Домашнее задание на 23.05 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 (a) Вычислим:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx, \quad a > 0$$

Применим дважды формулу интегрирования по частям (Формула 5). Пусть:

$$u = \sin(bx), \quad dv = e^{-ax}dx \implies du = b\cos(bx)dx, \quad v = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin(bx)dx = \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin(bx)\right]_0^{\infty} + \frac{b}{a}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)dx$$

Пределы при $x \to \infty$ стремятся к нулю, при $x = 0$ первый член равен нулю. Остаётся:

$$\frac{b}{a}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)dx$$

Повторим интегрирование по частям для нового интеграла. Пусть:

$$u = \cos(bx), \quad dv = e^{-ax}dx \implies du = -b\sin(bx)dx, \quad v = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

Тогда:

$$\frac{b}{a}\left(\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos(bx)\right]_0^{\infty} + \frac{b}{a}\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin(bx)dx\right)$$

Пределы обрабатываются аналогично, получаем:

$$\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{a}I\right),$$

где I — исходный интеграл. Решая уравнение:

$$I=\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}I \implies I=\frac{b}{a^2+b^2}$$

Ответ: $\dfrac{b}{a^2+b^2}$

(b) Вычислим:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[5]{1-x}}\,dx$$

Выберем:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} \implies f(x)=-\frac{5}{4}(1-x)^{4/5}, \quad g(x)=x^3 \implies g'(x)=3x^2$$

Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[5]{1-x}}\,dx=\lim_{x\to 1-}\left[-\frac{5}{4}x^3(1-x)^{4/5}\right]-0-\int_0^1\left(-\frac{5}{4}(1-x)^{4/5}\cdot 3x^2\right)dx$$

Пределы обращаются в ноль, остается:

$$\frac{15}{4}\int_0^1 x^2(1-x)^{4/5}\,dx$$

Выберем:

$$f'(x)=(1-x)^{4/5} \implies f(x)=-\frac{5}{9}(1-x)^{9/5}, \quad g(x)=x^2 \implies g'(x)=2x$$

После аналогичных вычислений:

$$\frac{15}{4}\cdot\frac{10}{9}\int_0^1 x(1-x)^{9/5}\,dx=\frac{25}{6}\int_0^1 x(1-x)^{9/5}\,dx$$

Выберем:

$$f'(x) = (1-x)^{9/5} \implies f(x) = -\frac{5}{14}(1-x)^{14/5}, \quad g(x) = x \implies g'(x) = 1$$

Получаем:

$$\frac{25}{6} \cdot \frac{5}{14} \int_0^1 (1-x)^{14/5}\, dx = \frac{125}{84} \int_0^1 (1-x)^{14/5}\, dx$$

$$\int_0^1 (1-x)^{14/5}\, dx = \left[-\frac{5}{19}(1-x)^{19/5} \right]_0^1 = \frac{5}{19}$$

$$\frac{125}{84} \cdot \frac{5}{19} = \frac{625}{1596}$$

Ответ: $\frac{625}{1596}$

(c) Вычислим:

$$\int_2^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx$$

Положим $t = \dfrac{1}{x}$. Тогда:

$$dt = -\frac{1}{x^2}dx \implies dx = -\frac{1}{t^2}dt, \quad x = \frac{1}{t}$$

Пределы интегрирования:

При $x = 2$:

$$t = \frac{1}{2}$$

При $x \to +\infty$:

$$t \to 0+$$

Интеграл преобразуется:

$$\int_2^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx = \int_{1/2}^0 \frac{e^t}{\left(\dfrac{1}{t}\right)^3} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^{1/2} e^t \cdot t\, dt$$

Пусть:

$$u = t \implies du = dt, \quad dv = e^t dt \implies v = e^t$$

Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{1/2} te^t\,dt = \left[te^t\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} e^t\,dt = \left(\frac{1}{2}e^{1/2} - 0\right) - \left[e^t\right]_0^{1/2}$$

