Домашнее задание на 19.03 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Векторы

$$(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T, (7, 8, 9)^T$$

Ортогональны пространству U. Найдём среди них ЛНЗ векторы - это и будет базис $U^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T \text{ — базис } U^\perp$$

Ответ: $(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T$

№2 Пусть:

$$v = (5, 6, 7, 8)^T$$

Найдём базис $U^\perp$, это будет:

$$e = (1, 2, 3, 4)^T$$

Следовательно

$$pr_{U^\perp} = ort_U = \frac{(v, e)}{(e, e)} e = \frac{7}{3} (1, 2, 3, 4)^T$$

Значит
$$pr_U = v - ort_U = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 0, \frac{28}{3}\right)^T$$
Найдём расстояние от v до U:
$$\rho(v, U) = |ort_U| = \frac{7\sqrt{30}}{3}$$

Ответ: $\frac{7}{3}\left(1,2,3,4\right)^T$, $\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 0, \frac{28}{3}\right)^T$ и $\frac{7\sqrt{30}}{3}$

№3
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \implies A_1 \cdot A_1^T = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} & 0 \\ 0 & \frac{13}{36} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \implies A_2 \cdot A_2^T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \implies A_3 \cdot A_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: Только A_3

№4
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть
$$e_1 = (1, 0, 1)^T, \quad e_2 = (2, 1, 0)^T$$

Найдём ортонормированный базис:

$$f_1 = (1, 0, 1)^T$$

$$f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = (1, 1, -1)^T$$

$$\frac{f_1}{|f_1|} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = q_1, \quad \frac{f_2}{|f_2|} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = q_2$$

Следовательно:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$R = Q^T \cdot A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

№5

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Найдём x_0 такое, что:

$$\rho(Ax_0, b) \to \min$$

x_0 - псевдорешение.

$$\rho(Ax_0, b) = f(x_1, x_2) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - 5 \\ x_2 - 4 \\ x_1 + x_2 - 3 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \sqrt{(-4+x_2)^2 + (-3+x_1+x_2)^2 + (-5+x_1+3x_2)^2}$$

$$g(x_1,x_2) = (-4+x_2)^2 + (-3+x_1+x_2)^2 + (-5+x_1+3x_2)^2 =$$

$$= 50 - 16x_1 + 2x_1^2 - 44x_2 + 8x_1x_2 + 11x_2^2$$

$$\begin{cases} g(x_1,x_2)'_{x_1} = 4\,(x_1 + 2\,x_2 - 4) = 0 \\ g(x_1,x_2)'_{x_2} = 2\,(11\,x_2 + 4\,x_1 - 22) = 0 \end{cases} \implies \text{Стационарные точки: } (0,2)$$

Второй дифференциал:

$$d^2 g_{(x_1,x_2)}(\bar{h}) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x_1,x_2)'_{x_1x_1} & g(x_1,x_2)'_{x_1x_2} \\ g(x_1,x_2)'_{x_2x_1} & g(x_1,x_2)'_{x_2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 4, \quad \delta_2 = 88 - 64 = 24$$

Следовательно, $d^2 g_{(x_1,x_2)}(\bar{h}) > 0$ по критерию Сильвестра, а значит $(0,2)$ - точка минимума функции h, а значит и точка минимума функции f. Поэтому $(0,2)$ - псевдорешение

Ответ: $(0,2)$

№6 Пусть матрица A - ортогональная, тогда столбцы и строки образуют ортонормированные базисы. Это значит, что:

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \begin{cases} 1, \text{ при } i = j \\ 0, \text{ при } i \neq j \end{cases} \qquad (A_{(i)}, A_{(j)}) = \begin{cases} 1, \text{ при } i = j \\ 0, \text{ при } i \neq j \end{cases} \qquad (*)$$

Следовательно, в любом столбце и в любой строке ровно одна 1. Т.к. иначе не будет выполняться одно из условий $(*)$.

Вывод: все ортогональные матрицы порядка n получаются перестановкой столбцов и строк единичной матрицы