Домашнее задание на 15.05 (Линейная алгебра)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Найдём площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y^2 = 2\lambda x, \qquad x^2 = 2\lambda y,$$

Ищем общие точки решений системы

$$\begin{cases} y^2 = 2\lambda x, \\ x^2 = 2\lambda y, \end{cases} \qquad x \geq 0,\ y \geq 0. \quad \Longrightarrow (x, y) = (0, 0), (2\lambda, 2\lambda)$$

В первой четверти на отрезке $x \in [0, 2\lambda]$ верхней ветвью фигуры является

$$y = f(x) = \sqrt{2\lambda x},$$

нижней:

$$y = g(x) = \frac{x^2}{2\lambda}.$$

По Факту 1 Формула (1) для площади S зоны между графиками $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на $[a, b]$ имеет вид

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx.$$

Подставляем $a = 0$, $b = 2\lambda$:

$$S = \int_0^{2\lambda} \Big(\sqrt{2\lambda x} - \frac{x^2}{2\lambda}\Big)\, dx = \int_0^{2\lambda} (2\lambda x)^{1/2}\, dx \ - \ \frac{1}{2\lambda} \int_0^{2\lambda} x^2\, dx.$$

Следовательно

$$S = \frac{8}{3}\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda^2 = \frac{4}{3}\,\lambda^2$$

Ответ: $\frac{4}{3}\,\lambda^2$

№2 Найдём площадь фигуры, ограниченной:

$$r^2 \;=\; 2\,\lambda^2 \cos 2\varphi.$$

Лемниската задана уравнением

$$r^2 \geq 0$$

то есть

$$\cos 2\varphi \geq 0$$

Это выполняется при

$$-\frac{\pi}{4} \;\leq\; \varphi \;\leq\; \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \frac{3\pi}{4} \;\leq\; \varphi \;\leq\; \frac{5\pi}{4}$$

По факту 2 для кривой $r = f(\varphi)$, неперерывной на $[\alpha, \beta]$, площадь сектора

$$S_{\text{sector}} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)^2\,d\varphi$$

Для одного лепестка $r^2 = 2\lambda^2\cos 2\varphi$, $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$:

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\lambda^2\cos 2\varphi\,d\varphi = \lambda^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi$$

Вычислим интеграл:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi = \Big[\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \tfrac{1}{2}\big(\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin(-\tfrac{\pi}{2})\big) = \tfrac{1}{2}(1-(-1)) = 1$$

Значит
$$S = \lambda^2 \cdot 1 = \lambda^2$$
Лемниската состоит из двух равных лепестков, поэтому
$$S_{\text{total}} = 2\,S = 2\lambda^2$$
Ответ: $2\lambda^2$

№3 Найдём длину окружности
$$x^2 + y^2 = \lambda^2.$$
В полярных координатах окружность радиуса λ задаётся просто:
$$r(\varphi) = \lambda, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$
По Факту 4 длина кривой
$$r = f(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$$
в полярных координатах равна
$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(f'(\varphi)\big)^2 + \big(f(\varphi)\big)^2}\, d\varphi.$$
Здесь $f(\varphi) = \lambda$ константа, поэтому $f'(\varphi) = 0$. Подставляем в формулу с $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$:
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + \lambda^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \lambda\, d\varphi = \lambda\big[\varphi\big]_0^{2\pi} = 2\pi\lambda$$
Ответ: $2\pi\lambda$

№4 Найдём длину винтовой линии

$$x(t) = \lambda\cos t, \qquad y(t) = \lambda\sin t, \quad z(t) = 7\lambda t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$x'(t) = -\lambda\sin t, \quad y'(t) = \lambda\cos t, \quad z'(t) = 7\lambda.$$

По формуле 3:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda^2\sin^2 t + \lambda^2\cos^2 t + (7\lambda)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + 49\lambda^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{50\,\lambda^2}\,dt = \int_0^{2\pi} 5\sqrt{2}\,\lambda\,dt$$

$$= 5\sqrt{2}\,\lambda\,\big[t\big]_0^{2\pi} = 5\sqrt{2}\,\lambda \cdot 2\pi = 10\pi\sqrt{2}\,\lambda$$

