, again =p

Et pour finir, comme Fr tourne par rapport à Bleue, et bien l'axe u du couple parasite aussi. Bleue doit donc en permanence compenser ce couple qui change de direction… et elle a l'impression de **faire du canoé** !

L'indice de galère type canoë : c'est m.d.R
Mort de rire? Marre de ramer ? Tu choisis !

Le vrai petit nom de cette difficulté à garder l'axe droit c'est « le produit d'inertie »

OK mais si $|\vec{C}| = d \cdot F_r = m d R\ \dot\theta^2$ c'est « le » produit d'inertie, alors pourquoi d'habitude on parle de deux produits d'inertie dans un mouvement de rotation autour d'un axe ?

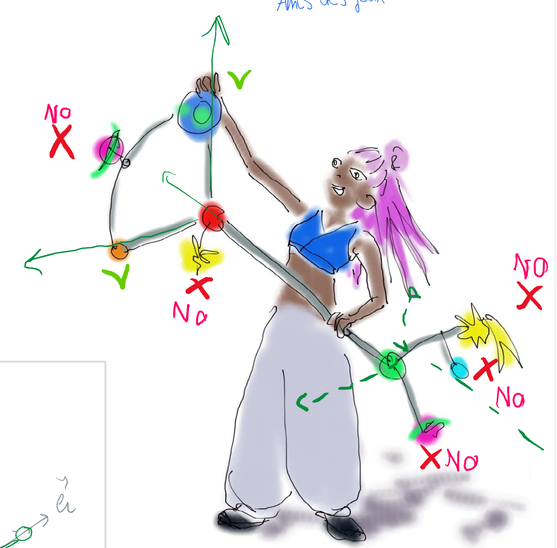
Remember, ce produit est l'image d'un couple agissant autour d'un axe u normal à l'axe de rotation et à un axe passant par la masse.

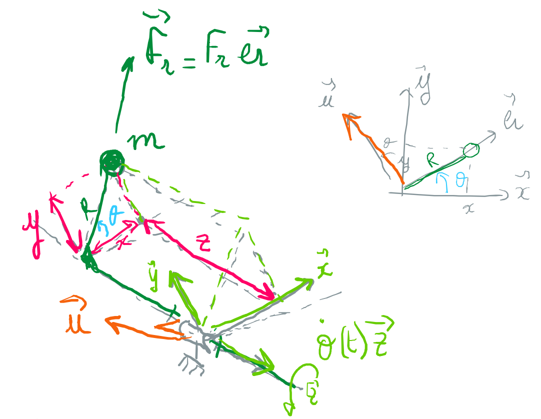
Pour une seule masse, on peut s'arranger pour que l'un des axes du repère de la pièce passe effectivement par la masse m, mais cela devient impossible quand il y a plein de masses réparties un peu n'importe comment dans l'espace

Amis des jeux de mots, me revoila !

Par exemple pour les altères de Bleue, au mieux on y arrive pour 2 masses, mais pour les autres, il va falloir exprimer les couples parasite différemment : en exprimant ces effets dans une base commune.

Comme ça pour savoir ce que Bleue ressent vraiment, on fait la somme et basta !





Dans ce repère, le départ d = - z

Donc, on va localiser de façon générique les masses avec des coordonnées (x, y, z) dans un repère (A, x, y, z) attaché à la pièce verte qui tourne.

Avec les maths on peut décomposer le couple parasite Cu sur la base (x , y , z)

$C\,u = C_x \cdot x + C_y \cdot y$

$$\vec{u} = -\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}$$

$$C\,\vec{u} = -m\,z R \sin\theta\,\dot\theta^2\,\vec{x} + m\,z R\cos\theta\,\dot\theta^2\,\vec{y}$$

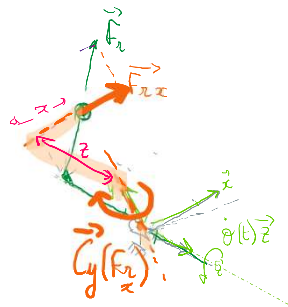
$$m\,d R\dot\theta^2 \qquad \underbrace{\boxed{-m\,z\,y\,\dot\theta^2\,\vec{x}}}_{C_x\,(F_r)} + \underbrace{\boxed{m\,z\,x\,\dot\theta^2\,\vec{y}}}_{C_y\,(F_r)}$$

$$\vec{F_r} = F_r\vec{e_r} = \underbrace{F_r\cos\theta}_{m\,\dot\theta^2 R\cos\theta}\,\vec{x} + \underbrace{F_r\sin\theta}_{m\,\dot\theta^2 R\sin\theta}\,\vec{y}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F_r} = \underbrace{m\,\dot\theta^2 x\,\vec{x}}_{F_{rx}\vec{x}} + \underbrace{m\,\dot\theta^2 y\,\vec{y}}_{F_{ry}\vec{y}}$$

Ce qui est cool, c'est que ces couples ont un sens physique ! Ce sont les composantes de l'effort centrifuge Frx et Fry qui en tirant sur m avec le départ d = - z vont générer ces couples autour des axes x et y

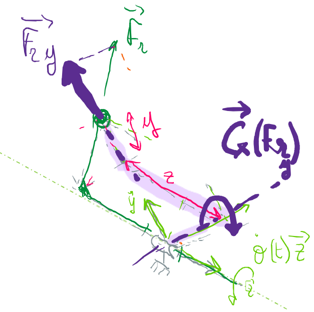
Actions de la masse sur la liaison



Fry. y crée un couple (< 0) autour de l'axe (A, x)

$C_x\,(F_{ry}) = -z \cdot F_{ry} = -z \cdot m \cdot y\,\dot\theta^2$

$z < 0$ et $C_x > 0$



Frx. x crée un couple (< 0) autour de l'axe (A, y)

$C_y\,(F_{rx}) = +z \cdot F_{rx} = z \cdot m \cdot x\,\dot\theta^2$

$z < 0$ et $C_y < 0$

La composante Frx ne crée pas de couple selon x

La composante Fry ne crée pas de couple selon y

Et les couples générés autour de z par Fry et Frx se compensent car Fr passe par l'axe (A, z)

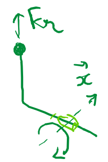
En gros, si tu retiens le sens de m. d. R les autres expressions sont vraiment pareilles : un couple = du départ de masse et des effets centrifuges dépendant de la distance à l'axe.

m. d. R image de C (FR) u

m. x. z image de Cy (Frx) y C'est I_{xz}

m. y. z image de Cx (Fry) x C'est I_{yz}

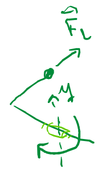
Parfois c'est cool de vérifier qu'on retombe bien sur nos pieds et regardant des cas particuliers. Là on peut par exemple regarder si la masse est à l'horizontale ou à la verticale :



Quand la masse est à la verticale $x = 0$ et $y = R$

$F_{ry} = F_r$ et $F_{rx} = 0$

$C_x(F_{ry}) = m.d.R.\dot\theta^2 = m.-z.y.\dot\theta^2$ ✓ et $C_y(F_{rx}) = 0 = m.z.x.\dot\theta^2$ ✓



Quand la masse est à l'horizontale $x = R$ et $y = 0$

$F_{ry} = 0$ et $F_{rx} = F_r$

$C_x(F_{ry}) = 0 = m.-z.y\,\dot\theta^2$ ✓ et $C_y(F_{rx}) = -m.d.R.\dot\theta^2 = m.z.x.\dot\theta^2$ ✓

Au final, si on résume les effets physiques que crée une masse qui tourne autour d'un axe.

Grace au workout 2, on a vu que pour mettre en rotation le couple à fournir est lié à l'accélération angulaire

$$C_{mot} = m.R^2.\ddot\theta$$

Le moment d'inertie c'est l'indice de galère pour accélérer

$$I_z = m.R^2$$

Et avec le workout 3 on a vu que à vitesse de rotation constante, si la masse n'est pas centrée, les effets centrifuges créent un couple parasite lié à la vitesse angulaire

$$C = m.d.R.\dot\theta^2$$

Le produit d'inertie c'est l'indice de galère pour maintenir droit

Et dans la plupart des cas on décompose:

$$I_{xz} = m.z.x$$

$$I_{yz} = m.z.y$$

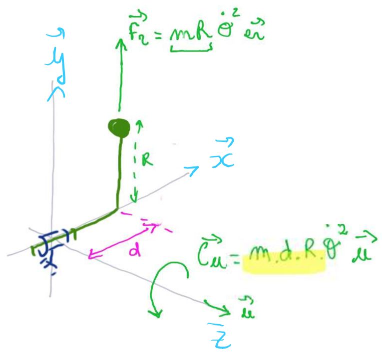
Enfin, on a vu aussi qu'une masse tournante créait aussi des efforts tournants, même si elle est centrée. $m.R$.

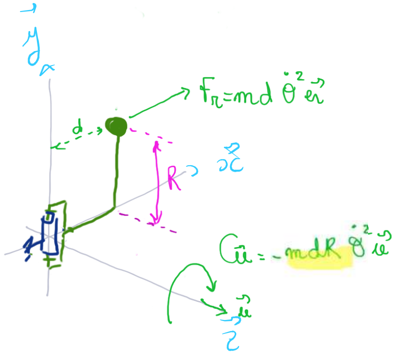
OK! Ça c'est pour une seule masse. Et on a regardé la rotation autour d'un seul axe. On change d'axe ?

Symétries d'actions parasites

On reprend la masse déportée qui à cause de son déport d et de son excentration R crée un couple parasite autour de u

Et bien, si on la fait cette fois tourner autour d'un axe orthogonal au premier et à u, le même phénomène se passe sauf que cette fois le couple Cu est créé par déport R et l'excentration d





$$I_{yx} = m.y.x$$

Produit d'inertie yx : image des actions centrifuges du déport y=d sur l'axe y déportées de x=R sur l'axe x

La symétrie de l'expression mathématique s'explique donc physiquement !

