Домашнее задание на 03.06 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Пусть

$$g_1 = x^2y + 2z^2, \quad g_2 = y^2 - yz$$

$$\mathrm{L}(g_1) = x^2y, \quad \mathrm{L}(g_2) = y^2, \quad \mathrm{lcm}(x^2y, y^2) = x^2y^2,$$

$$S(g_1, g_2) = \frac{x^2y^2}{x^2y}g_1 - \frac{x^2y^2}{y^2}g_2 = yg_1 - x^2g_2 = y(x^2y + 2z^2) - x^2(y^2 - yz) =$$

$$x^2y^2 + 2yz^2 - x^2y^2 + x^2yz = x^2yz + 2yz^2$$

так как:

$$z \cdot g_1 = z(x^2y + 2z^2) = x^2yz + 2z^3$$

вычтем:

$$(x^2yz + 2yz^2) - (x^2yz + 2z^3) = 2yz^2 - 2z^3$$

Добавляем $g_3 = yz^2 - z^3$

Вычисляем $S(g_1, g_3)$:

$$\mathrm{L}(g_1) = x^2y, \quad \mathrm{L}(g_3) = yz^2, \quad \mathrm{lcm}(x^2y, yz^2) = x^2yz^2,$$

$$S(g_1, g_3) = \frac{x^2yz^2}{x^2y}g_1 - \frac{x^2yz^2}{yz^2}g_3$$

$$= z^2g_1 - x^2g_3 = z^2(x^2y + 2z^2) - x^2(yz^2 - z^3) = x^2yz^2 + 2z^4 - x^2yz^2 + x^2z^3 = x^2z^3 + 2z^4$$

старший моном x^2z^3 не делится ни на один старший моном базиса, поэтому добавляем $g_4 = x^2z^3 + 2z^4$

Теперь базис: $\{g_1, g_2, g_3, g_4\} = \{x^2y + 2z^2, y^2 - yz, yz^2 - z^3, x^2z^3 + 2z^4\}$.

Проверяем остальные S-многочлены:

- $S(g_2, g_3) = 0$,

- $S(g_2, g_4)$ редуцируется к 0,
- $S(g_3, g_4)$ редуцируется к 0,
- $S(g_1, g_4)$ редуцируется к 0.

Все S-многочлены редуцируются к нулю, поэтому базис Грёбнера идеала I:

$$G = \{x^2y + 2z^2, y^2 - yz, yz^2 - z^3, x^2z^3 + 2z^4\}.$$

Теперь редуцируем $f = x^3y^2z + bxyz^3$ на G:

$$x^3z \cdot g_2 = x^3z(y^2 - yz) = x^3y^2z - x^3yz^2,$$

$$f - x^3zg_2 = (x^3y^2z + bxyz^3) - (x^3y^2z - x^3yz^2) = bxyz^3 + x^3yz^2.$$

Остаток $r_1 = x^3yz^2 + bxyz^3$.

$$xz^2 \cdot g_1 = xz^2(x^2y + 2z^2) = x^3yz^2 + 2xz^4,$$

$$r_1 - xz^2g_1 = (x^3yz^2 + bxyz^3) - (x^3yz^2 + 2xz^4) = bxyz^3 - 2xz^4$$

Остаток $r_2 = bxyz^3 - 2xz^4$.

$$bxz \cdot g_3 = bxz(yz^2 - z^3) = bxyz^3 - bxz^4,$$

$$r_2 - bxzg_3 = (bxyz^3 - 2xz^4) - (bxyz^3 - bxz^4) = (b - 2)xz^4$$

Остаток $r_3 = (b - 2)xz^4$.

Старший моном $\mathrm{L}(r_3) = xz^4$ не делится ни на один старший моном базиса G, так как:

- $\mathrm{L}(g_1) = x^2y$ не делит (степень x выше)
- $\mathrm{L}(g_2) = y^2$ не делит (отсутствует y)
- $\mathrm{L}(g_3) = yz^2$ не делит (отсутствует y)

- $\mathrm{L}(g_4) = x^2z^3$ не делит (степень x выше)

Поэтому остаток

$$r_3 = (b-2)xz^4$$

Остаток равен нулю тогда и только тогда, когда $b-2=0$, то есть $b=2$. При $b=2$ многочлен f принадлежит идеалу I, так как редуцируется к нулю относительно базиса Грёбнера. При других значениях b остаток ненулевой, поэтому $f \notin I$.

