ИДЗ №5, Вариант 13 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Чтобы разложить матрицу A в сумму матриц ранга 1, нужно для начала найти ранг матрииցы A и соотношение её столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} -22 & 13 & -23 & -27 & -2 \\ 8 & -17 & 16 & -13 & 5 \\ 2 & -11 & 10 & -8 & 3 \\ -28 & -2 & -6 & -18 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 10 & -2 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{18} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{41}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $rkA = 3$, и:

$$\begin{cases} A_{(4)} = -\frac{11}{18}A_{(1)} + \frac{41}{9}A_{(2)} + \frac{13}{3}A_{(3)} \\ A_{(5)} = \frac{1}{9}A_{(1)} - \frac{5}{9}A_{(2)} - \frac{1}{3}A_{(3)} \end{cases}$$

Ранг матрицы равен 1, тогда, когда все её столбцы пропорциональны. Поэтому A можно представить в виде суммы матриц ранга 1 так:

$$A = (A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}, A_{(4)}, A_{(5)}) =$$

$$= (A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}, -\frac{11}{18}A_{(1)} + \frac{41}{9}A_{(2)} + \frac{13}{3}A_{(3)}, \frac{1}{9}A_{(1)} - \frac{5}{9}A_{(2)} - \frac{1}{3}A_{(3)}) =$$

$$= (A_{(1)}, 0, 0, -\frac{11}{18}A_{(1)}, \frac{1}{9}A_{(1)}) + (0, A_{(2)}, 0, \frac{41}{9}A_{(2)}, -\frac{5}{9}A_{(2)}) + (0, 0, A_{(3)}, \frac{13}{3}A_{(3)}, -\frac{1}{3}A_{(3)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -22 & 0 & 0 & \frac{121}{9} & -\frac{22}{9} \\ 8 & 0 & 0 & -\frac{44}{9} & \frac{8}{9} \\ 2 & 0 & 0 & -\frac{11}{9} & \frac{2}{9} \\ -28 & 0 & 0 & \frac{154}{9} & -\frac{28}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 13 & 0 & \frac{533}{9} & -\frac{65}{9} \\ 0 & -17 & 0 & -\frac{697}{9} & \frac{85}{9} \\ 0 & -11 & 0 & -\frac{451}{9} & \frac{55}{9} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{82}{9} & \frac{10}{9} \\ 0 & 6 & 0 & \frac{246}{9} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -23 & -\frac{299}{3} & \frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 16 & \frac{208}{3} & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 10 & \frac{130}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & -6 & -\frac{78}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{52}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -22 & 13 & -23 & -27 & -2 \\ 8 & -17 & 16 & -13 & 5 \\ 2 & -11 & 10 & -8 & 3 \\ -28 & -2 & -6 & -18 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 10 & -2 \end{pmatrix} \text{ (проверено)}$$

№2 Даны базисы e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

(а) Докажем, что векторы в e и e' ЛНЗ. Для этого составим матрицу из векторов для каждого базиса и найдём её определитель:

$$e : \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \qquad e' : \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 7 & 9 & 5 \\ 5 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -64 \neq 0$$

Следовательно, векторы e и e' ЛНЗ, а значит e и e' - базисы, т.к.

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim\langle e_1, e_2, e_3\rangle = \dim\langle e'_1, e'_2, e'_3\rangle$ при e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 - ЛНЗ $\implies$

$$\implies \langle e_1, e_2, e_3\rangle = \mathbb{R}^3 = \langle e'_1, e'_2, e'_3\rangle$$

(б) Матрица перехода от базиса e к e' получается записыванием в i-ый столбец координат e'_i в базисе e.

Найдём кординаты e'_1, e'_2, e'_3 в базисе e:

$$(e_1, e_2, e_3, |, e'_1, e'_2, e'_3) \to (E, |, x_1, x_2, x_3) = (E, |, C)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & | & -3 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & | & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \to \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{15}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{49}{8} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{9}{2} & 1 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{11}{8} & \frac{5}{2} & -\frac{21}{8} \end{pmatrix}$$

Следовательно, матрица перехода:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{49}{8} \\ \frac{15}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{49}{8} \\ -\frac{11}{8} & \frac{5}{2} & -\frac{21}{8} \end{pmatrix}$$

(в) Координаты вектора v в базисе e' можно получить по формуле:

$$x' = C \cdot x$$

Следовательно,

$$x' = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{49}{8} \\ \frac{15}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{49}{8} \\ -\frac{11}{8} & \frac{5}{2} & -\frac{21}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{111}{4} \\ \frac{111}{4} \\ -\frac{27}{4} \end{pmatrix}$$

