Домашнее задание на 24.02 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 1.1 $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 12x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 2, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = 3 + 3 + 12 - 18 = 0$$

Нормальный вид:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1' + x_2'$$

1.2 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 8, \quad \delta_3 = 36 - 60 - 36 - 25 - 36 = -121$$

Нормальный вид:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1' + x_2' - x_3'$$

№2 $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1 - \lambda^2, \quad \delta_3 = 5 - 4\lambda - 1 - 5\lambda^2 - 4 = -4\lambda - 5\lambda^2$$

Положительна определена при:

$$\begin{cases} 1 - \lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-1; 1) \\ -4\lambda - 5\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda(4 + 5\lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\frac{4}{5}; 0) \end{cases}$$

Ответ: $\lambda \in (-\frac{4}{5}; 0)$

№3 $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 10x_1 x_3 + 6x_2 x_3$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 4 - \lambda^2, \quad \delta_3 = 4 + 30\lambda - 100 - \lambda^2 - 9 = -105 + 30\lambda - \lambda^2$$

1) $\lambda \in (-2, 2) \implies \delta_2 > 0$

$$f(x) = -\lambda^2 + 30\lambda - 105 = 0 \implies \lambda = -15 \pm 5\sqrt{5}$$

$$f(x) < 0 : \lambda \in (-\infty; -15 - 2\sqrt{30}) \cap (-15 + 2\sqrt{30}; +\infty)$$

$$f(x) > 0 : \lambda \in (-15 - 2\sqrt{30}; -15 + 2\sqrt{30})$$

Т.к. $-2 > -15 + 2\sqrt{30}$, то:

$$\delta_3 < 0$$

Нормальный вид:

$$Q(x) = x'_1 + x'_2 - x'_3$$

2) $\lambda \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \implies \delta_2 < 0$

При $\lambda < -15 - 2\sqrt{30}$:

$$\delta_3 < 0$$

$$Q(x) = x'_1 - x'_2 + x'_3$$

При $\lambda > -15 - 2\sqrt{30}$ и $\lambda < -15 + 2\sqrt{30}$:

$$\delta_3 > 0$$

$$Q(x) = x'_1 - x'_2 - x'_3$$

При $\lambda \in (-15 + 2\sqrt{30}; -2) \cup (2; +\infty)$:

$$\delta_3 < 0$$

$$Q(x) = x'_1 - x'_2 + x'_3$$

При $\lambda \in \{-15 - 2\sqrt{30}, -15 + 2\sqrt{30}\}$:

$$\delta_3 = 0$$

$$Q(x) = x'_1 - x'_2$$

3) $\lambda = -2$:

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -24, \quad \delta_3 = 4 - 60 - 4 - 100 - 9 = -169$$

Нормальный вид:

$$Q(x) = x_1' - x_2' + x_3'$$

3) $\lambda = 2$:

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -24, \quad \delta_3 = 4 + 60 - 4 - 100 - 9 = -49$$

Нормальный вид:

$$Q(x) = x_1' - x_2' + x_3'$$

Мы рассмотрели все случаи.

№4 Например $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = 4 + 60 - 100 - 9 - 4 = -49$$

Но при этом по задаче выше:

$$Q(x) = x_1' - x_2' + x_3'$$

Следовательно, Q неопределённая.

№5 Пусть Q не неопределённая, тогда рассмотрим случаи:

1) $\forall v \in V : Q(v) > 0$:

   Тогда у нас не существует ни одного изотропного вектора.

   Следовательно, не существует базиса, состоящего из изотропных векторов.

3) $\forall v \in V : Q(v) < 0$:

   Аналогично не существует ни одного изотропного вектора.

   Следовательно, не существует базиса, состоящего из изотропных векторов.