Домашнее задание на 18.12 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Для нахождения ФСР однородных систем линейных уравнений, мы будем использовать метод Гаусса для приведения системы к ступенчатому виду.

1.1. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\ 3x_4 + 2x_5 + 17x_6 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 2x_5 - 5x_6 = 0 \\ 3x_4 - 2x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

Запишем в виде матрицы СЛУ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 & | & 0 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 6 & 0 & 2 & | & 0 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -18 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & -7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -9 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & -2 & -16 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 27 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -9 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & -25 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -9 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & -7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & -7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$x = \begin{pmatrix} 2x_2 - 4x_3 + 7x_6 \\ x_2 \\ x_3 \\ -\frac{8}{3}x_6 \\ -\frac{9}{2}x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} x_6$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$

1.2. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$x = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.3. $\begin{cases} x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Составим матрицу СЛУ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Приведем к улучшенному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ -3x_4 \\ -\frac{2}{5}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

1.4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

Составим матрицу СЛУ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Приведем к улучшенному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$\text{ФСР нету, единственное решение: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: нету

№2 Рассмотрим многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ степени не выше 3. Мы ищем подпространство, состоящее из многочленов, удовлетворяющих условиям $f(1) = 0$ и $f'(1) = 0$. 1. **Первое условие**: $f(1) = 0$

Подставим $x = 1$:

$$f(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

Подставим $x = 1$:

$$f'(1) = a_1 + 2a_2 \cdot 1 + 3a_3 \cdot 1^2 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$$

Теперь у нас есть система уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Составим матрицу СЛУ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \implies \text{УСВ: } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Общее решение: $\begin{pmatrix} a_3 + 2a_4 \\ -2a_3 - 3a_4 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} a_4$

ФСР: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Следовательно базис искомого подпространства будет:

$$1 - 2x + x^2 = 0, \quad 2 - 3x + x^3 = 0$$

Размерность подпространства равна количеству векторов в базисе, то есть:

$$\dim = 2.$$

№3 Для доказательства того, что множество матриц X пространства матриц $n \times n$, для которых $\operatorname{tr}(XY) = 0$ при некоторой фиксированной матрице Y, является подпространством, необходимо проверить три условия:

1. Наличие нулевого элемента.
2. Замкнутость относительно сложения.
3. Замкнутость относительно умножения на скаляр.

1) Рассмотрим нулевую матрицу:

$$\operatorname{tr}(0 \cdot Y) = \operatorname{tr}(0) = 0.$$

Таким образом, нулевая матрица принадлежит множеству.

2) Пусть X_1 и X_2 - матрицы, для которых $\operatorname{tr}(X_1 Y) = 0$ и $\operatorname{tr}(X_2 Y) = 0$. Рассмотрим их сумму:

$$\operatorname{tr}((X_1 + X_2)Y) = \operatorname{tr}(X_1 Y) + \operatorname{tr}(X_2 Y) = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, $X_1 + X_2$ также принадлежит множеству.

3) Пусть X - матрица, для которой $\operatorname{tr}(XY) = 0$, и c - скаляр. Рассмотрим матрицу cX:

$$\operatorname{tr}(cXY) = c \operatorname{tr}(XY) = c \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, cX также принадлежит множеству.

Таким образом, множество матриц X является подпространством.

Теперь найдём базис и размерность для $n = 2$ и $Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Рассмотрим матрицы $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Условие $\operatorname{tr}(XY) = 0$ можно записать как:

$$\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 2a + 5b & 3a + 4b \\ 2c + 5d & 3c + 4d \end{pmatrix}\right).$$

Это равняется:

$$(2a + 5b) + (3c + 4d) = 0.$$

Таким образом, у нас есть линейное уравнение:

$$2a + 5b + 3c + 4d = 0.$$

Теперь можем выбрать свободные переменные a, b, c и выразить d через них.

Выберем базисные векторы:

1. $a = 1, b = 0, c = 0 \to d = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
2. $a = 0, b = 1, c = 0 \to d = -\frac{5}{4} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$
3. $a = 0, b = 0, c = 1 \to d = -\frac{3}{4} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Таким образом, базис подпространства:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \right\}.$$

Размерность: 3

№4 Для того чтобы выбрать линейно независимую систему из векторов v_1, v_2, v_3, v_4 и дополнить её до базиса $\mathbb{R}^5$, мы можем использовать метод Гаусса для нахождения линейной зависимости между векторами.

Составим матрицу из векторов:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & -2 & -8 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, мы видим, что v_3 выражается через остальные. А значит линейно-независимый набор будет состоять из векторов:

$$v_1, v_2, v_4$$

И чтобы их дополнить до базиса $\mathbb{R}^5$, нужно взять векторы:

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: v_1, v_2, v_4, e_4, e_5

№5 Для нахождения базиса в подпространстве U, заданном линейной оболочкой матриц, мы можем использовать метод Гаусса для нахождения линейной зависимости между матрицами.

Дано множество матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Преобразуем каждую матрицу в столбец и составим из них одну большую. Приведём её к УСВ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что 3я и 4ая матрица выражается через остальные. Значит:

$$A_3, A_4 \in \langle A_1, A_2, A_5 \rangle \implies \langle A_1, A_2, A_5 \rangle = \langle A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \rangle$$

Поэтому A_1, A_2, A_5 - базис в U

<u>Найдём какой-нибудь другой базис в U:</u>

Приведём ту же матрицу к СВ, но теперь преобразованиями стобцов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \implies \text{СВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

После таких преобразований линейная оболочка не поменялась, а значит в U есть базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: 5.1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.2: A_1, A_2, A_5

№6 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ \lambda & 1 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Для нахождения ранга матрицы A в зависимости от параметра λ, мы будем использовать метод Гаусса для приведения матрицы к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ \lambda & 1 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & -14 \\ \lambda & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 2\lambda-4 & 3-3\lambda \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Получаем, что, если $\lambda = 5$:

$$\mathrm{rk} A = 2$$

Иначе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & 5-\lambda \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rk} A = 3$$

Ответ: $\begin{cases} \lambda = 5 : \mathrm{rk} A = 2 \\ \lambda \neq 5 : \mathrm{rk} A = 3 \end{cases}$