Домашнее задание на 04.05 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Найдём:

$$\int \frac{x^8 + x^7 - 7x^6 + 26x^5 - 32x^4 + 34x^3 - 20x^2 + 48x - 33}{(x+1)(x-4)^2(x^2+1)^3}\,dx$$

Разложим интеграл как:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$$

где $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$.

$$Q(x) = (x+1)(x-4)^2(x^2+1)^3$$

$$Q'(x) = (x-4)(x^2+1)^2(-2 - 21x - 20x^2 + 9x^3)$$

Следовательно:

$$Q_1(x) = (x-4)(x^2+1)^2$$

Выразим $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$:

$$Q(x) = (x+1)(x-4)^2(x^2+1)^3$$

$$Q_1(x) = (x-4)(x^2+1)^2$$

Тогда:

$$Q_2(x) = \frac{(x+1)(x-4)^2(x^2+1)^3}{(x-4)(x^2+1)^2} = (x+1)(x-4)(x^2+1)$$

Искомый интеграл превращается в:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$$

Найдём многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$:

$$P(x) = P_1(x)\cdot Q_2(x) + P_2(x)\cdot Q_1(x)$$

Пусть:

$$P_1(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (\text{многочлен степени} \leqslant 4)$$

$$P_2(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \quad (\text{многочлен степени} \leqslant 3)$$

Получаем:

$$P(x) = (a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)(x+1)(x-4)(x^2+1)$$

$$+(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)(x-4)(x^2+1)^2 =$$

$$-4a_0 - 4b_0$$

$$+(-3a_0 - 4a_1 + b_0 - 4b_1)x$$

$$+(-3a_0 - 3a_1 - 4a_2 - 8b_0 + b_1 - 4b_2)x^2$$

$$+(-3a_0 - 3a_1 - 3a_2 - 4a_3 + 2b_0 - 8b_1 + b_2 - 4b_3)x^3$$

$$+(a_0 - 3a_1 - 3a_2 - 3a_3 - 4a_4 - 4b_0 + 2b_1 - 8b_2 + b_3)x^4$$

$$+(a_1 - 3a_2 - 3a_3 - 3a_4 + b_0 - 4b_1 + 2b_2 - 8b_3)x^5$$

$$+(a_2 - 3a_3 - 3a_4 + b_1 - 4b_2 + 2b_3)x^6$$

$$+(a_3 - 3a_4 + b_2 - 4b_3)x^7$$

$$+(a_4 + b_3)x^8$$

С другой стороны:

$$P(x) = x^8 + x^7 - 7x^6 + 26x^5 - 32x^4 + 34x^3 - 20x^2 + 48x - 33$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a_4 + b_3 = 1, \\ a_3 - 3a_4 + b_2 - 4b_3 = 1, \\ a_2 - 3a_3 - 3a_4 + b_1 - 4b_2 + 2b_3 = -7, \\ a_1 - 3a_2 - 3a_3 - 3a_4 + b_0 - 4b_1 + 2b_2 - 8b_3 = 26, \\ a_0 - 3a_1 - 3a_2 - 3a_3 - 4a_4 - 4b_0 + 2b_1 - 8b_2 + b_3 = -32, \\ -3a_0 - 3a_1 - 3a_2 - 4a_3 + 2b_0 - 8b_1 + b_2 - 4b_3 = 34, \\ -3a_0 - 3a_1 - 4a_2 - 8b_0 + b_1 - 4b_2 = -20, \\ -3a_0 - 4a_1 + b_0 - 4b_1 = 48, \\ -4a_0 - 4b_0 = -33. \end{cases}$$

У системы нет решений

№2 (a) Для интеграла $\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ выполним замену $u = a+b-x$. Тогда $du = -dx$, пределы интегрирования меняются местами:

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_b^a f(u)(-du) = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

(b) Для интеграла $\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$ выполним замену $x = \frac{\pi}{2} - t$. Тогда $dx = -dt$, пределы интегрирования меняются:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_{\pi/2}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)(-dt) = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)\,dt.$$

Следовательно, $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$.

