Домашнее задание на 15.09.2024 (Математический Анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1.

$\frac{m}{n} = 5,(2077) = 5 + 0.(2077)$

$10^4 * 0.(2077) - 0.(2077) = 2077,(2077) - 0(2077) = 2077 =$
$= (10^4 - 1) * 0.(2077) = 9999 * 0.(2077) \Rightarrow 0.(2077) = 2077/9999 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{m}{n} = 5 + \frac{2077}{9999} = \frac{5*9999+2077}{9999} = \frac{52072}{9999} = \frac{m}{n}$

Ответ: m=52072, n=9999

2.

(a) $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{5^k - 2}{7^k} = \frac{1-2}{1} + \frac{5-2}{7} + \frac{5^2-2}{7^2} + \cdots + \frac{5^n - 2}{7^n} \Rightarrow$
$\Rightarrow 7^n A_n = (5^0 - 2) * 7^n + (5^1 - 2) * 7^{n-1} + (5^2 - 2) * 7^{n-2} + \cdots +$
$(5^{n-1} - 2) * 7^1 + (5^n - 2) * 7^0 =$
$= 5^0 * 7^n - 2 * 7^n + 5 * 7^{n-1} - 2 * 7^{n-1} + 5^2 * 7^{n-2} - 2 * 7^{n-2} +$
$\cdots + 5^{n-1} * 7^1 - 2 * 7^2 + 5^n * 7^1 - 2 * 7^0 =$
$= -2 * (7^n + 7^{n-1} + 7^{n-2} + \cdots + 7^0) + (5^0 * 7^n + 5 * 7^{n-1} + 5^2 *$
$7^{n-2} + \cdots + 5^{n-1} * 7^2 + 5^n * 7^1)$

$(7^0 + \cdots + 7^{n-2} + 7^{n-1} + 7^n)$ - сумма $n + 1$ членов геометрической прогрессии с первым членом 7^0 и разностью $7 \Rightarrow$

$\Rightarrow (7^0+\dots+7^{n-2}+7^{n-1}+7^n) = \frac{7^0\cdot(7^{n+1}-1)}{7-1} = \frac{7^{n+1}-1}{6}$

$(5^0*7^n+5*7^{n-1}+5^2*7^{n-2}+\dots+5^{n-1}*7^2+5^n*7^1)$ - сумма $n+1$ членов геометрической прогрессии с первым членом 5^0*7^n и разностью $\frac{5}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow (5^0*7^n+5*7^{n-1}+5^2*7^{n-2}+\dots+5^{n-1}*7^2+5^n*7^1) = \frac{5^0*7^n*(\frac{5}{7}^{n+1}-1)}{\frac{5}{7}-1} = -\frac{7^n\cdot(\frac{5}{7}^{n+1}-1)}{\frac{2}{7}} = -\frac{7^{n+1}\cdot(\frac{5}{7}^{n+1}-1)}{2}$

$7^nA_n = -2*\frac{7^{n+1}-1}{6} - \frac{7^{n+1}\cdot(\frac{5}{7}^{n+1}-1)}{2} = \frac{-2\cdot7^{n+1}+2}{6} + \frac{7^{n+1}\cdot(1-\frac{5}{7}^{n+1})}{2} =$
$= \frac{-2\cdot7^{n+1}+2}{6} + \frac{3\cdot7^{n+1}\cdot(1-\frac{5}{7}^{n+1})}{6} = \frac{-2\cdot7^{n+1}+2}{6} + \frac{3\cdot7^{n+1}-3\cdot5^{n+1}}{6} = \frac{7^{n+1}-3\cdot5^{n+1}+2}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_n = \frac{7^{n+1}-3\cdot5^{n+1}+2}{6\cdot7^n}$ **Ответ:** $\frac{7^{n+1}-3\cdot5^{n+1}+2}{6\cdot7^n}$

(b) $B_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$
$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) =$
$= \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n} =$
$= \sqrt{n+1}-\sqrt{1}$ **Ответ:** $\sqrt{n+1}-\sqrt{1}$

