Домашнее задание на 08.06 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

(a) Дано

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{k!}\right)}{k \ln^2 k}.$$

Пусть

$$a_k = \frac{\sin\left(\sqrt{k!}\right)}{k \ln^2 k}, \quad k \geq 2.$$

проверим, сходится ли

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left|\sin(\sqrt{k!})\right|}{k \ln^2 k}.$$

для любого x: $\left|\sin x\right| \leq 1$, имеем

$$|a_k| = \frac{\left|\sin(\sqrt{k!})\right|}{k \ln^2 k} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}.$$

Известно, что ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$$

сходится. Это следует, например, из интегрального признака:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} < \infty$$

Следовательно,

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k} < +\infty.$$

Ответ: сходится абсолютно

(b) Дано

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \frac{(-1)^{k(k+1)/2}}{1+x+x^{27}}\, dx$$

Пусть

$$a_k \;=\; \int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \; \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{1+x+x^{27}}\; dx.$$

По определению

$$|a_k| = \left| \int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{1+x+x^{27}}\; dx \right| \;=\; \int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \; \frac{1}{1+x+x^{27}}\; dx$$

Заметим, что для любого $x \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$1 + x + x^{27} \;\leq\; 1+1+1 \;=\; 3,$$

поэтому

$$\frac{1}{1+x+x^{27}} \;\geq\; \frac{1}{3} \quad \text{для всех } x \in [0,1].$$

Поскольку при больших k число $\frac{1}{k^2}$ лежит в отрезке $\big[0,1\big]$, то на всём интегрируемом отрезке $\big[\frac{1}{k^2},\, 1\big]$ справедливо

$$\frac{1}{1+x+x^{27}} \;\geq\; \frac{1}{3}.$$

Однако в выражении $|a_k|$ мы интегрируем в обратном порядке (из 1 в $1/k^2$), поэтому

$$|a_k| = \int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \frac{1}{1+x+x^{27}}\; dx \;=\; \int_{\frac{1}{k^2}}^{1} \frac{1}{1+x+x^{27}}\; dx$$

Следовательно, для всех $k \geq 1$

$$|a_k| \;=\; \int_{\frac{1}{k^2}}^{1} \frac{1}{1+x+x^{27}}\; dx \;\geq\; \int_{\frac{1}{k^2}}^{1} \frac{1}{3}\; dx \;=\; \frac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{k^2}\right).$$

Из этого сразу видно, что при $k \to \infty$

$$|a_k| \;\geq\; \frac{1}{3}\Big(1 - \tfrac{1}{k^2}\Big) \;\longrightarrow\; \frac{1}{3} \;>\; 0.$$

В частности, $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| \;\neq\; 0$. Но для сходимости любого числового ряда необходимо условие $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$. Значит, искомый ряд не сходится

Ответ: расходится

(c) Дано

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot \ln k \cdot \ln\ln k}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k \cdot \ln k \cdot \ln\ln k}\right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k \cdot \ln\ln k}$$

Для исследования его сходимости применим интегральный признак. Проверим, является ли функция

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x}$$

монотонно убывающей на $[2; +\infty)$. Вычислим производную:

$$f'(x) = -\frac{1 + \ln(\ln x)}{x^2 \cdot (\ln x)^2 \cdot (\ln\ln x)^2}$$

Знаменатель положителен, а числитель $1 + \ln(\ln x)$:

- Для $x \geqslant e^e \approx 15.15$, $\ln(\ln x) \geqslant 1$, следовательно, числитель положителен, и $f'(x) < 0$.
- Для $x \in [e; e^e)$, $\ln(\ln x) \in [0; 1)$, числитель положителен, и $f'(x) < 0$.

- Для $x \in [2; e)$, функция $f(x)$ не определена

Таким образом, $f(x)$ убывает на $[e; +\infty)$. Применим интегральный признак с начальной точкой $x = e$:

$$\int_e^\infty \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x} \, dx$$

Сделаем замену $t = \ln\ln x$, $dt = \frac{1}{x \ln x} dx$. Интеграл преобразуется:

$$\int_{t(e)}^\infty \frac{1}{t} \, dt = \int_0^\infty \frac{1}{t} \, dt,$$

который расходится. Следовательно, ряд $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \cdot \ln k \cdot \ln\ln k}$ расходится. Значит, исходный ряд не сходится абсолютно.

Ряд имеет вид:

$$\sum_{k=2}^\infty (-1)^k a_k, \quad \text{где } a_k = \frac{1}{k \cdot \ln k \cdot \ln\ln k}$$

Применим признак Лейбница (Факт 3):

1) Убывание a_k: Для $k \geqslant 2$, $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1) \cdot \ln(k+1) \cdot \ln\ln(k+1)} < a_k$, так как все множители в знаменателе увеличиваются.
2) Предел a_k: $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

Оба условия выполнены. Следовательно, ряд сходится условно.

Ответ: сходится условно, но не абсолютно