

Домашнее задание на 15.05 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Найдём площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y^2 = 2\lambda x, \quad x^2 = 2\lambda y,$$

Ищем общие точки решений системы

$$\begin{cases} y^2 = 2\lambda x, \\ x^2 = 2\lambda y, \end{cases} \quad x \geq 0, y \geq 0. \quad \implies (x, y) = (0, 0), (2\lambda, 2\lambda)$$

В первой четверти на отрезке $x \in [0, 2\lambda]$ верхней ветвью фигуры является

$$y = f(x) = \sqrt{2\lambda x},$$

нижней:

$$y = g(x) = \frac{x^2}{2\lambda}.$$

По Факту 1 Формула (1) для площади S зоны между графиками $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на $[a, b]$ имеет вид

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Подставляем $a = 0$, $b = 2\lambda$:

$$S = \int_0^{2\lambda} \left(\sqrt{2\lambda x} - \frac{x^2}{2\lambda} \right) dx = \int_0^{2\lambda} (2\lambda x)^{1/2} dx - \frac{1}{2\lambda} \int_0^{2\lambda} x^2 dx.$$

Следовательно

$$S = \frac{8}{3}\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda^2 = \frac{4}{3}\lambda^2$$

Ответ: $\frac{4}{3}\lambda^2$

№2 Найдём площадь фигуры, ограниченной:

$$r^2 = 2\lambda^2 \cos 2\varphi.$$

Лемниската задана уравнением

$$r^2 \geq 0$$

то есть

$$\cos 2\varphi \geq 0$$

Это выполняется при

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$$

По факту 2 для кривой $r = f(\varphi)$, непрерывной на $[\alpha, \beta]$, площадь сектора

$$S_{\text{sector}} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)^2 d\varphi$$

Для одного лепестка $r^2 = 2\lambda^2 \cos 2\varphi$, $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\lambda^2 \cos 2\varphi d\varphi = \lambda^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi$$

Вычислим интеграл:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \left[\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} (1 - (-1)) = 1$$

Значит

$$S = \lambda^2 \cdot 1 = \lambda^2$$

Лемниската состоит из двух равных лепестков, поэтому

$$S_{\text{total}} = 2 S = 2\lambda^2$$

Ответ: $2\lambda^2$

№3 Найдём длину окружности

$$x^2 + y^2 = \lambda^2.$$

В полярных координатах окружность радиуса λ задаётся просто:

$$r(\varphi) = \lambda, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

По Факту 4 длина кривой

$$r = f(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$$

в полярных координатах равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2} d\varphi.$$

Здесь $f(\varphi) = \lambda$ константа, поэтому $f'(\varphi) = 0$. Подставляем в формулу с $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + \lambda^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \lambda d\varphi = \lambda [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi\lambda$$

Ответ: $2\pi\lambda$

№4 Найдём длину винтовой линии

$$x(t) = \lambda \cos t, \quad y(t) = \lambda \sin t, \quad z(t) = 7\lambda t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$x'(t) = -\lambda \sin t, \quad y'(t) = \lambda \cos t, \quad z'(t) = 7\lambda.$$

По формуле 3:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda^2 \sin^2 t + \lambda^2 \cos^2 t + (7\lambda)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + 49\lambda^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{50\lambda^2} dt = \int_0^{2\pi} 5\sqrt{2}\lambda dt \\ &= 5\sqrt{2}\lambda [t]_0^{2\pi} = 5\sqrt{2}\lambda \cdot 2\pi = 10\pi\sqrt{2}\lambda \end{aligned}$$

Ответ: $10\pi\sqrt{2}\lambda$

№5 Объём тела вращения по Формуле 6:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^7 (\sqrt{xe^{-x}})^2 dx = \pi \int_0^7 xe^{-x} dx, \\ \int_0^7 xe^{-x} dx &= \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^7 = [-(7+1)e^{-7}] - [-(0+1)e^0] \\ &= -8e^{-7} + 1 \end{aligned}$$

Ответ: $-8e^{-7} + 1$

№6 По общей формуле объёма через поперечные сечения:

$$V = \int_{-a}^a S(x) dx,$$

По Формуле 1 площадь эллипса:

$$S(x) = \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} V &= \pi b c \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b c \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^a \\ &= \pi b c \left(\left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) - \left(-a + \frac{(-a)^3}{3a^2}\right) \right) = \pi b c \left(2a - \frac{2a}{3}\right) = \frac{4}{3} \pi a b c \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4}{3} \pi a b c$

№7 Площадь поверхности вращения кривой

$$S = 2\pi \int_0^3 y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Подставляем заданную функцию y и ее производную

$$y = \sqrt{2\lambda x}, \quad y' = \frac{d}{dx} \sqrt{2\lambda x} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda x}}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (y')^2} &= \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2\lambda x}} = \sqrt{\frac{2x + \lambda}{2x}} \\ y \sqrt{1 + (y')^2} &= \sqrt{2\lambda x} \sqrt{\frac{2x + \lambda}{2x}} = \sqrt{\lambda(2x + \lambda)} \end{aligned}$$

Выносим множитель

$$S = 2\pi \int_0^3 \sqrt{\lambda(2x + \lambda)} dx = 2\pi\sqrt{\lambda} \int_0^3 \sqrt{2x + \lambda} dx$$

Выполняем замену

$$\int_0^3 \sqrt{2x + \lambda} dx = \frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\lambda+6} u^{1/2} du = \frac{1}{3} \left[(\lambda + 6)^{3/2} - \lambda^{3/2} \right]$$

Ответ: $S = \frac{2\pi\sqrt{\lambda}}{3} \left[(\lambda + 6)^{3/2} - \lambda^{3/2} \right]$

№8 Используем Формулу 7 для площади поверхности вращения в пространстве

$$S = 2\pi \int_{-\lambda}^{\lambda} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Здесь сечение сферой плоскостью $y - z$ при фиксированном x есть круг радиуса $y(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2}$, его производная:

$$y(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2}, \quad y'(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{\lambda^2 - x^2} = -\frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}$$

Поэтому

$$\sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{\lambda^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - x^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}$$

Подставляем в интеграл

$$y \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\lambda^2 - x^2} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \lambda$$

$$S = 2\pi \int_{-\lambda}^{\lambda} \lambda dx = 2\pi \lambda [x]_{-\lambda}^{\lambda} = 2\pi \lambda (2\lambda) = 4\pi \lambda^2$$

Ответ: $S = 4\pi \lambda^2$

№9 Формула 3 для длины дуги кривой $y = f(x)$ и формула 8 для коор-

динат центра масс кривой при плотности $\rho = \text{const}$

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{\lambda^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}, \\
 ds &= \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{\lambda^2 - x^2}} dx = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx, \\
 L &= \int_{-\lambda}^{\lambda} ds = \lambda \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \lambda \pi, \\
 x_c &= \frac{\int_{-\lambda}^{\lambda} x ds}{\int_{-\lambda}^{\lambda} ds} = 0 \quad (\text{по симметрии}), \\
 y_c &= \frac{\int_{-\lambda}^{\lambda} y ds}{\int_{-\lambda}^{\lambda} ds} = \frac{\int_{-\lambda}^{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - x^2} \frac{\lambda dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}}{\lambda \pi} = \frac{\lambda \int_{-\lambda}^{\lambda} dx}{\lambda \pi} = \frac{2\lambda^2}{\lambda \pi} = \frac{2\lambda}{\pi}
 \end{aligned}$$

Ответ: $(x_c, y_c) = \left(0, \frac{2\lambda}{\pi}\right)$

№10 По Формуле 9 для центра масс плоской фигуры при однородной плотности:

$$x_c = \frac{\iint_D x dA}{\iint_D dA}, y_c = \frac{\iint_D y dA}{\iint_D dA}$$

Область $D : 0 \leq x \leq \lambda, \quad -\sqrt{\lambda x} \leq y \leq \sqrt{\lambda x}$.

Площадь D :

$$A = \int_{x=0}^{\lambda} (2\sqrt{\lambda x}) dx = 2\sqrt{\lambda} \int_0^{\lambda} x^{1/2} dx = 2\sqrt{\lambda} \frac{2}{3} \lambda^{3/2} = \frac{4}{3} \lambda^2.$$

Координата x_c :

$$\iint_D x dA = \int_0^{\lambda} x(2\sqrt{\lambda x}) dx = 2\sqrt{\lambda} \int_0^{\lambda} x^{3/2} dx = 2\sqrt{\lambda} \frac{2}{5} \lambda^{5/2} = \frac{4}{5} \lambda^3,$$

$$x_c = \frac{\iint_D x \, dA}{A} = \frac{\frac{4}{5} \lambda^3}{\frac{4}{3} \lambda^2} = \frac{3}{5} \lambda.$$

По симметрии

$$y_c = 0.$$

Ответ: $(x_c, y_c) = \left(\frac{3}{5} \lambda, 0\right)$

№11 (а) Определяем $I_n(x)$ по Формуле 10:

$$I_n(x) = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \cos(xt) \, dt$$

(b) По результату Пуанкаре и методу полной мат. индукции имеем

$$x^{2n+1} I_n(x) = n! (P_n(x) \sin x + Q_n(x) \cos x)$$

(с) Предположим, что $\frac{\pi}{2} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Подставляя $x = \pi/2$ в предыдущее равенство, получаем Формулу 11:

$$\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = b^{2n+1} P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(d) Покажем, что $0 < I_n(\pi/2) < 2$. Заметим, что на $[1, 1] \leq (1t^2)^n \leq 1$ и $|\cos(\pi \frac{t}{2})| \leq 1$

(e)

(f)