Домашнее задание на 17.04 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Пусть есть трёхгранный угол $ABCD$ из вершины A, т.е. есть три угла:

$$\angle ABC, \angle ACD, \angle BAD$$

Пусть $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ - единичные векторы вдоль сторон AB, AC и AD соответственно. Тогда направляющие векторы биссектрис углов $\angle ABC, \angle ACD$, это $\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{c}+\vec{d}$. А направляющий вектор биссектрисы угла, смежного к $\angle BAD$ это $-\vec{b}+\vec{d}$.

$$\vec{l_1} = \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{l_2} = \vec{c} + \vec{d}, \quad \vec{l_3} = -\vec{b} + \vec{d}$$

Сложим первый и третий векторы:

$$\vec{l_1} + \vec{l_3} = \vec{c} + \vec{d} = \vec{l_2}$$

Следовательно, так как сумма векторов и сами векторы точно лежат в одной плоскости: $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$ - **компланарны**

№2 Запишем прямую

$$\begin{cases} x + y - 3z = -9 \\ 3x + y - z = 11 \end{cases}$$

В параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 10 - t \\ y = -19 + 4t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Пусть $M(2, 3, 1)$. Найдём t при котором $MP \perp a$, где P - точка на прямой, а a - направляющий вектор:

$$MP = P - M = \begin{pmatrix} 8 - t \\ -22 + 4t \\ t - 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 10 - t \\ -19 + 4t \\ t \end{pmatrix}, \quad (a, MP) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{97}{18}$$

Значит:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{83}{18} \\ \frac{23}{9} \\ \frac{97}{18} \end{pmatrix}, \quad MP = \begin{pmatrix} \frac{47}{18} \\ \frac{-4}{9} \\ \frac{79}{18} \end{pmatrix}$$

Значит точка M' симметричная M относительно прямой имеет координаты:

$$P + MP = \begin{pmatrix} \frac{65}{9} \\ \frac{19}{9} \\ \frac{88}{9} \end{pmatrix}$$

Ответ: $(\frac{65}{9}, \frac{19}{9}, \frac{88}{9})^T$

№3 Найдём направляющий вектор прямой l_1:

$$a_1 = [(1, 3, 2), (0, 1, 1)] = (1, -1, 1)$$

Найдём направляющий вектор прямой l_2:

$$a_2 = [(3,0,1),(1,-1,0)] = (1,1,-3)$$

Точка на l_2 имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$PM = M - P = \begin{pmatrix} t \\ t+2 \\ 1-3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-3 \\ t-1 \\ -1-3t \end{pmatrix}$$

PM - направляющий вектор прямой l. Он должен быть перпендикулярен a_1, то есть:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t-3 \\ t-1 \\ -1-3t \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \implies$$

$$\implies PM = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{— направляющий вектор } l$$

Тогда прямая l в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 3 + t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

Возьмём точку $Q(3, 0, 4)$ на l_1. Вектор PQ:

$$PQ = (0, -3, 2).$$

Тогда расстояние между прямыми:

$$\rho(l, l_1) = \frac{|(([a, a_1]), PQ)|}{|[\vec{a}, \vec{a_1}]|}$$

Векторное произведение направляющих векторов:

$$[\vec{a}, \vec{a_1}] = (0, -3, -3).$$

Смешанное произведение:

$$(([\vec{a}, \vec{a_1})], PQ) = ((0, -3, -3), (0, -3, 2)) = 3$$

Расстояние между прямыми:

$$\rho = \frac{|3|}{|[\vec{a}, \vec{a_1}]|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$