Домашнее задание на 08.06 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, положим

$$x = \sqrt[3]{7}, \quad \text{тогда } \sqrt[3]{49} = x^2,\ x^3 = 7$$

Наша дробь превращается в

$$\frac{1 + 55x \ - \ 8x^2}{1 \ - \ 2x \ - \ 4x^2}$$

Обозначим знаменатель

$$D(x) = 1 - 2x - 4x^2$$

Найдём многочлен

$$P(x) = a + b\,x + c\,x^2$$

такой, что $D(x)\,P(x)$ — просто рациональное число. Тогда

$$\frac{1 + 55x - 8x^2}{D(x)} \ = \ \frac{(1 + 55x - 8x^2)\,P(x)}{D(x)\,P(x)}$$

Распишем

$$P(x) \ = \ a + b\,x + c\,x^2, \qquad D(x)\,P(x) \ = \ (1 - 2x - 4x^2)\,(a + b\,x + c\,x^2)$$

При перемножении и сведении всех степеней x к остаткам по модулю $x^3 - 7 = 0$ (то есть используя $x^3 = 7$ и $x^4 = 7x$) получаем:

$$D(x)\,P(x) \ = \ \big(a - 28\,b - 14\,c\big) \ + \ \big(-2a + b - 28c\big)\,x \ + \ \big(-4a - 2b + c\big)\,x^2$$

Чтобы в этом произведении не было членов с x и x^2, решаем систему:

$$\begin{cases} -2a + b - 28c = 0, \\ -4a - 2b + c = 0. \end{cases} \implies b = \frac{-114a}{55}, \quad c = \frac{-8a}{55}$$

Пусть $a = 55$, тогда $b = -114$, $c = -8$

Тогда

$$P(x) \ = \ 55 \ - \ 114\,x \ - \ 8\,x^2$$

$$D(x)P(x) = 3359$$

То есть:

$$\frac{1 + 55x \ - \ 8x^2}{1 \ - \ 2x \ - \ 4x^2} = \frac{(\,1 + 55x \ - \ 8x^2\,)P(x)}{3359}$$

Вычислим:

$$(\,1 + 55x \ - \ 8x^2\,)P(x) = (\,1 + 55x \ - \ 8x^2\,)(\ 55 \ - \ 114\,x \ - \ 8\,x^2) =$$

$$= 3359 + 3359x - 6718x^2$$

Получаем:

$$\frac{1 + 55x \ - \ 8x^2}{1 \ - \ 2x \ - \ 4x^2} = \frac{3359 + 3359x - 6718x^2}{3359} = 1 + x - 2x^2 = 1 + \sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{49}$$

Ответ: $1 + \sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{49}$

№2 Рассмотрим число

$$x \ = \ \sqrt{5} \ - \ \sqrt{3} \ + \ 1.$$

Пусть

$$y = x - 1 = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Найдём минимальный многочлен для y над $\mathbb{Q}$.

Поскольку все $\mathbb{Q}$-автоморфизмы поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3})$ независимо меняют знаки у $\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$, число $y = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ имеет ровно четыре значения $\pm\sqrt{5} \pm \sqrt{3}$, и его минимальный многочлен:

$(y - (\sqrt{5} - \sqrt{3}))(y - (\sqrt{5} + \sqrt{3}))(y - (-\sqrt{5} - \sqrt{3}))(y - (-\sqrt{5} + \sqrt{3})) =$

После раскрытия скобок получаем:

$$y^4 - 16y^2 + 4$$

Искомый минимальный многочлен для x:

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 11$$

Ответ: $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 11$