Домашнее задание на 24.04 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Элементы из $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{25}$

1) порядка 2:

$$(1,0,0) \quad (1,5,0) \quad (0,5,0)$$

всего: 3

2) порядка 5:

все тройки порядка 5 имеют вид:

$$(0, 2m, 5n) \quad \forall m \in [0,4], n \in [0,4]$$

То есть всего элементов порядка 5:

$$5 \times 5 - 1 = 24$$

(вычитаем тройку $(0,0,0)$)

3) порядка 10:

все тройки порядка 10 имеют вид:

a) на первом месте 0:

$$(0, 1|3|7|9, 0|5|10|15|20) + (0, 5, 5|10|15|20) = 4 \cdot 5 + 4 = 24$$

b) на первом месте 1:

$$(1, 1|2|3|4|6|8|7|9, 0|5|10|15|20) + (1, 0|1|2|3|4|5|6|8|7|9, 5|10|15|20) -$$

$$-(1, 1|2|3|4|6|8|7|9, 5|10|15|20) = 8 \cdot 5 + 10 \cdot 4 - 8 \cdot 4 = 48$$

Всего элементов:

$$48 + 24 = 72$$

4) порядка 25:

   все тройки порядка 25 имеют вид:

$$(0, 0|2|4|5|8, 1|2|3|4|6|...(\text{не кратные } 5)) = 5 \cdot 20 = 100$$

Ответ: $3, 24, 72, 100$

№2 Так как:

$$63 = 3^2 \cdot 7$$

То по классификации конечных абелевых групп A раскладывается:

$$A \simeq Z_{3^{k_1}} \times \cdots \times Z_{3^{k_r}} \times Z_{7^{\ell_1}} \times \cdots \times Z_{7^{\ell_s}},$$

где сумма всех 3-показателей k_i равна 2, а сумма всех 7-показателей ℓ_j равна 1

Однако если бы в разложении встретился сомножитель $Z_9 \times Z_7$, то по теореме 3 (для $n = 9 \cdot 7$, $\gcd(9, 7) = 1$) мы получили бы циклическую группу Z_{63}. Поскольку A по условию — нециклическая, единственное возможное разложение:

$$A \simeq Z_3 \times Z_3 \times Z_7.$$

1) Любая подгруппа порядка 3 должна лежать в сомножителе $Z_3 \times Z_3$.

   — В $Z_3 \times Z_3$ всего $3^2 = 9$ элемента, из них один нейтральный, а остальные 8 имеют порядок 3.

   — Циклическая подгруппа порядка 3 содержит ровно 2 элемента порядка 3 .

Поэтому число различных подгрупп порядка 3 равно

$$\frac{8}{2} = 4.$$

2) Подгруппа порядка 21 должна содержать одновременно элемент порядка 3 и элемент порядка 7.

— В Z_7 существует ровно одна подгруппа порядка 7 (сама Z_7).

— В $Z_3 \times Z_3$ — 4 подгруппы порядка 3.

Пусть H_3 — любая из 4 подгрупп порядка 3, а $H_7 = Z_7$. Тогда в абелевой группе A произведение $H_3 H_7$ есть подгруппа (т.к. $H_3 \cap H_7 = \{e\}$) и по теореме Лагранжа её порядок $|H_3 H_7| = |H_3| \cdot |H_7| = 3 \cdot 7 = 21$.

Разные H_3 дают разные произведения $H_3 H_7$, значит, всего подгрупп порядка 21 тоже 4.

Ответ: 4 и 4

№3 Дана группа:

$$Z_{15} \times Z_{18} \times Z_{20}$$

Можем разложить её:

$$Z_{15} \times Z_{18} \times Z_{20} = Z_3 \times Z_5 \times Z_2 \times Z_9 \times Z_4 \times Z_5 =$$

$$= Z_3 \times Z_9 \times Z_2 \times Z_4 \times Z_5 \times Z_5$$

Так как $Z_{mn} = Z_m \times Z_n$ только если $(m, n) = 1$, то собрать выражение с минимальным количеством множителей мы можем, беря только простые по модулю множители между собой, то есть:

$$Z_3 \times Z_9 \times Z_2 \times Z_4 \times Z_5 \times Z_5 = Z_3 \times Z_2 \times Z_5 \times Z_9 \times Z_4 \times Z_5 =$$

$$= Z_{30} \times Z_{180}$$

Получили 2 множителя.

Ответ: 2

№4 Согласно теореме классификации конечных абелевых групп, A изоморфна прямому произведению циклических групп простых порядков:

$$A \cong Z_{p_1^{k_1}} \times Z_{p_2^{k_2}} \times \ldots \times Z_{p_n^{k_n}},$$

где p_i — простые числа, а $k_i \in \mathbb{N}$.

Наибольший порядок элемента k в A равен наибольшему общему кратному порядков циклических компонент:

$$k = \text{НОК}(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \ldots, p_n^{k_n}).$$

Рассмотрим произвольный элемент $a \in A$. Его порядок — это НОК порядков его компонент в разложении. Каждая компонента имеет порядок $p_i^{m_i}$, где $m_i \leqslant k_i$. Так как $p_i^{m_i}$ делит $p_i^{k_i}$, то:

$$\text{НОК}(p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_n^{m_n}) \mid \text{НОК}(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \ldots, p_n^{k_n}) = k.$$

Таким образом, порядок любого элемента $a \in A$ делит k.