Домашнее задание на 30.05 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 (a) Выберем:

$$f'(x) = \cos(Tx) \implies f(x) = \frac{\sin(Tx)}{T}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} \implies g'(x) = -\frac{2x}{3(x^2+1)^{4/3}}$$

Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(Tx)}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \frac{\sin(Tx)}{T\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{2}{3T}\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(Tx)}{(x^2+1)^{4/3}}dx$$

Первое слагаемое обращается в ноль, так как:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(Tx)}{\sqrt[3]{x^2+1}} = 0 \quad \text{(числитель ограничен, знаменатель растёт)}$$

Рассмотрим интеграл от модуля:

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{x\sin(Tx)}{(x^2+1)^{4/3}}\right| dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{4/3}}dx$$

Для $x \geqslant 1$:

$$\frac{x}{(x^2+1)^{4/3}} \sim \frac{x}{x^{8/3}} = \frac{1}{x^{5/3}}$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/3}}dx$ сходится, так как $5/3 > 1$.
Поскольку:

$$\frac{x}{(x^2+1)^{4/3}} \leqslant \frac{C}{x^{5/3}} \quad \text{для некоторой константы } C,$$

интеграл $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{(x^2+1)^{4/3}} dx$ сходится абсолютно. Следовательно, исходный интеграл также сходится абсолютно

Ответ: сходится

(b) Рассмотрим интеграл как сумму двух интегралов:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\, dx.$$

Исследуем интеграл на $[1, +\infty)$:

- При $x \to +\infty$:

$$\sqrt{e^x-1} \sim \sqrt{e^x} = e^{x/2} \implies \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \sim e^{-x/2}$$

- Сравним с $g(x) = e^{-x/2}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}}{e^{-x/2}} = 1$$

Так как $\int_1^{+\infty} e^{-x/2} dx$ сходится, по признаку сравнения (Факт 3) интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\, dx$ сходится.

Исследуем интеграл на $(0, 1]$:

- При $x \to 0^+$:

$$e^x - 1 \approx x \implies \sqrt{e^x-1} \approx \sqrt{x} \implies \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \approx \frac{1}{\sqrt{x}}$$

- Сравним с $g(x) = x^{-1/2}$:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}}{x^{-1/2}} = 1$$

Так как $\int_0^1 x^{-1/2} dx$ сходится (степень x в знаменателе: $1/2 < 1$), по признаку сравнения (Факт 3) интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\, dx$ сходится.

Оба интеграла сходятся, следовательно, исходный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ сходится.

Ответ: сходится

(c) При больших x величина $\frac{1}{x}$ мала. Используем приближения:

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \approx \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \cdots$$

Тогда:

$$\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \approx \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{2} + \cdots \approx \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \cdots$$

Главный член разложения: $\frac{1}{x}$.

Выберем $g(x) = \frac{1}{x}$ (n = 1). Находим предел:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1,$$

где $t = \frac{1}{x}$. Поскольку предел конечен и положителен, интегралы $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$ и $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ ведут себя одинаково.

Так как $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ расходится, исходный интеграл $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$ также расходится.

Ответ: расходится

(d) Исследование интеграла на $(0, 1]$:

- При $x \to 0^+$:

$$\ln(1+x) \approx x \implies \frac{\ln(1+x)}{x^a} \approx \frac{x}{x^a} = x^{1-a}$$

- Сравним с $g(x) = x^{1-a}$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)/x^a}{x^{1-a}} = 1$$

Интеграл $\int_0^1 x^{1-a}dx$ сходится при $1 - a > -1 \implies a < 2$.

Исследование интеграла на $[1, +\infty)$:

- При $x \to +\infty$:

$$\ln(1+x) \approx \ln x \implies \frac{\ln(1+x)}{x^a} \approx \frac{\ln x}{x^a}.$$

- Рассмотрим два случая:
  - Случай $a > 1$:
    Выберем $g(x) = \frac{1}{x^{a-\epsilon}}$ ($\epsilon > 0$). Так как $\ln x = o(x^\epsilon)$, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a}dx$ сходится.
  - Случай $a \leqslant 1$:
    Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a}dx$ расходится.

Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^a}dx$ сходится тогда и только тогда, когда:

- На $(0, 1]$: $a < 2$,
- На $[1, +\infty)$: $a > 1$.

Ответ: сходится при $1 < a < 2$

(e) Исследование интеграла на $(0, 1]$:

- При $x \to 0^+$:

$$\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx) \approx (a - b)x$$

Подынтегральная функция:

$$\frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} \approx a - b$$

- При $a \neq b$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} = a - b \neq 0$$

  Сравним с $g(x) = 1$:

$$\int_0^1 \frac{C}{x} dx \quad \text{расходится}$$

Исследование интеграла на $[1, +\infty)$:

При $x \to +\infty$:

Используем тождество:

$$\operatorname{arctg}(ax) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{ax}\right)$$

Разность:

$$\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx) = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{ax}\right)\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{bx}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{bx}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{ax}\right)$$

При $x \to +\infty$:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{ax}\right) \approx \frac{1}{ax}, \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{bx}\right) \approx \frac{1}{bx}$$

Подынтегральная функция:

$$\frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} \approx \frac{1}{x}\left(\frac{1}{bx} - \frac{1}{ax}\right) = \frac{a - b}{abx^2}$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{C}{x^2} dx$ сходится.

