Домашнее задание на 05.06 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 1.1 Дано

$$6x^2 - 5y^2 + 12x - 10y + 31 = 0$$

Сгруппируем члены с x и y:

$$(6x^2 + 12x) + (-5y^2 - 10y) + 31 = 0$$

Вынесем коэффициенты за скобки:

$$6(x^2 + 2x) - 5(y^2 + 2y) + 31 = 0$$

Дополним до полных квадратов:

$$6(x^2 + 2x + 1 - 1) - 5(y^2 + 2y + 1 - 1) + 31 = 0$$

$$6[(x+1)^2 - 1] - 5[(y+1)^2 - 1] + 31 = 0$$

Раскроем скобки:

$$6(x+1)^2 - 6 - 5(y+1)^2 + 5 + 31 = 0$$

$$6(x+1)^2 - 5(y+1)^2 + 30 = 0$$

Перенесем константу вправо:

$$6(x+1)^2 - 5(y+1)^2 = -30$$

Разделим обе части на -30:

$$\frac{6(x+1)^2}{-30} - \frac{5(y+1)^2}{-30} = 1$$

Упростим:

$$-\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{6} = 1$$

$$\frac{(y+1)^2}{6} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1$$

Каноническое уравнение:

$$\frac{(y')^2}{6} - \frac{(x')^2}{5} = 1$$

где $x' = x + 1$, $y' = y + 1$. Выражение старых координат через новые:

$$x = x' - 1, \quad y = y' - 1$$

Тип кривой: гипербола (так как уравнение имеет вид $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$).

1.2 Дано

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

Квадратичная форма:

$$x^2 - 2xy + y^2$$

Матрица квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

- Для $\lambda_1 = 0$:

  $$(A - 0I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \implies v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2$$

  Нормированный собственный вектор: $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top$

- Для $\lambda_2 = 2$:

  $$(A - 2I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \implies -v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = -v_2.$$

  Нормированный собственный вектор: $\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top$.

Матрица перехода:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Подставляем:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \implies x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Сумма квадратичных членов:

$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - (x'^2 - y'^2) + \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) = 2y'^2$$

Исходное уравнение после подстановки:

$$2y'^2 + (-8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y') + 25 = 0 \implies 2y'^2 - 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 25 = 0.$$

Группируем члены с y':

$$2y'^2 + 2\sqrt{2}y' = 8\sqrt{2}x' - 25.$$

Выделяем полный квадрат для y':

$$2\left(y'^2 + \sqrt{2}y'\right) = 8\sqrt{2}x' - 25.$$

$$y'^2 + \sqrt{2}y' = \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Подставляем:

$$2\left[\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] = 8\sqrt{2}x' - 25,$$

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 8\sqrt{2}x' - 25,$$

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 8\sqrt{2}x' = -24.$$

Переносим константу:

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}x' - 24.$$

$$\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{24}{8\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Из формул поворота:

$$x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad y' = -\frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

Выражаем через x'', y'':

$$x' = x'' + \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad y' = y'' - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Подставляем в формулы поворота:

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} = \frac{\left(x'' + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - \left(y'' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{x'' - y'' + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}} + 2,$$

$$y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} = \frac{\left(x'' + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(y'' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{x'' + y'' + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}} + 1.$$

Таким образом, старые координаты выражаются через новые (x'', y'') как:

$$x = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}} + 2, \quad y = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}} + 1.$$

переобозначим новые координаты: $x' = x''$, $y' = y''$.

Каноническое уравнение:

$$(y')^2 = 4\sqrt{2}x'.$$

Тип кривой: парабола (уравнение вида $y^2 = 4px$ с $p = \sqrt{2}$).

Новая система координат: старые координаты выражаются через новые (x', y') как:

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} + 2, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} + 1.$$

№2 2.1 Дано

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$$

Сгруппируем члены с x, y, z:

$$(x^2 - 6x) + (4y^2 + 8y) + (9z^2 - 36z) = 0$$

Выделяем полные квадраты:

$$(x-3)^2 - 9 + 4(y+1)^2 - 4 + 9(z-2)^2 - 36 = 0$$

$$(x-3)^2 + 4(y+1)^2 + 9(z-2)^2 = 49$$

Разделим на 49:

$$\frac{(x-3)^2}{49} + \frac{4(y+1)^2}{49} + \frac{9(z-2)^2}{49} = 1$$

Упростим:

$$\frac{(x-3)^2}{7^2} + \frac{(y+1)^2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2} + \frac{(z-2)^2}{\left(\frac{7}{3}\right)^2} = 1$$

Новые координаты:

$$x' = x-3, \quad y' = y+1, \quad z' = z-2$$

Каноническое уравнение:

$$\frac{(x')^2}{49} + \frac{(y')^2}{\frac{49}{4}} + \frac{(z')^2}{\frac{49}{9}} = 1$$

Тип поверхности: эллипсоид

2.2 Дано

$$2xy + 2x + 2y + 2z - 1 = 0$$

Квадратичная форма: $2xy$

Матрица квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda^2-1)=0$$

Собственные значения: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=0$.

- Для $\lambda_1=1$:

$$(A-I)\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\mathbf{v}=0 \implies \mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^\top$$

- Для $\lambda_2=-1$:

$$(A+I)\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{v}=0 \implies \mathbf{v}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^\top$$

- Для $\lambda_3=0$:

$$A\mathbf{v}=0 \implies \mathbf{v}_3=(0,0,1)^\top$$

Матрица перехода:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Формулы поворота:

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\quad z=z'$$

Подставляем:

$$2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+2z'-1=0$$

Упрощаем:

$$2\cdot\frac{(x')^2-(y')^2}{2}+\sqrt{2}(x'-y')+\sqrt{2}(x'+y')+2z'-1=0$$

$$(x')^2-(y')^2+2\sqrt{2}x'+2z'-1=0$$

Группируем члены с x':

$$(x')^2+2\sqrt{2}x'=(x'+\sqrt{2})^2-2$$

Подставляем:

$$(x'+\sqrt{2})^2-2-(y')^2+2z'-1=0$$

$$(x'+\sqrt{2})^2-(y')^2+2z'=3$$

Вводим новые переменные:

$$x''=x'+\sqrt{2},\quad y''=y',\quad z''=z'$$

Уравнение:

$$(x'')^2-(y'')^2+2z''=3$$

Переносим константу:

$$(x'')^2-(y'')^2=-2z''+3$$

Чтобы убрать свободный член, сдвигаем z'':

$$z'''=z''-\frac{3}{2}$$

Тогда:
$$(x'')^2 - (y'')^2 = -2\left(z''' + \frac{3}{2}\right) + 3 = -2z'''$$
Каноническое уравнение:
$$(x'')^2 - (y'')^2 = -2z'''$$
Из поворота:
$$x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}, \quad z' = z$$
Из сдвигов:
$$x'' = x' + \sqrt{2} = \frac{x+y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}, \quad y'' = y' = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}, \quad z''' = z' - \frac{3}{2} = z - \frac{3}{2}$$
Подставляем:
$$x'' = \frac{x+y+2}{\sqrt{2}}, \quad y'' = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}, \quad z''' = z - \frac{3}{2}$$
Выражаем старые координаты через новые (x'', y'', z'''):
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') - 1, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'') - 1, \quad z = z''' + \frac{3}{2}$$
Каноническое уравнение:
$$(x'')^2 - (y'')^2 = -2z'''$$
Тип поверхности: гиперболический параболоид.

