Домашнее задание на 27.04 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 (a) Функция $f(x) = \ln x$ при $x \in (0,1]$ не ограничена в окрестности точки $x = 0$, так как $\ln x \to -\infty$ при $x \to 0^+$. Следовательно, по факту 1, она не принадлежит $R([0,1])$.

Ответ: не принадлежит

(b) Функция $g(x)$ является ступенчатой и монотонно убывающей на $[0,1]$. Монотонные функции на отрезке ограничены и имеют не более чем счётное число точек разрыва (в данном случае — в точках $x = \frac{1}{2n-1}$, где $n \in \mathbb{N}$). По Факту 2, такие функции интегрируемы по Риману.

Ответ: принадлежит

(c) Функция $h(x)$ разрывна во всех точках отрезка $[0,1]$, кроме $x = 0$. Множество точек разрыва несчётно (так как $[0,1] \setminus \{0\}$ несчётно). По факту 2 функция с несчётным числом точек разрыва не интегрируема по Риману.

Ответ: не принадлежит

№2 (a) Каждое слагаемое можно записать в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2+k^2}} = \frac{1}{n\sqrt{4+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

То есть:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

Это интегральная сумма Римана для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ на интервале $[0,1]$ с разбиением $x_k = \frac{k}{n}$ и шагом $\Delta x = \frac{1}{n}$.

При $n \to \infty$, сумма стремится к интегралу:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

Используя формулу для интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \ln\left(1+\sqrt{1+4}\right) - \ln(2) = \ln(1+\sqrt{5}) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Ответ: $\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

(b) Рассмотрим логарифм предела:

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)$$

Выразим $\ln(n+k)$ как:

$$\ln(n+k) = \ln\left(n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Тогда сумма примет вид:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Первая сумма равна $\ln n$, а вторая стремится к интегралу:

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

Интегрируем по частям:

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left(x\ln(1+x)\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \ln 2 - (1-\ln 2) = 2\ln 2 - 1$$

Однако исходное выражение требует учета множителя n в произведении:

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k) = n^n \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Тогда:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)} = n \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

Логарифм этого выражения:

$$\ln L = \ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

При $n \to \infty$, сумма $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ стремится к $2\ln 2 - 1$, а $\ln n$ компенсируется множителем n в исходном выражении.

Ответ: $L = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$