Домашнее задание на 23.01 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Найдем промежутки монотонности и экстремумы для каждой из заданных функций.

(a) $f(x) = \frac{3x-7}{(x^2-1)^2}$ Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{(3)(x^2-1)^2 - (3x-7)(2(x^2-1)(2x))}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{3(x^2-1)^2 - 4x(3x-7)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1)(3(x^2-1) - 4x(3x-7))}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{-9x^2+28x-3}{(x^2-1)^3} = \frac{(x-3)(1-9x)}{(x^2-1)^3}$$

Найдём на каких промежутках функция f возрастает, а на каких убывает:

$$f'(x) = \frac{(x-3)(1-9x)}{(x^2-1)^3} \leqslant 0 \implies x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{9}, 1\right) \cup [3; +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{(x-3)(1-9x)}{(x^2-1)^3} \geqslant 0 \implies x \in \left(-1, \frac{1}{9}\right] \cup (1, 3]$$

Следовательно, возрастает на:

$$x \in \left(-1, \frac{1}{9}\right] \cup (1, 3]$$

И убывает на:

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{9}, 1\right) \cup [3; +\infty)$$

Точки экстремумов:

$$\{\frac{1}{9}, 3\}$$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^{x\ln x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Найдём производную f при $x > 0$:

$$f'(x) = (e^{x\ln^2(x)})' = (x\ln^2(x))'e^{x\ln^2(x)} = (\ln^2(x) + 2\ln(x))e^{x\ln^2(x)} =$$

$$= \ln(x)(\ln(x) + 2)e^{x\ln^2(x)} = (\ln(x) - \ln(1))(\ln(x) - \ln(e^{-2}))e^{x\ln^2(x)}$$

Найдём промежутки монотонности функции f:

$$f'(x) = (\ln(x) - \ln(1))(\ln(x) - \ln(e^{-2}))e^{x\ln^2(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-e^{-2})e^{x\ln^2(x)} \geqslant 0 \text{ по м. рационализации} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (0, e^{-2}] \cup [1; +\infty)$$

$$f'(x) = (\ln(x) - \ln(1))(\ln(x) - \ln(e^{-2}))e^{x\ln^2(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-e^{-2})e^{x\ln^2(x)} \leqslant 0 \text{ по м. рационализации} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [e^{-2}; 1]$$

Следовательно, функция убывает при:

$$x \in [e^{-2}; 1]$$

и возрастает при:

$$x \in (0, e^{-2}] \cup [1; +\infty)$$

Точки экстремумов:

$$\{0, e^{-2}, 1\}$$

№2 Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geqslant 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

(a) Мы знаем, что $\sin x$ возрастает на:

$$x \in [\pi k; \frac{\pi(2k+1)}{2}] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

А убывает на:

$$x \in [\frac{\pi(2k-1)}{2}; \pi k] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Также мы знаем, что x^2 возрастает на

$$x \geqslant 0$$

и убывает на:

$$x \leqslant 0$$

Следовательно, f возрастает на:

$$x \in [\pi k; \frac{\pi(2k+1)}{2}] \quad \forall k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$$

и убывает на:

$$x \in (-\infty; 0] \cup [\frac{\pi(2k-1)}{2}; \pi k] \quad \forall k > 0, k \in \mathbb{Z}$$

Точки экстремумов:

$$\{\pi k\}\, k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$$

(b) $\sin x$ выпуклый вниз при:

$$x \in [\pi(2k-1); \pi 2k] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

и выпуклый вверх при:

$$x \in [\pi 2k; \pi(2k+1)] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

x^2 всегда выпуклый вниз.

Следовательно, f выпуклая вниз при:

$$x \in (-\infty; 0] \cup [\pi(2k-1); \pi 2k] \quad \forall k > 0, k \in \mathbb{Z}$$

и выпуклая вверх при:

$$x \in [\pi 2k; \pi(2k+1)] \quad \forall k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$$

№3 Докажем неравенства:

(a) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ для всех $x > 0$

Разложим $\sqrt{1+x}$ по формуле Тейлора до 0 степени:

$$f(x) = \sqrt{1+x} = f(0) + f'(c)x, \text{ где } c \in (0, x)$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+c}} < 1 + \frac{x}{2}$$

Разложим $\sqrt{1+x}$ по формуле Тейлора до 1 степени:

$$f(x) = \sqrt{1+x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)}{2}x^2 =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8(c+1)^{\frac{3}{2}}}x^2 > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

Следовательно,

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \text{ для всех } x > 0$$

(b) $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$ для всех $0 < a < b$

Разложим $f(x) = \ln(x)$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = \ln(x) = f(1) + f'(c)(x-1) = \frac{x-1}{c}, \text{ где } c \in (0; x)$$

Сравним $\frac{b-a}{b}$ и $\ln\frac{b}{a}$:

$$\ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a = \frac{b-1}{c_1} - \frac{a-1}{c_2} < \frac{b-1}{a} - \frac{a-1}{a} = \frac{b-a}{a}$$

Сравним $\ln\frac{b}{a}$ и $\frac{b-a}{a}$:

$$\ln\frac{b}{a} = \frac{b-1}{c_1} - \frac{a-1}{c_2} > \frac{b-1}{b} - \frac{a-1}{b} = \frac{b-a}{b}$$

№4 (a) Докажем, что $f(x) = 3x^x = 3e^{x\ln x}$ - выпуклая.

$$f'(x) = 3\,x^x\,\ln(x) + 3\,x^x \implies$$

$$\implies f''(x) = 3\,x^x\,\ln^2(x) + 6\,x^x\,\ln(x) + 3\,x^{x-1}\,(x+1) \geqslant 0 \text{ при } x > 0$$

Воспользуемся неравенством Йенсена для выпуклой при $x > 0$ функции $f(x) = 3x^x$, положив $n = 3$, $\lambda_i = \frac{1}{3}$:

$$x^x + y^y + z^z = \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z) \geqslant f(\frac{1}{3}(x+y+z)) = f(\pi)$$

$$f(\pi) = 3\pi^\pi > 36 \cdot 3 = 108$$

(b) Докажем, что $f(x) = e^x$ - выпуклая.

$$f'(x) = e^x \implies f''(x) = e^x \geqslant 0 \implies f(x) \text{ - выпуклая}$$

Воспользуемся неравенством Йенсена для выпуклой функции $f(x) = e^x$, положив $\lambda_i = \frac{1}{n}$:

$$e^{\frac{\ln x_1 + \dots + \ln x_n}{n}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

№5 Для нахождения максимально возможного значения суммы $\sin A + \sin B + \sin C$, где A, B и C — углы треугольника, воспользуемся неравенством Йенсена.

Углы треугольника A, B и C удовлетворяют условию:

$$A + B + C = \pi$$

Функция $\sin x$ является выпуклой на интервале $[0, \pi]$. По неравенству Йенсена для выпуклой функции имеем:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant 3 \sin\left(\frac{A + B + C}{3}\right).$$

Подставим значение суммы углов:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Равенство в неравенстве Йенсена достигается, когда $A = B = C$. В случае треугольника это возможно, когда $A = B = C = 60°$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$