Ответ: $10\pi\sqrt{2}\,\lambda$

№5 Объём тела вращения по Формуле 6:

$$V = \pi \int_0^7 \left(\sqrt{xe^{-x}}\right)^2 dx = \pi \int_0^7 xe^{-x}\,dx,$$

$$\int_0^7 xe^{-x}\,dx = \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^7 = \big[-(7+1)e^{-7}\big] - \big[-(0+1)e^0\big]$$

$$= -8e^{-7} + 1$$

Ответ: $-8e^{-7} + 1$

№6 По общей формуле объёма через поперечные сечения:

$$V \;=\; \int_{-a}^{a} S(x)\,dx,$$

По Формуле 1 площадь эллипса:

$$S(x) \;=\; \pi\,b\,c\,\left(1 - \tfrac{x^2}{a^2}\right).$$

Интегрируем:

$$V = \pi\, b\, c \int_{-a}^{a} \Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)\, dx = \pi\, b\, c \Big[\, x - \frac{x^3}{3\, a^2} \Big]_{-a}^{a}$$

$$= \pi\, b\, c \Big(\big(a - \tfrac{a^3}{3a^2}\big) - \big(-a + \tfrac{(-a)^3}{3a^2}\big) \Big) = \pi\, b\, c \Big(2a - \tfrac{2a}{3}\Big) = \frac{4}{3}\, \pi\, a\, b\, c$$

Ответ: $\frac{4}{3}\, \pi\, a\, b\, c$

№7 Площадь поверхности вращения кривой

$$S \;=\; 2\pi \int_0^3 y\, \sqrt{1 + \big(y'\big)^2}\, dx$$

Подставляем заданную функцию y и ее производную

$$y = \sqrt{2\lambda x}, \quad y' = \frac{d}{dx}\sqrt{2\lambda x} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda x}}$$

Преобразуем

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2\lambda x}} = \sqrt{\frac{2x + \lambda}{2x}}$$

$$y\, \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{2\lambda x}\, \sqrt{\frac{2x + \lambda}{2x}} = \sqrt{\lambda\, (2x + \lambda)}$$

Выносим множитель

$$S = 2\pi \int_0^3 \sqrt{\lambda\, (2x + \lambda)}\, dx = 2\pi\sqrt{\lambda}\, \int_0^3 \sqrt{2x + \lambda}\, dx$$

Выполняем замену

$$\int_0^3 \sqrt{2x + \lambda}\, dx = \frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\lambda + 6} u^{1/2}\, du = \frac{1}{3}\Big[(\lambda + 6)^{3/2} - \lambda^{3/2}\Big]$$

Ответ: $S = \frac{2\pi\sqrt{\lambda}}{3}\, \big[(\lambda + 6)^{3/2} - \lambda^{3/2}\big]$

№8 Используем Формулу 7 для площади поверхности вращения в пространстве

$$S \;=\; 2\pi \int_{-\lambda}^{\lambda} y(x)\,\sqrt{1+\big(y'(x)\big)^2}\,dx$$

Здесь сечение сферой плоскостью $y-z$ при фиксированном x есть круг радиуса $y(x)=\sqrt{\lambda^2-x^2}$, его производная:

$$y(x)=\sqrt{\lambda^2-x^2},\quad y'(x)=\frac{d}{dx}\sqrt{\lambda^2-x^2}=-\,\frac{x}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}$$

Поэтому

$$\sqrt{1+\big(y'(x)\big)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{\lambda^2-x^2}}=\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2-x^2}}=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}$$

Подставляем в интеграл

$$y\,\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{\lambda^2-x^2}\;\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}=\lambda$$

$$S=2\pi\int_{-\lambda}^{\lambda}\lambda\,dx=2\pi\lambda\big[x\big]_{-\lambda}^{\lambda}=2\pi\lambda\,(2\lambda)=4\pi\,\lambda^2$$

