ИДЗ №3 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Запишем в виде $(A|E)$ и приведём к $(E|A^{-1})$

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & 3 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A[0] = A[0]/2 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & 3 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A[1] = A[1] - A[0] \\ A[2] = A[2] + A[0] \\ A[3] = A[3] + A[0] \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A[1], A[2] = A[2], A[1] \\ A[1] = A[1] * -1 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] + 3 * A[1] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & | & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2]/(-2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A[3] = A[3] - A[2]/2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & | & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A[3] = A[3] * 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A[0] = A[0] + A[1] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & | & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A[0] = A[0] - A[2] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & | & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A[0] = A[0] + A[3] * 5/2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 3 & -10 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = A[1] - A[2]/2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 3 & -10 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{4} & | & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = A[1] + A[3] * 7/4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 3 & -10 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] - A[3]/2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 3 & -10 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -10 & 10 \\ -1 & 2 & -7 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -10 & 10 \\ -1 & 2 & -7 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

2.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 8 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{176} \cdot X =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 8 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 8 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 6\ 4\ 7\ 2)(5\ 8) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 8 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{11} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 8 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = (2\ 7\ 4\ 6\ 3)(8\ 5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 7\ 2\ 8\ 4\ 6\ 3\ 5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = (5\ 3\ 6\ 4\ 8\ 2\ 7\ 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 8 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 1 & 6 & 8 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 8 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 8\ 7\ 2\ 4\ 5)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{176} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{2} = (1\ 7\ 4)(8\ 2\ 5)$$
$$((1\ 7\ 4)(8\ 2\ 5))X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 8 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
$$((1\ 7\ 4)(8\ 2\ 5))^{-1} = (4\ 7\ 1)(5\ 2\ 8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 8 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 97 & 98 & \dots & 412 & 413 & \dots & 560 \\ 464 & 465 & \dots & 560 & 149 & \dots & 463 & 1 & \dots & 148 \end{pmatrix}$

Число инверсий: $463 + 463 + \dots + 463 + 148 + 148 + \dots + 148 + 0 +$
$0 + \dots + 0 =$
$= 463 \cdot 97 + 148 \cdot 315 = 91531 \Rightarrow sgn(\sigma) = (-1)^{91531} = -1$

Ответ: -1

4. $$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & x & 0 \\ x & x & 2 & x & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 1 & 7 \\ 7 & x & 2 & 8 & x & 4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} x & 2 & x & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 1 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & x & 4 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} x & x & 2 & x & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 7 \\ 7 & x & 2 & 8 & 4 \end{vmatrix} =$$

1) $$-4x \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & x & 4 \end{vmatrix} - 28 \begin{vmatrix} 2 & x & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -4x \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \\ 8 & x & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} \right) - 28 \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

$= -28(-18 - 3(7 - 4x)) - 4x(18 + 3(-28 + 12x)) =$
$= -144x^2 - 72x + 1092$

2) $$x^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 7 \\ x & 2 & 8 & 4 \end{vmatrix} + 7x \cdot \begin{vmatrix} x & 2 & x & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= x^2 (-3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 9 & 7 & 4 \\ x & 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 9 & 7 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix}) +$$

$$+ 7x(-2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 9 & 7 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} x & x & 7 \\ 3 & 4 & 4 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}) =$$
$$= x^2 \cdot (54 - 3 \cdot (132 - 12x)) + 7x \cdot (-54 + 3 \cdot (-105 + 12x)) =$$
$$= -2583x - 90x^2 + 36x^3$$

$-144x^2 - 72x + 1092 - 2583x - 90x^2 + 36x^3 =$
$= 36x^3 - 234x^2 - 2655x + 1092$
Ответ: $36x^3 - 234x^2 - 2655x + 1092$

5. $$\begin{vmatrix} 2 & x & 3 & 9 & 7 & 1 & 10 \\ x & 1 & 7 & 7 & 1 & 4 & x \\ 3 & 7 & 4 & 2 & 7 & x & 3 \\ 9 & 7 & 2 & 4 & x & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 7 & x & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & x & 9 & 6 & 2 & 2 \\ 10 & x & 3 & 4 & 8 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 & 9 & 7 & 1 & 10 \\ x & 1 & 7 & 7 & 1 & 4 & x \\ 3 & 7 & 4 & 2 & 7 & x & 3 \\ 9 & 7 & 2 & 4 & x & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 7 & x & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & x & 9 & 6 & 2 & 2 \\ 8 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 & 9 & 7 & 1 & 8 \\ x & 1 & 7 & 7 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 2 & 7 & x & 0 \\ 9 & 7 & 2 & 4 & x & 9 & -5 \\ 7 & 1 & 7 & x & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & x & 9 & 6 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & -9 \end{vmatrix}$$

Так как в 6ти строках есть x, то x^5 встречается только в $\binom{6}{5} = 6$ перестановках, то есть достаточно рассмотреть 6 случаев когда каждый из x не в перестановке:

<u>x из 1го столбца не в перестановке</u>:
Единственный возможный многочлен степени 5:

$$sgn(\sigma_1)a_{12}a_{27}a_{36}a_{45}a_{54}a_{63}a_{71} = 0$$

<u>x из 2го столбца не в перестановке</u>:
Единственный возможный многочлен степени 5:

$$sgn(\sigma_2)a_{17}a_{21}a_{36}a_{45}a_{54}a_{63}a_{72} = 0$$

<u>x из 3го столбца не в перестановке</u>:

Единственный возможный многочлен степени 5:

$$sgn(\sigma_3)a_{12}a_{21}a_{36}a_{45}a_{54}a_{67}a_{73} = 0$$

$\underline{x \text{ из 4го столбца не в перестановке}}$:

Единственный возможный многочлен степени 5:

$$sgn(\sigma_4)a_{12}a_{21}a_{36}a_{45}a_{57}a_{63}a_{74} = -5x^5$$

$\underline{x \text{ из 5го столбца не в перестановке}}$:

Единственный возможный многочлен степени 5:

$$sgn(\sigma_5)a_{12}a_{21}a_{36}a_{47}a_{54}a_{63}a_{75} = -5x^5$$

$\underline{x \text{ из 5го столбца не в перестановке}}$:

Единственный возможный многочлен степени 5:

$$sgn(\sigma_6)a_{12}a_{21}a_{37}a_{45}a_{54}a_{63}a_{76} = 0$$

Сложим все многочлены степени 5, получившиеся во всех случаях:

$$0 + 0 + 0 - 5x^5 - 5x^5 + 0 = -10x^5$$

Ответ: -10