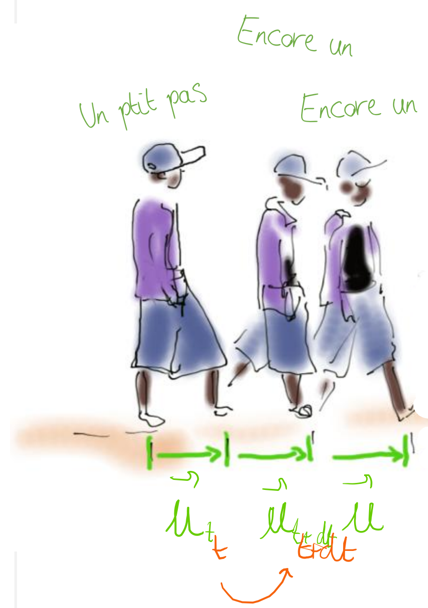
Aujourd'hui, on parle de...

Les trucs qui changent dans le temps

Dérivation vectorielle

Quand le 'truc' c'est un vecteur qui tourne

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{u}$$



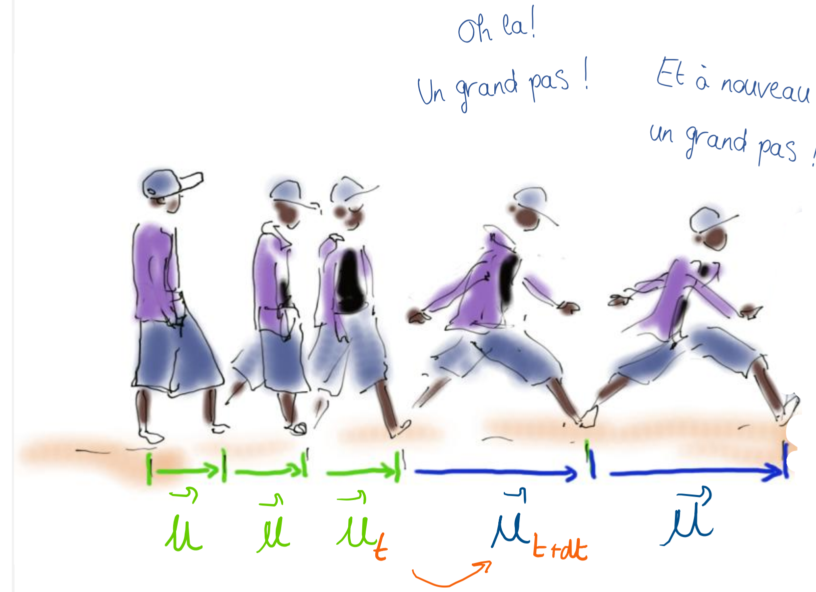
Même si ils ne sont pas au même endroit, ce sont quand même les mêmes pas (meme direction, même amplitude).

Comme on se fiche de 'où on fait le pas', on peut les comparer au même point de départ pour voir si ils ont grandi ou tourné. $\vec{u}$ $\vec{u}$

$d\vec{u} = \vec{u}_{t+dt} - \vec{u}_t = \vec{0}$ A pas grandi A pas tourné

Ici la variation des ptits pas dans le temps est donc nulle. $\boxed{\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{0}}$

Note bien qu'on regarde la variation dans le déplacement du mec par rapport au sol !



