Домашнее задание на 08.06 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

(a) Дано
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{k!}\right)}{k\ \ln^2 k}.$$
Пусть
$$a_k \ = \ \frac{\sin\left(\sqrt{k!}\right)}{k\ \ln^2 k}\,, \quad k \geq 2.$$
проверим, сходится ли
$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \ = \ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left|\sin(\sqrt{k!})\right|}{k \ln^2 k}.$$
для любого x: $\left|\sin x\right| \leq 1$, имеем
$$|a_k| \ = \ \frac{\left|\sin(\sqrt{k!})\right|}{k\ \ln^2 k} \ \leq \ \frac{1}{k\ \ln^2 k}.$$
Известно, что ряд
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ \ln^2 k}$$
сходится. Это следует, например, из интегрального признака:
$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ \ln^2 x} < \infty$$
Следовательно,
$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \ \leq \ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ \ln^2 k} \ < \ +\infty.$$
Ответ: сходится абсолютно

(b) Дано

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \frac{(-1)^{k(k+1)/2}}{1+x+x^{27}}\,dx$$

Пусть

$$a_k \;=\; \int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \;\frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{1+x+x^{27}}\;dx.$$

По определению

$$|a_k| = \left|\int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{1+x+x^{27}}\;dx\right| \;=\; \int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \;\frac{1}{1+x+x^{27}}\;dx$$

Заметим, что для любого $x \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$1+x+x^{27} \;\le\; 1+1+1 \;=\; 3,$$

поэтому

$$\frac{1}{1+x+x^{27}} \;\ge\; \frac{1}{3} \quad \text{для всех } x \in [0,1].$$

Поскольку при больших k число $\frac{1}{k^2}$ лежит в отрезке $\bigl[0,1\bigr]$, то на всём интегрируемом отрезке $\bigl[\frac{1}{k^2},\,1\bigr]$ справедливо

$$\frac{1}{1+x+x^{27}} \;\ge\; \frac{1}{3}.$$

Однако в выражении $|a_k|$ мы интегрируем в обратном порядке (из 1 в $1/k^2$), поэтому

$$|a_k| = \int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \frac{1}{1+x+x^{27}}\;dx \;=\; \int_{\frac{1}{k^2}}^{1} \frac{1}{1+x+x^{27}}\;dx$$

Следовательно, для всех $k \ge 1$

$$|a_k| \;=\; \int_{\frac{1}{k^2}}^{1} \frac{1}{1+x+x^{27}}\;dx \;\ge\; \int_{\frac{1}{k^2}}^{1} \frac{1}{3}\;dx \;=\; \frac{1}{3}\Bigl(1-\tfrac{1}{k^2}\Bigr).$$

Из этого сразу видно, что при $k \to \infty$

$$|a_k| \;\geq\; \frac{1}{3}\Bigl(1 - \tfrac{1}{k^2}\Bigr) \;\longrightarrow\; \frac{1}{3} \;>\; 0.$$

В частности, $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| \neq 0$. Но для сходимости любого числового ряда необходимо условие $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$. Значит, искомый ряд не сходится

Ответ: расходится

(c) Дано

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot \ln k \cdot \ln\ln k}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k \cdot \ln k \cdot \ln\ln k} \right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k \cdot \ln\ln k}$$

Для исследования его сходимости применим интегральный признак. Проверим, является ли функция

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x}$$

монотонно убывающей на $[2; +\infty)$. Вычислим производную:

$$f'(x) = -\frac{1 + \ln(\ln x)}{x^2 \cdot (\ln x)^2 \cdot (\ln\ln x)^2}$$

Знаменатель положителен, а числитель $1 + \ln(\ln x)$:

- Для $x \geqslant e^e \approx 15.15$, $\ln(\ln x) \geqslant 1$, следовательно, числитель положителен, и $f'(x) < 0$.
- Для $x \in [e; e^e)$, $\ln(\ln x) \in [0; 1)$, числитель положителен, и $f'(x) < 0$.

- Для $x \in [2; e)$, функция $f(x)$ не определена

Таким образом, $f(x)$ убывает на $[e; +\infty)$. Применим интегральный признак с начальной точкой $x = e$:

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x}\, dx$$

Сделаем замену $t = \ln\ln x$, $dt = \frac{1}{x \ln x} dx$. Интеграл преобразуется:

$$\int_{t(e)}^{\infty} \frac{1}{t}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{t}\, dt,$$

который расходится. Следовательно, ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k \cdot \ln\ln k}$ расходится. Значит, исходный ряд не сходится абсолютно.