Таким образом, единственное значение параметра b, при котором $f \in I$, это $b=2$.

Ответ: $b = 2$

№2 Пусть

$$f_1 = y^3 + 3xy, \quad f_2 = xy^2 + 2x^2 + y, \quad f_3 = x^2y - y^2.$$

Старшие мономы при порядке $x \succ y$:

- $\mathrm{LM}(f_1) = xy$ (так как xy содержит x, а y^3 не содержит x, и $x \succ y$).
- $\mathrm{LM}(f_2) = x^2$ (моном x^2 старше xy^2 и y).
- $\mathrm{LM}(f_3) = x^2y$ (моном x^2y старше y^2).

Вычисляем s-многочлены

- $S(f_1, f_2)$:

$$S(f_1, f_2) = \frac{\mathrm{lcm}(xy, x^2)}{xy}f_1 - \frac{\mathrm{lcm}(xy, x^2)}{x^2}f_2 = xf_1 - yf_2$$

  Подставляем:

$$xf_1 = x(y^3+3xy) = xy^3+3x^2y, \quad yf_2 = y(xy^2+2x^2+y) = xy^3+2x^2y+y^2$$

$$S(f_1, f_2) = (xy^3 + 3x^2y) - (xy^3 + 2x^2y + y^2) = x^2y - y^2 = f_3$$

Остаток 0, так как f_3 уже в базисе.

- $S(f_1, f_3)$:

$$S(f_1, f_3) = \frac{\mathrm{lcm}(xy, x^2y)}{xy} f_1 - \frac{\mathrm{lcm}(xy, x^2y)}{x^2y} f_3 = xf_1 - f_3$$

Подставляем:

$$xf_1 = x(y^3 + 3xy) = xy^3 + 3x^2y, \quad f_3 = x^2y - y^2,$$

$$S(f_1, f_3) = (xy^3 + 3x^2y) - (x^2y - y^2) = xy^3 + 2x^2y + y^2$$

Редуцируем по базису $\{f_1, f_2, f_3\}$:

Старший моном $2x^2y$ делится на $\mathrm{LM}(f_3) = x^2y$ с частным 2:

$$2f_3 = 2(x^2y - y^2) = 2x^2y - 2y^2,$$

$$(xy^3 + 2x^2y + y^2) - (2x^2y - 2y^2) = xy^3 + 3y^2$$

Старший моном xy^3 делится на $\mathrm{LM}(f_1) = xy$ с частным $\frac{1}{3}y^2$:

$$\frac{1}{3}y^2 f_1 = \frac{1}{3}y^2(y^3 + 3xy) = \frac{1}{3}y^5 + xy^3,$$

$$(xy^3 + 3y^2) - \left(\frac{1}{3}y^5 + xy^3\right) = -\frac{1}{3}y^5 + 3y^2$$

Моном $-\frac{1}{3}y^5$ не делится на старшие мономы базиса. Добавляем новый многочлен $f_4 = y^5 - 9y^2$ (умножив остаток на -3 для удобства).

Теперь базис: $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

- $S(f_2, f_3)$:

$$S(f_2, f_3) = \frac{\mathrm{lcm}(x^2, x^2y)}{x^2} f_2 - \frac{\mathrm{lcm}(x^2, x^2y)}{x^2y} f_3 = yf_2 - f_3$$

Подставляем:

$$yf_2 = y(xy^2 + 2x^2 + y) = xy^3 + 2x^2y + y^2, \quad f_3 = x^2y - y^2,$$

$$S(f_2, f_3) = (xy^3 + 2x^2y + y^2) - (x^2y - y^2) = xy^3 + x^2y + 2y^2$$

Редуцируем по базису $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$:

Старший моном x^2y делится на $\mathrm{LM}(f_3) = x^2y$ с частным 1:

$$f_3 = x^2y - y^2, \quad S - f_3 = (xy^3 + x^2y + 2y^2) - (x^2y - y^2) = xy^3 + 3y^2$$

Как и ранее, редуцируется до $-\frac{1}{3}y^5 + 3y^2$, который редуцируется к 0 с помощью f_4.

