ИДЗ №8 (вариант 12) (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем, что:

$$v = \frac{1}{10}(3, 9, 3, 1)$$

Пусть:

$$v' = (3, 9, 3, 1)$$

Для начала найдём какие-нибудь ЛНЗ решения уравнения:

$$3a_1 + 9a_2 + 3a_3 + a_4 = 0 \implies \begin{matrix} u_1 = (1, 0, 0, -3)^T & u_2 = (0, 1, 0, -9)^T \\ & u_3 = (0, 0, 1, -3)^T \end{matrix}$$

Следовательно:

$$v', u_1, u_2, u_3 \text{ — базис } \mathbb{R}^4$$

Теперь применим метод ортогонализации Грамма-Шмидта. Векторы u_1, u_2, u_3 уже перпендикулярны v'. Найдём векторы u'_1, u'_2, u'_3, такие, что векторы:

$$u'_1, u'_2, u'_3$$

Перпендикулярны между собой (v' будет им перпендикулярен).

$$u'_1 = u_1 = (1, 0, 0, -3)^T$$

$$u'_2 = u_2 - \mathrm{pr}_{u'_1}(u_2) = \left(-\frac{27}{10},\ 1,\ 0,\ -\frac{9}{10}\right)^T$$

$$u'_3 = u_3 - \mathrm{pr}_{\langle u'_1, u'_2 \rangle}(u_2) = \left(-\frac{9}{91},\ -\frac{27}{91},\ 1,\ -\frac{3}{91}\right)^T$$

Теперь отнормируем векторы:

$$v', u'_1, u'_2, u'_3$$

Получаем:

$$v = \frac{1}{10}(3, 9, 3, 1)$$

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}},\ 0,\ 0,\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^T$$

$$e_2 = \left(\frac{-27}{\sqrt{910}},\ \sqrt{\frac{10}{91}},\ 0,\ \frac{-9}{\sqrt{910}} \right)^T$$

$$e_3 = \left(\frac{-9}{10\sqrt{91}},\ \frac{-27}{10\sqrt{91}},\ \frac{\sqrt{91}}{10},\ \frac{-3}{10\sqrt{91}} \right)^T$$

Получаем ортонормированный базис $\mathbb{R}^4$

Ответ: (v, e_1, e_2, e_3)