

Домашнее задание на 29.05 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 1) Проверим, что U и V ортогональны

- Матрица U :

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Убедимся, что $U^T U = E$:

$$\begin{aligned} U^T U &= \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 & \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Матрица V :

$$V^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Убедимся, что $V^T V = E$:

$$V^T V = \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = E$$

2) Проверим матрицу Σ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы $9\sqrt{5}$ и $3\sqrt{5}$ упорядочены по убыванию.

3) Представление $A = u_1\sigma_1v_1^T + u_2\sigma_2v_2^T$:

• Вычислим $u_1\sigma_1v_1^T$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = 9\sqrt{5}, \quad v_1^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$u_1\sigma_1v_1^T = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

• Вычислим $u_2\sigma_2v_2^T$:

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = 3\sqrt{5}, \quad v_2^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$u_2\sigma_2v_2^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

• Сумма:

$$u_1\sigma_1v_1^T + u_2\sigma_2v_2^T = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix} = A$$

4) Найдём B ранга 1:

$$B = u_1\sigma_1v_1^T = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Норма Фробениуса разности:

$$\|A - B\| = \sqrt{(3\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{5}$$

№2 Полное сингулярное разложение матрицы A :

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

Матрица A имеет размер 2×3 , поэтому $\min(m, n) = 2$. Размеры усечённых матриц:

- U' : 2×2 (первые 2 столбца U),
- Σ' : 2×2 (первые 2 сингулярных значения),
- V' : 2×3 (первые 2 строки V^T).

Сформируем:

- $U' = U$:

$$U' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

- Σ' :

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

- $(V')^T$:

$$(V')^T = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Проверим: Вычислим произведение $U'\Sigma'(V')^T$:

- $U'\Sigma'$:

$$U'\Sigma' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \cdot 9\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \cdot 9\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

- Умножение на $(V')^T$:

$$\begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix} = A$$

Ответ:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{U'} \underbrace{\begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{\Sigma'} \underbrace{\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_{(V')^T}$$

№3 Ненулевая матрица-строка имеет ранг 1. Её единственное сингулярное значение:

$$\sigma = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Матрица U' размера 1×1 :

$$U' = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Нормированный вектор направления \mathbf{a} :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{a}^T}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Матрица $(V')^T$ размера $1 \times n$:

$$(V')^T = \mathbf{v}_1^T = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Усечённое SVD:

$$\mathbf{a} = U' \Sigma' (V')^T,$$

Ответ: Усечённое сингулярное разложение:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}}_{U'} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma \end{pmatrix}}_{\Sigma'} \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \right)}_{(V')^T}$$

№4 Найдём усечённые и полные сингулярные разложения

4.1. Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычисляем $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

Находим собственные значения $A^T A$:

$$\det(A^T A - \lambda I) = (17 - \lambda)^2 - 64 = 0 \implies \lambda_1 = 25, \lambda_2 = 9.$$

Сингулярные значения:

$$\sigma_1 = \sqrt{25} = 5, \quad \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$$

Правые сингулярные векторы V :

- Для $\lambda_1 = 25$:

$$(A^T A - 25I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Для $\lambda_2 = 9$:

$$(A^T A - 9I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Третий вектор $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ортогонален первым двум).

Матрица V :

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Левые сингулярные векторы U :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \mathbf{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрица U :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полное SVD:

$$A = U \Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Усечённое сингулярное разложение:

$$A = U' \Sigma' (V')^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

4.2. Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычисляем $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\det(A^T A - \lambda I) = \lambda^2 - 25\lambda = 0 \implies \lambda_1 = 25, \lambda_2 = 0$$

Сингулярные значения:

$$\sigma_1 = 5, \quad \sigma_2 = 0$$

Правые сингулярные векторы V :

- Для $\lambda_1 = 25$:

$$(A^T A - 25I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Для $\lambda_2 = 0$:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Левые сингулярные векторы U :

- Для $\sigma_1 = 5$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5} A \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Остальные векторы $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ выбираются ортогональными к \mathbf{u}_1

Полное SVD:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V^T = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^T$$

Усечённое SVD:

$$A = U' \Sigma' (V')^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (5) \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

№5 Найдём усечённые SVD и матрицы ранга 1:

5.1 Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычисляем $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Собственные значения $A^T A$:

$$\det(A^T A - \lambda I) = -\lambda^3 + 50\lambda^2 - 600\lambda = 0 \implies \lambda_1 = 30, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 0$$

Сингулярные значения:

$$\sigma_1 = \sqrt{30}, \quad \sigma_2 = \sqrt{10}$$

Правые сингулярные векторы V :

- Для $\lambda_1 = 30$:

$$(A^T A - 30I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -20 & 10 & 10 \\ 10 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Для $\lambda_2 = 10$:

$$(A^T A - 10I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Левые сингулярные векторы U :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрица U' :

$$U' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Усечённое SVD:

$$A = U' \Sigma' (V')^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица B ранга 1:

$$B = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T = \sqrt{30} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Норма Фробениуса:

$$\|A - B\| = \sqrt{\sigma_2^2} = \sqrt{10}$$

5.2 Вычисляем $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Собственные значения $A^T A$:

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$$

Сингулярные значения:

$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 1$$

Правые сингулярные векторы V :

- Для $\lambda_1 = 4$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Для $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 1$: векторы ортогональны \mathbf{v}_1 .

Левые сингулярные векторы U :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2} A \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{1} A \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{1} A \mathbf{v}_3$$

Усечённое SVD:

$$A = U' \Sigma' (V')^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Матрица B ранга 1:

$$B = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Норма Фробениуса:

$$\|A - B\| = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$