Вычисляем остальные S-многочлены $(S(f_1, f_4), S(f_2, f_4), S(f_3, f_4))$, и все редуцируются к 0. Таким образом, базис Грёбнера: $\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \{y^3 + 3xy, xy^2 + 2x^2 + y, x^2y - y^2, y^5 - 9y^2\}$.

Для получения минимального редуцированного базиса:

(a) Удаляем многочлены, старшие мономы которых делятся на старшие мономы других многочленов.

(b) Делаем старшие коэффициенты равными 1.

(c) Редуцируем каждый многочлен по остальным.

Старшие мономы:

- $\mathrm{LM}(f_3) = x^2y$ делится на $\mathrm{LM}(f_2) = x^2$, удаляем f_3.
- $\mathrm{LM}(f_4) = y^5$ не делится на другие, оставляем.
- $\mathrm{LM}(f_1) = xy$ не делится на x^2 или y^5, оставляем.
- $\mathrm{LM}(f_2) = x^2$ не делится на xy или y^5, оставляем.

Базис после минимизации: $\{f_1, f_2, f_4\} = \{y^3 + 3xy, xy^2 + 2x^2 + y, y^5 - 9y^2\}$.

Делаем старшие коэффициенты равными 1:

$$g_1 = \frac{1}{3}f_1 = \frac{1}{3}y^3 + xy, \quad g_2 = \frac{1}{2}f_2 = \frac{1}{2}xy^2 + x^2 + \frac{1}{2}y, \quad g_4 = f_4 = y^5 - 9y^2$$

Теперь редуцируем каждый полином по остальным

- Редукция g_1 по $\{g_2, g_3\}$

$$g_1 = x\,y + \tfrac{1}{3}\,y^3$$

  Ведущий моном $x\,y$. x^2 (ведущий моном из g_2) не делит $x\,y$.

  y^5 из g_3 явно не делит ни $x\,y$, ни y^3.

  Следовательно, g_1 не изменяется : он уже «редуцирован» относительно g_2 и g_3.

- Редукция g_2 по $\{g_1, g_3\}$

$$g_2 = x^2 \;+\; \tfrac{1}{2}\,x\,y^2 \;+\; \tfrac{1}{2}\,y$$

  Старший моном x^2. Ни xy (из g_1), ни y^5 (из g_3) не делят x^2. Потому x^2 остаётся.

  Следующий по старшинству моном $\frac{1}{2}\,x\,y^2$. Здесь $\mathrm{LM}(g_1) = x\,y$ делит $x\,y^2$.

$$\frac{x\,y^2}{x\,y} = y$$

  Значит, есть что вычесть:

$$y \cdot g_1 = y\Big(x\,y + \tfrac{1}{3}\,y^3\Big) = x\,y^2 \;+\; \tfrac{1}{3}\,y^4$$

  Чтобы убрать ровно $\frac{1}{2}\,x\,y^2$, нам нужно взять $\frac{1}{2}$ от этого:

$$\frac{1}{2}\big(y\,g_1\big) = \frac{1}{2}\,x\,y^2 \;+\; \frac{1}{6}\,y^4.$$

Поэтому вычитаем из g_2 именно $\frac{1}{2}\,y\,g_1$:

$$g_2 - \frac{1}{2}\,y\,g_1 \;=\; \left(x^2 + \tfrac{1}{2}\,x\,y^2 + \tfrac{1}{2}\,y\right) - \left(\tfrac{1}{2}\,x\,y^2 + \tfrac{1}{6}\,y^4\right) \;=\; x^2 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{6}\,y^4$$

После этой вычиталки $\frac{1}{2}\,x\,y^2$ исчез, однако вместо него появился моном $-\frac{1}{6}y^4$. Теперь новое невырожденное сочетание равно

$$\tilde{g}_2 \;=\; x^2 \;+\; \frac{1}{2}\,y \;-\; \frac{1}{6}\,y^4$$

Проверим оставшиеся мономы:

x^2 уже не делится ни на xy (из g_1), ни на y^5 (из g_3).

