Домашнее задание на 05.06 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 1.1 Дано

$$6x^2 - 5y^2 + 12x - 10y + 31 = 0$$

Сгруппируем члены с x и y:

$$(6x^2 + 12x) + (-5y^2 - 10y) + 31 = 0$$

Вынесем коэффициенты за скобки:

$$6(x^2 + 2x) - 5(y^2 + 2y) + 31 = 0$$

Дополним до полных квадратов:

$$6(x^2 + 2x + 1 - 1) - 5(y^2 + 2y + 1 - 1) + 31 = 0$$

$$6[(x+1)^2 - 1] - 5[(y+1)^2 - 1] + 31 = 0$$

Раскроем скобки:

$$6(x+1)^2 - 6 - 5(y+1)^2 + 5 + 31 = 0$$

$$6(x+1)^2 - 5(y+1)^2 + 30 = 0$$

Перенесем константу вправо:

$$6(x+1)^2 - 5(y+1)^2 = -30$$

Разделим обе части на -30:

$$\frac{6(x+1)^2}{-30} - \frac{5(y+1)^2}{-30} = 1$$

Упростим:

$$-\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{6} = 1$$

$$\frac{(y+1)^2}{6} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1$$

Каноническое уравнение:

$$\frac{(y')^2}{6} - \frac{(x')^2}{5} = 1$$

где $x' = x + 1$, $y' = y + 1$. Выражение старых координат через новые:

$$x = x' - 1, \quad y = y' - 1$$

Тип кривой: гипербола (так как уравнение имеет вид $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$).

1.2 Дано

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

Квадратичная форма:

$$x^2 - 2xy + y^2$$

Матрица квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-1=\lambda^2-2\lambda=0$$

Собственные значения: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$.

- Для $\lambda_1=0$:

  $$(A-0I)\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=0 \implies v_1-v_2=0 \implies v_1=v_2$$

  Нормированный собственный вектор: $\mathbf{v}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top$

- Для $\lambda_2=2$:

  $$(A-2I)\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=0 \implies -v_1-v_2=0 \implies v_1=-v_2.$$

  Нормированный собственный вектор: $\mathbf{v}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top$.

Матрица перехода:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Подставляем:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} \implies x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

Сумма квадратичных членов:

$$x^2-2xy+y^2=\frac{1}{2}(x'^2-2x'y'+y'^2)-(x'^2-y'^2)+\frac{1}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2)=2y'^2$$

Исходное уравнение после подстановки:

$$2y'^2+(-8\sqrt{2}x'+2\sqrt{2}y')+25=0 \implies 2y'^2-8\sqrt{2}x'+2\sqrt{2}y'+25=0.$$

Группируем члены с y':

$$2y'^2 + 2\sqrt{2}y' = 8\sqrt{2}x' - 25.$$

Выделяем полный квадрат для y':

$$2\left(y'^2 + \sqrt{2}y'\right) = 8\sqrt{2}x' - 25.$$

$$y'^2 + \sqrt{2}y' = \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Подставляем:

$$2\left[\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] = 8\sqrt{2}x' - 25,$$

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 8\sqrt{2}x' - 25,$$

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 8\sqrt{2}x' = -24.$$

Переносим константу:

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}x' - 24.$$

$$\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{24}{8\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Из формул поворота:

$$x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad y' = -\frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

Выражаем через x'', y'':

$$x' = x'' + \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad y' = y'' - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Подставляем в формулы поворота:

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} = \frac{\left(x'' + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - \left(y'' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{x'' - y'' + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}} + 2,$$

$$y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} = \frac{\left(x'' + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(y'' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{x'' + y'' + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}} + 1.$$

Таким образом, старые координаты выражаются через новые (x'', y'') как:

$$x = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}} + 2, \quad y = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}} + 1.$$

переобозначим новые координаты: $x' = x''$, $y' = y''$.

