Домашнее задание на 2.05 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем, что:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ — обратима } \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow ac \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$$

Значит все обратимые элементы имеют вид:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad \text{где } a \neq 0 \text{ и } c \neq 0$$

В кольце матриц A — нулевой делитель (левый или правый) тогда и только тогда, когда $\det A = 0$, то есть

$$ac = 0.$$

1) Если $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

Возьмём, например,

$$X = \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тогда

$$A\,X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b\,c - c\,b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, A — левый нулевой делитель.

1) Если $c = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Можно взять

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & -b \end{pmatrix} \neq 0$$

и проверить $AX = 0$ аналогично.

Аналогично для правых делителей, если $ac = 0$, то существует ненулевое Y с $YA = 0$.

Найдём все нильпотентные $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$

Вычислим

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b\,a + c\,b & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b\,(a + c) & c^2 \end{pmatrix}.$$

Приравниваем к нулевой матрице:

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ c^2 = 0, \\ b\,(a + c) = 0. \end{cases}$$

В этом уравнении над полем $\mathbb{R}$ из $a^2 = 0$ и $c^2 = 0$ сразу следует

$$a = 0, \quad c = 0.$$

Тогда третье уравнение $b\,(a + c) = b \cdot 0 = 0$ выполняется при любом b.

Значит

$$A^2 = 0 \iff a = 0,\ c = 0,$$

Так $A^n = A^2 \cdot A^{n-2}$ $n \geqslant 2$, то все нильпотентные элементы имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

№2 Допустим, что

$$I = (x-2, y) = (g)$$

для некоторого $g \in \mathbb{Q}[x,y]$, $g \neq 0$.

Тогда и $x - 2 \in I$, и $y \in I$ должны делиться на g. То есть

$$g \mid (x-2) \quad \text{и} \quad g \mid y \quad \Longrightarrow \quad g \ \Big| \ \gcd(x-2,\ y).$$

Так как:

$$\gcd(x-2,\ y) = 1$$

то любой их общий делитель g — обязательно обратимая константа из $\mathbb{Q}^{\times}$.

Если g — единица, то

$$I = (g) = \mathbb{Q}[x,y],$$

то есть идеал совпадёт со всем кольцом. Но это невозможно, потому что, например, $1 \notin (x-2, y)$

Следовательно, этот идеал не главный

№3 Определим гомоморфизм колец $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ формулой:

$$\varphi(f(x)) = \left(f(0),\ f(-2)\right).$$

Проверим корректность:

- *Сложение:*

$$\varphi(f+g) = ((f+g)(0),\, (f+g)(-2)) = (f(0)+g(0),\, f(-2)+g(-2)) = \varphi(f)+\varphi(g)$$

- *Умножение:*

$$\varphi(f\cdot g) = ((f\cdot g)(0),\, (f\cdot g)(-2)) = (f(0)g(0),\, f(-2)g(-2)) = \varphi(f)\cdot\varphi(g)$$

- *Единица:*

$$\varphi(1) = (1,1)$$

Ядро гомоморфизма:
$\ker\varphi$ состоит из многочленов $f(x)$, для которых:

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad f(-2) = 0$$

Так как x и $x+2$ взаимно просты, их произведение $x(x+2) = x^2+2x$ делит $f(x)$. Следовательно:

$$\ker\varphi = (x^2+2x)$$

Для любых $(a,b) \in \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ построим многочлен $f(x)$, такой что:

$$f(0) = a, \quad f(-2) = b$$

Например, подходит линейный многочлен:

$$f(x) = \frac{a(x+2)-bx}{2}$$

Проверка:

$$f(0) = \frac{a\cdot 2}{2} = a, \quad f(-2) = \frac{a\cdot 0 - b\cdot(-2)}{2} = b$$

Значит, φ сюръективен. Следовательно, $\operatorname{Im}\varphi = (\mathbb{C},\mathbb{C})$

По теореме о гомоморфизме для колец:

$$\mathbb{C}[x]/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$$

Подставляя $\ker\varphi = (x^2+2x)$ и $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$, получаем:

$$\mathbb{C}[x]/(x^2+2x) \simeq \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$$

№4 ($\Rightarrow$) Если R/I — поле, то $I \neq R$ и нет собственных идеалов J, содержащих I.

- Предположим, R/I — поле. Тогда R/I нетривиально (т.к. $0+I \neq 1+I$), поэтому $I \neq R$.
- Допустим, существует идеал $J \triangleleft R$, такой что $I \subsetneq J \subsetneq R$ ($J \subsetneq R$ т.к. в поле $0+J \neq 1+J$). Рассмотрим факторкольцо J/I. Оно является идеалом в R/I:
  (Для любого $r+I \in R/I$ и $j+I \in J/I$ произведение $(r+I)(j+I) = rj+I$ принадлежит J/I, так как J — идеал в R и $rj \in J$.)
  Но поле не имеет собственных нетривиальных идеалов, кроме $\{0\}$ и самого себя. Следовательно, $J/I = \{0\}$ (т.к. если $J/I = R/I \implies J = R$ — противоречит $J \subsetneq R$), откуда $J = I$. Это противоречит условию $I \subsetneq J$. Значит, таких идеалов J не существует.

($\Leftarrow$) :(