Домашнее задание на 22.01 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Векторы U:

$$u_1 = (0,0,0,1,1)^T, \quad u_2 = (0,0,3,2,-3)^T, \quad u_3 = (0,0,3,5,0)^T, \quad u_4 = (0,2,1,3,0)^T$$

Векторы W:

$$w_1 = (1,-1,2,0,0)^T, \quad w_2 = (1,1,1,0,0)^T$$

Докажем, что:

$$\begin{cases} \mathbb{R}^5 = U + W \\ \dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim \mathbb{R}^5 = \dim(U+W) \\ \dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dim(U) + \dim(W) = \dim(U+W) = 5$$

Для начала найдём какие из векторов $u_1, u_2, u_3, u_4, w_1, w_2$ - ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, u_1, u_2, u_4, w_1, w_2 - ЛНЗ, а значит:

$$\dim U = 3, \quad \dim W = 2, \quad \dim(U+W) = 5$$

Значит, выполняется:

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) = 5$$

Поэтому:

$$\mathbb{R}^5 = U \oplus V$$

Найдём проекцию вектора v на U вдоль W и на W вдоль U:

$$v = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}^T$$

Вектор v выражается как:

$$v = u + w, \text{ где } u \in U,\ w \in W$$

Здесь u и w будут искомыми проекциями. Их можно представить как:

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_4, \quad w = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$$

Найдём $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ решив $u + w = v$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & | & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Найдём u:

$$u = 3u_1 - 1u_2 + 1u_4 = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Найдём w:

$$w = 2w_1 + 4w_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: На U: $(0, 2, -2, 4, 6)^T$, на W: $(6, 2, 8, 0, 0)^T$

№2 U задано уравнением:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$$

W задано уравнением:

$$x_1 = \dots = x_n$$

Докажем, что

$$\mathbb{R}^n = U \oplus W$$

Это эквивалентно:

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n = U + W \\ \dim U + \dim W = \dim(U + W) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \dim(U + W) \\ \dim U + \dim W = n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \\ \dim U + \dim W = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim(U \cap W) = 0 \\ \dim U + \dim W = n \end{cases}$$

Найдём $\dim U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \implies x_1 = -x_2 - x_3 - \dots - x_n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 - \dots - x_n \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \dots \implies$$

$$\implies \dim U = n - 1$$

Найдём $\dim W$, линейная оболочка будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} x_1 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

Поэтому:

$$\dim W = 1$$

Найдём $\dim(U \cap W)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 = \dots = x_n \end{cases} \implies x_1 = \dots = x_n = 0 \implies \dim(U \cap W) = 0$$

Получается, что выполняется условие:

$$\begin{cases} \dim(U \cap W) = 0 \\ \dim U + \dim W = n \end{cases}$$

А значит:

$$\mathbb{R}^n = U \oplus W$$

Нам известно, что:

$$U = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \rangle, \quad W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Найдём, проекции $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$:

$$v = u + w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + \mu_1 w_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & | & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & | & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & | & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & | & a_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & | & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & | & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & | & a_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & | & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n & | & a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & | & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & | & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & | & a_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & | & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & | & \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a_1+a_2(n-1)-a_3-\dots-a_n}{n} \\ \frac{-a_1-a_2+a_3(n-1)-\dots-a_n}{n} \\ \dots \\ \frac{-a_1-a_2-a_3-\dots+a_n(n-1)}{n} \\ \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \end{pmatrix}$$

Получается проекция v на U равна:

$$\frac{-a_1+a_2(n-1)-a_3-\dots-a_n}{n} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \frac{-a_1-a_2-a_3-\dots+a_n(n-1)}{n} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

А проекция v на W:

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

№3 Мы знаем размерность пространства матриц $n \times n$:

$$\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$$

Размерность пространства симметрических матриц:

$$\dim \mathrm{Sym} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Размерность пространства строго верхнетреугольных матриц:

$$\dim N = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Размерность пространства $\mathrm{Sym} \cap N$:

$$\dim(\mathrm{Sym} \cap N) = 0$$

Следовательно, выполняется условие:

$$\begin{cases} \dim(\mathrm{Sym} \cap N) = 0 \\ \dim(M_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Sym}) + \dim(N) \Leftrightarrow n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \text{ - верно} \end{cases}$$

А значит:

$$M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym} \oplus N$$

Найдём проекции матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ -2 & -1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ -n+1 & \dots & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что:

$$A = B + C$$

где B - симметрическая матрица, а C - строго верхнетругольная/

Получается, что:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & \dots & -n+1 \\ -1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ -2 & -1 & 0 & \ddots & -2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -n+1 & \dots & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 4 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, B - проекция на Sym вдоль N, а C - проекция на N вдоль Sym.

№4 U - пространство верхнетреугольных матриц

$$\dim U = \frac{n(n+1)}{2}$$

N - подпространство строго верхнетреугольных матриц

$$\dim N = \frac{n(n-1)}{2}$$

S - подпространство скалярных матрица

$$\dim S = 1$$

Z - подпространство диагональных матриц со следом ноль

$$\dim Z = n - 1$$

Докажем, что $U = N \oplus S \oplus Z$, это эквивалентно:

$$\begin{cases} U = N + S + Z \\ \dim U = \dim N + \dim S + \dim Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim U = \dim(N + S + Z) \\ \dim U = \dim N + \dim S + \dim Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim U = \dim(N + S + Z) \\ \dim U = \dim N + \dim S + \dim Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim U = \dim(N + S) + \dim Z - \dim((N + S) \cap Z) \\ \dim U = \dim N + \dim S + \dim Z \end{cases}$$

Найдём размерность $N+S$, по сути мы дополняем строго верхнетреугольную матрицу диагональю, задающуюся одним числом, поэтому:

$$\dim(N + S) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

Пересечение таких матриц и матриц Z, даёт нулевую матрицу:

$$\dim((N + S) \cap Z) = 0$$

Получается, что:

$$\dim(N + S) + \dim Z - \dim((N + S) \cap Z) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} + 1 + n - 1 - 0 = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} = \dim U$$

А также:

$$\dim N + \dim S + \dim Z = \frac{n(n-1)}{2} + 1 + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \dim U$$

Значит, выполняется условие:

$$\begin{cases} \dim U = \dim(N+S) + \dim Z - \dim((N+S) \cap Z) \\ \dim U = \dim N + \dim S + \dim Z \end{cases}$$

Следовательно:

$$U = N \oplus S \oplus Z$$