Домашнее задание на 24.04 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 1.1 Для любого линейного оператора φ должно быть $\varphi(0) = 0$. Но

$$\varphi(0,0,0) = (0+2,\ 0+5,\ 0) = (2,5,0) \neq (0,0,0).$$

Ответ: нет

1.2 Для любых f, g из $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$:

$$\varphi\big(f+g\big) = (f+g)(x+1) - (f+g)(x) =$$

$$= \big[f(x+1) - f(x)\big] + \big[g(x+1) - g(x)\big] = \varphi(f) + \varphi(g)$$

Также, для любого числа $c \in \mathbb{R}$ и любого f:

$$\varphi\big(c\,f\big) = (c\,f)(x+1) - (c\,f)(x) = c\big[f(x+1) - f(x)\big] = c\,\varphi(f).$$

и:

$$\varphi(0) = 0(x+1) - 0(x) = 0$$

Следовательно φ является линейным оператором. **Ответ:** да

№2 Рассмотрим:

$$\varphi(e_1) = 3e_1 - 2e_3 + e_4$$

$$\varphi(e_2) = 4e_2$$

$$(\varphi - 5\,id)(e_3) = 0 \Rightarrow \varphi(e_3) = 5e_3$$

$$(\varphi - 7\,id)(e_4) = e_3 \Rightarrow \varphi(e_4) = 7e_4 + e_3$$

То есть:

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

№3 3.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Решим:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Найдём определитель матрицы:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \implies \lambda = -1$$

Подставляем $\lambda = -1$ в уравнение:

$$(A + E)v = 0$$

Или:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \implies v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: с/з — -1, с/в — v

3.2 Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ищем корни уравнения:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Определитель:

$$(1-\lambda)^2 + 1 = 0$$

Раскроем:

$$(1-\lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

Решаем уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

Дискриминант:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$$

Комплексные корни:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Рассмотрим $\lambda = 1 + i$, решаем:

$$(A - \lambda E)v = 0 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - (1+i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} -ix + y = 0 \Rightarrow y = ix \\ -x - iy = 0 \end{cases}$$

Значит, собственный вектор:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Аналогично для $\lambda = 1 - i$:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Ответ: Над $\mathbb{R}$: нету, над $\mathbb{C}$:

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 1 - i, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

3.3 Заметим, что M блочная:

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\chi_M(\lambda) = \det(A - \lambda E)\ \det(C - \lambda E)$$

Вычислим каждое:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2,$$

$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda) + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

Итого

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - 2)^4,$$

то есть единственный собственный корень $\lambda = 2$ алгебраической кратности 4.

Решим $(M-2E)v=0$.

$$M-2E=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 3 & -3\\ 4 & -1 & 3 & -3\end{pmatrix}, \quad v=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$$

множество решений:

$$\langle(1,1,0,1),(-1,-1,1,0)\rangle$$

Ответ: с/з — 2, с/в — $V_2=\langle e_1+e_2+e_4,-e_1-e_2+e_3\rangle$

№4 Пусть φ^2 имеет собственное значение λ^2, существует ненулевой $v\in V$ такой, что

$$\varphi^2(v)=\lambda^2\,v.$$

Рассмотрим два случая.

1) $\varphi(v)$ и v ЛЗ, то есть $\varphi(v)=\mu v$.

   Тогда из $\varphi^2(v)=\mu^2 v=\lambda^2 v$ следует $\mu^2=\lambda^2$, значит $\mu=\lambda$ или $\mu=-\lambda$. В первом случае $\varphi(v)=\lambda v$, во втором — $\varphi(v)=-\lambda v$. В обоих случаях найден ненулевой собственный вектор оператора φ с собственным значением λ или $-\lambda$.

2) v и $\varphi(v)$ ЛНЗ.

   Построим в V вектор

$$u=\varphi(v)-\lambda\,v.$$

   Заметим, во-первых, что $u\neq 0$, иначе $\varphi(v)=\lambda v$ и мы оказались в случае 1. Во-вторых, вычислим

$$\varphi(u)=\varphi\big(\varphi(v)-\lambda v\big)=\varphi^2(v)-\lambda\,\varphi(v)=\lambda^2 v-\lambda\,\varphi(v)=-\lambda\big(\varphi(v)-\lambda v\big)=-\lambda\,u$$

Итак, u — ненулевой собственный вектор φ с собственным значением $-\lambda$.

Следовательно, оператор φ имеет собственный вектор с собственным значением либо λ, либо $-\lambda$.

№5

5.1 Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен:

$$\chi_A(x) = x^2 - x + 2$$

$$D < 0 \implies \text{нет с/з}$$

Ответ: не диаг.

5.2 Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен:

$$\chi_A(x) = x^2$$

Собственные значения:

$$\lambda = 0 \quad \text{(кратность 2)}$$

Собственные векторы:

$$v = (-1, 1)^T$$

Не диагонализуема, так как геометрическая кратность меньше алгебраической.

Ответ: не диаг.

5.3 Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен:

$$\chi_A(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$$

Собственные значения:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2$$

Собственные векторы (базис):

$$v_1 = (-1, 1, 1, 1)^T,\ v_2 = (1, 0, 0, 1)^T,\ v_3 = (1, 0, 1, 0)^T,\ v_4 = (1, 1, 0, 0)^T$$

Собственные векторы линейно независимы, значит образуют базис V, следовательно, матрица диагонализуема

Диагональная форма:

$$A' = \mathrm{diag}(-2,\ 2,\ 2,\ 2)$$

Матрица перехода C:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A' = C^{-1}AC$$

Ответ: диаг.

5.4 Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен:

$$\chi_A(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$$

Собственные значения:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Собственные векторы:

$$v_1 = (-1, 0, 3)^T,\ v_2 = (1, 1, 0)^T,\ v_3 = (1, 1, 1)^T$$

Они ЛНЗ, следовательно, матрица диагонализуема

$$A' = \mathrm{diag}(2,\ 2,\ 1)$$

Матрица перехода C:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = C^{-1}AC$$

Ответ: диаг.