2.3 Дано
$$x^2 = 12y + z - 39$$
Линейная часть $-12y - z$ соответствует направлению вектора

$\mathbf{n} = (0, -12, -1)$. Длина вектора:

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{0^2 + (-12)^2 + (-1)^2} = \sqrt{145}$$

Введем ортогональную замену координат, где ось z' направлена вдоль $\mathbf{n}$, а ось y' — вдоль ортогонального вектора $\mathbf{m} = (0, 1, -12)$ (так как $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0 \cdot 0 + (-12) \cdot 1 + (-1) \cdot (-12) = 0$). Длина $\mathbf{m}$:

$$\|\mathbf{m}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-12)^2} = \sqrt{145}$$

Единичные векторы:

$$\mathbf{e}_{y'} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{145}}, -\frac{12}{\sqrt{145}}\right), \quad \mathbf{e}_{z'} = \left(0, -\frac{12}{\sqrt{145}}, -\frac{1}{\sqrt{145}}\right)$$

Формулы преобразования:

$$x = x', \quad y = \frac{y'}{\sqrt{145}} - \frac{12z'}{\sqrt{145}}, \quad z = -\frac{12y'}{\sqrt{145}} - \frac{z'}{\sqrt{145}}$$

Подставим в уравнение:

$$(x')^2 - 12\left(\frac{y'}{\sqrt{145}} - \frac{12z'}{\sqrt{145}}\right) - \left(-\frac{12y'}{\sqrt{145}} - \frac{z'}{\sqrt{145}}\right) + 39 = 0$$

Упростим линейную часть:

$$-12y - z = \sqrt{145}z'$$

Уравнение принимает вид:

$$(x')^2 + \sqrt{145}z' + 39 = 0$$

Введем сдвиг: $z'' = z' + \frac{39}{\sqrt{145}}$, тогда:

$$(x')^2 + \sqrt{145}\left(z'' - \frac{39}{\sqrt{145}}\right) + 39 = 0 \implies (x')^2 + \sqrt{145}z'' = 0$$

Каноническое уравнение:

$$(x')^2 = -\sqrt{145}z''$$

Из замены:

$$z' = z'' - \frac{39}{\sqrt{145}}$$

Тогда:

$$x = x'$$
$$y = \frac{y'}{\sqrt{145}} - \frac{12}{\sqrt{145}}\left(z'' - \frac{39}{\sqrt{145}}\right) = \frac{y'}{\sqrt{145}} - \frac{12z''}{\sqrt{145}} + \frac{468}{145}$$
$$z = -\frac{12y'}{\sqrt{145}} - \frac{1}{\sqrt{145}}\left(z'' - \frac{39}{\sqrt{145}}\right) = -\frac{12y'}{\sqrt{145}} - \frac{z''}{\sqrt{145}} + \frac{39}{145}$$

Каноническое уравнение $(x')^2 = -\sqrt{145}z''$ описывает параболический цилиндр.

2.4 Дано

$$3x^2 + 4xy - 4xz + 4y^2 + 2z^2 - 3y - 6z - 3 = 0$$

Квадратичная форма: $3x^2 + 4xy - 4xz + 4y^2 + 2z^2$.

Матрица квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

- Собственный вектор для $\lambda_1 = 0$:

$$(A - 0I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Собственный вектор для $\lambda_2 = 3$:

$$(A - 3I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Собственный вектор для $\lambda_3 = 6$:

$$(A - 6I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода (ортогональная):

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Формулы поворота:

$$x = \frac{1}{3}(-2x' + y' - 2z'), \quad y = \frac{1}{3}(x' - 2y' - 2z'), \quad z = \frac{1}{3}(-2x' - 2y' + z')$$

