

ИДЗ №9 (вариант 10) (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Пусть $P(-35, 20, -15)$ — точка на искомой прямой. Пусть Q - точка на пересекающей прямой, при которой вектор PQ — это направляющий вектор искомой прямой.

$$Q(t) = (-t + 26, -4t - 6, -5t + 20)$$

Тогда вектор PQ :

$$PQ(t) = (-t + 26 + 35, -4t - 6 - 20, -5t + 20 + 15) = (61 - t, -4t - 26, 35 - 5t)$$

По условию искомая прямая параллельна плоскости

$$3x + 4y - 2z = -3$$

Это означает, что прямая перпендикулярна к нормали этой плоскости, то есть должно выполняться:

$$(PQ, n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot (61 - t) + 4 \cdot (-4t - 26) - 2 \cdot (35 - 5t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$$

Получаем направляющий вектор искомой прямой, поделим его на 30 для удобства:

$$\vec{a} = \frac{1}{30}PQ = \frac{1}{30}(60, -30, 30) = (2, -1, 1)$$

То есть уравнение искомой прямой:

$$\frac{x + 35}{2} = \frac{y - 20}{-1} = \frac{z + 15}{1}$$

Ответ: $\frac{x+35}{2} = \frac{y-20}{-1} = \frac{z+15}{1}$

№2 Направим ось x по лучу BA , ось y по лучу BC , ось z по лучу BB' , тогда по отношениям в условии найдём координаты точек:

$$A = (10, 0, 0), \quad E = (0, 0, 6), \quad D' = (10, 10, 10), \quad F = (0, 0, 5) \\ AE = (-10, 0, 6) \quad D'F = (-10, -10, -5)$$

Найдём косинус угла между AE и $D'F$:

$$\vec{AE} \cdot \vec{D'F} = (-10) \cdot (-10) + 0 \cdot (-10) + 6 \cdot (-5) = 100 - 30 = 70,$$

$$|\vec{AE}| = 2\sqrt{34}, \quad |\vec{D'F}| = 15 \\ \cos \angle(AE, D'F) = \frac{\vec{AE} \cdot \vec{D'F}}{|\vec{AE}| |\vec{D'F}|} = \frac{70}{2\sqrt{34} \cdot 15} = \frac{70}{30\sqrt{34}} = \frac{7}{3\sqrt{34}} = \frac{7\sqrt{34}}{102}$$

Найдём расстояние между ними:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AD'} \cdot (\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{D'F})|}{|\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{D'F}|},$$

где

$$\overrightarrow{AE} = (-10, 0, 6), \quad \overrightarrow{D'F} = (-10, -10, -5), \quad \overrightarrow{AD'} = (0, 10, 10).$$

найдем векторное произведение

$$\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{D'F} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -10 & 0 & 6 \\ -10 & -10 & -5 \end{pmatrix} = (60, -110, 100),$$

$$|\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{D'F}| = \sqrt{60^2 + (-110)^2 + 100^2} = \sqrt{25700} = 10\sqrt{257}.$$

найдем скалярное произведение с вектором $\overrightarrow{AD'}$:

$$\overrightarrow{AD'} \cdot (\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{D'F}) = (0, 10, 10) \cdot (60, -110, 100) = -1100 + 1000 = -100,$$

Подставляем в формулу:

$$d = \frac{100}{10\sqrt{257}} = \frac{10}{\sqrt{257}}$$

Ответ: $\arccos(\frac{7\sqrt{34}}{102})$ и $\frac{10}{\sqrt{257}}$

№3 а) Найдем с.з. и с.в. линейного оператора φ с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ -2 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Найдем характеристический многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -4 & 8 \\ 2 & \lambda + 4 & -3 \\ -2 & -2 & \lambda + 5 \end{pmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

Получаем:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

Значит:

$$\text{spec } \varphi = \{-1, -2, -3\}$$

Найдем базис V_{-3} :

$$(A + 3E)v = 0 \implies v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём базис V_{-2}

$$(A + 2E)v = 0 \implies v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём базис V_{-1}

$$(A + E)v = 0 \implies v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица имеет три различных собственных значения, она диагонализуема. Например, в базисе

$$\{v_1, v_2, v_3\}$$

матрица оператора имеет диагональный вид

$$P^{-1}AP = \text{diag}(-3, -2, -1).$$

б) Найдём с.з. и с.в. линейного оператора φ с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Найдём характеристический многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda + 2 & 2 \\ 0 & -2 & \lambda + 4 \end{pmatrix} = \lambda^3 + 8\lambda^2 + 21\lambda + 18$$

Значит:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 3)^2$$

Следовательно:

$$\text{spec } \varphi = \{-1, -3\}$$

Найдём базис V_{-3} :

$$(A + 3E)v = 0 \implies \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \implies v = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём базис V_{-1} :

$$(A + 2I)v = 0 \implies \begin{cases} 0 \cdot x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \implies v = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Так как для $\lambda = -1$ алгебраическая кратность ($a_{-1} = 2$) не равна геометрической ($g_{-1} = 1$), то линейный оператор φ **не диагонализует**