ИДЗ №6 (вариант 12) (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Дано пространство многочленов $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$. Линейное отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ задано в базисе

$$e = \left(-3 - x + 2x^2, 1 - x - x^2, 1 + x - x^2\right)$$

пространства V и базисе

$$f = ((-1, -2), (3, 1))$$

пространства $\mathbb{R}^2$.

Матрица отображения φ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти $\varphi\left(7 - x - 5x^2\right)$ для начала найдём координаты $7 - x - 5x^2$ в базисе e:

$$(-3 - x + 2x^2)a + (1 - x - x^2)b + (1 + x - x^2)c = 7 - x - 5x^2$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} -3a + b + c = 7 \\ -a - b + c = -1 \\ 2a - b - c = -5 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & | & 7 \\ -1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 2 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно координаты $7 - x - 5x^2$ в базисе e:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдём координаты $\varphi(7 - x - 5x^2)$ в базисе f:

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Получается, что:

$$\varphi\left(7 - x - 5x^2\right) = 19 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 9 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46 \\ -47 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -46 \\ -47 \end{pmatrix}$

№2 (a) Докажем существование единственного линейного отображения $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, которое переводит векторы

$$a = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

в векторы

$$b = b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$$

Рассмотрим векторы из a:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & -4 & -5 & -3 \\ -4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -4 & -2 \\ -3 & -3 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, векторы a ЛНЗ, и их $\dim(\langle a \rangle) = 5$ значит, a - базис $\mathbb{R}^5$, пусть e - стандартный базис в $\mathbb{R}^3$

По условию, мы знаем, куда переходят векторы из a. Получается, что мы задали отображение базисных векторов, а значит, мы единнственным образом определили линейное отображение

(b) Найдём матрицу линейного отображения A, из базиса a пространства $\mathbb{R}^5$ и стандартного базиса $\mathbb{R}^3$

Получается матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -16 & -9 & -7 & 11 & 4 \\ 67 & -112 & -101 & -42 & -73 \\ 83 & -103 & -94 & -53 & -77 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу перехода C от базиса a к стандартному базису $\mathbb{R}^5$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & -4 & -5 & -3 \\ -4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -4 & -2 \\ -3 & -3 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Получается, что матрица A' линейного отображения φ из стандартного базиса $\mathbb{R}^5$ в стандартный базис $\mathbb{R}^3$ будет выглядить так:

$$A' = AC = \begin{pmatrix} -16 & -9 & -7 & 11 & 4 \\ 67 & -112 & -101 & -42 & -73 \\ 83 & -103 & -94 & -53 & -77 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & -4 & -5 & -3 \\ -4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -4 & -2 \\ -3 & -3 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 28 & -1 & -22 & 37 & -27 \\ 1034 & 117 & 234 & 56 & -136 \\ 1006 & 118 & 256 & 19 & -109 \end{pmatrix}$$

Найдём базис ядра:

$$\begin{pmatrix} 28 & -1 & -22 & 37 & -27 & | & 0 \\ 1034 & 117 & 234 & 56 & -136 & | & 0 \\ 1006 & 118 & 256 & 19 & -109 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{234}{431} & \frac{877}{862} & -\frac{659}{862} & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2930}{431} & -\frac{3669}{431} & \frac{2411}{431} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{234}{431}x_3 - \frac{877}{862}x_4 + \frac{659}{862}x_5 \\ x_2 = -\frac{2930}{431}x_3 + \frac{3669}{431}x_4 - \frac{2411}{431}x_5 \end{cases}$$

Следовательно, базис ядра в стандартном базисе:

$$\begin{pmatrix} \frac{234}{431} \\ -\frac{2930}{431} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{877}{862} \\ \frac{3669}{431} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{659}{862} \\ -\frac{2411}{431} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Дополним до $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Базис образа:

$$\begin{pmatrix} 28 \\ 1034 \\ 1006 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 117 \\ 118 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{234}{431} \\ -\frac{2930}{431} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{877}{862} \\ \frac{3669}{431} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{659}{862} \\ -\frac{2411}{431} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 28 \\ 1034 \\ 1006 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 117 \\ 118 \end{pmatrix}$