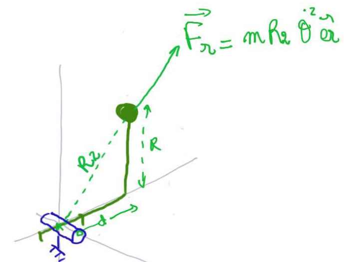
$$I_{xy} = m.x.y$$

Produit d'inertie xy : image des actions centrifuges du déport x=d sur l'axe x déportées de y=R sur l'axe y

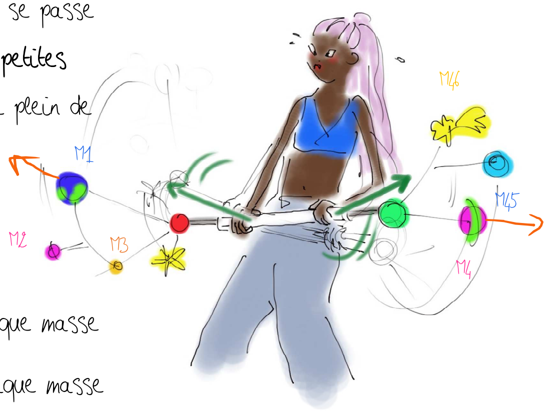
Nb : L'indice scalaire de galère $I_{xy}=I_{yx}$ est le même mais le sens des couples parasites associés n'est pas le même ;)

Et si par curiosité on regarde ce qui se passerait en tournant autour de u=z : rien à voir.

Dans cet exemple il n'y a même pas d'action parasite.



Maintenant on est prêt·es à aller regarder ce qui se passe pour un solide qui est **un ensemble de plein de petites masses** les unes à côté des autres, donc qui crée plein de petits efforts centrifuges cumulés.



M altère $= \sum$ masses

C moteur altère $= \sum$ Couple moteur pour chaque masse

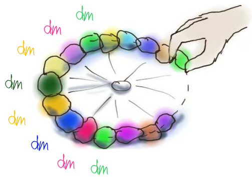
C parasite altère $= \sum$ Couple parasites de chaque masse

Et là, heureusement qu'on a une forme générique avec I_{xz} et I_{yz} car les couples sont directement exprimés dans une base commune et il suffit de sommer.

I_{xz} altère $= \sum I_{xz}$ de chaque masse

Pour Bleue les couples moteurs s'ajoutent et les effets parasites ont aussi tendance à s'amplifier car les masses sont globalement placées en opposition.

Pour Rouge, les effets de couple moteur s'accumulent aussi, mais les effets de couples parasites se compensent à cause de la géométrie de sa roue plus symétrique



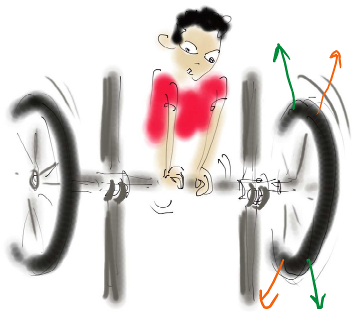
M altère $= \int_V dm$

C moteur altère $= \int_V C_{mot}$ de chaque dm

C parasite altère $= \int_V C_{par}$ de chaque dm

Pour Rouge, c'est carrément zéro ici !

I_{xz} altère $= \int_V I_{xz}$ de chaque dm



… On va **enfin** ! parler de… MATRICE d'inertie !

Bah ouais parce qu'on va pas tourner éternellement autour du même axe quoi !

J c'est l'outil mathématique de stockage (dans une matrice 3x3) des effets moteurs et parasites.
Voilà, c'est tout. On va y ranger des **moments d'inertie** et des **produits d'inertie** qui représentent les galères à mettre en rotation et tourner droit…
quel que soit l'axe autour duquel on tourne !

$$J_{A,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$$

Super important 1 !
On a vu que les moments existaient à cause du déport d ! Donc on doit savoir où est **le point 'A'** (centre de la liaison pivot) par rapport au solide.

Super important 2 !
Les couples parasites sont exprimés dans **la base du solide**, alors il faut absolument la définir proprement !

Pour savoir où ranger ces infos, il suffit de se replacer dans un cas simple comme on l'a fait dans les workout précédents :
1. Faire tourner le solide autour d'un axe qui lui, ne bouge pas et qui est confondu avec l'un des axes du repère $(A, \mathcal{B})$ (on fait ça trois fois du coup)
2. Tester avec une accélération non nulle pour avoir directement le moment d'inertie sur cet axe.
3. Tester avec une vitesse angulaire constante pour avoir les moments d'inertie sur les axes orthogonaux.

Et dans les autres cas, si l'axe bouge, ou si la vitesse varie etc… les actions mécaniques ressenties dans la liaison sont plus complexes. Mais cela ne change rien à l'expression de $J_{A,\mathcal{B}}$ qui est juste le stockage de l'information de répartition de la masse sur le solide).

Dans ces conditions, le PFD en moment qui utilise l'outil $J_{A,\mathcal{B}}$ donne directement
où ranger dans $J_{A,\mathcal{B}}$ les indices de galère vus plus haut !

$$\vec{\mathcal{M}}_{ext \to S, A} = \vec{\delta}_{A, S/R_0} = \left.\frac{d(\vec{\sigma}_{A,S/R_0})}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d(J_A \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0})}{dt}\right|_{R_0} \rightsquigarrow \begin{cases} \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{axe} = I_{axe} \cdot \ddot{\theta} \\ \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\perp} = I_{\perp} \cdot \dot{\theta}^2 \end{cases}$$

Les couples moteur et contre-parasites … que l'on a déjà exprimés … sont exprimés en fonction … des composantes de $J_{A,\mathcal{B}}$

Par exemple, pour les altères qui tournent autour de l'axe « z » en regardant les effets sur une liaison centrée sur A (entre les mains de nos athlètes)

$$\vec{\sigma}_{A/R_0} = J_A \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{B}/R_0}$$

$J_{A,\mathcal{B}}$ et Ω_{S/R_0} doivent être exprimés dans la même base $\mathcal{B}$.
Le moment cinétique résultant est aussi exprimé dans $\mathcal{B}$.

$$\begin{bmatrix} - & - & J_{xz} \\ - & - & J_{yz} \\ - & - & J_{zz} \end{bmatrix}_{A,\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} J_{xz}\,\omega_z \\ J_{yz}\,\omega_z \\ J_{zz}\,\omega_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = J_{xz}\,\omega_z\,\vec{x} + J_{yz}\,\omega_z\,\vec{y} + J_{zz}\,\omega_z\,\vec{z}$$

$\mathcal{B}$ tourne par rapport à R_0, c'est ce qui fait apparaître les moment parasites quand on dérive

Ils sont opposés car dans un cas on regardait l'effet de la masse sur la liaison et le moment dynamique c'est le moment de la liaison sur la masse.

Et grâce aux workout on a vu quoi déjà ?

Moments contre-parasites quand $\dot{\omega}_z = 0$

Moments parasites quand $\dot{\omega}_z = 0$

$$\vec{\delta}_{A,R_0} = J_{xz}\,\dot{\omega}_z\,\vec{x} - J_{yz}\,\omega_z^2\,\vec{x} + J_{yz}\,\dot{\omega}_z\,\vec{y} + J_{xz}\,\omega_z^2\,\vec{y} + J_{zz}\,\dot{\omega}_z\,\vec{z}$$

$$C_x = -I_{yz} \cdot \omega_z^2$$
$$C_y = I_{xz} \cdot \omega_z^2$$
$$C_{mot\,z} = I_z \cdot \dot{\omega}_z$$

Moment moteur quand $\dot{\omega}_z \neq 0$

Moment moteur quand $\dot{\omega}_z \neq 0$

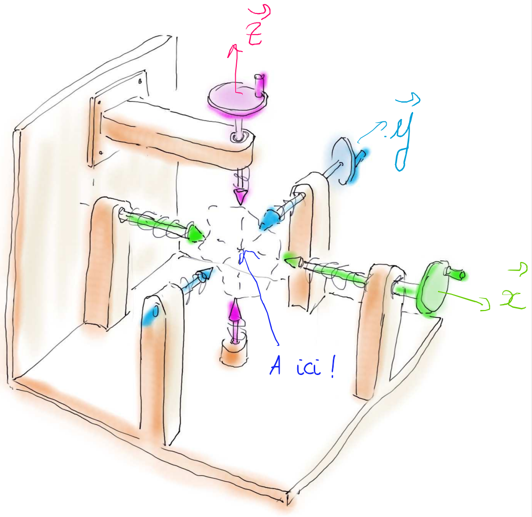
Han ! Mais c'est fou ça ! Ça se ressemble vraiment très beaucoup non ?

Et ouais t'as capté !
L'étude du couple parasite sur x nous permet de remplir Jyz (attention le termes sont croisés)

$$-J_{yz} = -(-I_{yz}) \quad \text{donc} \quad J_{yz} = -m.y.z \text{ ou } -\int_V y.z\,dm$$

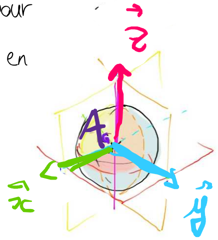
Bon, maintenant qu'on sait quoi mettre où, on va regarder quelques propriétés bien sympatoches grâce à un banc que j'ai imaginé pour toi

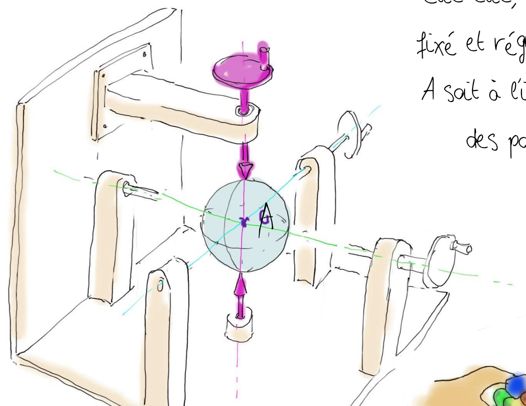
Le banc est fait pour placer le solide étudié en faisant coïncider les axes de $\mathcal{B}_{solide}$ avec les axes de la base fixe (entre les pointes vertes, bleues et roses)



On va commencer par l'exemple le plus simple, mais qui permet de comprendre plein de propriétés de la matrice d'inertie (rôle de A, symétries, changement d'axe, etc) : une sphère

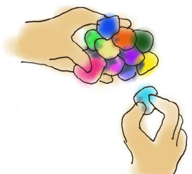
Et on va pas faire exotique pour l'instant : on centre un repère en plein milieu de la sphère. A = G. zou.





