# Домашнее задание на 15.05 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

**№1** Мы знаем с.в. и с.з.:

$$\lambda_1 = 1+i, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 1-i, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Диагонализуем $A$:

$$A = P\,D\,P^{-1}, \quad P = \big(v_1,\ v_2\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad D = \operatorname{diag}(1+i,\ 1-i)$$

Тогда

$$A^{21} = P\,D^{21}\,P^{-1} = P \begin{pmatrix} (1+i)^{21} & 0 \\ 0 & (1-i)^{21} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Получаем

$$A^{21} = P \begin{pmatrix} -2^{10}(1+i) & 0 \\ 0 & -2^{10}(1-i) \end{pmatrix} P^{-1} = -2^{10}\,P\,D\,P^{-1} = -2^{10}\,A = -1024 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** $-1024 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

**№2** Рассмотрим оператор

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0.85x + 0.10y \\ 0.15x + 0.90y \end{pmatrix},$$

действующий на векторе $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, где $x_0$ – число здоровых, $y_0$ – число больных на острове с населением 10000 человек (из них вначале выявлено 100 больных).

Ищем с.з. из

$$\det\bigl(M - \lambda I\bigr) = \det \begin{pmatrix} 0.85 - \lambda & 0.10 \\ 0.15 & 0.90 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Вычислим:

$$(0.85 - \lambda)(0.90 - \lambda) - 0.10 \cdot 0.15 = \lambda^2 - 1.75\lambda + 0.75 = 0$$

Для $\lambda_1 = 1$ находим собственный вектор $v \neq 0$:

$$Mv = v \implies \begin{cases} 0.85x + 0.10y = x, \\ 0.15x + 0.90y = y, \end{cases} \implies 0.10y = 0.15x \implies y = 1.5\,x.$$

Можно взять $v_1 = (1, 1.5)^\top$.

Для $\lambda_2 = 0.75$ получился бы другой вектор, но при возведении в степень вклад этого собственного компонента $0.75^n \to 0$ при $n \to \infty$.

$$\varphi^n(v_0) = c_1\,(1)^n\,v_1 \;+\; c_2\,(0.75)^n\,v_2 \to c_1 v_1$$

поскольку $(0.75)^n \to 0$. Константу $c_1$ выбираем так, чтобы сумма компонент равнялась общей численности 10000:

$$v_1 = (1, 1.5), \quad 1 + 1.5 = 2.5, \quad c_1 = \frac{10000}{2.5} = 4000$$

Итак

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(v_0) = c_1\,v_1 = 4000 \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

**Ответ:** число здоровых стремится к 4000, число больных к 6000

**№3** Найдём с.з. и с.в.:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$-\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 8-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Разложим по первой строке:

$$\begin{aligned} -\chi(\lambda) &= (5-\lambda)\big((8-\lambda)(5-\lambda) - 4\big) - 2\big(2(5-\lambda) - (-8)\big) - 4\big(2\cdot 2 - (8-\lambda)(-4)\big) \\ &= -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda \\ &= -\lambda(\lambda - 9)^2 \end{aligned}$$

Найдём собственные векторы:

1) для $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 4z = 0, \\ 2x + 8y + 2z = 0, \\ -4x + 2y + 5z = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \langle (2,\, -1,\, 2)^T \rangle$$

Нормируем:

$$f_1 = \frac{1}{3}(2,\, -1,\, 2)^T$$

2) для $\lambda = 9$:

$$\begin{cases} -4x + 2y - 4z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0, \\ -4x + 2y - 4z = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v_9 = \langle (1,\, 2,\, 0)^T, (0,\, 2,\, 1)^T \rangle$$

Ортогонализуем векторы:

$$f_2' = (1, 2, 0)^T, \quad f_3' = (-4, 2, 5)^T$$

Нормируем:

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)^T, \quad f_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4, 2, 5)^T$$

Получаем ОНБ:

$$f_1 = \frac{1}{3}(2,\ -1,\ 2)^T, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)^T, \quad f_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4, 2, 5)^T$$

Диагональный вид:

$$\mathrm{diag}(0, 9, 9)$$

**№4** Для квадратичной формы

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

соответствует симметричная матрица $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ с матрицей $A$:

$$-\chi(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda + 3)^2$$

1) для $\lambda = 6$:

$$v_6 = \langle (2, 2, 1)^T \rangle$$

Нормируем:

$$f_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)^T$$

2) для $\lambda = -3$:

$$v_{-3} = \langle (1,0,-2)^T,\ (0,1,-2)^T \rangle$$

Ортогонализуем:

$$f_2' = (1,0,-2)^T, \quad f_3' = (-4,5,-2)^T$$

Нормируем:

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)^T, \quad f_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,5,-2)^T$$

Получаем ОНБ:

$$f_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)^T, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)^T, \quad f_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,5,-2)^T$$

Канонический вид:

$$6x_1'^2 - 3x_2'^2 - 3x_3'^2$$

**№5** Для оператора

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Найдём базис в котором матрица принимает канонический вид

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Так как матрица не симметричная, её канонический вид тоже не симметричный. Проверим является ли $-1$ её собственным значением:

$$\det\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}+1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}+1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}+1 \end{pmatrix} = 0 \text{ — верно}$$

Найдём базис $V_{-1}$:

$$(A+E)v = 0 \implies v = \langle (2,1,0) \rangle$$

пусть

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)$$

Найдём базис $\langle e_3 \rangle^{\perp}$:

$$\begin{cases}(v, e_3) = 0\end{cases} \qquad \implies \qquad v = \langle \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), (0,0,1) \rangle$$

пусть

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), \quad e_2 = (0,0,1)$$

Следовательно, в ОНБ $(e_1, e_2, e_3)$ матрица имеет канонический вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдём $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Так как, $\varphi(e_1) = e_1\cos\alpha + e_2\sin\alpha$, то

$$\cos\alpha = (\varphi(e_1), e_1) = \frac{2}{3}$$

$$\sin\alpha = (\varphi(e_1), e_2) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Тогда канонический вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Геометрически это означает поворот на угол $\arccos(\frac{2}{3})$ в плоскости $\langle e_1, e_2 \rangle$ и отражение относительно $\langle e_3 \rangle$