(c) Интеграл $\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ разобьем на два:

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

Во втором интеграле выполним замену $x = \pi - t$:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin(\pi - t))\,dt = \int_0^{\pi/2} f(\sin t)\,dt.$$

Таким образом:

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx.$$

(d) Для периодической функции f с периодом T интеграл по интервалу длины T не зависит от выбора начала интервала:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx, \quad \text{где } b - a = T.$$

Следовательно:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

№3 (a) Используем гиперболическую замену $x = \sqrt{5}\operatorname{sh} t$. Тогда:

$$dx = \sqrt{5}\operatorname{ch} t\,dt, \quad \sqrt{5 + x^2} = \sqrt{5}\operatorname{ch} t.$$

Интеграл преобразуется:

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{5}\operatorname{ch} t}{2+5\operatorname{sh}^2 t} \cdot \sqrt{5}\operatorname{ch} t\, dt = 5\int \frac{\operatorname{ch}^2 t}{2+5\operatorname{sh}^2 t}\, dt.$$

Используя тождество $\operatorname{ch}^2 t = 1 + \operatorname{sh}^2 t$:

$$5\int \frac{1+\operatorname{sh}^2 t}{2+5\operatorname{sh}^2 t}\, dt = 5\left(\int \frac{1}{2+5\operatorname{sh}^2 t}\, dt + \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{2+5\operatorname{sh}^2 t}\, dt\right).$$

После вычислений (подстановка $u = \operatorname{sh} t$) и возврата к x:

$$\sqrt{5}\operatorname{arsh}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

(b) Применяем универсальную замену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\, dt}{(1+t^2)(6t^2+4t+4)}.$$

После упрощения:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

(c) Пусть $I = \int \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \sin x\, dx$. Замена $x = \frac{1}{t}$ даёт:

$$J = \int (\sqrt{2}+1)\sin\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{-dt}{t^2}.$$

Суммируя $I + J$ и упрощая:

$$2I = \int \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\sin x + (\sqrt{2}+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = 0 \implies I = 0.$$

(d) Из условия $h(g(x)) = x$:

$$h'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)} = e^x + xe^{3x}.$$

Интегрируем:

$$\int_0^T (e^x + xe^{3x})\, dx = e^T + \frac{Te^{3T}}{3} - \frac{e^{3T}}{9} + \frac{1}{9}.$$

№4 Найдём:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\frac{x^3}{3}}^{\cos x} \ln(1+t^2)\, dt\right)^3$$

Разобьем:

$$\int_{x^3}^{\cos x} \ln(1+t^2)\, dt = \int_0^{\cos x} \ln(1+t^2)\, dt - \int_0^{x^3} \ln(1+t^2)\, dt$$

Обозначим:

$$F(x) = \int_0^{\cos x} \ln(1+t^2)\, dt - \int_0^{x^3} \ln(1+t^2)\, dt$$

Производная первого интеграла:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\cos x} \ln(1+t^2)\, dt = \ln(1+\cos^2 x)\cdot(-\sin x)$$

Производная второго интеграла:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^3} \ln(1+t^2)\, dt = \ln(1+x^6)\cdot 3x^2$$

Получаем:

$$F'(x) = -\sin x \cdot \ln(1+\cos^2 x) - 3x^2\cdot\ln(1+x^6)$$

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)^3 = 3\left(F(x)\right)^2 \cdot F'(x)$$

Ответ:

$$3\left(\int_{x^3}^{\cos x} \ln(1+t^2)\,dt\right)^2 \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(1+\cos^2 x) - 3x^2 \cdot \ln(1+x^6)\right)$$

№5 Найдём:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}$$

Производная числителя:

$$2\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right) \cdot e^{x^2}$$

Производная знаменателя:

$$e^{2x^2}$$

Получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right) \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}$$

Производная числителя:

$$e^{x^2}$$

Производная знаменателя:

$$2xe^{x^2}$$

Получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

Ответ: 0

№6 Рассмотрим функцию $f(t)$, которая на каждом интервале $[n, n + 1/n^2]$ равна 1, а в остальных точках равна 0. Интеграл от 0 до x:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{n^2}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится, предел интеграла при $x \to +\infty$ существует.

Однако

$$\lim_{t \to +\infty} f(t)$$

не существует, так как функция периодически принимает значение 1.

Проверим: $f \in \mathcal{R}([0; a])$: функция ограничена и имеет разрывы только в счетном числе точек, что допустимо для интегрируемости по Риману.