Домашнее задание на 12.02 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 1.1 $\beta(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 12x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2$.

Матрица билинейной формы:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 5 \\ -3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Найдём диагональный вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Матрица перехода от e к e':

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно e':

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = e_1 + \frac{1}{2}e_2, \quad e'_3 = 4e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3$$

1.2 $\beta(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$

Матрица билинейной формы:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода:

$$C^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Новый базис e':

$$e'_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, \quad e'_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, \quad e'_3 = -e_1 - e_2 + e_3$$

1.3 $\beta(x, y) = x_1y_1 + 9x_2y_2 + 4x_3y_3 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 +$

$6x_2y_3 + 6x_3y_2$

Матрица билинейной формы:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Приведём к диагональному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -6 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Матрица перехода:

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Следовательно, новый базис e':

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3, \quad e_3 = \frac{5}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3$$

№2 2.1 $Q(x) = x_1^2 + 6x_2^2 + 12x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 5 \\ -3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Матрица несимметричной билинейной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -3 & 6 & 5 \\ -3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

2.2 $Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица несимметричной билинейной формы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 $Q(x) = x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2x_3$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Матрица несимметричной билинейной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 9 & 8 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

№3 $Q(x) = x_1^2 - 12x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 24x_2x_3$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -12 \\ 2 & -12 & -12 \end{pmatrix}$$

Приведём её к каноническому виду, симметричным методом гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -12 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -12 & -12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Получаем матрицу перехода:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, новый базис:

$$e' = e_1, \quad e_2' = 2e_1 + e_2, \quad e_3' = -6e_1 - 2e_2 + e_3$$

№4 1) $Q(x) = x_1^2 + 6x_2^2 + 12x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 5 \\ -3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Приведём к каноническому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{array}\right)$$

Слева матрица нормального вида, справа траспонированная матрица перехода, новый базис:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = \sqrt{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \quad e_3' = \frac{4\sqrt{10}}{5}e_1 + \frac{\sqrt{10}}{10}e_2 + \frac{\sqrt{10}}{5}e_3$$

Индексы инерции:

$$\text{положительный:}3, \quad \text{отрицательный:}0$$

2) $Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Приведём её к каноническому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right)$$

Слева матрица нормального вида, справа траспонированная матрица перехода, новый базис:

$$e_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \quad e_2' = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \quad e_3' = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_3$$

Индексы инерции:

$$\text{положительный:1}, \quad \text{отрицательный:2}$$

3) $Q(x) = x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2x_3$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Приведём к каноническому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -6 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} \end{array}\right)$$

Слева матрица нормального вида, справа траспонированная матрица перехода, новый базис:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = -\frac{\sqrt{6}}{12}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{12}e_2 + \frac{\sqrt{6}}{12}e_3, \quad e_3' = \frac{5\sqrt{6}}{12}e_1 - \frac{\sqrt{6}}{12}e_2 + \frac{\sqrt{6}}{12}e_3$$

Индексы инерции:

$$\text{положительный:}2, \quad \text{отрицательный:}1$$

4) $Q(x) = x_1^2 - 12x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 24x_2x_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -12 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -12 & -12 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Слева матрица нормального вида, справа траспонированная матрица перехода, новый базис:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_1 + \frac{1}{2}e_2, \quad e_3' = -6e_1 - 2e_2 + e_3$$

Индексы инерции:

$$\text{положительный:}1, \quad \text{отрицательный:}1$$