№3 L_1 состоит из векторов:

$$a_1 = (1, -5, -3, -1, -4), \quad a_2 = (-5, 5, 7, 3, 4),$$

$$a_3 = (-1, 2, 4, -5, -1), \quad a_4 = (-1, -5, -1, 0, -4)$$

L_2 состоит из векторов:

$$b_1 = (-3, -5, 1, 1, -4), \quad b_2 = (3, 5, 2, -7, 4),$$

$$b_3 = (-3, -5, 4, -5, -4), \quad b_4 = (-1, 9, 9, -10, 2)$$

1) Найдём базис L_1:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 & -5 \\ -3 & 7 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 0 \\ -4 & 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, векторы a_1, a_2, a_3 - ЛНЗ, а значит они образуют базис, т.к. линейная оболчка не меняется.

$$\dim L_1 = 3$$

2) Найдём базис L_2:

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & -1 \\ -5 & 5 & -5 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & -7 & -5 & -10 \\ -4 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, векторы b_1, b_2, b_4 - ЛНЗ, а значит они образуют базис, т.к. линейная оболчка не меняется.

$$\dim L_2 = 3$$

3) Найдём базис U:

Т.к. $U = L_1 + L_2$, то линейная оболчка U будет выглядить как:

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle$$

Осталось выбрать из неё ЛНЗ векторы, мы уже знаем, что a_1, a_2, a_3

и b_1, b_2, b_4 - ЛНЗ, выберем из них:

$$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_4) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -3 & 3 & -1 \\ -5 & 5 & 2 & -5 & 5 & 9 \\ -3 & 7 & 4 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & 3 & -5 & -5 & -7 & -10 \\ -4 & 4 & -1 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, векторы a_1, a_2, a_3, b_1 - ЛНЗ, а значит образуют базис в U, т.к. линейная оболчка не меняется.

$$\dim U = 4$$

4) Найдём базис в W:

Для этого нужно представить подпространства L_1, L_2 в виде решений ОСЛУ:

Найдём матрицу ОСЛУ для L_1:

$$L_1 : \begin{bmatrix} a_1 : \\ a_2 : \\ a_3 : \\ a_4 : \end{bmatrix} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & -3 & -1 & -4 & 0 \\ -5 & 5 & 7 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -5 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{УСВ:} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{34}{11} & -\frac{13}{11} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{22} & \frac{14}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{57}{22} & -\frac{13}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{34}{11}x_4 + \frac{13}{11}x_5 \\ x_2 = -\frac{25}{22}x_4 - \frac{14}{11}x_5 \\ x_3 = \frac{57}{22}x_4 + \frac{13}{11}x_5 \end{cases} \implies \text{ФСР: } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{34}{11} \\ -\frac{25}{22} \\ \frac{57}{22} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{13}{11} \\ -\frac{14}{11} \\ \frac{13}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Следовательно, L_1 задаётся матрицей ОСЛУ:

$$\begin{pmatrix} \frac{34}{11} & -\frac{25}{22} & \frac{57}{22} & 1 & 0 & | & 0 \\ \frac{13}{11} & -\frac{14}{11} & \frac{13}{11} & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу ОСЛУ для L_2:

$$L_2 : \left[\begin{matrix} b_1 : \\ b_2 : \\ b_3 : \\ b_4 : \end{matrix}\right. \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 & 1 & -4 & | & 0 \\ 3 & 5 & 2 & -7 & 4 & | & 0 \\ -3 & -5 & 4 & -5 & -4 & | & 0 \\ -1 & 9 & 9 & -10 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{67}{32} & \frac{13}{16} & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{21}{32} & \frac{5}{16} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{67}{32}x_4 - \frac{13}{16}x_5 \\ x_2 = -\frac{21}{32}x_4 - \frac{5}{16}x_5 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases} \implies \text{ФСР: } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{67}{32} \\ -\frac{21}{32} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{13}{16} \\ -\frac{5}{16} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Следовательно, L_2 задаётся матрицей ОСЛУ:

$$\begin{pmatrix} \frac{67}{32} & -\frac{21}{32} & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ -\frac{13}{16} & -\frac{5}{16} & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $W = L_1 \cap L_2$ можно представить как:

$$\begin{pmatrix} \frac{34}{11} & -\frac{25}{22} & \frac{57}{22} & 1 & 0 & | & 0 \\ \frac{13}{11} & -\frac{14}{11} & \frac{13}{11} & 0 & 1 & | & 0 \\ \frac{67}{32} & -\frac{21}{32} & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ -\frac{13}{16} & -\frac{5}{16} & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{19} & -\frac{31}{38} & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{19} & -\frac{41}{38} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{19}x_4 + \frac{31}{38}x_5 \\ x_2 = -\frac{13}{19}x_4 + \frac{41}{38}x_5 \\ x_3 = -x_4 - \frac{1}{2}x_5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} \frac{5}{19} \\ -\frac{13}{19} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{31}{38} \\ \frac{41}{38} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{19} \\ -\frac{13}{19} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{31}{38} \\ \frac{41}{38} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ - базис } W, \quad \dim W = 2$$

