Домашнее задание на 07.03 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 $\beta(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + ax_2y_2 + bx_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$ Чтобы данная билинейная форма была скалярным произведением, она должна удовлетворять следующим свойствам:

1) Симметрия:

   То есть $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ для всех x, y. Если записать билинейную форму в виде $x^T My$, то матрица M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Симметрия требует $M_{ij} = M_{ji}$ для всех i, j. Видно, что при $i = 2, j = 3$: $M_{23} = b$ и $M_{32} = -1$.

   Поэтому условие симметрии дает

$$b = -1.$$

2) Положительная определённость

   Из первого пункта у нас получилась матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём её угловые миноры:

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = a - 1, \quad \delta_3 = 2a - 3$$

Чтобы матрица была положительно определена, нужно, чтобы:

$$\begin{cases} a - 1 > 0 \\ 2a - 3 > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a > 1 \\ a > \frac{3}{2} \end{cases} \implies a > \frac{3}{2}$$

Ответ: $b = -1, \quad a > \frac{3}{2}$

№2 Рассмотрим векторное пространство

$$E = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n},$$

сформированное многочленами степени не выше n, и определим на нём форму

$$(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + \cdots + f(n)g(n).$$

Проверим условия евклидова пространства:

1) Симметричность

   Очевидно, что форма симметрична, то есть $(f, g) = (g, f)$ для всех $f, g \in E$, а также линейна по каждой из аргументов, поскольку операция умножения и сложения чисел удовлетворяет свойствам линейности.

2) Положительная определённость

   Для любого $f \in E$ имеем:

$$(f, f) = f(0)^2 + f(1)^2 + \cdots + f(n)^2.$$

Каждая слагаемая $f(k)^2 \geq 0$. Рассмотрим когда $(f, f) = 0$:

$$f(0) = f(1) = \cdots = f(n) = 0.$$

Следовательно, $(f, f) = 0$ только при $f \equiv 0$. Получаем:

$$(f, f) > 0, \text{ при } f \neq 0$$

Вывод: Форма (f, g) является скалярным произведением, то есть векторное пространство E является евклидовым.

№3 Пусть $\mathbf{u} = (2, 5, 4)$ и $\mathbf{v} = (6, 0, -3)$. Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ определяется как

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-3).$$

Вычисляем:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 12 + 0 - 12 = 0.$$

Так как $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ ортогональны. Следовательно, угол θ между ними равен $90°$.

Ответ: 90

№4 Пусть $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^2 + x + 1$. Тогда скалярное произведение определяется как

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 x^3(x^2 + x + 1)\,dx =$$
$$= \int_0^1 \left(x^5 + x^4 + x^3\right) dx = \frac{37}{60}$$

Найдем нормы векторов:

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_0^1 x^6\,dx} = \sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

а для g:

$$\|g\| = \sqrt{(g,g)} = \sqrt{\int_0^1 (x^2+x+1)^2\,dx} = \sqrt{\frac{37}{10}}$$

Определим теперь угол θ между f и g по формуле

$$\cos\theta = \frac{(f,g)}{\|f\|\,\|g\|}.$$

Подставляем найденные значения:

$$\cos\theta = \frac{\frac{37}{60}}{\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{10}}} = \frac{37}{60}\cdot\frac{\sqrt{7}\sqrt{10}}{\sqrt{37}} = \frac{37\sqrt{70}}{60\sqrt{37}} = \sqrt{\frac{259}{360}}$$

Таким образом, угол θ равен

$$\theta = \arccos\left(\sqrt{\frac{259}{360}}\right)$$

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{259}{360}}$

№5 Пусть s и t — единичные векторы, т.е.

$$\|s\| = \|t\| = 1,$$

и угол между ними равен θ, тогда

$$(s,t) = \cos\theta.$$

Заданы векторы

$$p = s + 2t \quad \text{и} \quad q = 5s - 4t.$$

Они взаимно перпендикулярны, то есть

$$(p, q) = 0.$$

Воспользуемся билинейностью скалярного произведения:

$$(p, q) = (s + 2t,\ 5s - 4t) = (s, 5s - 4t) + (2t, 5s - 4t).$$

$$(s, 5s - 4t) = 5(s, s) - 4(s, t) = 5 - 4\cos\theta,$$

$$(2t, 5s - 4t) = 2\,[5(t, s) - 4(t, t)] = 10\cos\theta - 8.$$

Таким образом,

$$(p, q) = \big(5 - 4\cos\theta\big) + \big(10\cos\theta - 8\big) = (5 - 8) + (-4\cos\theta + 10\cos\theta) = -3 + 6\cos\theta.$$

Так как $(p, q) = 0$, то

$$-3 + 6\cos\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$

№6 Пусть $p = (b, c)a - (a, c)b$ и c — произвольный вектор пространства E. Докажем, что p и c ортогональны, то есть $(p, c) = 0$.

