Домашнее задание на 30.01 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 (a) Начнем с преобразования угла:

$$\cos(816^\circ) = \cos(2 \cdot 360^\circ + 96^\circ) = \cos(96^\circ) = \cos\left(\frac{8\pi}{15}\right)$$

Оценим остаточный член:

$$\left|R_n\left(\frac{8\pi}{15}\right)\right| = \left|(cos(\frac{8\pi}{15}))^{(n+1)}\frac{(\frac{8\pi}{15}-\frac{\pi}{2})^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{(\frac{16\pi}{30}-\frac{15\pi}{30})^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(\frac{\pi}{30})^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant 10^{-4}$$

$$n = 1 : \frac{\pi^2}{1800} > 10^{-4}$$

$$n = 2 : \frac{\pi^3}{162000} > 10^{-4}$$

$$n = 3 : \frac{\pi^4}{19440000} < 10^{-4}$$

Следовательно,

$$\cos(x) \approx f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3$$

$$\cos(x) \approx 0 - 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 \cdot \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + 1 \cdot \frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!}$$

$$\cos(x) \approx -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{6}$$

$$\cos\frac{8\pi}{15} \approx \frac{-5400\pi + \pi^3}{162000}$$

Ответ: $\frac{-5400\pi+\pi^3}{162000}$

(b) $\sqrt[4]{83}$

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{4}}$$

Оценим остаточный член:

$$R_n(82,80) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(82{-}80)^{n+1} \leqslant 2^{n+1}\frac{\frac{1}{4}(1+82)^{-\frac{3}{4}}}{(n+1)!} = 2^{n-1}\frac{83^{-\frac{3}{4}}}{(n+1)!} < 10^{-4}$$

$$n = 6 : 2^{1-1}\frac{83^{-\frac{3}{4}}}{(1+1)!} > 10^{-4}$$

$$n = 7 : 2^{2-1}\frac{83^{-\frac{3}{4}}}{(2+1)!} < 10^{-4}$$

Следовательно,

$$f(x) \approx 3 + \frac{1}{108}(x-80) - \frac{3}{233280}(x-80)^2 + \frac{21}{3840}(x-80)^3 -$$

$$-\frac{231}{61440}(x{-}80)^4 + \frac{3003}{122880}(x{-}80)^5 - \frac{5005}{2949120}(x{-}80)^6 + \frac{6435}{82575360}(x{-}80)^7$$

$$f(82) \approx \frac{70911455449}{23782864896}$$

Ответ: $\frac{70911455449}{23782864896}$

№2 (a) Докажем, что:

$$0 < n! \cdot (e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}) < 1$$

Разложим e^x в нуле:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{c^{n+1}}{(n+1)!}, \quad c \in (0, x)$$

При $x = 1$:

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$$

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Следовательно,

$$0 < n! \cdot (e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}) \leqslant n! \cdot (\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}) = n! \cdot \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n} < 1$$

(b) Предположим, что e является рациональным числом, т.е. $e = \frac{p}{q}$ для некоторых натуральных p и q.

Используя результат из пункта (a) при $n = q$:

$$0 < q! \cdot \left(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \right) < 1$$

Подставим $e = \frac{p}{q}$:

$$0 < q! \cdot \left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \right) < 1$$

Перепишем неравенство:

$$0 < q! \cdot \frac{p}{q} - q! \cdot \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < 1$$

Заметим, что $q! \cdot \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$ является натуральным числом, так как сумма состоит из конечного количества дробей с натуральными знаменателями.

Обозначим:

$$N = q! \cdot \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$$

Тогда:

$$q! \cdot \frac{p}{q} - N < 1 \implies q! \cdot \frac{p}{q} < N + 1$$

С другой стороны:

$$q! \cdot \frac{p}{q} - N > 0 \implies q! \cdot \frac{p}{q} > N$$

Таким образом, мы имеем:

$$N < q! \cdot \frac{p}{q} < N + 1$$

Это означает, что $q! \cdot \frac{p}{q}$ является натуральным числом, находящимся между двумя последовательными натуральными числами N и $N+1$, что невозможно т.к. $q! \cdot \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$ тоже натуральное. Следовательно, предположение о том, что e является рациональным, приводит к противоречию.

№3 (a) Для нахождения числа π с использованием равенства Мэчина и формулы Тейлора для арктангенса, начнем с вычисления суммы:

$$\pi = 16 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

Согласно формуле Тейлора:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + R_n(x)$$

Подставим $x = \frac{1}{5}$ и $x = \frac{1}{239}$.

Аналогично, подставим $x = \frac{1}{239}$:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1} + R_m\left(\frac{1}{239}\right)$$

Теперь объединим результаты для π:

$$\pi = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{16}{2k+1} \cdot \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{4}{2k+1} \cdot \frac{1}{239^{2k+1}} \right) + R_n\left(\frac{1}{5}\right) - R_m\left(\frac{1}{239}\right)$$

То есть:

$$\pi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{16}{2k+1} \cdot \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{4}{2k+1} \cdot \frac{1}{239^{2k+1}} \right) + R_n\left(x\right)$$

(b) Для нахождения приближения числа π с использованием оценки, полученной из признака Лейбница, начнем с выражения:

$$\left| \pi - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_n$$

где

$$a_k = \frac{16}{2k+1} \cdot \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{4}{2k+1} \cdot \frac{1}{239^{2k+1}}.$$

Теперь найдём a_n для нескольких значений n, чтобы найти, когда a_n станет меньше 10^{-4}.