Clic clic, l'axe z est fixé et réglé pour que A soit à l'intersection des pointes.

Ce montage va nous permettre d'anticiper la forme de la troisième colonne de $J_{A,\mathcal{B}}$



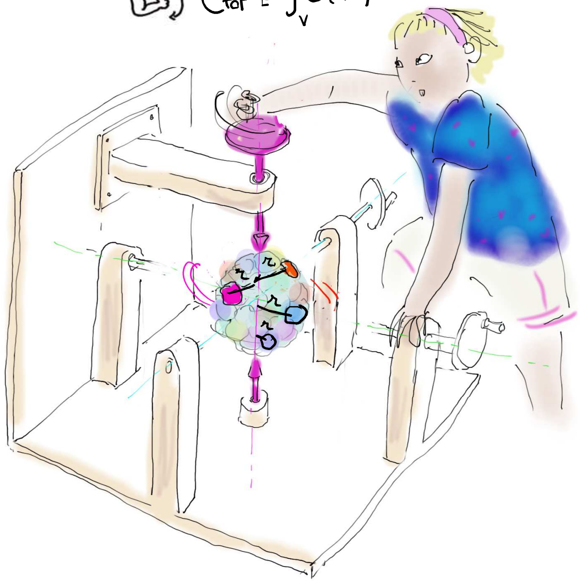
Et maintenant, on décompose la sphère en plein de petites masses dm qui vont :
1 / résister à la mise en mouvement et
2 / être centrifugée donc créer des moments parasites sur le banc.

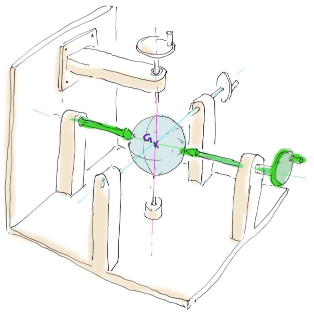
Le couple moteur à fournir est la somme de chaque couple permettant d'accélérer chaque dm située à la distance r de l'axe. L'indice de galère à accélérer est le **moment d'inertie** I_z

$$I_z = \int_V r^2 \, dm$$

On a l'expression du moment d'inertie autour de z, youpi !
Dans la matrice c'est J_{zz}

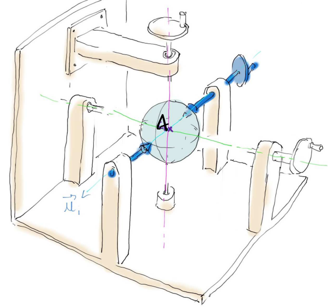
$$C_{tot} = \int_V C(dm)$$





Si on clip cette fois les pointes vertes ou bleues alignées avec (A, x) ou (A, y)
La géométrie étant exactement la même, ce sera la même difficulté à accélérer la sphère donc

$$I_z = I_x = I_y$$



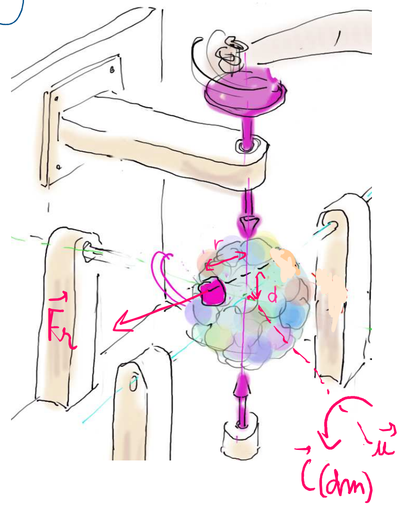
C'est tout ce qu'on a à dire ici à propos des **moments d'inertie**. Passons aux **produits d'inertie** de la sphère dans son mouvement de rotation autour de z et centré sur A.

Au lieu de faire un calcul un peu brutal genre

$$I_{xz} = \int_V x.z.dm \quad \text{et} \quad I_{yz} = \int_V y.z.dm$$

où x, y et z seraient les coordonnées cartésiennes de chaque mini masse dm dans le repère (A, x, z, z)

On va plutôt imaginer les effets physiques des forces centrifuges sur chaque morceau et voir si on peut pas tirer profit du sens physique

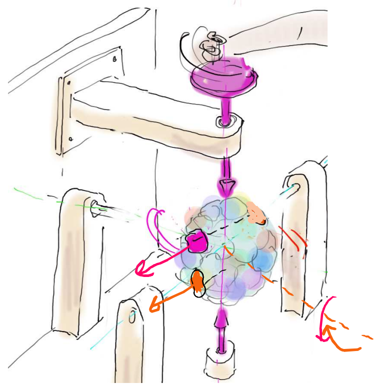


Si on regarde ce que crée la petite dm rose, comme elle est déportée (d) et loin de l'axe (r) donc elle crée un couple parasite autour d'un axe u   Pas cool !

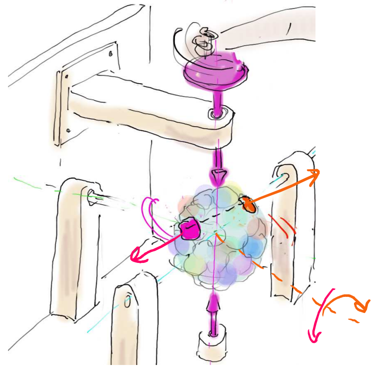
(intensité m. d. R tu te souviens)

Mais !! Coup de bol ! De l'autre côté de l'axe... la petite dm orange centrifugée aussi crée exactement le même effet parasite, mais dans l'autre sens !

cool ? Pas cool ?



Ou bien au choix



Il y a deux façons de faire des binômes qui annulent les effets centrifuges, en regroupant 2 par deux les petites dm, on couvre tout le volume de la sphère. Ça tournera donc droit sur l'axe z car tout est compensé, $I_{xz} = I_{yz} = 0$!!

SUPER cool !!!

La troisième colonne de la matrice d'inertie est donc comprise

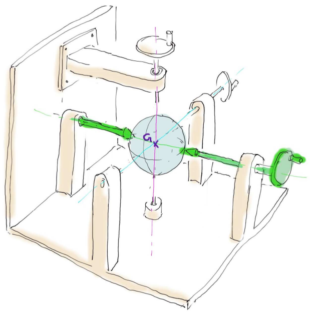
$$J_{A,B} = \begin{bmatrix} . & . & 0 \\ . & . & 0 \\ . & . & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Pas de Cy si acc nulle

Pas de Cx si acc nulle

Il faut transpirer pour accélérer

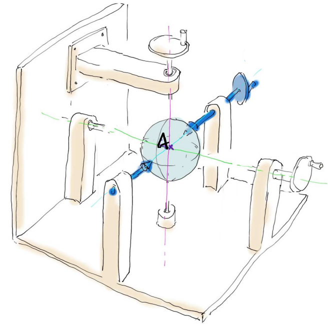
Si on veut finir et compléter les termes qui nous manquent dans les 1eres et deuxièmes colonnes, on clip et on regarde si ça tourne droit :



Incline la tête : on a exactement la même configuration qu'avant donc

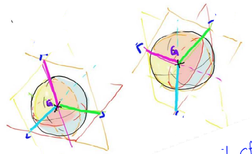
$I_{yx} = I_{zx} = 0$

$I_{xy} = I_{zy} = 0$



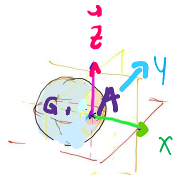
Allez c'est super, la matrice d'inertie de la sphère est si simple !

$$J_{A,B} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}_{A,B}$$



Est-ce que ça aurait changé quelque chose si on avait pris une autre base ?

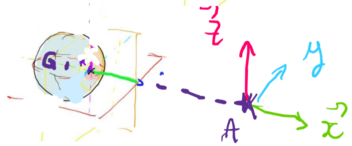
Et si on avait choisi A ailleurs ?



A dans le solide

ici si on prend n'importe quelle base B centrée sur A=G. Tu peux re-cliper dans la direction des nouveaux axes, les liaisons ressentiront les mêmes actions car la répartition de masse autour de (A, B) sera la même

$J_{A,B} = J_{A,B1} = J_{A,\text{ n'importe quel } B}$

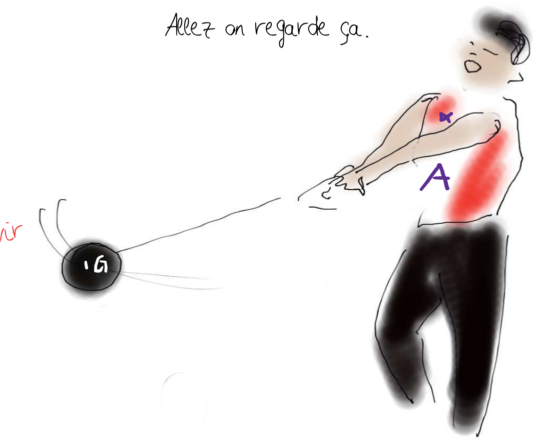


Ou carrément en dehors !

