Домашнее задание на 22.05 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Утверждение, что F - поле эквивалетно тому, что многочлен

$$f(z) = z^3 - z^2 + 1$$

неприводим. При этом:

$$f(z) = z^3 - z^2 + 1 \text{ неприводим} \quad \Leftrightarrow \quad \text{у } f \text{ нет корней в } \mathbb{Q}$$

Но, так как

$$f(\pm 1) \neq 0 \implies \text{у } f \text{ — нет корней в } Q \implies f \text{ — неприводим}$$

Следовательно, F — поле

Теперь нам известно, что:

$$\alpha = z + (f(z))$$

Значит, мы можем представить:

$$\frac{2\alpha^2 - 8\alpha + 9}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

Осталось найти коэфиценты a, b, c:

$$2\alpha^2 - 8\alpha + 9 = (a\alpha^2 + b\alpha + c)(\alpha^2 - 3\alpha + 1) =$$

$$= a\alpha^4 - 3a\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha^3 - 3b\alpha^2 + b\alpha + c\alpha^2 - 3c\alpha + c$$

но, так как $\alpha^3 - \alpha^2 + 1 = 0 \implies \alpha^3 = \alpha^2 - 1$, то

$$a\alpha^4 - 3a\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha^3 - 3b\alpha^2 + b\alpha + c\alpha^2 - 3c\alpha + c =$$

$$= a\alpha(\alpha^2 - 1) - 3a\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha^3 - 3b\alpha^2 + b\alpha + c\alpha^2 - 3c\alpha + c$$

$$= (-a - 2b + c)\,\alpha^2 \ + \ (-a + b - 3c)\,\alpha \ + \ (2a - b + c)$$

Составим систему:

$$\begin{cases} -a - 2b + c = 2, \\ -a + b - 3c = -8, \\ 2a - b + c = 9, \end{cases} \implies a = 3, \quad b = -2, \quad c = 1$$

Следовательно:

$$\frac{2\alpha^2 - 8\alpha + 9}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = 3\alpha^2 - 2\alpha + 1$$

Ответ: $3\alpha^2 - 2\alpha + 1$

№2 По условию:

$$g = x_2^4 x_3^5 + 2x_1 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2^2, \quad f = x_2^4 x_3 - 2x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2$$

Так как

$$LT(g) = x_1^2 x_2^2$$

то

$$g \to g - x_1 f = x_2^4 x_3^5 + 2x_1 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2^2 - (x_1 x_2^4 x_3 - 2x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2) =$$

$$= x_2^4 x_3^5 + x_1 x_2^4 x_3 + 2x_1^2 x_2 x_3^2 = g_1$$

Так как

$$LT(g_1) = 2x_1^2 x_2 x_3^2$$

то

$$g_1 \to g_1 + x_1 f = x_2^4 x_3^5 + x_1 x_2^4 x_3 + 2x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1(x_2^4 x_3 - 2x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2) =$$

$$= x_2^4 x_3^5 + x_1 x_2^4 x_3 + 2x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^4 x_3 - 2x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 =$$

$$= x_2^4 x_3^5 + 2x_1 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2^2 = g$$

Следовательно, мы вернулись к g, значит:

$$r = g_1 = x_2^4 x_3^5 + x_1 x_2^4 x_3 + 2x_1^2 x_2 x_3^2$$

Ответ: $x_2^4 x_3^5 + x_1 x_2^4 x_3 + 2x_1^2 x_2 x_3^2$

№3 Проверим, является ли множество $\{f_1, f_2, f_3\}$ системой Грёбнера:

$$f_1 = 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + x_2 x_3^2, \quad f_2 = 4x_1 x_3^2 + x_2 x_3^3 + 4, \quad f_3 = x_2^2 x_3^3 + 4x_2 + 8x_3$$

Возьмём S многочлен для f_2 и f_3:

$$\text{НОК}(x_1 x_3^2,\ x_2^2 x_3^3) = x_1 x_2^2 x_3^3 \implies S_{23} = \frac{x_2^2 x_3}{4} f_2 \ - \ x_1 f_3 =$$

$$= \frac{x_2^2 x_3}{4}(4x_1 x_3^2 + x_2 x_3^3 + 4) - x_1\big(x_2^2 x_3^3 + 4x_2 + 8x_3\big) =$$

$$= \big(x_1 x_2^2 x_3^3 - x_1 x_2^2 x_3^3\big) + \frac{1}{4} x_2^3 x_3^4 + x_2^2 x_3 - 4x_1 x_2 - 8x_1 x_3 \ =$$

$$= \ \frac{1}{4} x_2^3 x_3^4 + x_2^2 x_3 - 4x_1 x_2 - 8x_1 x_3 = g_1$$

Так как $LT(g_1) = -4x_1 x_2$, то редуцируем g_1 с помощью f_1:

$$g_1 \to g_1 + 2f_1 = \frac{1}{4} x_2^3 x_3^4 + x_2^2 x_3 + 2\, x_2 x_3^2 = g_2$$

Так как $LT(g_2) = x_2^2 x_3$, то редуцируем g_2 с помощью f_3:

$$g_2 \to g_2 - \frac{1}{4} x_2 x_3 f_3 = 0$$

Таким образом, остаток S_{23} равен нулю

Возьмём S многочлен для f_1 и f_2:

$$S_{12} = \frac{x_3^2}{2} f_1 \ - \ \frac{x_2}{4} f_2$$

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{x_3^2}{2}\big(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2\big) \ - \ \frac{x_2}{4}\big(4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 + 4\big) \\ &= \big(x_1x_2x_3^2 - x_1x_2x_3^2\big) + 2x_1x_3^3 + \frac{1}{4}\, x_2^2x_3^4 - x_2x_3 \\ &= \ 2x_1x_3^3 + \tfrac{1}{4}\, x_2^2x_3^4 - x_2x_3 \ = \ g_1 \end{aligned}$$

