Домашнее задание на 19.03 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Найдём все условные локальные экстремумы функции:

$$f(x, y, z) = xyz$$

относительно:

$$\varphi_1(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$$

$$\varphi_2(x, y, z) = x + 2y + 3z - 6 = 0$$

Для начала решим систему:

$$\begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 6 + z \\ y = -2z \end{cases}$$

Найдём локальные экстремумы у функции:

$$h(z) = -2z^2(6 + z) = -12z^2 - 2z^3$$

Получаем:

$$\text{Локальный минимум: } z = -4$$

$$\text{Локальный максимум: } z = 0$$

Следовательно, в исходной функции:

$$\text{Локальный минимум: } (6, 0, 0)$$

$$\text{Локальный максимум: } (2, 8, -4)$$

№2 Найдём условные локальные экстремумы функций

(a)

$$f(x, y) = 6 - 5x - 4y$$

относительно

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - 9 = 0$$

Найдём функцию Лагранжа:

$$L_\lambda(x, y) = 6 - 5x - 4y - \lambda(x^2 - y^2 - 9) =$$

$$= 6 - 5x - 4y - \lambda x^2 + \lambda y^2 + 9\lambda$$

Найдём решения системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial L_\lambda(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda(x,y)}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 - 2\lambda x = 0 \\ -4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, \lambda) = (-5, 4, -\frac{1}{2}), (5, -4, \frac{1}{2})$$

Проверим ранг и решим ОСЛУ для каждой точки:

$$\begin{bmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \end{bmatrix} (x, y) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x & -2y \end{bmatrix} (x, y)$$

Для точки $(-5, 4, -\frac{1}{2})$:

$$\begin{bmatrix} -10 & -8 & | & 0 \end{bmatrix} \implies h = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}h_2 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$rk = 1$$

Для точки $(5, -4, \frac{1}{2})$:

$$\begin{bmatrix} 10 & 8 & | & 0 \end{bmatrix} \implies h = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}h_2 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$rk = 1$$

Найдём матрицу второго дифференциала функции лагранжа, для этого посчитаем вторые производные:

$$\frac{\partial L_\lambda(x,y)}{\partial x^2} = -2\lambda$$

$$\frac{\partial L_\lambda(x,y)}{\partial xy} = 0$$

$$\frac{\partial L_\lambda(x,y)}{\partial y^2} = 2\lambda$$

Матрица:

$$\begin{bmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{bmatrix} (x,y,\lambda)$$

- Для точки $(-5, 4, -\frac{1}{2})$:

$$d^2_{(-5,4,-\frac{1}{2})}(h) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}h_2 \\ h_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}h_2 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}h_2 & -h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}h_2 \\ h_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{16}{25}h_2^2 - h_2^2 = -\frac{9}{25}h_2^2 < 0$$

Следовательно:

$$(-5, 4) \text{ — условная точка локального максимума}$$

- Для точки $(5, -4, \frac{1}{2})$:

$$d^2_{(-5,4,-\frac{1}{2})}(h) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}h_2 \\ h_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}h_2 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}h_2 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}h_2 \\ h_2 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{16}{25}h_2^2 + h_2^2 = \frac{9}{25}h_2^2 > 0$$

Следовательно:

$$(5,-4) \text{ — условная точка локального минимума}$$

Ответ: $(-5,4)$ -лок. макс., $(5,-4)$ -лок. мин.

(b)

$$f(x,y,z) = xy + yz$$

относительно

$$\varphi_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_2(x,y,z) = y + z - 2 = 0$$

Пусть:

$$h(x,y) = f(x,y,2-y) = xy + y(2-y) = xy + 2y - y^2$$

Функция Лагранжа:

$$L_\lambda(x,y) = xy + 2y - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

Решим систему:

$$\begin{cases} (L_\lambda(x,y))'_x = y - 2\lambda x = 0 \\ (L_\lambda(x,y))'_y = x + 2 - 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Четыре решения:

- $x = -1,\ y = 1,\ \lambda = -\frac{1}{2}$
- $x = 1,\ y = 1,\ \lambda = \frac{1}{2}$
- $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ \lambda = -\frac{2+\sqrt{3}}{4}$
- $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ \lambda = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$

Проверим ранг матрицы, решим ослу для каждой точки и найдём на множестве векторов h второй дифференциал:

$$\begin{bmatrix}(\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y\end{bmatrix}(x,y) = \begin{bmatrix}2x & 2y\end{bmatrix}(x,y)$$

$$d^2_{\bar{h}} L_\lambda(x,y) = \begin{bmatrix}h_1 & h_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_\lambda(x,y)'_{xx} & L_\lambda(x,y)'_{xy}\\ L_\lambda(x,y)'_{yx} & L_\lambda(x,y)'_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}h_1 & h_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\lambda & 1\\ 1 & -2-2\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}$$

1) $x = -1$, $y = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix}-2 & 2 & | & 0\end{bmatrix} \implies -2h_1 = -2h_2 \implies h_1 = h_2 \implies h = \begin{bmatrix}h_2\\ h_2\end{bmatrix}$$

$$rk = 1$$

$$d^2_{\bar{h}} L_\lambda(x,y) = \begin{bmatrix}h_2 & h_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\lambda & 1\\ 1 & -2-2\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_2\\ h_2\end{bmatrix} = -4h_2^2\lambda = 2h_2^2 > 0$$