(c) $C_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1(2)(3)} + \frac{1}{2(3)(4)} + \frac{1}{3(4)(5)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2}$, где $A, B, C \in \mathbb{R}$
$\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} = \frac{A(k+1)(k+2)+Bk(k+2)+Ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \Rightarrow$
$\Rightarrow A(k+1)(k+2)+Bk(k+2)+Ck(k+1) = 1$
Пусть $A = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}(k+1)(k+2)+Bk(k+2)+Ck(k+1) = \frac{1}{2}k^2+\frac{3}{2}k+1+B(k^2+2k)+C(k^2+k) \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} B+C = -\frac{1}{2} \\ 2B+C = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -\frac{1}{2}-B \\ 2B-\frac{1}{2}-B = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow B = -\frac{3}{2}+$

$\frac{1}{2} = -1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} = \frac{\frac{1}{2}}{k} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} - \frac{1}{k+1}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} - \frac{1}{k+1} =$
$= \frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{\frac{1}{2}-1}{2} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}{3} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}{4} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}{5} + \cdots + \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}{n} + \frac{\frac{1}{2}-1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} =$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} =$
$\frac{n^2+3n}{4n^2+12n+8}$ **Ответ:** $\frac{n^2+3n}{4n^2+12n+8}$

(d) $D_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n}$
$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} \Rightarrow D_n = \frac{1}{3} f'(\frac{1}{3})$
$f(x)$ - сумма $n+1$ членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и разностью $x \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{nx^{n+1}-nx^n-x^n+1}{(x-1)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} \Rightarrow f'(\frac{1}{3}) = \frac{n\frac{1}{3}^{n+1}-n\frac{1}{3}^n-\frac{1}{3}^n+1}{(\frac{1}{3}-1)^2} = \frac{n\frac{1}{3}^{n+1}-n\frac{1}{3}^n-\frac{1}{3}^n+1}{\frac{4}{9}} =$
$\frac{9n\frac{1}{3}^{n+1}-9n\frac{1}{3}^n-9\frac{1}{3}^n+9}{4} \Rightarrow D_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{9n\frac{1}{3}^{n+1}-9n\frac{1}{3}^n-9\frac{1}{3}^n+9}{4} = \frac{3n\frac{1}{3}^{n+1}-3n\frac{1}{3}^n-3\frac{1}{3}^n+3}{4} =$

$= \frac{3-2n\frac{1}{3}^n-3\frac{1}{3}^n}{4}$ **Ответ:** $\frac{3-2n\frac{1}{3}^n-3\frac{1}{3}^n}{4}$

(e) $E_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, где $a_1 = 2, a_k = 3a_{k-1} + 1$ при $k = 2$
Докажем, что $a_k = \frac{5*3^k-3}{6}$ методом математической индукции. Рассмотрим случай $k = 1$ (база индукции):
$a_1 = \frac{5*3^1-3}{6} = \frac{12}{6} = 2$ - верно
Докажем что $a_k = \frac{5*3^k-3}{6}$ верно при $a_{k-1} = \frac{5*3^{k-1}-3}{6}$ (шаг индукции):

$a_k = 3a_{k-1} + 1 = 3 \cdot \frac{5*3^{k-1}-3}{6} + 1 = 3 \cdot \frac{5\cdot\frac{1}{3}\cdot 3^k - 3}{6} + 1 = \frac{5\cdot 3^k - 9}{6} + 1 = \frac{5\cdot 3^k - 3}{6}$ - ч.т.д.

Так как при k = 1 равенство верно и для любого k выполняется $a_k = \frac{5*3^k-3}{6}$ при $a_{k-1} = \frac{5*3^{k-1}-3}{6}$, то равенство $a_k = \frac{5*3^k-3}{6}$ верно при любых $k \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow E_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{5\cdot 3^k-3}{6} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{5}{6}\cdot 3^k - \frac{1}{2}) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{5}{6}\cdot 3^k) - \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})$

$\sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{5}{6}\cdot 3^k)$ - сумма n членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{5}{2}$ и разностью 3 $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{5}{6}\cdot 3^k) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3^n-1}{3-1} = \frac{5\cdot 3^n - 5}{4}$

$\sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{2}) = \frac{n}{2}$

$E_n = \frac{5\cdot 3^n-5}{4} - \frac{n}{2} = \frac{5\cdot 3^n - 2n - 5}{4}$ **Ответ:** $\frac{5\cdot 3^n-2n-5}{4}$

3.

