Домашняя работа №5 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. (a) Будем считать что пары целых - это координаты на плоскости. Чтобы построить биекцию, начнём отображать натуральные числа в эти координаты таким образом:

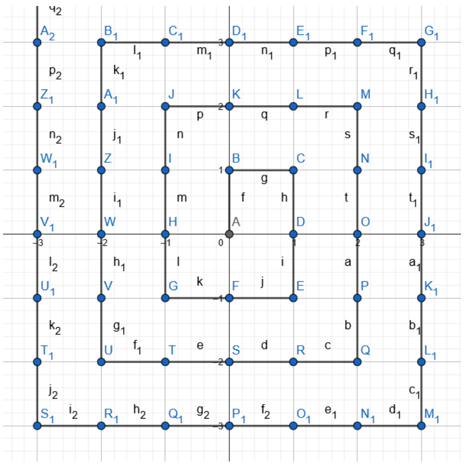
$$1 \to (0,0)$$

$$2 \to (0,1)$$

$$3 \to (1,1)$$

$$\dots$$

Продолжим идти в координатной плоскости "по спирали" сопоставляя натуральные числа и пары целых:



Таким образом, мы отображаем все натуральные во все пары целых. **Это отображение является биекцией**

(b) $A = [0;1],\ B = [0;1)$

Нам нужно "переселить" 1 из множества A, для этого отобразим элементы множества $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A$ из A в B, такой функцией:

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}, \text{ где } n \in \mathbb{N}.$$

То есть:

$$A_0 \to B_0$$

$$1 \to \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \to \frac{1}{3}$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{n} \to \frac{1}{n+1}$$

Эта функция корректна, так как для каждого натурального n, элемент $\frac{1}{n+1} \in B$

Теперь рассмотрим оставшуюся часть множества A, а именно $[0;1] \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Это множество, кроме точек вида $\frac{1}{n}$, содержит такие элементы, как 0, и все иррациональные числа на отрезке $[0;1]$.

Для этих элементов мы можем построить биекцию напрямую:

$$f(x) = x \quad \text{для всех}, x \in [0;1] \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Таким образом, мы построили биекцию между множествами $A = [0;1]$ и $B = [0;1)$, с помощью двух случаев.

2. (a)

$$a_n = \frac{((-1)^n - 1)n^2 + n + 1}{n}$$

$$\begin{cases} a_n = 1 + \frac{1}{n} \text{ - если } n \text{ чётное} \\ a_n = \frac{-2n^2+n+1}{n} = -2n + 1 + \frac{1}{n} \text{ - если } n \text{ нечётное} \end{cases}$$

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{-14}{3}, a_3 = \frac{5}{4}, a_4 = \frac{-44}{5}, a_5 = \frac{7}{6}, a_6 = \frac{-90}{7},$$

$$a_7 = \frac{9}{8}, a_8 = \frac{-152}{9}, a_9 = \frac{11}{10}$$

Найдём $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} M_n$

$$M_1 = \frac{3}{2}, M_2 = \frac{5}{4}, M_3 = \frac{5}{4}, M_4 = \frac{7}{6}, M_5 = \frac{7}{6}, M_6 = \frac{9}{8},$$

$$M_7 = \frac{9}{8}, M_8 = \frac{11}{10}, M_9 = \frac{11}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_n = \frac{n + 1 - n\%2 + 2}{n + 1 - n\%2 + 1} = \frac{n - n\%2 + 3}{n - n\%2 + 2}$$

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n - n\%2 + 3}{n - n\%2 + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{n\%2}{n} + \frac{3}{n}}{1 - \frac{n\%2}{n} + \frac{2}{n}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 1$$

Найдём $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} m_n$

$$m_1 = \frac{-152}{9}, m_2 = \frac{-152}{9}, m_3 = \frac{-152}{9}, m_4 = \frac{-152}{9}, m_5 = \frac{-152}{9},$$

$$m_6 = \frac{-152}{9}, m_7 = \frac{-152}{9}, m_8 = \frac{-152}{9}, m_9 = \frac{-152}{9} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} m_n = -\infty$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty} M_n = 1, \ \lim_{n\to\infty} m_n = -\infty$

(b)

$$a_n = \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}$$

$$a_1 = 0, a_2 = -\frac{2}{3}, a_3 = 0, a_4 = \frac{4}{5}, a_5 = 0, a_6 = -\frac{6}{7}, a_7 = \frac{8}{9}$$

Найдём $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} M_n$:

$$M_1 = \frac{8}{9}, M_2 = \frac{8}{9}, M_3 = \frac{8}{9}, M_4 = \frac{8}{9}, M_5 = \frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_n = max(a_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} M_n = 1$$

Найдём $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} m_n$:

$$m_1 = -\frac{6}{7}, m_2 = -\frac{6}{7}, m_3 = -\frac{6}{7}, m_4 = -\frac{6}{7}, m_5 = -\frac{6}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_n = min(a_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} m_n = -1$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty} M_n = 1, \ \lim_{n\to\infty} m_n = -1$

(c)

$$a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$a_1 = 6, a_2 = -4, a_3 = 0, a_4 = 2, a_5 = 6, a_6 = -4, a_7 = 0, a_8 = 2$$

Найдём $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} M_n$:

$$M_1 = 6, M_2 = 6, M_3 = 6, \ldots \Rightarrow M_n = max(a_n) \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 6$$

Найдём $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} m_n$:

$$m_1 = -4, m_2 = -4, m_3 = -4, \ldots \Rightarrow m_n = min(a_n) \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} m_n = -4$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 6, \ \lim\limits_{n\to\infty} m_n = -4$

3. $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$

(a)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n \cdot b_n) < \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$$

Пусть $a_n = (-1)^n$, а $b_n = 1 - (-1)^n$

Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = 1, \ \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = 2, \ \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}((-1)^n - 1) = 0$$

$$0 < 1 \cdot 2 = 2 \text{ - верно}$$

Ответ: $a_n = (-1)^n$, $b_n = 1 - (-1)^n$

(b)

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n < \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n + b_n)$$

Пусть $a_n = (-1)^n$, а $b_n = -(-1)^n$

Тогда

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = -1, \ \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n = -1, \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n + b_n) = 0$$

$$-2 < 0 \text{ - верно}$$

Ответ: $a_n = (-1)^n$, $b_n = -(-1)^n$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \text{ и } \overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n \cdot b_n) \neq a \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$$

Пусть $a_n = -1$, а $b_n = (-1)^n$

Тогда

$$a = 1,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n \cdot b_n) = 1,\ a \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = -1$$

$$1 \neq -1 \text{ - верно}$$

Ответ: $a_n = -1$, $b_n = (-1)^n$

4. Так как последовательность ограничена, то у неё точно есть верхний предел. Докажем, что верхний предел последовательности является её частичным пределом. Для этого зададим подпоследовательность, которая сходится к $M := \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} M_n$. Пусть $n_1 = 1$, а $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Найдём такой $n_{k+1} > n_k$, что:

$$M_{n_k} - \frac{1}{k} < a_{n_{k+1}} \leqslant M_{n_k}$$

Построим такую подпоследовательность a_{n_k}. По теореме о зажатой последовательности:

$$\begin{cases} (M_{n_k} - \frac{1}{k}) \to M \\ M_{n_k} \to M \end{cases} \Rightarrow a_{n_k} \to M$$

Следовательно, верхний предел всегда является частичным пределом последовательности, а так как верхний предел существует, тогда, когда последовательность ограничена, то можно сказать, что:

Если последовательность ограничена, то у неё всегда

найдётся частичный передел, например, верхний.