Домашнее задание на 23.10 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{n1} & \dots & a_{21} & a_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & \dots & a_{2n} & a_{1n} \end{pmatrix}$

Для такого перехода матрицу нужно сначала транспонировать, а потом поменять столбцы местами $\frac{n(n-1)}{2}$ раз, чтобы получить обратный порядок столбцов (из предыдущего дз). Следовательно после такого перехода определитель будет равен: $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} detA$

Ответ: $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} detA$

2. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & x & y \\ y & 0 & x \end{vmatrix} = x^4 - y \begin{vmatrix} y & 0 & x \\ 0 & x & y \\ 0 & y & 0 \end{vmatrix} =$

$= x^4 - y^2 \begin{vmatrix} x & y \\ y & 0 \end{vmatrix} = x^4 - y^4$

Ответ: $x^4 - y^4$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{detA} \hat{A}$

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 54 + 45 + 28 - 27 - 63 - 40 = -3$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\hat{A} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \dots \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \dots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \dots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \dots & \sin\beta_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 = 0$$

Ответ: 0

5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ x_1^3+x_1^2 & x_2^3+x_2^2 & \dots & x_n^3+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1(x_1+1) & (x_2+1)x_2 & \dots & (x_n+1)x_n \\ x_1^2(x_1+1) & (x_2+1)x_2^2 & \dots & (x_n+1)x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1+1) & (x_2+1)x_2^{n-2} & \dots & (x_n+1)x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1+1 & x_1(x_1+1) & x_1^2(x_1+1) & \dots & x_1^{n-2}(x_1+1) \\ 1 & x_2+1 & (x_2+1)x_2 & (x_2+1)x_2^2 & \dots & (x_2+1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n+1 & (x_n+1)x_n & (x_n+1)x_n^2 & \dots & (x_n+1)x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}(x_k+1) \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+1} & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} \\ \frac{1}{x_2+1} & 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+1} & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

6. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

7.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + bfg - gec - dbi - ahf$$

Пусть все три слагаемы со знаком + (т.е. aei, dhc, bfg) равны 1, тогда $a, e, i, d, h, c, b, f, g = 1 \Rightarrow$ определитель будет равен 0

Пусть какие-то два слагаемых со знаком + равны 1, а оставшееся равно 0, например, $aei = 1$, $dhc = 1$, $bfg = 0$, тогда $(a, e, i, d, h, c = 1) \wedge (b = 0 \vee h = 0 \vee c = 0)$ тогда в любом случае будет существовать хотя бы одно слагаемое зо знаком -, следовательно, определитель будет не больше 1

Пусть только одно слагаемое со знаком + равно 1, тогда определитель не может быть больше 1

Пусть все три слагаемых со знаком + равны 0, тогда определитель не может быть больше

Следовательно, определитель не может быть больше 1. Пример когда он равен 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$$

Ответ: 1