ИДЗ №7 (вариант 12) (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 $Q(x_1, x_2, x_3) = -81x_1^2 - 40x_2^2 - 102x_3^2 + 108x_1x_2 + 126x_1x_3 - 92x_2x_3$

Напишем матрицу квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} -81 & 54 & 63 \\ 54 & -40 & -46 \\ 63 & -46 & -102 \end{pmatrix}$$

Приведём эту матрицу к диагональному виду симметричным методом гауса (программа 1.py):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -81 & 54 & 63 & 1 & 0 & 0 \\ 54 & -40 & -46 & 0 & 1 & 0 \\ 63 & -46 & -102 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{63} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

Следовательно, справа получилась транспонированная матрица перехода к новому базису, в котором будет этот нормальный вид. Значит новый базис:

$$e_1' = \frac{1}{9}e_1, \quad e_2' = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2, \quad e_3' = \frac{1}{63}e_1 - \frac{1}{7}e_2 + \frac{1}{7}e_3$$

Поэтому нормальный вид квадратичной формы Q будет:

$$Q(x) = -x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$$

Где

$$x_1' = \frac{1}{9}x_1, \quad x_2' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \quad x_3' = \frac{1}{63}x_1 - \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3$$

№2 $Q(x_1,x_2,x_3)=7x_1^2+(8b+10)x_2^2+(2b-9)x_3^2-10x_1x_2+4x_1x_3+2(4b-2)x_2x_3$

Напишем матрицу квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 \\ -5 & 8b+10 & 4b-2 \\ 2 & 4b-2 & 2b-9 \end{pmatrix}$$

Найдём угловые миноры:

$$\delta_1 = 7, \quad \delta_2 = 56b+45, \quad \delta_3 = -414b-433$$

Рассмотрим случаи:

1) $b=-\frac{45}{56}$:

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 \\ -5 & \frac{25}{7} & -\frac{73}{14} \\ 2 & -\frac{73}{14} & -\frac{297}{28} \end{pmatrix}$$

Симметричным методом гауса находим нормальный вид (программа 2.py):

$$Q(x) = x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2$$

2) $b \neq -\frac{45}{56}$ Так как $\delta_1 \neq 0$ и $\delta_2 \neq 0$, то применим метод Якоби:

$$Q(x) = 7x_1'^2 + \frac{56b+45}{7}x_2'^2 + \frac{-414b-433}{56b+45}x_3'^2$$

Рассмотрим случаи:

2.1) $b=-\frac{433}{414}$

Просто подставим и приведём к нормальному виду:

$$Q(x) = x_1'^2 - x_2'^2$$

2.2) $b<-\frac{433}{414}$

$$\begin{cases} \frac{56b+45}{7} < 0 \\ \frac{-414b-433}{56b+45} < 0 \end{cases} \implies Q(x) = x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$$

2.3) $b \in (-\frac{433}{414}; -\frac{45}{56})$

$$\begin{cases} \frac{56b+45}{7} < 0 \\ \frac{-414b-433}{56b+45} > 0 \end{cases} \implies Q(x) = x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2$$

2.3) $b > -\frac{45}{56}$

$$\begin{cases} \frac{56b+45}{7} > 0 \\ \frac{-414b-433}{56b+45} < 0 \end{cases} \implies Q(x) = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$$

Ответ: $Q(x) = \begin{cases} x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 & \text{при } b > -\frac{433}{414} \\ x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 & \text{при } b < -\frac{433}{414} \\ x_1'^2 - x_2'^2 & \text{при } b = -\frac{433}{414} \end{cases}$

№3

$$Q(f) = \int_1^3 f^2\,dx - \int_2^4 f^2\,dx.$$

a) Чтобы доказать, что Q является квадратичной формой, нужно найти симметричную билинейную форму B, такую что

$$Q(f) = B(f,f) \quad \text{для всех } f \in V.$$

Положим

$$B(f,g) = \int_1^3 f(x)g(x)\,dx - \int_2^4 f(x)g(x)\,dx.$$

Так как интеграл является линейным оператором, то для любых $f, g, h \in V$ и любого скаляра α выполняются:

$$B(\alpha f + g, h) = \alpha B(f,h) + B(g,h),$$

и аналогично по второму аргументу. Кроме того, поскольку перемножение функций коммутативно, получаем

$$B(f,g) = B(g,f).$$

Проверим, что Q выражается через B:

Подставляя $g = f$, получаем:

$$B(f,f) = \int_1^3 f(x)^2\,dx - \int_2^4 f(x)^2\,dx = Q(f).$$

Таким образом, $Q(f) = B(f,f)$ для всех $f \in V$.