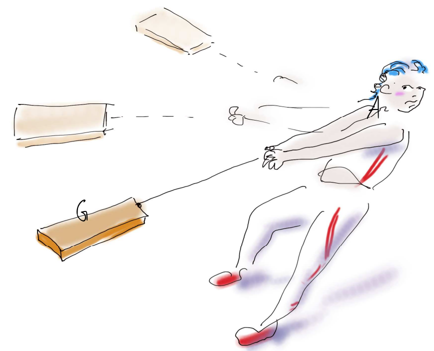
Alors là... !

Allez on regarde ça.

Ah cool alors je vais pouvoir m'en servir pour préparer mon entrainement !

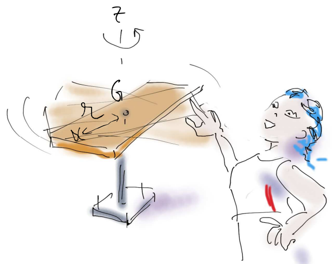


Huygens ça dit quoi ?

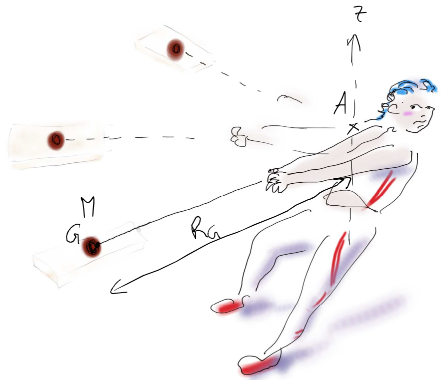


Ca dit que pour faire faire ce mouvement à ce machin (oui, c'est plus visuel qu'un marteau sphérique, pas ma faute !)

Il faut à la fois lui permettre de pivoter sur lui-même..



mais aussi permettre à toute sa masse de se déplacer sur l'arc de cercle !



Si on connait l'indice de galère à faire pivoter la planche

$I_{z,G}(\text{planche}) = \int x^2 + y^2 . dm$

Coordonnées des petits bouts dm par rapport à G exprimées dans B (vecteur GM)

et l'indice de galère à faire tourner la masse excentrée

$I_{z,A}(\text{planche concentrée en } G) = M . R_G^2 = \int X_G^2 + Y_G^2 . dm$

Coordonnées de G par rapport à A exprimées dans B (vecteur AG)

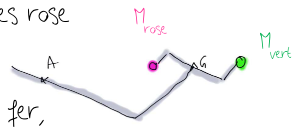
Alors on connait l'indice de galère à faire à la fois pivoter et parcourir l'arc en même temps

$$I_{z,A}(\text{planche}) = I_{z,G}(\text{planche}) + M . R_G^2$$

Ça c'est pour les moments d'inertie

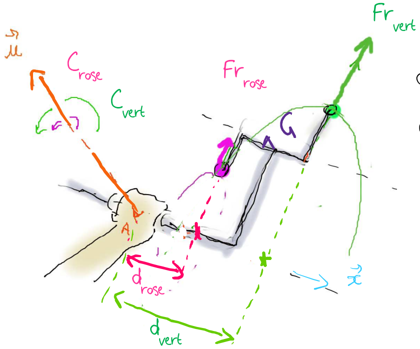
Et pour les produits d'inertie, c'est la même chose ?

Oui ! Imaginons par exemple cet objet (chelou) avec deux masses rose et verte bien lourdes (et le reste c'est du fil de fer, on regarde pas)



On dirait un peu mes altères !!

Quand le truc tourne autour de $(A, \vec{x})$, les masses sont centrifugées et comme elles sont déportées par rapport à A, il y a un couple parasite qui se crée autour de l'axe $\vec{u}$ dont l'indice de galère est un produit d'inertie à la « M. d. R ». 😂



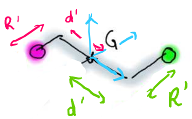
On peut soit calculer le produit d'inertie de l'ensemble en direct :

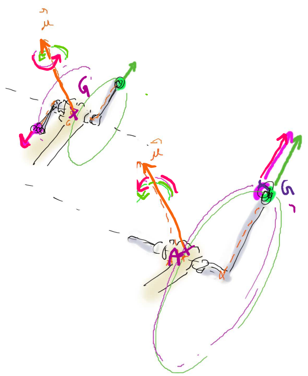
$$Ixy_{A,tot} = Ixy_{A,rose} + Ixy_{A,vert}$$
$$= M_{rose}\cdot d_{rose}\cdot R_{rose} + M_{vert}\cdot d_{vert}\cdot R_{vert}$$

Et plus généralement pour un volume on intègre « dm. d. r » sur le volume

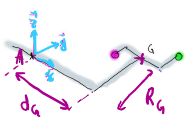
Soit le décomposer comme :

La somme des effets parasites locaux liés à la rotation des masses rose et verte autour de G, z





Et des effets parasites globaux, si les 2 masses étaient sur G



$$Ixy_{A,tot} = Ixy_{G,rosevert} + Ixy_{A,Glob}$$
$$= M_{rose}\cdot d'_{rose}\cdot R'_{rose} + M_{vert}\cdot d'_{vert}\cdot R'_{vert} + (M_{rose} + M_{vert})\cdot d_G\cdot R_G$$

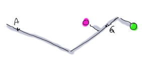
Ça peut donner l'impression que c'est plus long d'utiliser la somme, mais bien souvent, le terme local autour de G se calcule assez facilement car il y a des compensations, (comme on a déjà pu un peu le voir) et ça, c'est beaucoup moins relou que le calcul direct !

Récap de Huygens en moment et en produits d'inerties en coordonnées cartésiennes, ça donne :

$I_{z,A}(\text{Solide}) = \underbrace{I_{z,G}(\text{Solide})}_{\int (x^2+y^2)\,dm} + M_{\text{solide}}\cdot(X_G^2+Y_G^2)$	$I_{xy,A}(\text{Solide}) = \underbrace{I_{xy,G}(\text{Solide})}_{\int (x\cdot y)\,dm} + M_{\text{solide}}\cdot X_G\cdot Y_G$

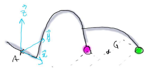
Nb : On aurait pu dessiner ce qu'on veut comme structure ici puisque la seule chose qui nous intéressait c'était la position des masses qui sont centrifugées par rapport au centre de la liaison pivot (A, z)

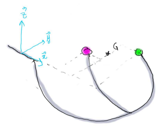
Ça



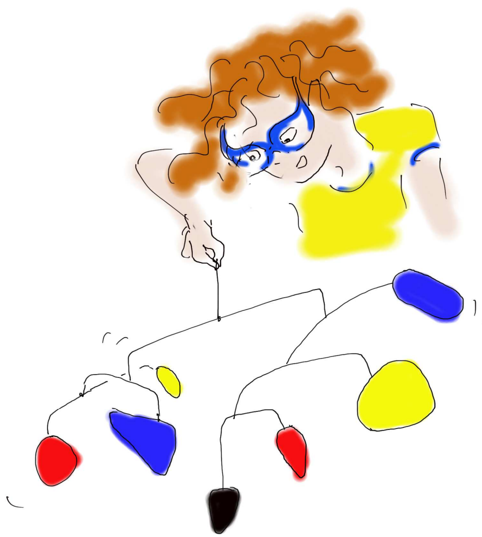
Ou ça

Ou même ça

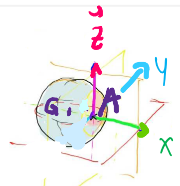


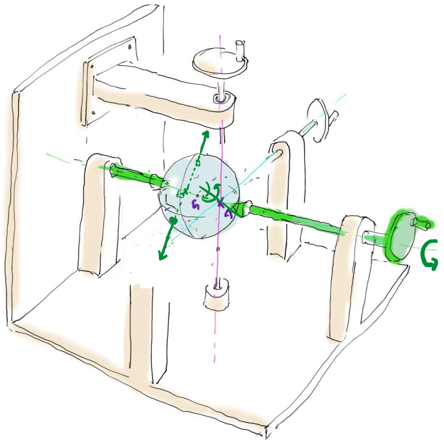


C'est trop beau on dirait des Calder !



Mais avant de faire des grands calculs, Hygens ou autres on peut toujours revenir au sens physique.
…r le banc ! ($A \neq G$)





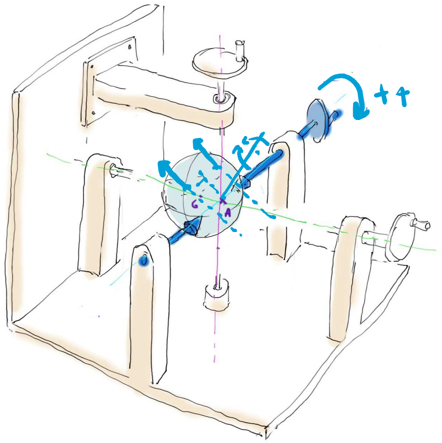
Galère à faire tourner sur l'axe vert ?

Oui. Exactement pareil que quand G était confondu avec A.

donc : $J_x (A \neq G) = J_x (A = G)$

Galère à tenir droit sur l'axe vert ?

Non. Compensation 2 à 2 comme avant.

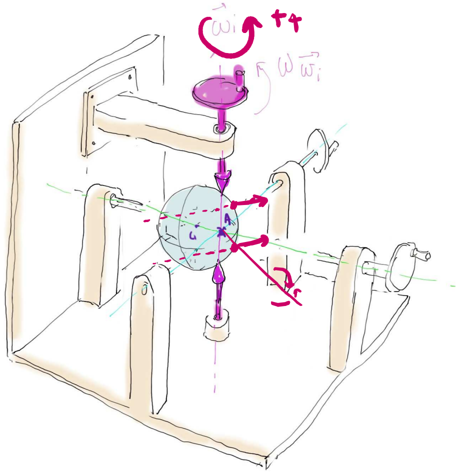


Galère à faire tourner sur l'axe bleu ?

Oui. PLUS QUE quand G était confondu avec A (il y a un beau balourd à cause de l'excentration de G)

Galère à tenir droit sur l'axe bleu ?

