Домашнее задание на 12.03 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Найдём базис пространства $U^\perp$ для

$$U = \langle (1,0,2,1)^T, (2,1,0,3)^T, (0,1,-2,1)^T \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

Для этого найдём ФСР системы:

$$\begin{cases} (1,0,2,1)\cdot(x,y,z,t) = x+2z+t = 0 \\ (2,1,0,3)\cdot(x,y,z,t) = 2x+y+3t = 0 \\ (0,1,-2,1)\cdot(x,y,z,t) = y-2z+t = 0 \end{cases}$$

Запишем матрицу ОСЛУ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

Базис пространства $U^\perp$:

$$U^\perp = \langle (-1,-1,0,1)^T \rangle$$

Ответ: $(-1,-1,0,1)^T$

№2 Найдём базис $U^\perp$, если $U \subseteq \mathbb{R}^4$ задано уравнением

$$5x_1+6x_2+7x_3+8x_4=0 \implies x_1=-\frac{6}{5}x_2-\frac{7}{5}x_3-\frac{8}{5}x_4 \implies \dim U=3$$

У пространства $U^\perp$ размерность:

$$\dim(U^\perp)=3-1=1$$

Значит в его базисе ровно один вектор:

$$(a,b,c,d)$$

При этом должно выполняться:

$$(a,b,c,d)\cdot(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$$

Следовательно, нужно решить систему:

$$\begin{cases} 5x_1+6x_2+7x_3+8x_4=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \end{cases} \implies (a,b,c,d,e)=(5,6,7,8)$$

Ответ: $(5,6,7,8)$

№3 Проверим ортогональность векторов:

$$(1,1,1,2)^T \text{ и } (1,2,3,-3)^T$$

Для этого найдём их скалярное произведение:

$$(1,1,1,2)^T\cdot(1,2,3,-3)^T=1+2+3-6=0$$

Значит, они ортогональны. Теперь дополним их до ортонормированного базиса $\mathbb{R}^4$.

- **Первый вектор**: $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+2^2} = \sqrt{7}$. Нормированный:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,2).$$

- **Второй вектор**: $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2+(-3)^2} = \sqrt{23}$. Нормированный:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{23}}(1,2,3,-3).$$

Решим систему уравнений для векторов, ортогональных $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

Приведём матрицу ОСЛУ к УСВ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Базис ортогонального дополнения: $\mathbf{w}_3 = (1,-2,1,0)$, $\mathbf{w}_4 = (-7,5,0,1)$.

- **Третий вектор**: $\mathbf{w}_3 = (1,-2,1,0)$. Нормированный:

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0).$$

- **Четвёртый вектор**: Ортогонализируем $\mathbf{w}_4$ относительно $\mathbf{w}_3$:

$$\mathbf{w}_4' = \mathbf{w}_4 - \frac{\mathbf{w}_4\cdot\mathbf{w}_3}{\mathbf{w}_3\cdot\mathbf{w}_3}\mathbf{w}_3 = (-7,5,0,1) + \frac{17}{6}(1,-2,1,0).$$

После упрощения:

$$\mathbf{w}_4' = \left(-\frac{25}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{17}{6}, 1\right).$$

Нормированный:

$$\mathbf{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{\frac{161}{6}}}\left(-\frac{25}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{17}{6}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{161}}(-25, -4, 17, 6).$$

Ответ:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,2), \quad \frac{1}{\sqrt{23}}(1,2,3,-3), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0), \quad \frac{1}{\sqrt{161}}(-25,-4,17,6)\right\}$$

№4 Найдём ортонормальный базис подпространства $\langle 1, x, x^2, x^3\rangle$ в $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Пусть:

$$v_1 = 1, \quad v_2 = x, \quad v_3 = x^2, \quad v_4 = x^3$$

- **Первый вектор**: $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 dt} = \sqrt{2}$

  Нормированный:

  $$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- **Второй вектор**:

$$v_2 \cdot v_1 = \int_{-1}^{1} x dx = 0, \quad v_1 \cdot v_1 = \int_{-1}^{1} 1 dx = 2$$

$$v_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = x$$

$$\|v_2'\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Нормированный:

$$\mathbf{e}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

- **Третий вектор**:

$$v_3 \cdot v_2 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0, \quad v_3 \cdot v_1 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad v_1 \cdot v_1 = \int_{-1}^{1} 1 dt = 2$$

$$v_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \frac{v_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\|v_3'\| = \sqrt{\frac{2\sqrt{10}}{15}}$$

Нормированный:

$$\mathbf{e}_3 = \frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2 - \frac{1}{3})$$

- **Четвёртый вектор**:

$$v_4' = v_4 - \frac{v_4 \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} v_3 - \frac{v_4 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \frac{v_4 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = x^3 - \frac{3}{5} x$$

$$\|v_4'\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{3}{5} x \right)^2 dx} = \frac{2\sqrt{14}}{35}$$

Нормированный:

$$\mathbf{e}_4 = \frac{5\sqrt{14}}{4} \left(x^3 - \frac{3}{5} x \right)$$

Ответ:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x, \frac{3\sqrt{10}}{4} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right), \frac{5\sqrt{14}}{4} \left(x^3 - \frac{3}{5} x \right) \right\}$$

№5 Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением. Найдём проекцию вектора $v = (0,0,1)^T$ на подпространство $S = \langle (1,0,1)^T, (0,1,2)^T \rangle$ тремя способами.

