Домашнее задание на 09.12 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Для нахождения фундаментальной системы решений (ФСР) данной однородной системы линейных уравнений, начнем с записи системы в матричном виде:

$$Ax = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Теперь мы можем привести матрицу A к улучшенному ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = 3x_4 + 2x_2 \\ x_3 = 5x_4 \end{cases} \implies$$

$$\implies x = \begin{pmatrix} 3x_4 + 2x_2 \\ x_2 \\ 5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

При этом:

$$x = \begin{pmatrix} 3x_4 + 2x_2 \\ x_2 \\ 5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 \text{ - ФСР}$$

Ответ: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

№2 Чтобы найти базис в пространстве $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$, нам нужно определить линейную независимость векторов u_1, u_2, u_3, u_4 и, возможно, отобрать из них базис.

Составим матрицу из векторов

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & 0 \end{pmatrix}$$

После преобразований линейная оболочка векторов не поменялась следовательно:

$$\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = U$$

При этом они находяться в ступенчатом виде, следовательно, они линейно независимы. Поэтому $\{e_1, e_2, e_3\}$ - базис пространства U

Ответ: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

№3 Запишем векторы в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь применим элементарные преобразования строк для приведения матрицы к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь мы видим, что векторы u_1 и u_2 являются линейно независимыми, а векторы u_3, u_4, u_5 можно выразить через них.

Выразим u_3:

$$u_3 = u_1 - u_2$$

Выразим u_4:

$$u_4 = 3u_2$$

Выразим u_5:

$$u_5 = 3u_1 + 2u_2$$

Ответ: u_1, u_2 - базис. $\begin{cases} u_3 = u_1 - u_2 \\ u_4 = 3u_2 \\ u_5 = 3u_1 + 2u_2 \end{cases}$

№4 Запишем векторы в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 8 & -7 & -4 \\ 12 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Приведём её к ступенчатому виду, преобразованиями строк:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 8 & -7 & -4 \\ 12 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -15 & -20 \\ 0 & -12 & -16 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, v_1, v_2, v_3 - линейно независимы. Теперь дополним их до базиса $\mathbb{R}^4$. Опять запишем её в матричном виде и приведём к ступенчатому виду преобразованиями столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 8 & -7 & -4 \\ 12 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & -15 & -20 \\ 12 & -12 & -16 \\ 7 & -6 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 12 & -4 & 0 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, векторы v_1, v_2, v_3 нужно дополнить до базиса вектором:

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: v_1, v_2, v_3, e_3