Домашнее задание на 15.05 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 (a) Пусть

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^2 - 4x - 2, \qquad g(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 12.$$

Применим алгоритм Евклида.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}\right) g(x) + r_1(x), && deg(r_1) = 3,\\
r_1(x) &= f(x) - (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2})g(x) = \cdots = \frac{5}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + x + 16, &&\\
g(x) &= q_2(x)\, r_1(x) + r_2(x), && deg(r_2) = 2,\\
r_2(x) &= g(x) - q_2(x)r_1(x) = \cdots = x^2 + 2, &&\\
r_1(x) &= q_3(x)\, r_2(x) + r_3(x), && deg(r_3) < 2,\\
r_3(x) &= r_1(x) - q_3(x)r_2(x) = 0. &&
\end{aligned}$$

Вычисления дают

$$\gcd\big(f, g\big) = x^2 + 2,$$

Теперь восстанавливаем коэффициенты.

$$\begin{aligned}
r_2(x) &= g(x) - q_2(x)r_1(x)\\
r_1(x) &= f(x) - \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}\right)g(x)
\end{aligned}$$

Подставляя, получаем

$$x^2 + 2 = s(x)f(x) + t(x)g(x),$$

где

$$s(x) = \frac{5-2x}{7}, \quad t(x) = \frac{x^2-x-2}{7}.$$

такие, что

$$s(x)\, f(x) + t(x)\, g(x) \; = \; x^2 + 2.$$

(b) $K = \mathbb{Z}_7$

Рассмотрим

$$f(x) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 5x + 3, \quad g(x) = 3x^4 + 3x^3 + 6x + 1$$

применим алгоритм Евклида в $\mathbb{Z}_7[x]$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 5x\, g(x) + r_1(x), & r_1(x) = f - 5xg = 6x^4 + x^3 + x^2 + 3,\\
g(x) &= 4\, r_1(x) + r_2(x), & r_2(x) = g - 4r_1 = 6x^3 + 3x^2 + 6x + 3,\\
r_1(x) &= x\, r_2(x) + r_3(x), & r_3(x) = r_1 - xr_2 = x^2 + 4x + 5,\\
r_2(x) &= (6x+1)\, r_3(x) + r_4(x), & r_4(x) = r_2 - (6x+1)r_3 = x - 3,\\
r_3(x) &= 3x + 6\, r_4(x) + 0.
\end{aligned}$$