# Домашнее задание на 15.12 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

**1.** Для нахождения производной $y'$ в точке $x = 0$ для неявно заданной функции $y = y(x)$, мы воспользуемся методом неявного дифференцирования.

$$x^2 + y^2 - 6x + 5y - 14 = 0.$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(6x) + \frac{d}{dx}(5y) - \frac{d}{dx}(14) = 0.$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 6 + 5\frac{dy}{dx} = 0.$$

Перепишем уравнение, выделив $\frac{dy}{dx}$:

$$2y\frac{dy}{dx} + 5\frac{dy}{dx} = 6 - 2x.$$

$$(2y + 5)\frac{dy}{dx} = 6 - 2x.$$

Выразим $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6 - 2x}{2y + 5}.$$

Теперь подставим $x = 0$ в уравнение, чтобы найти $y$:

$$0^2 + y^2 - 6 \cdot 0 + 5y - 14 = 0 \implies y^2 + 5y - 14 = 0.$$

Решим квадратное уравнение:

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 14}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2}.$$

$$y_1 = \frac{4}{2} = 2, \quad y_2 = \frac{-14}{2} = -7.$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{6-2\cdot 0}{2\cdot 2+5} = \frac{6}{4+5} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

**Ответ:** $\frac{2}{3}$

2. Для нахождения производной функции $y$ по $x$ для параметрически заданных функций $x(t)$ и $y(t)$, мы используем формулу:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Найдем производные $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$.
Для $x(t) = e^{-t}$:

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}.$$

Для $y(t) = t^3$:

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2.$$

Теперь подставим найденные производные в формулу для $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{-e^{-t}} = -\frac{3t^2}{e^{-t}}.$$

Упростим выражение:

$$\frac{dy}{dx} = -3t^2e^t.$$

**Ответ:** $-3t^2e^t$.

3. Для нахождения производной функции, обратной к $y(x) = e^x + x$ в точке $y_0 = 1$, мы воспользуемся формулой для производной обратной функции:

$$\frac{dy^{-1}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\bigg|_{x=x_0},$$

где $x_0$ — это значение $x$, соответствующее $y_0$. Найдем $x_0$ такое, что $y(x_0) = 1$:

$$e^{x_0} + x_0 = 1.$$

$$e^0 + 0 = 1 + 0 = 1.$$

Таким образом, $x_0 = 0$, так как $e^x + x$ строго монотонна.
Теперь найдем производную $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x + x) = e^x + 1.$$

Подставим $x_0 = 0$ в производную:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Теперь найдем производную обратной функции:

$$\frac{dy^{-1}}{dy} = \left.\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

**Ответ:** $\frac{1}{2}$

**4.** Для нахождения производной $y'(x)$ функции, заданной в полярной системе координат $r(\varphi) = e^\varphi$, сначала преобразуем полярные координаты в декартовы. В декартовых координатах $x$ и $y$ выражаются как:

$$x = r(\varphi)\cos(\varphi), \quad y = r(\varphi)\sin(\varphi).$$

Подставим $r(\varphi)$:

$$x = e^\varphi \cos(\varphi), \quad y = e^\varphi \sin(\varphi).$$

Теперь найдем производные $\frac{dx}{d\varphi}$ и $\frac{dy}{d\varphi}$:
Для $x$:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(e^\varphi \cos(\varphi)) = e^\varphi \cos(\varphi) - e^\varphi \sin(\varphi) = e^\varphi(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)).$$

Для $y$:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(e^{\varphi}\sin(\varphi)) = e^{\varphi}\sin(\varphi) + e^{\varphi}\cos(\varphi) = e^{\varphi}(\sin(\varphi)+\cos(\varphi)).$$

Теперь найдем производную $\frac{dy}{dx}$ с использованием формулы:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}.$$

Подставим найденные производные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\varphi}(\sin(\varphi)+\cos(\varphi))}{e^{\varphi}(\cos(\varphi)-\sin(\varphi))} = \frac{\sin(\varphi)+\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)-\sin(\varphi)}.$$

Теперь найдем значение $\varphi$, при котором $x = 1$:

$$1 = e^{\varphi}\cos(\varphi).$$

Подставим $\varphi = 0$:

$$1 = e^{0}\cos(0) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Таким образом, $\varphi = 0$.

Теперь подставим $\varphi = 0$ в выражение для $\frac{dy}{dx}$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\varphi=0} = \frac{\sin(0)+\cos(0)}{\cos(0)-\sin(0)} = \frac{0+1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

**Ответ:** 1

**5.** (a) Вычислим предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - \sqrt[3]{1+3x^2}}{\sin^4 x},$$

Разложим функцию $e^{x^2}$ в ряд Маклорена:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \bar{o}(x^4).$$

Разложим $\sqrt[3]{1+3x^2}$

Используем формулу для разложения $(1+u)^\alpha$ при $u \to 0$:

$$\sqrt[3]{1+3x^2} = (1+3x^2)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}(3x^2)-\frac{1}{9}(3x^2)^2+\bar{o}(x^4) = 1+x^2-x^4+\bar{o}(x^4).$$

Теперь найдем разность $e^{x^2} - \sqrt[3]{1+3x^2}$:

$$e^{x^2} - \sqrt[3]{1+3x^2} = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \bar{o}(x^4)\right) - \left(1 + x^2 - x^4 + \bar{o}(x^4)\right).$$

