

ИДЗ №8 (вариант 12) (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Мы знаем, что:

$$v = \frac{1}{10}(3, 9, 3, 1)$$

Пусть:

$$v' = (3, 9, 3, 1)$$

Для начала найдём какие-нибудь ЛНЗ решения уравнения:

$$3a_1 + 9a_2 + 3a_3 + a_4 = 0 \implies \begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 0, -3)^T & u_2 &= (0, 1, 0, -9)^T \\ u_3 &= (0, 0, 1, -3)^T \end{aligned}$$

Следовательно:

$$v', u_1, u_2, u_3 — \text{базис } \mathbb{R}^4$$

Теперь применим метод ортогонализации Грамма-Шмидта. Векторы u_1, u_2, u_3 уже перпендикулярны v' . Найдём векторы u'_1, u'_2, u'_3 , такие, что векторы:

$$u'_1, u'_2, u'_3$$

Перпендикулярны между собой (v' будет им перпендикулярен).

$$u'_1 = u_1 = (1, 0, 0, -3)^T$$

$$u'_2 = u_2 - \text{pr}_{u'_1}(u_2) = \left(-\frac{27}{10}, 1, 0, -\frac{9}{10}\right)^T$$

$$u'_3 = u_3 - \text{pr}_{\langle u'_1, u'_2 \rangle}(u_3) = \left(-\frac{9}{91}, -\frac{27}{91}, 1, -\frac{3}{91}\right)^T$$

Теперь отнормируем векторы:

$$v', u'_1, u'_2, u'_3$$

Получаем:

$$v = \frac{1}{10}(3, 9, 3, 1)$$

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^T$$

$$e_2 = \left(\frac{-27}{\sqrt{910}}, \sqrt{\frac{10}{91}}, 0, \frac{-9}{\sqrt{910}} \right)^T$$

$$e_3 = \left(\frac{-9}{10\sqrt{91}}, \frac{-27}{10\sqrt{91}}, \frac{\sqrt{91}}{10}, \frac{-3}{10\sqrt{91}} \right)^T$$

Получаем ортонормированный базис \mathbb{R}^4

Ответ: (v, e_1, e_2, e_3)

№2 Для начала решим ОСЛУ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & -6 & 9 & 0 \\ -5 & -2 & -15 & -6 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{УСВ: } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Следовательно, ФСР:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 \\ -3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Значит:

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle, \quad \text{где} \quad u_1 = (-3, 0, 1, 0)^T, \quad u_2 = (0, -3, 0, 1)^T$$

Найдём проекцию v на U :

$$\text{pr}_U$$