5.1. Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$f_1 = (1,0,1)^T,$$

$$f_2 = (0,1,2)^T - \frac{(f_1, (0,1,2)^T)}{(f_1, f_1)} f_1 = (-1,1,1)^T.$$

Найдём проекцию вектора v на S:

$$\mathrm{pr}_S v = \frac{(v, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 + \frac{(v, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2.$$

Вычислим скалярные произведения:

$$(v, f_1) = 1, \quad (f_1, f_1) = 2, \quad (v, f_2) = 1, \quad (f_2, f_2) = 3.$$

Подставим:

$$\mathrm{pr}_S v = \frac{1}{2}(1,0,1)^T + \frac{1}{3}(-1,1,1)^T = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)^T.$$

5.2. Составим матрицу A, столбцы которой — базис S:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $A^T A$ и $(A^T A)^{-1}$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad (A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдём $A^T v$:

$$A^T v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим проекцию:

$$\mathrm{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

5.3. Найдём базис $S^\perp$. Решим систему:

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

Базис $S^\perp$: $w = (-1, -2, 1)^T$.

Найдём проекцию v на $S^\perp$:

$$\mathrm{pr}_{S^\perp} v = \frac{(v, w)}{(w, w)} w = \frac{1}{6}(-1, -2, 1)^T.$$

Найдём проекцию на S:

$$\mathrm{pr}_S v = v - \mathrm{pr}_{S^\perp} v = (0, 0, 1)^T - \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)^T = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)^T.$$

Ответ: Проекция вектора v на подпространство S равна:

$$\mathrm{pr}_S v = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}^T$$

№6 Найдём ортогональную проекцию многочлена x^4 на подпространство $\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ в $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Ищем проекцию в виде $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Разность $x^4 - p(x)$ должна быть ортогональна каждому базисному вектору подпространства. Это даёт систему уравнений:

1) Для базисного вектора 1:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - a - bx - cx^2 - dx^3)\, dx = 0.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_{-1}^{1} x^4\, dx - a \int_{-1}^{1} 1\, dx - c \int_{-1}^{1} x^2\, dx = 0.$$

Подставляем значения:

$$\frac{2}{5} - 2a - \frac{2}{3}c = 0 \implies a + \frac{1}{3}c = \frac{1}{5}.$$

2) Для базисного вектора x:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - a - bx - cx^2 - dx^3)x\, dx = 0.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_{-1}^{1} x^5\, dx - b \int_{-1}^{1} x^2\, dx - d \int_{-1}^{1} x^4\, dx = 0.$$

Подставляем значения:

$$0 - \frac{2}{3}b - \frac{2}{5}d = 0 \implies \frac{1}{3}b + \frac{1}{5}d = 0.$$

3) Для базисного вектора x^2:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - a - bx - cx^2 - dx^3)x^2 \, dx = 0.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_{-1}^{1} x^6 \, dx - a \int_{-1}^{1} x^2 \, dx - c \int_{-1}^{1} x^4 \, dx = 0.$$

Подставляем значения:

$$\frac{2}{7} - \frac{2}{3}a - \frac{2}{5}c = 0 \implies \frac{1}{3}a + \frac{1}{5}c = \frac{1}{7}.$$

4) Для базисного вектора x^3:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - a - bx - cx^2 - dx^3)x^3 \, dx = 0.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_{-1}^{1} x^7 \, dx - b \int_{-1}^{1} x^4 \, dx - d \int_{-1}^{1} x^6 \, dx = 0.$$

Подставляем значения:

$$0 - \frac{2}{5}b - \frac{2}{7}d = 0 \implies \frac{1}{5}b + \frac{1}{7}d = 0.$$

Решаем систему для a и c:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{3}c = \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{5}c = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

Решением являются:

$$a = -\frac{3}{35}, \quad c = \frac{6}{7}.$$

Решаем систему для b и d:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}b + \frac{1}{5}d = 0, \\ \frac{1}{5}b + \frac{1}{7}d = 0. \end{cases}$$

Решением являются:

$$b = 0, \quad d = 0.$$

Ортогональная проекция многочлена x^4 на подпространство $\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ равна:

$$p(x) = \frac{6}{7}x^2 - \frac{3}{35}$$

№7 Докажем, что $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$**:**

(a) $(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$**:**

Пусть $x \in (U + W)^\perp$. Тогда для всех $u \in U$, $w \in W$:

$$\langle x, u + w \rangle = 0$$

В частности:

- При $w = 0$: $\langle x, u \rangle = 0$ для всех $u \in U \Rightarrow x \in U^\perp$
- При $u = 0$: $\langle x, w \rangle = 0$ для всех $w \in W \Rightarrow x \in W^\perp$

Следовательно, $x \in U^\perp \cap W^\perp$.

(b) $U^\perp \cap W^\perp \subseteq (U + W)^\perp$**:**

Пусть $x \in U^\perp \cap W^\perp$. Тогда:

$$\langle x, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U, \quad \langle x, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$$

Для любого $u + w \in U + W$:

$$\langle x, u + w \rangle = \langle x, u \rangle + \langle x, w \rangle = 0 + 0 = 0$$

Следовательно, $x \in (U + W)^\perp$.

Докажем, что $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$**:**

(a) $U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$**:**

Пусть $x = a + b$, где $a \in U^\perp$, $b \in W^\perp$. Для любого $v \in U \cap W$:

$$\langle x, v \rangle = \langle a, v \rangle + \langle b, v \rangle = 0 + 0 = 0$$

Следовательно, $x \in (U \cap W)^\perp$.

(b) $(U \cap W)^\perp \subseteq U^\perp + W^\perp$**:**

В конечномерном пространстве ($\dim V < \infty$) воспользуемся свойством $(S^\perp)^\perp = S$. Применим первый результат к $U^\perp$ и $W^\perp$:

$$(U^\perp + W^\perp)^\perp = (U^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp = U \cap W$$

Взяв ортогональное дополнение обеих частей:

$$(U \cap W)^\perp = \left((U^\perp + W^\perp)^\perp\right)^\perp = U^\perp + W^\perp$$