Ряд имеет вид:

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k a_k, \quad \text{где } a_k = \frac{1}{k \cdot \ln k \cdot \ln\ln k}$$

Применим признак Лейбница (Факт 3):

1) Убывание a_k: Для $k \geqslant 2$, $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1) \cdot \ln(k+1) \cdot \ln\ln(k+1)} < a_k$, так как все множители в знаменателе увеличиваются.
2) Предел a_k: $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

Оба условия выполнены. Следовательно, ряд сходится условно.

Ответ: сходится условно, но не абсолютно

(d) Дано

$$\frac{(-1)^k}{k^\lambda} \operatorname{arctg} k$$

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^\lambda} \operatorname{arctg} k \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} k}{k^\lambda}.$$

Для исследования его сходимости используем сравнение с рядом $\sum \frac{1}{k^\lambda}$. Поскольку $\operatorname{arctg} k \sim \frac{\pi}{2}$ при $k \to \infty$, член ряда ведет себя как $\frac{\pi}{2k^\lambda}$. Таким образом, ряд сходится абсолютно, если $\lambda > 1$ (по признаку сравнения с p-рядом). Для $\lambda \leqslant 1$ ряд расходится.

Ряд имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{arctg} k}{k^\lambda}$$

Применим признак Дирихле (Факт 1):

- Ограниченность частичных сумм: Ряд $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$ имеет частичные суммы, ограниченные между -1 и 1.
- Монотонность и предел: Последовательность $\frac{\operatorname{arctg} k}{k^\lambda}$ монотонно убывает и стремится к нулю при $\lambda > 0$.

Условия признака Дирихле выполнены для $0 < \lambda \leqslant 1$. Следовательно, ряд сходится условно.

Ответ:

- Абсолютная сходимость: $\lambda > 1$.
- Условная сходимость: $0 < \lambda \leqslant 1$.
- Расходится: $\lambda \leqslant 0$.

(e) Дано

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(\ln k)^\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k(\ln k)^\lambda} \right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\lambda}.$$

Для исследования его сходимости применим интегральный признак. Проверим монотонность функции:

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\lambda}$$

Вычислим производную:

$$f'(x) = -\frac{1 + \lambda \ln(\ln x)}{x^2(\ln x)^{\lambda+1}}.$$

- Для $\lambda > 0$: При $x \geqslant e^{e^{1/\lambda}}$, $\ln(\ln x) \geqslant 1/\lambda$, числитель $1+\lambda \ln(\ln x) > 0$, следовательно, $f'(x) < 0$.
- Для $\lambda \leqslant 0$: Производная $f'(x) < 0$ для всех $x \geqslant 2$.

Таким образом, $f(x)$ убывает на $[2; +\infty)$. Применим интегральный признак:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\lambda} dx$$

Сделаем замену $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x} dx$:

$$\int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t^\lambda} dt$$

Интеграл сходится только при $\lambda > 1$. Следовательно, ряд $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k(\ln k)^\lambda}$ расходится при $\lambda \leqslant 1$. Значит, исходный ряд не сходится абсолютно при $\lambda \leqslant 1$.

Ряд имеет вид:

$$\sum_{k=2}^\infty (-1)^k \frac{1}{k(\ln k)^\lambda}$$

Применим признак Лейбница (Факт 3):

- Монотонность: Последовательность $a_k = \frac{1}{k(\ln k)^\lambda}$ убывает для $\lambda > 0$ (проверено выше).
- Предел: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Условия выполнены при $\lambda > 0$. Для $\lambda \leqslant 0$, последовательность a_k может не убывать (например, при $\lambda = -1$, $a_k = \frac{k}{\ln k}$, которая возрастает). Следовательно, ряд сходится условно при $0 < \lambda \leqslant 1$.

Ответ:

- Абсолютная сходимость: $\lambda > 1$
- Условная сходимость: $0 < \lambda \leqslant 1$
- Расходится: $\lambda \leqslant 0$

(f) Дано

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k^{\lambda+1/4}} + \frac{1}{k^{2\lambda+1/3}} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^{\lambda+1/4}} + \frac{1}{k^{2\lambda+1/3}} \right|$$

Так как все члены ряда положительны, абсолютная сходимость равносильна сходимости ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{\lambda+1/4}} + \frac{1}{k^{2\lambda+1/3}} \right)$$

Разобьем его на два ряда:

- Первый ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\lambda+1/4}}$. Сходится, если $\lambda + \frac{1}{4} > 1 \implies \lambda > \frac{3}{4}$.
- Второй ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\lambda+1/3}}$. Сходится, если $2\lambda + \frac{1}{3} > 1 \implies \lambda > \frac{1}{3}$.