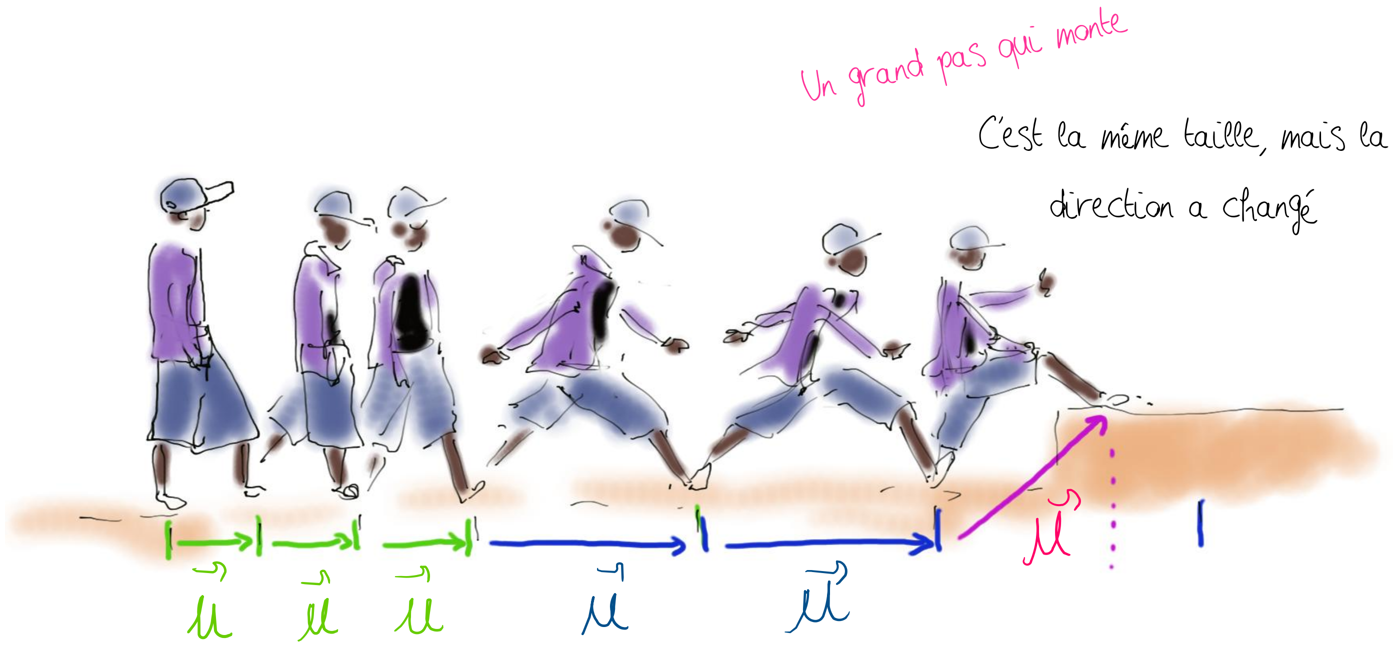
On a changé d'allure! $\vec{u}_{t+dt}$ $\vec{u}_t$ $d\vec{u}$

$d\vec{u} = \vec{u}_{t+dt} - \vec{u}_t$

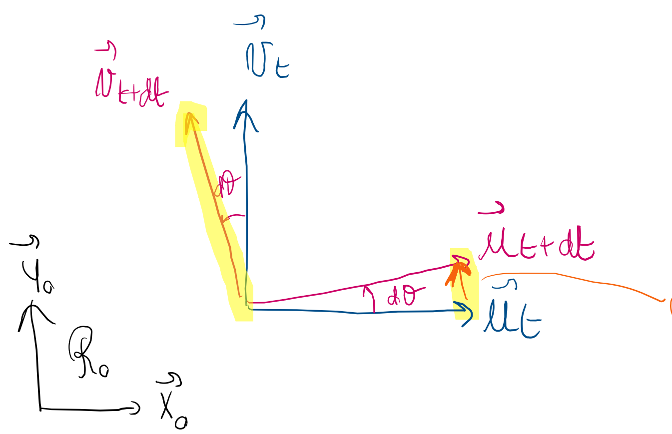
A grandi

A pas tourné

Ici la variation des ptits pas dans le temps n'est plus nulle. $\boxed{\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} \neq 0}$



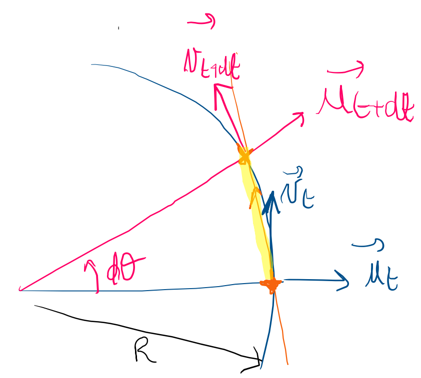
À nouveau, ce qui nous intéresse c'est « comment le pas a changé » , sous entendu t'as compris : par rapport au sol R0). On peut donc dessiner le avant/après rotation au même point.