Упрощаем:

$$e^{x^2} - \sqrt[3]{1+3x^2} = \left(x^2 - x^2\right) + \left(\frac{x^4}{2} + x^4\right) + \bar{o}(x^4) - \bar{o}(x^4).$$

$$e^{x^2} - \sqrt[3]{1+3x^2} = \left(\frac{1}{2} + 1\right) x^4 + \bar{o}(x^4) = \frac{3}{2}x^4 + \bar{o}(x^4).$$

Теперь найдем разложение для $\sin^4 x$. Используем разложение для $\sin x$:

$$\sin x = x + \o(x) \implies \sin^4 x = x^4 + \bar{o}(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt[3]{1+3x^2}}{\sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^4 + \bar{o}(x^4)}{x^4 + \bar{o}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2} + \bar{o}(1)}{1 + \bar{o}(1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2} + \bar{o}(1)}{1 + \bar{o}(1)} = \frac{3}{2}$$

**Ответ:** $\frac{3}{2}$

(b) Для вычисления предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x^4},$$

Мы разложим функции $\sqrt{\cos x}$ и $\sqrt[4]{e^{-x^2}}$ в ряд Маклорена.

Разложим $\cos x$ в ряд Маклорена:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + o(x^8)$$

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + o(x^8)}.$$

Разложим $e^{-x^2}$ в ряд Маклорена:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{720} - \frac{x^{14}}{5040} + \frac{x^{16}}{40320} + o(x^{16})$$

$$\sqrt[4]{e^{-x^2}} = \sqrt[4]{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{720} - \frac{x^{14}}{5040} + \frac{x^{16}}{40320} + o(x^{16})}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + o(x^8)}}{x^4} \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt[4]{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{720} - \frac{x^{14}}{5040} + \frac{x^{16}}{40320} + o(x^{16})}}{x^4} \right\} =$$

$$= \sqrt{0 - 0 + 0 - 0 + \frac{1}{40320} + 0} - \sqrt[4]{1 - 0 + 0 - 0 + \cdots + 0 - 0 + \frac{1}{40320} + 0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{40320}} - \frac{1}{\sqrt[4]{40320}} = \frac{1 - 40320^2}{\sqrt{40320}}$$

**Ответ:** $\frac{1-40320^2}{\sqrt{40320}}$

(c) Вычислим предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{x^2 \sin x - x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x^2(x - \frac{x^3}{6} + \overline{o}(x^3)) - x^3(1 - \frac{1}{2}x^2 + \overline{o}(x^2))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x^3 - \frac{x^5}{6} + \overline{o}(x^5) - (x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \overline{o}(x^5))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5))}{-\frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{2} + \overline{o}(x^5)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{8x^5}{120} + o(x^5)}{\frac{x^5}{3} + \overline{o}(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{8}{120} + o(1)}{\frac{1}{3} + \overline{o}(1)} = -\frac{8\cdot 3}{120} = -\frac{8}{40} = -\frac{1}{5}$$

**Ответ:** $-\frac{1}{5}$

**6.** (a) Мы имеем:

$$\lambda_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = \sin(\lambda_1) = \sin(1) \approx 0.8415,$$

$$\lambda_3 = \sin(\lambda_2) = \sin(\sin(1)) \approx 0.7456.$$

Заметим, что $\sin(x) < x$ для $x > 0$. Следовательно, для $n \geqslant 2$:

$$\lambda_n = \sin(\lambda_{n-1}) < \lambda_{n-1}.$$

Таким образом, последовательность $\{\lambda_n\}$ является строго убывающей и положительной, что означает, что она стремится к некоторому пределу $\lambda \geqslant 0$.

Кандидаты:

$$\lambda = \sin\lambda \implies \lambda = 0$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса:

$$\lambda_n \to 0$$

(b) Нам нужно найти:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Приведем к общему знаменателю:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$x^2 - \sin^2 x = x^2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = \frac{x^4}{3} - o(x^4).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}-o(x^4)}{x^2\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}}{x^4}=\frac{1}{3}.$$

(c) Вычисление предела $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$, где $a_n=\frac{1}{\lambda_n^2}$. Мы имеем:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\lambda_{n+1}^2}-\frac{1}{\lambda_n^2}=\frac{\lambda_n^2-\lambda_{n+1}^2}{\lambda_{n+1}^2\lambda_n^2}.$$

мы получаем:

$$\lambda_n^2-\lambda_{n+1}^2=(\lambda_n-\lambda_{n+1})(\lambda_n+\lambda_{n+1})\approx\frac{\lambda_n^3}{6}\cdot(2\lambda_n)=\frac{\lambda_n^4}{3}.$$

Таким образом,

$$a_{n+1}-a_n\approx\frac{\frac{\lambda_n^4}{3}}{\lambda_{n+1}^2\lambda_n^2}.$$

Поскольку $\lambda_n\to 0$, $\lambda_{n+1}\to 0$, то $\lambda_{n+1}^2\approx\lambda_n^2$, и мы можем записать:

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)\approx\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\lambda_n^4}{3}}{\lambda_n^4}=\frac{1}{3}.$$

(d) Применение теоремы Штольца

По теореме Штольца:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{1}=\frac{1}{3}.$$

(e) Мы знаем, что:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{3}$$

При этом:

$$a_n=\frac{1}{\lambda_n^2}\implies\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\lambda_n^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\lambda_n^2\to 3\implies\sqrt{n}\lambda_n\to\sqrt{3}$$

**Ответ:** $L=\sqrt{3}$