

## Домашнее задание на 17.04 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Докажем формулу:

$$J_k = \int \frac{1}{(y^2 + \alpha^2)^k} dy = \begin{cases} \frac{1}{2(k-1)\alpha^2} \cdot \frac{y}{(y^2 + \alpha^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2} J_{k-1}, & k \geq 2 \\ \frac{1}{\alpha} \arctg \frac{y}{\alpha} + C, & k = 1 \end{cases}$$

Для  $k \geq 2$ :

По формуле интегрирования по частям:

$$J_{k-1} = \frac{y}{(y^2 + \alpha^2)^{k-1}} + 2(k-1) \int \frac{y^2}{(y^2 + \alpha^2)^k} dy$$

Преобразуем  $y^2 = (y^2 + \alpha^2) - \alpha^2$ :

$$\int \frac{y^2}{(y^2 + \alpha^2)^k} dy = J_{k-1} - \alpha^2 J_k$$

Подставляем обратно:

$$J_{k-1} = \frac{y}{(y^2 + \alpha^2)^{k-1}} + 2(k-1)(J_{k-1} - \alpha^2 J_k)$$

Решаем относительно  $J_k$ :

$$J_{k-1} - 2(k-1)J_{k-1} + 2(k-1)\alpha^2 J_k = \frac{y}{(y^2 + \alpha^2)^{k-1}}$$

$$-(2k-3)J_{k-1} + 2(k-1)\alpha^2 J_k = \frac{y}{(y^2 + \alpha^2)^{k-1}}$$

$$J_k = \frac{1}{2(k-1)\alpha^2} \cdot \frac{y}{(y^2 + \alpha^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2} J_{k-1}$$

Для  $k = 1$ :

$$J_1 = \int \frac{1}{y^2 + \alpha^2} dy = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha} + C.$$

**№2** (а) Найдём:

$$\int \frac{x^4}{(x+1)^3} dx$$

Пусть  $t = x+1$ , тогда  $x = t-1$ ,  $dx = dt$ . Подставляем в интеграл:

$$\int \frac{(t-1)^4}{t^3} dt$$

Раскрываем  $(t-1)^4$ :

$$(t-1)^4 = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1$$

Делим числитель на знаменатель:

$$\frac{t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1}{t^3} = t - 4 + \frac{6}{t} - \frac{4}{t^2} + \frac{1}{t^3}$$

Тогда:

$$\int \left( t - 4 + \frac{6}{t} - \frac{4}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 4t + 6 \ln |t| + \frac{4}{t} - \frac{1}{2t^2} + C$$

Заменяем  $t = x+1$ :

$$\int \frac{x^4}{(x+1)^3} = \frac{(x+1)^2}{2} - 4(x+1) + 6 \ln |x+1| + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$$

**Ответ:**  $\frac{(x+1)^2}{2} - 4(x+1) + 6 \ln |x+1| + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$

(b) Найдём:

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

Знаменатель:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

Значит:

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D = \frac{1}{2}$$

Первая дробь:

$$\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln |x^2 + \sqrt{2}x + 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}x + 1) + C$$

Вторая дробь:

$$\int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln |x^2 - \sqrt{2}x + 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}x - 1) + C$$

Получаем:

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}x - 1) + C$$

**Ответ:**  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}x - 1) + C$

(с) Найдём:

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x - 1)^2(x^2 + 1)^2} dx$$

Представим подынтегральную функцию в виде:

$$\frac{4x^2 - 8x}{(x - 1)^2(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2}$$

Умножаем обе части на  $(x-1)^2(x^2+1)^2$  и подставляем  $x=1$ :

$$4(1)^2 - 8(1) = B(1^2 + 1)^2 \implies -4 = 4B \implies B = -1.$$

Далее раскрываем скобки и приравняем коэффициенты при степенях  $x$ :

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ -2A + B + D = 4, \\ A - 2C + E = -8, \\ -A - 2D + F = 0, \\ C - 2E = 0, \\ D - 2F = 0. \end{cases}$$

