ИДЗ №8 (вариант 12) (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем, что:

$$v = \frac{1}{10}(3, 9, 3, 1)$$

Пусть:

$$v' = (3, 9, 3, 1)$$

Для начала найдём какие-нибудь ЛНЗ решения уравнения:

$$3a_1 + 9a_2 + 3a_3 + a_4 = 0 \implies \begin{matrix} u_1 = (1, 0, 0, -3)^T & u_2 = (0, 1, 0, -9)^T \\ & u_3 = (0, 0, 1, -3)^T \end{matrix}$$

Следовательно:

$$v', u_1, u_2, u_3 \text{ — базис } \mathbb{R}^4$$

Теперь применим метод ортогонализации Грамма-Шмидта. Векторы u_1, u_2, u_3 уже перпендикулярны v'. Найдём векторы u_1', u_2', u_3', такие, что векторы:

$$u_1', u_2', u_3'$$

Перпендикулярны между собой (v' будет им перпендикулярен).

$$u_1' = u_1 = (1, 0, 0, -3)^T$$

$$u_2' = u_2 - \mathrm{pr}_{u_1'}(u_2) = \left(-\frac{27}{10},\ 1,\ 0,\ -\frac{9}{10}\right)^T$$

$$u_3' = u_3 - \mathrm{pr}_{\langle u_1', u_2' \rangle}(u_2) = \left(-\frac{9}{91},\ -\frac{27}{91},\ 1,\ -\frac{3}{91}\right)^T$$

Теперь отнормируем векторы:

$$v', u_1', u_2', u_3'$$

Получаем:

$$v = \frac{1}{10}(3, 9, 3, 1)$$

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}},\ 0,\ 0,\ -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^T$$

$$e_2 = \left(\frac{-27}{\sqrt{910}},\ \sqrt{\frac{10}{91}},\ 0,\ \frac{-9}{\sqrt{910}}\right)^T$$

$$e_3 = \left(\frac{-9}{10\sqrt{91}},\ \frac{-27}{10\sqrt{91}},\ \frac{\sqrt{91}}{10},\ \frac{-3}{10\sqrt{91}}\right)^T$$

Получаем ортонормированный базис $\mathbb{R}^4$

Ответ: (v, e_1, e_2, e_3)

№2 Для начала решим ОСЛУ:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 & 9 & | & 0 \\ -5 & -2 & -15 & -6 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ФСР:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 \\ -3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Значит:

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle, \quad \text{где} \quad u_1 = (-3, 0, 1, 0)^T, \quad u_2 = (0, -3, 0, 1)^T$$

Найдём проекцию v на U:

$$v = (-2, 3, -6, 1)^T$$

$$\mathrm{pr}_{\langle u_1, u_2 \rangle} v = \frac{(v, u_1)}{u_1, u_1} u_1 + \frac{(v, u_2)}{u_2, u_2} u_2 = 0 + \frac{-10}{10} u_2 = -u_2 = (0, 3, 0, 1)^T$$

Найдём состовляющую:

$$\mathrm{ort}_{\langle u_1, u_2 \rangle} v = v - \mathrm{pr}_{\langle u_1, u_2 \rangle} v = (-2, 0, -6, 0)^T$$

Найдём расстояние от U до v

$$\rho(U, v) = \left| \mathrm{ort}_{\langle u_1, u_2 \rangle} v \right| = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$$

Ответ: $(0, 3, 0, 1)^T, (-2, 0, -6, 0)^T$ и $2\sqrt{10}$

№3 Найдём ортогональное дополнение $U^\perp$ к U, для этого найдём ФСР системы:

$$\begin{cases} (u_1, x) = 0 \\ (u_2, x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Пусть

$$u_1^\perp = (0, -1, 1, 0), \quad u_2^\perp = (-1, 0, 0, 1)$$

Тогда:

$$U^\perp = \langle u_1^\perp, u_2^\perp \rangle$$

Мы знаем, что:

$$v = pr_{\langle u_1, u_2 \rangle} v + ort_{\langle u_1, u_2 \rangle} v = (-10, 0, 0, -10) + \lambda_1 u_1^{\perp} + \lambda_2 u_2^{\perp}$$

$$v = pr_{\langle w_1, w_2 \rangle} v + ort_{\langle w_1, w_2 \rangle} v = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + (6, 0, -8, -10)$$

Приравняем:

$$(-10, 0, 0, -10) + \lambda_1 u_1^{\perp} + \lambda_2 u_2^{\perp} = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + (6, 0, -8, -10)$$