№3 Дано линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} 22 & 25 & 8 & -10 & 9 \\ 6 & 4 & -1 & 1 & 5 \\ -6 & -11 & -7 & 19 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Требуется построить линейное отображение $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, для которого выполняются условия:

$$\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \varphi$$

$$\operatorname{Im} \psi = \operatorname{Ker} \varphi$$

и записать его матрицу в паре стандартных базисов.

Для начала найдём базис ядра φ:

$$\begin{pmatrix} 22 & 25 & 8 & -10 & 9 & | & 0 \\ 6 & 4 & -1 & 1 & 5 & | & 0 \\ -6 & -11 & -7 & 19 & 2 & | & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 3 & 6 & 4 & -3 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -101 & -5 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 124 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -111 & -7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 \\ -124 \\ 111 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

Базис ядра:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 101 \\ -124 \\ 111 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь дополним базис ядра до $\mathbb{R}^5$, для этого нужно взять векторы:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, базис образа:

$$\begin{pmatrix} 22 \\ 6 \\ -6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Пусть:

$$\psi(x) = f_1(x)v_1 + f_2(x)v_2$$

где f_1, f_2 - какие-то линейные функционалы.

При таком определении отображения ψ у нас выполняется :

$$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi = \langle v_1, v_2 \rangle$$

(равенство т.к. $\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim \operatorname{Im}\varphi$)

Чтобы добиться условия $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$ нужно узнать при каких f_1, f_2 выполняется:

$$f_1(x)v_1 + f_2(x)v_2 = 0 \quad \forall x \in \operatorname{Im}\varphi$$

Т.к. v_1, v_2 - ЛНЗ, то это равносильно:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \quad \forall x \in \operatorname{Im}\varphi$$

Найдём базис всех таких функционалов $f(x) = 0$. Для каждого функционала должно выполняться:

$$\begin{cases} (a,b,c,d,e)\begin{pmatrix}22\\6\\-6\\-1\\3\end{pmatrix}=0\\ (a,b,c,d,e)\begin{pmatrix}25\\4\\-11\\1\\6\end{pmatrix}=0\\ (a,b,c,d,e)\begin{pmatrix}8\\-1\\-7\\2\\4\end{pmatrix}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}22a+6b-6c-d+3e=0\\25a+4b-11c+d+6e=0\\8a-b-7c+2d+4e=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c}22&6&-6&-1&3&0\\25&4&-11&1&6&0\\8&-1&-7&2&4&0\end{array}\right) \Longrightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{6}&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}e\\\frac{3}{2}d+\frac{7}{6}e\\-\frac{1}{2}d-\frac{1}{6}e\\d\\e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}d+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{7}{6}\\-\frac{1}{6}\\0\\1\end{pmatrix}e$$

Пусть:

$$f_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} * 2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * 6 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Такие функционалы будут удовлетворять условию:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \quad \forall x \in \operatorname{Im} \varphi$$

Чтобы найти искомую матрицу A отображения ψ, нужно решить уравнение на A:

$$Ax = (f_1)^T x v_1 + (f_2)^T x v_2 \quad \text{- верно } \forall x \in \mathbb{R}^5$$

Подставим $x = (1, 0, 0, 0, 0)^T$:

$$A^{(1)} = (f_1^T)^{(1)} v_1 + (f_2^T)^{(1)} v_2 = -1 \cdot \begin{pmatrix} 101 \\ -124 \\ 111 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -116 \\ 145 \\ -132 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Аналогично посчитаем 2, 3, 4, 5 столбцы:

$$A^{(2)} = (f_1^T)^{(2)} v_1 + (f_2^T)^{(2)} v_2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 101 \\ -124 \\ 111 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 338 \\ -421 \\ 382 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = (f_1^T)^{(3)} v_1 + (f_2^T)^{(3)} v_2 = -1 \cdot \begin{pmatrix} 101 \\ -124 \\ 111 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -106 \\ 131 \\ -118 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(4)} = (f_1^T)^{(4)} v_1 + (f_2^T)^{(4)} v_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 101 \\ -124 \\ 111 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 202 \\ -248 \\ 222 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{(5)} = (f_1^T)^{(5)} v_1 + (f_2^T)^{(5)} v_2 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 101 \\ -124 \\ 111 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -42 \\ 42 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

