# Домашнее задание на 05.02 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

**№1** Дано линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

в паре базисов

$$e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \text{ и } f = \{f_1, f_2, f_3\}$$

Найдём базис ядра этого линейного отображения.

Чтобы найти базис ядра, нужно, чтобы координаты любого вектора из $e$ переходили в координаты $(0, 0, 0, 0)^T$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 9 & 0 \end{array}\right) \implies \text{УСВ: } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 3x_4, \quad x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 - 3x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Базис ядра:

$$(-2e_1 + e_2, -3e_1 + e_3, -3e_1 + e_4)$$

Дополним ядро до базиса $\mathbb{R}^4$. Для этого нужно взять вектор с координатами в $e$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ То есть вектор: } e_1 = e_1'$$

Возьмём $f_1' = \varphi(e_1')$, найдём координаты $f_1'$:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Дополним координтаы $f_1'$ до базиса $\mathbb{R}^3$, для этого возьмём векторы:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, новые базисы в $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$, при которых матрица $A'(\varphi, e', f')$ будет иметь диагональный вид:

$$e' = (e_1, -2e_1 + e_2, -3e_1 + e_3, -3e_1 + e_4) \quad f' = (f_1 + 2f_2 + 3f_3, f_2, f_3)$$

При этом матрица $A'$ будет выглядить так:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу перехода $C$ от $e$ к $e'$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу перехода $D$ от $f$ к $f'$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому $A$ можно разложить как:

$$A = DA'C^{-1}$$

**№2** Пусть линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ в паре стандартных базисов имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдём базис ядра:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{УСВ: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Дополним ядро до базиса, для этого возьмём векторы:

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Мы получили базис образа. Найдём новые базисы $e'$ и $f'$, при которых матрица $A'(\varphi, e', f')$ будет иметь диагональный вид.

$$e' = (e'_1, e'_2, e'_3), f' = (f'_1, f'_2)$$

Найдём $\varphi(e'_1) = f'_1$ и $\varphi(e'_2) = f'_2$:

$$f'_1 = \varphi(e'_1) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f'_2 = \varphi(e'_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Таким образом $e'$:

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

А $f'$:

$$f_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Матрица $A'$ имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**№3** Так как $U = \ker\varphi = \mathrm{Im}\varphi$, где $U \subseteq V$, и при этом:

$$\dim V = \dim(\ker\varphi) + \dim(\mathrm{Im}\varphi) = k + k = 2k$$

Значит подойдут все пространства $V$ с чётной размерностью.

**№4** Для нахождения двойственного базиса $\varepsilon_{ij}$ к базису $E_{ij}$ пространства матриц $M_2(\mathbb{R})$, сначала определим базис $E_{ij}$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем выражения для $\varepsilon_{ij}$:

1. Для $\varepsilon_{11}$:

$$\varepsilon_{11}(E_{11}) = 1, \quad \varepsilon_{11}(E_{12}) = 0, \quad \varepsilon_{11}(E_{21}) = 0, \quad \varepsilon_{11}(E_{22}) = 0$$

2. Для $\varepsilon_{12}$:

$$\varepsilon_{12}(E_{11}) = 0, \quad \varepsilon_{12}(E_{12}) = 1, \quad \varepsilon_{12}(E_{21}) = 0, \quad \varepsilon_{12}(E_{22}) = 0$$

3. Для $\varepsilon_{21}$:

$$\varepsilon_{21}(E_{11}) = 0, \quad \varepsilon_{21}(E_{12}) = 0, \quad \varepsilon_{21}(E_{21}) = 1, \quad \varepsilon_{21}(E_{22}) = 0$$

4. Для $\varepsilon_{22}$:

$$\varepsilon_{22}(E_{11}) = 0, \quad \varepsilon_{22}(E_{12}) = 0, \quad \varepsilon_{22}(E_{21}) = 0, \quad \varepsilon_{22}(E_{22}) = 1$$

