Домашнее задание на 18.09.2024 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$

Докажем через математическую индукцию, что $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ - верно (база индукции)

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$ - ч.т.д (шаг индукции)

2. Пример:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$(A - B)(A + B) = (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $A^2 + B^2 \neq (A - B)(A + B)$
$(A - B)(A + B) = A^2 - BA + BA + B^2$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A = BCD \quad A^6 = BCDBCDBCDBCDBCDBCD =$
$= BC(DB)C(DB)C(DB)C(DB)C(DB)CD$

$DB = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^6 =$
BC^6D

$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$C^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 63 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 63 & 0 & 64 \end{pmatrix}$

4.

4.1. $((A+E)(B+E))^T - (A+B)^T = (AB + EB + AE + E^2)^T - A^T - B^T = B^T A^T + B^T E^T + E^T A^T + (E^2)^T - A^T - B^T = B^T A^T + B^T + A^T + E - A^T - B^T = B^T A^T + E$

4.2. $tr((6AB^T - 3BA^T)^T C + C^T(2AB^T - 4BA^T))$
$= tr((6BA^T - 3AB^T)C + 2C^T AB^T - 4C^T BA^T)$
$= tr(6BA^T C - 3AB^T C + 2C^T AB^T - 4CBA^T)$
$= 6tr(BA^T C) - 3tr(AB^T C) + 2tr(C^T AB^T) - 4tr(C^T BA^T)$
$= 6tr(BA^T C) - 3tr(AB^T C^T) + 2tr(B^T C^T A) - 4tr(BA^T C)$
$= 2tr(BA^T C) - 3tr(A(CB)^T) + 2tr((CB)^T A)$
$= 2tr(BA^T C) - 3tr(((CB)A^T)^T) + 2tr((A^T(CB))^T)$
$= 2tr(BA^T C) - 3tr(BA^T C) + 2tr(BA^T C)$
$= tr(BA^T C) = tr(CBA^T)$

5.

5.1 $A + A^T = (A^T + A)^T = (A + A^T)^T$

5.2 $AB - BA = -(-AB + BA) = -((AB)^T - (BA)^T) = -(AB - BA)^T \Rightarrow -(AB - BA) = (AB - BA)^T$

5.3 $tr((AB)^n) = tr(ABAB \dots AB) = tr(BABA \dots BA) = tr((BA)^n)$

6.

$$XA = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{11} = x_{11}a_{11} + x_{12}a_{21} + \dots + x_{1n}a_{n1} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{1k}a_{k1} \\ c_{22} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{2k}a_{k2} \\ c_{33} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{3k}a_{k3} \\ \dots \\ c_{nn} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{nk}a_{kn} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow tr(XA) = \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_{pk}a_{kp} \Rightarrow tr(XA) = 0$ при любом А только при $x_{pk} = 0 \Rightarrow X$ обязана быть нулевой матрицей

Ответ: Подходит только нулевая матрица

7.

Пусть $C = XA = AX$

$$XA = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Рассмотрим элементы матрицы C на диагонали:</u>

$c_{11} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{1k}a_{k1} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_{k1} \Rightarrow$ сокращается только $a_{11}x_{11} \Rightarrow$ чтобы было верно при всех A, все x-ы первой строчки и первого столбца матрицы X, кроме x_{11} должны быть равны нулю

$c_{22} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{2k}a_{k2} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}x_{k2} \Rightarrow$ все элементы на второй строчке и втором столбце, кроме x_{22}, должны быть равны нулю.

$\dots$

$c_{nn} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{nk}a_{kn} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}x_{kn} \Rightarrow$все элементы на n-ой строчке и n-ом столбце, кроме x_{nn}, должны быть равны нулю.

Следовательно, матрица X - диагональная

<u>Рассмотрим остальные элементы матрицы C:</u>

$c_{12} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{1k}a_{k2} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_{k2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{11}a_{12} + x_{12}a_{22} + x_{13}a_{31} + \dots + x_{1n}a_{n2} =$

$= a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{31} + \dots + a_{1n}x_{n2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{12}(x_{11} - x_{22}) = a_{11}x_{12} - x_{12}a_{22} + a_{13}x_{31} - x_{13}a_{31} + \dots \Rightarrow$ чтобы равенство было верно для всех A, нужно чтобы: $x_{11} = x_{22}$, а остальные элементы первой строчки и второго столбца матрицы X равнялись нулю

$c_{13} = \sum_{k=1}^{n} x_{1k}a_{k3} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_{k3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{13}(x_{11} - x_{33}) = \ldots - x_{11} = x_{33}$ аналогично

Следовательно, все элементы вне диагонали матрицы C, создают условие равенства элементов матрицы X на диагонали между собой. Перебрав все c мы получим условие:

$$\begin{cases} x_{11} = x_{22} = x_{33} = \cdots = x_{nn} \\ \text{остальные иксы} = 0 \end{cases}$$

<u>Соберём все условия вместе:</u>

$$\begin{cases} \text{Матрица X - диагональная} \\ x_{11} = x_{22} = x_{33} = \cdots = x_{nn} \end{cases} \Leftrightarrow X = \lambda E \text{ - } \textbf{ч.т.д.}$$