Домашняя работа №4 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. (a)

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n^2-7})^{n^2+1}$$

$$e=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n^2-7})^{-\frac{n^2-7}{3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{3}{n^2-7}}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n^2-7})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-3}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n^2-7})^{n^2-7}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n^2-7})^{n^2+1}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n^2-7})^{-8}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n^2-7})^{n^2+1}\cdot 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n^2-7})^{n^2+1}=e^{-3}$$

Ответ: e^{-3}

(b)

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{3n})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(H_{3n}-H_{2n})=\lim_{n\to\infty}(ln(3n)+\gamma+\varepsilon_{3n}-ln(2n)-\gamma-\varepsilon_{2n})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(ln(\frac{3}{2})+\varepsilon_{3n}-\varepsilon_{2n})=ln(\frac{3}{2})$$

Ответ: $ln(\frac{3}{2})$

2. (a)

$$a_n = 2 + (-1)^n$$

$$[C]\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n} = 2 \text{ при n - чётном} \\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n} \text{ при n - нечётном} = \lim_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{n}) = 2 \end{cases}$$

Ответ: 2

(b)

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$[C]\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ y_n = n \Rightarrow [C]\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{x_n}{y_n}$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{a_{n+1}}{1} = a_{n+1}$$

Так как $y_n > 0$, $y_{n+1} > y_n$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, то по теореме Штольца, если предел $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ существует, то он равен пределу $\frac{x_n}{y_n}$. Найдём этот передел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [C]\lim_{n\to\infty} a_n = e$$

Ответ: e

(c)

$$a_n = \sin(n)$$

$$S_n = \sin(1) + \sin(2) + \cdots + \sin(n)$$

$$2\sin(\frac{1}{2})S_n = \cos(\frac{1}{2}) - \cos(\frac{3}{2}) + \cos(\frac{3}{2}) - \cos(\frac{5}{2}) + \cdots +$$

$$+\cos(\frac{1}{2} - n) - \cos(\frac{1}{2} + n) = \cos(\frac{1}{2}) - \cos(\frac{1}{2} + n) =$$

$$= 2\sin\frac{1+n}{2}\sin(-\frac{n}{2}) \Rightarrow S_n = -\frac{\sin\frac{1+n}{2}\sin(\frac{n}{2})}{\sin\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [C] \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{\sin\frac{1+n}{2}\sin(\frac{n}{2})}{n\sin\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{\sin\frac{1+n}{2}\sin(\frac{n}{2})}{n\sin\frac{1}{2}} = 0, \text{ т.к. } \sin x \in [-1; 1]$$

Ответ: 0

3. (a)

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad b_n = \sqrt{n}$$

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} =$$

$$= \frac{1}{n + 1 - \sqrt{n^2+n}} = \frac{n + 1 + \sqrt{n^2+n}}{n^2 + 2n + 1 - n^2 - n} = \frac{n + 1 + \sqrt{n^2+n}}{n+1}$$

Так как $b_n > 0$, $b_{n+1} > b_n$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, то по теореме Штольца, если предел $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ существует, то он равен пределу $\frac{a_n}{b_n}$. Найдём этот передел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1+\sqrt{n^2+n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{1+0+\sqrt{1+0}}{1+0}=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})=2$$

Ответ: 2

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

$$a_n=1^k+2^k+\cdots+n^k,\quad b_n=n^{k+1}$$

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}$$

Так как $b_n>0$, $b_{n+1}>b_n$ и $\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$, то по теореме Штольца, если предел $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ существует, то он равен пределу $\frac{a_n}{b_n}$. Найдём этот передел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}}}{1-\frac{n^{k+1}}{(n+1)^{k+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{1-(\frac{n}{n+1})^{k+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{1-(\frac{n+1}{n})^{-k-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{1-(1+\frac{1}{n})^{-k-1}}=$$

$$= \frac{0}{1-(1+0)^{-k-1}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = 0$$

Ответ: 0

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

$$\ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \ln((\frac{n!}{n^n})^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\ln(\frac{n!}{n^n}) = \frac{1}{n}(\ln n! - \ln n^n) =$$

$$= \frac{1}{n}(\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n - n \ln n)$$

$$a_n = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n - n \ln n,\ b_n = n$$

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln(n)}{n+1-n} =$$

$$= \ln(n+1)(1-n-1) + n\ln(n) = -n\ln(n+1) + n\ln(n) =$$

$$= n(\ln(n) - \ln(n+1)) = -n\ln(\frac{n+1}{n}) = -\ln(1+\frac{1}{n})^n$$

Так как $b_n > 0$, $b_{n+1} > b_n$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, то по теореме Штольца, если предел $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ существует, то он равен пределу $\frac{a_n}{b_n}$. Найдём этот передел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty}(-\ln(1+\frac{1}{n})^n) = -ln(e) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n})} = e^{-1}$$

Ответ: e^{-1}