ИДЗ №4, 11 вариант (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 $A = \begin{pmatrix} 17+19i & 8+8i \\ -40-40i & -19-17i \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$

Чтобы найти значения $x \in \mathbb{C}$, при которых матрица $A - xE$ необратима, необходимо найти такие x, при которых определитель матрицы равен нулю. Здесь E — единичная матрица 2×2.

Матрица $A - xE$ будет выглядеть следующим образом:

$$A - xE = \begin{pmatrix} (17+19i) - x & 8+8i \\ -40-40i & (-19-17i) - x \end{pmatrix}$$

Теперь вычислим определитель этой матрицы:

$$det(A - xE) = det\begin{pmatrix} (17+19i) - x & 8+8i \\ -40-40i & (-19-17i) - x \end{pmatrix}$$

$$det(A - xE) = (17 + 19i - x)\,(-19 - 17i - x) - (8 + 8i)(-40 - 40i)$$

Теперь упростим каждую часть:

1) Вычислим $(17 + 19i - x)\,(-19 - 17i - x)$:
   Раскроем скобки:

$$(17 + 19i)(-19 - 17i) - (17 + 19i)x - (-19 - 17i)x + x^2$$

Сначала вычислим $(17 + 19i)(-19 - 17i)$:

$$(17+19i)(-19-17i) = 17\cdot(-19)+17\cdot(-17i)+19i\cdot(-19)+19i\cdot(-17i)$$

$$= -323 - 289i - 361i - 323i^2 = -289i - 361i = 0 - 650i = -650i$$

Теперь подставим:

$$-650i - (17 + 19i)x + (19 + 17i)x + x^2$$

Упростим:

$$ab = -650i + x^2 + (-17 + 19 + 17i - 19i)x$$

$$= -650i + x^2 + (2 - 2i)x$$

2) Вычислим $(8 + 8i)(-40 - 40i)$ Раскроем скобки:

$$(8+8i)(-40-40i) = 8 \cdot (-40) + 8 \cdot (-40i) + 8i \cdot (-40) + 8i \cdot (-40i) =$$

$$= -320 - 320i - 320i - 320i^2 = -320 - 320i - 320i + 320 = -640i$$

Подставим вычисленные выражения:

$$det(A - xE) = -650i + x^2 + (2 - 2i)x + 640i = x^2 + (2 - 2i)x - 10i = 0$$

$$D = (2 - 2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10i)$$

Вычислим $(2 - 2i)^2$:

$$(2 - 2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = 4 - 8i - 4 = -8i.$$

Подставим:

$$D = -8i + 40i = 32i.$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{32i}.$$

Чтобы найти $\sqrt{32i}$, представим $32i$ в тригонометрической форме.

Модуль равен 32, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$:

$$\sqrt{32i} = 4\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 + 4i.$$

Следовательно:

$$x = \frac{-(2-2i) \pm (4+4i)}{2} = \frac{-2+2i \pm (4+4i)}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-2+2i+4+4i}{2} = \frac{2+6i}{2} = 1+3i \\ x_2 = \frac{-2+2i-4-4i}{2} = \frac{-6-2i}{2} = -3-i \end{array}\right.$$

Следовательно, матрица $A - xE$ необратима при:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1+3i \\ x_2 = -3-i \end{array}\right.$$

№2 $\sqrt[4]{-\frac{81}{2} - \frac{81\sqrt{3}}{2}i}$

Сначала найдем модуль и аргумент комплексного числа $z = -\frac{81}{2} - \frac{81\sqrt{3}}{2}i$.

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{81}{2}\right)^2 + \left(-\frac{81\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Вычислим каждую часть:

$$\left(-\frac{81}{2}\right)^2 = \frac{6561}{4}$$

$$\left(-\frac{81\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{6561 \cdot 3}{4}$$

Сложим:

$$|z| = \sqrt{\frac{6561}{4} + \frac{6561 \cdot 3}{4}} = \sqrt{\frac{6561 \cdot 4}{4}} = \sqrt{6561} = 81$$

Найдем аргумент φ

Аргумент φ в данном случае вычисляется по формуле:

$$\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

так как z лежит в третьей четверти

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{81\sqrt{3}}{2}}{-\frac{81}{2}}\right) - \pi = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

Следовательно z равно:

$$z = 81(\cos(-\frac{2\pi}{3} + i\sin(-\frac{2\pi}{3})))$$

Теперь мы можем найти четвертые корни w_k:

$$w_k = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{4}\right)$$

где $|z| = 81$ и $\sqrt[4]{|z|} = \sqrt[4]{81} = 3$.

Теперь подставим значения для $k = 0, 1, 2, 3$:

1) $k = 0$

$$w_0 = 3\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4}\right) = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$$

2) $k = 1$

$$w_1 = 3\left(\cos\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

3) $k = 2$

$$w_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\cos\left(\frac{10\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{12}\right)\right)$$

$$= 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3i}{2}$$

4) $k = 3$

$$w_3 = 3\left(\cos\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 3\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 3\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} w_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3i}{2} \\ w_1 = \frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i \\ w_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3i}{2} \\ w_3 = -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$

№3

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -45 \\ 46 \\ 26 \\ 9 \\ -21 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$$

Чтобы доказать, что векторы v_1, v_2, v_3 линейно независимы при всех значениях параметра a, мы можем рассмотреть их линейную комбинацию и показать, что единственным решением является тривиальное решение.

