Домашнее задание на 22.05 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Утверждение, что F - поле эквивалетно тому, что многочлен

$$f(z) = z^3 - z^2 + 1$$

неприводим. При этом:

$$f(z) = z^3 - z^2 + 1 \text{ неприводим} \quad \Leftrightarrow \quad \text{у } f \text{ нет корней в } \mathbb{Q}$$

Но, так как

$$f(\pm 1) \neq 0 \implies \text{у } f \text{ — нет корней в } Q \implies f \text{ — неприводим}$$

Следовательно, F — поле

Теперь нам известно, что:

$$\alpha = z + (f(z))$$

Значит, мы можем представить:

$$\frac{2\alpha^2 - 8\alpha + 9}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

Осталось найти коэфиценты a, b, c:

$$2\alpha^2 - 8\alpha + 9 = (a\alpha^2 + b\alpha + c)(\alpha^2 - 3\alpha + 1) =$$

$$= a\alpha^4 - 3a\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha^3 - 3b\alpha^2 + b\alpha + c\alpha^2 - 3c\alpha + c$$

но, так как $\alpha^3 - \alpha^2 + 1 = 0 \implies \alpha^3 = \alpha^2 - 1$, то

$$a\alpha^4 - 3a\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha^3 - 3b\alpha^2 + b\alpha + c\alpha^2 - 3c\alpha + c =$$

$$= a\alpha(\alpha^2 - 1) - 3a\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha^3 - 3b\alpha^2 + b\alpha + c\alpha^2 - 3c\alpha + c$$

$$= (-a - 2b + c)\,\alpha^2 \;+\; (-a + b - 3c)\,\alpha \;+\; (2a - b + c)$$

Составим систему:

$$\begin{cases} -a - 2b + c = 2, \\ -a + b - 3c = -8, \\ 2a - b + c = 9, \end{cases} \implies a = 3, \quad b = -2, \quad c = 1$$

Следовательно:

$$\frac{2\alpha^2 - 8\alpha + 9}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = 3\alpha^2 - 2\alpha + 1$$

№2 По условию:

$$g = x_2^4 x_3^5 + 2x_1 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2^2, \quad f = x_2^4 x_3 - 2x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2$$

Так как

$$LT(g) = x_1^2 x_2^2$$

то

$$g \to g - x_1 f = x_2^4 x_3^5 + 2x_1 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2^2 - (x_1 x_2^4 x_3 - 2x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2) =$$

$$= x_2^4 x_3^5 + x_1 x_2^4 x_3 + 2x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2 x_3^2 = g_1$$