Теперь мы можем выразить $\varepsilon_{ij}$ для произвольной матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\varepsilon_{11}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a, \quad \varepsilon_{12}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = b$$

$$\varepsilon_{21}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = c, \quad \varepsilon_{22}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = d$$

Таким образом, двойственный базис $\varepsilon_{ij}$ к базису $E_{ij}$ в пространстве матриц $M_2(\mathbb{R})$ имеет следующие значения:

$$\varepsilon_{ij}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} a, & \text{если } (i,j) = (1,1) \\ b, & \text{если } (i,j) = (1,2) \\ c, & \text{если } (i,j) = (2,1) \\ d, & \text{если } (i,j) = (2,2) \end{cases}$$

**№5** Докажем, что две ненулевые линейные функции $\alpha$ и $\beta$ из двойственного пространства $V^*$ пропорциональны при условии, что

$$\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$$

Мы говорим, что линейные функции $\alpha$ и $\beta$ пропорциональны, если существует скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), такой что

$$\alpha(v) = \lambda\beta(v)$$

для всех $v \in V$.

Поскольку $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$, это означает, что для любого вектора $v \in V$:

$$\alpha(v) = 0 \iff \beta(v) = 0$$

Возьмём случайный вектор $v_0 \in \operatorname{Im}\alpha$, тогда $v_0 \in \operatorname{Im}\beta$ т.к. $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$ ($\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta$).

Пусть:

$$\frac{\alpha(v_0)}{\beta(v_0)} = \lambda \Leftrightarrow \alpha(v_0) = \lambda\beta(v_0)$$

Любой вектор $v \in V$ можно представить как $v = v_0 + w$, где $w \in \operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$, следовательно:

$$\alpha(v) = \alpha(v_0 + w) = \alpha(v_0) + \alpha(w) = \alpha(v_0) + 0 = \lambda\beta(v_0) + \beta(w) = \lambda\beta(v)$$

Поэтому:

$$\alpha(v) = \lambda\beta(v)$$

для любого $v \in V$

**№6** - Базис пространства $V$: $e_1, e_2, e_3$

- Двойственный базис пространства $V^*$: $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$

**6.1)** Найдём базис $V^*$, двойственный к базису $2e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3, e_2$ пространства $V$.

Пусть

$$e'_1 = 2e_1 + e_3, \quad e'_2 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_2$$

Для двойственного базиса $\varepsilon^{1'}, \varepsilon^{2'}, \varepsilon^{3'}$ к $e'_1, e'_2, e'_3$ необходимо :

$$\varepsilon^{i'}(e'_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3$$

Это равносильно:

$$(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}) \cdot \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Где $(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2})$ - координаты $\varepsilon^{i'}$ в $\varepsilon$, а $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{pmatrix}$ - координаты $e'_j$ в $e$. Получается матричное уравнение:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$\varepsilon^{1'} = \varepsilon^1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3$$

$$\varepsilon^{2'} = \varepsilon^3$$

$$\varepsilon^{3'} = -\varepsilon^1 + 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$$

**6.2)** Найдём базис $V$, двойственным к которому является базис $2\varepsilon^1 + \varepsilon^3, \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3, \varepsilon^2$ пространства $V^*$.

Пусть

$$\varepsilon^{1'} = 2\varepsilon^1 + \varepsilon^3, \quad \varepsilon^{2'} = \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3, \quad \varepsilon^{3'} = \varepsilon^2$$

Для двойственного базиса $\varepsilon^{1'}, \varepsilon^{2'}, \varepsilon^{3'}$ к $e'_1, e'_2, e'_3$ необходимо :

$$\varepsilon^{i'}(e'_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3$$

Это равносильно:

$$(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}) \cdot \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Где $(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2})$ - координаты $\varepsilon^{i'}$ в $\varepsilon$, а $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{pmatrix}$ - координаты $e'_j$ в $e$. Получается матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$e'_1 = e_1 - e_3$$

$$e'_2 = -e_1 + 2e_3$$

$$e'_3 = e_1 + e_2 - 2e_3$$