Домашнее задание на 17.04 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Пусть есть трёхгранный угол $ABCD$ из вершины A, т.е. есть три угла:

$$\angle ABC, \angle ACD, \angle BAD$$

Пусть $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ - единичные векторы вдоль сторон AB, AC и AD соответственно. Тогда направляющие векторы биссектрис углов $\angle ABC, \angle ACD$, это $\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{c}+\vec{d}$. А направляющий вектор биссектрисы угла, смежного к $\angle BAD$ это $-\vec{b}+\vec{d}$.

$$\vec{l_1} = \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{l_2} = \vec{c} + \vec{d}, \quad \vec{l_3} = -\vec{b} + \vec{d}$$

Сложим первый и третий векторы:

$$\vec{l_1} + \vec{l_3} = \vec{c} + \vec{d} = \vec{l_2}$$

Следовательно, так как сумма векторов и сами векторы точно лежат в одной плоскости: $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$ **- компланарны**

№2 Запишем прямую

$$\begin{cases} x + y - 3z = -9 \\ 3x + y - z = 11 \end{cases}$$

В параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 10 - t \\ y = -19 + 4t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Пусть $M(2,3,1)$. Найдём t при котором $MP \perp a$, где P - точка на прямой, а a - направляющий вектор:

$$MP = P - M = \begin{pmatrix} 8 - t \\ -22 + 4t \\ t - 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 10 - t \\ -19 + 4t \\ t \end{pmatrix}, \quad (a, MP) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{97}{18}$$

Значит:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{83}{18} \\ \frac{23}{9} \\ \frac{97}{18} \end{pmatrix}, \quad MP = \begin{pmatrix} \frac{47}{18} \\ \frac{-4}{9} \\ \frac{79}{18} \end{pmatrix}$$

Значит точка M' симметричная M относительно прямой имеет координаты:

$$P + MP = \begin{pmatrix} \frac{65}{9} \\ \frac{19}{9} \\ \frac{88}{9} \end{pmatrix}$$

Ответ: $(\frac{65}{9}, \frac{19}{9}, \frac{88}{9})^T$

№3