$\|d\vec{u}\| = \|\vec{u}\|\, d\theta = R\,d\theta$

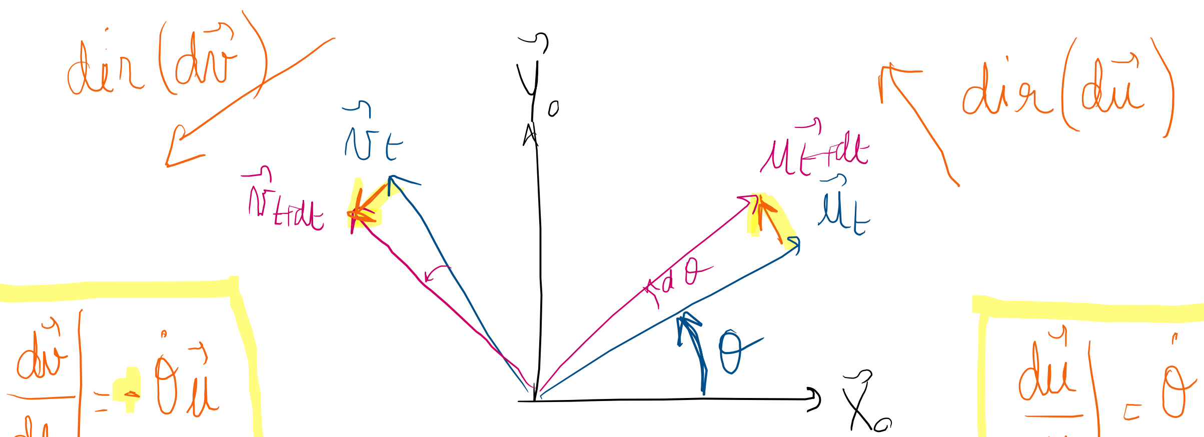
$d\vec{u} = \vec{u}_{t+dt} - \vec{u}_t = R\,d\theta\,\vec{v}_{t+dt}$

La direction de **du** est en réalité entre v(t) et v(t+dt) mais comme les déplacements sont petits (la rotation dθ est petite), on pourra se contenter de **v** tout court car v(t+dt) ~ v(t)



$$\boxed{\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = R\dot{\theta}\,\vec{v}}$$

C'est cool ! Juste avec le dessin on peut établir la dérivée du vecteur u dans son mouvement par rapport à R0, **sans se tromper de signe, sans se tromper de base, et en deux temps trois mouvements**



$$\boxed{\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{R_0} = -\dot{\theta}\,\vec{u}}$$

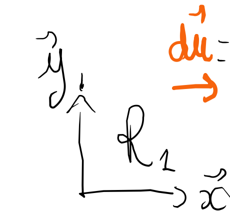
$$\boxed{\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\theta}\,\vec{v}}$$

La plupart du temps, le vecteur u dont on regarde la variation n'est pas aligné avec la base de R0, et si on regarde les dérivées temporelles de vecteurs normés (R=1) et bien cette simple mini figure permet de traiter un tas de cas sans avoir recours à la formule de dérivation vectorielle.

OK, mais il y a des cas plus complexes où on en a quand même besoin de cette formule - là

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{u}$$

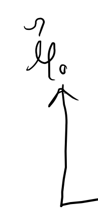
Pour pouvoir la reconstituer dans ambiguïté, on va regarder **des cas basiques qui éliminent un terme ou l'autre**, comme ça on aura aucun doute sur ce qu'il faut écrire.



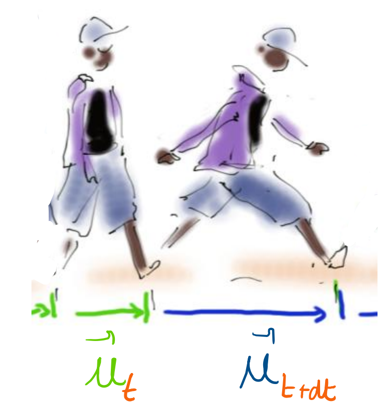
$d\vec{u} = du\,\vec{x}_1$

Tout d'abord, si il n'y a pas de rotation entre deux repères (terme bleu nul) : **du** a la même expression car les bases des repères sont les mêmes (x0, y0) = (x1, y1)

