Домашнее задание на 29.01 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Пусть $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^5$, где

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 7 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Необходимо найти подпространство $W \subseteq \mathbb{R}^5$, такое что $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

Для начала найдём какой-нибудь базис U:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 11 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Чтобы дополнить U до $\mathbb{R}^5$ нужно взять векторы:

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так они ЛНЗ с веторами базиса U и $\mathbb{R}^5 = U + \langle e_2, e_4, e_5 \rangle$, то:

$$W = \langle e_2, e_4, e_5 \rangle$$

№2 Рассмотрим линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, которое каждому многочлену f сопоставляет матрицу $f(S)$,

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу этого линейного отображения в базисах $(1, x, x^2)$ для пространства многочленов и $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ для пространства матриц.

$$(\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})A$$

В матрице A в i-ом столбце будут записаны координаты $\varphi(e_i)$ в базисе матриц:

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x^2) = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

То есть A:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

№3 Пусть линейное отображение $\varphi : V \to W$ в базисах (e_1, e_2, e_3) пространства V и (f_1, f_2) пространства W имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Необходимо найти матрицу A' отображения φ в базисах $e' = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ и $f' = (f_1, f_1 + f_2)$

Найдём матрицу перехода от e к e':

$$(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3) = (e_1, e_2, e_3)C$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу перехода от f к f':

$$(f_1, f_1 + f_2) = (f_1, f_2)D$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получается:

$$A' = D^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

№4 Докажем, что отображение $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}^2$, заданное как $\varphi(f) =$

$\binom{f(2)}{f'(1)}$, является линейным:

$$\lambda_1\varphi(f_1)+\lambda_2\varphi(f_2) = \lambda_1 \begin{pmatrix} f_1(2) \\ f_1'(1) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} f_2(2) \\ f_2'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 f_1(2) \\ \lambda_1 f_1'(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 f_2(2) \\ \lambda_2 f_2'(1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 f_1(2) + \lambda_2 f_2(2) \\ \lambda_1 f_1'(1) + \lambda_2 f_2'(1) \end{pmatrix} = \varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$$

Найдём его матрицу в базисах $(1, x, x^2, x^3)$ и $\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$:

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x^2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x^3) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдём образ многочлена $f = x^3 - 4x + 2$ и проверим, что столбцы координат f и $\varphi(f)$ правильно связаны друг с другом с помощью матрицы A.

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x^3 - 4x + 2) = \begin{pmatrix} 8 - 8 + 2 \\ 3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(f) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

№5 Дано линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисах

$$e = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \text{ и } f = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Найдём $\varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Для начала найдём координаты $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ в базисе e:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right) \implies \text{УСВ: } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -8 \end{array}\right) \implies \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Найдём координты $\varphi(v)$ в f:

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $\varphi(v)$:

$$\varphi(v) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 15 \\ 46 \end{pmatrix}$$

Ответ: $(39, 15, 46)^T$

№6 Дано линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

в паре базисов

$$e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \text{ и } f = \{f_1, f_2, f_3\}$$

Найдём базис ядра и базис образа этого линейного отображения.

Чтобы найти базис ядра, нужно, чтобы координаты любого вектора из e переходили в координаты $(0, 0, 0, 0)^T$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & | & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & | & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 3x_4, \quad x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 - 3x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Базис ядра:

$$(-2e_1 + e_2, -3e_1 + 3e_3, -3e_1 + e_4)$$

Найдём базис образа, дополнив координаты ядра до базиса $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Чтобы дополнить до базиса $\mathbb{R}^4$ нужен вектор с координатами в базисе e:

$$v_1 = (0,0,0,1)^T$$

То есть координаты базиса образа φ:

$$\varphi(v_1) = A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

базис образа:

$$3f_1 + 6f_2 + 9f_3$$

№7 Найдем базис ядра и базис образа линейного отображения $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, заданного как $X \mapsto AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим два базиса:

$$e = (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ и } f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$$

Пусть e и f - стандартные базисы. Найдём матрицу отображения B:

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Найдём координаты векторов базиса ядра:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ФСР:} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит базис ядра:

$$(-3e_1 + e_3, -3e_2 + e_4) = \left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Дополним координаты ядра до $\mathbb{R}^4$, чтобы найти координаты базиса образа:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Чтобы дополнить, нужно взять:

$$(0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T$$

Поэтому базис образа φ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$