Домашнее задание на 27.11 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. 1.1. Обозначим:

$$f(x) = x^{10}$$

и рассмотрим линейную комбинацию:

$$c_0 \cdot 1 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + \ldots + c_{10}(x-1)^{10} = f(x)$$

x^{10} представим в виде этой линейной комбинации, так как

$$x^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (x-1)^k$$

То есть при $c_i = \binom{10}{i}$

Таким образом, функция x^{10} представима в виде линейной комбинации функций $1, x-1, (x-1)^2, \ldots, (x-1)^{10}$.

1.2. Линейная оболочка этих функций состоит из всех возможных линейных комбинаций:

$$c_0 \cdot 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 \sin 2x + c_4 \cos 2x$$

где c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 - некоторые коэффициенты.

Функция x является многочленом первой степени, а функции $\sin x$ и $\cos x$ являются тригонометрическими функциями, которые не могут быть представлены в виде многочлена. Линейная комбинация указанных функций не может дать результат в виде многочлена, так как они не содержат членов с целыми степенями.

Таким образом, функция x не может быть представлена в виде линейной комбинации указанных функций.

2. Мы ищем такие коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, что:

$$\lambda_1(5,4,3,0)^T + \lambda_2(3,3,2,1)^T + \lambda_3(8,1,3,-9)^T = (0,0,0,0)^T$$

Это приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 & = 0 \quad (1) \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 1\lambda_3 & = 0 \quad (2) \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = 0 \quad (3) \\ 0\lambda_1 + 1\lambda_2 - 9\lambda_3 & = 0 \quad (4) \end{cases}$$

Решим систему уравнений, начиная с уравнения (4):

$$\lambda_2 - 9\lambda_3 = 0 \implies \lambda_2 = 9\lambda_3$$

Теперь подставим λ_2 в уравнения (1), (2) и (3).

Подстановка в уравнение (1):

$$5\lambda_1 + 3(9\lambda_3) + 8\lambda_3 = 0 \implies 5\lambda_1 + 27\lambda_3 + 8\lambda_3 = 0 \implies 5\lambda_1 + 35\lambda_3 = 0$$

$$\implies \lambda_1 = -7\lambda_3 \quad (5)$$

Подстановка в уравнение (2):

$$4\lambda_1 + 3(9\lambda_3) + 1\lambda_3 = 0 \implies 4\lambda_1 + 27\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \implies 4\lambda_1 + 28\lambda_3 = 0$$

Подставим λ_1 из (5):

$$4(-7\lambda_3) + 28\lambda_3 = 0 \implies -28\lambda_3 + 28\lambda_3 = 0$$

Это уравнение всегда верно.

Подстановка в уравнение (3):

$$3\lambda_1 + 2(9\lambda_3) + 3\lambda_3 = 0 \implies 3\lambda_1 + 18\lambda_3 + 3\lambda_3 = 0 \implies 3\lambda_1 + 21\lambda_3 = 0$$

Подставим λ_1 из (5):

$$3(-7\lambda_3) + 21\lambda_3 = 0 \implies -21\lambda_3 + 21\lambda_3 = 0$$

Это уравнение также всегда верно.

Мы получили, что:

$$\lambda_1 = -7\lambda_3, \quad \lambda_2 = 9\lambda_3$$

где λ_3 может быть любым ненулевым числом. Это означает, что существует нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулевому вектору.

Следовательно, векторы $(5, 4, 3, 0)^T, (3, 3, 2, 1)^T, (8, 1, 3, -9)^T$ являются **линейно зависимыми**.

3. Чтобы доказать, что столбец b представляется в виде линейной комбинации столбцов $a_1, \ldots, a_k$, воспользуемся определениями линейной независимости и линейной зависимости.

1) Столбцы $a_1, \ldots, a_k$ линейно независимы, что означает, что единственное решение уравнения

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = 0$$

— это тривиальное решение, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

2) Столбцы $a_1, \ldots, a_k, b$ линейно зависимы, что означает, что существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому

вектору:

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_k a_k + \mu_{k+1} b = 0$$

где не все коэффициенты $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k+1}$ равны нулю.

Поскольку $a_1, \ldots, a_k$ линейно независимы, если $\mu_{k+1} \neq 0$, мы можем выразить b через $a_1, \ldots, a_k$:

$$b = -\frac{1}{\mu_{k+1}}(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_k a_k)$$

Это означает, что b может быть представлен как линейная комбинация столбцов $a_1, \ldots, a_k$.

Если $\mu_{k+1} = 0$, то уравнение

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_k a_k = 0$$

должно иметь нетривиальное решение, что противоречит предположению о линейной независимости $a_1, \ldots, a_k$.

Следовательно, в любом случае, столбец b <u>может быть представлен в виде линейной комбинации столбцов</u> $a_1, \ldots, a_k$.