Получаем:

- На интервале $(0, 1]$ интеграл расходится при $a \neq b$.
- На интервале $[1, +\infty)$ интеграл сходится.

Ответ: интеграл расходится при $a \neq b$.

(f)
- $a = b$:
  Интеграл сводится к $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2x^a} dx$
  - Сходится при $a > 1$
  - Расходится при $a \leqslant 1$
- $a < b$:
  - Интервал $(0, 1]$: Преобразуем знаменатель:

    $$x^a + x^b = x^a(1 + x^{b-a}) \implies \frac{1}{x^a + x^b} \approx \frac{1}{x^a} \quad \text{при } x \to 0^+$$

    Интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$ сходится при $a < 1$.
  - Интервал $[1, +\infty)$: Преобразуем знаменатель:

    $$x^a + x^b = x^b(1 + x^{a-b}) \implies \frac{1}{x^a + x^b} \approx \frac{1}{x^b} \quad \text{при } x \to +\infty$$

    Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^b} dx$ сходится при $b > 1$.

Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a+x^b} dx$ сходится тогда и только тогда, когда:

- $a < 1$ (для сходимости на $(0, 1]$),
- $b > 1$ (для сходимости на $[1, +\infty)$).

Ответ: Интеграл сходится при $a < 1$ и $b > 1$

(g)
- Случай $a = 0$:

  $$\int_0^1 |\ln x|^0 \, dx = \int_0^1 1 \, dx = 1 \quad \text{(сходится)}$$

- Случай $a > 0$:
  Особенность в точке $x = 0$. Выполним замену $x = e^{-t}$, тогда

$t = -\ln x$, $dx = -e^{-t}dt$:

$$\int_0^1 |\ln x|^a \, dx = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t} \, dt$$

Это функция сходится при $a + 1 > 0 \implies a > -1$.

Значит, интеграл сходится при $a > -1$.

- Случай $a < 0$:

  Особенность в точке $x = 1$. При $x \to 1^-$:

$$|\ln x|^a \approx (1 - x)^a$$

  Сравним с $g(x) = (1 - x)^7$ (по Факту 3):

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{(1 - x)^a}{(1 - x)^7} = \lim_{x \to 1^-} (1 - x)^{a-7}$$

  Интеграл $\int_0^1 (1 - x)^{a-7} dx$ сходится при $a - 7 > -1 \implies a > 6$, что невозможно для $a < 0$.

  Значит, интеграл расходится при $a < 0$.

Ответ: сходится при всех $a > -1$

(h)

- интеграл на $(0, 1]$

  При $x \to 0^+$:

$$\operatorname{arctg} x \approx x \implies \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} x \approx \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}} \cdot x = \cos(3x) \cdot x^{1/2}$$

  Сравним с $g(x) = x^{1/2}$:

$$\int_0^1 x^{1/2} dx \quad \text{сходится}$$

  По признаку сравнения (Факт 3), интеграл на $(0, 1]$ сходится.

- интеграл на $[1, +\infty)$ При $x \to +\infty$:

$$\operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}} \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

  Применяем признак Дирихле (Факт 4):

  - $f(x) = \cos(3x)$ имеет ограниченную первообразную.
  - $g(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}$ монотонно убывает к 0.

  Следовательно, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} x \, dx$ сходится.

Ответ: сходится

№2 (a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x} \, dx$

- Абсолютная сходимость:

  Рассмотрим интеграл от модуля:

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{\ln x} \right| dx \geqslant \int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\ln x} dx.$$

  Так как $|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx - \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{\ln x} dx.$$

  Первый интеграл расходится ($\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$), второй сходится по признаку Дирихле.

  Следовательно, интеграл расходится абсолютно.

- Условная сходимость:

  Применим признак Дирихле:

  - $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную.
  - $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ монотонно стремится к 0 при $x \to +\infty$

  Следовательно, интеграл сходится условно.

Ответ: сходится условно

(b) $\int_0^1 \frac{x^\lambda}{1+x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$ Замена переменной $x = \frac{1}{t}$:

$$\int_0^1 \frac{x^\lambda}{1+x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \int_1^{+\infty} \frac{(1/t)^\lambda}{1+(1/t^2)}\sin t\cdot\frac{1}{t^2}dt$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\lambda}}\cdot\frac{1}{1+t^{-2}}dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\lambda}(1+t^{-2})}dt$$

Упрощаем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\lambda}}dt$$

Рассмотрим интеграл от модуля:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{2-\lambda}}dt \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2-\lambda}}dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2-\lambda}}dt - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t^{2-\lambda}}dt$$

Первый интеграл сходится при $2-\lambda > 1 \implies \lambda < 1$, второй сходится всегда.

Следовательно, абсолютная сходимость при $\lambda < 1$.

Применим признак Дирихле:

- $f(t) = \sin t$ имеет ограниченную первообразную.
- $g(t) = \frac{1}{t^{2-\lambda}}$ монотонно стремится к 0 при $t \to +\infty$ (если $2-\lambda > 0 \implies \lambda < 2$).

Следовательно, интеграл сходится условно при $1 \leqslant \lambda < 2$.

Ответ: абсолютная сходимость при $\lambda < 1$, условно при $1 \leqslant \lambda < 2$