Так как B является симметричной билинейной формой, функция Q представляется в виде $Q(f) = B(f,f)$ и, следовательно, является квадратичной формой на V.

b) Рассмотрим стандартный базис в $V = \mathbb{R}[x]_{\le 3}$:

$$e_1(x) = 1, \quad e_2(x) = x, \quad e_3(x) = x^2, \quad e_4(x) = x^3.$$

Ассоциированная билинейная форма имеет вид

$$B(f,g) = \int_1^3 f(x)g(x)\,dx - \int_2^4 f(x)g(x)\,dx.$$

Её матрица $A = [a_{ij}]$ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задаётся элементами

$$a_{ij} = B(e_i, e_j) = \int_1^3 x^{i+j-2}\,dx - \int_2^4 x^{i+j-2}\,dx, \quad i,j = 1,\dots,4.$$

Составим эту матрицу по этой формуле и преобразуем её симметричным методом Гауса:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -10 & -40 \\ -2 & -10 & -40 & -150 \\ -10 & -40 & -150 & -\frac{1652}{3} \\ -40 & -150 & -\frac{1652}{3} & -2010 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -2090 & -152 & -\frac{1682}{3} & -2050 \\ -152 & -10 & -40 & -150 \\ -\frac{1682}{3} & -40 & -150 & -\frac{1652}{3} \\ -2050 & -150 & -\frac{1652}{3} & -2010 \end{pmatrix}$$

Найдём угловые миноры:

$$\delta_1 = -2090, \quad \delta_2 = -2204, \quad \delta_3 = \frac{3280}{9}, \quad \delta_4 = \frac{16}{9}$$

Следовательно нормальный вид квадратичной формы Q:

$$Q(x) = -x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 + x_4'^2$$

Если бы существовал базис $e = (e_1', e_2', e_3', e_4')$, в котором матрица квадратичной формы Q имела вид

$$71x_1^2+22x_1x_2+94x_1x_3+44x_1x_4+28x_2^2-38x_2x_3+116x_2x_4+68x_3^2-90x_3x_4+50x_4^2,$$

то соответствующая симметричная матрица имела бы вид:

$$M = \begin{pmatrix} 71 & 11 & 47 & 22 \\ 11 & 28 & -19 & 58 \\ 47 & -19 & 68 & -45 \\ 22 & 58 & -45 & 50 \end{pmatrix}$$

Найдём угловые миноры:

$$\delta_1 = 71, \quad \delta_2 = 1867, \quad \delta_3 = 19827, \quad \delta_4 = -1437601$$

Следовательно нормальный вид квадратичной формы Q был бы:

$$Q(x) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$$

Получается, что отрицательный индекс инерции равен 1, но у квадратичной формы Q он равен 2. Следовательно, не существует такого базиса, в котором квадратичная форма Q принимает такой вид.

Ответ: не существует

№4 Чтобы определить значения параметров a и b, при которых билинейная форма $\beta(x, y)$ задает скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, необходимо выполнение следующих условий: симметричность матрицы формы и положительная определенность.