Каноническое уравнение:

$$(y')^2 = 4\sqrt{2}x'.$$

Тип кривой: парабола (уравнение вида $y^2 = 4px$ с $p = \sqrt{2}$).

Новая система координат: старые координаты выражаются через новые (x', y') как:

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} + 2, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} + 1.$$

№2 2.1 Дано

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$$

Сгруппируем члены с x, y, z:

$$(x^2 - 6x) + (4y^2 + 8y) + (9z^2 - 36z) = 0$$

Выделяем полные квадраты:

$$(x-3)^2 - 9 + 4(y+1)^2 - 4 + 9(z-2)^2 - 36 = 0$$

$$(x-3)^2 + 4(y+1)^2 + 9(z-2)^2 = 49$$

Разделим на 49:

$$\frac{(x-3)^2}{49} + \frac{4(y+1)^2}{49} + \frac{9(z-2)^2}{49} = 1$$

Упростим:

$$\frac{(x-3)^2}{7^2} + \frac{(y+1)^2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2} + \frac{(z-2)^2}{\left(\frac{7}{3}\right)^2} = 1$$

Новые координаты:

$$x' = x-3, \quad y' = y+1, \quad z' = z-2$$

Каноническое уравнение:

$$\frac{(x')^2}{49} + \frac{(y')^2}{\frac{49}{4}} + \frac{(z')^2}{\frac{49}{9}} = 1$$

Тип поверхности: эллипсоид

2.2 Дано

$$2xy + 2x + 2y + 2z - 1 = 0$$

Квадратичная форма: $2xy$

Матрица квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-1) = 0$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$.

- Для $\lambda_1 = 1$:

$$(A-I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^\top$$

- Для $\lambda_2 = -1$:

$$(A+I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^\top$$

- Для $\lambda_3 = 0$:

$$A\mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_3 = (0,0,1)^\top$$

Матрица перехода:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Формулы поворота:

$$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \quad z = z'$$

Подставляем:

$$2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+2z'-1=0$$

Упрощаем:

$$2\cdot\frac{(x')^2-(y')^2}{2}+\sqrt{2}(x'-y')+\sqrt{2}(x'+y')+2z'-1=0$$

$$(x')^2-(y')^2+2\sqrt{2}x'+2z'-1=0$$

Группируем члены с x':

$$(x')^2+2\sqrt{2}x'=(x'+\sqrt{2})^2-2$$

Подставляем:

$$(x'+\sqrt{2})^2-2-(y')^2+2z'-1=0$$

$$(x'+\sqrt{2})^2-(y')^2+2z'=3$$

Вводим новые переменные:

$$x''=x'+\sqrt{2},\quad y''=y',\quad z''=z'$$

Уравнение:

$$(x'')^2-(y'')^2+2z''=3$$

Переносим константу:

$$(x'')^2-(y'')^2=-2z''+3$$

Чтобы убрать свободный член, сдвигаем z'':

$$z'''=z''-\frac{3}{2}$$

Тогда:

$$(x'')^2 - (y'')^2 = -2\left(z''' + \frac{3}{2}\right) + 3 = -2z'''$$

Каноническое уравнение:

$$(x'')^2 - (y'')^2 = -2z'''$$

Из поворота:

$$x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}, \quad z' = z$$

Из сдвигов:

$$x'' = x' + \sqrt{2} = \frac{x+y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}, \quad y'' = y' = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}, \quad z''' = z' - \frac{3}{2} = z - \frac{3}{2}$$

Подставляем:

$$x'' = \frac{x+y+2}{\sqrt{2}}, \quad y'' = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}, \quad z''' = z - \frac{3}{2}$$

Выражаем старые координаты через новые (x'', y'', z'''):

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') - 1, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'') - 1, \quad z = z''' + \frac{3}{2}$$

Каноническое уравнение:

$$(x'')^2 - (y'')^2 = -2z'''$$

Тип поверхности: гиперболический параболоид.

2.3