Домашнее задание на 20.11 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. (a) $f(x) = \begin{cases} 2^{x^{-1}}, & x \neq 0, \\ -3, & x = 0. \end{cases} = f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ -3, & x = 0 \end{cases}$

Найдем предел функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2^{x^{-1}}.$$

Когда $x \to 0^+$, $x^{-1} \to +\infty$, и $2^{x^{-1}} \to +\infty$. Когда $x \to 0^-$, $x^{-1} \to -\infty$, и $2^{x^{-1}} \to 0$

Предела не существует, так как:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Поскольку $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ не существует, точка $x = 0$ является разрывом второго рода.

(b) $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Найдем предел функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x}.$$

Когда $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to +\infty$ и $\arctan \frac{1}{x} \to \frac{\pi}{2}$. Когда $x \to 0^-$, $\frac{1}{x} \to -\infty$ и $\arctan \frac{1}{x} \to -\frac{\pi}{2}$.

Предела не существует, так как:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Поскольку $\lim_{x\to 0} f(x)$ не существует, но существуют два односторонних предела, точка $x = 0$ является разрывом первого рода.

(c) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

Найдем предел функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x).$$

Для рациональных чисел $x_1 \to 0$ (где $f(x_1) = x_1$), мы имеем:

$$\lim_{x_1\to\infty} f(x_1) = 0.$$

Для иррациональных чисел $x_2 \to 0$ (где $f(x_2) = 0$), мы имеем:

$$\lim_{x_2\to\infty} f(x_2) = 0.$$

Значение функции в точке $x = 0$ равно 0, то есть:

$$f(0) = 0.$$

Таким образом, функция непрерывна в точке $x = 0$.

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\sin(3x))-1}{x^2}, x \neq 0, \\ \lambda, x = 0 \end{cases}$

Чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке $x = 0$, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \lambda.$$

Сначала найдем предел $\lim_{x\to 0} f(x)$ для $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{\cos(\sin(3x)) - 1}{x^2}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(3x)) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2(x) + \overline{o}(sin^2(3x)) - 1}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\sin^2(3x) + \overline{o}(sin^2(3x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x)(-\frac{1}{2} + \overline{o}(1))}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x)(\overline{o}(1) - \frac{1}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(3x + \overline{o}(9x^2))^2(\overline{o}(1) - \frac{1}{2})}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0}(3 + \overline{o}(9x))^2(\overline{o}(1) - \frac{1}{2}) = \lim_{x\to 0}(9 + 6\overline{o}(9x) + \overline{o}(81x^2))(\overline{o}(1) - \frac{1}{2}) =$$
$$= \lim_{x\to 0}(9 + 6\overline{o}(9x) + \overline{o}(81x^2))(\overline{o}(1) - \frac{1}{2}) = \lim_{x\to 0}(-\frac{9}{2} + \overline{o}(1)) = -\frac{9}{2}$$

Для непрерывности функции в точке $x = 0$ необходимо, чтобы:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{9}{2}.$$

Ответ: -$\frac{9}{2}$

3. (a) $f(x) = \frac{2+x^2}{\sqrt{1+x^4}}$

$$f'(x) = \frac{(2 + x^2)' \cdot \sqrt{1 + x^4} - (2 + x^2) \cdot (\sqrt{1 + x^4})'}{(1 + x^4)} =$$

Находим производные:

$$(2 + x^2)' = 2x,$$

$$(\sqrt{1 + x^4})' = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^4}} \cdot (4x^3) = \frac{2x^3}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

Теперь подставим в формулу:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{1+x^4} - (2+x^2) \cdot \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4} =$$

$$= \frac{2x(1+x^4) - 2x^3(2+x^2)}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}} =$$

$$= \frac{2x + 2x^5 - 4x^3 - 2x^5}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}} = \frac{2x - 4x^3}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}.$$

(b) $f(x) = \arcsin(5^{x^2})$

Область определения:

$$-1 \leqslant 5^{x^2} \leqslant 1 \Rightarrow x^2 <= 0 \Rightarrow x = 0$$

Значит функция определена только в точке 0. Производная в точке 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(5^{x^2}) - \arcsin(1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(5^{x^2}) - \frac{\pi}{2}}{x}$$

(c) $f(x) = (2+\cos(3x))^{\ln x}$

$$f'(x) = \left((2+\cos(3x))^{\ln x}\right)' =$$

$$= e^{\ln(x)\,\ln(\cos(3\,x)+2)} \cdot (\ln(x)\,\ln(\cos(3\,x)+2))' =$$

$$= e^{\ln(x)\,\ln(\cos(3\,x)+2)} \cdot \big((\ln(x))' \cdot \ln(\cos(3\,x)+2) + (\ln(\cos(3\,x)+2))' \cdot \ln(x)\big) =$$

$$= e^{\ln(x)\,\ln(\cos(3\,x)+2)} \cdot \left(\frac{\ln(\cos(3\,x)+2)}{x} + \frac{\ln(x)}{\cos(3\,x)+2} \cdot (\cos(3\,x)+2)'\right) =$$

$$= (\cos(3\,x)+2)^{\ln(x)}\,\left(\frac{\ln(\cos(3\,x)+2)}{x} - \frac{3\,\ln(x)\,\sin(3\,x)}{\cos(3\,x)+2}\right)$$

(d) $f(x) = 2^{\arctan(\sqrt{1+x^2})}$

$$f'(x) = 2^{\arctan(\sqrt{1+x^2})} \cdot \ln(2) \cdot (\arctan(\sqrt{1+x^2}))'$$