4. Чтобы выяснить, являются ли векторы b_1, b_2, b_3 линейно независимыми, мы можем выразить их через векторы a_1, a_2, a_3, a_4 и проверить, существует ли нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

Векторы b_1, b_2, b_3 записаны как:

$$\begin{cases} b_1 &= 3a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4, \\ b_2 &= 2a_1 + 5a_2 + 3a_3 + 2a_4, \\ b_3 &= 3a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 3a_4. \end{cases}$$

Линейная комбинация векторов b_1, b_2, b_3

Рассмотрим линейную комбинацию векторов b_1, b_2, b_3:

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0.$$

Подставим выражения для b_1, b_2, b_3:

$$\lambda_1(3a_1+2a_2+a_3+a_4)+\lambda_2(2a_1+5a_2+3a_3+2a_4)+\lambda_3(3a_1+4a_2+2a_3+3a_4) = 0.$$

Соберем все коэффициенты при a_1, a_2, a_3, a_4:

$$(3\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)a_1+(2\lambda_1+5\lambda_2+4\lambda_3)a_2+(\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3)a_3+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)a_4 = 0.$$

Это приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = 0 \quad (1) \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 & = 0 \quad (2) \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \quad (3) \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = 0 \quad (4) \end{cases}$$

Запишем в виде матрицы СЛУ:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & | & 0 \\ 2 & 5 & 4 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \to \frac{1}{3}R_1 \implies \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 4 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 2R_1 \implies \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & | & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 2 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_1 \implies \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & | & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 2 & | & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad R_4 \to R_4 - R_1 \implies \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & | & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & 2 & | & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & | & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to \frac{3}{11} R_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & | & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & | & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - \frac{7}{3} R_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & | & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{11} & | & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - \frac{4}{3} R_2 \implies \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & | & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{11} & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{11} & | & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \to -\frac{11}{3} R_3 \implies \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{11} & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - \frac{14}{11} R_3 \implies \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь у нас есть система уравнений в верхнем треугольном виде:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad (1) \\ \lambda_2 + \frac{6}{11}\lambda_3 & = 0 \quad (2) \\ \lambda_3 & = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Подставим $\lambda_3 = 0$ в (2):

$$\lambda_2 + \frac{6}{11} \cdot 0 = 0 \implies \lambda_2 = 0.$$

Теперь подставим $\lambda_2 = 0$ в (1):

$$\lambda_1 + \frac{2}{3} \cdot 0 + 0 = 0 \implies \lambda_1 = 0.$$

Таким образом, единственное решение для системы уравнений:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Это означает, что векторы b_1, b_2, b_3 являются линейно независимыми.

5 Функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно независимы, если уравнение

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

выполняется только при $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

5.1. Система функций: $\sin 2x, \cos x, \sin x$

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$c_1 \sin 2x + c_2 \cos x + c_3 \sin x = 0$$

1) Подставим $x = 0$:

$$c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) + c_3 \sin(0) = 0$$

Это упрощается до:

$$0 + c_2 \cdot 1 + 0 = 0 \implies c_2 = 0$$

2) Теперь подставим $x = \frac{\pi}{2}$:

$$c_1 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Это упрощается до:

$$c_1 \sin(\pi) + 0 + c_3 \cdot 1 = 0 \implies 0 + c_3 = 0 \implies c_3 = 0$$

3) Теперь подставим $x = \frac{\pi}{4}$:

$$c_1 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Это упрощается до:

$$c_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + c_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Подставляя $c_2 = 0$ и $c_3 = 0$:

$$c_1 \cdot 1 + 0 + 0 = 0 \implies c_1 = 0$$

Мы получили, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Следовательно, функции $\sin 2x, \cos x, \sin x$ линейно независимы.

5.2 Линейная независимость функций $1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \ldots, \cos^n x$

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$c_0 \cdot 1 + c_1 \cos x + c_2 \cos^2 x + \ldots + c_n \cos^n x = 0$$

для всех x. Мы хотим показать, что все коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n$ равны нулю.

Возьмем производную от обеих сторон уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left(c_0 \cdot 1 + c_1 \cos x + c_2 \cos^2 x + \ldots + c_n \cos^n x\right) = 0$$

Получаем:

$$0 + c_1(-\sin x) + c_2 \cdot 2\cos x(-\sin x) + \ldots + c_n \cdot n \cos^{n-1} x(-\sin x) = 0$$

$$-\sin x\left(c_1 + 2c_2 \cos x + 3c_3 \cos^2 x + \ldots + nc_n \cos^{n-1} x\right) = 0$$