Вычислим скалярное произведение:

$$(p, c) = \Big((b, c)a - (a, c)b,\ c\Big) = (b, c)(a, c) - (a, c)(b, c).$$

Заметим, что $(b, c)(a, c) - (a, c)(b, c) = 0$.

Таким образом, $(p, c) = 0$, что и требовалось доказать.

№7 Мы имеем следующие матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Матрица Грама для набора векторов должна быть *симметричной* и *неотрицательно определённой.*

1. Матрица A_1

Заметим, что

$$(A_1)_{12} = 3 \quad \text{и} \quad (A_1)_{21} = 4.$$

Так как $3 \neq 4$, матрица A_1 не симметрична, следовательно, она не может быть матрицей Грама.

2. Матрица A_2

Матрица A_2 симметрична, но проверим её угловые миноры:

$$\delta_1 = 2, \quad \delta_2 = 10 - 16 < 0$$

Следовательно, матрица не определена, значит, она не является матрицей Грама.

3. Матрица A_3

Матрица A_3 симметрична. Проверим её определитель:

$$\det A_3 = 2 \cdot 11 - 4^2 = 22 - 16 = 6 > 0.$$

Также, $a_{11} = 2 > 0$. Следовательно, A_3 *положительно определена* и может быть матрицей Грама некоторого набора из двух векторов.

Найдём, например, в $\mathbb{R}^2$ два вектора v_1 и v_2 такие, что

$$(v_1, v_1) = 2, \quad (v_1, v_2) = 4, \quad (v_2, v_2) = 11.$$

Выберем

$$v_1 = (\sqrt{2},\, 0).$$

Тогда условие $(v_1, v_2) = 4$ даёт

$$\sqrt{2} \cdot (v_2)_1 = 4 \quad \Longrightarrow \quad (v_2)_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Чтобы $(v_2, v_2) = 11$ выполнялось, запишем:

$$(v_2)_1^2 + (v_2)_2^2 = 11 \quad \Longrightarrow \quad (2\sqrt{2})^2 + (v_2)_2^2 = 11,$$

$$8 + (v_2)_2^2 = 11 \quad \Longrightarrow \quad (v_2)_2^2 = 3.$$

Возьмём, например, $(v_2)_2 = \sqrt{3}$. Тогда

$$v_2 = (2\sqrt{2},\, \sqrt{3}).$$

Проверим:

$$(v_1, v_1) = 2, \quad (v_1, v_2) = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4, \quad (v_2, v_2) = 8 + 3 = 11.$$

Таким образом, A_3 является матрицей Грама набора $\{v_1, v_2\}$.

4. Матрица A_4

Матрица A_4 симметрична. Вычислим определитель:

$$\det A_4 = 2 \cdot 8 - 4^2 = 16 - 16 = 0.$$

Определитель равен нулю, что означает, что матрица *неотрицательно определена*

Найдём векторы w_1 и w_2 в $\mathbb{R}^2$ такие, что

$$(w_1, w_1) = 2, \quad (w_1, w_2) = 4, \quad (w_2, w_2) = 8.$$

Можно взять $w_1 = (\sqrt{2},\, 0)$. Тогда требование $(w_1, w_2) = 4$ даёт:

$$\sqrt{2} \cdot (w_2)_1 = 4 \quad \Longrightarrow \quad (w_2)_1 = 2\sqrt{2}.$$

Теперь условие $(w_2, w_2) = 8$ требует:

$$(2\sqrt{2})^2 + (w_2)_2^2 = 8 \quad \Longrightarrow \quad 8 + (w_2)_2^2 = 8,$$

что даёт $(w_2)_2^2 = 0$ и, следовательно, $(w_2)_2 = 0$. Таким образом,

$$w_2 = (2\sqrt{2},\, 0).$$

Заметим, что $w_2 = 2w_1$, то есть векторы линейно зависимы, а их матрица Грама:

$$\begin{pmatrix} (w_1, w_1) & (w_1, w_2) \\ (w_2, w_1) & (w_2, w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix},$$

совпадает с A_4.

Вывод:

Единственными матрицами из предложенных, являющимися матрицами Грама, являются A_3 и A_4. Примеры наборов векторов:

$$A_3: \quad v_1 = (\sqrt{2},\, 0), \quad v_2 = (2\sqrt{2},\, \sqrt{3});$$

$$A_4: \quad w_1 = (\sqrt{2},\, 0), \quad w_2 = (2\sqrt{2},\, 0).$$