Домашнее задание на 27.04 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 (a) Функция $f(x) = \ln x$ при $x \in (0, 1]$ не ограничена в окрестности точки $x = 0$, так как $\ln x \to -\infty$ при $x \to 0^+$. Следовательно, по факту 1, она не принадлежит $R([0, 1])$.

Ответ: не принадлежит

(b) Функция $g(x)$ является ступенчатой и монотонно убывающей на $[0, 1]$. Монотонные функции на отрезке ограничены и имеют не более чем счётное число точек разрыва (в данном случае — в точках $x = \frac{1}{2n-1}$, где $n \in \mathbb{N}$). По Факту 2, такие функции интегрируемы по Риману.

Ответ: принадлежит

(c) Функция $h(x)$ разрывна во всех точках отрезка $[0, 1]$, кроме $x = 0$. Множество точек разрыва несчётно (так как $[0, 1] \setminus \{0\}$ несчётно). По факту 2 функция с несчётным числом точек разрыва не интегрируема по Риману.

Ответ: не принадлежит

№2 (a) Каждое слагаемое можно записать в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2 + k^2}} = \frac{1}{n\sqrt{4 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

То есть:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

Это интегральная сумма Римана для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ на интервале $[0, 1]$ с разбиением $x_k = \frac{k}{n}$ и шагом $\Delta x = \frac{1}{n}$.

При $n \to \infty$, сумма стремится к интегралу:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

Используя формулу для интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \ln\left(1+\sqrt{1+4}\right) - \ln(2) = \ln(1+\sqrt{5}) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Ответ: $\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

(b) Рассмотрим логарифм предела:

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)$$

Выразим $\ln(n+k)$ как:

$$\ln(n+k) = \ln\left(n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Тогда сумма примет вид:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Первая сумма равна $\ln n$, а вторая стремится к интегралу:

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

Интегрируем по частям:

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left(x\ln(1+x)\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \ln 2 - (1-\ln 2) = 2\ln 2 - 1$$

Однако исходное выражение требует учета множителя n в произведении:

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k) = n^n \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Тогда:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)} = n \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

Логарифм этого выражения:

$$\ln L = \ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

При $n \to \infty$, сумма $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ стремится к $2\ln 2 - 1$, а $\ln n$ компенсируется множителем n в исходном выражении.

Ответ: $L = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$

№3 (a) Найдём

$$\int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$$

Сделаем замену:

$$t = \ln x \quad \Rightarrow \quad x = e^t, \quad dx = e^t dt$$

Переписываем подынтегральное выражение:

$$\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} \cdot dx = \frac{1}{e^t \cdot \sqrt{1+t}} \cdot e^t dt = \frac{1}{\sqrt{1+t}}dt$$

Границы интегрирования:

- При $x = 1$, $t = \ln 1 = 0$;
- При $x = e$, $t = \ln e = 1$

Получаем:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt = 2(\sqrt{2}-1) + C$$

Ответ: $2(\sqrt{2}-1) + C$

(b) Найдём:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \arctan x\,dx$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \arctan x\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

Упростим второй интеграл:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

Упростим подынтегральную функцию:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

То есть:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \arctan x\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

Подставим границы:

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{2} \cdot \arctan(\sqrt{3}) - 0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

Теперь вычислим интеграл:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\sqrt{3}}1dx-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

Финальный результат

$$\int_0^{\sqrt{3}}x\cdot\arctan x\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

Упростим:

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) Найдём:

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{2x^7-x^5+2x^3-x+1}{\cos^2 x}\,dx$$

Запишем подынтегральную функцию:

$$f(x)=\frac{2x^7-x^5+2x^3-x+1}{\cos^2 x}$$

распишем:

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3}f(x)\,dx=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(\frac{2x^7-x^5+2x^3-x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

интеграл нечётной функции по симметричному отрезку обнуляется:

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3}f(x)\,dx=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

результат:

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2\sqrt{3}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$

(d) Найдём:

$$\int_{1/3}^{3} \frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}\, dx$$

Замена $x = \frac{1}{t}$:

- $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$
- $\arctan x = \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$
- $x^2 - x + 1 = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1$

Теперь соберём всё в заменённый интеграл:

$$\int_{x=1/3}^{x=3} \frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}\, dx = \int_{t=3}^{t=1/3} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

Сменим пределы, уберём минус:

$$= \int_{1/3}^{3} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^2} dt$$

Упростим выражение:

$$\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}} = \frac{1}{t^2 + 1 - t}$$

Получаем:

$$\int_{1/3}^{3} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2 - t + 1} dt$$

Обозначим:

$$I = \int_{1/3}^{3} \frac{\arctan x}{x^2 - x + 1}\, dx$$

После замены:

$$I = \int_{1/3}^{3} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 - x + 1} dx$$

Сложим два выражения:

$$2I = \int_{1/3}^{3} \frac{\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 - x + 1} dx$$

Так как:

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{для } x > 0$$

Получаем

$$2I = \int_{1/3}^{3} \frac{\pi/2}{x^2 - x + 1} dx = \frac{\pi}{2} \int_{1/3}^{3} \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$$

Подставляем обратно:

$$2I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2 \cdot \arctan(4\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \implies I = \frac{\pi \cdot \arctan(4\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{\pi \cdot \arctan(4\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$

(e) Найдём:

$$\int_{1/e}^{1/(2e^2)} g(y)\, dy, \quad \text{где } g(y) \text{ — обратная функция к } f(x) = \frac{1}{x \ln x},\ x \in (1, +\infty)$$

Найдём x_1, x_2 такие, что $f(x_i) = y_i$**

Нам даны:

- $y_1 = \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{x_1 \ln x_1} = \frac{1}{e}$
- $y_2 = \frac{1}{2e^2} \Rightarrow \frac{1}{x_2 \ln x_2} = \frac{1}{2e^2}$

Решим уравнения:

$$x_1 \ln x_1 = e \quad \text{и} \quad x_2 \ln x_2 = 2e^2$$

Теперь:

$$\int_{1/e}^{1/(2e^2)} g(y)\,dy = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\,dx$$

$$\int_{1/e}^{1/(2e^2)} g(y)\,dy = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\,dx = \ln 2$$

Ответ: $\ln 2$