Домашнее задание на 15.01 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Для доказательства того, что векторы b_1, b_2, b_3 образуют базис векторного пространства V, необходимо показать, что они линейно независимы.

Запишем векторы b_1, b_2, b_3:

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + 2a_2 + 5a_3 \\ b_2 = 3a_1 - a_2 + a_3 \\ b_3 = 2a_1 + 0a_2 - 2a_3 \end{cases}$$

Теперь представим их в виде матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель этой матрицы:

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

Следовательно, b_1, b_2, b_3 - ЛНЗ. Следовательно, b_1, b_2, b_3 - базис V т.к. линейная оболочка не менялась.

Матрица перехода C состоит из координат векторов b_1, b_2, b_3 в базисе

a_1, a_2, a_3, что уже представлено матрицей B. Следовательно:

$$C = B.$$

Теперь найдем обратную матрицу C^{-1}, которая позволяет переходить от базиса a_1, a_2, a_3 к базису b_1, b_2, b_3.

Обратная матрица C^{-1} (переход от базиса a_1, a_2, a_3 к базису b_1, b_2, b_3) равна:

$$(C|E) \to (E|C^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Теперь вычислим координаты вектора $a_1 + 4a_2 - 3a_3$ в новом базисе, используя формулу:

$$x' = C^{-1} \cdot x,$$

где $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ — координаты вектора в старом базисе.

Координаты вектора $a_1 + 4a_2 - 3a_3$ в базисе b_1, b_2, b_3 равны:

$$x' = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{28} \\ -\frac{41}{14} \\ \frac{39}{28} \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{3}{28} \\ -\frac{41}{14} \\ \frac{39}{28} \end{pmatrix}$

№2 Так как в матрице C в i-ом столбце записаны координаты e'_i в первом базисе, то при записи второго базиса в обратном порядке, в матрице C строки будут тоже в обратном порядке. При записи первого базиса в обратном порядке, столбцы будут в обратном порядке

№3 Чтобы доказать, что они являются базисами, достачно доказать их ЛНЗ. Для этого посчитаем определитель матрицы векторов каждого базиса:

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -63 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} -19 & 4 & 29 \\ -51 & 3 & 6 \\ 37 & -2 & -34 \end{vmatrix} = -4599 \neq 0$$

Следовательно, базисы e и e' - ЛНЗ, а значит они базисы в $\mathbb{R}^3$ т.к.

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(e) = \dim(e')$$

Найдём матрицу перехода от e к e', для этого найдём координаты e' в e:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} -19 \\ -51 \\ 37 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 29 \\ 6 \\ -34 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

№4 Подпространство U задается векторами:

$$\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Подпространство W задается векторами:

$$\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4.1 Следовательно, подпространство $U + W$ задается векторами:

$$u_1, u_2, w_1, w_2$$

То есть:

$$U + W = \langle u_1, u_2, w_1, w_2 \rangle$$

Чтобы найти базис, нужно проверить их ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ветрокторы:

$$u_1, u_2, w_1 - \text{ЛНЗ}$$

А значит u_1, u_2, w_1 - базис в $U + W$, значит:

$$\dim{(U + W)} = 3$$

А $\dim(U \cap W)$ можно найти по формуле:

$$\dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) - dim(U + W)$$

Так u_1, u_2 и w_1, w_2 - ЛНЗ, то:

$$\dim U = 2, \quad \dim W = 2$$

Значит

$$\dim(U \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$$

4.2 Зададим U через ОСЛУ:

$$U : \begin{bmatrix} u_1 : \\ u_2 : \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & | & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ - ФСР}$$

Следовательно, матрица ОСЛУ для U:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & | & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Зададим W через ОСЛУ:

$$W : \begin{bmatrix} w_1 : \\ w_2 : \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -13 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + 6x_4 \\ x_2 = 6x_3 + 13x_4 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ - ФСР}$$

Следовательно, матрица ОСЛУ для U:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 & | & 0 \\ 6 & 13 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $U \cap W$ задаётся как:

$$U \cap W : \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & | & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & | & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & | & 0 \\ 6 & 13 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = \frac{3}{4}x_4 \end{cases} \implies \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ - ФСР}$$

Следовательно,

$$\dim (U \cap W) = 1$$

4.3 Запшием матрицу:

$$(u_1, u_2, -w_1, -w_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\mu_2 \\ \lambda_2 = 4\mu_2 \\ \mu_1 = -3\mu_2 \end{cases} \implies \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит:

$$-u_1 + 4u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{-базис U} \implies \dim U = 1$$

№5