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_1} \quad \text{si } \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0}$$



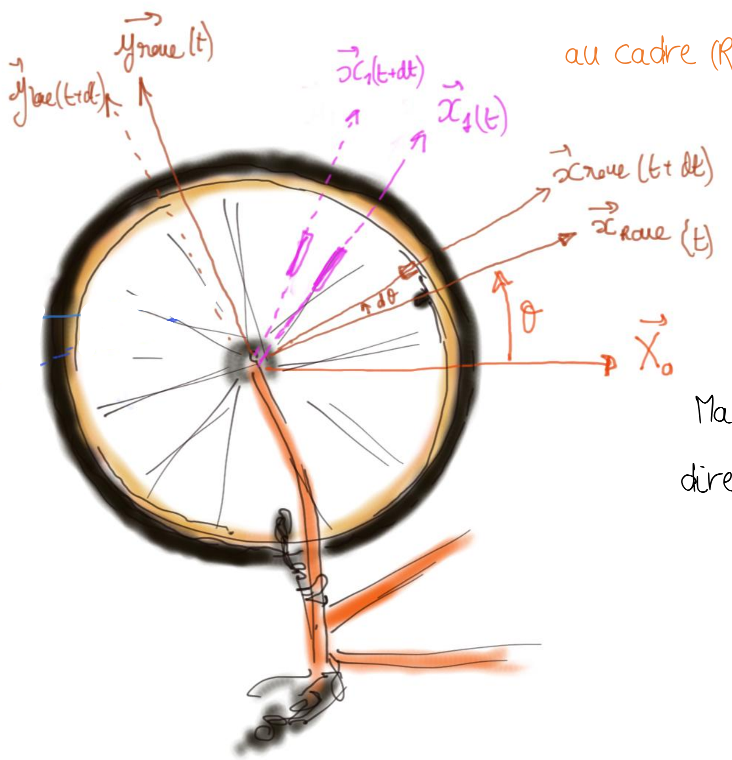
$d\vec{u} = du\,\vec{x}_0$



La suite consiste à traiter un cas où $du/dt_{R1} = 0$ et une rotation non nulle et non // à u

On va dans un atelier vélo.

La roue tourne par rapport au cadre ($R_0(X_0, Y_0)$)



Si on prend un repère attaché à la roue (genre Xroue passe par la valve)

Le réfléchisseur rose (x_1) ne bouge pas par rapport à la roue.

Mais il bouge par rapport à R_0, et ça, on connait direct le résultat juste en regardant le dessin ☺

$$\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{R_{roue}} = \vec{0} \; ! \qquad \left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\theta}\,\vec{y}_1$$

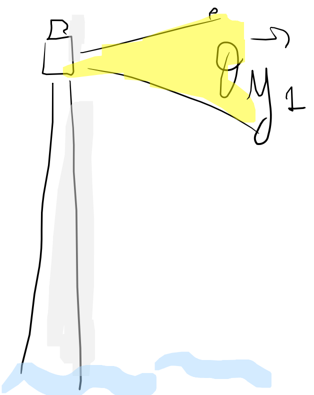
Comme on sait ça, on sait qu'il faut dans l'expression du second membre une vitesse de rotation. On sait aussi que le résultat doit être porté par y_1. Cette expression qu'on sait établir sans problème, c'est le phare qui nous guide !

$$\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{R_0} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{R_{roue}}}_{\text{zéro !}} + \vec{\Omega}_{R_{roue}/R_0} \wedge \vec{x}_1$$