Поскольку это уравнение должно выполняться для всех x, включая те, для которых $\sin x \neq 0$ (например, $x = \frac{\pi}{4}$), мы можем заключить, что:

$$c_1 + 2c_2 \cos x + 3c_3 \cos^2 x + \ldots + nc_n \cos^{n-1} x = 0$$

Теперь мы можем снова взять производную от этого уравнения:

$$0+2c_2(-\sin x)+3c_3\cdot 2\cos x(-\sin x)+\ldots+nc_n(n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x) = 0$$

Это уравнение также должно выполняться для всех x. Мы можем продолжать этот процесс, беря производные, пока не получим уравнение, в котором останется только один коэффициент c_n. Из этого уравнения получим, что $c_n = 0$. То же самое проделаем и для $c_{n-1}, \ldots, c_0$

Таким образом, единственное решение для всех коэффициентов:

$$c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

Следовательно, функции $1, \cos x, \cos^2 x, \ldots, \cos^n x$ являются линейно независимыми.

6. Чтобы определить, являются ли указанные наборы векторов базисом векторного пространства $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, необходимо проверить два условия:

1. Линейная независимость векторов.
2. Линейная оболочка векторов должна совпадать с V.

Пространство V состоит из многочленов степени не выше 2, то есть имеет размерность 3. Базисом этого пространства могут быть три линейно независимых вектора.

6.1. **Набор 1:** $1, x, x^2$:

1. Линейная независимость:

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 = 0$$

Это уравнение выполняется только если $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Следовательно, векторы линейно независимы.

2. Линейная оболочка:

Любой многочлен степени не выше 2 можно представить в виде $a_0 + a_1x + a_2x^2$, где $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Таким образом, линейная оболочка этого набора равна всему пространству V.

Следовательно, набор $1, x, x^2$ является базисом.

Набор 2: $x^2 + x, 3x^2 - 2x$

1. Линейная независимость:

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$a_1(x^2 + x) + a_2(3x^2 - 2x) = 0$$

Это можно переписать как:

$$(a_1 + 3a_2)x^2 + (a_1 - 2a_2)x = 0$$

Для равенства нулю необходимо, чтобы коэффициенты при x^2 и x были равны нулю:

$$a_1 + 3a_2 = 0 \quad \text{и} \quad a_1 - 2a_2 = 0$$

Решая эту систему, получаем $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$. Следовательно, векторы линейно независимы.

2. Линейная оболочка:

Однако, оба вектора имеют степень 2, и их линейная комбинация не может дать все многочлены степени 0 и 1. Таким образом, линейная оболочка этого набора не равна всему пространству V. Следовательно, набор $x^2 + x, 3x^2 - 2x$ не является базисом.

Набор 3: $1, x, x^2, 1 + x + x^2$

1. Линейная независимость:

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3(1 + x + x^2) = 0$$

Это можно переписать как:

$$(a_0 + a_3) + (a_1 + a_3)x + (a_2 + a_3)x^2 = 0$$

Для равенства нулю необходимо, чтобы все коэффициенты были равны нулю:

$$a_0 + a_3 = 0, \quad a_1 + a_3 = 0, \quad a_2 + a_3 = 0$$

Это приводит к $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Следовательно, векторы линейно независимы.

2. Линейная оболочка:

Набор состоит из 4 векторов, но размерность пространства V равна 3. Поэтому, несмотря на линейную независимость, этот набор не может быть базисом.

Следовательно, набор $1, x, x^2, 1 + x + x^2$ не является базисом.

6.2. **Набор 1:** $1, x + 1, x^2 + 1$

1. Линейная независимость:

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$a_0 \cdot 1 + a_1(x + 1) + a_2(x^2 + 1) = 0$$

Это можно переписать как:

$$(a_0 + a_1 + a_2) + a_1 x + a_2 x^2 = 0$$

Для равенства нулю необходимо, чтобы все коэффициенты были равны нулю:

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$$

Это приводит к $a_0 = 0$. Следовательно, векторы линейно независимы.

2. Линейная оболочка:

Любой многочлен степени не выше 2 можно выразить через этот набор. Таким образом, линейная оболочка этого набора равна всему пространству V.

Следовательно, набор $1, x + 1, x^2 + 1$ является базисом.

Набор 2: $1 + x, 2 + 3x, 4 + 5x$

1. Линейная независимость:

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$a_1(1 + x) + a_2(2 + 3x) + a_3(4 + 5x) = 0$$

Это можно переписать как:

$$(a_1 + 2a_2 + 4a_3) + (a_1 + 3a_2 + 5a_3)x = 0$$

Для равенства нулю необходимо, чтобы все коэффициенты были равны нулю:

$$a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 0, \quad a_1 + 3a_2 + 5a_3 = 0$$

Решая эту систему, мы можем выразить a_1 через a_2 и a_3, что указывает на линейную зависимость.

Следовательно, набор $1 + x, 2 + 3x, 4 + 5x$ не является базисом.