Вычисляем:

$$= \frac{1}{2}e^{1/2} - \left(e^{1/2} - 1\right) = -\frac{1}{2}e^{1/2} + 1$$

Ответ: $1 - \dfrac{\sqrt{e}}{2}$

(d) Вычислим:

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\arcsin x|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Функция $|\arcsin x|$ чётная, так как $|\arcsin(-x)| = |-\arcsin x| = |\arcsin x|$. Поэтому интеграл можно преобразовать:

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\arcsin x|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Положим $t = \arcsin x$. Тогда:

$$x = \sin t, \quad dx = \cos t\,dt, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos t.$$

Пределы интегрирования:

При $x = 0$:

$$t = 0$$

При $x = 1$:

$$t = \frac{\pi}{2}$$

Интеграл преобразуется:

$$2\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\cos t} \cdot \cos t\, dt = 2\int_0^{\pi/2} t\, dt$$

Найдём

$$2\int_0^{\pi/2} t\, dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2 \cdot \frac{(\pi/2)^2}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{4}$

(e) Вычислим:

$$\int_0^1 \frac{1}{(4-3x)\sqrt{x-x^2}}\, dx$$

замена: $x = \dfrac{1}{t}$

$dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$

Пределы: $x = 0 \to t \to +\infty$, $x = 1 \to t = 1$

Подстановка:

$$\int_{+\infty}^1 \frac{1}{\left(4 - \frac{3}{t}\right)\sqrt{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(4t-3)\sqrt{t-1}}\, dt$$

замена: $t = y + 1$

$dt = dy.$

Пределы: $t = 1 \to y = 0$, $t \to +\infty \to y \to +\infty$

Подстановка:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(4y+1)\sqrt{y}}\, dy$$

замена: $y = z^2$

$dy = 2zdz.$

Пределы: $y = 0 \to z = 0$, $y \to +\infty \to z \to +\infty.$

Подстановка:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2z}{(4z^2+1)z}\,dz = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{4z^2+1}\,dz$$

Найдём

$$2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2z)\Big|_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}(2z)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$

(f) Вычислим:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2-\cos x}\,dx$$

Положим $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тогда:

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Пределы интегрирования:

При $x = 0$: $t = 0$

При $x \to \pi-$: $t \to +\infty$

Подставляем замену в интеграл:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2-\cos x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Упрощаем знаменатель:

$$2-\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2(1+t^2)-(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{1+3t^2}{1+t^2}$$

Интеграл принимает вид:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+3t^2}\,dt$$

Используем стандартный результат:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2a}$$

Для $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+3t^2}\,dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

(g) Вычислим:

$$\int_0^1 \cos^2(\ln x)\,dx$$

Используем тождество $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$:

$$\int_0^1 \cos^2(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+\cos(2\ln x)\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\,dx + \int_0^1 \cos(2\ln x)\,dx\right)$$

Первый интеграл:

$$\int_0^1 1\,dx = 1$$

Положим $t = \ln x$, тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$. Пределы:

$x = 0 \to t \to -\infty$,

$x = 1 \to t = 0$

Интеграл преобразуется:

$$\int_0^1 \cos(2\ln x)\,dx = \int_{-\infty}^0 \cos(2t)\cdot e^t\,dt$$

Пусть $u = \cos(2t)$, $dv = e^t dt$. Тогда $du = -2\sin(2t)dt$, $v = e^t$:

$$\int \cos(2t) \cdot e^t \, dt = e^t \cos(2t) + 2 \int e^t \sin(2t) \, dt$$

Для $\int e^t \sin(2t) \, dt$ снова интегрируем по частям: Пусть $u = \sin(2t)$, $dv = e^t dt$. Тогда $du = 2\cos(2t)dt$, $v = e^t$:

$$\int e^t \sin(2t) \, dt = e^t \sin(2t) - 2 \int e^t \cos(2t) \, dt$$

Подставляем обратно:

$$\int \cos(2t) \cdot e^t \, dt = e^t \cos(2t) + 2e^t \sin(2t) - 4 \int e^t \cos(2t) \, dt$$

Переносим интеграл в левую часть:

$$5 \int e^t \cos(2t) \, dt = e^t \left(\cos(2t) + 2\sin(2t)\right)$$

Отсюда:

$$\int e^t \cos(2t) \, dt = \frac{e^t \left(\cos(2t) + 2\sin(2t)\right)}{5} + C$$

Подставляем пределы $-\infty$ и 0:

При $t \to -\infty$: $e^t \to 0$, поэтому слагаемое стремится к 0.