Для $n = 3$:

$$a_3 = \frac{16}{7} \cdot \frac{1}{5^7} - \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{239^7} = \frac{16}{7} \cdot \frac{1}{78125} - \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{57178715155781}$$

Вычислим:

$$a_3 = \frac{16}{546875} - \frac{4}{7 \cdot 57178715155781}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$a_3 = \frac{16 \cdot 57178715155781 - 4 \cdot 546875}{546875 \cdot 7 \cdot 57178715155781} =$$

$$= \frac{915059442492976 - 2187500}{546875 \cdot 7 \cdot 57178715155781} = \frac{915059440305476}{546875 \cdot 7 \cdot 57178715155781} < 10^{-4}$$

Следовательно, искомое приближение числа π:

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\left(\frac{16}{2k+1}\cdot\frac{1}{5^{2k+1}}-\frac{4}{2k+1}\cdot\frac{1}{239^{2k+1}}\right)=3.1415917721...$$

Ответ: $\sum\limits_{k=0}^{3}(-1)^k\left(\frac{16}{2k+1}\cdot\frac{1}{5^{2k+1}}-\frac{4}{2k+1}\cdot\frac{1}{239^{2k+1}}\right)$

№4 Найдем асимптоты для каждой из заданных функций.

(a) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}$

Для нахождения вертикальных асимптот, мы ищем значения x, при которых функция не определена. В данном случае, функция не определена, когда знаменатель равен нулю:

$$x-3=0 \implies x=3$$

Теперь проверим пределы:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}=-\infty$$

Найдём кандидатов на коэфицент k наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}=\pm 1$$

Проверим наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x(\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}+1)\right)$$

$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x(\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}+1)\right)$$
$$=-\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x(\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}-1)\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x(\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}-1)\right)$$
$$=+\infty$$

Следовательно, асимптоты:

$$y=x-\frac{1}{2}$$

$$y=x+\frac{1}{2}$$

$$x=-3$$

(b) $f(x)=\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\cdot\frac{x^2}{x^2-9}$

Вертикальные асимптоты:

$$x=3\quad x=-3$$

Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\cdot\frac{x}{x^2-9}=0$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\cdot\frac{x}{x^2-9}=0$$

найдём b:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\cdot\frac{x^2}{x^2-9}=e^2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\cdot\frac{x^2}{x^2-9}=e^2$$

Следовательно, асимптоты:

$$x=\pm 3$$

$$y=e^2$$

(c) Обратная к $f(x)=2x+\frac{1}{\sqrt[4]{3-x}}$

Найдём асимптоты к $f(x)$:

Вертикальные:

$$x=3$$

Наклонные:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{1}{\sqrt[4]{3-x}}\right)=+\infty$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\frac{1}{\sqrt[4]{3-x}}\right)=-\infty$$

Следовательно, наклонных асимптот нет.

Асимптоты у обратной к $f(x)$:

$$y=3$$

№5 (a) Пример функции с асимптотой при $x\to+\infty$, но с несуществующим пределом производной

Рассмотрим функцию:

$$f(x)=\ln(x)+\sin(x)$$

При $x \to +\infty$, $\ln(x)$ доминирует над $\sin(x)$, и мы можем сказать, что:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Таким образом, у функции есть наклонная асимптота, так как $f(x)$ растет без ограничений.

Найдем производную:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \cos(x)$$

Рассмотрим предел:

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \cos(x) \right)$$

Здесь $\frac{1}{x} \to 0$, но $\cos(x)$ колеблется между -1 и 1, следовательно, предел не существует.

(b) Пример функции без асимптот при $x \to +\infty$, но с существующим пределом производной

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$$

При $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$$

Функция не имеет ни горизонтальной, ни наклонной асимптоты, так как $\sin(x^2)$ колеблется.

$$f'(x) = \frac{(x \cdot \cos(x^2) \cdot 2x) - \sin(x^2)}{x^2} = \frac{2x^2 \cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2}$$

Рассмотрим предел:

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2} \right)$$

Здесь $\frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 0$, а $2\cos(x^2)$ колеблется, но в целом предел существует и равен 0.

№6 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln x}, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

(a) Область определения функции f

Функция задана по частям:

- Для $x > 0$: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

- Для $x < 0$: $f(x) = -1$

Область определения функции f будет:

$$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

(b) Точки пересечения графика функции f с осями координат O_x и O_y

Пересечение с осью O_y

$f(0)$ не определено, но $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} = 0$ (по правилу Лопиталя)

Таким образом, точка пересечения с осью O_y отсутствует.

Пересечение с осью O_x

$f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{\ln x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (не входит в область определения)

Таким образом, точек пересечения с осью O_x нет.

(c) Асимптоты функции f

Вертикальная асимптота

$$x = 1$$

Наклонная асимптота:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Следовательно, наклонных асимптот нету:

(d) Производная функции f

Для $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{(\ln x)(1) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

Найдем критические точки

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

Интервалы возрастания и убывания

- $f'(x) > 0$ при $x > e$

- $f'(x) < 0$ при $0 < x < e$

Локальный экстремум

Минимум в точке $x = e$

(e) Вторая производная функции f

Для $x > 0$:

$$f''(x) = -\frac{\ln(x) - 2}{x \ln^3(x)}$$

Найдем точки перегиба

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

Интервалы выпуклости и вогнутости

- $f''(x) < 0$ при $0 < x < 1$ (вогнутая)

- $f''(x) < 0$ при $x > e^2$ (вогнутая)

-$f''(x) > 0$ при $1 < x < e^2$ (выпуклая)

(f)