Находим производную $\arctan(u)$:

$$(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

Где $u = \sqrt{1+x^2}$:

$$u' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Теперь подставим:

$$f'(x) = 2^{\arctan(\sqrt{1+x^2})} \cdot \ln(2) \cdot \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+(1+x^2)} = 2^{\arctan(\sqrt{1+x^2})} \cdot \ln(2) \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(2+x^2)} =$$

$$= \frac{\ln(2)\ x\, 2^{\arctan\left(\sqrt{x^2+1}\right)}}{\sqrt{x^2+1}\ (x^2+2)}$$

(e) $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$

Находим производные по отдельности:

1. $(x^{a^a})' = a^a x^{a^a-1}$.
2. $(a^{x^a})' = a^{x^a} \cdot \ln(a) \cdot (x^a)' = a^{x^a} \cdot \ln(a) \cdot a x^{a-1}$.
3. $(a^{a^x})' = a^{a^x} \cdot \ln(a) \cdot (a^x)' = a^{a^x} \cdot \ln(a) \cdot a^x \ln(a)$.

Теперь объединяем:

$$f'(x) = a^a x^{a^a-1} + a^{x^a+1} \cdot \ln(a) \cdot x^{a-1} + a^{a^x+x} \cdot \ln^2(a)$$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$

(a) Чтобы найти производную функции $f(x)$ в точке $x = 0$, воспользуемся определением производной:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Значение функции в нуле:

$$f(0) = 0$$

Теперь подставим $f(h)$ для $h \neq 0$:

$$f(h) = h^2 \sin \frac{1}{h}$$

Тогда производная в нуле будет:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

Теперь найдем производную $f'(x)$ для $x \neq 0$ с использованием правила произведения:

$$f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x})' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Таким образом, производная функции $f(x)$ будет:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(b) Теперь установим род каждой точки разрыва полученной производной $f'(x)$.

Для $x \neq 0$ функция $f'(x)$ непрерывна, так как $\sin\frac{1}{x}$ и $\cos\frac{1}{x}$ являются непрерывными функциями. Однако, необходимо проверить непрерывность в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$, а $\cos\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$ (колеблется между -1 и 1), то:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) \text{ не существует}$$

Таким образом, в точке $x = 0$ производная имеет разрыв второго рода.

5. Для матрицы $A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$ мы сначала найдем определитель $\det A(x)$:

$$\det A(x) = a(x)d(x) - b(x)c(x)$$

Теперь вычислим производную определителя по x:

$$\frac{d}{dx}\det A(x) = \frac{d}{dx}(a(x)d(x) - b(x)c(x)) =$$

$$= \frac{da(x)}{dx}d(x) + a(x)\frac{dd(x)}{dx} - \left(\frac{db(x)}{dx}c(x) + b(x)\frac{dc(x)}{dx}\right) =$$

$$= \frac{da(x)}{dx}d(x) + a(x)\frac{dd(x)}{dx} - \frac{db(x)}{dx}c(x) - b(x)\frac{dc(x)}{dx}$$

Теперь найдем присоединённую матрицу $\operatorname{adj}(A(x))$:

$$\operatorname{adj}(A(x)) = \begin{pmatrix} d(x) & -b(x) \\ -c(x) & a(x) \end{pmatrix}$$

Теперь вычислим матрицу $\frac{dA(x)}{dx}$:

$$\frac{dA(x)}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{da(x)}{dx} & \frac{db(x)}{dx} \\ \frac{dc(x)}{dx} & \frac{dd(x)}{dx} \end{pmatrix}$$

Справа в следе получаем:

$$\operatorname{adj}(A(x)) \cdot \frac{dA(x)}{dx} = \begin{pmatrix} d(x) & -b(x) \\ -c(x) & a(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{da(x)}{dx} & \frac{db(x)}{dx} \\ \frac{dc(x)}{dx} & \frac{dd(x)}{dx} \end{pmatrix}.$$

Вычислим элементы этого произведения:

1. Первый элемент:

$$d(x)\frac{da(x)}{dx} - b(x)\frac{dc(x)}{dx}.$$

2. Второй элемент:

$$d(x)\frac{db(x)}{dx} - b(x)\frac{dd(x)}{dx}.$$

3. Третий элемент:

$$-c(x)\frac{da(x)}{dx} + a(x)\frac{dc(x)}{dx}.$$

4. Четвертый элемент:

$$-c(x)\frac{db(x)}{dx} + a(x)\frac{dd(x)}{dx}.$$

Теперь найдем след:

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(A(x))\cdot\frac{dA(x)}{dx}\right)=\left(d(x)\frac{da(x)}{dx}-b(x)\frac{dc(x)}{dx}\right)+\left(-c(x)\frac{db(x)}{dx}+a(x)\frac{dd(x)}{dx}\right).$$

Упростим:

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(A(x))\cdot\frac{dA(x)}{dx}\right)=d(x)\frac{da(x)}{dx}+a(x)\frac{dd(x)}{dx}-b(x)\frac{dc(x)}{dx}-c(x)\frac{db(x)}{dx}$$

Получаем:

$$\begin{cases}\operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(A(x))\cdot\frac{dA(x)}{dx}\right)=d(x)\frac{da(x)}{dx}+a(x)\frac{dd(x)}{dx}-b(x)\frac{dc(x)}{dx}-c(x)\frac{db(x)}{dx}\\ \frac{d}{dx}\det A(x)=\frac{da(x)}{dx}d(x)+a(x)\frac{dd(x)}{dx}-\frac{db(x)}{dx}c(x)-b(x)\frac{dc(x)}{dx}\end{cases}$$

Следовательно, $\operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(A(x))\cdot\frac{dA(x)}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\det A(x)$