Домашнее задание на 06.02 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Для функции $f(x,y) = e^{x^2 y} + xy^2 + 1$ найдем частную производную по переменной y в точке (a,b) двумя способами.

Согласно формуле, частная производная функции f по переменной y в точке (a,b) определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t}$$

Сначала вычислим $f(a,b+t)$:

$$f(a,b+t) = e^{a^2(b+t)} + a(b+t)^2 + 1$$

Теперь подставим это в формулу:

$$f(a,b+t) - f(a,b) = \left(e^{a^2(b+t)} - e^{a^2 b}\right) + a(b+t)^2 - ab^2$$

$$a(b+t)^2 - ab^2 = a(b^2 + 2bt + t^2) - ab^2 = 2abt + at^2$$

$$f(a,b+t) - f(a,b) = \left(e^{a^2(b+t)} - e^{a^2 b}\right) + 2abt + at^2$$

$$\frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t} = \frac{e^{a^2(b+t)} - e^{a^2 b}}{t} + 2ab + at$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{a^2(b+t)} - e^{a^2 b}}{t} = \frac{d}{dt} e^{a^2(b+t)}\bigg|_{t=0} = a^2 e^{a^2 b}$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a^2 e^{a^2 b} + 2ab$$

Теперь найдем частную производную f по y, считая x константой:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2 y} + xy^2 + 1\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{x^2 y} + 2xy$$

Подставим $x = a$ и $y = b$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = a^2 e^{a^2 b} + 2ab$$

Ответ: $a^2 e^{a^2 b} + 2ab$

№2 (a) $f(x, y, z) = (x + 3y)^{2x+z}$

Частная производная по x:

$$\ln f(x, y, z) = (2x + z)\ln(x + 3y)$$

$$\frac{1}{f(x, y, z)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 2\ln(x + 3y) + (2x + z) \cdot \frac{1}{x + 3y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x, y, z)\left(2\ln(x + 3y) + \frac{2x + z}{x + 3y}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x + 3y)^{2x+z}\left(2\ln(x + 3y) + \frac{2x + z}{x + 3y}\right)$$

Частная производная по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2x + z) \cdot (x + 3y)^{2x+z-1} \cdot 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(2x + z)(x + 3y)^{2x+z-1}$$

Частная производная по z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (x + 3y)^{2x+z} \cdot \ln(x + 3y)$$

Ответ:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+3y)^{2x+z}\left(2\ln(x+3y) + \frac{2x+z}{x+3y}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(2x+z)(x+3y)^{2x+z-1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = (x+3y)^{2x+z}\ln(x+3y)$$

(b) $f(x,y,z) = z \cdot \operatorname{arctg}(x + \ln(y))$

Частная производная по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z \cdot \frac{1}{1+(x+\ln(y))^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x+\ln(y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{1+(x+\ln(y))^2}$$

Частная производная по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z \cdot \frac{1}{1+(x+\ln(y))^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x+\ln(y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z}{y\,(1+(x+\ln(y))^2)}$$

Частная производная по z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \operatorname{arctg}(x+\ln(y))$$

Ответ:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{1+(x+\ln(y))^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z}{y\,(1+(x+\ln(y))^2)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \operatorname{arctg}(x+\ln(y)).$$

№3 Рассмотрим функцию $f(x,y)$, заданную следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Для нахождения частных производных $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$ воспользуемся определением производной по направлению:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t}$$

Подставим $f(0,0) = 0$ и $f(t,0) = \frac{t \cdot 0}{t^2+0^2} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Аналогично для $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t}$$

Подставим $f(0,0) = 0$ и $f(0,t) = \frac{0 \cdot t}{0^2+t^2} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Таким образом, обе частные производные в точке $(0,0)$ существуют и равны нулю:

$$f'_x(0,0) = 0, \quad f'_y(0,0) = 0$$

(b) Чтобы показать, что функция $f(x,y)$ разрывна в точке $(0,0)$, рассмотрим предел функции при приближении к $(0,0)$ вдоль различных направлений.

Пусть $y = kx$, где $k \neq 0$, тогда:

$$f(x,kx) = \frac{x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

Предел при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x,kx) = \frac{k}{1+k^2}$$

Этот предел зависит от k и не равен нулю, если $k \neq 0$.

Таким образом, предел функции $f(x, y)$ при $(x, y) \to (0, 0)$ зависит от направления приближения и не существует. Следовательно, функция $f(x, y)$ разрывна в точке $(0, 0)$.

№4 (a) $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2$, $\bar{a} = (2, -3)$, $\bar{v} = (3, -4)$

Производная по направлению вычисляется для единичного вектора $\bar{w}$, сонаправленного с $\bar{v}$. Найдем $\bar{w}$:

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Тогда единичный вектор:

$$\bar{w} = \frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Вычислим частные производные функции $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 10y$$

Вычисляем частные производные в точке $\bar{a} = (2, -3)$

Подставляем $\bar{a} = (2, -3)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, -3) = 6 \cdot 2 = 12, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, -3) = 10 \cdot (-3) = -30$$

Находим производную по направлению $\bar{w}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(2, -3) = w_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(2, -3) + w_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(2, -3)$$

Подставляем $\bar{w} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(2, -3) = \frac{3}{5} \cdot 12 + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot (-30) = \frac{36}{5} + \frac{120}{5} = \frac{156}{5}$$

Ответ: $\frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(2, -3) = \frac{156}{5}$