Оба ряда сходятся одновременно только при $\lambda > \frac{3}{4}$. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится при $\lambda > \frac{3}{4}$.

Ряд имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k^{\lambda+1/4}} + \frac{1}{k^{2\lambda+1/3}} \right)$$

Разложим его на два ряда:

(a) Знакопеременный ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\lambda+1/4}}$. Сходится условно по признаку Лейбница (Факт 3), если $\lambda + \frac{1}{4} > 0 \implies \lambda > -\frac{1}{4}$.

(b) Положительный ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\lambda+1/3}}$. Рассматривается ранее.

Сумма сходящегося и расходящегося рядов расходится. Таким образом:

- При $\lambda \leqslant \frac{1}{3}$: положительный ряд расходится, а знакопеременный ряд сходится условно. Их сумма расходится.
- При $\frac{1}{3} < \lambda \leqslant \frac{3}{4}$: положительный ряд сходится, а знакопеременный ряд сходится условно. Их сумма сходится условно.

Ответ:

- Абсолютная сходимость: $\lambda > \frac{3}{4}$.
- Условная сходимость: $\frac{1}{3} < \lambda \leqslant \frac{3}{4}$.
- Расходится: $\lambda \leqslant \frac{1}{3}$.

(g) Дано

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos k}{\ln k - \ln \ln k}.$$

Применим признак Дирихле (Факт 1) с $a_k = \cos k$ и $b_k = \frac{1}{\ln k - \ln \ln k}$.

(a) Ограниченность частичных сумм $\sum a_k$:

  - Поскольку $\cos k$ — периодическая функция с нулевым средним, частичные суммы $\sum_{k=3}^{n} \cos k$ ограничены (по аналогии с суммой $\sum \cos k\theta$ для $\theta \neq 2\pi m$).

(b) Монотонность b_k:

  - Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\ln x - \ln \ln x}$ на $[3; +\infty)$.

- Производная:

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x\ln x}}{(\ln x - \ln\ln x)^2} = -\frac{\ln x - 1}{x\ln x(\ln x - \ln\ln x)^2}.$$

- Для $x \geqslant 3$, $\ln x \geqslant \ln 3 \approx 1.098 > 1$, следовательно, $f'(x) < 0$. Таким образом, b_k финально убывает.

(c) Предел b_k:

- $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k - \ln\ln k} = 0$.

Все условия признака Дирихле выполнены. Следовательно, ряд сходится условно.

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left| \frac{\cos k}{\ln k - \ln\ln k} \right| = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|\cos k|}{\ln k - \ln\ln k}.$$

Используем интегральный признак для функции $f(x) = \frac{1}{\ln x - \ln\ln x}$:

- Производная $f'(x) < 0$ на $[3; +\infty)$.
- Интеграл:
$$\int_3^{\infty} \frac{1}{\ln x - \ln\ln x}\, dx.$$

Сделаем замену $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}dx$:

$$\int_{\ln 3}^{\infty} \frac{1}{t - \ln t}\, dt.$$

Этот интеграл расходится (аналогично интегралу $\int \frac{1}{\ln x}dx$), так как $t - \ln t \sim t$ при $t \to \infty$. Следовательно, ряд $\sum \frac{1}{\ln k - \ln\ln k}$ расходится. Поскольку $|\cos k| \geqslant \frac{1}{2}$ для бесконечного числа k, ряд $\sum \frac{|\cos k|}{\ln k - \ln\ln k}$ также расходится.

Ответ: сходится условно, но не абсолютно

(h) Дано
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin^3 k}{\ln k} \operatorname{arctg}(e^k)$$

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{\sin^3 k}{\ln k} \operatorname{arctg}(e^k) \right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\sin^3 k|}{\ln k} \operatorname{arctg}(e^k).$$

Используем тригонометрическую формулу:

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$$

Тогда:
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\sin^3 k|}{\ln k} \operatorname{arctg}(e^k) \geqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{4}|\sin k|}{\ln k} \operatorname{arctg}(e^k).$$

Поскольку $\operatorname{arctg}(e^k) \to \frac{\pi}{2}$ при $k \to \infty$, член ряда ведет себя как $\frac{C}{\ln k}$ (где $C = \frac{\pi}{8}$). Ряд $\sum \frac{1}{\ln k}$ расходится (по интегральному признаку), исходный ряд не сходится абсолютно.

