Домашнее задание на 24.04 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Элементы из $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{25}$

1) порядка 2:

$$(1, 0, 0) \quad (1, 5, 0) \quad (0, 5, 0)$$

всего: 3

2) порядка 5:

все тройки порядка 5 имеют вид:

$$(0, 2m, 5n) \quad \forall m \in [0, 4], n \in [0, 4]$$

То есть всего элементов порядка 5:

$$5 \times 5 - 1 = 24$$

(вычитаем тройку $(0, 0, 0)$)

3) порядка 10:

все тройки порядка 10 имеют вид:

a) на первом месте 0:

$$(0, 1|3|7|9, 0|5|10|15|20) + (0, 5, 5|10|15|20) = 4 \cdot 5 + 4 = 24$$

b) на первом месте 1:

$$(1, 1|2|3|4|6|8|7|9, 0|5|10|15|20) + (1, 0|1|2|3|4|5|6|8|7|9, 5|10|15|20) -$$

$$-(1, 1|2|3|4|6|8|7|9, 5|10|15|20) = 8 \cdot 5 + 10 \cdot 4 - 8 \cdot 4 = 48$$

Всего элементов:

$$48 + 24 = 72$$

4) <u>порядка 25:</u>

все тройки порядка 25 имеют вид:

$$(0, 0|2|4|5|8, 1|2|3|4|6|...(\text{не кратные } 5)) = 5 \cdot 20 = 100$$

Ответ: $3, 24, 72, 100$

№2 Так как:

$$63 = 3^2 \cdot 7$$

То по классификации конечных абелевых групп A раскладывается:

$$A \;\simeq\; Z_{3^{k_1}} \times \cdots \times Z_{3^{k_r}} \times Z_{7^{\ell_1}} \times \cdots \times Z_{7^{\ell_s}},$$

где сумма всех 3-показателей k_i равна 2, а сумма всех 7-показателей ℓ_j равна 1

Однако если бы в разложении встретился сомножитель $Z_9 \times Z_7$, то по теореме 3 (для $n = 9 \cdot 7$, $\gcd(9, 7) = 1$) мы получили бы циклическую группу Z_{63}. Поскольку A по условию — нециклическая, единственное возможное разложение:

$$A \;\simeq\; Z_3 \times Z_3 \times Z_7.$$

1) Любая подгруппа порядка 3 должна лежать в сомножителе $Z_3 \times Z_3$.

   — В $Z_3 \times Z_3$ всего $3^2 = 9$ элемента, из них один нейтральный, а остальные 8 имеют порядок 3.

   — Циклическая подгруппа порядка 3 содержит ровно 2 элемента порядка 3 .

Поэтому число различных подгрупп порядка 3 равно

$$\frac{8}{2} \;=\; 4.$$

2) Подгруппа порядка 21 должна содержать одновременно элемент порядка 3 и элемент порядка 7.

— В Z_7 существует ровно одна подгруппа порядка 7 (сама Z_7).

— В $Z_3 \times Z_3$ — 4 подгруппы порядка 3.

Пусть H_3 — любая из 4 подгрупп порядка 3, а $H_7 = Z_7$. Тогда в абелевой группе A произведение H_3H_7 есть подгруппа (т.к. $H_3 \cap H_7 = \{e\}$) и по теореме Лагранжа её порядок $|H_3H_7| = |H_3| \cdot |H_7| = 3 \cdot 7 = 21$.

Разные H_3 дают разные произведения H_3H_7, значит, всего подгрупп порядка 21 тоже 4.