Домашнее задание на 13.06 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Найдём жордановы нормалльные формы:

1.1 Дано

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - (-4) = \lambda^2$$

Значит единственный собственный корень $\lambda = 0$ кратности 2. Проверка показывает $A^2 = 0$, но $A \neq 0$, значит в Жордановой форме один блок размера 2 при $\lambda = 0$:

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Дано

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$$

то есть единственное собственное значение $\lambda = -1$ алгебраической кратности 3. При этом

$$\dim\ker(A + E) = 1$$

следовательно геометрическая кратность равна 1 и вся кратность 3 собирается в один жорданов блок размера 3. Итоговая Жорданова форма

$$J_A = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3 Дано

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Её характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$$

т.е. единственный собственный корень $\lambda = 2$ кратности 3.

Геометрическая кратность этого корня равна 2, поэтому разложение на жордановы блоки будет одно блочное звено размером 2 и одно размером 1. Иными словами, в Жордановой форме

$$J_A = \mathrm{diag}\big(J_2(2),\ 2\big) \ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

где

$$J_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4 Дано

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = (\lambda-2)^4$$

Здесь единственное собственное значение $\lambda = 2$ алгебраической кратности 4, и оказывается

$$\dim\ker(A-2E)=2$$

Значит у нас два жордановых блока, каждый размера 2. Жорданова форма

$$J_A = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\bigl(J_2(2),\ J_2(2)\bigr)$$

№2 Рассмотрим квадратную матрицу A над полем комплексных чисел. Нужно доказать, что A подобна своей транспонированной A^T, то есть существует обратимая матрица P, такая что

$$A = P^{-1}A^TP$$

любая квадратная матрица над полем комплексных чисел подобна своей жордановой форме. То есть существует обратимая матрица S, такая что

$$A = S^{-1}JS$$

где J — жорданова форма A.

Рассмотрим транспонированную матрицу A^T.

Имеем:

$$A^T = (S^{-1}JS)^T = S^TJ^T(S^{-1})^T$$

Таким образом, A^T подобна J^T.

Каждая жорданова клетка $J_m(\lambda)$ подобна своей транспонированной $J_m(\lambda)^T$. Действительно, матрица перестановки P_m, задаваемая как:

$$(P_m)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i+j=m+1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

удовлетворяет условию $J_m(\lambda) = P_m^{-1} J_m(\lambda)^T P_m$. Легко проверить, что $P_m = P_m^{-1}$.

Поскольку J и J^T состоят из попарно подобных блоков, то и вся матрица J подобна J^T: $J = Q^{-1} J^T Q$, где Q — блочно-диагональная матрица, составленная из матриц P_{m_i} для соответствующих жордановых клеток.

Следовательно, матрица A подобна своей транспонированной A^T

№3 3.1 Оператор A с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Мы уже увидели, что у A единственный собственный корень $\lambda = -1$ алгебраической кратности 3, а $\dim\ker(A+E) = 1$ Значит Жорданова форма один блок размера 3:

$$J_A = J_3(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдём теперь жорданов базис

$$(A+E)v_1 = 0, \quad (A+E)v_2 = v_1, \quad (A+E)v_3 = v_2$$

Решая, получаем, например

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Тогда в базисе $\{v_3, v_2, v_1\}$ матрица оператора принимает форму $J_3(-1)$.

Матрица A^T подобна матрице A: $A^T = PAP^{-1}$. Но если A^T

подобна A, то и A подобна A^T (подобие — отношение симметричное: если $X = RYR^{-1}$, то $Y = R^{-1}XR$). Следовательно, существует матрица $R = P^{-1}$ такая, что:

$$A = R^{-1}A^T R$$

3.2 Оператор B с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -12 \\ -1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен

$$\chi_B(\lambda) = -(\lambda - 1)\,(\lambda + 1)^2$$

так что собственные значения $\lambda = 1$ (кратность 1) и $\lambda = -1$ (кратность 2). Проверка показывает

$$\dim\ker(B - E) = 1, \qquad \dim\ker(B + E) = 1$$

то есть на $\lambda = 1$ блок простого собственного вектора, а на $\lambda = -1$ один блок размера 2.

Итоговая Жорданова форма

$$J_B \;=\; \operatorname{diag}\bigl(J_2(-1),\,[1]\bigr) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Построим две жордановы цепочки:

1) Для $\lambda = -1$

$$(B + E)\,w_1 = 0, \qquad (B + E)\,w_2 = w_1$$

Решение даёт, например,

$$w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

2) Для $\lambda = 1$

Просто собственный вектор

$$(B - E)\, u = 0 \implies u = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В результате в базисе $\{\, w_2,\ w_1,\ u\}$ матрица B становится

$$J_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№4 Дано

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем определитель матрицы $A - \lambda E$:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Разлагаем по первой строке и находим, что характеристический многочлен равен:

$$\lambda^3(3-\lambda)(3+\lambda)$$

Собственные значения: $\lambda = 0$ (кратность 3), $\lambda = 3$ (кратность 1), $\lambda = -3$ (кратность 1).

- Для $\lambda = 0$:

  Ранг матрицы A равен 3, поэтому геометрическая кратность $\lambda = 0$ равна $5 - 3 = 2$. Это означает, что для $\lambda = 0$ возможны два жордановских блока. Учитывая структуру матрицы, предполагаем один блок размера 2×2 и один блок размера 1×1.

- Для $\lambda = 3$:

  Геометрическая кратность равна 1 (ранг матрицы $A - 3E$ равен 4), поэтому жордановский блок размера 1×1.

- Для $\lambda = -3$:

  Геометрическая кратность равна 1 (ранг матрицы $A + 3E$ равен 4), поэтому жордановский блок размера 1×1.

Собираем жордановские блоки для каждого собственного значения:

- Блок для $\lambda = 0$:

  $$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(размер } 2 \times 2\text{)} \quad \text{и} \quad J_0' = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \quad \text{(размер } 1 \times 1\text{)}$$

- Блок для $\lambda = 3$:

  $$J_3 = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

- Блок для $\lambda = -3$:

  $$J_{-3} = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$$

Жорданова нормальная форма матрицы A:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$