В итоге получается матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -116 & 338 & -106 & 202 & 30 \\ 145 & -421 & 131 & -248 & -42 \\ -132 & 382 & -118 & 222 & 42 \\ -1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -116 & 338 & -106 & 202 & 30 \\ 145 & -421 & 131 & -248 & -42 \\ -132 & 382 & -118 & 222 & 42 \\ -1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

№4 Линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ имеет в базисах $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ и $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -17 & -15 & 14 & 15 & 18 \\ 10 & 6 & -3 & -3 & -7 \\ 34 & 9 & 1 & 6 & -14 \\ 22 & 3 & 9 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

Найдём базисы пространств $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^4$, в которых матрица отображения φ имеет диагональный вид D

Найдём базис ядра:

$$\begin{pmatrix} -17 & -15 & 14 & 15 & 18 \\ 10 & 6 & -3 & -3 & -7 \\ 34 & 9 & 1 & 6 & -14 \\ 22 & 3 & 9 & 12 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{18}{53} & -\frac{17}{53} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{37}{53} & -\frac{21}{53} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{39}{53} & \frac{25}{53} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{53}x_4 + \frac{17}{53}x_5 \\ \frac{37}{53}x_4 + \frac{21}{53}x_5 \\ -\frac{39}{53}x_4 - \frac{25}{53}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{53} \\ \frac{37}{53} \\ -\frac{39}{53} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} \frac{17}{53} \\ \frac{21}{53} \\ -\frac{25}{53} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

Координаты базиса ядра:

$$e'_4 = \begin{pmatrix} -18 \\ 37 \\ -39 \\ 53 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_5 = \begin{pmatrix} 17 \\ 21 \\ -25 \\ 0 \\ 53 \end{pmatrix}$$

Дополним до $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, координаты образа:

$$f'_1 = \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \\ 34 \\ 22 \end{pmatrix}, f'_2 = \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, f'_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Дополним их до базиса $\mathbb{R}^4$:

$$f'_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пусть:

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\varphi(e_1') = f_1', \quad \varphi(e_2') = f_2', \quad \varphi(e_3') = f_3'$$

Получаем два новых базиса:

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ e_4' \\ e_5' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ -18e_1 + 37e_2 - 39e_3 + 53e_4 \\ 17e_1 + 21e_2 - 25e_3 + 53e_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ f_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17f_1 + 10f_2 + 34f_3 + 22f_4 \\ -15f_1 + 6f_2 + 9f_3 + 3f_4 \\ 14f_1 - 3f_2 + f_3 + 9f_4 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Соответствующие матрицы перехода:

$$C_1 = \begin{pmatrix} -17 & -15 & 14 & 0 \\ 10 & 6 & -3 & 0 \\ 34 & 9 & 1 & 0 \\ 22 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -18 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 37 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -39 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 53 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 53 \end{pmatrix}$$

№5 Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ - пространство многочленов степени не выше 2 от переменной x с действительными коэффициентами. Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

- базис пространства V^*, двойственный к базису

$$p_1 = -1 + 3x^2, \quad p_2 = 6 - 19x + x^2, \quad p_3 = -3 + 11x - 3x^2$$

пространства V, а (f_1, f_2, f_3) - базис пространства V, для которого двойственным является базис (ρ_1, ρ_2, ρ_3) пространства V^*, где

$$\rho_1(f) = f(1), \quad \rho_2(f) = f'(-1), \quad \rho_3(f) = \frac{3}{2}\int_0^2 f(x)dx.$$

Рассмотрим линейную функцию $\alpha \in V^*$, имеющую в базисе $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ координаты $(-1, 1, 2)$, и многочлен $h \in V$, имеющий в базисе (f_1, f_2, f_3) координаты $(-1, 1, 2)$. Найдём значение $\alpha(h)$.