Поскольку $LT(g_1) = 2x_1x_3^3$, редуцируем по f_2:

$$g_1 - \tfrac{1}{2}\, f_2 = \big(2x_1x_3^3 - 2x_1x_3^3\big) + \tfrac{1}{4}\, x_2^2x_3^4 - x_2x_3 - 2 \ = \ \tfrac{1}{4}\, x_2^2x_3^4 - x_2x_3 - 2 \ = \ g_2$$

Теперь $LT(g_2) = \frac{1}{4} x_2^2 x_3^4$, редуцируем по f_3:

$$g_2 \ - \ \tfrac{1}{4} x_3\, f_3 = \big(\tfrac{1}{4}x_2^2x_3^4 - \tfrac{1}{4}x_2^2x_3^4\big) - x_2x_3 - 2 + 2 \ = \ -x_2x_3 + 0 \ = \ g_3$$

Наконец, $LT(g_3) = -x_2x_3$, снова редуцируем по f_1:

$$g_3 \ + \ \big(-\tfrac{1}{2}x_3\big)\, f_1 = \big(-x_2x_3 + x_2x_3\big) + 0 \ = \ 0$$

Таким образом, остаток S_{12} равен нулю

$$LT(f_1) = x_1x_2, \quad LT(f_3) = x_2^2x_3^3,$$

$$\text{НОК}(x_1x_2,\ x_2^2x_3^3) = x_1x_2^2x_3^3 \ \Longrightarrow \ S_{13} = \frac{x_2x_3^3}{2}\, f_1 \ - \ x_1\, f_3$$

$$S_{13} = \frac{x_2x_3^3}{2}\bigl(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2\bigr) - x_1\bigl(x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3\bigr)$$
$$= \bigl(x_1x_2^2x_3^3 - x_1x_2^2x_3^3\bigr) + 2x_1x_2x_3^4 + \tfrac{1}{2}\,x_2^2x_3^5 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3$$
$$= \ 2x_1x_2x_3^4 + \tfrac{1}{2}\,x_2^2x_3^5 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 \ = \ h_1$$

Редукция по f_1 ($LT(h_1) = 2x_1x_2x_3^4$):

$$h_1 - x_3^3\,f_1 = \bigl(2x_1x_2x_3^4 - 2x_1x_2x_3^4\bigr) + \tfrac{1}{2}\,x_2^2x_3^5 - 8x_1x_3 + 4x_1x_3 \ = \ \tfrac{1}{2}\,x_2^2x_3^5 - 4x_1x_3 \ = \ h_2$$

Редукция по f_2 ($LT(h_2) = \frac{1}{2}x_2^2x_3^5$):

$$h_2 - \tfrac{1}{8}x_2\,f_2 = \bigl(\tfrac{1}{2}x_2^2x_3^5 - \tfrac{1}{2}x_2^2x_3^5\bigr) - 4x_1x_3 - \tfrac{1}{8}x_2^2x_3^4 + 0 \ = \ -4x_1x_3 - \tfrac{1}{8}x_2^2x_3^4 \ = \ h_3$$

Редукция по f_3 ($LT(h_3) = -4x_1x_3$):

$$h_3 \ + \ \tfrac{1}{2}x_1\,f_3 = \bigl(-4x_1x_3 + 4x_1x_3\bigr) - \tfrac{1}{8}x_2^2x_3^4 + 0 \ = \ -\tfrac{1}{8}x_2^2x_3^4 \ = \ h_4$$

И снова по f_3 ($LT(h_4) = -\frac{1}{8}x_2^2x_3^4$):

$$h_4 \ + \ \tfrac{1}{8}x_3\,f_3 = \bigl(-\tfrac{1}{8}x_2^2x_3^4 + \tfrac{1}{8}x_2^2x_3^4\bigr) \ = \ 0$$

Таким образом, остаток S_{13} равен нулю

Получается, что любой S многочлен редуцируем к нулю, а значит это система Грёбнера.

№4 ($\Rightarrow$) Пусть F — система Грёбнера.

По определению, идеал старших членов $\langle \mathrm{LT}(I)\rangle$ порождается старшими членами элементов F, то есть

$$\langle \mathrm{LT}(F)\rangle = \langle \mathrm{LT}(I)\rangle$$

Рассмотрим множество старших членов $\{\mathrm{LT}(f) \mid f \in F\}$. В этом множестве должен существовать элемент с минимальным старшим членом (по лексикографическому порядку).

Обозначим такой элемент $\mathrm{LT}(f)$, где $f \in F$.

Так как $\mathrm{LT}(f)$ делит все остальные $\mathrm{LT}(g)$ для $g \in F$ (иначе $\mathrm{LT}(g)$ не принадлежал бы идеалу, порождённому $\mathrm{LT}(f)$) то сам многочлен f делит каждый $g \in F$.

Это следует из того, что старший член f делит старший член g, а остальные члены g могут быть редуцированы с помощью f.

($\Leftarrow$) Пусть существует $f \in F$, который делит любой $g \in F$.

Тогда старший член $\mathrm{LT}(f)$ делит $\mathrm{LT}(g)$ для всех $g \in F$.

Следовательно, идеал старших членов $\langle \mathrm{LT}(F) \rangle$ порождается $\mathrm{LT}(f)$.

Это означает, что $\langle \mathrm{LT}(F) \rangle = \langle \mathrm{LT}(I) \rangle$, так как все старшие члены элементов F уже содержатся в идеале, порождённом $\mathrm{LT}(f)$. По определению, F является системой Грёбнера.

Таким образом, F — система Грёбнера тогда и только тогда, когда существует $f \in F$, делящий все элементы F.