Домашняя работа №6 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. 1.1. $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 * 3 - 7 * 4 = 15 - 28 = -13$

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 2 + 60 - 9 - 15 - 16 = 80 - 40 = 40$

1.3. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} = n^2 - 1 - n^2 = -1$

2. Для $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ мы используем перестановку:

$$\sigma = \begin{pmatrix} i & 2 & 3 & 4 & k & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow i, k \in \{1, 5\}$$

Пусть $i = 1,\ k = 5$, тогда число инверсий:

$$4 + 0 + 1 + 2 + 1 = 8 \Rightarrow sgn(\sigma) = 1$$

Пусть $k = 1,\ i = 5$, тогда число инверсий:

$$3 + 0 + 1 + 2 + 1 = 7 \Rightarrow sgn(\sigma) = -1$$

Ответ: $k = 1,\ i = 5$

3. $A \in \mathrm{Mat}_n$

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & \dots & A^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} \leftrightarrow A^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} A^{(2)} & A^{(1)} & \dots & A^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} \leftrightarrow A^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} A^{(2)} & A^{(3)} & A^{(1)} & \dots & A^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$A^{(1)} \leftrightarrow A^{(n)}$$

$$\begin{pmatrix} A^{(2)} & A^{(3)} & A^{(4)} & \dots & A^{(n)} & A^{(1)} \end{pmatrix}$$

После этого определитель стал $(-1)^{n-1} detA$

Теперь:

$$A^{(2)} \leftrightarrow A^{(3)}$$

$$\dots$$

$$A^{(2)} \leftrightarrow A^{(n-1)}$$

После этого определитель стал $(-1)^{n-1}(-1)^{n-2} detA$

Повторим так для каждого столбца и получим:

$$\begin{pmatrix} A^{(n)} & \dots & A^{(2)} & A^{(1)} \end{pmatrix}$$

При этом определитель стал:

$$(-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \dots (-1)^{1} detA =$$

$$= (-1)^{1+2+3+\dots+(n-1)} detA = (-1)^{\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)} detA =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} detA$$

Ответ: он умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4. $A \in \mathrm{Mat}_n$

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \dots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} A_{(1)} - A_{(2)} \\ A_{(2)} - A_{(3)} \\ \dots \\ A_{(n)} - A_{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{(1)} - A_{(2)} \\ A_{(2)} - A_{(3)} \\ \dots \\ A_{(n)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_{(1)} - A_{(2)} \\ A_{(2)} - A_{(3)} \\ \dots \\ A_{(1)} \end{vmatrix} =$$

$$= detA - \begin{vmatrix} A_{(1)} - A_{(2)} \\ A_{(2)} - A_{(3)} \\ \dots \\ A_{(n-1)} - A_{(n)} \\ A_{(1)} \end{vmatrix} = detA - (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} A_{(1)} \\ A_{(1)} - A_{(2)} \\ A_{(2)} - A_{(3)} \\ \dots \\ A_{(n-1)} - A_{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= detA - (-1)^{n-1}(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} - A_{(1)} \\ A_{(3)} - A_{(2)} \\ \dots \\ A_{(n)} - A_{(n-1)} \end{vmatrix} = detA - (-1)^{n-1}(-1)^{n-1} detA =$$

$$= detA - (-1)^{2n-2} detA = (1 - (-1)^{2n-2}) detA = (1 + (-1)^{2n-1}) detA$$

Ответ: он умножается на $1 + (-1)^{2n-1}$

5.5.1. $detA = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -2 & -11 & 7 \\ 10 & 80 & -20 \end{vmatrix}$

$$A[0], A[2] = A[2], A[0] \Rightarrow \begin{vmatrix} 10 & 80 & -20 \\ -2 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -detA$$

$$A[0] = A[0]/10 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ -2 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -10detA$$

$$A[1] = A[1] + 2 * A[0] \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -10detA = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow detA = -200$$

Ответ: 200

5.2. $detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} A[1] = A[1] - 4 * A[0] \\ A[2] = A[2] - 7 * A[0] \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = detA$$

$$A[2] = A[2] - 2 * A[1] \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = detA = 0$$

Ответ: 0

5.3 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} A[2] = A[2] - 3 * A[1] \\ A[3] = A[3] - 5 * A[1] \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & -15 \end{vmatrix} = detA$$

$$A[0] = A[0] - A[2] \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & -15 \end{vmatrix} = detA$$

$$A[3] = A[3] - 3 * A[2] \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = detA$$

$$A[3] = A[3]/5 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5} detA$$

$$A[0] = A[0] - 6 * A[3] \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{11}{5} \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5} detA$$

$$\begin{cases} A[0], A[1] = A[1], A[0] \\ A[1], A[2] = A[2], A[1] \\ A[2], A[3] = A[3], A[2] \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} detA = \frac{11}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow detA = -11$$

Ответ: -11

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 175 & -38 \\ 3 & 4 & 137 & -91 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$A[1] = A[1] - 3 * A[0] \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 175 & -38 \\ 0 & -2 & -388 & 23 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = detA$$

$$A[2] = A[2]/5 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 175 & -38 \\ 0 & -2 & -388 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = detA/5$$

$$A[3] = A[3] - A[2] * 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 175 & -38 \\ 0 & -2 & -388 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{5} \end{vmatrix} = detA/5 = \frac{14}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow detA = 14$$

Ответ: 14

7. $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_n & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{(1)} + B_{(1)} \\ A_{(2)} + B_{(2)} \\ \dots \\ A_{(n)} + B_{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} + B_{(2)} \\ \dots \\ A_{(n)} + B_{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{(1)} \\ A_{(2)} + B_{(2)} \\ \dots \\ A_{(n)} + B_{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} + B_{(3)} \\ \dots \\ A_{(n)} + B_{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{(1)} \\ B_{(2)} \\ A_{(3)} + B_{(3)} \\ \dots \\ A_{(n)} + B_{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} + B_{(3)} \\ \dots \\ A_{(n)} + B_{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{(1)} \\ B_{(2)} \\ A_{(3)} + B_{(3)} \\ \dots \\ A_{(n)} + B_{(n)} \end{vmatrix}$$

В итоге получиться сумма определителей всех возможных перестановок строк из A и из B, при этом каждая матрица где будет хотя бы 2 строки из A или хотя бы две строки из B уйдут, т.к. определитель будет равен нулю, потому что все строки в A и в B одинаковые. Следовательно, так как $n \geqslant 3$, то в каждой такой матрице будет хотя бы две одинаковые строки, значит вся сумма равна нулю

Ответ: 0