Домашнее задание на 12.02 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 1) Предположим, что существует линейная комбинация:

$$\alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \ldots + \alpha^k e_k = 0_V,$$

где α^i — скаляры. Применим к обеим частям функционал ε^i:

$$\varepsilon^i(\alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^k e_k) = \varepsilon^i(0_V) = 0.$$

В силу линейности ε^i:

$$\alpha^1 \varepsilon^i(e_1) + \ldots + \alpha^k \varepsilon^i(e_k) = 0.$$

Из условия $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$ следует, что все слагаемые, кроме $\alpha^i \cdot 1$, равны нулю. Таким образом:

$$\alpha^i = 0 \quad \text{для всех } i = 1, \ldots, k.$$

Следовательно, векторы $e_1, \ldots, e_k$ линейно независимы.

2) Предположим, что существует линейная комбинация:

$$\beta_1 \varepsilon^1 + \beta_2 \varepsilon^2 + \ldots + \beta_k \varepsilon^k = 0_{V^*},$$

где β_i — скаляры. Подействуем обеими частями на вектор e_j:

$$(\beta_1 \varepsilon^1 + \ldots + \beta_k \varepsilon^k)(e_j) = 0_{V^*}(e_j) = 0.$$

Раскрывая левую часть:

$$\beta_1 \varepsilon^1(e_j) + \ldots + \beta_k \varepsilon^k(e_j) = 0.$$

Из условия $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$ следует, что все слагаемые, кроме $\beta_j \cdot 1$, равны нулю. Таким образом:

$$\beta_j = 0 \quad \text{для всех } j = 1, \ldots, k.$$

Следовательно, функционалы $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^k$ линейно независимы.

№2 Базис $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ в V двойствен к базису $\{\beta^0, \beta^1, \ldots, \beta^n\}$ в V^*, если

$$\beta^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Пусть:

$$e_j(x) = \frac{x^j}{j!} \quad \text{для } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Проверим, подходит ли этот базис V под условие:

1) При $i < j$:

   i-я производная $e_j(x)$ равна

$$\frac{x^{j-i}}{(j-i)!}$$

   Подставляя $x = 0$, получаем 0. Следовательно, $\beta^i(e_j) = 0$.

2) При $i > j$:

   i-я производная $e_j(x)$ равна

$$0$$

   Подставляя $x = 0$, получаем 0. Следовательно, $\beta^i(e_j) = 0$.

3) При $i = j$:

i-я производная $e_j(x)$ равна

$$1$$

Подставляя $x = 0$, получаем 1. Следовательно, $\beta^i(e_j) = 1$.

Таким образом, условие $\beta^i(e_j) = \delta^i_j$ выполняется для всех i, j, что подтверждает, что базис $\left\{\frac{x^j}{j!}\right\}_{j=0}^{n}$ двойствен к $\{\beta^i\}_{i=0}^{n}$.

№3 Для определения билинейных форм на пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$ необходимо проверить линейность функций по каждому аргументу.

3.1. Линейность по первому аргументу:

$$\beta(A_1+A_2, B) = \operatorname{tr}((A_1+A_2)B^T) = \operatorname{tr}(A_1B^T)+\operatorname{tr}(A_2B^T) = \beta(A_1, B)+\beta(A_2, B)$$

$$\beta(\alpha A, B) = \operatorname{tr}(\alpha AB^T) = \alpha \operatorname{tr}(AB^T) = \alpha\beta(A, B)$$

Линейность по второму аргументу:

$$\beta(A, B_1+B_2) = \operatorname{tr}(A(B_1+B_2)^T) = \operatorname{tr}(AB_1^T+AB_2^T) = \beta(A, B_1)+\beta(A, B_2)$$

$$\beta(A, \alpha B) = \operatorname{tr}(A(\alpha B)^T) = \alpha \operatorname{tr}(AB^T) = \alpha\beta(A, B)$$

Функция билинейна.

3.2. $\beta(A, B) = \operatorname{tr}(AB - BA)$

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA)$$

Поскольку

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

получаем

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$$

Нулевая функция тривиально билинейна

3.3. $\beta(A, B) = \operatorname{tr}(A + B)$

$$\beta(A, B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

Проверка линейности:

$$\beta(A + C, B) = \operatorname{tr}(A + C) + \operatorname{tr}(B) \neq \beta(A, B) + \beta(C, B)$$

$$\beta(\alpha A, B) = \alpha \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \neq \alpha\beta(A, B)$$

Функция не билинейна.

3.4. $\beta(A, B) = \det(AB)$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Проверка линейности:

$$\det(AB + CB) \neq \det(AB) + \det(CB)$$

$$\det(\alpha A)\det(B) = \alpha^n \det(A)\det(B) \neq \alpha\det(A)\det(B)$$

Функция не билинейна.

№4 Чтобы проверить, является ли функция $\beta(f, g) = f(2)g'(1)$ билинейной формой на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$, необходимо убедиться в линейности по каждому аргументу.

1. По первому аргументу: Для любых $f, h \in V$ и $a \in \mathbb{R}$:

$$\beta(f + h, g) = (f + h)(2)g'(1) = f(2)g'(1) + h(2)g'(1) = \beta(f, g) + \beta(h, g)$$

$$\beta(af, g) = (af)(2)g'(1) = af(2)g'(1) = a\beta(f, g)$$

2. По второму аргументу: Для любых $g, h \in V$ и $a \in \mathbb{R}$:

$$\beta(f, g+h) = f(2)(g+h)'(1) = f(2)g'(1) + f(2)h'(1) = \beta(f,g) + \beta(f,h)$$

$$\beta(f, ag) = f(2)(ag)'(1) = f(2)ag'(1) = a\beta(f,g)$$

Таким образом, β является билинейной формой.

Элементы матрицы $\beta(e_i, e_j)$ вычисляются как $e_i(2) \cdot e_j'(1)$.

Значения $e_i(2)$:

$$e_1(2) = 1, \quad e_2(2) = 2, \quad e_3(2) = 4, \quad e_4(2) = 8$$

Значения $e_j'(1)$:

$$e_1'(1) = 0, \quad e_2'(1) = 1, \quad e_3'(1) = 2, \quad e_4'(1) = 3$$

Матрица билинейной формы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \end{pmatrix}$$

Билинейная форма β не является симметричной.

№5 Чтобы найти матрицу билинейной формы β в новом базисе, используем формулу преобразования матрицы билинейной формы при смене базиса:

$$B' = C^T B C$$

где C — матрица перехода, столбцы которой являются координатами новых базисных векторов в старом базисе.

Новые базисные векторы заданы формулами:

$$e_1' = e_1 - e_2$$
$$e_2' = e_1 + e_3$$
$$e_3' = e_1 + e_2 + e_3$$

Соответствующая матрица перехода C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица C:

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножим матрицы C^T и B:

$$C^T \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Умножим матрицу на C:

$$(C^T \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$$

Итоговая матрица билинейной формы β в новом базисе:

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$

№6 Чтобы найти значение билинейной формы $\beta(x, y)$, используем формулу для билинейной формы в координатном виде:

$$\beta(x, y) = x^T B y,$$

где x и y — координатные столбцы векторов x и y, а B — матрица билинейной формы.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Вычислим By:

$$By = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Вычислим $x^T By$:

$$x^T By = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} = -43$$

Ответ: -43