При $t = 0$:

$$\frac{e^0 \left(\cos(0) + 2\sin(0)\right)}{5} = \frac{1 \cdot (1 + 0)}{5} = \frac{1}{5}$$

Таким образом:

$$\int_{-\infty}^{0} \cos(2t) \cdot e^t \, dt = \frac{1}{5}$$

Собираем все части:

$$\int_0^1 \cos^2(\ln x) \, dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{3}{5}$

№2 (a) Найдём коэффициенты α и β

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \alpha \cdot \int_0^{\pi/2} \ln\sin(2x)\,dx + \beta$$

Используем тождество $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$:

$$\ln\sin(2x) = \ln 2 + \ln\sin x + \ln\cos x.$$

Подставляем

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \alpha \cdot \int_0^{\pi/2} (\ln 2 + \ln\sin x + \ln\cos x)\,dx + \beta$$

Обозначим $I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$. Тогда:

$$I = \alpha\left(\ln 2 \cdot \frac{\pi}{2} + I + I\right) + \beta.$$

$$I = \alpha\left(\frac{\pi\ln 2}{2} + 2I\right) + \beta \implies I = \frac{\alpha\pi\ln 2}{2} + 2\alpha I + \beta$$

Переносим члены с I:

$$I - 2\alpha I = \frac{\alpha\pi\ln 2}{2} + \beta \implies I(1-2\alpha) = \frac{\alpha\pi\ln 2}{2} + \beta$$

Чтобы равенство выполнялось для всех I, коэффициенты при I и свободные члены должны совпадать:

$$1 - 2\alpha = 0 \implies \alpha = \frac{1}{2}, \quad \frac{\alpha\pi\ln 2}{2} + \beta = 0 \implies \beta = -\frac{\pi\ln 2}{4}$$

Получаем

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{\pi\ln 2}{4}$$

(b) Замена переменной $2x = y$:

$x = \frac{y}{2}, \quad dx = \frac{dy}{2}, \quad$ пределы: $x = 0 \to y = 0, \quad x = \pi/2 \to y = \pi$

Преобразуем

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin(2x)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin y\, dy$$

В силу симметрии

$$\int_0^{\pi} \ln \sin y\, dy = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin y\, dy = 2I$$

подставим

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin(2x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot 2I = I \implies \gamma = 1$$

Ответ: $\gamma = 1$

(c) Подставляем $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{\pi \ln 2}{4}$, $\gamma = 1$ в уравнение из предыдущих пунктов:

$$I = \frac{1}{2} \cdot I - \frac{\pi \ln 2}{4}$$

Решаем уравнение относительно I:

$$I - \frac{1}{2}I = -\frac{\pi \ln 2}{4} \implies \frac{1}{2}I = -\frac{\pi \ln 2}{4} \implies I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$$

Ответ: $-\frac{\pi \ln 2}{2}$

№3 Рассмотрим тело, образованное вращением кривой $y = \frac{1}{x}$ вокруг оси x на интервале $[1, +\infty)$.

Объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

Интеграл сходится:

$$V = \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \pi \left(0 - (-1)\right) = \pi.$$

Площадь поверхности тела вращения вычисляется по формуле:

$$S = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx.$$

Упрощаем подынтегральное выражение:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \approx 1 \quad \text{при } x \to \infty.$$

Таким образом, интеграл ведет себя как:

$$S \approx 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} dx,$$

который расходится. Следовательно, площадь поверхности бесконечна.