ИДЗ №9 (вариант 10) (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Пусть $P(-35, 20, -15)$ — точка на искомой прямой. Пусть Q - точка на пересекающей прямой, при которой вектор PQ — это направляющий вектор искомой прямой.

$$Q(t) = (-t + 26, -4t - 6, -5t + 20)$$

Тогда вектор PQ:

$$PQ(t) = (-t{+}26{+}35, -4t{-}6{-}20, -5t{+}20{+}15) = (61{-}t, -4t{-}26, 35{-}5t)$$

По условию искомая прямая параллельна плоскости

$$3x + 4y - 2z = -3$$

Это означает, что прямая перпендикулярна к нормали этой плоскости, то есть должно выполняться:

$$(PQ, n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot(61-t)+4\cdot(-4t-26)-2\cdot(35-5t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$$

Получаем направляющий вектор искомой прямой, поделим его на 30 для удобства:

$$\vec{a} = \frac{1}{30}PQ = \frac{1}{30}(60, -30, 30) = (2, -1, 1)$$

То есть уравнение искомой прямой:

$$\frac{x + 35}{2} = \frac{y - 20}{-1} = \frac{z + 15}{1}$$

Ответ: $\frac{x+35}{2} = \frac{y-20}{-1} = \frac{z+15}{1}$

№2 Направим ось x по лучу BA, ось y по лучу BC, ось z по лучу BB', тогда по отношениям в условии найдём координаты точек:

$$A = (10, 0, 0), \quad E = (0, 0, 6), \quad D' = (10, 10, 10), \quad F = (0, 0, 5)$$
$$AE = (-10, 0, 6) \quad D'F = (-10, -10, -5)$$

Найдём косинус угла между AE и $D'F$:

$$\vec{AE} \cdot \vec{D'F} = (-10) \cdot (-10) + 0 \cdot (-10) + 6 \cdot (-5) = 100 - 30 = 70,$$

$$|\vec{AE}| = 2\sqrt{34}, \qquad |\vec{D'F}| = 15$$

$$\cos\angle(AE, D'F) = \frac{\vec{AE} \cdot \vec{D'F}}{|\vec{AE}|\,|\vec{D'F}|} = \frac{70}{2\sqrt{34} \cdot 15} = \frac{70}{30\sqrt{34}} = \frac{7}{3\sqrt{34}} = \frac{7\sqrt{34}}{102}$$

Найдём расстояние между ними:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AD'} \cdot \left(\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{D'F}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{D'F}\right|},$$

где

$$\overrightarrow{AE} = (-10, 0, 6), \quad \overrightarrow{D'F} = (-10, -10, -5), \quad \overrightarrow{AD'} = (0, 10, 10).$$

найдём векторное произведение

$$\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{D'F} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -10 & 0 & 6 \\ -10 & -10 & -5 \end{pmatrix} = (60,\ -110,\ 100),$$

$$\left|\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{D'F}\right| = \sqrt{60^2 + (-110)^2 + 100^2} = \sqrt{25700} = 10\sqrt{257}.$$

найдём скалярное произведение с вектором $\overrightarrow{AD'}$:

$\overrightarrow{AD'} \cdot \left(\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{D'F}\right) = (0, 10, 10) \cdot (60, -110, 100) = -1100 + 1000 = -100,$

Подставляем в формулу:

$$d = \frac{100}{10\sqrt{257}} = \frac{10}{\sqrt{257}}$$

Ответ: $\arccos(\frac{7\sqrt{34}}{102})$ и $\frac{10}{\sqrt{257}}$

№3 а) Найдём с.з. и с.в. линейного оператора φ с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ -2 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Найдём характеристический многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -4 & 8 \\ 2 & \lambda + 4 & -3 \\ -2 & -2 & \lambda + 5 \end{pmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

Получаем:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

Значит:

$$\operatorname{spec} \varphi = \{-1, -2, -3\}$$

Найдём базис V_{-3}:

$$(A + 3E)v = 0 \implies v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём базис V_{-2}

$$(A+2E)v = 0 \implies v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём базис V_{-1}

$$(A+E)v = 0 \implies v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица имеет три различных собственных значения, она диагонализуема. Например, в базисе

$$\{\, v_1,\, v_2,\, v_3\}$$

матрица оператора имеет диагональный вид

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(-3,\, -2,\, -1).$$

б) Найдём с.з. и с.в. линейного оператора φ с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Найдём характеристический многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+2 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda+2 & 2 \\ 0 & -2 & \lambda+4 \end{pmatrix} = \lambda^3 + 8\lambda^2 + 21\lambda + 18$$