(a) Доказать: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Рассмотрим случай $n = 1$ (база индукции):

$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{2*3}{6} = 1$ - верно

Докажем что $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ верно при $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6}$ (шаг индукции):

$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} + n^2 = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{(n^2-n)(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{2n^3-2n^2-n^2+n}{6} + n^2 = \frac{2n^3-3n^2+n}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^+3n+1)}{6} = \frac{n(2n^+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- ч.т.д.

Так как при n = 1 равенство верно и для любого n выполняется $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ при $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6}$, то равенство $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ верно при любых $n \in \mathbb{N}$.

(b) Доказать: $\phi^n = \phi * F_n + F_{n-1}$

Рассмотрим случай $n = 1$: $\phi^1 = \phi * F_1 + F_0 = \phi + 0 = \phi$ - верно

Рассмотрим случай $n = 2$ (база индукции): $\phi^2 = \phi * F_2 + F_1 = \phi(F_1 + F_0) + F_1 = \phi + 1$

Проверим, что $\phi^2 = \phi + 1$: $\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\begin{cases} \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : \phi^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi \text{ - верно} \\ \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} : \phi^2 = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi \text{ - верно} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ случай n=2 - выполняется

Докажем что $\phi^n = \phi * F_n + F_{n-1}$ верно при $\phi^{n-1} = \phi * F_{n-1} + F_{n-2}$ для $n \geqslant 2$ (шаг индукции):

$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \Rightarrow F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$

$\phi^2 = \phi + 1$ (Из второго случая) $\Rightarrow \phi = \phi^2 - 1$

$\phi^{n-1} = \phi F_{n-1} + F_{n-2} \Rightarrow \phi^n = \phi^2 F_{n-1} + \phi F_{n-2} = \phi^2 F_{n-1} + \phi(F_n - F_{n-1}) = \phi^2 F_{n-1} + \phi F_n - \phi F_{n-1} = \phi^2 F_{n-1} + \phi F_n - (\phi^2 - 1) F_{n-1} = \phi^2 F_{n-1} + \phi F_n - \phi^2 F_{n-1} + F_{n-1} = \phi F_n + F_{n-1}$ - ч.т.д.

Так как при n = 2 равенство верно и для любого n выполняется $\phi^n = \phi * F_n + F_{n-1}$ при $\phi^{n-1} = \phi * F_{n-1} + F_{n-2}$, то равенство $\phi^n = \phi * F_n + F_{n-1}$ верно при любых $n \geqslant 2$, а так как мы проверили случай при $n = 1$, то равенство верно при любых $n \in \mathbb{N}$.

(c) Доказать: $F_n < 2^n$

Рассмотрим случай $n = 1$: $F_1 < 2 \Leftrightarrow 1 < 2$ - верно

Рассмотрим случай $n = 2$: $F_2 < 4 \Leftrightarrow 1 + 0 < 2$ - верно

Шаг индукции: докажем что $F_n < 2^n$ верно, если известно, что:

$$\left[\begin{array}{l} F_{n-1} < 2^{n-1} \\ F_{n-2} < 2^{n-2} \end{array}\right. \Rightarrow F_{n-1} + F_{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-2}$$

$F_n = (F_{n-1} + F_{n-2}) < 2^{n-1} + 2^{n-2} = \frac{1}{2} \cdot 2^n + \frac{1}{4} \cdot 2^n = \frac{3}{4} \cdot 2^n < 2^n$ - ч.т.д.

Так как при n = 1 и n = 2 равенство верно и для любого n выполняется $F_n < 2^n$ при $F_{n-1} < 2^{n-1}$ и $F_{n-2} < 2^{n-2}$, то равенство $F_n < 2^n$ верно при любых $n \in \mathbb{N}$.