$-\frac{1}{6}y^4$. Здесь y^5 не делит y^4, а xy не делит y^4.

$\frac{1}{2}\,y$ тем более не делится ни на xy, ни на y^5.

Значит, $\tilde{g}_2$ больше не редуцируется, и мы присваиваем:

$$g_2' \;:=\; x^2 \;-\; \frac{1}{6}\,y^4 \;+\; \frac{1}{2}\,y$$

- Редукция g_3 по $\{g_1,\, g_2'\}$

$$g_3 = y^5 - 9\,y^2$$

Ведущий моном y^5. Ни $x\,y$ (из g_1), ни x^2 (из g_2') не делят y^5. Обратный моном $-9y^2$ тоже не делится ни на xy, ни на x^2. Поэтому g_3 остаётся без изменений.

Получаем редуцированный минимальный базис Грёбнера

$$\{g_1,\; g_2',\; g_3\} \;=\; \left\{x\,y + \tfrac{1}{3}\,y^3,\; x^2 \;-\; \tfrac{1}{6}\,y^4 \;+\; \tfrac{1}{2}\,y,\; y^5 \;-\; 9\,y^2\right\}$$

Ответ: $\left\{x\,y + \tfrac{1}{3}\,y^3,\; x^2 \;-\; \tfrac{1}{6}\,y^4 \;+\; \tfrac{1}{2}\,y,\; y^5 \;-\; 9\,y^2\right\}$

№3 Для решения задачи построим базис Грёбнера идеала $I = (f_1, f_2)$, где $f_1 = x^2y + xz - 2z^2$, $f_2 = yz - 1$, в кольце $\mathbb{R}[x, y, z]$.

Найдем $S(f_1, f_2)$.

Наименьшее общее кратное одночленов:

$$\text{НОК}(L(f_1), L(f_2)) = \text{НОК}(x^2y, yz) = x^2yz.$$

Коэффициенты:

$$m_1 = \frac{x^2yz}{x^2y} = z, \quad m_2 = \frac{x^2yz}{yz} = x^2.$$

S-многочлен:

$$S(f_1, f_2) = z \cdot f_1 - x^2 \cdot f_2 = z(x^2y + xz - 2z^2) - x^2(yz - 1) =$$

$$= x^2yz + xz^2 - 2z^3 - x^2yz + x^2 = xz^2 - 2z^3 + x^2$$

Многочлен

$$S(f_1, f_2) = x^2 + xz^2 - 2z^3$$

Старший член

$$L(S) = x^2$$

Одночлен x^2 не делится на $L(f_1) = x^2y$ (так как отсутствует y).

Одночлен x^2 не делится на $L(f_2) = yz$.

Значит, $S(f_1, f_2)$ нередуцируем относительно F. Добавляем его к базису:

$$f_3 = x^2 + xz^2 - 2z^3$$

Теперь

$$F = \{f_1, f_2, f_3\}$$

Проверим все пары:

- $S(f_1, f_3)$:

$$\text{НОК}(L(f_1), L(f_3)) = \text{НОК}(x^2y, x^2) = x^2y$$

$S(f_1, f_3) = y \cdot f_3 - 1 \cdot f_1 = y(x^2 + xz^2 - 2z^3) - (x^2y + xz - 2z^2) =$
$xyz^2 - 2yz^3 - xz + 2z^2$

Редуцируем относительно F:

$$xyz^2 = xz \cdot (yz) \xrightarrow{f_2} xz \cdot 1 = xz, \quad -2yz^3 = -2z^2 \cdot (yz) \xrightarrow{f_2} -2z^2 \cdot 1 = -2z^2.$$

Подставляем:

$$S(f_1, f_3) = (xz - 2z^2) - xz + 2z^2 = 0.$$

Результат: $S(f_1, f_3) \xrightarrow{F} 0$.