(b) $f(x, y, z) = z \sin(x + 2y)$, $\bar{a} = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -2\right)$, $\bar{v} = (1, -1, 2)$ Найдем единичный вектор $\bar{w}$, сонаправленный с $\bar{v}$:

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}.$$

Тогда единичный вектор:

$$\bar{w} = \frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Вычислим частные производные функции $f(x, y, z) = z \sin(x + 2y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z \cos(x + 2y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2z \cos(x + 2y), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \sin(x + 2y)$$

Подставляем $\bar{a} = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -2\right)$:

$$x + 2y = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Тогда:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -2\right) = -2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -2\right) = 2 \cdot (-2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -2\right) = w_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + w_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + w_3 \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$$

Подставляем $\bar{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -2\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot 0 + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot 1 = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

№5 Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ и найдем её производную в точке $(1, 1)$ по направлению вектора $\bar{w}_\lambda = (\cos\lambda, \sin\lambda)$, где $\lambda \in [0, 2\pi)$.

Вычислим частные производные функции $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y.$$

Подставляем $(x, y) = (1, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1 + 2 \cdot 1 = 1.$$

Используем формулу для производной по направлению:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{w}_\lambda}(1,1) = w_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + w_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$$

Подставляем $\bar{w}_\lambda = (\cos\lambda, \sin\lambda)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{w}_\lambda}(1,1) = \cos\lambda \cdot 1 + \sin\lambda \cdot 1 = \cos\lambda + \sin\lambda$$

Таким образом, производная по направлению $\bar{w}_\lambda$ равна:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{w}_\lambda}(1,1) = \cos\lambda + \sin\lambda$$

Упростим выражение:

$$\cos\lambda + \sin\lambda = \sqrt{2}\sin\left(\lambda + \frac{\pi}{4}\right).$$

Максимум $\sin\theta$ равен 1, поэтому максимум $\cos\lambda + \sin\lambda$ равен $\sqrt{2}$. Это достигается при:

$$\lambda + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Решаем для λ:

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

В интервале $[0, 2\pi)$ это $\lambda = \frac{\pi}{4}$

Минимум $\sin\theta$ равен -1, поэтому минимум $\cos\lambda + \sin\lambda$ равен $-\sqrt{2}$. Это достигается при:

$$\lambda + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Решаем для λ:

$$\lambda = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

В интервале $[0, 2\pi)$ это $\lambda = \frac{5\pi}{4}$.

Производная равна нулю, когда:

$$\cos\lambda + \sin\lambda = 0$$

Решаем уравнение:

$$\cos\lambda = -\sin\lambda \implies \tan\lambda = -1$$

$$\lambda = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В интервале $[0, 2\pi)$ это $\lambda = \frac{3\pi}{4}$ и $\lambda = \frac{7\pi}{4}$.

Ответ: $\begin{aligned} \text{максимум: } \lambda &= \frac{\pi}{4} \\ \text{минимум: } \lambda &= \frac{5\pi}{4} \\ \text{ноль: } \lambda &= \frac{3\pi}{4} \quad \lambda = \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$

№6 Рассмотрим поверхность, заданную неявным уравнением:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z - 4.$$

Перепишем уравнение в виде $F(x, y, z) = 0$:

$$F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x - y - z + 4 = 0.$$

Точка $(2, 3, 6)$ лежит на поверхности, так как:

$$\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7,$$

$$2 + 3 + 6 - 4 = 7.$$

Таким образом, $F(2, 3, 6) = 0$

(a) Найдём уравнение касательной плоскости, по формуле:

$$F'_x(a, b, c) \cdot (x - a) + F'_y(a, b, c) \cdot (y - b) + F'_z(a, b, c) \cdot (z - c) = 0.$$

Вычислим частные производные функции $F(x, y, z)$:

$$F'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1$$

$$F'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1$$

$$F'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1$$

Подставляем $(x, y, z) = (2, 3, 6)$:

$$F'_x(2,3,6) = \frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} - 1 = \frac{2}{7} - 1 = -\frac{5}{7},$$

$$F'_y(2,3,6) = \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} - 1 = \frac{3}{7} - 1 = -\frac{4}{7},$$

$$F'_z(2,3,6) = \frac{6}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} - 1 = \frac{6}{7} - 1 = -\frac{1}{7}.$$

Подставляем $(a, b, c) = (2, 3, 6)$ и найденные значения частных производных:

$$-\frac{5}{7} \cdot (x-2) - \frac{4}{7} \cdot (y-3) - \frac{1}{7} \cdot (z-6) = 0.$$

$$-5(x-2) - 4(y-3) - (z-6) = 0.$$

$$-5x + 10 - 4y + 12 - z + 6 = 0.$$

$$-5x - 4y - z + 28 = 0.$$

$$5x + 4y + z = 28$$

Ответ: $5x + 4y + z = 28$

(b) Найдём уравнение нормали, по формуле:

$$\frac{x-a}{F'_x(a,b,c)} = \frac{y-b}{F'_y(a,b,c)} = \frac{z-c}{F'_z(a,b,c)}.$$

Подставляем $(a, b, c) = (2, 3, 6)$ и найденные значения частных производных:

$$\frac{x-2}{-\frac{5}{7}} = \frac{y-3}{-\frac{4}{7}} = \frac{z-6}{-\frac{1}{7}}.$$

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-6}{-1}.$$

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{1}.$$

Ответ: $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{1}$