# Домашнее задание на 17.04 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

**№1** Докажем формулу:

$$J_k = \int \frac{1}{(y^2+\alpha^2)^k}\,dy = \begin{cases} \frac{1}{2(k-1)\alpha^2}\cdot\frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2}J_{k-1}, & k \geqslant 2 \\ \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha} + C, & k = 1 \end{cases}$$

Для $k \geqslant 2$:

По формуле интегрирования по частям:

$$J_{k-1} = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{y^2}{(y^2+\alpha^2)^k}\,dy$$

Преобразуем $y^2 = (y^2+\alpha^2) - \alpha^2$:

$$\int \frac{y^2}{(y^2+\alpha^2)^k}\,dy = J_{k-1} - \alpha^2 J_k$$

Подставляем обратно:

$$J_{k-1} = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + 2(k-1)(J_{k-1} - \alpha^2 J_k)$$

Решаем относительно $J_k$:

$$J_{k-1} - 2(k-1)J_{k-1} + 2(k-1)\alpha^2 J_k = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}}$$

$$-(2k-3)J_{k-1} + 2(k-1)\alpha^2 J_k = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}}$$

$$J_k = \frac{1}{2(k-1)\alpha^2}\cdot\frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2}J_{k-1}$$

Для $k = 1$:

$$J_1 = \int \frac{1}{y^2 + \alpha^2}\, dy = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha} + C.$$

**№2** (a) Найдём:

$$\int \frac{x^4}{(x+1)^3}\, dx$$

Пусть $t = x+1$, тогда $x = t-1$, $dx = dt$. Подставляем в интеграл:

$$\int \frac{(t-1)^4}{t^3}\, dt$$

Раскрываем $(t-1)^4$:

$$(t-1)^4 = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1$$

Делим числитель на знаменатель:

$$\frac{t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1}{t^3} = t - 4 + \frac{6}{t} - \frac{4}{t^2} + \frac{1}{t^3}$$

Тогда:

$$\int \left( t - 4 + \frac{6}{t} - \frac{4}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 4t + 6\ln|t| + \frac{4}{t} - \frac{1}{2t^2} + C$$

Заменяем $t = x + 1$:

$$\int \frac{x^4}{(x+1)^3} = \frac{(x+1)^2}{2} - 4(x+1) + 6\ln|x+1| + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$$

**Ответ:** $\frac{(x+1)^2}{2} - 4(x+1) + 6\ln|x+1| + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$

(b) Найдём:

$$\int \frac{1}{x^4 + 1}\, dx$$

Знаменатель:

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

Значит:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad D=\frac{1}{2}$$

Первая дробь:

$$\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|x^2+\sqrt{2}x+1|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+C$$

Вторая дробь:

$$\int\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|x^2-\sqrt{2}x+1|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C$$

Получаем:

$$\int\frac{1}{x^4+1}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C$$

**Ответ:** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C$