Домашнее задание на 24.04 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем с.в. и с.з.:

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 1 - i, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Диагонализуем A:

$$A = P\,D\,P^{-1}, \quad P = \big(v_1,\ v_2\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad D = \operatorname{diag}(1+i,\ 1-i)$$

Тогда

$$A^{21} = P\,D^{21}\,P^{-1} = P \begin{pmatrix} (1+i)^{21} & 0 \\ 0 & (1-i)^{21} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Получаем

$$A^{21} = P \begin{pmatrix} -2^{10}(1+i) & 0 \\ 0 & -2^{10}(1-i) \end{pmatrix} P^{-1} = -2^{10}\,P\,D\,P^{-1} = -2^{10}\,A = -1024 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $-1024 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

№2 Рассмотрим оператор

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0.85x + 0.10y \\ 0.15x + 0.90y \end{pmatrix},$$

действующий на векторе $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, где x_0m– число здоровых, y_0 – число больных на острове с населением 10000 человек (из них вначале выявлено 100 больных).

Ищем с.з. из

$$\det\bigl(M - \lambda I\bigr) = \det \begin{pmatrix} 0.85 - \lambda & 0.10 \\ 0.15 & 0.90 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Вычислим:

$$(0.85 - \lambda)(0.90 - \lambda) - 0.10 \cdot 0.15 = \lambda^2 - 1.75\lambda + 0.75 = 0$$

Для $\lambda_1 = 1$ находим собственный вектор $v \neq 0$:

$$Mv = v \implies \begin{cases} 0.85x + 0.10y = x, \\ 0.15x + 0.90y = y, \end{cases} \implies \quad 0.10y = 0.15x \implies y = 1.5\,x.$$

Можно взять $v_1 = (1, 1.5)^\top$.

Для $\lambda_2 = 0.75$ получился бы другой вектор, но при возведении в степень вклад этого собственного компонента $0.75^n \to 0$ при $n \to \infty$.

$$\varphi^n(v_0) = c_1\,(1)^n\,v_1 \;+\; c_2\,(0.75)^n\,v_2$$

поскольку $(0.75)^n \to 0$. Константу c_1 выбираем так, чтобы сумма компонент равнялась общей численности 10000:

$$v_1 = (1, 1.5), \quad 1 + 1.5 = 2.5, \quad c_1 = \frac{10000}{2.5} = 4000$$

Итак

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(v_0) = c_1\,v_1 = 4000 \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$