Il faut du $\dot{\theta}$

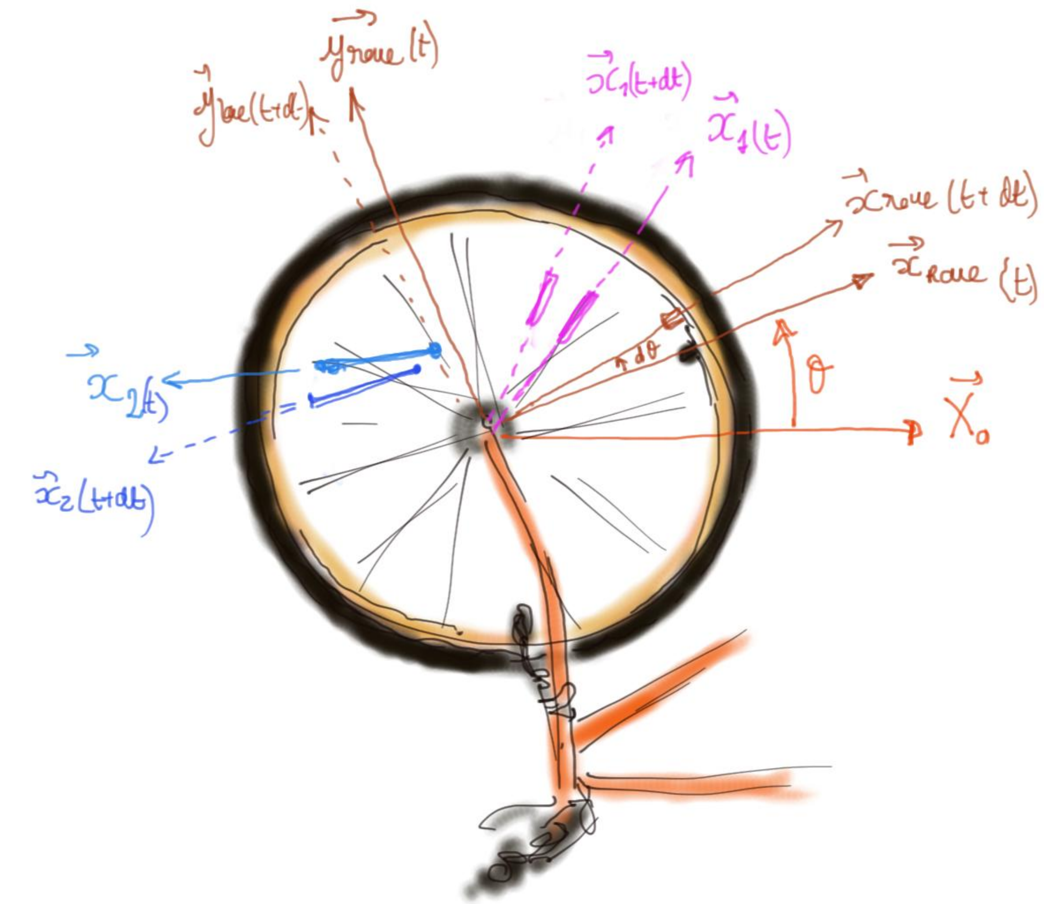
Et il faut retrouver le bon vecteur : y_1

$$\dot{\theta}\,\vec{z} \wedge \vec{x}_1 \rightarrow \dot{\theta}\,\vec{y}_1$$

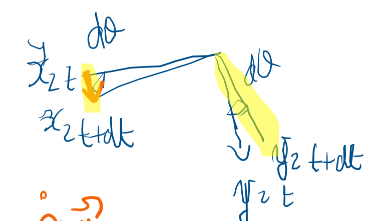


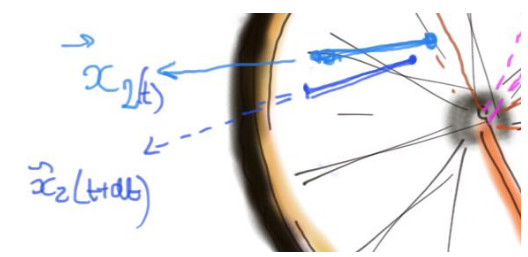
Goood la formule est écrite dans le bon sens, youpi !

Etre capable de retrouver rapidos et sans erreur cette formule, c'est cool quand les vecteurs tournants ne sont pas directement dessinés « confortablement ». Par exemple x_2 qui n'est ni radial ni ortho radial par rapport à la roue.