Решение системы:

$$A = 1, B = -1, C = -1, D = 0, E = -1, F = 0.$$

Разбиваем интеграл на части:

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

Вычисляем каждую часть:

- $\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1|$
- $\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = -\frac{1}{x-1}$
- $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$
- $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}$

$$\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

**Ответ:**  $\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$

(d) Найдём:

$$\int \frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x + 10} dx$$

Положим  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Тогда:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Подставим:

$$\int \frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x + 10} dx = \int \frac{1}{3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 10} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

Приводим к общему знаменателю  $1+t^2$ :

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 10 &= \frac{6t + 4(1-t^2) + 10(1+t^2)}{1+t^2} = \\ &= \frac{6t + 4 - 4t^2 + 10 + 10t^2}{1+t^2} = \frac{6t^2 + 6t + 14}{1+t^2} \end{aligned}$$

Подставим:

$$\int \frac{1+t^2}{6t^2+6t+14} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{6t^2+6t+14} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t^2+t+\frac{14}{6}} dt$$

Выделим полный квадрат:

$$t^2+t+\frac{7}{3} = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{3}-\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{21}{12} = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int \frac{1}{t^2+t+\frac{14}{6}} dt &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}\right)^2} dt = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} \operatorname{arctg} \left( \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{21}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\sqrt{3}(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{21}} \right) + C \end{aligned}$$

Подставляем  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ :

$$\frac{2}{\sqrt{21}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{21}} \right) + C$$

**Ответ:**  $\frac{2}{\sqrt{21}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{21}} \right) + C$

(е) Найдём:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^7}} dx = \int (x+1)^{-2/3} (x-1)^{-7/3} dx$$

Пусть

$$t = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{1/3} \Rightarrow t^3 = \frac{x+1}{x-1}$$

Решая относительно  $x$ :

$$x = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1}, \quad dx = \frac{-6t^2}{(t^3 - 1)^2} dt$$

Подставим:

$$\int t^{-2} \cdot (x-1)^{-3} \cdot \frac{-6t^2}{(t^3 - 1)^2} dt$$

Упрощаем  $(x-1)^{-3}$ :

$$(x-1)^{-3} = \left( \frac{2}{t^3 - 1} \right)^{-3} = \frac{(t^3 - 1)^3}{8}$$

После сокращений:

$$\frac{-3}{4} \int (t^3 - 1) dt$$

Найдём:

$$\frac{-3}{4} \int (t^3 - 1) dt = \frac{-3}{4} \left( \frac{t^4}{4} - t \right) + C = \frac{-3(t^4 - 4t)}{16} + C$$

Подставляем  $t = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{1/3}$  и упрощаем:

$$\frac{-3}{16} \left( \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{4/3} - 4 \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{1/3} \right) + C$$

Выносим общий множитель и преобразуем:

$$\frac{3(1+x)^{1/3}(-5+3x)}{16(x-1)^{4/3}} + C$$

**Ответ:**  $\frac{3(1+x)^{1/3}(-5+3x)}{16(x-1)^{4/3}} + C$

(f) Найдём:

$$\int \frac{1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$$

Положим  $\sqrt{x^2 + x + 1} = xt + 1$ . Возведем в квадрат:

$$x^2 + x + 1 = x^2 t^2 + 2xt + 1 \implies x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}$$

$$dx = \frac{2(t^2 - t + 1)}{(1 - t^2)^2} dt$$

Разобьем интеграл на два слагаемых:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} dx - \int \frac{1}{x} dx$$

Первый интеграл:

$$\int \frac{2}{2t - 1} dt = \ln |2t - 1| + C$$

Второй интеграл:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C = \ln \left| \frac{2t - 1}{1 - t^2} \right| + C$$

Вместе:

$$\ln |2t - 1| - \ln \left| \frac{2t - 1}{1 - t^2} \right| + C = \ln |1 - t^2| + C$$

Из замены  $t = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}$ :

$$1 - t^2 = \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2}{x^2}$$

Получаем:

$$\int \frac{1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \ln |2\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| - 2 \ln |x| + C$$

**Ответ:**  $\ln |2\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| - 2 \ln |x| + C$