Ряд имеет вид:
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin^3 k}{\ln k} \operatorname{arctg}(e^k).$$

Применим признак Дирихле (Факт 1):

- Ограниченность частичных сумм: Разложим $\sin^3 k$ по формуле:

  $$\sin^3 k = \frac{3}{4} \sin k - \frac{1}{4} \sin 3k.$$

  Частичные суммы $\sum_{k=2}^{n} \sin k$ и $\sum_{k=2}^{n} \sin 3k$ ограничены (по свойству тригонометрических рядов).
- Монотонность и предел: Последовательность $\frac{\operatorname{arctg}(e^k)}{\ln k}$ убывает и стремится к 0 (так как $\operatorname{arctg}(e^k)$ ограничена, а $\ln k \to \infty$).

Условия признака Дирихле выполнены. Следовательно, ряд сходится условно.

Ответ: сходится условно, но не абсолютно

(i) Дано
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi k}{3}}{2^{\ln k}}$$

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\cos \frac{\pi k}{3}}{2^{\ln k}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos \frac{\pi k}{3}|}{2^{\ln k}}.$$

Оценка знаменателя:

Используем тождество $2^{\ln k} = k^{\ln 2}$. Тогда:

$$\frac{1}{2^{\ln k}} = \frac{1}{k^{\ln 2}}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\ln 2}}$ — это p-ряд с $p = \ln 2 \approx 0.693 < 1$, который расходится.

Оценка числителя:

Функция $|\cos \frac{\pi k}{3}|$ имеет период 6. В каждом периоде:

Для $k \equiv 0, 3 \pmod 6$: $|\cos \frac{\pi k}{3}| = 1$

Для остальных k: $|\cos \frac{\pi k}{3}| = 0.5$

Среднее значение $|\cos \frac{\pi k}{3}|$ за период:

$$\frac{1}{6}\left(1 + 0.5 + 0.5 + 1 + 0.5 + 0.5\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Таким образом, ряд $\sum \frac{|\cos \frac{\pi k}{3}|}{2^{\ln k}} \geqslant \sum \frac{2/3}{k^{\ln 2}}$, который расходится. Следовательно, исходный ряд не сходится абсолютно.

Ряд имеет вид:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi k}{3}}{2^{\ln k}}$$

Разбиение на три подряда:

- Для $k \equiv 0 \pmod 3$: $\cos\frac{\pi k}{3} = (-1)^m$ при $k = 3m$.
- Для $k \equiv 1 \pmod 3$: $\cos\frac{\pi k}{3} = (-1)^m \cdot 0.5$ при $k = 3m+1$.
- Для $k \equiv 2 \pmod 3$: $\cos\frac{\pi k}{3} = (-1)^m \cdot (-0.5)$ при $k = 3m+2$.

Каждый подряд можно записать как:

- $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(3m)^{\ln 2}}$,
- $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot 0.5}{(3m+1)^{\ln 2}}$,
- $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (-0.5)}{(3m+2)^{\ln 2}}$.

Проверка сходимости каждого подряда:

- Все подряды являются знакопеременными с членами, убывающими к нулю. По признаку Лейбница, они сходятся.
- Сумма трех сходящихся рядов также сходится.

Ответ: сходится условно, но не абсолютно

(j) Дано

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$$

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k} \right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{|k+(-1)^k|}$$

Оценка знаменателя:

- Для четных $k = 2m$: $|2m+1| = 2m+1$.
- Для нечетных $k = 2m+1$: $|2m+1-1| = 2m$.

Разобьем ряд на два:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m}$$

Оба ряда являются гармоническими и расходятся. Следовательно, исходный ряд не сходится абсолютно.

Ряд имеет вид:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$$

Объединим члены попарно:

$$\frac{(-1)^{2m}}{2m+1} + \frac{(-1)^{2m+1}}{2m} = \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m}$$

Общий член пары:

$$\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m} = -\frac{1}{2m(2m+1)}$$

Ряд из таких членов:

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m(2m+1)}$$

Этот ряд сходится абсолютно, так как:

$$\frac{1}{2m(2m+1)} < \frac{1}{4m^2},$$

а ряд $\sum \frac{1}{m^2}$ сходится. Следовательно, исходный ряд сходится условно.

Ответ: сходится условно, но не абсолютно