Домашнее задание на 06.03 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 (a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$

Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 3\ (x^2 + y^2 - 13) = 0 \\ f'_y(x,y) = 6\ (x\,y - 6) = 0 \end{cases} \implies \begin{matrix} A = (-3,-2), & B = (-2,-3), \\ C = (2,3), & D = (3,2) \end{matrix}$$

Найдём матрицу Гессе:

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} \implies d^2 f_{(x,y)}\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right) = 12xh_1^2 + 12yh_1h_2$$

Найдём нормальный вид матрицы второго дифференциала для точек A, B, C и D

1) $A = (-3,-2)$

$$H_f = \begin{pmatrix} -18 & -12 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = -18 < 0, \quad \delta_2 = 18^2 - 12^2 > 0$$

Следовательно,

$$d^2 f_A\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right) < 0$$

Значит A - точка локального максимума

2) $B = (-2,-3)$

$$H_f = \begin{pmatrix} -12 & -18 \\ -18 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = -12 < 0, \quad \delta_2 = 12^2 - 18^2 = -180 < 0$$

Следовательно,

$$d^2 f_B\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right) = -12h_1^2 + 15h_2^2$$

$$\begin{cases} d^2 f_B\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -12 < 0 \\ d^2 f_B\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 15 > 0 \end{cases} \implies B \text{ - не точка локального экстремума}$$

3) $C = (2, 3)$

$$H_f = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 12 > 0, \quad \delta_2 = 12^2 - 18^2 = -180 < 0$$

Следовательно,

$$d^2 f_B\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right) = 12h_1^2 - 15h_2^2$$

$$\begin{cases} d^2 f_B\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 12 > 0 \\ d^2 f_B\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -15 < 0 \end{cases} \implies C \text{ - не точка локального экстремума}$$

4) $D = (3, 2)$

$$H_f = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 18 > 0, \quad \delta_2 = 18^2 - 12^2 > 0$$

Следовательно,

$$d^2 f_D\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right) > 0$$

Значит D - точка локального минимума

Ответ: A - лок. мин., D - лок. макс.

(b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2$

Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 4\,(x^3 - x) = 0 \\ f'_y(x, y) = 4\,y^3 = 0 \end{cases} \implies \begin{matrix} A = (0, 0), \quad B = (-1, 0), \\ C = (1, 0) \end{matrix}$$

Найдём матрицу Гессе:

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,(3\,x^2 - 1) & 0 \\ 0 & 12\,y^2 \end{pmatrix}$$

$$\implies d^2 f_{(x,y)}\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right) = 4\,\left(3\,x^2 - 1\right) h_1^2 + 12y^2 h_2^2$$

Подставим точки:

1) $A = (0, 0)$:

$$\implies d^2 f_A\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right) = -4h_1^2$$

$$\implies d^2 f_A\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right) < 0$$

Значит A - точка локального максимума

2) $B = (-1, 0)$:

$$\implies d^2 f_B\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right) = 8h_1^2 > 0$$

Значит B - точка локального минимума

3) $C = (1, 0)$:

$$\implies d^2 f\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right) = 8h_1^2 > 0$$

Значит C - точка локального минимума

Ответ: B - лок. мин., C - лок. мин.

(c) $f(x, y, z) = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$

Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = 3\ (3\,x^2 + 2\,y) = 0 \\ f'_y(x, y, z) = 2\ (y + 3\,x) = 0 \\ f'_z(x, y, z) = 2\ (z - 1) = 0 \end{cases} \qquad \implies A = (0, 0, 1), \quad B = (2, -6, 1)$$

Найдём матрицу Гессе:

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Приведём квадратичную форму к нормальному виду симметричным методом Гауса:

$$\begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 18x - 18 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$d^2 f_{(x,y,z)}\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}\right) = 2h_1^2 + (18x - 18)h_2^2 + 2h_3^2$$

Подставим точки:

1) $A = (0, 0, 1)$:

$$d^2 f_A \left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \right) = 2h_1^2 - 18h_2^2 + 2h_3^2$$

$$\begin{cases} d^2 f_A \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) > 0 \\ d^2 f_A \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) < 0 \end{cases} \implies A \text{ - не точка локального экстремума}$$

2) $B = (2, -6, 1)$:

$$d^2 f_B \left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \right) = 2h_1^2 + 18h_2^2 + 2h_3^2 > 0$$

Следовательно, B - точка локального минимума

Ответ: B - лок. мин.

№2 Если (a, b) лежит на $x - y^2 = 6$, это значит, что:

$$a = 6 + b^2$$

Если (c, d) лежит на $-2x + y = 0$ это значит, что:

$$d = 2c$$

Найдём расстояние между точками

$$(6+b^2, b) \text{ и } (c, 2c)$$

Подставим в формулу для нахождени расстояния в Евклидовом пространстве:

$$\sqrt{(6+b^2-c)^2+(b-2c)^2}$$

Найдём точки минимума у функции:

$$f(b,c) = (6+b^2-c)^2+(b-2c)^2$$

Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_b = 2\ (2\,b^3 + (13-2\,c)\ b - 2\,c) = 0 \\ f'_c = 2\ (5\,c - b^2 - 2\,b - 6) = 0 \end{cases} \implies (b,c) = \left(\frac{1}{4}, \frac{21}{16}\right)$$

Найдём матрицу Гессе:

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{b^2} & f''_{bc} \\ f''_{cb} & f''_{c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ (6\,b^2 - 2\,c + 13) & -4\,b-4 \\ -4\,b-4 & 10 \end{pmatrix}$$

Подставим $(b,c) = \left(\frac{1}{4}, \frac{21}{16}\right)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{43}{2} & -5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

Найдём угловые миноры:

$$\delta_1 = \frac{43}{2}, \quad \delta_2 = 190$$

Следовательно, $(b,c) = \left(\frac{1}{4}, \frac{21}{16}\right)$ точка минимума функции.

Теперь найдём искомое минимальное расстояние между кривыми, подставив эту точку:

$$\sqrt{(6+b^2-c)^2+(b-2c)^2}=\frac{19\sqrt{5}}{8}$$

Ответ: $\frac{19\sqrt{5}}{8}$

№3 Псевдорешение и значение функции невязки для несовместной СЛУ:

1) Нормальное уравнение:

$$A^T A\theta = A^T\beta$$

Решение системы:

$$\theta = \begin{bmatrix} -\frac{107}{30} \\ -\frac{17}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{при } z=0)$$

2) Значение функции невязки:

$$\psi(\theta)=\sqrt{\frac{1}{30}}=\frac{\sqrt{30}}{30}$$

Ответ: Псевдорешение: $\begin{bmatrix} -\frac{107}{30} \\ -\frac{17}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$, значение функции невязки: $\frac{\sqrt{30}}{30}$.