Домашнее задание на 23.05 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 (a) Вычислим:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx, \quad a>0$$

Применим дважды формулу интегрирования по частям (Формула 5). Пусть:

$$u=\sin(bx), \quad dv=e^{-ax}dx \implies du=b\cos(bx)dx, \quad v=-\frac{1}{a}e^{-ax}$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin(bx)dx=\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin(bx)\right]_0^{\infty}+\frac{b}{a}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)dx$$

Пределы при $x\to\infty$ стремятся к нулю, при $x=0$ первый член равен нулю. Остаётся:

$$\frac{b}{a}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)dx$$

Повторим интегрирование по частям для нового интеграла. Пусть:

$$u=\cos(bx), \quad dv=e^{-ax}dx \implies du=-b\sin(bx)dx, \quad v=-\frac{1}{a}e^{-ax}$$

Тогда:

$$\frac{b}{a}\left(\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos(bx)\right]_0^{\infty}+\frac{b}{a}\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin(bx)dx\right)$$

Пределы обрабатываются аналогично, получаем:

$$\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{a}I\right),$$

где I — исходный интеграл. Решая уравнение:

$$I=\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}I \implies I=\frac{b}{a^2+b^2}$$

Ответ: $\dfrac{b}{a^2+b^2}$

(b) Вычислим: