

Домашнее задание на 10.04 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Первое равенство неверно, так как:

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C_1 - (\ln(x) + C_2) = C_1 - C_2$$

Второе равенство верно. Третье равенство неверно - аналогично первому.

№2 (a) Рассмотрим интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2 \implies \\ \implies \arcsin x + \arccos x &= C_2 - C_1 = C \end{aligned}$$

Значит, в любой точке сумма константа:

$$\arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$

(b) Рассмотрим интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x} + C_2 \implies \\ \implies \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} &= C_2 - C_1 = C \end{aligned}$$

Значит, в любой точке сумма константа:

$$C_2(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

№3 (а) Разложим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 - 1} &= \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x^2 + 1} \\ &= \frac{(A + B)x^3 + (A - B + C)x^2 + (A + B)x + (A - B - C)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 0 \\ A + B = 0 \\ A - B - C = 1 \end{cases} \implies A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{2}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4 - 1} dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x + 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \int \frac{1}{x^4 - 1} dx = \frac{1}{4} \ln |x - 1| - \frac{1}{4} \ln |x + 1| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{4} \ln |x - 1| - \frac{1}{4} \ln |x + 1| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$

(b) Найдём:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-8 - 12x - 4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \cdot \frac{1}{2} dt = \arcsin(2x + 3) + C$$

Ответ: $\frac{1}{2} \arcsin(2x + 3) + C$

(с) Найдём:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Замена $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x dx \implies -dt = \sin x dx$

$$-\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

Ответ: $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$

(d) Найдём:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx \end{aligned}$$

Обозначим исходный интеграл за I :

$$I = x\sqrt{a^2 + x^2} - I + a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C$$

$$2I = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C$$

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C$$

Ответ: $\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C$

(е) Найдём:

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x dx &= \int \sin x \cdot \sin^4 x dx = -\sin^4 x \cos x + 4 \int \sin^3 x \cos^2 x dx = \\ &= -\sin^4 x \cos x + 4 \int \sin^3 x dx - 4 \int \sin^5 x dx. \end{aligned}$$

Обозначим исходный интеграл за I :

$$I = -\sin^4 x \cos x + 4 \int \sin^3 x dx - 4I.$$

$$5I = -\sin^4 x \cos x + 4 \int \sin^3 x dx.$$

Вычислим:

$$\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Получилось:

$$I = -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4 \cos x}{5} + \frac{4 \cos^3 x}{15} + C$$

Ответ: $-\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4 \cos x}{5} + \frac{4 \cos^3 x}{15} + C$

(f) Найдём:

$$\int x^2 \arccos x dx = \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Замена $t = \sqrt{1-x^2}$:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} + C$$

Следовательно:

$$\int x^2 \arccos x dx = \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{9} + C$$

Ответ: $\frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{9} + C$

(g) Найдём:

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx =$$

Вычислим:

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$$

Подставим:

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx$$

Следовательно:

$$2 \int \sin(\ln x) dx = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C \implies$$

$$\implies \int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

Ответ: $\frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$

(h) Найдём: