Домашнее задание на 05.11 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x} = 3$, Доказать: $\forall a_n \to 9, a_n \neq 9 : \sqrt{a_n} \to 3$
Пусть некоторая последовательность $a_n \to 9, a_n \neq 9$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : n \geqslant N\ \ |a_n - 9| < \varepsilon$$

$$\varepsilon > |a_n - 9| \geqslant \left|\frac{a_n - 9}{\sqrt{a_n} + 3}\right| = |\sqrt{a_n} - 3| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : n \geqslant N\ \ |\sqrt{a_n} - 3| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_n} \to 3 - \text{ ч.т.д.}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2,\ f(x) = \begin{cases} 2, \text{ если } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$

Пусть всякий $x \in B'_\delta(0)$, тогда, т.к. $x \neq 0$, то $f(x) = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall \delta > 0 : x \in B'_\delta(0)\ \ |f(x) - 2| = |2 - 2| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(0)\ \ |f(x) - 2| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \to 2, \text{ при } x \to 0 - \text{ ч.т.д.}$$

3. **(a)** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^4+5x^3+3x^2-x-1}{-x^4-x^3+3x^2+5x+2}$

$$\lim_{x\to -1}\left\{\begin{array}{l} \frac{2x^4+5x^3+3x^2-x-1}{-x^4-x^3+3x^2+5x+2} = \frac{(x+1)(2x^3+3x^2-1)}{-(x+1)(x^3-3x-2)} = \frac{(2x^3+3x^2-1)}{-(x^3-3x-2)} = \\ = \frac{-(x+1)(2x^2+x-1)}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{-(2x^2+x-1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{-(x+1)(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{1-2x}{x-2} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1+2}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1$$

Ответ: -1

(b) $\lim\limits_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

$$\lim_{x\to -8} \left\{ \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \frac{-(x+8)(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{(x)})^2)}{(\sqrt{1-x}+3)(8+x)} = \right.$$

$$\left. \frac{-(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{(x)})^2)}{(\sqrt{1-x}+3)} \right\} = \frac{-(4+4+4)}{6} = -2$$

Ответ: -2

(c) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1})$

$$\lim_{x\to 1} \left\{ (\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(1+x+x^2)} = \frac{x+2}{1+x+x^2} \right\} =$$

$$= \frac{1+2}{1+1+1} = 1$$

Ответ: 1

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[k]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \left\{ \frac{\sqrt[k]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{x} = \frac{\sqrt[km]{(1+ax)^m}-\sqrt[km]{(1+bx)^k}}{x} = \right.$$

$$= \frac{((1+ax)^m-(1+bx)^k)}{x(\sum\limits_{j=0}^{km-1}\sqrt[km]{(1+ax)^{km-j}(1+bx)^j})} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m}\binom{m}{i}a^ix^i - \sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}b^ix^i}{x(\sum\limits_{j=0}^{km-1}\sqrt[km]{(1+ax)^{km-j}(1+bx)^j})} =$$

$$= \frac{1 + \sum\limits_{i=1}^{m} \binom{m}{i} a^i x^i - 1 - \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} b^i x^i}{x(\sum\limits_{j=0}^{km-1} \sqrt[km]{(1+ax)^{km-j}(1+bx)^j})} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \binom{m}{i} a^i x^i - \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} b^i x^i}{x(\sum\limits_{j=0}^{km-1} \sqrt[km]{(1+ax)^{km-j}(1+bx)^j})} =$$

$$\left. = \frac{x(\sum\limits_{i=1}^{m} \binom{m}{i} a^i x^{i-1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} b^i x^{i-1})}{x(\sum\limits_{j=0}^{km-1} \sqrt[km]{(1+ax)^{km-j}(1+bx)^j})} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \binom{m}{i} a^i x^{i-1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} b^i x^{i-1}}{\sum\limits_{j=0}^{km-1} \sqrt[km]{(1+ax)^{km-j}(1+bx)^j}} \right\} =$$

$$= \frac{\binom{m}{1} a - \binom{k}{1} b}{\sum\limits_{j=0}^{km-1} 1} = \frac{ma - kb}{km}$$

Ответ: $\frac{ma-kb}{km}$

4 (a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{e^{2x}-1}$

$$\lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\operatorname{tg} 3x}{e^{2x}-1} = \frac{\operatorname{tg} 3x}{x} \cdot \frac{x}{e^{2x}-1} \right\} = 3 \cdot \frac{1}{2 \ln e} = \frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$

$$\lim_{x \to 0} \left\{ \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = \frac{x(1 - \frac{\sin 2x}{x})}{x(1 + \frac{\sin 3x}{x})} \frac{1 - \frac{\sin 2x}{x}}{1 + \frac{\sin 3x}{x}} \right\} = \frac{1-2}{1+3} = -\frac{1}{4}$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \sin^3 x} = \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} = \right.$$

$$= \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot (\frac{x}{\sin x})^2 \cdot \frac{1}{cosx} \Big\} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(ax)\cos(bx)-1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \Big\{ \frac{\cos(ax)\cos(bx)-1}{x^2} = \frac{\cos(ax)\cos(bx)-\cos(ax)+\cos(ax)-1}{x^2} =$$

$$= \frac{\cos(ax)(\cos(bx)-1)+\cos(ax)-1}{x^2} = \cos(ax)\frac{(\cos(bx)-1)}{x^2} + \frac{\cos(ax)-1}{x^2} =$$

$$= -\cos(ax)\frac{(1-\cos(bx))}{x^2} - \frac{1-\cos(ax)}{x^2} \Big\} = -1 \cdot \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = -\frac{b^2+a^2}{2}$$

Ответ: $-\frac{b^2+a^2}{2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+\cos\frac{\pi x}{2})}{\sqrt{x}-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+\cos\frac{\pi x}{2})}{\sqrt{x}-1} = \begin{pmatrix} y = x-1 \\ x \to 1 \Leftrightarrow y \to 0 \\ x = y+1 \end{pmatrix} = \lim_{y\to 0} \Big\{ \frac{\ln((y+1)^2+\cos\frac{\pi(y+1)}{2})}{\sqrt{y+1}-1}$$

$$= \frac{\ln(1+y^2+2y+\cos\frac{\pi(y+1)}{2})}{\sqrt{y+1}-1} = \frac{\ln(1+y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2})}{\sqrt{y+1}-1} =$$

$$= \frac{\ln(1+y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2})}{y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2}}{\sqrt{y+1}-1} =$$

$$= \frac{\ln(1+y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2})}{y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2}} \cdot (\frac{y^2}{\sqrt{y+1}-1} + \frac{2y}{\sqrt{y+1}-1} - \frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\sqrt{y+1}-1}) =$$

$$= \frac{\ln(1+y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2})}{y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2}} \cdot (\frac{y^2}{\sqrt{y+1}-1} + \frac{2y}{\sqrt{y+1}-1} - \frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{y} \cdot \frac{y}{\sqrt{y+1}-1}) \Big\} =$$

$$= 1 \cdot (0+0-1\cdot 0) = 0$$

Ответ: 0