- $S(f_2, f_3)$:
  $\text{НОК}(L(f_2), L(f_3)) = \text{НОК}(yz, x^2) = x^2yz$,
  $S(f_2, f_3) = x^2 \cdot f_2 - yz \cdot f_3 = x^2(yz - 1) - yz(x^2 + xz^2 - 2z^3) =$
  $-x^2 + xyz^3 - 2yz^4$
  Редуцируем относительно F:

  $$xyz^3 = xz^2 \cdot (yz) \xrightarrow{f_2} xz^2 \cdot 1 = xz^2, \quad -2yz^4 = -2z^3 \cdot (yz) \xrightarrow{f_2} -2z^3 \cdot 1 = -2z^3.$$

  Подставляем:

  $$S(f_2, f_3) = -x^2 + xz^2 - 2z^3 = -f_3 \xrightarrow{f_3} 0.$$

  Результат: $S(f_2, f_3) \xrightarrow{F} 0$.

Так как все S-многочлены редуцируются к 0, $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ — базис Грёбнера идеала I.

По следствию из свойств базиса Грёбнера:

Если G — базис Грёбнера идеала I относительно лексикографического порядка $x > y > z$, то $G \cap \mathbb{R}[x, y]$ порождает идеал $I \cap \mathbb{R}[x, y]$.

В базисе F многочлены, не содержащие z:

- f_1 и f_2 содержат z,
- $f_3 = x^2 + xz^2 - 2z^3$ содержит z.

Нет ненулевых многочленов без z. Однако заметим, что f_3 можно редуцировать, используя f_2:

$$f_3 = x^2+xz^2-2z^3 \xrightarrow{f_2} x^2+x\cdot(z\cdot z)\cdot z-2z^3\cdot z = x^2+x\cdot 1\cdot z-2\cdot 1\cdot z = x^2+xz-2z.$$

Но это не устраняет z.

Перепишем f_3, выразив z через y из f_2:

$$f_2 = yz - 1 = 0 \implies z = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0).$$

Подставим в f_3:

$$f_3 = x^2 + x\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{y}\right)^3 = x^2 + \frac{x}{y^2} - \frac{2}{y^3}.$$

Умножим на y^3, чтобы получить многочлен:

$$g = x^2y^3 + xy - 2 \in \mathbb{R}[x, y]$$

Так как g получен из элементов идеала I, то $g \in I \cap \mathbb{R}[x, y]$.

Проверим, что $I \cap \mathbb{R}[x, y] = (g)$

- $g = x^2y^3 + xy - 2$ нередуцируем относительно F (так как не содержит z)
- Любой многочлен $h \in I \cap \mathbb{R}[x, y]$ должен делиться на g: если h не делится на g, то остаток от деления h на g лежит в $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ и имеет меньшую степень, что противоречит минимальности g.

Таким образом, $I \cap \mathbb{R}[x, y] = (g)$

Ответ: $I \cap \mathbb{R}[x, y] = (x^2y^3 + xy - 2)$

№4 Идеал I состоит из всех многочленов, обращающихся в ноль на параметрической кривой:

$$x = a, \quad y = a - 1, \quad z = a^2 + 2a \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{R}.$$

исключим параметр a:

Из $x = a$ и $y = a - 1$ следует $a = x$ и $y = x - 1$, то есть $y - x + 1 = 0$.

Подставим в выражение для z:

$$z = x^2 + 2x.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y - x + 1 = 0, \\ z - x^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, идеал I порождается многочленами:

$$g_1 = x - y - 1, \quad g_2 = z - x^2 - 2x.$$

Найдем базис Грёбнера идеала $I = (g_1, g_2)$ в кольце $\mathbb{R}[x, y, z]$

Наименьшее общее кратное:

$$\text{НОК}(L(g_1), L(g_2)) = \text{НОК}(x, x^2) = x^2.$$

Коэффициенты:

$$m_1 = \frac{x^2}{x} = x, \quad m_2 = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