On pourrait faire ce dessin





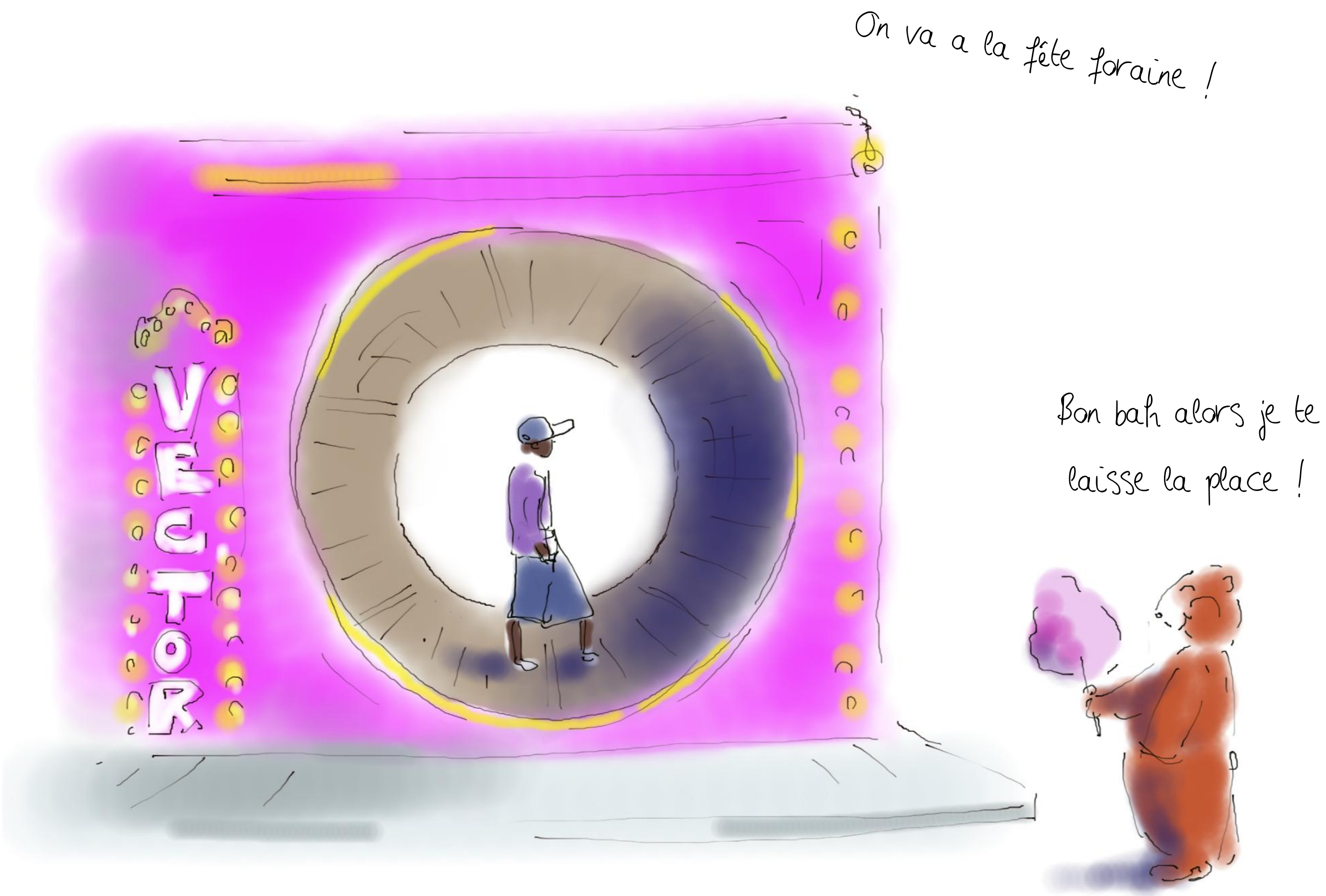
Mais il peut-être un peu pénible car mal orienté.

$$\rightarrow \left.\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\theta}\,\vec{y}_2$$

Mais on peut aussi écrire la formule qu'on vient de retrouver terme par terme

$$\left.\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right|_{R_0} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right|_{R_{roue}}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{roue/R_0} \wedge \vec{x}_2}_{\dot{\theta}\,\vec{z} \wedge \vec{x}_2 = \dot{\theta}\,\vec{y}_2 \;\checkmark}$$

Et allez, je ne résiste pas à écrire la même chose « à l'envers »



Si on regarde la variation du pas par rapport à la marmotte, il n'y a pas de variation.

