Домашнее задание на 08.06 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, положим

$$x = \sqrt[3]{7}, \quad \text{тогда } \sqrt[3]{49} = x^2,\ x^3 = 7$$

Наша дробь превращается в

$$\frac{1 + 55x \ - \ 8x^2}{1 \ - \ 2x \ - \ 4x^2}$$

Обозначим знаменатель

$$D(x) = 1 - 2x - 4x^2$$

Найдём многочлен

$$P(x) = a + b\,x + c\,x^2$$

такой, что $D(x)\,P(x)$ — просто рациональное число. Тогда

$$\frac{1 + 55x - 8x^2}{D(x)} = \frac{(1 + 55x - 8x^2)\,P(x)}{D(x)\,P(x)}$$

Распишем

$$P(x) \ = \ a + b\,x + c\,x^2, \qquad D(x)\,P(x) \ = \ (1 - 2x - 4x^2)\,(a + b\,x + c\,x^2)$$

При перемножении и сведении всех степеней x к остаткам по модулю $x^3 - 7 = 0$ (то есть используя $x^3 = 7$ и $x^4 = 7x$) получаем:

$$D(x)\,P(x) \ = \ \big(a - 28\,b - 14\,c\big) \ + \ \big(-2a + b - 28c\big)\,x \ + \ \big(-4a - 2b + c\big)\,x^2$$

Чтобы в этом произведении не было членов с x и x^2, решаем систему:

$$\begin{cases} -2a + b - 28c = 0, \\ -4a - 2b + c = 0. \end{cases} \implies b = \frac{-114a}{55}, \quad c = \frac{-8a}{55}$$

Пусть $a = 55$, тогда $b = -114$, $c = -8$

Тогда

$$P(x) \ = \ 55 \ - \ 114\,x \ - \ 8\,x^2$$

$$D(x)P(x) = 3359$$

То есть:

$$\frac{1 + 55x \ - \ 8x^2}{1 \ - \ 2x \ - \ 4x^2} = \frac{(\,1 + 55x \ - \ 8x^2\,)P(x)}{3359}$$

Вычислим:

$$(\,1 + 55x \ - \ 8x^2\,)P(x) = (\,1 + 55x \ - \ 8x^2\,)(\ 55 \ - \ 114\,x \ - \ 8\,x^2) =$$

$$= 3359 + 3359x - 6718x^2$$

Получаем:

$$\frac{1 + 55x \ - \ 8x^2}{1 \ - \ 2x \ - \ 4x^2} = \frac{3359 + 3359x - 6718x^2}{3359} = 1 + x - 2x^2 = 1 + \sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{49}$$

Ответ: $1 + \sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{49}$

№2 Рассмотрим число

$$x \ = \ \sqrt{5} \ - \ \sqrt{3} \ + \ 1.$$

Пусть

$$y = x - 1 = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Найдём минимальный многочлен для y над $\mathbb{Q}$.

Поскольку все $\mathbb{Q}$-автоморфизмы поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3})$ независимо меняют знаки у $\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$, число $y = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ имеет ровно четыре значения $\pm\sqrt{5} \pm \sqrt{3}$, и его минимальный многочлен:

$$(y - (\sqrt{5} - \sqrt{3}))(y - (\sqrt{5} + \sqrt{3}))(y - (-\sqrt{5} - \sqrt{3}))(y - (-\sqrt{5} + \sqrt{3})) =$$

После раскрытия скобок получаем:

$$y^4 - 16y^2 + 4$$

Искомый минимальный многочлен для x:

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 11$$

Ответ: $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 11$

№3 Рассмотрим поле $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ с обычной арифметикой по модулю 2

Возьмём неприводимый над $\mathbb{F}_2$ многочлен

$$f(x) \;=\; x^3 + x + 1.$$

Поскольку $\deg f = 3$ и f неприводим, фактор-кольцо

$$\mathbb{F}_2[x]/\big(f(x)\big)$$

является полем порядка $2^3 = 8$. Обозначим в этом поле класс образующий $x \bmod f$ через

$$\alpha \quad (\text{то есть } \alpha^3 = \alpha + 1 \text{ в } \mathbb{F}_8).$$

Тогда все элементы $\mathbb{F}_8$ можно записать в виде

$$a_2\,\alpha^2 \;+\; a_1\,\alpha \;+\; a_0, \qquad a_i \in \{0, 1\},$$

Таблица сложения в $\mathbb{F}_8$

$+$	0	1	α	$\alpha+1$	α^2	α^2+1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$
0	0	1	α	$\alpha+1$	α^2	α^2+1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$
1	1	0	$\alpha+1$	α	α^2+1	α^2	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$
α	α	$\alpha+1$	0	1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$	α^2	α^2+1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	α	1	0	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$	α^2+1	α^2
α^2	α^2	α^2+1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$	0	1	α	$\alpha+1$
α^2+1	α^2+1	α^2	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$	1	0	$\alpha+1$	α
$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$	α^2	α^2+1	α	$\alpha+1$	0	1
$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$	α^2+1	α^2	$\alpha+1$	α	1	0

Таблица умножения в $\mathbb{F}_8$

$\times$	0	1	α	$\alpha+1$	α^2	α^2+1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha+1$	α^2	α^2+1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$
α	0	α	α^2	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha+1$	1	$\alpha^2+\alpha+1$	α^2+1
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$	α^2+1	$\alpha^2+\alpha+1$	α^2	1	α
α^2	0	α^2	$\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$	α	α^2+1	1
α^2+1	0	α^2+1	1	α^2	α	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$
$\alpha^2+\alpha$	0	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$	1	α^2+1	$\alpha+1$	α	α^2
$\alpha^2+\alpha+1$	0	$\alpha^2+\alpha+1$	α^2+1	α	1	$\alpha^2+\alpha$	α^2	$\alpha+1$

№4 Надо доказать, что если $K[\alpha]$ конечно как векторное пространство над K, то уже само кольцо $K[\alpha]$ является полем, то есть

$$K[\alpha] \;=\; K(\alpha)$$

1) Предположим, что $\dim_K K[\alpha] = n < \infty$. Тогда семейство векторов

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \dots$$

не может быть линейно независимым навечно, ибо в $K[\alpha]$ как K-пространстве всего конечная размерность.

Значит, найдутся коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_m \in K$, не все нули, такие, что

$$c_0 \cdot 1 \;+\; c_1\,\alpha \;+\; c_2\,\alpha^2 \;+\; \cdots +\; c_m\,\alpha^m \;=\; 0 \quad \text{в } F.$$

Это означает, что α является корнем некоторого ненулевого многочлена

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m \ \in \ K[x]$$

По определению, это и значит, что α алгебрично над K. В частности, существует единственный многочлен минимальной степени

$$m_\alpha(x) \ \in \ K[x], \qquad m_\alpha(\alpha) = 0$$

И $\deg m_\alpha = d \leq m \leq n$

2) Так как α алгебрично, то

$$K[\alpha] \ \cong \ K[x]\,/\big(m_\alpha(x)\big)$$

Поскольку $m_\alpha(x)$ неприводим над K, фактор кольцо $K[x]/(m_\alpha(x))$ — поле, а значит $K[\alpha]$ тоже поле.

Следовательно:

$$K[\alpha] \ = \ K(\alpha)$$