ИДЗ №8 (вариант 12) (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем, что:

$$v = \frac{1}{10}(3, 9, 3, 1)$$

Пусть:

$$v' = (3, 9, 3, 1)$$

Для начала найдём какие-нибудь ЛНЗ решения уравнения:

$$3a_1 + 9a_2 + 3a_3 + a_4 = 0 \implies \begin{array}{rr} u_1 = (1, 0, 0, -3)^T & u_2 = (0, 1, 0, -9)^T \\ & u_3 = (0, 0, 1, -3)^T \end{array}$$

Следовательно:

$$v', u_1, u_2, u_3 \text{ — базис } \mathbb{R}^4$$

Теперь применим метод ортогонализации Грамма-Шмидта. Векторы u_1, u_2, u_3 уже перпендикулярны v'. Найдём векторы u'_1, u'_2, u'_3, такие, что векторы:

$$u'_1, u'_2, u'_3$$

Перпендикулярны между собой (v' будет им перпендикулярен).

$$u'_1 = u_1 = (1, 0, 0, -3)^T$$

$$u'_2 = u_2 - \mathrm{pr}_{u'_1}(u_2) = \left(-\frac{27}{10},\ 1,\ 0,\ -\frac{9}{10}\right)^T$$

$$u'_3 = u_3 - \mathrm{pr}_{\langle u'_1, u'_2 \rangle}(u_2) = \left(-\frac{9}{91},\ -\frac{27}{91},\ 1,\ -\frac{3}{91}\right)^T$$

Теперь отнормируем векторы:

$$v', u'_1, u'_2, u'_3$$

Получаем:

$$v = \frac{1}{10}(3, 9, 3, 1)$$

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}},\ 0,\ 0,\ -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^T$$

$$e_2 = \left(\frac{-27}{\sqrt{910}},\ \sqrt{\frac{10}{91}},\ 0,\ \frac{-9}{\sqrt{910}}\right)^T$$

$$e_3 = \left(\frac{-9}{10\sqrt{91}},\ \frac{-27}{10\sqrt{91}},\ \frac{\sqrt{91}}{10},\ \frac{-3}{10\sqrt{91}}\right)^T$$

Получаем ортонормированный базис $\mathbb{R}^4$

Ответ: (v, e_1, e_2, e_3)

№2 Для начала решим ОСЛУ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & -6 & 9 & 0 \\ -5 & -2 & -15 & -6 & 0 \end{array}\right) \implies \text{УСВ: } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Следовательно, ФСР:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 \\ -3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Значит:

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle, \quad \text{где} \quad u_1 = (-3, 0, 1, 0)^T, \quad u_2 = (0, -3, 0, 1)^T$$

Найдём проекцию v на U:

$$v = (-2, 3, -6, 1)^T$$

$$\mathrm{pr}_{\langle u_1, u_2\rangle} v = \frac{(v, u_1)}{u_1, u_1} u_1 + \frac{(v, u_2)}{u_2, u_2} u_2 = 0 + \frac{-10}{10} u_2 = -u_2 = (0, 3, 0, 1)^T$$

Найдём состовляющую:

$$\mathrm{ort}_{\langle u_1, u_2\rangle} v = v - \mathrm{pr}_{\langle u_1, u_2\rangle} v = (-2, 0, -6, 0)^T$$

Найдём расстояние от U до v

$$\rho(U, v) = \left|\mathrm{ort}_{\langle u_1, u_2\rangle} v\right| = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$$

Ответ: $(0, 3, 0, 1)^T, (-2, 0, -6, 0)^T$ и $2\sqrt{10}$