Домашнее задание на 20.11 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. 1.1 Доказать: $0 \cdot x = \overline{0} \;\; \forall x \in V$

$$0x = (0-0)x = 0x - 0x = \overline{0}$$

1.2 Доказать: $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x) \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in V$

$$\alpha - \alpha = 0 \Rightarrow 1 \cdot \alpha - \alpha = 0 \Rightarrow -\alpha = -1 \cdot \alpha$$

$$(-\alpha) \cdot x = (-1 \cdot \alpha) \cdot x = -1 \cdot (\alpha \cdot x) = -(\alpha \cdot x)$$

2. 2.2 $U = \{(x, 2y, x+y)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Проверим условия подпространства:

(1) Нулевой вектор $\overline{0} \in U$:

$$x, y = 0 : (0,0,0) \in U$$

(2) Замкнутость относительно сложения:

$$(x_1, 2y_1, x_1 + y_1)^T + (x_2, 2y_2, x_2 + y_2)^T =$$

$$= (x_2 + x_1, 2y_2 + 2y_1, x_2 + y_2 + x_1 + y_1)^T \in U$$

(3) Замкнутость относительно умножения на скаляр:

$$(x, 2y, x+y)^T \in U, \;\; c \in \mathbb{R}$$

$$c(x, 2y, x+y)^T = (xc, 2yc, xc + yc)^T \in U$$

Следовательно, U подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$U = \{(x, y, x, y, \dots)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
Проверим условия подпространства:

(1) Нулевой вектор $\overline{0} \in U$:

$$x, y = 0 : (0, 0, 0, 0, \dots) \in U$$

(2) Замкнутость относительно сложения:

$$(x_1, y_1, x_1, y_1, \dots)^T + (x_2, y_2, x_2, y_2, \dots)^T =$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, \dots)^T \in U$$

(3) Замкнутость относительно умножения на скаляр:

$$(x, y, x, y, \dots)^T \in U,\ c \in \mathbb{R}$$

$$c(x, y, x, y, \dots)^T = (cx, cy, cx, cy, \dots)^T \in U$$

Следовательно, U подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

2.2 $U = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \neq 0, \dots, x_n \neq 0\}$
Проверим условия подпространства:

(1) Нулевой вектор $\overline{0} \in U$

$$(0, \dots, 0)^T \notin U$$

Первое условие не выполняется.
Следовательно, U не подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$U = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n\}$
Проверим условия подпространства:

(1) Нулевой вектор $\overline{0} \in U$:

$$x_1, \dots, x_n = 0 : (0, 0, 0, 0, \dots) \in U$$

(2) Замкнутость относительно сложения:

$$(x_1, \dots, x_n)^T + (y_1, \dots, y_n)^T =$$

$$= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^T \in ?\ U$$

Сложение может нарушить порядок убывания.

Второе условие не выполняется.

Следовательно, U не подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

2.3 $U = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}\}$;

Проверим условия подпространства:

(1) Нулевой вектор $\overline{0} \in U$:

$$x_1, \dots, x_n = 0 : (0, 0, 0, 0, \dots) \in U$$

(2) Замкнутость относительно сложения:

$$(x_1, \dots, x_n)^T + (y_1, \dots, y_n)^T =$$

$$= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^T \in\ U$$

(3) Замкнутость относительно умножения на скаляр:

$$(x_1, \dots, x_n)^T \in U,\ c \in \mathbb{R}$$

$$c(x_1, \dots, x_n)^T = (cx_1, \dots, cx_n)^T \in ?\ U$$

При $c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ числа перестанут быть целыми.

Третье условие не выполняется.

Следовательно, U не подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$U = \{(x, x^3, x^5, \dots, x^{2n-1})^T \mid x \in \mathbb{R}\}$;
Проверим условия подпространства:

(1) Нулевой вектор $\overline{0} \in U$:

$$x = 0 : (0, 0, 0, 0, \dots) \in U$$

(2) Замкнутость относительно сложения:

$$(x_1, x_1^3, x_1^5, \dots, x_1^{2n-1})^T + (x_2, x_2^3, x_2^5, \dots, x_1^{2n-1})^T =$$

$$= (x_1 + x_2, x_1^3 + x_2^3, x_1^5 + x_2^5, \dots, x_1^{2n-1} + x_2^{2n-1})^T \in ?\ U$$

При $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$:

$$(1, \dots, 1)^T + (1, \dots, 1)^T = (2, \dots, 2)^T \notin U$$

Второе условие не выполняется.
Следовательно, U не подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$U = \{(x, x)^T \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -x)^T \mid x \in \mathbb{R}\}$
Проверим условия подпространства:

(1) Нулевой вектор $\overline{0} \in U$:

$$x = 0 : (0, 0)^T \in U$$

(2) Замкнутость относительно сложения:

$$(x, x)^T + (y, y)^T = (x + y, x + y)^T \in U$$

$$(x, x)^T + (y, -y)^T = (x + y, x - y)^T \in ?\ U$$

При $x = 1$ и $y = 1$:

$$(1,1)^T + (1,-1)^T = (2,0) \notin U$$

Второе условие не выполняется.

Следовательно, U не подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

3 3.1 Множество симметрических матриц; множество кососимметрических матриц

1) Симметрические матрицы. Проверим условия подпространства:

(1) Нулевая матрица симметрична.

(2) Сумма двух симметричных матриц A и B также симметрична, так как

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$$

(3) Умножение симметричной матрицы A на скаляр α сохраняет симметричность:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$$

Следовательно, множество симметрических матриц является подпространством V

2) Кососимметрические матрицы. Проверим условия подпространства:

(1) Нулевая матрица кососимметрична.

