Домашнее задание на 2.05 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем, что:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ — обратима } \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow ac \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$$

Значит все обратимые элементы имеют вид:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \text{где } a \neq 0 \text{ и } c \neq 0$$

В кольце матриц A — нулевой делитель (левый или правый) тогда и только тогда, когда $\det A = 0$, то есть

$$ac = 0.$$

1) Если $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

Возьмём, например,

$$X = \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тогда

$$A\,X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b\,c - c\,b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, A — левый нулевой делитель.

1) Если $c = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Можно взять

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & -b \end{pmatrix} \neq 0$$

и проверить $AX = 0$ аналогично.

Аналогично для правых делителей, если $ac = 0$, то существует ненулевое Y с $YA = 0$.

Найдём все нильпотентные $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$

Вычислим

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b\,a + c\,b & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b\,(a+c) & c^2 \end{pmatrix}.$$

Приравниваем к нулевой матрице:

$$\begin{cases} a^2 = 0, \\ c^2 = 0, \\ b\,(a+c) = 0. \end{cases}$$

В этом уравнении над полем $\mathbb{R}$ из $a^2 = 0$ и $c^2 = 0$ сразу следует

$$a = 0, \quad c = 0.$$

Тогда третье уравнение $b\,(a+c) = b \cdot 0 = 0$ выполняется при любом b.

Значит

$$A^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0,\ c = 0,$$

Так $A^n = A^2 \cdot A^{n-2}$ $n \geqslant 2$, то все нильпотентные элементы имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

№2 Допустим, что

$$I = (x-2, y) = (g)$$

для некоторого $g \in \mathbb{Q}[x, y]$, $g \neq 0$.

Тогда и $x - 2 \in I$, и $y \in I$ должны делиться на g. То есть

$$g \mid (x-2) \quad \text{и} \quad g \mid y \quad \Longrightarrow \quad g \;\Big|\; \gcd(x-2,\ y).$$

Так как:

$$\gcd(x-2,\ y) = 1$$

то любой их общий делитель g — обязательно обратимая константа из $\mathbb{Q}^{\times}$.

Если g — единица, то

$$I = (g) = \mathbb{Q}[x, y],$$

то есть идеал совпадёт со всем кольцом. Но это невозможно, потому что, например, $1 \notin (x-2, y)$

Следовательно, этот идеал не главный