Non, compensation 2 à 2 comme avant.



Galère à faire tourner sur l'axe rose ?

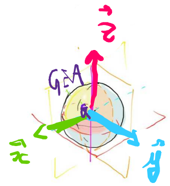
Oui PLUS QUE quand G était confondu avec A (il y a un beau balourd à cause de l'excentration de G).

Et c'est exactement la même config que sur l'axe bleu donc : $J_z = J_y$

Galère à tenir droit sur l'axe rose ?

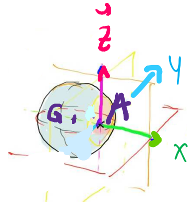
Non, compensation 2 à 2 comme avant.

Donc vu de loin, les matrices $J_{A=G,\beta}$ et $J_{A\neq G,\beta}$ ont la même tête (elles sont diagonales)



Elles ont des termes qui sont les mêmes, mais pas tous : $J < J_{++}$

$$J_{A=G,\beta} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$$



$$J_{A\neq G,\beta} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J_{++} & 0 \\ 0 & 0 & J_{++} \end{bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$$

Et on a pas besoin d'écrire beaucoup d'équations. Juste un seul ptit Huygens et on aura J_{++} à partir de J. Le reste, c'est des bulles !

Dis-moi .. dans ces trucs qui se compensent là, est-ce qu'on pourrait pas y voir des effets de symétrie, ou quelque chose comme ça ?

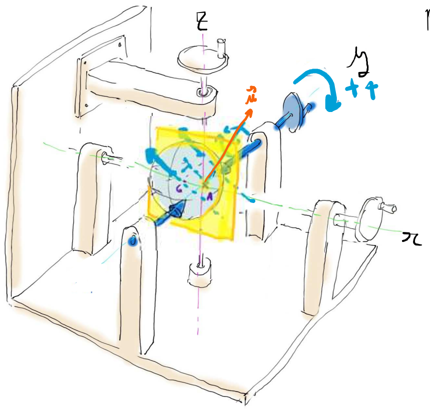
Oui !! Merciiiiiiii !
Je vais pouvoir sortir mon meilleur jeu de mots !
Allez, tourne la page

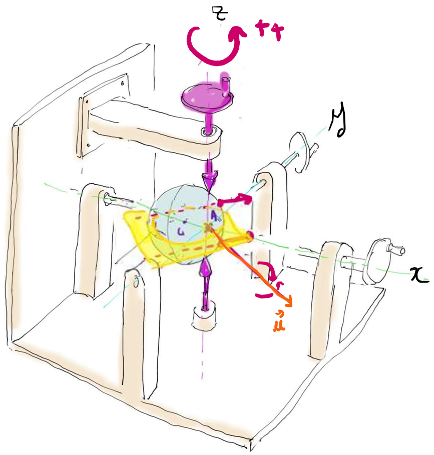
Les plans de symétrie !

Je suis le pan! de symétrie
qui élimine les produits gênants!

Si l'axe rose et bleu ne subissent pas de couples parasites liés à la centrifugation des dm qui constituent al sphère c'est parce qu'il y a un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation et qui passe par A

Ces symétries annulent les effets d'inertie par binôme de dm autour des axes orange





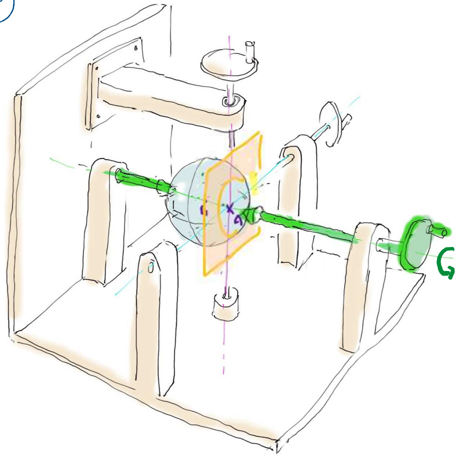
(A, x, z) plan de symétrie
élimine I_{xy} et I_{zy}

$$\begin{bmatrix} J & \cancel{I_{xy}} & \cancel{I_{xz}} \\ I_{yx} & J_{tr} & \cancel{I_{yz}} \\ I_{zx} & \cancel{I_{zy}} & J_{r4} \end{bmatrix}_{A,\mathcal{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

(A, x, y) plan de symétrie
élimine I_{xz} et I_{yz}

Au passage, évidemment les maths donnent le même résultat

$I_{yz} = \int y \cdot z \cdot dm = 0$. Par exemple



Mais pour l'axe vert, ça marche pas du tout cette histoire ! Le plan perpendiculaire à l'axe passant par A n'est pas du tout un plan de symétrie et pourtant on a vu qu'il y avait quand même des compensations.

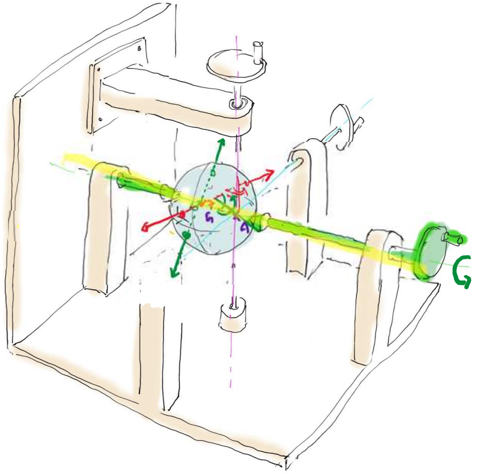
Et j'te rappelle qu'on a pas le choix car physiquement la matrice est symétrique, on l'a vu y'a deux pages.

Oui, merci vert.e

Donc, c'est pas un phénomène de compensation de part et d'autre d'un plan, mais de **part et d'autre de l'axe de rotation**. Donc là, c'est plutôt la **symétrie de révolution** qui rend les choses cool physiquement pour l'axe vert !

Parce que pour chaque dm qui crée un couple parasite il y en a un de l'autre côté **de l'axe** qui crée un couple opposé

Donc si t'as une axisymétrie qui passe par A, les produits d'inertie sur cet axe sont éliminés. C'est de la bombe.



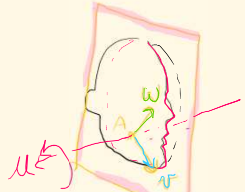
C'est tout pour cet aspect qui permet d'aller très très vite pour proposer une forme de J qui ne sera pas trop longue à calculer (choix du point A, choix de la base B)

1. Un plan de symétrie ⊥ à un axe et passant par A -> produits de la colonne de l'axe : nuls

Par symétrie des produits, on en déduit d'autres termes de la matrice :

Une rotation autour de (A, v) n'induit **pas de moment selon w**

Une rotation autour de (A, w) n'induit **pas de moment selon v**

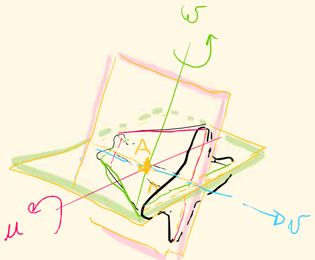


$$J_{A,B} = \begin{bmatrix} I_u & 0 & 0 \\ 0 & I_v & I_{yz} \\ 0 & I_{zy} & I_w \end{bmatrix}_{A,(u,v,w)}$$

2. Deux plans de symétrie ⊥ à 2 axes et passant par A -> tous les produits d'I nuls

Par symétrie des produits, la matrice est alors diagonale:

Une rotation autour de (A, v) n'induit **pas de moment selon w**

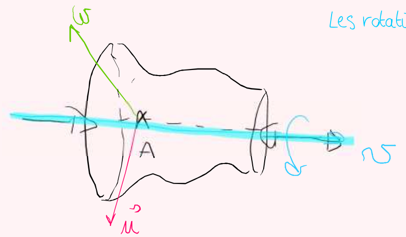


$$J_{A,B} = \begin{bmatrix} I_u & 0 & 0 \\ 0 & I_v & 0 \\ 0 & 0 & I_w \end{bmatrix}_{A,(u,v,w)}$$

Une rotation autour de (A, v) n'induit **pas de moment selon u**

3. **Axisymétrie** selon un des axes de la base passant par A > tous les produits d'I nuls (c'est aussi une conséquence directe de '2' mais c'est vachement plus rapide à repérer)

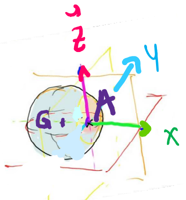
Les rotations autour de (A, u) ou (A, w) n'entraînent pas de couples parasites.



$$J_{A,B} = \begin{bmatrix} I_u & 0 & 0 \\ 0 & I_v & 0 \\ 0 & 0 & I_w \end{bmatrix}_{A,(u,v,w)}$$

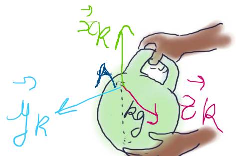
Il nous reste une dernière question à laquelle on n'a pas répondu (à la page 19) :
Quand le point A n'est plus G, et qu'en plus on change de base, est-ce qu'on va garder la forme de la matrice d'inertie ?

