Домашнее задание на 1.10.2024 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

1. (a) $a_{n+1} = \sqrt{15 + 2a_n}, a_1 = 1$

$$(a_{n+1})^2 = 15 + 2a_n, \ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$a^2 = 15 + 2a \Rightarrow a^2 - 2a - 15 = 0 \Rightarrow a \in \{-3, 5\}$$

Кандитаты в предел:

$$\left[\begin{array}{l} a = -3 \text{ - не может быть так как, } a_n > 0 \\ a = 5 \end{array}\right.$$

Докажем ограниченность:

$P_k : 1 \leqslant a_k < 5$

<u>База:</u> $P_1 : a_1 = 1 \Rightarrow 1 \leqslant 1 < 5$ - верно

<u>Шаг:</u> $P_k \to P_{k+1}$

$P_k : 1 \leqslant a_k < 5$

$P_{k+1} : a_{k+1} = \sqrt{15 + 2a_k} \Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{15 + 2a_k} < \sqrt{15 + 10} = 5 \Rightarrow$

$\forall k \in \mathbb{N} : 1 \leqslant a_k < 5$

Докажем монотонность:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{15 + 2a_n} - a_n = \frac{15 + 2a_n - a_n^2}{\sqrt{15 + 2a_n} + a_n} =$$

$$= \frac{(5-a_n)(a_n+3)}{\sqrt{15+2a_n}+a_n} \geqslant 0 \text{ т.к.:}$$

$$\begin{cases} (5-a_n) > 0 \\ (a_n+3) > 0 & \text{т.к. } a_n \in [1,5) \\ \sqrt{15+2a_n}+a_n > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geqslant a_n$$

Следовательно, по т. Вейерштрасса последовательность сходиться к своему супремуму - это 5

Ответ: 5

(b) $a_{n+1} = \sqrt{15+2a_n}, a_1 = 7$

$$(a_{n+1})^2 = 15 + 2a_n, \ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$a^2 = 15 + 2a \Rightarrow a^2 - 2a - 15 = 0 \Rightarrow a \in \{-3, 5\}$$

Кандитаты в предел:

$$\left[\begin{array}{l} a = -3 \text{ - не может быть так как, } a_n > 0 \\ a = 5 \end{array}\right.$$

Докажем ограниченность:

$P_k : a_k > 5$

База: $P_1 : a_1 = 7 > 5$ - верно

Шаг: $P_k \rightarrow P_{k+1}$

$P_k : a_k > 5$

$P_{k+1} : a_{k+1} = \sqrt{15+2a_k} > \sqrt{15+10} = 5 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : a_k > 5.$

Докажем монотонность:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{15 + 2a_n} - a_n = \frac{15 + 2a_n - a_n^2}{\sqrt{15 + 2a_n} + a_n} =$$

$$= \frac{(5 - a_n)(a_n + 3)}{\sqrt{15 + 2a_n} + a_n} \leqslant 0 \text{ т.к.:}$$

$$\begin{cases} (5 - a_n) < 0 \\ (a_n + 3) > 0 \qquad\qquad \text{т.к. } a_n > 5 \\ \sqrt{15 + 2a_n} + a_n > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leqslant a_n$$

Следовательно, по т. Вейерштрасса последовательность сходиться к своему инфинуму - это 5

Ответ: 5

(c) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $a_1 = \sqrt{2}$

Найдём кандитаты в предел:

$$a_{n+1}^2 = 2a_n, \ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$a^2 = 2a \Rightarrow a(a - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} a = 0 \\ a = 2 \end{aligned}\right.$$

Докажем ограниченность:

$P_k : a_k < 2$

База: $P_1 : a_1 = \sqrt{2} < 2$ - верно

Шаг: $P_k \to P_{k+1}$

$P_k : a_k < 2$

$P_{k+1} : a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : a_k < 2$

Докажем монотонность:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2a_n} - a_n = \frac{2a_n - a_n^2}{\sqrt{2a_n} + a_n} = \frac{a_n(2 - a_n)}{\sqrt{2a_n} + a_n} \geqslant 0 \text{ т.к.:}$$

$$\begin{cases} a_n \geqslant 0 \text{ по О.Д.З.} \\ (2 - a_n) \geqslant 0 \text{ т.к. } a_n < 2 \\ (\sqrt{2a_n} + a_n) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geqslant a_n \Rightarrow \text{ последовательность не убывает}$$