Значит:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda+3)^2$$

Следовательно:

$$\operatorname{spec}\varphi = \{-1, -3\}$$

Найдём базис V_{-3}:

$$(A+3E)v = 0 \implies \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \implies v = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

Найдём базис V_{-1}:

$$(A+2E)v = 0 \implies \begin{cases} 0 \cdot x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \implies v = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

Так как для $\lambda = -1$ алгебраическая кратность ($a_{-1} = 2$) не равна геометрической ($g_{-1} = 1$), то линейный оператор φ **не диагонализуем**

№4 Квадратичной форме

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

соответствует симметричная матрица A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ с матрицей A и найдём его собственные значения:

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}=-(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda-1)$$

Отсюда собственные значения:

$$\lambda_1=-3,\quad \lambda_2=-2,\quad \lambda_3=1$$

Найдём базисы собственных подпространств:

1) Для $\lambda=-3$
   Решаем:
   $$(A+3E)v=0 \implies v=\langle(-1,1,0)\rangle$$
   Нормируем:
   $$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$$
2) Для $\lambda=-2$
   Решаем:
   $$(A+2E)v=0 \implies v=\langle(2,2,-2)\rangle$$
   Нормируем:
   $$e_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}(2,2,-2)$$
3) Для $\lambda=1$
   Решаем:
   $$(A-E)v=0 \implies v=\langle(1,1,2)\rangle$$
   Нормируем:
   $$e_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$$

Получаем ОНБ, в котором квадратичная форма будет иметь канонический вид:

$$\{e_1,e_2,e_3\}$$

Матрица перехода к нему:

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

№5 Найдём ОНБ в котором матрица линейного оператора $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет канонический вид

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{6}{11} \\ -\frac{6}{11} & \frac{6}{11} & \frac{7}{11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

Так как матрица A не симметричная, то её канонический вид тоже будет не симметричным. Проверим, является ли -1 собственным значением φ:

$$\det(A+E) = \begin{pmatrix} -9/11+1 & -2/11 & -6/11 \\ -6/11 & 6/11+1 & 7/11 \\ -2/11 & -9/11 & 6/11+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -6 & 17 & 7 \\ -2 & -9 & 17 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}0 = 0$$

Следовательно, -1 является собственным значением φ. Теперь найдём базис его собственного подпространства:

$$(A+E)v = 0 \implies \begin{cases} 2x - 2y - 6z = 0, \\ -6x + 17y + 7z = 0, \\ -2x - 9y + 17z = 0. \end{cases} \implies v = \langle (4,1,1) \rangle$$

Пусть

$$e_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4, 1, 1)$$

Теперь найдём базис $\langle e_3 \rangle^{\perp}$:

$$((4, 1, 1), v) = 0 \implies v = \langle (1, -4, 0), (0, 1, -1) \rangle$$

Ортогонализуем этот базис:

$$f_1 = (1, -4, 0)$$

$$f_2 = (0, 1, -1) - \frac{-4}{17}(1, -4, 0) = \frac{1}{17}(4, 1, -17)$$

Нормируем новый базис:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1, -4, 0), \quad e_2 = \frac{1}{3\sqrt{34}}(4, 1, -17)$$

Получаем ОНБ, в котором матрица линейного оператора φ имеет канонический вид:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1, -4, 0), \quad e_2 = \frac{1}{3\sqrt{34}}(4, 1, -17), \quad e_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4, 1, 1)$$

Сам канонический вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдём $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Так как, $\varphi(e_1) = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha$, то

$$\cos\alpha = (\varphi(e_1), e_1) = \frac{7}{11}$$

$$\sin\alpha = (\varphi(e_1), e_2) = -\frac{6\sqrt{2}}{11}$$

Получаем
$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{6\sqrt{2}}{11} & 0 \\ -\frac{6\sqrt{2}}{11} & \frac{7}{11} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Геометрически это означает поворот на угол $\arccos(\frac{7}{11})$ в плоскости $\langle e_1, e_2 \rangle$ и отражение относительно $\langle e_3 \rangle$

Ответ:

базис: $\{\frac{1}{\sqrt{17}}(1, -4, 0), \frac{1}{3\sqrt{34}}(4, 1, -17), \frac{1}{3\sqrt{2}}(4, 1, 1)\}$

вид: $\begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{6\sqrt{2}}{11} & 0 \\ -\frac{6\sqrt{2}}{11} & \frac{7}{11} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$