Là G restait sur l'axe (A, x)

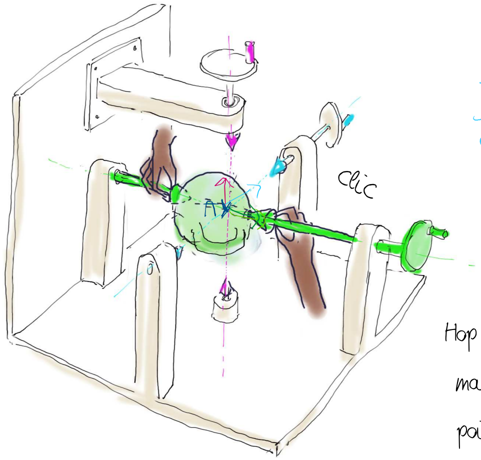


Allez essayons. Et on change un peu d'objet ?
Au lieu d'un poids, prenons un kettlebell *

*Ce poids littéralement en forme de bouilloire dodue, kettle en anglais... psshhhhhh !!! si on oublie la poignée, ça reste sphérique

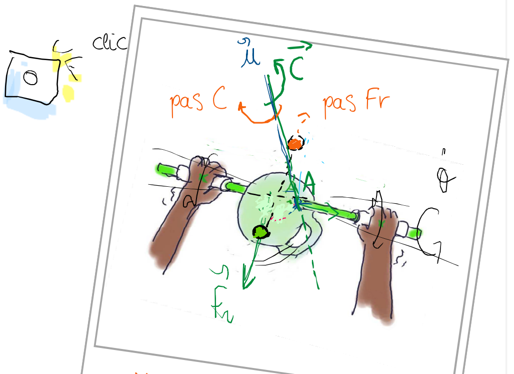


Et là cette fois on choisit une base totalement random, G ne passe par aucun des axes du repère (A, x, y, z)



Allons voir si la matrice reste diagonale.
Hop j'aligne le nouveau repère sur les pointes de la machines, le point A à l'intersection des axes des pointes. Et je lance en rotation le premier axe.

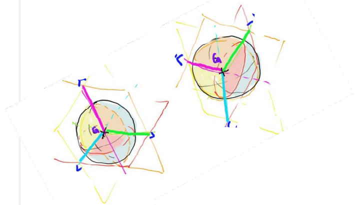
Avec ce montage il n'y a malheureusement plus compensation de tous les effets centrifuges.
Par exemple sur cette photo, la dm verte est expulsée et les actions centrifuges Fr créent un couple C autour de (A, u). MAIS. Il n'y a pas dm orange en face. Il n'y a donc pas Fr orange et pas non plus C orange



Manque dm pour compenser !

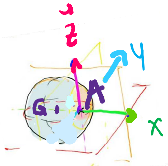
$$J_{A,\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \cdot & \neq 0 & \neq 0 \\ \neq 0 & \cdot & \cdot \\ \neq 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{A,\mathcal{B}_2}$$

Donc les bras vont galérer à tenir tout ça parce que ça ne tourne pas droit. Les produits d'inertie sur la colonne x ne sont plus nuls ! Snif.



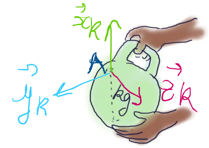
$$J_{A=G,\mathcal{B}^c} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$$

En G avec la géométrie de la sphère, la matrice était indépendante de la base



$$J_{A\neq G,\mathcal{B}^c} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$$

En changeant de point mais en gardant une base sympa du point de vue des symétries, la matrice était encore diagonale



$$J_{A,\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \cdot & \neq 0 & \neq 0 \\ \neq 0 & \cdot & \cdot \\ \neq 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{A,\mathcal{B}_2}$$

Mais si on ne fait ni **attention au point** ni **attention à la base** on peut se retrouver avec des termes hors diagonaux.

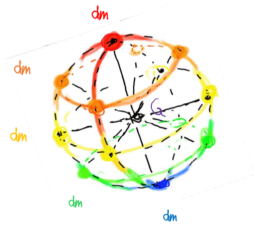
Pourtant on parle bien de **la même** sphère.
On est juste en train d'observer les effets de sa rotation pour des essais différents. C'est tout.

Bref, donc spécifier A et $\mathcal{B}$ quand on écrit J, c'est aussi important que de connaitre la géométrie de la pièce.

Note bien qu'on est en train d'écrire la même chose dans des bases différentes, en maths c'est une histoire de double produit de matrices de passage **

$$\underbrace{J_{A,\mathcal{B}_2}}_{\text{pas forcément diago}} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}}\ \underbrace{J_{A,\mathcal{B}}}_{\text{diago}}\ P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}$$

Le centre de masse

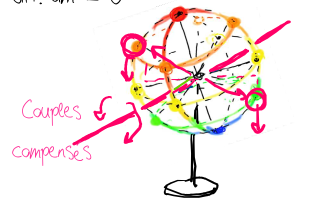


Pour n'importe quel solide il y a point autour duquel les masses s'équilibrent (il y en a autant devant que derrière, à droite qu'à gauche, dessus que dessous)

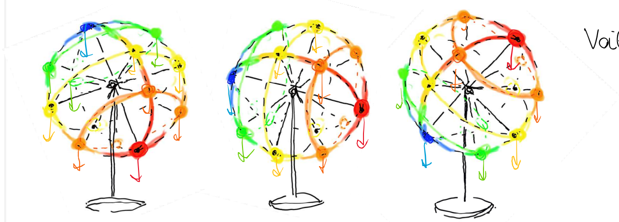
Quelle que soit l'orientation de l'objet, si tu le places sur une pointe pile là, il ne bougera pas.

«là», c'est G.

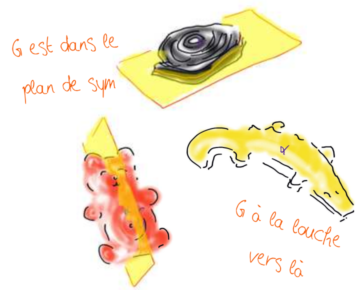
$$\int_V \vec{GM}.\,dm = \vec{0}$$



Comme c'est pas pratique de poser en équilibre un objet **plein** sur une pointe, j'ai fais une sphère un peu évidée et j'ai mis des couleurs pour qu'on voit que ça marche dans tous les sens ^^



Voilà, quel que soit la façon de poser la sphère sur G, c'est stable !



Pour n'importe quel solide, de n'importe quelle forme (sphère, nounours ou roudoudou), tu pourras imaginer vers où est ce point juste en imaginant la répartition de masse autour.

Et si on regarde les plans de symétrie qui départagent la masse de part et d'autres, ça aide car comme il y a autant de masse à droite qu'à gauche, G est forcément quelque part dans ce plan.

C'est tout pour G. OK... Ya un rapport avec J ?

Ou bien c'était juste pour dessiner des bonbons.

La base principale d'inertie

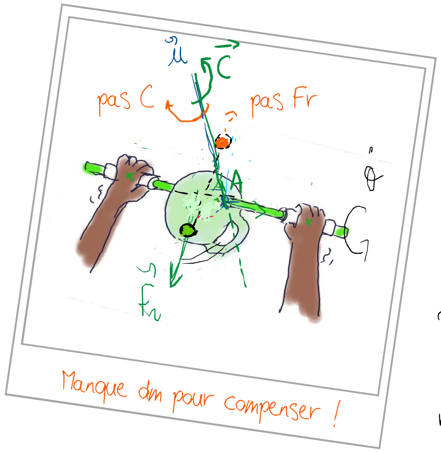
Mais oui

Ça a à voir !

De la même façon que pour n'importe quel objet on trouve un point où les actions statiques du poids s'équilibrent, …

… on peut aussi systématiquement trouver **un systèmes d'axes pour lequel les effets de centrifugation s'équilibrent.**

Il faut donc trouver les axes qui ne subiront pas de moments parasite sous l'effet de la rotation de l'objet.



Manque dm pour compenser !

Ça veut dire que pour n'importe quel objet en n'importe quel point, on peut diagonaliser la matrice quoi.

Par exemple, le kettlebell qui tournait pas droit du tout autour des axes d'une base générique, en réorientant ses axes, et notamment en alignant G et A sur l'un d'eux, c'était gagné.

Et ça, ça marche tout le temps, et avec un peu de compréhension physique (comme pour trouver G) on peut trouver où sont ces axes un peu 'magiques' !

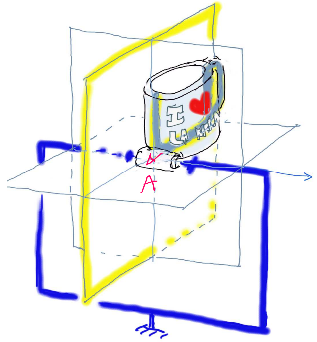
Tiens prête moi ton mug on fait une démo

Ok mais attention j'y tiens hein tu me le pette pas

Tkt

Voilà, pour l'exemple: on va trouver la base 'principale' de la tasse pour sa matrice d'inertie en A.

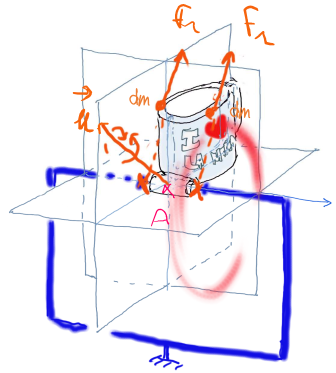
Comme pour la recherche de G, ce serait un peu dommage de ne pas profiter des répartitions 'évidentes' de masses, avec les plans de symétrie qui passent par A.



Parce que comme on l'a vu avant, ça veut dire que…

Tous les dm centrifugés créent des couples qui se compensent 2 à 2

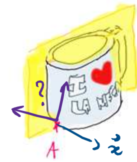
(autour des axes u)



Le premier axe de la **base principal** est trouvé : x bleu.

Les deux autres axes sont donc dans le plan de symétrie jaune, mais que prendre ?

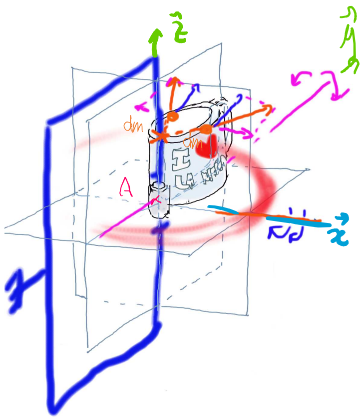
Les **axes** verts, c'est ce qui serait le plus simple par rapport à un système d'axe un peu classique pour un cylindre (un axe parallèle à l'axe du cylindre de la tasse).



Pour les **axes** roses ou violets, c'est un peu penché, pas évident, mais… on va voir !

