

ИДЗ №8 (вариант 12) (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем, что:

$$v = \frac{1}{10}(3, 9, 3, 1)$$

Пусть:

$$v' = (3, 9, 3, 1)$$

Для начала найдём какие-нибудь ЛНЗ решения уравнения:

$$3a_1 + 9a_2 + 3a_3 + a_4 = 0 \implies \begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 0, -3)^T & u_2 &= (0, 1, 0, -9)^T \\ u_3 &= (0, 0, 1, -3)^T \end{aligned}$$

Следовательно:

$$v', u_1, u_2, u_3 \text{ — базис } \mathbb{R}^4$$

Теперь применим метод ортогонализации Грамма-Шмидта. Векторы u_1, u_2, u_3 уже перпендикулярны v' . Найдём векторы u'_1, u'_2, u'_3 , такие, что векторы:

$$u'_1, u'_2, u'_3$$

Перпендикулярны между собой (v' будет им перпендикулярен).

$$u'_1 = u_1 = (1, 0, 0, -3)^T$$

$$u'_2 = u_2 - \text{pr}_{u'_1}(u_2) = \left(-\frac{27}{10}, 1, 0, -\frac{9}{10}\right)^T$$

$$u'_3 = u_3 - \text{pr}_{\langle u'_1, u'_2 \rangle}(u_3) = \left(-\frac{9}{91}, -\frac{27}{91}, 1, -\frac{3}{91}\right)^T$$

Теперь отнормируем векторы:

$$v', u'_1, u'_2, u'_3$$

Получаем:

$$v = \frac{1}{10}(3, 9, 3, 1)$$

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^T$$

$$e_2 = \left(\frac{-27}{\sqrt{910}}, \sqrt{\frac{10}{91}}, 0, \frac{-9}{\sqrt{910}} \right)^T$$

$$e_3 = \left(\frac{-9}{10\sqrt{91}}, \frac{-27}{10\sqrt{91}}, \frac{\sqrt{91}}{10}, \frac{-3}{10\sqrt{91}} \right)^T$$

Получаем ортонормированный базис \mathbb{R}^4

Ответ: (v, e_1, e_2, e_3)

№2 Для начала решим ОСЛУ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & -6 & 9 & 0 \\ -5 & -2 & -15 & -6 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{УСВ: } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Следовательно, ФСР:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 \\ -3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Значит:

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle, \quad \text{где} \quad u_1 = (-3, 0, 1, 0)^T, \quad u_2 = (0, -3, 0, 1)^T$$

Найдём проекцию v на U :

$$v = (-2, 3, -6, 1)^T$$

$$\text{pr}_{\langle u_1, u_2 \rangle} v = \frac{(v, u_1)}{u_1, u_1} u_1 + \frac{(v, u_2)}{u_2, u_2} u_2 = 0 + \frac{-10}{10} u_2 = -u_2 = (0, 3, 0, 1)^T$$

Найдём составляющую:

$$\text{ort}_{\langle u_1, u_2 \rangle} v = v - \text{pr}_{\langle u_1, u_2 \rangle} v = (-2, 0, -6, 0)^T$$

Найдём расстояние от U до v

$$\rho(U, v) = |\text{ort}_{\langle u_1, u_2 \rangle} v| = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$$

Ответ: $(0, 3, 0, 1)^T, (-2, 0, -6, 0)^T$ и $2\sqrt{10}$

№3 Найдём ортогональное дополнение U^\perp к U , для этого найдём ФСР системы:

$$\begin{cases} (u_1, x) = 0 \\ (u_2, x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Пусть

$$u_1^\perp = (0, -1, 1, 0), \quad u_2^\perp = (-1, 0, 0, 1)$$

Тогда:

$$U^\perp = \langle u_1^\perp, u_2^\perp \rangle$$

Мы знаем, что:

$$v = pr_{\langle u_1, u_2 \rangle} v + ort_{\langle u_1, u_2 \rangle} v = (-10, 0, 0, -10) + \lambda_1 u_1^\perp + \lambda_2 u_2^\perp$$

$$v = pr_{\langle w_1, w_2 \rangle} v + ort_{\langle w_1, w_2 \rangle} v = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + (6, 0, -8, -10)$$

Приравняем:

$$(-10, 0, 0, -10) + \lambda_1 u_1^\perp + \lambda_2 u_2^\perp = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + (6, 0, -8, -10)$$

Распишем:

$$\begin{aligned} & (-10, 0, 0, -10) + \lambda_1(0, -1, 1, 0) + \lambda_2(-1, 0, 0, 1) \\ &= \mu_1(1, 2, 2, -1) + \mu_2(1, -1, -3, 3) + (6, 0, -8, -10) \end{aligned}$$

Получаем СЛУ:

$$\begin{cases} -10 - \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 + 6 \\ -\lambda_1 = 2\mu_1 - \mu_2 \\ \lambda_1 = 2\mu_1 - 3\mu_2 - 8 \\ -10 + \lambda_2 = -\mu_1 + 3\mu_2 - 10 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 16 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -10, \quad \mu_1 = -2, \quad \mu_2 = -4$$

Получается:

$$v = -2(1, 2, 2, -1) + -4(1, -1, -3, 3) + (6, 0, -8, -10) = (0, 0, 0, -20)$$

Ответ: $(0, 0, 0, -20)$

№4 Пусть:

$$v_1 = (-4, 5, -1), \quad v_2 = (16, -18, 3), \quad v_3 = (8, -14, 3)$$

$$w_1 = (-3, 3, -4), \quad w_2 = (-3, -1, -7), \quad w_3 = (6, -9, 10)$$

- координаты соответствующих многочленов в базисе $1, x, x^2$. Пусть тогда

$$V = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} -4 & 16 & 8 \\ 5 & -18 & -14 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$W = [w_1, w_2, w_3] = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 3 & -1 & -9 \\ -4 & -7 & 10 \end{pmatrix}$$

Тогда, т.к. векторы v_1, v_2, v_3 ЛНЗ и векторы w_1, w_2, w_3 ЛНЗ, то можем найти матрицу перехода A от v_1, v_2, v_3 к w_1, w_2, w_3 :

$$VA = W \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 16 & 8 & -3 & -3 & 6 \\ 5 & -18 & -14 & 3 & -1 & -9 \\ -4 & -7 & 10 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right)$$