S-многочлен:

$$S(g_1, g_2) = x\cdot g_1 - 1\cdot g_2 = x(x-y-1)-(z-x^2-2x) = x^2-xy-x-z+x^2+2x = 2x^2-xy+x-z.$$

Редукция $S(g_1, g_2)$ относительно $\{g_1, g_2\}$: Выразим x^2 из g_2:

$$g_2 = z - x^2 - 2x \implies x^2 = z - 2x.$$

Подставим в $S(g_1, g_2)$:

$$S(g_1, g_2) = 2(z-2x) - xy + x - z = 2z - 4x - xy + x - z = -xy - 3x + z.$$

Редуцируем относительно g_1:

$$-xy - 3x + z \xrightarrow{g_1} -y(x-y-1) - 3x + z = -xy + y^2 + y - 3x + z.$$

Снова подставим $x = y+1$ (из g_1):

$$-(y+1)y+y^2+y-3(y+1)+z = -y^2-y+y^2+y-3y-3+z = -3y-3+z.$$

Редуцируем относительно g_2, подставив $z = x^2 + 2x$ и $x = y+1$:

$$-3y-3+(x^2+2x) = -3y-3+((y+1)^2+2(y+1)) = -3y-3+(y^2+2y+1+2y+2) = y^2+y.$$

Заметим, что $y^2 + y = y(y+1)$, но это не обращается в ноль на кривой. Однако при подстановке параметризации:

$$y^2 + y = (a-1)^2 + (a-1) = a^2 - 2a + 1 + a - 1 = a^2 - a,$$

что не равно 0 тождественно. Это означает, что исходный S-многочлен не редуцируется к нулю, и базис нужно дополнить.

Добавим многочлен, полученный на предыдущем шаге, но учтем, что при подстановке параметризации:

$$z - x^2 - 2x = 0, \quad x - y - 1 = 0.$$

Выразим z через y: из $x = y + 1$, подставим в $z = x^2 + 2x$:

$$z = (y+1)^2 + 2(y+1) = y^2 + 2y + 1 + 2y + 2 = y^2 + 4y + 3.$$

Получаем новый многочлен:

$$g_3 = z - y^2 - 4y - 3.$$

Теперь идеал порождается:

$$g_1 = x - y - 1, \quad g_3 = z - y^2 - 4y - 3.$$

Проверка базиса Грёбнера для $\{g_1, g_3\}$:

Вычислим S-многочлен:

$$\text{НОК}(L(g_1), L(g_3)) = \text{НОК}(x, y^2) = xy^2.$$

$$m_1 = \frac{xy^2}{x} = y^2, \quad m_2 = \frac{xy^2}{y^2} = x.$$

$$S(g_1, g_3) = y^2 \cdot g_1 - x \cdot g_3 = y^2(x - y - 1) - x(z - y^2 - 4y - 3) =$$

$$= xy^2 - y^3 - y^2 - xz + xy^2 + 4xy + 3x = 2xy^2 - y^3 - y^2 - xz + 4xy + 3x$$

Редукция к нулю: Подставим $x = y + 1$ (из g_1):

$$2(y+1)y^2 - y^3 - y^2 - (y+1)z + 4(y+1)y + 3(y+1) =$$

$$= 2y^3 + 2y^2 - y^3 - y^2 - yz - z + 4y^2 + 4y + 3y + 3 = y^3 + 5y^2 + 7y - yz - z + 3$$

Редуцируем с помощью g_3, подставив $z = y^2 + 4y + 3$:

$$y^3+5y^2+7y-y(y^2+4y+3)-(y^2+4y+3)+3 = y^3+5y^2+7y-y^3-4y^2-3y-y^2-4y-3+3 = 0$$

Таким образом, $S(g_1, g_3) \xrightarrow{\{g_1,g_3\}} 0$.

По критерию Бухбергера, поскольку S-многочлен редуцируется к нулю, множество $\{g_1, g_3\}$ является базисом Грёбнера идеала I:

$$g_1 = x - y - 1, \quad g_3 = z - y^2 - 4y - 3.$$

Ответ: $\{x - y - 1,\ z - y^2 - 4y - 3\}$