

Домашнее задание на 24.04 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем с.в. и с.з.:

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 1 - i, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Диагонализуем A :

$$A = P D P^{-1}, \quad P = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(1 + i, 1 - i)$$

Тогда

$$A^{21} = P D^{21} P^{-1} = P \begin{pmatrix} (1 + i)^{21} & 0 \\ 0 & (1 - i)^{21} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Получаем

$$A^{21} = P \begin{pmatrix} -2^{10}(1 + i) & 0 \\ 0 & -2^{10}(1 - i) \end{pmatrix} P^{-1} = -2^{10} P D P^{-1} = -2^{10} A = -1024 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $-1024 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

№2 Рассмотрим оператор

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0.85x + 0.10y \\ 0.15x + 0.90y \end{pmatrix},$$

действующий на векторе $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, где x_0 – число здоровых, y_0 – число больных на острове с населением 10000 человек (из них вначале выявлено 100 больных).

Ищем с.з. из

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 0.85 - \lambda & 0.10 \\ 0.15 & 0.90 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Вычислим:

$$(0.85 - \lambda)(0.90 - \lambda) - 0.10 \cdot 0.15 = \lambda^2 - 1.75\lambda + 0.75 = 0$$

Для $\lambda_1 = 1$ находим собственный вектор $v \neq 0$:

$$Mv = v \implies \begin{cases} 0.85x + 0.10y = x, \\ 0.15x + 0.90y = y, \end{cases} \implies 0.10y = 0.15x \implies y = 1.5x.$$

Можно взять $v_1 = (1, 1.5)^\top$.

Для $\lambda_2 = 0.75$ получился бы другой вектор, но при возведении в степень вклад этого собственного компонента $0.75^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

$$\varphi^n(v_0) = c_1 (1)^n v_1 + c_2 (0.75)^n v_2 \rightarrow c_1 v_1$$

поскольку $(0.75)^n \rightarrow 0$. Константу c_1 выбираем так, чтобы сумма компонент равнялась общей численности 10000:

$$v_1 = (1, 1.5), \quad 1 + 1.5 = 2.5, \quad c_1 = \frac{10000}{2.5} = 4000$$

Итак

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(v_0) = c_1 v_1 = 4000 \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

Ответ: число здоровых стремится к 4000, число больных к 6000

№3 Найдём с.з. и с.в.:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$-\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 & -4 \\ 2 & 8 - \lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$