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{0}$$

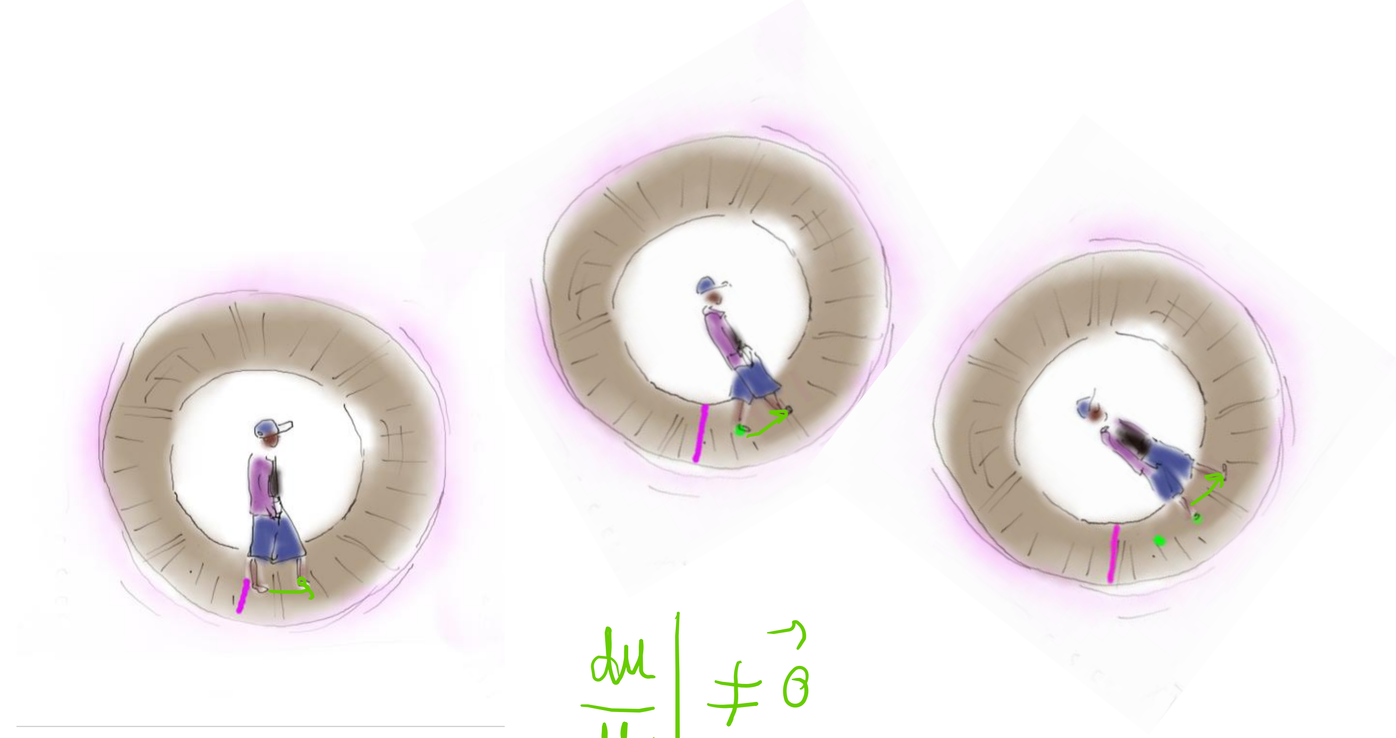
Nb : ici la roue tourne dans le sens horaire donc vitesse de rotation négative

$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\,\vec{z}$

$\dot{\theta} < 0$

Mais si on tourne la tête en même temps que le tonneau, le pas cette fois n'est plus le même.

Certse son amplitude n'a pas varié, mais sa direction oui : il monte . Et oui.

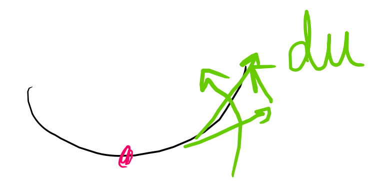


$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{R_1} \neq \vec{0}$$

Voilou. ptite vérife rapide :

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_1} + \underbrace{\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{u}}_{\dot{\theta}\,\vec{v}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_1} = -\dot{\theta}\,\vec{v} \quad , \quad \dot{\theta} < 0$$



ok direction

ok sens