Домашнее задание на 05.04 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Пусть $v_1 = (1, 2, 0, 3)^T$ и $v_2 = (-1, 3, 0, 4)^T$, тогда:

$$\mathrm{vol}(P) = \sqrt{\det G(v_1, v_2)} = \sqrt{\begin{vmatrix} 14 & 17 \\ 17 & 26 \end{vmatrix}} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $5\sqrt{3}$

№2 $a = (8, 4, 1)^T, b = (2, -2, 1)^T$

2.1) Найдём угол α между векторами a и b

$$\cos(\alpha) = \frac{(a, b)}{|a||b|} = \frac{9}{9 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$

2.2) Найдём c:

$$c' = [a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 6e_1 - 6e_2 - 24e_3 \implies$$

$$\implies c' = (6, -6, -24)^T \implies c = \frac{c'}{|c'|} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)^T$$

Проверим, правая ли тройка:

$$\mathrm{Vol}(P(a, b, c)) = (a, b, c) = ([a, b], c) = (c', c) > 0 \implies \text{ да}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$

2.3) Пусть $e = -c$:

$$e = -c = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

Тогда:

$$\mathrm{Vol}(P(a,b,e)) = (a,b,e) = ([a,b],e) = (c',e) < 0$$

При этом:

$$\mathrm{Vol}(P(a,b,d)) = (a,b,d) = ([a,b],d) = (c',d) = 24 - 72 < 0$$

Следовательно, тройки векторов a, b, e и a, b, d имеют одинаковую ориентацию

Ответ: $\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$

2.4) Вектор f должен удовлетворять системе:

$$\begin{cases} (a,b,f) = 0 \\ \cos(\angle(f,a)) = 0 \\ |f| = |a| \\ cos(\angle(f,b)) < 0 \end{cases}$$

Это равносильно системе:

$$\begin{cases} 6f_1 - 6f_2 - 24f_3 = 0 \\ 8f_1 + 4f_2 + f_3 = 0 \\ f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 81 \\ 2f_1 - 2f_2 + f_3 < 0 \end{cases} \implies f = \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{11\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{11\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right)$

№3 $A = (-1,0,1), B = (0,1,2), C = (-2,2,5), D = (-4,0,3)$. Посчитаем смешанное произведение векторов $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}$:

$$\vec{AB} = (1,1,1)^T, \quad \vec{BC} = (-2,1,3)^T, \quad \vec{CD} = (-2,-2,-2)^T$$

$$(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 4 - (-2 - 6 + 4) = 0$$

Следовательно, векторы $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}$ компланарны, а значит точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. Теперь найдём площать по формуле:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{AC}, \vec{BD}\right]\right|$$

Найдём векторное произведение:

$$\vec{AC} = (-1,2,4), \quad \vec{BD} = (-4,-1,1)$$

$$\left[\vec{AC}, \vec{BD}\right] = (6,15,9)^T$$

Найдём площать:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|(6,15,9)^T\right| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{38} = \frac{3\sqrt{38}}{2}$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{38}}{2}$

№4 Объём тетраэдра $ABCD$:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\mathrm{vol}(P(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})) = \frac{1}{6}|\det(\vec{AB}|\vec{AC}|\vec{AD})|$$

Найдём определитель:

$$\vec{AB} = (1, 2, 1), \quad \vec{AC} = (3, 1, 2), \quad \vec{AD} = (-1, 5, 0)$$

$$|\det(\vec{AB}|\vec{AC}|\vec{AD})| = -2$$

Следовательно

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|\det(\vec{AB}|\vec{AC}|\vec{AD})| = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$