Домашнее задание на 29.05 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 1) Проверим, что U и V ортогональны

- Матрица U:
$$U = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$
Убедимся, что $U^T U = E$:
$$U^T U = \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 & \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Матрица V:
$$V^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
Убедимся, что $V^T V = E$:
$$V^T V = \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = E$$

2) Проверим матрицу Σ:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы $9\sqrt{5}$ и $3\sqrt{5}$ упорядочены по убыванию.

3) Представление $A = u_1\sigma_1 v_1^T + u_2\sigma_2 v_2^T$:

- Вычислим $u_1\sigma_1 v_1^T$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = 9\sqrt{5}, \quad v_1^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$u_1\sigma_1 v_1^T = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

- Вычислим $u_2\sigma_2 v_2^T$:

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = 3\sqrt{5}, \quad v_2^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$u_2\sigma_2 v_2^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- Сумма:

$$u_1\sigma_1 v_1^T + u_2\sigma_2 v_2^T = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix} = A$$

4) Найдём B ранга 1:

$$B = u_1\sigma_1 v_1^T = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Норма Фробениуса разности:

$$\|A - B\| = \sqrt{(3\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{5}$$

№2 Полное сингулярное разложение матрицы A:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

Матрица A имеет размер 2×3, поэтому $\min(m, n) = 2$. Размеры усечённых матриц:

- U': 2×2 (первые 2 столбца U),
- Σ': 2×2 (первые 2 сингулярных значения),
- V': 2×3 (первые 2 строки V^T).

Сформируем:

- $U' = U$:
$$U' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$
- Σ':
$$\Sigma' = \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$
- $(V')^T$:
$$(V')^T = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Проверим: Вычислим произведение $U'\Sigma'(V')^T$:

- $U'\Sigma'$:
$$U'\Sigma' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \cdot 9\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \cdot 9\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

- Умножение на $(V')^T$:

$$\begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix} = A$$

Ответ:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{U'} \underbrace{\begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{\Sigma'} \underbrace{\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_{(V')^T}$$

№3 Ненулевая матрица-строка имеет ранг 1. Её единственное сингулярное значение:

$$\sigma = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

Матрица U' размера 1×1:

$$U' = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Нормированный вектор направления $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{a}^T}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Матрица $(V')^T$ размера $1 \times n$:

$$(V')^T = \mathbf{v}_1^T = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

Усечённое SVD:

$$\mathbf{a} = U'\Sigma'(V')^T,$$

Ответ: Усечённое сингулярное разложение:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}}_{U'}\underbrace{\begin{pmatrix}\sigma\end{pmatrix}}_{\Sigma'}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix}\end{pmatrix}}_{(V')^T}$$

№4 Найдём усечённые и полные сингулярные разложения

4.1. Матрица:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

Вычисляем A^TA:

$$A^TA = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17 & 8\\ 8 & 17\end{pmatrix}$$

Находим собственные значения A^TA:

$$\det(A^TA - \lambda I) = (17-\lambda)^2 - 64 = 0 \implies \lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 9.$$

Сингулярные значения:

$$\sigma_1 = \sqrt{25} = 5, \quad \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$$

Правые сингулярные векторы V:

- Для $\lambda_1 = 25$:

$$(A^TA - 25I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-8 & 8\\ 8 & -8\end{pmatrix}\mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

- Для $\lambda_2 = 9$:

$$(A^TA - 9I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix}8 & 8\\ 8 & 8\end{pmatrix}\mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

- Третий вектор $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ортогонален первым двум).

Матрица V:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Левые сингулярные векторы U:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Матрица U:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Полное SVD:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Усечённое сингулярное разложение:

$$A = U'\Sigma'(V')^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

4.2. Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычисляем A^TA:

$$A^TA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\det(A^TA - \lambda I) = \lambda^2 - 25\lambda = 0 \implies \lambda_1 = 25,\, \lambda_2 = 0$$

Сингулярные значения:

$$\sigma_1 = 5, \quad \sigma_2 = 0$$

Правые сингулярные векторы V:

- Для $\lambda_1 = 25$:

$$(A^TA - 25I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Для $\lambda_2 = 0$:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Левые сингулярные векторы U:

- Для $\sigma_1 = 5$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Остальные векторы $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ выбираются ортогональными к $\mathbf{u}_1$

Полное SVD:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V^T = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^T$$

Усечённое SVD:

$$A = U'\Sigma'(V')^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

№5 Найдём усечённые SVD и матрицы ранга 1:

5.1 Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычисляем $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Собственные значения $A^T A$:

$$\det(A^T A - \lambda I) = -\lambda^3 + 50\lambda^2 - 600\lambda = 0 \implies \lambda_1 = 30,\ \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 = 0$$

Сингулярные значения:

$$\sigma_1 = \sqrt{30}, \quad \sigma_2 = \sqrt{10}$$

Правые сингулярные векторы V:

- Для $\lambda_1 = 30$:

$$(A^T A - 30I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -20 & 10 & 10 \\ 10 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Для $\lambda_2 = 10$:

$$(A^T A - 10I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Левые сингулярные векторы U:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Матрица U':

$$U' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Усечённое SVD:

$$A = U'\Sigma'(V')^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица B ранга 1:

$$B = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T = \sqrt{30} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Норма Фробениуса:

$$\|A - B\| = \sqrt{\sigma_2^2} = \sqrt{10}$$

5.2 Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Собственные значения $A^T A$:

$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 0$$

Сингулярные значения:

$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 1$$

Правые сингулярные векторы V:

- Для $\lambda_1 = 4$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Для $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 1$: векторы ортогональны $\mathbf{v}_1$.

Левые сингулярные векторы U:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2} A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{1} A\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{1} A\mathbf{v}_3$$

Усечённое SVD:

$$A = U'\Sigma'(V')^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Матрица B ранга 1:

$$B = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Норма Фробениуса:

$$\|A - B\| = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

№6 Найдём матрицу A ранга 2, для которой ближайшей матрицей ранга 1 по норме Фробениуса является:

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

SVD матрицы B:

$$B = \sigma_1 u_1 v_1^T,$$

где:

$$\sigma_1 = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Чтобы A имела ранг 2, добавим к B слагаемое ранга 1, ортогональное B:

$$A = B + \sigma_2 u_2 v_2^T$$

где:

$$\sigma_2 = 1, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Вычислим A:

$$A = B + \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 + \frac{1}{\sqrt{10}} & 3 - \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 2 & -1 + \frac{3}{\sqrt{10}} & -1 - \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Ранг A равен 2 (два линейно независимых столбца) и норма Фробениуса разности:

$$\|A - B\| = \sqrt{\sigma_2^2} = 1,$$

что соответствует минимальному значению для приближения ранга 1.