Домашнее задание на 17.04 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем, что матрицы в группе G и подгруппе H имеют вид:

$$G = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Покажем, что:

$$g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G$$

Пусть:

$$g \in G, h \in H \implies g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$g^{-1}Hg = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab + c(ad + be) \\ 0 & c^2e \end{pmatrix} \in H$$

Следовательно, $H \triangle G$

№2 Гомоморфизмы в циклических группах определяется образом порождающего элемента. То есть, если

$$\varphi(1) = k, \text{ то } \forall x : \varphi(x) = kx$$

При этом, мы знаем, что нейтральный элемент должен переходить в нейтральный, следовательно, должно выполняться:

$$\varphi(0 \pmod{20}) = 20k \equiv 0 \pmod{12} \implies 5k \equiv 0 \pmod{3} \implies 3 \mid k$$

Поэтому подходят только:

$$k = \{0, 3, 6, 9\}$$

Ответ: 4 гомоморфизма ($\varphi(x) = kx,\ k = \{0, 3, 6, 9\}$)

№3 Мы знаем, что все элементы конечного порядка в группе $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ имеют вид $e^{2\pi ik/n}$, $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Пусть тогда $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$:

$$\varphi(x) = e^{2\pi ix} = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$$

Тогда $\operatorname{Ker}\varphi$ - это подгруппа (проверим три свойства) всех элементов конечного порядка в группе $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. То есть:

$$\operatorname{Im}\varphi = H$$

Также можно заметить:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{Z}$$

Применим теорему о гомоморфизме для φ:

$$Q/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad Q/\mathbb{Z} \cong H$$

№2 **1)** $(1) \implies (2):$

$$(m, n) = 1$$

Пусть G - группа, A, B - её подгруппы порядка m и n. Легко заметить, что $A \cap B$ - подгруппа и A, и B, следовательно по следствию из теоремы лагранжа:

$$\begin{cases} |A \cap B| \mid |A| \\ |A \cap B| \mid |B| \end{cases} \implies \begin{cases} |A \cap B| \mid m \\ |A \cap B| \mid m \end{cases} \implies |A \cap B| \mid (m, n) = 1$$

$$\implies |A \cap B| = 1 \implies A \cap B = \{e\}$$

2) $(2) \implies (1):$

Пусть m и n не взаимно просты, то есть $d = (m, n) > 1$.Рассмотрим циклическую группу $G = \mathbb{Z}_{m \cdot n}$. В G существует подгруппа A порядка m и подгруппа B порядка n. Пересечение $A \cap B$ также является подгруппой, порядок которой равен $(m, n) = d > 1$.

Следовательно, $A \cap B$ содержит элементы порядка d, отличные от нейтрального элемента e. Это противоречит условию