Для начала найдём базис f_1, f_2, f_3. Пусть $f_j = a_j + b_j x + c_j x^2$. Условия двойственности:

$$\rho_i(f_j) = \delta_{ij}.$$

Для f_1:

$$\rho_1(f_1) = f_1(1) = a_1 + b_1 + c_1 = 1$$

$$\rho_2(f_1) = f_1'(-1) = b_1 + 2c_1(-1) = b_1 - 2c_1 = 0$$

$$\rho_3(f_1) = \frac{3}{2}\int_0^2 (a_1 + b_1 x + c_1 x^2)dx = \frac{3}{2}\left(2a_1 + 2b_1 + \frac{8}{3}c_1\right) = 3a_1 + 3b_1 + 4c_1 = 0$$

Получаем:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = 1 \\ b_1 - 2c_1 = 0 \\ 3a_1 + 3b_1 + 4c_1 = 0 \end{cases} \implies f_1 = 10 - 6x - 3x^2$$

Аналогично для f_2 и f_3:

$$f_2 = -1 + x$$

$$f_3 = -3 + 2x + x^2$$

Теперь выразим h через базис f.

Координаты h в базисе (f_1, f_2, f_3): $(-1, 1, 2)$.

$$h = -f_1 + f_2 + 2f_3 = -(10 - 6x - 3x^2) + (-1 + x) + 2(-3 + 2x + x^2) =$$

$$= -17 + 11x + 5x^2$$

Выразим ε_i через двойственный базис.

Стандартный двойственный базис (e^1, e^2, e^3):

$$e^1(a + bx + cx^2) = a$$

$$e^2(a + bx + cx^2) = b$$

$$e^3(a + bx + cx^2) = c$$

Матрица перехода от стандартного базиса к базису p_1, p_2, p_3:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & -19 & 11 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица P^{-1} позволяет выразить ε_i через e^1, e^2, e^3

$$P^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 46 & 33 & 57 \\ 15 & 12 & 19 \\ 9 & 11 & 19 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\varepsilon_1 = -\frac{46}{19}e^1 - \frac{15}{19}e^2 - \frac{9}{19}e^3$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{33}{19}e^1 - \frac{12}{19}e^2 - \frac{11}{19}e^3$$

$$\varepsilon_3 = -3e^1 - e^2 - e^3.$$

Выразим α через стандартный базис.

Координаты α: $(-1,1,2)$ в базисе $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$:

$$\alpha = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3.$$

Подставляем выражения ε_i:

$$\alpha = -\left(-\frac{46}{19}e^1 - \frac{15}{19}e^2 - \frac{9}{19}e^3\right) + \left(-\frac{33}{19}e^1 - \frac{12}{19}e^2 - \frac{11}{19}e^3\right) + 2\left(-3e^1 - e^2 - e^3\right)$$

$$\alpha = -\frac{101}{19}e^1 - \frac{35}{19}e^2 - \frac{40}{19}e^3$$

Вычислим $\alpha(h)$

Многочлен $h = -17 + 11x + 5x^2$, коэффициенты: $a = -17$, $b = 11$, $c = 5$

$$\alpha(h) = -\frac{101}{19}\cdot(-17) + \left(-\frac{35}{19}\right)\cdot 11 + \left(-\frac{40}{19}\right)\cdot 5$$

Вычисляем:

$$\alpha(h) = \frac{1717}{19} - \frac{385}{19} - \frac{200}{19} = \frac{1717-385-200}{19} = \frac{1132}{19}$$

Ответ: $\frac{1132}{19}$