$(-1, 1, 1)$ — точка минимума

2) $x = 1$, $y = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & | & 0\end{bmatrix} \implies 2h_1 = -2h_2 \implies h_1 = -h_2 \implies h = \begin{bmatrix}-h_2\\ h_2\end{bmatrix}$$

$$rk = 1$$

$$d^2_{\bar{h}} L_\lambda(x,y) = \begin{bmatrix}-h_2 & h_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\lambda & 1\\ 1 & -2-2\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-h_2\\ h_2\end{bmatrix} =$$

$$= -4h_2^2\lambda - 4h_2^2 = -2h_2^2 - 4h_2^2 = -6h_2^2 < 0$$

$(1, 1, 1)$ — точка максимума

3) $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $\lambda = -\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$$\begin{bmatrix}-1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & | & 0\end{bmatrix} \implies h_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}h_2 = \sqrt{3}h_2 + 2h_2$$

$$\implies h = \begin{bmatrix} \sqrt{3}h_2 + 2h_2 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$rk = 1$$

$$d^2_{\bar{h}} L_\lambda(x,y) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}h_2 + 2h_2 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -2-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}h_2 + 2h_2 \\ h_2 \end{bmatrix} =$$

$$= 2(8+5\sqrt{3})h_2^2 > 0$$

$$(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2}) \text{ — точка минимума}$$

4) $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $\lambda = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$

$$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & | & 0 \end{bmatrix} \implies h_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}} h_2$$

$$\implies h = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}} h_2 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$rk = 1$$

$$d^2_{\bar{h}} L_\lambda(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}} h_2 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -2-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}} h_2 \\ h_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-4(-1+2\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})^2} h_2^2 < 0$$

$$(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2}) \text{ — точка минимума}$$

Ответ: $(-1,1,1)$ - мин, $(1,1,1)$ - макс, $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2})$ - мин, $(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2})$ - макс

№3 Для решения задачи найдём минимальное расстояние от точки $(0,3,3)$ до точки (x,y,z), удовлетворяющей данной системе:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-y-z)^2+y^2+z^2 = 1 \\ x = 1-y-z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 2z^2 - 2y - 2z - 2yz = 0 \\ x = 1 - y - z \end{cases}$$

Для этого минимизируем функцию:

$$\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(1-y-z)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2}$$

$$= \sqrt{19 + 2y^2 + 2z^2 - 8y - 8z + 2yz}$$

Для этого найдём условные локальные экстремумы функции:

$$h(y,z) = 19 + 2y^2 + 2z^2 - 8y - 8z + 2yz$$

относительно

$$\varphi(y,z) = 2y^2 + 2z^2 - 2y - 2z - 2yz = 0$$

Функция Лагранжа:

$$L_\lambda(y,z) = 19 + 2y^2 + 2z^2 - 8y - 8z + 2yz - \lambda(2y^2 + 2z^2 - 2y - 2z - 2yz)$$

Решим систему:

$$\begin{cases} (L_\lambda(y,z))'_y = 0 \\ (L_\lambda(y,z))'_z = 0 \\ \varphi(y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8 + 4y + 2z - (-2 + 4y - 2z)\lambda = 0 \\ -8 + 2y + 4z - (-2 - 2y + 4z)\lambda = 0 \\ 2y^2 + 2z^2 - 2y - 2z - 2yz = 0 \end{cases}$$

Получаем 2 решения:

- $y = 0, z = 0, \lambda = 4$
- $y = 2, z = 2, \lambda = 2$

Это экстремумы, так как выполняются все необходимые условия. Подставим их в h и определим в какой из них достигается наименьшее значение:

- В точке $(y = 0, z = 0)$: $h = 19$
- В точке $(y = 2, z = 2)$: $h = 11$

Следовательно минимальное расстояние от точки $(0, 3, 3)$ до точки (x, y, z):

$$\sqrt{h(2,2)} = \sqrt{11}$$

Ответ: $\sqrt{11}$

№4 Найдём условные локальные экстремумы функции:

$$V = V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

относительно (формула площади боковой поверхности):

$$\varphi(r, h) = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} - S = 0$$

Функция Лагранжа:

$$L_\lambda(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \lambda(\pi r\sqrt{r^2 + h^2} - S)$$

Решим систему:

$$\begin{cases} (L_\lambda(r,h))'_r = 0 \\ (L_\lambda(r,h))'_h = 0 \\ \varphi(r,h) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\pi r h - \lambda\left(2\pi r\sqrt{r^2+h^2} + \pi\frac{h^2+r^2}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) = 0 \\ \frac{1}{3}\pi r^2 - 2\lambda\pi h r\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} = 0 \\ \pi r\sqrt{r^2+h^2} - S = 0 \end{cases}$$

Получаем решение:

$$(r, h, \lambda) = \left(\sqrt{\frac{S}{2\pi}},\ \sqrt{\frac{3S}{2\pi}},\ \frac{\sqrt{S}}{3\sqrt{6\pi}} \right)$$

Посчитав второй дифференциал функции Лагранжа можно убедиться, что это условный локальный минимум. А значит минимальный объём:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\sqrt{\frac{S}{2\pi}} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{3S}{2\pi}} = \frac{S^{3/2}}{2\sqrt{6\pi}}$$

Ответ: $\frac{S^{3/2}}{2\sqrt{6\pi}}$