

Домашнее задание на 04.05 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Найдём:

$$\int \frac{x^8 + x^7 - 7x^6 + 26x^5 - 32x^4 + 34x^3 - 20x^2 + 48x - 33}{(x+1)(x-4)^2(x^2+1)^3} dx$$

Разложим интеграл как:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$$

где $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$.

$$Q(x) = (x+1)(x-4)^2(x^2+1)^3$$

$$Q'(x) = (x-4)(x^2+1)^2(-2-21x-20x^2+9x^3)$$

Следовательно:

$$Q_1(x) = (x-4)(x^2+1)^2$$

Выразим $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$:

$$Q(x) = (x+1)(x-4)^2(x^2+1)^3$$

$$Q_1(x) = (x-4)(x^2+1)^2$$

Тогда:

$$Q_2(x) = \frac{(x+1)(x-4)^2(x^2+1)^3}{(x-4)(x^2+1)^2} = (x+1)(x-4)(x^2+1)$$

Искомый интеграл превращается в:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$$

Найдём многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$:

$$P(x) = P_1(x) \cdot Q_2(x) + P_2(x) \cdot Q_1(x)$$

Пусть:

$$P_1(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (\text{многочлен степени } \leq 4)$$

$$P_2(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \quad (\text{многочлен степени } \leq 3)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} P(x) &= (a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)(x+1)(x-4)(x^2+1) \\ &\quad + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)(x-4)(x^2+1)^2 = \\ &\quad -4a_0 - 4b_0 \\ &\quad + (-3a_0 - 4a_1 + b_0 - 4b_1)x \\ &\quad + (-3a_0 - 3a_1 - 4a_2 - 8b_0 + b_1 - 4b_2)x^2 \\ &\quad + (-3a_0 - 3a_1 - 3a_2 - 4a_3 + 2b_0 - 8b_1 + b_2 - 4b_3)x^3 \\ &\quad + (a_0 - 3a_1 - 3a_2 - 3a_3 - 4a_4 - 4b_0 + 2b_1 - 8b_2 + b_3)x^4 \\ &\quad + (a_1 - 3a_2 - 3a_3 - 3a_4 + b_0 - 4b_1 + 2b_2 - 8b_3)x^5 \\ &\quad + (a_2 - 3a_3 - 3a_4 + b_1 - 4b_2 + 2b_3)x^6 \\ &\quad + (a_3 - 3a_4 + b_2 - 4b_3)x^7 \\ &\quad + (a_4 + b_3)x^8 \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$P(x) = x^8 + x^7 - 7x^6 + 26x^5 - 32x^4 + 34x^3 - 20x^2 + 48x - 33$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a_4 + b_3 = 1, \\ a_3 - 3a_4 + b_2 - 4b_3 = 1, \\ a_2 - 3a_3 - 3a_4 + b_1 - 4b_2 + 2b_3 = -7, \\ a_1 - 3a_2 - 3a_3 - 3a_4 + b_0 - 4b_1 + 2b_2 - 8b_3 = 26, \\ a_0 - 3a_1 - 3a_2 - 3a_3 - 4a_4 - 4b_0 + 2b_1 - 8b_2 + b_3 = -32, \\ -3a_0 - 3a_1 - 3a_2 - 4a_3 + 2b_0 - 8b_1 + b_2 - 4b_3 = 34, \\ -3a_0 - 3a_1 - 4a_2 - 8b_0 + b_1 - 4b_2 = -20, \\ -3a_0 - 4a_1 + b_0 - 4b_1 = 48, \\ -4a_0 - 4b_0 = -33. \end{cases}$$

У системы нет решений

№2 (а) Для интеграла $\int_a^b f(a+b-x) dx$ выполним замену $u = a+b-x$.

Тогда $du = -dx$, пределы интегрирования меняются местами:

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_b^a f(u)(-du) = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx.$$

Таким образом, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$.

(б) Для интеграла $\int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$ выполним замену $x = \frac{\pi}{2} - t$. Тогда

$dx = -dt$, пределы интегрирования меняются:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)(-dt) = \int_0^{\pi/2} f(\cos t) dt.$$

Следовательно, $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.

(с) Интеграл $\int_0^\pi f(\sin x) dx$ разобьем на два:

$$\int_0^\pi f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx + \int_{\pi/2}^\pi f(\sin x) dx.$$

Во втором интеграле выполним замену $x = \pi - t$:

$$\int_{\pi/2}^\pi f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin(\pi - t)) dt = \int_0^{\pi/2} f(\sin t) dt.$$

Таким образом:

$$\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx.$$

(d) Для периодической функции f с периодом T интеграл по интервалу длины T не зависит от выбора начала интервала:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \text{где } b - a = T.$$

Следовательно:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

№3 (а) Используем гиперболическую замену $x = \sqrt{5} \operatorname{sh} t$. Тогда:

$$dx = \sqrt{5} \operatorname{ch} t dt, \quad \sqrt{5 + x^2} = \sqrt{5} \operatorname{ch} t.$$

Интеграл преобразуется:

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{5} \operatorname{ch} t}{2 + 5 \operatorname{sh}^2 t} \cdot \sqrt{5} \operatorname{ch} t dt = 5 \int \frac{\operatorname{ch}^2 t}{2 + 5 \operatorname{sh}^2 t} dt.$$

Используя тождество $\operatorname{ch}^2 t = 1 + \operatorname{sh}^2 t$:

$$5 \int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 t}{2 + 5 \operatorname{sh}^2 t} dt = 5 \left(\int \frac{1}{2 + 5 \operatorname{sh}^2 t} dt + \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{2 + 5 \operatorname{sh}^2 t} dt \right).$$

После вычислений (подстановка $u = \operatorname{sh} t$) и возврата к x :

$$\sqrt{5} \operatorname{arsh} \left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right) - \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C$$

(b) Применяем универсальную замену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 dt}{(1 + t^2)(6t^2 + 4t + 4)}.$$

После упрощения:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \left(\frac{3t + 1}{\sqrt{5}} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

(c) Пусть $I = \int \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \sin x dx$. Замена $x = \frac{1}{t}$ даёт:

$$J = \int (\sqrt{2} + 1) \sin \left(\frac{1}{t} \right) \cdot \frac{-dt}{t^2}.$$

Суммируя $I + J$ и упрощая:

$$2I = \int \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \sin x + (\sqrt{2} + 1) \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx = 0 \implies I = 0.$$

(d) Из условия $h(g(x)) = x$:

$$h'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)} = e^x + xe^{3x}.$$

Интегрируем:

$$\int_0^T (e^x + xe^{3x}) dx = e^T + \frac{Te^{3T}}{3} - \frac{e^{3T}}{9} + \frac{1}{9}.$$

№4 Найдём:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\frac{x^3}{3}}^{\cos x} \ln(1+t^2) dt \right)^3$$