

Домашнее задание на 17.04 (Алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем, что матрицы в группе G и подгруппе H имеют вид:

$$G = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Покажем, что:

$$g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G$$

Пусть:

$$g \in G, h \in H \implies g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$g^{-1}Hg = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab + c(ad + be) \\ 0 & c^2e \end{pmatrix} \in H$$

Следовательно, $H \triangleleft G$

№2 Гомоморфизмы в циклических группах определяется образом порождающего элемента. То есть, если

$$\varphi(1) = k, \text{ то } \forall x : \varphi(x) = kx$$

При этом, мы знаем, что нейтральный элемент должен переходить в нейтральный, следовательно, должно выполняться:

$$\varphi(0 \pmod{20}) = 20k \equiv 0 \pmod{12} \implies 5k \equiv 0 \pmod{3} \implies 3 \mid k$$

Поэтому подходят только:

$$k = \{0, 3, 6, 9\}$$

Ответ: 4 гомоморфизма ($\varphi(x) = kx$, $k = \{0, 3, 6, 9\}$)

№3 Мы знаем, что все элементы конечного порядка в группе $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеют вид $e^{2\pi i k/n}$, $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Пусть тогда $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\varphi(x) = e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$$

Тогда $\text{Ker } \varphi$ - это подгруппа (проверим три свойства) всех элементов конечного порядка в группе $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. То есть:

$$\text{Im } \varphi = H$$

Также можно заметить:

$$\text{Ker } \varphi = \mathbb{Z}$$

Применим теорему о гомоморфизме для φ :

$$Q / \text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi \quad \Leftrightarrow \quad Q / \mathbb{Z} \cong H$$

№2 1) (1) \implies (2) :

$$(m, n) = 1$$

Пусть G - группа, A, B - её подгруппы порядка m и n . Легко заметить, что $A \cap B$ - подгруппа и A , и B , следовательно по

следствию из теоремы лагранжа:

$$\begin{aligned} \begin{cases} |A \cap B| \mid |A| \\ |A \cap B| \mid |B| \end{cases} &\implies \begin{cases} |A \cap B| \mid m \\ |A \cap B| \mid n \end{cases} \implies |A \cap B| \mid (m, n) = 1 \\ &\implies |A \cap B| = 1 \implies A \cap B = \{e\} \end{aligned}$$

2) (2) \implies (1) :