Составим матрицу билинейной формы:

$$\begin{pmatrix} -9b+49 & 3b-15 & -1.5a+8.5 \\ 3b-15 & 2 & 2b-8 \\ -3b+17 & 2b-8 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Симметричность матрицы

   Коэффициенты при x_1y_3 и x_3y_1 должны быть равны:

$$-1.5a+8.5=-3b+17$$

   Решая это уравнение, получаем:

$$a=2b-\frac{17}{3}$$

2) Положительная определенность матрицы

   - Первый ведущий минор:

$$-9b+49>0 \Rightarrow b<\frac{49}{9}$$

   - Второй ведущий минор:

$$\begin{vmatrix} -9b+49 & 3b-15 \\ 3b-15 & 2 \end{vmatrix} = -9b^2+72b-127>0 \Rightarrow \frac{12-\sqrt{17}}{3}<b<\frac{12+\sqrt{17}}{3}$$

   - Третий ведущий минор:

$$det(B)=-b^2+8b-15>0 \Rightarrow 3<b<5$$

Объединим условия:

$$\begin{cases} a = 2b - \frac{17}{3} \\ b < \frac{49}{9} \\ \frac{12-\sqrt{17}}{3} < b < \frac{12+\sqrt{17}}{3} \\ 3 < b < 5 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2b - \dfrac{17}{3}, \\ 3 < b < 5. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a = 2b - \dfrac{17}{3}, \\ 3 < b < 5. \end{cases}$

№4 Существует ли система из трёх векторов в $\mathbb{R}^3$, матрица Грама которой равна

$$\begin{pmatrix} 13 & 20 & -66 \\ 20 & 41 & -122 \\ -66 & -122 & 376 \end{pmatrix}?$$

Матрица Грама должна быть неотрицательно определённой. Проверим её главные миноры:

$$\begin{cases} \delta_1 = 13 > 0, \\ \delta_2 = \begin{vmatrix} 13 & 20 \\ 20 & 41 \end{vmatrix} = 13 \cdot 41 - 20^2 = 533 - 400 = 133 > 0, \\ \delta_3 = det(G) = 0. \end{cases}$$

Матрица G неотрицательно определена и вырожденная, что соответствует линейно зависимым векторам.

Поскольку матрица Грама вырожденная, векторы линейно зависимы. Предположим, что третий вектор c выражается через первые два:

$$c = \alpha a + \beta b, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Найдём α и β, для этого решим следующую систему:

$$\begin{cases} (c, c) = (\alpha a + \beta b, \alpha a + \beta b) = \alpha^2 (a, a) + 2\alpha\beta(a, b) + \beta^2 (b, b) = 376 \\ (c, a) = \alpha(a, b) + \beta(b, b) = -66 \\ (c, b) = \alpha(a, b) + \beta(b, b) = -122 \end{cases}$$

Это равносильно:

$$\begin{cases} 13\alpha^2 + 40\alpha\beta + 41\beta^2 = 376 \\ 13\alpha + 20\beta = -66 \\ 20\alpha + 41\beta = -122 \end{cases} \implies \alpha = -2, \quad \beta = -2$$

Получаем:

$$c = -2a - 2b.$$

Зададим вектор a так, чтобы $(a, a) = 13$:

$$a = (\sqrt{13}, 0, 0).$$

Вектор b должен удовлетворять условиям $(a, b) = 20$ и $(b, b) = 41$. Пусть:

$$b = \left(\frac{20}{\sqrt{13}}, \sqrt{\frac{133}{13}}, 0 \right).$$

Тогда вектор c выражается как:

$$c = -2a - 2b = \left(-\frac{66}{\sqrt{13}}, -2\sqrt{\frac{133}{13}}, 0 \right).$$

Проверим, что скалярные произведения векторов a, b, c совпадают с элементами матрицы Грама:

$$\begin{cases} (a,a) = 13, \\ (a,b) = 20, \\ (a,c) = -66, \\ (b,b) = 41, \\ (b,c) = -122, \\ (c,c) = 376. \end{cases}$$

Ответ: Да, такая система векторов существует. Пример:

$$\mathbf{a} = \left(\sqrt{13},\ 0,\ 0\right), \quad \mathbf{b} = \left(\frac{20}{\sqrt{13}},\ \sqrt{\frac{133}{13}},\ 0\right), \quad \mathbf{c} = \left(-\frac{66}{\sqrt{13}},\ -2\sqrt{\frac{133}{13}},\ 0\right)$$