Ответ: $S=4\pi\,\lambda^2$

№9 Формула 3 для длины дуги кривой $y=f(x)$ и формула 8 для координат центра масс кривой при плотности $\rho = const$

$$
\begin{aligned}
&y = \sqrt{\lambda^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}},\\
&ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{\lambda^2 - x^2}}\, dx = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}\, dx,\\
&L = \int_{-\lambda}^{\lambda} ds = \lambda \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \lambda\, \pi,\\
&x_c = \frac{\displaystyle\int_{-\lambda}^{\lambda} x\, ds}{\displaystyle\int_{-\lambda}^{\lambda} ds} = 0 \quad \text{(по симметрии)},\\
&y_c = \frac{\displaystyle\int_{-\lambda}^{\lambda} y\, ds}{\displaystyle\int_{-\lambda}^{\lambda} ds} = \frac{\displaystyle\int_{-\lambda}^{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - x^2}\, \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}}{\lambda\, \pi} = \frac{\lambda \displaystyle\int_{-\lambda}^{\lambda} dx}{\lambda\, \pi} = \frac{2\lambda^2}{\lambda\, \pi} = \frac{2\lambda}{\pi}
\end{aligned}
$$

Ответ: $(x_c, y_c) = \left(0,\ \frac{2\lambda}{\pi}\right)$

№10 По Формуле 9 для центра масс плоской фигуры при однородной плотности:

$$x_c = \frac{\iint_D x\, dA}{\iint_D dA}, y_c = \frac{\iint_D y\, dA}{\iint_D dA}$$

Область $D : 0 \le x \le \lambda, \quad -\sqrt{\lambda x} \le y \le \sqrt{\lambda x}.$

Площадь D:

$$A = \int_{x=0}^{\lambda} \bigl(2\sqrt{\lambda x}\bigr)\, dx = 2\sqrt{\lambda} \int_0^{\lambda} x^{1/2}\, dx = 2\sqrt{\lambda}\, \frac{2}{3}\, \lambda^{3/2} = \frac{4}{3}\, \lambda^2.$$

Координата x_c:

$$\iint_D x\, dA = \int_0^{\lambda} x\bigl(2\sqrt{\lambda x}\bigr)\, dx = 2\sqrt{\lambda} \int_0^{\lambda} x^{3/2}\, dx = 2\sqrt{\lambda}\, \frac{2}{5}\, \lambda^{5/2} = \frac{4}{5}\, \lambda^3,$$

$$x_c = \frac{\iint_D x\,dA}{A} = \frac{\frac{4}{5}\lambda^3}{\frac{4}{3}\lambda^2} = \frac{3}{5}\lambda.$$

По симметрии

$$y_c = 0.$$

Ответ: $(x_c, y_c) = \left(\frac{3}{5}\lambda,\ 0\right)$

№11 (a) Определяем $I_n(x)$ по Формуле 10:

$$I_n(x) \;=\; \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \cos(xt)\,dt$$

(b) По методу полной мат. индукции имеем

$$x^{2n+1} I_n(x) \;=\; n!\,\bigl(P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x\bigr)$$

(c) Предположим, что $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Подставляя $x = \pi/2$ в предыдущее равенство, получаем Формулу 11:

$$\frac{a^{2n+1}}{n!}\, I_n\!\left(\frac{\pi}{2}\right) \;=\; b^{2n+1} P_n\!\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(d) Покажем, что $0 < I_n(\pi/2) < 2$. Заметим, что на $[-1, 1]$

$$0 \leqslant (1-t^2)^n \leqslant 1 \text{ и } |\cos(\frac{t\pi}{2})| \leqslant 1$$

(e) По представлению Пуянкара правая часть $b^{2n+1}P_n(\frac{\pi}{2})$ — целое число.

(f) Переход к пределу $n \to \infty$ в равенстве 11 даёт

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{n!}\, I_n\!\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

но это целое (по пункту (e)) и строго положительное (по (d)) число — противоречие.

Вывод: допущение рациональности $\frac{\pi}{2}$ ведёт к противоречию, значит π иррационально.