Домашняя работа №5 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1.

1.1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Инверсии: } 3+1+3+1+1=9$$

$$sgn = (-1)^9 = -1$$

1.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots n & n+1 & n+2 & n+3 \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 \dots & 3n \\ 3 & 6 & 9 \dots 3n & 2 & 5 & 8 \quad \dots & 3n-1 & 1 & 4 & 7 \quad \dots & 3n-2 \end{pmatrix}$

$$\text{Инверсии: } 2+4+6+\dots+2n+1+2+3+\dots+n+0+0+\dots=$$

$$= n\frac{2+2n}{2} + n\frac{1+n}{2} = \frac{3n^2+3n}{2}$$

$$sgn = (-1)^{\frac{3n^2+3n}{2}}$$

2.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 5)(2\ 8\ 6\ 4)(3\ 9\ 7)$

  $(1\ 5\ 3)(2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- $\sigma = (1\ 4)(3\ 6\ 5) \in S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \sigma^{-1} = (4\ 1)(5\ 6\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

3.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ и $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ 4)$

$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 5\ 3)$

4.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 5\ 4)$

$\sigma^N = id \Rightarrow min(N) = \text{НОК}(2, 3) = 6$

$\sigma^{36} = id$

$\sigma^{37} = \sigma = (1\ 3)(2\ 5\ 4)$

$\sigma^{38} = \sigma^2 = (2\ 4\ 5)$

$\sigma^{-1} = (3\ 1)(4\ 5\ 2)$

$\sigma^{35} = \sigma^{-1} = (3\ 1)(4\ 5\ 2)$

5.

$\sigma = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 8 & 10 & 6 & 7 & 5 & 9 & 3 & 2 & 11 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 8\ 2\ 10)(3\ 6\ 9\ 11\ 4\ 7)$

$\sigma^{36} = id$

$\sigma^{37} = \sigma = (1\ 8\ 2\ 10)(3\ 6\ 9\ 11\ 4\ 7)$

$\sigma^5 = (1\ 8\ 2\ 10)(3\ 7\ 4\ 11\ 9\ 6)$

6.

$(a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\dots(a_{k-2}\ a_{k-1})(a_{k-1}\ a_k)$

$(a_{k-1}\ a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{k-2} & a_k & a_{k-1} \end{pmatrix}$

$(a_{k-2}\ a_{k-1}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{k-1} & a_{k-2} & a_k \end{pmatrix}$

$(a_{k-3}\ a_{k-2}) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-3} & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \\ a_1 & \dots & a_{k-2} & a_{k-3} & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix}$

$(a_{k-2}\ a_{k-1})(a_{k-1}\ a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-3} & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \\ a_1 & \dots & a_{k-3} & a_{k-1} & a_k & a_{k-2} \end{pmatrix}$

$(a_{k-3}\ a_{k-2})(a_{k-2}\ a_{k-1})(a_{k-1}\ a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-3} & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \\ a_1 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k & a_{k-3} \end{pmatrix}$

$\dots$

$(a_1\ a_2)\dots(a_{k-3}\ a_{k-2})(a_{k-2}\ a_{k-1})(a_{k-1}\ a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-3} & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k & a_1 \end{pmatrix}$

$sgn((a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\dots(a_{k-2}\ a_{k-1})(a_{k-1}\ a_k)) =$

$= sgn((a_1\ a_2))sgn((a_2\ a_3))\dots sgn((a_{k-2}\ a_{k-1}))sgn((a_{k-1}\ a_k)) \Rightarrow$

Так как знак транспозиции всегда равен -1, то

$sgn((a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\dots(a_{k-2}\ a_{k-1})(a_{k-1}\ a_k)) = (-1)^{k-1}$

Ответ: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-3} & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k & a_1 \end{pmatrix}$, $sgn = (-1)^{k-1}$

7.

7.1

$$\sigma^2 X \tau \rho = \sigma^2 \tau$$

$$\sigma^2 X = \sigma^2 \tau \rho^{-1} \tau^{-1}$$

$$X = \tau\rho^{-1}\tau^{-1}$$

Ответ: $\tau\rho^{-1}\tau^{-1}$

7.2 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ решить уравнение $\sigma X \tau = \rho$.

$$\sigma X \tau = \rho$$

$$X\tau = \sigma^{-1}\rho$$

$$X = \sigma^{-1}\rho\tau^{-1}$$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \sigma^{-1}\rho\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

8.

$$\sigma = (3\ 5\ 7\ \dots 99)(2\ 4\ \dots\ 98) \in S_{99}$$

Декремент равен: $99 - 3 = 97$ - чётное $\Rightarrow sgn(\sigma) = 1$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 96 & 97 & 98 & 99 \\ 1 & 4 & 5 & \dots & 98 & 99 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Инверсий: $0 + 2 + 2 + \dots + 2 + 0 + 0 = 96 * 2 = 192 \Rightarrow$

$$\Rightarrow sgn(\sigma) = (-1)^{192} = 1$$

Ответ: $sgn(\sigma) = 1$

9. $X \in S_5$, что $X^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$

$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ может получаться только из $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$

Ответ: $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$

10. Возьмём произвольную перестановку $\sigma \in S_n$.

Пусть m - количество циклов в разложении σ, включая циклы длины 1.

Каждый i-ый цикл длины k_i можно представить как произведение $(k_i - 1)$ транспозиций

Сумма длин всех циклов равна: $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Разложим каждый цикл на транспозиции, тогда всего транспозиций будет: $(k_1-1)+(k_2-1)+\dots+(k_m-1) = k_1+k_2+\dots+k_m-m = n - m$.

Следовательно, количество транспозиций равно декременту, а так как число инверсий определяется чётностью числа транспозиций (из задания 6), то чётность перестановки σ равна чётности декремента.