

Домашнее задание на 17.04 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Пусть есть трёхгранный угол $ABCD$ из вершины A , т.е. есть три угла:

$$\angle ABC, \angle ACD, \angle BAD$$

Пусть $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ - единичные векторы вдоль сторон AB, AC и AD соответственно. Тогда направляющие векторы биссектрис углов $\angle ABC, \angle ACD$, это $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{c} + \vec{d}$. А направляющий вектор биссектрисы угла, смежного к $\angle BAD$ это $-\vec{b} + \vec{d}$.

$$\vec{l}_1 = \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{l}_2 = \vec{c} + \vec{d}, \quad \vec{l}_3 = -\vec{b} + \vec{d}$$

Сложим первый и третий векторы:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_3 = \vec{c} + \vec{d} = \vec{l}_2$$

Следовательно, так как сумма векторов и сами векторы точно лежат в одной плоскости: $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ - **компланарны**

№2 Запишем прямую

$$\begin{cases} x + y - 3z = -9 \\ 3x + y - z = 11 \end{cases}$$

В параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 10 - t \\ y = -19 + 4t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Пусть $M(2, 3, 1)$. Найдём t при котором $MP \perp a$, где P - точка на прямой, а a - направляющий вектор:

$$MP = P - M = \begin{pmatrix} 8 - t \\ -22 + 4t \\ t - 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 10 - t \\ -19 + 4t \\ t \end{pmatrix}, \quad (a, MP) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{97}{18}$$

Значит:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{83}{18} \\ \frac{23}{9} \\ \frac{97}{18} \end{pmatrix}, \quad MP = \begin{pmatrix} \frac{47}{18} \\ \frac{-4}{9} \\ \frac{79}{18} \end{pmatrix}$$

Значит точка M' симметричная M относительно прямой имеет координаты:

$$P + MP = \begin{pmatrix} \frac{65}{9} \\ \frac{19}{9} \\ \frac{88}{9} \end{pmatrix}$$

Ответ: $\left(\frac{65}{9}, \frac{19}{9}, \frac{88}{9}\right)^T$

№3 Найдём направляющий вектор прямой l_1 :

$$a_1 = [(1, 3, 2), (0, 1, 1)] = (1, -1, 1)$$

Найдём направляющий вектор прямой l_2 :

$$a_2 = [(3, 0, 1), (1, -1, 0)] = (1, 1, -3)$$

Точка на l_2 имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$PM = M - P = \begin{pmatrix} t \\ t + 2 \\ 1 - 3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 3 \\ t - 1 \\ -1 - 3t \end{pmatrix}$$

PM - направляющий вектор прямой l . Он должен быть перпендикулярен a_1 , то есть:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t - 3 \\ t - 1 \\ -1 - 3t \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PM = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \text{направляющий вектор } l$$

Тогда прямая l в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 3 + t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

Возьмём точку $Q(3, 0, 4)$ на l_1 . Вектор PQ :

$$PQ = (0, -3, 2).$$

Тогда расстояние между прямыми:

$$\rho(l, l_1) = \frac{|([a, a_1], PQ)|}{|[\vec{a}, \vec{a}_1]|}$$

Векторное произведение направляющих векторов:

$$[\vec{a}, \vec{a}_1] = (0, -3, -3).$$

Смешанное произведение:

$$([\vec{a}, \vec{a}_1], PQ) = ((0, -3, -3), (0, -3, 2)) = 3$$

Расстояние между прямыми:

$$\rho = \frac{|3|}{|[\vec{a}, \vec{a}_1]|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

№4 4.1) Найдём точку M

$$M = \frac{1}{2}(D + C) = (-8, 4, 1)$$

Значит:

$$AM = M - A = (-10, 7, -2)$$

Найдём HB :

$$AB = B - A = (20 - 2, -15 + 3, 9 - 3) = (18, -12, 6)$$

$$AC = C - A = (2 - 2, -2 + 3, -6 - 3) = (0, 1, -9)$$

$$HB = \text{ort}_{AC}(AB) = \left(18, -\frac{459}{41}, -\frac{51}{41}\right)$$

Теперь найдём угол:

$$\cos \angle(HB, AM) = \frac{(HB, AM)}{|HB||AM|} = \frac{10491}{\sqrt{757926} \cdot \sqrt{153}}$$

4.2) Найдём

$$\rho = \frac{|(HB, AM, AH)|}{|[AM, HB]|}$$

Где:

$$\overrightarrow{HB} = \left(18, -\frac{459}{41}, -\frac{51}{41}\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = (-10, 7, -2)$$

$$\overrightarrow{AH} = \vec{H} - \vec{A} = \left(0, \frac{81}{41}, \frac{297}{41}\right)$$

Найдём смешанное и векторное произведение:

$$(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AH}) = \frac{252234}{1681}$$

$$|[\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AM}]| = \frac{3\sqrt{757926}}{41}$$

Получаем:

$$\rho = \frac{2058}{\sqrt{757926}} = \frac{2058}{\sqrt{41^2 \cdot 451}} = \frac{2058}{41\sqrt{451}} = \frac{2058}{41\sqrt{451}}$$

Ответ: $\frac{2058}{41\sqrt{451}}$