Домашнее задание на 06.02 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Найдём предел вдоль прямой $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} t \quad | \; t \in \mathbb{R}, \; (a, b) \neq 0 \right\}$:

$$\lim_{t \to 0} \left\{ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} t \right) = f\left(\begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix} \right) = \frac{bt - 2a^2t^2}{bt - a^2t^2} \right\}$$

Если $b = 0$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{bt - 2a^2t^2}{bt - a^2t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{-2a^2t^2}{-a^2t^2} = 2$$

Если $b \neq 0$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{bt - 2a^2t^2}{bt - a^2t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{b - 2a^2t}{b - a^2t} = 1$$

При этом, если $bt = a^2t^2$, то функция не определна, то есть при:

$$bt = a^2t^2 \Leftrightarrow b = a^2t \Leftrightarrow \frac{b}{a^2} = t$$

Ответ:при $b = 0$: 2, при $b \neq 0$: 1

№2 (a) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} x^2 \ln(x^2 + y^2)$

Перейдем к полярным координатам, где $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$

$$\lim_{r \to 0} (r\cos\varphi)^2 \ln(r^2) = \lim_{r \to 0} r^2 \cos^2\varphi \ln(r^2) = \lim_{r \to 0} \frac{\cos^2\varphi \ln(r^2)}{\frac{1}{r^2}} = \lim_{r \to 0} \frac{\cos^2\varphi \ln(r^2)}{\frac{1}{r^2}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{\frac{2\cos^2(\varphi)}{r}}{-\frac{2}{r^3}} = \lim_{r \to 0} -r^2\cos^2(\varphi) = 0$$

Ответ: 0

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Рассмотрим предел вдоль прямой

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ ak \end{pmatrix} t$$

Получаем:

$$\lim_{t\to 0} \frac{a^2t^2 + akt}{\sqrt{a^2t^2 + a^2k^2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{at + k}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

Следовательно, предел зависит от коэффицента наклона, а значит пределы вдоль разных прямых разные, поэтому предела не существует.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

Перейдём к полярным координатам:

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}{(r\cos\varphi)^4 + (r\sin\varphi)^4} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{r^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)} =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)} = 0$$

Ответ: 0

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\lambda)} \frac{\sin(xy)}{x}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,\lambda)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,\lambda)} \frac{\sin(xy)}{xy} y = \lim_{(x,y)\to(0,\lambda)} y = \lambda$$

Ответ: λ

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,\lambda)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,\lambda)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{(x,y)\to(+\infty,\lambda)} e^{\frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Найдём:

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,\lambda)} \frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$f(z) = \ln(1+z), \quad z = \frac{1}{x}.$$

$$\ln(1+z) = z + \overline{o}(z) \text{ при } z \to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,\lambda)} \frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{(x,y)\to(+\infty,\lambda)} \frac{x^2}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\overline{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(+\infty,\lambda)} \left(\frac{x}{x+y}+\overline{o}\left(\frac{x}{x+y}\right)\right) = 1$$

Ответ: 1

№3 (a)

$$f(x,y) = \begin{cases} y + x\sin\frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(y + x\sin\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y) = \lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\left(y + x\sin\frac{1}{y}\right) = \text{не существует}$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y) = \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\left(y + x\sin\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to0} y = 0$$

(b)

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{y}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{y}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{y}=\text{не существует}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{y}=\text{не существует}$$

(c)

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\frac{1}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^2\cos\varphi sin\varphi}{r^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\varphi sin\varphi=\text{не существует}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0} 0=0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\frac{1}{x}=\text{не существует}$$

(d)

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=0, y=0.\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}=$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \text{ не существует}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$