Домашнее задание на 17.04 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем, что матрицы в группе G и подгруппе H имеют вид:

$$G = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Покажем, что:

$$g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G$$

Пусть:

$$g \in G, h \in H \implies g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$g^{-1}Hg = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab + c(ad + be) \\ 0 & c^2 e \end{pmatrix} \in H$$

Следовательно, $H \triangle G$

№2 Гомоморфизмы в циклических группах определяется образом порождающего элемента. То есть, если

$$\varphi(1) = k, \text{ то } \forall x : \varphi(x) = kx$$

При этом, мы знаем, что нейтральный элемент должен переходить в нейтральный, следовательно, должно выполняться:

$$\varphi(0 \pmod{20}) = 20k \equiv 0 \pmod{12} \implies 5k \equiv 0 \pmod{3} \implies 3 \mid k$$

Поэтому подходят только:

$$k = \{0, 3, 6, 9\}$$

Ответ: 4 гомоморфизма $(\varphi(x) = kx,\ k = \{0, 3, 6, 9\})$

№3 Пусть $\varphi : Q \to C\backslash\{0\}$

$$\varphi(x) = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$$