Bon, on essaie avec l'axe vertical

qui passe par A



Chaque petit dm centrifugé va tirer avec Fr sur l'axe. Et en décomposant, les composantes Fr rose vont créer des couples qui se compensent deux à deux. ⟶ $I_{xz} = 0$

Tandis que les composantes Fr bleues vont au contraire toutes créer un couple bleu dans le même sens… ⟶ $I_{yz} \neq 0$

Et bah c'est raté quoi !

L'axe z ne peut pas être un axe de la base principale de J_A.

Par symétrie de la matrice, il est évident que l'axe y ne marche pas non plus, mais on va quand même s'en persuader physiquement

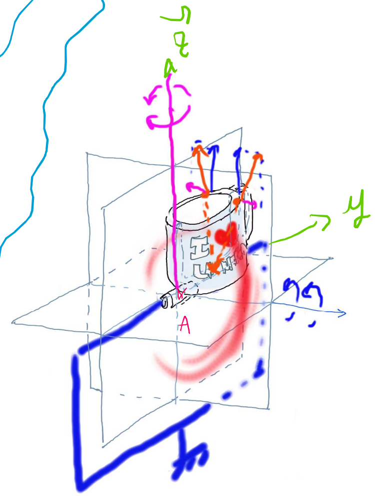
:

:)

$$J_{A(x,y,z)} = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 \\ 0 & - & I_{yz} \\ 0 & \neq 0 & - \end{bmatrix}_{A,(x,y,z)}$$

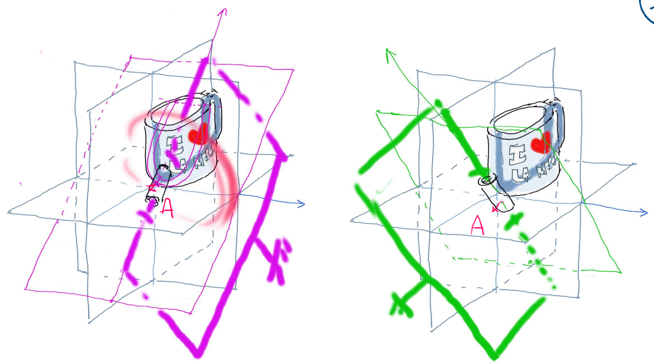
Chaque petit dm centrifugé va tirer avec Fr sur l'axe. Et en décomposant, les composantes Fr rose vont créer des couples qui se compensent deux à deux. ⟶ $I_{xy} = 0$

Tandis que les composantes Fr bleues vont au contraire toutes créer un couple bleu dans le même sens… ⟶ $I_{zy} \neq 0$

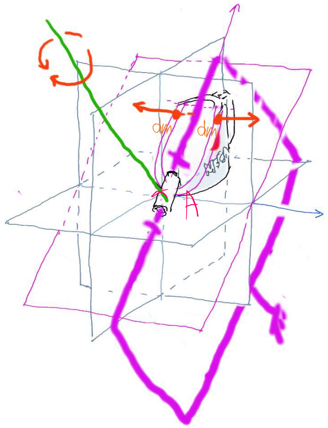


Anh trop fort

Ouais mais bon c'est pas le tout, mais maintenant il va falloir dessiner des axes penchés !



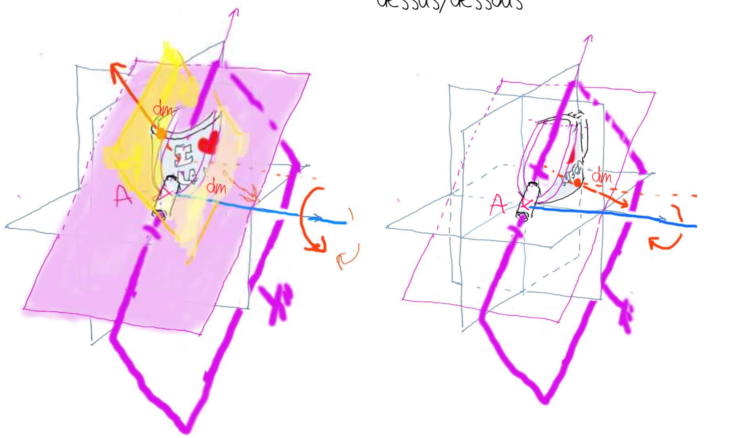
Et imaginer un niveau de penchage qui marche pour laisser tranquilles les axes de rotation.



Première étape : si on coupe la tasse et qu'on je regarde les dm dans le plan de coupe : les couples créés par les efforts Fr se compensent.

Youpi ! C'est un bon début !

Et puis dans le plan de symétrie, les dm qui sont au dessus du plan rose créent un couple qui peut etre compensé par les dm en dessous du plan rose. Si on choisit bien la frontière 'dessus/dessous'

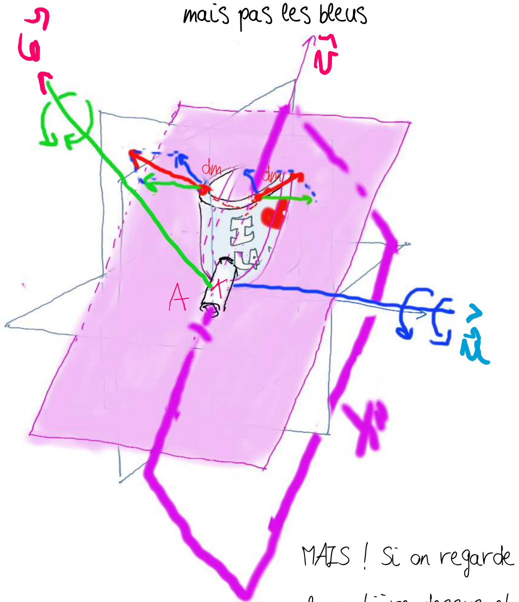


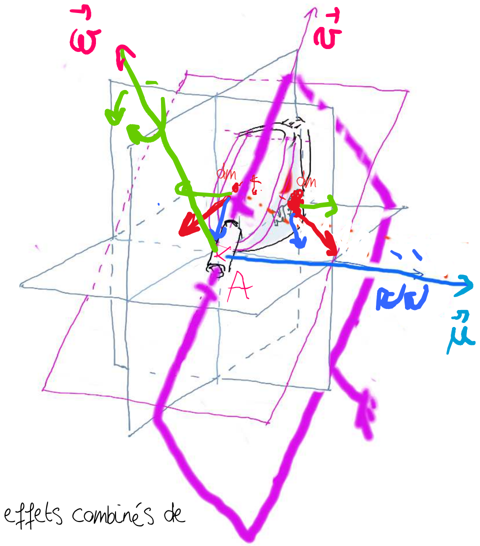
Il reste à regarder les dm qui ne sont ni dans le plan rose, ni dans le plan jaune et si ça marche, on aura trouvé qualitativement le deuxième axe de la base principale de J_A

Les petits dm sont centrifugés avec une décomposition de Fr verte et bleue.

Au dessus, les verts se compensent (la magie du plan de symétrie) mais pas les bleus

Au dessous, les verts se compensent (la magie du plan de symétrie) mais pas les bleus





MAIS ! Si on regarde les effets combinés de la matière dessus et dessous le plan rose...

les couples parasites bleus peuvent se compenser si on choisit bien le plan rose !

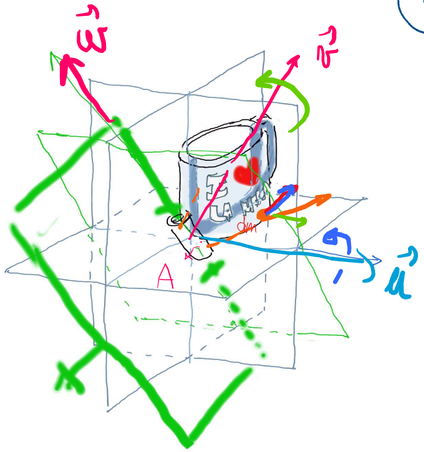
Voilà, on est trop contents car on a un deuxième axe v qui ne va pas souffrir des moments parasites.

Et comme la matrice est symétrique...

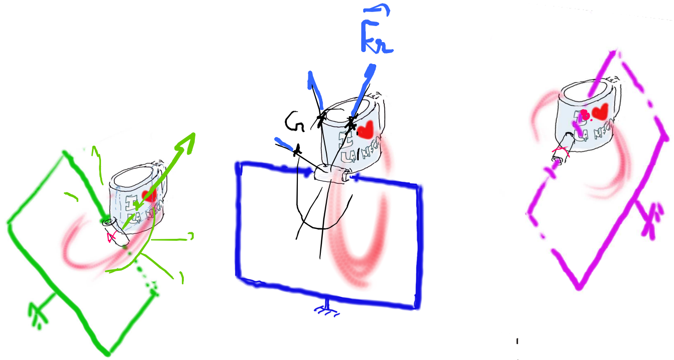
Bah c'est fini, on sait tout : (u, v, w) est la base principale de la matrice d'inertie de la tasse en A!

$$J_{A,B} = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}_{A,B(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}$$

Et tu peux t'amuser à refaire la même chose sur le troisième axe en décomposant à nouveau chaque Fr en bleu et vert ;-)



Nb : G n'est pas forcément sur l'axe de rotation, alors, même si on a éliminé les couples parasites normaux à cet axe, cela ne veut pas dire qu'on a viré les efforts tournants dans la liaison hein !!



Mais si G est sur l'axe, y a plus d'effort tournant non plus!

Bon, là y en a p'tet un peu, mais globalement, G doit pas etre très loin.

J'l'ai pas cassée !

Voilà. Tout ça pour dire que la base principale de la matrice d'inertie, c'est pas qu'une histoire de diagonalisation de matrice, C'est surtout la répartition des efforts centrifuges qui annulent les moments parasites !

