Домашнее задание на 25.09.2024 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. $A - A^T = -(A^T - A) = -(A - A^T)^T \Rightarrow -(A - A^T) = (A - A^T)^T \Rightarrow$
$\Rightarrow A - A^T$ - кососимметричекая для любых A.
$\frac{A}{2} - \frac{A}{2}^T$ - кососимметричекая матрица $= -(\frac{A}{2} - \frac{A}{2}^T)^T$
$\frac{A}{2} + \frac{A}{2}^T$ - симметрическая матрица $= \frac{A}{2}^T + \frac{A}{2}$
Тогда A можно представить как: $A = \frac{A}{2} - \frac{A}{2}^T + \frac{A}{2} + \frac{A}{2}^T =$
$= \frac{A - A^T}{2} + \frac{A + A^T}{2}$

2.

$$2.1 \begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Запишем расширенную матрицу этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 & | & 3 \\ -6 & 4 & 2 & 3 & | & 2 \\ -3 & 2 & -11 & -15 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$A[i] - \text{ i-ая строка СЛУ}$$

$$A[1] = A[1] - 2A[2]$$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 & | & 3 \\ 0 & 0 & 24 & 33 & | & 0 \\ -3 & 2 & -11 & -15 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$A[0] = A[0] - 3A[2]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \\ -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A[0] = \frac{1}{5}A[0]$$

$$A[1] = \frac{1}{3}A[1]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 8x_3 + 11x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{11x_4}{8} \\ -3x_1 + 2x_2 + \frac{121x_4}{8} - \frac{120x_4}{8} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{11x_4}{8} \\ -3x_1 + 2x_2 + \frac{x_4}{8} = 1 \end{cases}$$

$$x_4 = 8a, x_2 = b$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -\frac{1-2b-a}{3} \\ x_2 = b \\ x_3 = -11a \\ x_4 = 8a \end{cases}$

2.2 $\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 & 10 & | & 13 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & | & 3 \\ 8 & 6 & 2 & 5 & | & 7 \end{pmatrix}$$

$$A[0] = A[0] - 3 * A[1]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] - 2 * A[1]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases} = \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 = a, x_2 = b$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = 1 - 4a - 3b \\ x_4 = 1 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & | & 8 \\ 4 & 3 & -9 & | & 9 \\ 2 & 3 & -5 & | & 7 \\ 1 & 8 & -7 & | & 12 \end{pmatrix}$$

$$A[0] = A[0]/2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = A[1] - 4 * A[0]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = A[1]/-7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] - 2 * A[0]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] + 2 * A[1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A[3] = A[3] - A[0]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{11}{2} & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A[3] = A[3] - \frac{11}{2} * A[1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$A[3] = A[3] * \frac{2}{5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{2}x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{5}{2}x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5 - 4 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\textbf{Ответ:} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2.4 \begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 10 & 3 & 7 & | & 7 \\ -4 & 7 & 1 & 3 & | & 5 \\ 7 & 5 & -4 & -6 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$A[0] = A[0]/-9$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -\frac{7}{9} \\ -4 & 7 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = A[1] + 4 * A[0]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -\frac{7}{9} \\ 0 & \frac{23}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{17}{9} \\ 7 & 5 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = A[1] * \frac{9}{23}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -\frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{23} & -\frac{1}{23} & \frac{17}{23} \\ 7 & 5 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] - 7 * A[0]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -\frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{23} & -\frac{1}{23} & \frac{17}{23} \\ 0 & \frac{115}{9} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{76}{9} \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] - A[1] * \frac{115}{9}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -\frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{23} & -\frac{1}{23} & \frac{17}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что последняя строчка даёт: $0 = -1$ $\varnothing$

Ответ: $\varnothing$

3. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, тогда:
$$\begin{cases} f(1) = a + b + c = 8 \\ f(-1) = a - b + c = 2 \\ f(2) = 4a + 2b + c = 14 \end{cases}$$
Запишем в виде расширенной матрицы СЛУ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 8 \\ 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 4 & 2 & 1 & | & 14 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = A[1] - A[0]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = A[1]/-2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] - 4 * A[0]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -18 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] + 2 * A[1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2]/-3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=8 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = x^2 + 3x + 4$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \\ -x_1 + (a-1)x_2 = 0 \\ ax_1 + ax_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$

Запишем в виде расширенной матрицы СЛУ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ -1 & a-1 & 0 & 0 \\ a & a & a & 0 \end{array}\right)$$

$$A[1] = A[1] + A[0]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ a & a & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = A[1]/a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ a & a & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] - A[0] * a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 + a & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 - всегда главные переменные, а x_3 - главная только при $-a^2 + a \neq 0$, т.е. при $a \neq 1$ и $a \neq 0$

Ответ: $\begin{cases} \text{При } a \in \{1, 0\}\text{: 2 главных и 1 свободная.} \\ \text{При } a \in R \setminus \{1, 0\} \text{ :3 главных и 0 свободных} \end{cases}$

5. $\begin{cases} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases}$

Запишем в виде расширенной матрицы СЛУ:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 2 & | & 2 \\ 5 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & -2 & b & | & 3 \end{pmatrix}$$

При $a = 0$: 1 решение

При $a \neq 0$:

$$A[0] = A[0]/a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & b & 3 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = A[1] - 5 * A[0]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 2 & -\frac{10}{a} & 1 - \frac{10}{a} \\ 1 & -2 & b & 3 \end{pmatrix}$$

$$A[1] = A[1]/2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{a} & \frac{1}{2} - \frac{5}{a} \\ 1 & -2 & b & 3 \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] - A[0]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{a} & \frac{1}{2} - \frac{5}{a} \\ 0 & -2 & b - \frac{2}{a} & 3 - \frac{2}{a} \end{pmatrix}$$

$$A[2] = A[2] + 2 * A[1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{a} & \frac{1}{2} - \frac{5}{a} \\ 0 & 0 & b - \frac{12}{a} & 4 - \frac{12}{a} \end{pmatrix}$$

При $b - (12/a) = 0$:

$b = 12/a$

$a = 3$: ∞ решений

$a \neq 3$: $\varnothing$

При $b-(12/a)\neq 0$:

$$A[2]=A[2]/(b-(12/a))$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{a} & \frac{1}{2}-\frac{5}{a}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{4-\frac{12}{a}}{b-\frac{12}{a}}\end{pmatrix}\Rightarrow 1 \text{ решение}$$

Ответ: $\begin{cases} a=0, b\in\mathbb{R}: 1 \text{ решение}\\ a=3, b=4: \infty \text{ решений}\\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0,3\}, b=\frac{12}{a}:\ 0 \text{ решений}\\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0,3\}, b\neq\frac{12}{a}:\ 1 \text{ решение}\end{cases}$