Проверим пункты по формуле:

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 \cap L_2) + \dim(L_1 + L_2)$$

$$3 + 3 = 2 + 4$$

$$6 = 6 \text{ - верно}$$

№4 Подпространство U порождается векторами:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 10 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 33 \\ 21 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Найдём такое W, что:

$$\mathbb{R}^5 = U \oplus W \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^5 = U + W \\ U, W \text{ - ЛНЗ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^5 = U + W \\ \dim \mathbb{R}^5 = \dim U + \dim W \end{cases} \Leftrightarrow$$

Так как $U, W \subseteq \mathbb{R}^5$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim \mathbb{R}^5 = \dim(U + W) \\ \dim \mathbb{R}^5 = \dim U + \dim W \end{cases} \Leftrightarrow 5 = \dim(U+W) = \dim U + \dim W$$

Для начала найдём ЛНЗ векторы среди v_1, v_2, v_3, v_4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 9 & -3 \\ -8 & 10 & 7 & 33 \\ -5 & 10 & 1 & 21 \\ -4 & -10 & -5 & -7 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, векторы v_1, v_2, v_3 - ЛНЗ, а также:

$$\dim U = 3 \implies \dim W = 2$$

Пусть $W = \langle x, y \rangle$:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \text{они ЛНЗ} \implies \dim W = 2$$

Значит, т.к. $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, то:

$$U + W = \langle v_1, v_2, v_3, x, y \rangle$$

Удостоверимся, что набор v_1, v_2, v_3, x, y ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & 9 & 2 & 4 \\ -8 & 10 & 7 & 3 & 3 \\ -5 & 10 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & -10 & -5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, v_1, v_2, v_3, x, y базис в $U + W$, следовательно:

$$\dim(U + W) = 5$$

Получили:

$$5 = \dim(U + W) = \dim U + \dim W$$

Значит:

$$\mathbb{R}^5 = U \oplus W$$

Ответ: $(1, 2, 3, 4, 5)^T$ и $(5, 4, 3, 2, 1)^T$

№5 $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ и $W = \langle v_3, v_4 \rangle$ подпространства $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ -4 & 8 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$$

(a) Условие $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus W$ эквивалентно:

$$\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus W \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U + W \\ U, W \text{ - ЛНЗ} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U + W \\ \dim \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \dim U + \dim W \end{cases} \Leftrightarrow$$

Так как $U, W \subseteq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \dim(U + W) \\ \dim \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \dim U + \dim W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \dim(U + W) \\ 4 = \dim U + \dim W \end{cases}$$

Значит, нужно доказать, что:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W = 4$$

Найдём, какие из векторов $v1, v2, v3, v4$ - ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & -11 & 0 \\ -9 & -3 & -4 & -6 \\ -6 & 9 & 8 & 14 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, все они ЛНЗ между собой. Поэтому v_1, v_2 - базис в U, v_3, v_4 - базис в W и v_1, v_2, v_3, v_4 - базис в $U + W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$

Следовательно:

$$\dim U = 2, \quad \dim W = 2, \quad \dim(U+W) = 4$$

А значит:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W = 4 \text{ - верно}$$

Следовательно,

$$\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus W$$

(б) Найдём проекцию вектора ξ на Подпространство W вдоль U:

$$\xi = \begin{pmatrix} 15 & -20 \\ -17 & -19 \end{pmatrix}$$

Вектор ξ выражается как:

$$\xi = u + w, \text{ где } u \in U \text{ и } w \in W$$

w - и будет искомой проекцией. u и w можно представить как:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \quad w = \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$$

Получаем ОСЛУ на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \xi$$

Запишем матрицу ОСЛУ и решим:

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & 9 & 6 & | & 15 \\ 4 & 6 & -11 & 0 & | & -20 \\ -9 & -3 & -4 & -6 & | & -17 \\ -6 & 9 & 8 & 14 & | & -19 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Получаем:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \\ \lambda_4 = -1 \end{cases} \implies w = \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 2\begin{pmatrix} 9 & -11 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -22 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 12 & -22 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$