(2) Сумма двух кососимметричных матриц A и B также ко-

сосимметрична, так как

$$(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)$$

(3) Умножение кососимметричной матрицы A на скаляр α сохраняет кососимметричность:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -(\alpha A)$$

Следовательно, множество кососимметрических матриц является подпространством V

3.2 Множество матриц со следом 0. Проверим условия подпространства:

(1) Нулевая матрица имеет след 0

(2) Если A и B имеют след 0, то

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) = 0 + 0 = 0$$

(3) Если $\alpha \in F$ и $\mathrm{Tr}(A) = 0$, то

$$\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{Tr}(A) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Следовательно, множество матриц со следом 0 является подпространством V

3.3 Множество невырожденных матриц; множество вырожденных матриц

1) Невырожденные матрицы. Проверим условия подпространства:

(1) Нулевая матрица вырожденная ($det(0) = 0$), следовательно, множество невырожденных матриц не содержит нулевую матрицу и не является подпространством.

Первое условие не выполняется.

Следовательно, множество невырожденных матриц не является подпространством V

1) Невырожденные матрицы. Проверим условия подпространства:

(1) Нулевая матрица вырожденная.

(2) Сумма двух вырожденных матриц может не быть вырожденной (например, A и $-A$ вырожденные, но $A+(-A) = 0$ - невырожденная).

Второе условие не выполняется.

Следовательно, множество вырожденных матриц не является подпространством V

4. 4.1 Функции с фиксированным значением в точке 5

1) Множество функций, значение которых в точке 5 равно 0. Проверим условия подпространства:

(1) Нулевая функция $f(x) = 0$ принадлежит U, потому что $f(5) = 0$

(2) Если $f(5) = 0$ и $g(5) = 0$, то

$$(f + g)(5) = f(5) + g(5) = 0 + 0 = 0$$

(3) Если $f(5) = 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$(\alpha f)(5) = \alpha f(5) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Следовательно, множество функций, значение которых в точке 5 равно 0, является подпространством V

2) Множество функций, значение которых в точке 5 равно 1. Проверим условия подпространства:

   (1) Нулевая функция $f(x) = 0$ не принадлежит U, так как $f(5) \neq 1$.

   Первое условие не выполняется.

   Следовательно, множество функций, значение которых в точке 5 равно 1, не является подпространством V

4.2 Возрастающие и неубывающие функции

1) Множество строго возрастающих функций. Проверим условия подпространства:

   (1) Нулевая функция $f(x) = 0$ не строго возрастает ($f(x_1) = f(x_2)$).

   Первое условие не выполняется.

   Следовательно, множество строго возрастающих функций, не является подпространством V

2) Множество неубывающих функций. Проверим условия подпространства:

   (1) Нулевая функция $f(x) = 0$ не убывает.

   (2) Если f и g не убывают, то $(f+g)(x_1) \leqslant (f+g)(x_2)$ сохра-

няется, так как:

$$f(x_1) + g(x_1) \leqslant f(x_2) + g(x_2)$$

(3) Если f не убывает и $\alpha \geqslant 0$, то $(\alpha f)(x_1) \leqslant (\alpha f)(x_2)$. Если $\alpha < 0$, порядок меняется, и функция может стать убывающей.

Третье условие не выполняется.

Следовательно, множество неубывающих функций, не является подпространством V

4.3 Нестрого монотонные функции

$U = \{f \mid f$ не убывает$\} \cup \{f \mid f$ не возрастает$\}$. Проверим условия подпространства:

(1) Нулевая функция $f(x) = 0$ принадлежит U, так как она одновременно не убывает и не возрастает.

(2) Если f не убывает и g не возрастает, то $f + g$ может не быть ни неубывающей, ни невозрастающей. Например, если $f(x) = \ln x$ (не убывает), $g(x) = -2^x$ (не возрастает), то:

$$(f + g)(x) = ln(x) - 2^x \text{ (немонотонная)}$$

Второе условие не выполняется.

Третье условие не выполняется.

Следовательно, множество нестрого монотонных функции, не является подпространством V

5. Чтобы определить, при каких значениях параметра a вектор $(0, 6, -1, a)^T$ является линейной комбинацией векторов $(1, 3, -2, 1)^T$, $(2, 0, -3, 4)^T$

и $(3,3,-5,5)^T$, нужно решить систему уравнений:

$$(0,6,-1,a)^T = x_1(1,3,-2,1)^T + x_2(2,0,-3,4)^T + x_3(3,3,-5,5)^T$$

$$\begin{cases} 0 = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ 6 = 3x_1 + 0x_2 + 3x_3, \\ -1 = -2x_1 - 3x_2 - 5x_3, \\ a = x_1 + 4x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

Запишем в виде СЛУ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 3 & 0 & 3 & | & 6 \\ -2 & -3 & -5 & | & -1 \\ 1 & 4 & 5 & | & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A_{(2)} - 3A_{(1)} \\ A_{(3)} + 2A_{(1)} \\ A_{(4)} - A_{(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -6 & -6 & | & 6 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 2 & 2 & | & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 2 & 2 & | & a \end{pmatrix}$$

$$A_{(3)} - 2A_{(2)} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & a+2 \end{pmatrix}$$

При $a \neq -2$: нет решений

При $a = -2$: есть решения

$(0,6,-1,a)^T$ является линейной комбинацией векторов $(1,3,-2,1)^T$, $(2,0,-3,4)^T$ и $(3,3,-5,5)^T$ только, когда существует решение этой системы. То есть при $0 = a + 2 \Rightarrow a = -2$

Ответ: $a = -2$