Следовательно, т.к. последовательность ограничена и она не убывает, то по т. Вейерштрасса она сходиться к своему супремуму, т.е. к 2

Ответ: 2

(d) $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{a_n^2},\ a_1 = 3$

Найдём кандитаты в предел:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$a = \frac{2}{3}a + \frac{1}{a^2} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow a^3 = 3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{3}$$

Докажем ограниченность:

$$P_k : a_k > \sqrt[3]{3}$$

<u>База:</u>

$$P_1 : a_1 = 3 > \sqrt[3]{3} \text{ - верно}$$

<u>Шаг:</u>

$$P_k \to P_{k+1}$$

$$P_k : a_k > \sqrt[3]{3}$$

$$P_{k+1} : a_{k+1} = \frac{2}{3}a_k + \frac{1}{a_k^2} = \frac{2a_k^3 + 3}{3a_k^2} > \frac{6+3}{3 \cdot 3^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{27}{9}} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow a_{k+1} > \sqrt[3]{3} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : a_k > \sqrt[3]{3}$$

Докажем монотонность:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = a_n \frac{3a_n^2}{2a_n^3 + 3} = \frac{3a_n^3}{2a_n^3 + 3} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{9}{2}}{2a_n^3 + 3} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{9}{4a_n^3 + 6}$$

$$a_n > \sqrt[3]{3} \Rightarrow a_n^3 > 3 \Rightarrow \frac{9}{4a_n^3 + 6} < \frac{9}{12 + 6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{9}{4a_n^3 + 6} > \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ последовательность убывает

Следовательно, т.к. последовательность ограничена снизу и она убывает, то по т. Вейерштрасса она сходиться к своему инфинуму, т.е. к $\sqrt[3]{3}$

Ответ: $\sqrt[3]{3}$

(e) $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n},\ a_1 = 1$

Найдём кандитаты в предел:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$a = 1 + \frac{1}{1+a} = \frac{2+a}{1+a} \Rightarrow a + a^2 = 2 + a \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2} \end{cases}$$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}}$

$a_{n+1} = a_n^2 - 2,\ a_1 = 3$

Доказем:

$$P_k : a_k^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \ldots a_{k-1}^2 (a_1^2 - 4) \text{ при } k \geqslant 2$$

<u>База:</u>

$$P_2 : a_2^2 - 4 = a_1^2 (a_1^2 - 4)$$

$$a_2 = a_1^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$7^2 - 4 = 9 \cdot (9 - 4) \Rightarrow 45 = 9 \cdot 5 \Rightarrow 45 = 45 \text{ - верно}$$

<u>Шаг:</u>

$$P_k \to P_{k+1}$$

$$P_k : a_k^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \ldots a_{k-1}^2 (a_1^2 - 4)$$

$$P_{k+1} : a_1^2 a_2^2 \ldots a_{k-1}^2 a_k^2 (a_1^2 - 4) = (a_k^2 - 4) a_k^2 = a_k^4 - 4a_k^2$$

$$a_k^2 = a_{k+1} + 2 \Rightarrow a_k^4 - 4a_k^2 = (a_{k+1}+2)^2 - 4a_{k+1} - 8 =$$

$$= a_{k+1}^2 + 4a_{k+1} + 4 - 4a_{k+1} - 8 = a_{k+1}^2 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-1}^2 a_k^2 (a_1^2 - 4) = a_{k+1}^2 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : a_k^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-1}^2 (a_1^2 - 4)$$

$$a_n^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \dots a_{n-1}^2 (a_1^2 - 4) \Rightarrow a_1^2 a_2^2 \dots a_{n-1}^2 = \frac{a_n^2 - 4}{a_1^2 - 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} = \sqrt{\frac{a_n^2 - 4}{a_1^2 - 4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} a_n \sqrt{\frac{a_1^2 - 4}{a_n^2 - 4}} = \lim_{n\to\infty} a_n \sqrt{\frac{5}{a_n^2 - 4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{5a_n^2}{a_n^2 - 4}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{5}{1 - \frac{4}{a_n^2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{5}{1 - \frac{4}{a_n^2}}} = \sqrt{\frac{5}{1 - 0}} = \sqrt{5}$$

Ответ: $\sqrt{5}$