

Домашнее задание на 15.05 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем с.в. и с.з.:

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 1 - i, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Диагонализуем A :

$$A = P D P^{-1}, \quad P = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(1 + i, 1 - i)$$

Тогда

$$A^{21} = P D^{21} P^{-1} = P \begin{pmatrix} (1 + i)^{21} & 0 \\ 0 & (1 - i)^{21} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Получаем

$$A^{21} = P \begin{pmatrix} -2^{10}(1 + i) & 0 \\ 0 & -2^{10}(1 - i) \end{pmatrix} P^{-1} = -2^{10} P D P^{-1} = -2^{10} A = -1024 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $-1024 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

№2 Рассмотрим оператор

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0.85x + 0.10y \\ 0.15x + 0.90y \end{pmatrix},$$

действующий на векторе $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, где x_0 – число здоровых, y_0 – число больных на острове с населением 10000 человек (из них вначале выявлено 100 больных).

Ищем с.з. из

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 0.85 - \lambda & 0.10 \\ 0.15 & 0.90 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Вычислим:

$$(0.85 - \lambda)(0.90 - \lambda) - 0.10 \cdot 0.15 = \lambda^2 - 1.75\lambda + 0.75 = 0$$

Для $\lambda_1 = 1$ находим собственный вектор $v \neq 0$:

$$Mv = v \implies \begin{cases} 0.85x + 0.10y = x, \\ 0.15x + 0.90y = y, \end{cases} \implies 0.10y = 0.15x \implies y = 1.5x.$$

Можно взять $v_1 = (1, 1.5)^\top$.

Для $\lambda_2 = 0.75$ получился бы другой вектор, но при возведении в степень вклад этого собственного компонента $0.75^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

$$\varphi^n(v_0) = c_1 (1)^n v_1 + c_2 (0.75)^n v_2 \rightarrow c_1 v_1$$

поскольку $(0.75)^n \rightarrow 0$. Константу c_1 выбираем так, чтобы сумма компонент равнялась общей численности 10000:

$$v_1 = (1, 1.5), \quad 1 + 1.5 = 2.5, \quad c_1 = \frac{10000}{2.5} = 4000$$

Итак

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(v_0) = c_1 v_1 = 4000 \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

Ответ: число здоровых стремится к 4000, число больных к 6000

№3 Найдём с.з. и с.в.:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$-\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 & -4 \\ 2 & 8 - \lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

Разложим по первой строке:

$$\begin{aligned} -\chi(\lambda) &= (5 - \lambda)((8 - \lambda)(5 - \lambda) - 4) - 2(2(5 - \lambda) - (-8)) - 4(2 \cdot 2 - (8 - \lambda)(-4)) \\ &= -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda \\ &= -\lambda(\lambda - 9)^2 \end{aligned}$$

Найдём собственные векторы:

1) для $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 4z = 0, \\ 2x + 8y + 2z = 0, \\ -4x + 2y + 5z = 0. \end{cases} \Leftrightarrow v_0 = \langle (2, -1, 2)^T \rangle$$

Нормируем:

$$f_1 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)^T$$

2) для $\lambda = 9$:

$$\begin{cases} -4x + 2y - 4z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0, \\ -4x + 2y - 4z = 0. \end{cases} \Leftrightarrow v_9 = \langle (1, 2, 0)^T, (0, 2, 1)^T \rangle$$

Ортогонализуем векторы:

$$f'_2 = (1, 2, 0)^T, \quad f'_3 = (-4, 2, 5)^T$$

Нормируем:

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)^T, \quad f_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4, 2, 5)^T$$

Получаем ОНБ:

$$f_1 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)^T, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)^T, \quad f_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4, 2, 5)^T$$

Диагональный вид:

$$\text{diag}(0, 9, 9)$$

№4 Для квадратичной формы

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

соответствует симметричная матрица A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с матрицей A :

$$-\chi(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda + 3)^2$$

1) для $\lambda = 6$:

$$v_6 = \langle (2, 2, 1)^T \rangle$$

Нормируем:

$$f_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^T$$

2) для $\lambda = -3$:

$$v_{-3} = \langle (1, 0, -2)^T, (0, 1, -2)^T \rangle$$

Ортогонализуем:

$$f'_2 = (1, 0, -2)^T, \quad f'_3 = (-4, 5, -2)^T$$

Нормируем:

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2)^T, \quad f_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4, 5, -2)^T$$

Получаем ОНБ:

$$f_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^T, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2)^T, \quad f_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4, 5, -2)^T$$

Канонический вид:

$$6x_1'^2 - 3x_2'^2 - 3x_3'^2$$

№5 Для оператора

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

с матрицей в стандартном базисе

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен даёт корни

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3} i,$$

по собственному вектору при $\lambda = -1$ происходит отражение, в ортогональной ему плоскости действует чистое вращение на угол θ , где

$$\cos \theta = \frac{2}{3}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \theta = \arccos \frac{2}{3}.$$

собственный вектор при $\lambda = -1$:

$$v_1 = (2, 1, 0)^T, \quad \|v_1\| = \sqrt{5}, \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)^T.$$