Рассмотрим линейную комбинацию векторов:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$$

где c_1, c_2, c_3 — скаляры. Подставим векторы:

$$c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -45 \\ 46 \\ 26 \\ 9 \\ -21 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Это приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} 5c_1 - 45c_2 + 5c_3 = 0 \\ -5c_1 + 46c_2 - 4c_3 = 0 \\ -3c_1 + 26c_2 - 4c_3 = 0 \\ -c_1 + 9c_2 + ac_3 = 0 \\ 2c_1 - 21c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases}$$

Перепишем в виде матрицы СЛУ:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -45 & 5 & | & 0 \\ -5 & 46 & -4 & | & 0 \\ -3 & 26 & -4 & | & 0 \\ -1 & 9 & a & | & 0 \\ 2 & -21 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases} \quad \text{- единственное решение}$$

Таким образом, векторы v_1, v_2, v_3 линейно независимы для всех значений a.

Запишем векторы в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -45 & 5 \\ -5 & 46 & -4 \\ -3 & 26 & -4 \\ -1 & 9 & a \\ 2 & -21 & 3 \end{pmatrix}$$

Приведём матрицу A к СВ преобразованиями столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -45 & 5 \\ -5 & 46 & -4 \\ -3 & 26 & -4 \\ -1 & 9 & a \\ 2 & -21 & 3 \end{pmatrix} \implies \text{СВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{8}{5} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-9-13a}{5(1+a)} & -3 & \frac{4}{1+a} \end{pmatrix}$$

После таких преобразований линейная независимость векторов не пропала. Следовательно, чтобы дополнить v_1, v_2, v_3 до базиса, нужно добавить векторы:

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $v1, v2, v3, e3, e5$ - базис

№4 Запишем векторы $v1, v2, v3, v4$ в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 4 & -5 & 0 \\ 16 & 7 & -2 & 1 \\ 25 & 7 & -5 & 2 \\ 32 & 8 & -4 & 0 \\ 18 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(а) Приведём матрицу к УСВ преобразованиями строк:

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 4 & -5 & 0 \\ 16 & 7 & -2 & 1 \\ 25 & 7 & -5 & 2 \\ 32 & 8 & -4 & 0 \\ 18 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как такие преобразования не меняют линейную зависимость векторов, то мы можем утверждать, что вектор v_4 выражается через остальные, а набор v_1, v_2, v_3 - линейно независим.
Следовательно, так как v_1, v_2, v_3 - ЛНЗ, и:

$$v_4 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \Rightarrow \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

то v_1, v_2, v_3 базис подпространства U.

(б) Пусть E - матрица, составленная из векторов v_1, v_2, v_3
Чтобы проверить принадлежность u_1 к U решим уравнение $Ex = u_1$:

$$(E|u_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 4 & -5 & 8 \\ 16 & 7 & -2 & 6 \\ 25 & 7 & -5 & 11 \\ 32 & 8 & -4 & 8 \\ 18 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \implies \text{УСВ:} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{34}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Следовательно, у уравнения $Ax = u_1$ есть единственное решение, а значит u_1 можно представить в виде:

$$u_1 = -\frac{1}{5}v_1 + \frac{2}{3}v_2 - \frac{34}{15}v_3$$

Теперь проверим принадлежность u_2, аналогично решим уравнение $Ex = u_2$:

$$(E|u_2) = \begin{pmatrix} 30 & 4 & -5 & | & 9 \\ 16 & 7 & -2 & | & 6 \\ 25 & 7 & -5 & | & 10 \\ 32 & 8 & -4 & | & 9 \\ 18 & 5 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varnothing$$

Следовательно, у уравнения $Ex = u_2$ нет решений, а значит u_2 не выражается через базис v_1, v_2, v_3, а значит $u_2 \notin U$

№5 Запишем СЛУ в виде матрицы, и приведём её к улучшенному ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 & -12 & -6 & | & 0 \\ 17 & 13 & -13 & -17 & -11 & | & 0 \\ 11 & 9 & -5 & -9 & -7 & | & 0 \\ 17 & 13 & -12 & -14 & -12 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 & -6 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -14 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, получаем:

$$\begin{cases} x_3 = -3x_4 + x_5 \\ x_2 = 14x_4 - 6x_5 \\ x_1 = -12x_4 + 6x_5 \end{cases} \qquad x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

Общий вид решений:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12x_4 + 6x_5 \\ 14x_4 - 6x_5 \\ -3x_4 + x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

При этом:

$$x = \begin{pmatrix} -12x_4 + 6x_5 \\ 14x_4 - 6x_5 \\ -3x_4 + x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = v_1x_4 + v_2x_5, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно набор векторов v_1, v_2 является ФСР для данной системы, а соответственно и базисом множества её решений. Его размерность равна двум.

Ответ: v_1, v_2 - базис, $\dim U = 2$