Домашнее задание на 29.05 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 1) Проверим, что U и V ортогональны

- Матрица U:

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Убедимся, что $U^TU = E$:

$$U^TU = \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 & \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Матрица V:

$$V^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Убедимся, что $V^TV = E$:

$$V^TV = \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 & ... \\ ... & ... \end{pmatrix} = E$$

2) Проверим матрицу Σ:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы $9\sqrt{5}$ и $3\sqrt{5}$ упорядочены по убыванию.

3) Представление $A = u_1\sigma_1 v_1^T + u_2\sigma_2 v_2^T$:

- Вычислим $u_1\sigma_1 v_1^T$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = 9\sqrt{5}, \quad v_1^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$u_1\sigma_1 v_1^T = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

- Вычислим $u_2\sigma_2 v_2^T$:

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = 3\sqrt{5}, \quad v_2^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$u_2\sigma_2 v_2^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- Сумма:

$$u_1\sigma_1 v_1^T + u_2\sigma_2 v_2^T = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix} = A$$

4) Найдём B ранга 1:

$$B = u_1\sigma_1 v_1^T = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Норма Фробениуса разности:

$$\|A - B\| = \sqrt{(3\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{5}$$

№2 Полное сингулярное разложение матрицы A:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

Матрица A имеет размер 2×3, поэтому $\min(m, n) = 2$. Размеры усечённых матриц:

- U': 2×2 (первые 2 столбца U),
- Σ': 2×2 (первые 2 сингулярных значения),
- V': 2×3 (первые 2 строки V^T).

Сформируем:

- $U' = U$:
$$U' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$
- Σ':
$$\Sigma' = \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$
- $(V')^T$:
$$(V')^T = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Проверим: Вычислим произведение $U'\Sigma'(V')^T$:

- $U'\Sigma'$:
$$U'\Sigma' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \cdot 9\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \cdot 9\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

- Умножение на $(V')^T$:

$$\begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix} = A$$

Ответ:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{U'} \underbrace{\begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{\Sigma'} \underbrace{\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_{(V')^T}$$

№3 Ненулевая матрица-строка имеет ранг 1. Её единственное сингулярное значение:

$$\sigma = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

Матрица U' размера 1×1:

$$U' = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Нормированный вектор направления $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{a}^T}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Матрица $(V')^T$ размера $1 \times n$:

$$(V')^T = \mathbf{v}_1^T = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

Усечённое SVD:

$$\mathbf{a} = U'\Sigma'(V')^T,$$

Ответ: Усечённое сингулярное разложение:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}}_{U'} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma \end{pmatrix}}_{\Sigma'} \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \right)}_{(V')^T}$$

№4