Résumé : masse

m : image de l'amplitude de **l'effort nécessaire pour accélérer** linéairement

Résumé : centre de masse G

Lieu des équilibres statiques des actions du poids

Résumé : moment d'inertie

I_v : image de l'amplitude du **couple nécessaire pour accélérer** angulairement autour de l'axe (A, v)

$I_v = m.R_v^2$ $\quad$ R_v excentration de m par rapport à l'axe (A, v).

Résumé : produit d'inertie.

I_{uv} : image de l'amplitude du **couple parasite autour de w**, créé par la composante de force centrifuge sur u sous l'effet d'une rotation autour de v

$$J_{A,B(u,v,w)} = \begin{bmatrix} - & I_{uv} & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}_{A,B} \qquad I_{uv} = I_{vu}$$

$I_{uv} = m.R_u.d_v$ $\quad$ R_u excentration de F_{ru} par rapport à l'ace (A, v).
d_v déport par rapport à A sur l'axe v.

Axysymétrie -> matrice diagonale si elle est exprimée en un point A de l'axe.

Plan de symétrie passant par A -> produits d'inertie nuls pour une rotation autour de l'axe normal à ce plan.

Résumé : base principale d'inertie

Base telle que les rotations autour de ces axes n'entrainement pas de moments parasites (matrice diagonale)

Lexique

PFD

Manchon: pièce cylindrique pour assembler, isoler, protéger -> c'est comme les fourreaux pour pas avoir froid aux mainte. Manche - manchon ... tu vois le lien ?

Palier, roulement

Pointes, tour, axe

...

Aujourd'hui, on parle de...
L'expulsion des masses vers l'extérieur quand on tourne

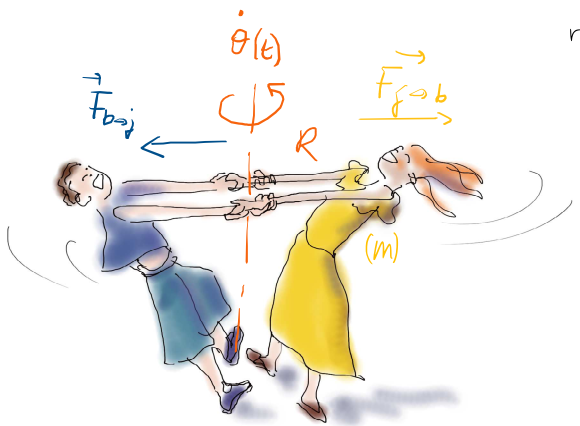
La force centrifuge

Accélération centripète, page 2

Action mécanique ressentie, page

Equivalent dyn/statique

Tu as déjà essayé de retenir quelqu'un en tournant ? Et t'avais vraiment l'impression qu'on tirait sur tes bras vers l'extérieur ?



Disons que la personne que tu retiens c'est une masse m qui tourne autour d'un axe à une distance R.

$$\vec{OG} = r\vec{e_r}$$
$$\vec{V}(G, M/0) = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$
$$\vec{a}(G, M/0) = r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$$

L'accélération radiale est centripète (dirigée vers l'intérieur)

On peut écrire le PFD en résultante à la masse (m) :

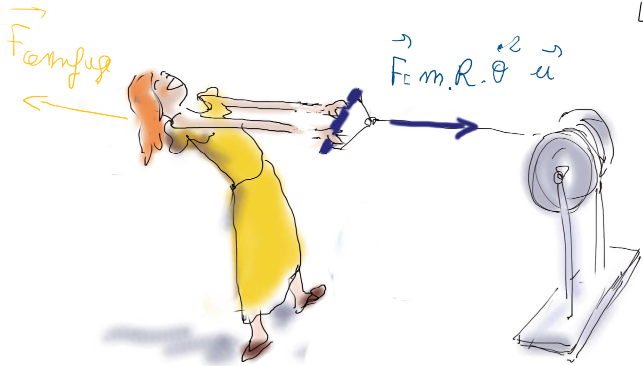
$$F_{bleu \to jaune} = m \cdot a_r$$

Donc Bleu doit tirer pour assurer l'équilibre de la masse. C'est exactement comme si Jaune lui tirait dessus avec une action mécanique vers l'extérieur. Voilà. La force centrifuge c'est ça. Elle est proportionnelle à m, à R et à $\dot{\theta}^2$.

Si on réécrit l'équation de tout à l'heure, on peut écrire un PFS avec une action mécanique fictive qui représente les effets d'inertie :

$$F_{bleu \to jaune} - m \cdot a_r = 0 \quad \text{soit} \quad F_{bleu \to jaune} + F_{centrifuge} = 0$$

Ce qui est marrant dans cette histoire, c'est qu'on peut donc simuler des effets mécaniques de rotation en se contentant d'appliquer à l'arrêt des actions mécaniques qui ont la bonne valeur



Là par exemple si je fabrique un treuil motorisé dont je contrôle la charge, je peux donner l'impression à jaune qu'elle tourne comme tout à l'heure.

En tout cas du point de vue de ses bras parce qu'elle n'a plus le vent dans les cheveux puisqu'elle ne tourne plus pour de vrai.

C'est moins fun mais c'est très pratique ! Ce principe d'équivalence statique d'un comportement dynamique est très utilisé sur les bancs d'essai où on ne peut pas tester dans des conditions réelles ce qui se passe (par exemple, la résistance à la centrifugation des hélices d'un rotor)

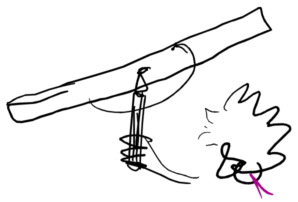
Il y a plein d'autres exemples : des plus quotidiens tels l'essoreuse à salade ou la fronde à des applications industrielles pour extraire du jus de fruit, séparer des plaquettes de globules, ou encore se faire secouer dans des manèges !

Et puis tous les disques qui tournent risquant d'éclater, on fait aussi des modèles mmc de tout ça ! ***

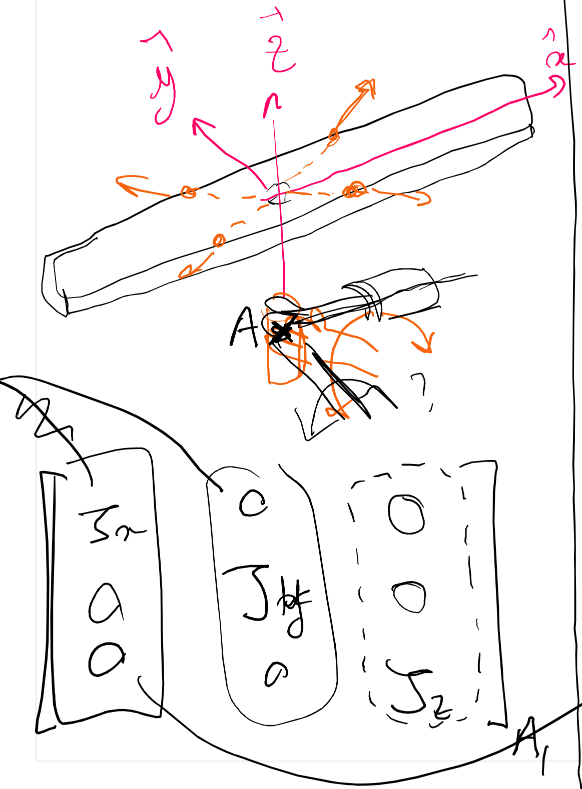
44

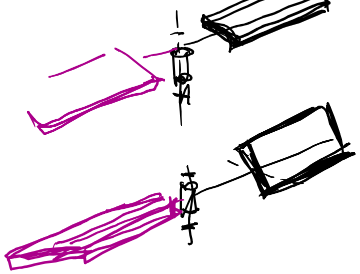
On se entrainement fait un exemple pour voir si on a bien compris?

Une histoire d'hélice

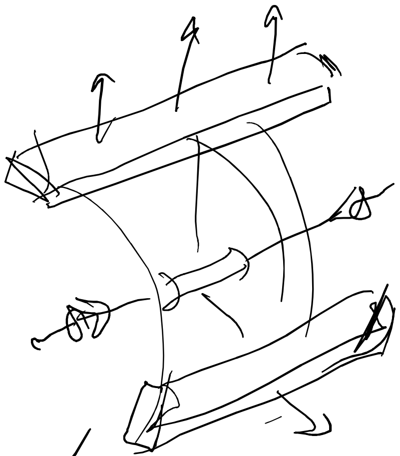


Celle que t'as fait à l'école avec ton double décimètre sur un stylo bic





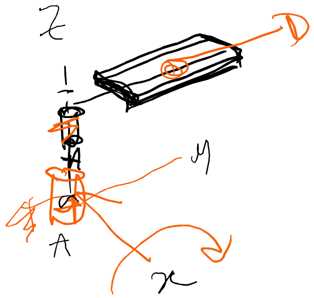
Celles d'un hélico, incliné ou pas

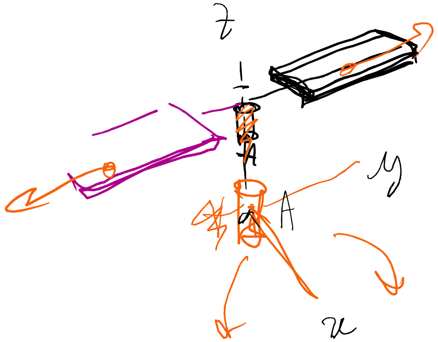


Mais z c'est la seule utile quoi ☺

Machine de muscu avec les volants

Maintenant on se doute qu'il y a une question d'inertie là derrière pour se muscler !





$$\begin{bmatrix} & 0 \\ & J_{yz} \\ & J_z \end{bmatrix}_A \quad M_{\vec{x}}$$

Plus galère à mettre en rotation que si c'était centré

$$\begin{bmatrix} & 0 \\ & 0 \\ & 2J_z \end{bmatrix}_A$$

2 fois plus consommateur à mettre en rotation MAIS les effets centrifuges se compensent