Распишем:

$$(-10, 0, 0, -10) + \lambda_1 (0, -1, 1, 0) + \lambda_2 (-1, 0, 0, 1)$$

$$= \mu_1 (1, 2, 2, -1) + \mu_2 (1, -1, -3, 3) + (6, 0, -8, -10)$$

Получаем СЛУ:

$$\begin{cases} -10 - \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 + 6 \\ -\lambda_1 = 2\mu_1 - \mu_2 \\ \lambda_1 = 2\mu_1 - 3\mu_2 - 8 \\ -10 + \lambda_2 = -\mu_1 + 3\mu_2 - 10 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 16 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -10, \quad \mu_1 = -2, \quad \mu_2 = -4$$

Получается:

$$v = -2(1,2,2,-1) + -4(1,-1,-3,3) + (6,0,-8,-10) = (0,0,0,-20)$$

Ответ: $(0,0,0,-20)$

№4 Пусть:

$$v_1 = (-4,5,-1), \quad v_2 = (16,-18,3), \quad v_3 = (8,-14,3)$$

$$w_1 = (-3,3,-4), \quad w_2 = (-3,-1,-7), \quad w_3 = (6,-9,10)$$

- координаты соответствующих многочленов в ортонормированном базисе $1, x, x^2$. Пусть тогда

$$V = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} -4 & 16 & 8 \\ 5 & -18 & -14 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$W = [w_1, w_2, w_3] = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 3 & -1 & -9 \\ -4 & -7 & 10 \end{pmatrix}$$

Теперь мы может найти $\mathrm{Vol}(P(w_1, w_2, w_3))$:

$$\mathrm{Vol}(P(w_1, w_2, w_3)) = |\det A| \,\mathrm{Vol}(P(v_1, v_2, v_3)) = 5|\det A|$$

Найдём для этого $\det A$:

$$\det V = \det \begin{pmatrix} -4 & 16 & 8 \\ 5 & -18 & -14 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 8$$

$$\det W = \det \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 3 & -1 & -9 \\ -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} = 51$$

$$\det V \det A = \det W \implies \det A = \frac{\det W}{\det V} = \frac{51}{8}$$

Получаем:

$$\mathrm{Vol}(P(w_1, w_2, w_3)) = 5|\det A| = 5 \cdot \frac{51}{8} = \frac{255}{8}$$

Ответ: $\frac{255}{8}$

№5 Пусть:

$$a_1 = v_1 - v_0, \quad a_2 = v_2 - v_0, \quad a_3 = v_3 - v_0$$

- $a_1 = v_1 - v_0 = (1,\ 7,\ -8,\ -4,\ -7)$
- $a_2 = v_2 - v_0 = (-4,\ -7,\ 0,\ -1,\ -7)$
- $a_3 = v_3 - v_0 = (-7,\ 1,\ 0,\ -7,\ 4)$

Проверим, что они ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ 7 & -7 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -7 \\ -7 & -7 & 4 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, они образуют базис направляющего подпространства линейного многообразия L, то есть L можно записать как:

$$L = v_0 + \langle a_1, a_2, -a_3 \rangle$$

Пусть:

$$b = v - v_0 = (-8, 1, 0, -10, -2) - (2, 3, 8, -7, -6) = (-10,\ -2,\ -8,\ -3,\ 4)$$

Обозначим матрицу из векторов a_1, a_2, a_3 как столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ 7 & -7 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -7 \\ -7 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдём проекцию на направляющее подпространство L:

$$\mathrm{pr}_{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle} b = A(A^T A)^{-1} A^T = \left(-\frac{6503}{895},\ \frac{1778}{20585},\ -\frac{192}{179},\ -\frac{147796}{20585},\ \frac{19523}{20585}\right)$$

Следовательно, ближайшая точка a_0 к v на трёхмерной плоскости L:

$$a_0 = v_0 + \mathrm{pr}_{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle} b = \left(-\frac{4713}{895},\ \frac{63533}{20585},\ \frac{1240}{179},\ -\frac{291891}{20585},\ -\frac{103987}{20585}\right)$$

Расстояние от a_0 до v:

$$||a_0 - v|| = \sqrt{\frac{1782651}{20585}}$$

Ответ: $a_0 = \left(-\frac{4713}{895},\ \frac{63533}{20585},\ \frac{1240}{179},\ -\frac{291891}{20585},\ -\frac{103987}{20585}\right)$ и $\sqrt{\frac{1782651}{20585}}$