Домашнее задание на 13.06 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Найдём жордановы нормалльные формы:

1.1 Дано

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - (-4) = \lambda^2$$

Значит единственный собственный корень $\lambda = 0$ кратности 2. Проверка показывает $A^2 = 0$, но $A \neq 0$, значит в Жордановой форме один блок размера 2 при $\lambda = 0$:

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Дано

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$$

то есть единственное собственное значение $\lambda = -1$ алгебраической кратности 3. При этом

$$\dim \ker(A + I) = 1$$

следовательно геометрическая кратность равна 1 и вся кратность 3 собирается в один жорданов блок размера 3. Итоговая Жорданова форма

$$J_A = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3 Дано

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Её характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = (2 - \lambda)^3$$

т.е. единственный собственный корень $\lambda = 2$ кратности 3.

Геометрическая кратность этого корня равна 2, поэтому разложение на жордановы блоки будет одно блочное звено размером 2 и одно размером 1. Иными словами, в Жордановой форме

$$J_A = \operatorname{diag}\bigl(J_2(2),\ 2\bigr) \ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

где

$$J_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4 Дано

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = (\lambda - 2)^4$$

Здесь единственное собственное значение $\lambda = 2$ алгебраической кратности 4, и оказывается

$$\dim \ker(A - 2I) = 2$$

Значит у нас два жордановых блока, каждый размера 2. Жорданова форма

$$J_A = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\big(J_2(2),\ J_2(2)\big)$$

№2