Домашнее задание на 22.10 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k \arctan k}{\sqrt[3]{k^3+1}}$

$$\frac{2+(-1)^k \arctan k}{\sqrt[3]{k^3+1}} \geqslant \frac{2-(-1)^k \frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{k^3+k^3}} = \frac{2-(-1)^k \frac{\pi}{2}}{k\sqrt[3]{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2-\frac{\pi}{2}}{k\sqrt[3]{2}} = \frac{2-\frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{k}$$

$$C = \frac{2-\frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{2}} > 0$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{C}{k} = C \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - расходится (гармонический ряд), то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k \arctan k}{\sqrt[3]{k^3+1}}$ тоже расходится по признаку сравнения, так как

$$\frac{2+(-1)^k \arctan k}{\sqrt[3]{k^3+1}} \geqslant \frac{C}{k}$$

Ответ: расходится

(b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$

$$\ln k^{\ln k} = e^{\ln\left((\ln k)^{\ln k}\right)} = e^{\ln k \ln(\ln k)} = k^{\ln(\ln k)}$$

Узнаем когда $k^2 < k^{\ln(\ln k)}$:

$$2 < \ln(\ln k) \Rightarrow e^2 < \ln k \Rightarrow e^{e^2} < k \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $k \to \infty$: $k^2 < k^{\ln(\ln k)}$, следовательно:

$$\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} = \frac{1}{k^{\ln(\ln k)}} < \frac{1}{k^2} \text{ при } k > e^{e^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по признаку сравнения т.к. ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, то и $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$ тоже сходится

Ответ: сходится

(c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{2^k \ln 2^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2} \text{ - расходится}$$

Так как $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2}$ - расходится (гармонический ряд), $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ - не возрастает, и $\frac{1}{k \ln k} > 0$, то по признаку Лобачевского-Коши ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ тоже расходится

Ответ: расходится

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt[k]{k}} \sin \frac{1}{3^k}$

$$\frac{1}{3^k} \to 0 \text{ при } k \to +\infty \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{2^k}{\sqrt[k]{k}} \sin \frac{1}{3^k} = \lim_{k \to \infty} \frac{2^k}{\sqrt[k]{k}} \cdot \frac{1}{3^k} \text{ т.к. } \sin \frac{1}{3^k} \sim \frac{1}{3^k}$$

Пусть $a_k = \frac{2^k}{3^k \sqrt[k]{k}}$, а $b_k = \frac{2^k}{\sqrt[k]{k}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{3^k} \Rightarrow 0 < \frac{1}{3^k} \leqslant \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ эквивалентны по сходимости по факту 2.

Следовательно, так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt[k]{k}}$ - расходится ($2^k \to \infty$, $\sqrt[k]{k} \to 1$), то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k \sqrt[k]{k}}$ тоже расходится, следовательно, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt[k]{k}} \sin \frac{1}{3^k}$ - расходится.

Ответ: расходится

(e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

Пусть $a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}$, тогда рассмотрим:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)!)^2(2k)!}{(k!)^2(2k+2)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{4k+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{4+\frac{2}{k}} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по факту 4 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ сходится

Ответ: сходится

(f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^a b^k,\ a, b \in \mathbb{R},\ b > 0$

Пусть $c_k = k^a b^k$, рассмотрим при $b \neq 1$:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^a b^k} = \lim_{k\to\infty} b \cdot \sqrt[k]{k^a} = b$$

Следовательно, по факту 3 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^a b^k$ сходится при $b < 1$ и расходится при $b > 1$.

При $b = 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a b^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-a}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд сходится при $-a > 1 \Rightarrow a < -1$ и расходится при $-a \leqslant 1 \Rightarrow a \geqslant -1$

Ответ: $\begin{cases} \text{при } b < 1, a \in R \text{ - сходится} \\ \text{при } b > 1, a \in R \text{ - расходится} \\ \text{при } b = 1, a < -1 \text{ - сходится} \\ \text{при } b = 1, a \geqslant -1 \text{ - сходится} \end{cases}$

(g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{42}(\sqrt{2}+(-1)^k)^k}{3^k}$

Пусть $a_k = \frac{k^{42}(\sqrt{2}+(-1)^k)^k}{3^k}$, рассмотрим:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^{42}(\sqrt{2}+(-1)^k)^k}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2}+(-1)^k}{3} \sqrt[k]{k^{42}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{\sqrt{2}+1}{3} \sqrt[k]{k^{42}} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1 \\ \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{\sqrt{2}-1}{3} \sqrt[k]{k^{42}} = \frac{\sqrt{2}-1}{3} < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по факту 3 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{42}(\sqrt{2}+(-1)^k)^k}{3^k}$ сходится

Ответ: сходится

(h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+k)}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

Пусть $b_k = \frac{k!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+k)}$, рассмотрим:

$$B = \lim_{k\to\infty} \ln k(k(\frac{b_k}{b_{k+1}} - 1) - 1) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \ln k(k(\frac{k!(a+1)(a+2)\ldots(a+k+1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+k)(k+1)!} - 1) - 1) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \ln k(k(\frac{a+k+1}{k+1} - 1) - 1) = \lim_{k\to\infty} \ln k(\frac{ak}{k+1} - 1) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \ln k(\frac{ak-k-1}{k+1}) = \lim_{k\to\infty} \frac{(ak-k-1)\ln k}{k+1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(a-1-\frac{1}{k})\ln k}{1+\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} (a-1)\ln k$$

Получилось, что при $a = 1 : B = 0$, а при $a \neq 1 : B = +\infty$, следовательно, по факту 5, ряд сходится при $a \neq 1$ и расходится при $a = 1$.

Ответ: $\begin{cases} a = 1: \text{ расходится} \\ a \neq 1: \text{ сходится} \end{cases}$

2. Пусть $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$, тогда $b_k = \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$, рассмотрим:

$$\frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{\sqrt[3]{k+1}}{\sqrt[3]{k}} = \sqrt[3]{\frac{k+1}{k}} = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{k}} \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_n \geqslant b_{k+1} \Rightarrow b_k \text{ - не возрастает}$$

Так как $b_k \to 0$ и b_k не возрастает, то по признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$ сходится

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k)^3$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k}}{k} - \text{расходится (гармонический ряд)}$$