Домашнее задание на 24.02 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 (a) Для функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, заданной как $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 - 7y^3 \\ xy^2 - 2x \\ x + y \end{bmatrix}$

в точке $\bar{a} = (-1, 3)$:

Матрица Якоби:

$$J_{f,\bar{a}} = \begin{bmatrix} -2 & -189 \\ 7 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Дифференциал:

$$L_{f,\bar{a}}[\bar{h}] = \begin{bmatrix} -2h_1 - 189h_2 \\ 7h_1 - 6h_2 \\ h_1 + h_2 \end{bmatrix}$$

(b) Для функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, заданной как $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin(xy^2) + z \\ e^{2y+z} - 7x \end{bmatrix}$

в точке $\bar{a} = (1, 2, -1)$:

Матрица Якоби:

$$J_{f,\bar{a}} = \begin{bmatrix} 4\cos(4) & 4\cos(4) & 1 \\ -7 & 2e^3 & e^3 \end{bmatrix}$$

Дифференциал:

$$L_{f,\bar{a}}[\bar{h}] = \begin{bmatrix} 4\cos(4)h_1 + 4\cos(4)h_2 + h_3 \\ -7h_1 + 2e^3h_2 + e^3h_3 \end{bmatrix}$$

(c) Для функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданной как $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2+y^2+1}$ в точке $\bar{a} = (1, -1, 2)$:

Матрица Якоби:

$$J_{f,\bar{a}} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Дифференциал:

$$L_{f,\bar{a}}[\bar{h}] = -\frac{4}{9}h_1 + \frac{4}{9}h_2 + \frac{1}{3}h_3$$

(d) Для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, заданной как $f(x) = \begin{bmatrix} x^3 \\ 2^x \\ \cos x \end{bmatrix}$ в точке $\bar{a} = \frac{\pi}{6}$:

Матрица Якоби:

$$J_{f,\bar{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{12} \\ 2^{\pi/6}\ln 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Дифференциал:

$$L_{f,\bar{a}}[h] = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{12}h \\ 2^{\pi/6}\ln 2 \cdot h \\ -\frac{1}{2}h \end{bmatrix}$$

(e) Для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданной как $f(x) = \arctan(x^2)$ в точке $\bar{a} = -1$:

Матрица Якоби:

$$J_{f,\bar{a}} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

Дифференциал:

$$L_{f,\bar{a}}[h] = -h$$

№2 Для проверки справедливости формулы (3) вычислим матрицы Якоби отображений f и g, их произведение и сравним с матрицей Якоби композиции $g \circ f$.

Матрица Якоби $J_{f,\bar{a}}$:

$$J_{f,\bar{a}} = \begin{bmatrix} 3 & 2b & 0 \\ 2a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица Якоби $J_{g,f(\bar{a})}$:

$$J_{g,f(\bar{a})} = \begin{bmatrix} a^2 + c & 3a + b^2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2(a^2 + c) \end{bmatrix}$$

Произведение матриц $J_{g,f(\bar{a})} \cdot J_{f,\bar{a}}$:

$$\begin{bmatrix} 3(a^2 + c) + 2a(3a + b^2) & 2b(a^2 + c) & 3a + b^2 \\ -6 + 2a & -4b & 1 \\ 3 + 4a(a^2 + c) & 2b & 2(a^2 + c) \end{bmatrix}$$

Матрица Якоби композиции $J_{g\circ f,\bar{a}}$:

$$J_{g\circ f,\bar{a}} = \begin{bmatrix} 9a^2 + 2ab^2 + 3c & 2b(a^2 + c) & 3a + b^2 \\ -6 + 2a & -4b & 1 \\ 3 + 4a(a^2 + c) & 2b & 2(a^2 + c) \end{bmatrix}$$

Матрицы $J_{g,f(\bar{a})} \cdot J_{f,\bar{a}}$ и $J_{g\circ f,\bar{a}}$ совпадают. Следовательно, формула (3) справедлива.

№3 Проверим равенство $J_{fg,\bar{a}} = J_{f,\bar{a}} \cdot g(\bar{a}) + f(\bar{a}) \cdot J_{g,\bar{a}}$

Вычислим функции и их матрицы Якоби:

$f(x, y) = e^{xy} + 3y$:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + 3$$
Матрица Якоби:
$$J_f = \begin{bmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} + 3 \end{bmatrix}$$

$g(x, y) = x^2 - xy$:
$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - y$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = -x$$
Матрица Якоби:
$$J_g = \begin{bmatrix} 2x - y & -x \end{bmatrix}$$

Найдем $f \cdot g$ и его матрицу Якоби:

$$h(x, y) = f \cdot g = (e^{xy} + 3y)(x^2 - xy)$$

Производные:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = ye^{xy}(x^2 - xy) + (e^{xy} + 3y)(2x - y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = (xe^{xy} + 3)(x^2 - xy) + (e^{xy} + 3y)(-x)$$
Матрица якоби:

$$J_g = \begin{bmatrix} ye^{xy}(x^2 - xy) + (e^{xy} + 3y)(2x - y) & (xe^{xy} + 3)(x^2 - xy) + (e^{xy} + 3y)(-x) \end{bmatrix}$$

Вычислим правую часть равенства:

$$J_f \cdot g(\bar{a}) = \begin{bmatrix} be^{ab}(a^2 - ab) & (ae^{ab} + 3)(a^2 - ab) \end{bmatrix}$$

$$f(\bar{a}) \cdot J_g = (e^{ab} + 3b) \begin{bmatrix} 2a - b & -a \end{bmatrix}$$

Сумма:

По x:

$$be^{ab}(a^2 - ab) + (e^{ab} + 3b)(2a - b)$$

По y:

$$(ae^{ab} + 3)(a^2 - ab) + (e^{ab} + 3b)(-a)$$

Подставляя $x = a$, $y = b$ в $\frac{\partial h}{\partial x}$ и $\frac{\partial h}{\partial y}$, получаем выражения, совпадающие с компонентами суммы $J_f \cdot g(\bar{a}) + f(\bar{a}) \cdot J_g$.

Следовательно, равенство

$$J_{fg,\bar{a}} = J_{f,\bar{a}} \cdot g(\bar{a}) + f(\bar{a}) \cdot J_{g,\bar{a}}$$

справедливо

№4 (a) Частные производные функции $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Вычисление по определению:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Ответ: 0 и 0

(b) Для исследования дифференцируемости функции

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$$

в точке $(0, 0)$ используем определение дифференцируемости. Предположим, что функция дифференцируема, тогда её приращение должно иметь вид:

$$f(h_1, h_2) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot h_2 + \alpha \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2},$$

где $\alpha \to 0$ при $(h_1, h_2) \to (0,0)$. Из пункта (а) частные производные в $(0,0)$ равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Подставляя $f(0,0) = 0$, получаем:

$$\sqrt[3]{h_1 h_2} = \alpha \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$$

Выразим α:

$$\alpha = \frac{\sqrt[3]{h_1 h_2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Исследуем предел α при $(h_1, h_2) \to (0,0)$. Рассмотрим путь $h_2 = kh_1$, где k — константа:

$$\alpha = \frac{\sqrt[3]{k} \cdot h_1^{2/3}}{h_1 \sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt[3]{k}}{h_1^{1/3} \sqrt{1 + k^2}}.$$

При $h_1 \to 0$ знаменатель стремится к нулю, а числитель остаётся конечным, поэтому $\alpha \to \infty$. Это означает, что α не стремится к нулю, и условие дифференцируемости не выполняется.