После подстановки квадратичная часть становится:

$$0 \cdot (x')^2 + 3 \cdot (y')^2 + 6 \cdot (z')^2$$

Линейная часть: $-3y-6z-3$. Подставляем:

$$y=\frac{1}{3}(x'-2y'-2z'), \quad z=\frac{1}{3}(-2x'-2y'+z')$$

$$-3y=-(x'-2y'-2z'), \quad -6z=-2(-2x'-2y'+z')=4x'+4y'-2z'$$

$$-3y-6z=3x'+6y'$$

Уравнение:

$$3(y')^2+6(z')^2+3x'+6y'-3=0$$

Делим на 3:

$$(y')^2+2(z')^2+x'+2y'-1=0$$

Выделяем полные квадраты

$$(y')^2+2y'=(y'+1)^2-1$$

Подставляем:

$$(y'+1)^2-1+2(z')^2+x'-1=0 \implies (y'+1)^2+2(z')^2+x'=2$$

Вводим сдвиг: $x''=x'$, $y''=y'+1$, $z''=z'$:

$$(y'')^2+2(z'')^2+x''=2 \implies x''=2-(y'')^2-2(z'')^2$$

Пусть

$$x'=x'', \quad y'=y''-1, \quad z'=z''$$

Подставляем в формулы поворота:

$$x=\frac{1}{3}(-2x''+(y''-1)-2z'')=\frac{1}{3}(-2x''+y''-1-2z'')$$

$$y=\frac{1}{3}(x''-2(y''-1)-2z'')=\frac{1}{3}(x''-2y''+2-2z'')$$

$$z=\frac{1}{3}(-2x''-2(y''-1)+z'')=\frac{1}{3}(-2x''-2y''+2+z'')$$

Каноническое уравнение $x'' = 2 - (y'')^2 - 2(z'')^2$ описывает эллиптический параболоид.

№3 Для того чтобы уравнение

$$3y^2 + 2z^2 - 4axz + 8x - 6y - 9 = 0$$

определяло эллиптический параболоид, необходимо, чтобы квадратичная форма, соответствующая уравнению, имела ранг 2 (то есть одно нулевое собственное значение), а линейная часть по переменной, соответствующей нулевому собственному значению, была ненулевой.

Эллиптический параболоид требует, чтобы оставшаяся квадратичная форма по двум переменным была положительно определенной.

Матрица квадратичной формы для уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a \\ 0 & 3 & 0 \\ -2a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2a \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2a & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\left[(-\lambda)(2-\lambda) - (-2a)(-2a)\right] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 4a^2) = 0.$$

Корни:

- $\lambda_1 = 3$
- $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1 + 4a^2}$

Эллиптический параболоид требует одного нулевого собственного значения. Проверим возможные случаи:

(a) $\lambda_1 = 3 = 0$ — невозможно.

(b) $\lambda_2 = 1 + \sqrt{1+4a^2} = 0$ — невозможно, так как

$$1 + \sqrt{1+4a^2} \geqslant 1 > 0$$

(c) $\lambda_3 = 1 - \sqrt{1+4a^2} = 0$:

$$1 - \sqrt{1+4a^2} = 0 \implies \sqrt{1+4a^2} = 1 \implies$$

$$\implies 1 + 4a^2 = 1 \implies 4a^2 = 0 \implies a = 0$$

При $a = 0$ уравнение принимает вид:

$$3y^2 + 2z^2 + 8x - 6y - 9 = 0.$$

Выделим полные квадраты:

- По y:

$$3y^2 - 6y = 3(y^2 - 2y) = 3((y-1)^2 - 1) = 3(y-1)^2 - 3$$

- По z:
  линейных членов нет, оставляем $2z^2$.

Подставляем:

$$3(y-1)^2 - 3 + 2z^2 + 8x - 9 = 0 \implies 3(y-1)^2 + 2z^2 + 8x = 12$$

Разрешим относительно x:

$$8x = -3(y-1)^2 - 2z^2 + 12 \implies x = -\frac{3}{8}(y-1)^2 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{3}{2}$$

Это уравнение эллиптического параболоида, так как:

- Квадратичная форма по y и z:

$$-\frac{3}{8}(y-1)^2 - \frac{1}{4}z^2$$

  имеет отрицательные коэффициенты, что соответствует параболоиду, открытому в направлении отрицательной оси x.

- После замены $x' = -x$ уравнение примет стандартный вид эллиптического параболоида.

- Линейный член по x ненулевой.

Ответ: $a = 0$