Домашнее задание на 11.09.2024

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1.

1.1 $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.2 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} *$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.4 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \dots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \dots & \lambda_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \dots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$

2.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \end{pmatrix}$

3.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $A^3 = A^2 * A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} *$

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22&21&21\\21&22&21\\21&21&22\end{pmatrix}$$

$$f(A) = A^3 - 3A + 2 = \begin{pmatrix}22&21&21\\21&22&21\\21&21&22\end{pmatrix} - 3 * \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} + 2E =$$

$$\begin{pmatrix}22&21&21\\21&22&21\\21&21&22\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6&3&3\\3&6&3\\3&3&6\end{pmatrix} + 2E = \begin{pmatrix}16&18&18\\18&16&18\\18&18&16\end{pmatrix} + 2E = \begin{pmatrix}16&18&18\\18&16&18\\18&18&16\end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18&18&18\\18&18&18\\18&18&18\end{pmatrix}$$

4.

$AX = B$

A - матрица 2×2

B - матрица 2×2

Следовательно, X - тоже матрица 2×2. Пусть $X = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

Тогда $AX = \begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+3c&b+3d\\a+2c&b+2d\end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3c=1\\ b+3d=1\\ a+2c=1\\ b+2d=1\end{cases} \quad (1)-(3) \text{ и } \ (2)-(4) \Rightarrow \begin{cases} c=0\\ a=1\\ d=0\\ b=1\end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

5.

$X = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}$

$$A * X = \begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c&d\\2a+3c&2b+3d\end{pmatrix}$$

$$X * A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & a+3b \\ 2d & c+3d \end{pmatrix}$$

Чтобы $AX = XA$, должно выполняться:
$\begin{pmatrix} c & d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & a+3b \\ 2d & c+3d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 2b \\ d = a+3b \\ 2a+3c = 2d \\ 2b+3d = c+3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2b \\ d = a+3b \\ 2a+3c = 2d \\ 2b = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2b \\ d = a+3b \\ 2a+6b = 2d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = 2b \\ d = a+3b \\ 2a+6b = 2a+6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2b \\ d = a+3b \end{cases}$$

X коммутирует с матрицей A в случае если X принимает вид $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x+3y \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$. **Все матрицы такого вида подходят.**

6.

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 - (a+d)x + ad - bc = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+da & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} bc-da & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

7.

Предположим, что матричная единица E_{ij} имеет размер $m \times n$ и содержит одну 1 в позиции (i, j) и нули в остальных местах. Тогда результат произведения $E_{ij}A$ будет матрицей в которой i-ая строка содержит j-ую строку матрицы A, а в остальных местах нули.

Пример:

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \quad E_{21}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8*.

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & \text{если} \quad j = k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Из задания 7 мы знаем, что при умножении матричной единицы E_{ij} на другую матрицу, мы получаем матрицу в которой сохраняется только j-ая строка на i-ой строке новой матрицы. Так как E_{ij} мы умножаем на E_{kl}, то, чтобы единственная единица матрицы E_{kl} сохранилась нужно, чтобы она находилась на j-ой строчке матрицы E_{kl} (т.е. j=k). Иначе при умножении на всех местах будет 0.

9*.

$E_{ii}A = AE_{ii} : \forall i \in \mathbb{N}$

Пусть размер матрицы E_{ii} будет $m \times n$, тогда размер матрицы A будет $n \times n$, так как она квадратная и размеры должны быть согласованы. Так как по условию две матрицы коммутируют, то размер матрицы E будет $n \times n$ $(m = n)$.

Заметим, что при умножении матрицы на матричную единицу E_{kj} сохраняется толко k-ый столбец, который записывается в j-ый столбец новой матрицы, в остальных местах будут стоять нули.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как при $E_{ii}A$ сохраняется i-ая строка и убирается всё остальное, а при AE_{ii} сохраняется i-ый столбец и убирается всё остальное, то для их равенства A обязана иметь 0 на всех местах кроме диагонали, на диагонали могут быть любые числа. Получается для равенства должно выполняться: $a_{ij} = 0 : i \neq j \Rightarrow$ **матрица A в данном случае является диагональной**.