

Домашнее задание на 2.05 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем, что:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ — обратима } \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow ac \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$$

Значит все обратимые элементы имеют вид:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \text{где } a \neq 0 \text{ и } c \neq 0$$

В кольце матриц A — нулевой делитель (левый или правый) тогда и только тогда, когда $\det A = 0$, то есть

$$ac = 0.$$

1) Если $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

Возьмём, например,

$$X = \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тогда

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bc - cb & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, A — левый нулевой делитель.

1) Если $c = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Можно взять

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & -b \end{pmatrix} \neq 0$$

и проверить $AX = 0$ аналогично.

Аналогично для правых делителей, если $ac = 0$, то существует ненулевое Y с $YA = 0$.

Найдём все нильпотентные $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$

Вычислим

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ba + cb & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b(a + c) & c^2 \end{pmatrix}.$$

Приравниваем к нулевой матрице:

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ c^2 = 0, \\ b(a + c) = 0. \end{cases}$$

В этом уравнении над полем \mathbb{R} из $a^2 = 0$ и $c^2 = 0$ сразу следует

$$a = 0, \quad c = 0.$$

Тогда третье уравнение $b(a + c) = b \cdot 0 = 0$ выполняется при любом b .

Значит

$$A^2 = 0 \iff a = 0, \quad c = 0,$$

Так $A^n = A^2 \cdot A^{n-2}$ $n \geq 2$, то все нильпотентные элементы имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

№2 Допустим, что

$$I = (x - 2, y) = (g)$$

для некоторого $g \in \mathbb{Q}[x, y]$, $g \neq 0$.

Тогда и $x - 2 \in I$, и $y \in I$ должны делиться на g . То есть

$$g \mid (x - 2) \quad \text{и} \quad g \mid y \quad \implies \quad g \mid \gcd(x - 2, y).$$

Так как:

$$\gcd(x - 2, y) = 1$$

то любой их общий делитель g — обязательно обратимая константа из \mathbb{Q}^\times .

Если g — единица, то

$$I = (g) = \mathbb{Q}[x, y],$$

то есть идеал совпадёт со всем кольцом. Но это невозможно, потому что, например, $1 \notin (x - 2, y)$

Следовательно, этот идеал не главный

№3 Определим гомоморфизм колец $\varphi : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ формулой:

$$\varphi(f(x)) = (f(0), f(-2)).$$

Проверим корректность:

- *Сложение:*

$$\varphi(f+g) = ((f+g)(0), (f+g)(-2)) = (f(0)+g(0), f(-2)+g(-2)) = \varphi(f)+\varphi(g)$$

- *Умножение:*

$$\varphi(f \cdot g) = ((f \cdot g)(0), (f \cdot g)(-2)) = (f(0)g(0), f(-2)g(-2)) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$$

- *Единица:*

$$\varphi(1) = (1, 1)$$

Ядро гомоморфизма:

$\ker \varphi$ состоит из многочленов $f(x)$, для которых:

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad f(-2) = 0$$

Так как x и $x+2$ взаимно просты, их произведение $x(x+2) = x^2+2x$ делит $f(x)$. Следовательно:

$$\ker \varphi = (x^2 + 2x)$$

Для любых $(a, b) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ построим многочлен $f(x)$, такой что:

$$f(0) = a, \quad f(-2) = b$$

Например, подходит линейный многочлен:

$$f(x) = \frac{a(x+2) - bx}{2}$$

Проверка:

$$f(0) = \frac{a \cdot 2}{2} = a, \quad f(-2) = \frac{a \cdot 0 - b \cdot (-2)}{2} = b$$

Значит, φ сюръективен. Следовательно, $\text{Im } \varphi = (\mathbb{C}, \mathbb{C})$

По теореме о гомоморфизме для колец:

$$\mathbb{C}[x]/\ker \varphi \cong \operatorname{Im} \varphi$$

Подставляя $\ker \varphi = (x^2 + 2x)$ и $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, получаем:

$$\mathbb{C}[x]/(x^2 + 2x) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$