Домашнее задание на 03.04 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 $(x_1^\circ, x_2^\circ, u_1^\circ) = (1, 1, 2)$. Найдём производные $u_1 = f_1(x_1, x_2)$

$$F_1(x_1, x_2, u_1) = u_1^3 - 2u_1^2 x_1 + u_1 x_1 x_2 - 2 = 0$$

Проверим опеределитель:

$$\left|(F_1)'_{u_1}\right|(x_1^\circ, x_2^\circ, u_1^\circ) = 3\,{u_1}^2 - 4\,x_1\,u_1 + x_1\,x_2 = 5 \neq 0$$

Тогда:

$$\begin{cases} u_1 = f_1(x_1, x_2), \quad u_1^\circ = f_1(x_1^\circ, x_2^\circ) \end{cases}$$

При этом существуют все частные производные f_1. Их значения выражаются как:

$$\begin{bmatrix} (f_1)'_{x_1} & (f_1)'_{x_2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} (F_1)'_{u_1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (F_1)'_{x_1} & (F_1)'_{x_2} \end{bmatrix}$$

То есть:

$$\begin{cases} (f_1)'_{x_1} = -\frac{(F_1)'_{x_1}}{(F_1)'_{u_1}} = -\frac{u_1\,x_2 - 2\,{u_1}^2}{3\,{u_1}^2 - 4\,x_1\,u_1 + x_1\,x_2} = \frac{6}{5} \\ (f_1)'_{x_2} = -\frac{(F_1)'_{x_2}}{(F_1)'_{u_1}} = -\frac{u_1\,x_1}{3\,{u_1}^2 - 4\,x_1\,u_1 + x_1\,x_2} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Вторая производная:

$$(f_1)''_{x_1 x_2} = \frac{2\,{u_1}^2\,x_1 - 3\,{u_1}^3}{{x_1}^2\,{x_2}^2 + \left(6\,{u_1}^2\,x_1 - 8\,u_1\,{x_1}^2\right)\,x_2 + 16\,{u_1}^2\,{x_1}^2 - 24\,{u_1}^3\,x_1 + 9\,{u_1}^4} = -\frac{16}{25}$$

Ответ: $\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{16}{25}$

№2 $(x_1^\circ, x_2^\circ, u_1^\circ, u_2^\circ) = (1, 0, 1, -2)$. Найдём производные $u_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $u_2 = f_2(x_1, x_2)$

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, u_1, u_2) = x_1 u_1 + x_2 u_2 - u_1^3 = 0 \\ F_2(x_1, x_2, u_1, u_2) = x_1 + x_2 + u_1 + u_2 = 0 \end{cases}$$

Проверим опеределитель:

$$\begin{vmatrix} (F_1)'_{u_1} & (F_1)'_{u_2} \\ (F_2)'_{u_1} & (F_2)'_{u_2} \end{vmatrix} (x_1^\circ, x_2^\circ, u_1^\circ, u_2^\circ) = -2 \neq 0$$

Тогда:

$$\begin{cases} u_1 = f_1(x_1, x_2), \quad u_1^\circ = f_1(x_1^\circ, x_2^\circ) \\ u_2 = f_2(x_1, x_2), \quad u_2^\circ = f_2(x_1^\circ, x_2^\circ) \end{cases}$$

При этом существуют все частные производные f_1 и f_2. Их значения выражаются как:

$$\begin{bmatrix} (f_1)'_{x_1} & (f_1)'_{x_2} \\ (f_2)'_{x_1} & (f_2)'_{x_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (F_1)'_{u_1} & (F_1)'_{u_2} \\ (F_2)'_{u_1} & (F_2)'_{u_2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (F_1)'_{x_1} & (F_1)'_{x_2} \\ (F_2)'_{x_1} & (F_2)'_{x_2} \end{bmatrix}$$

То есть:

$$\begin{bmatrix} (f_1)'_{x_1} & (f_1)'_{x_2} \\ (f_2)'_{x_1} & (f_2)'_{x_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Ответ: $\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, 0$

№3 $(x^\circ, y^\circ, u^\circ) = (3, -2, 2)$. Найдём производные $u = f(x, y)$

$$F(x, y, u) = u^3 - xu + y = 0$$

Проверим опеределитель:

$$\left| (F)'_{u_1} \right| = 9 \neq 0$$

Тогда:

$$u = f(x, y), \quad u^\circ = f(x^\circ, y^\circ)$$

При этом производные:

$$\begin{bmatrix} f'_x & f'_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F'_u \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F'_x & F'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Теперь найдём вторые производные:

$$f'_{xy} = \frac{5}{243}, \qquad f'_{xx} = -\frac{4}{243}, \qquad f'_{yy} = -\frac{4}{243}$$

Матрица Гессе:

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{243} & \frac{5}{243} \\ \frac{5}{243} & -\frac{4}{243} \end{bmatrix}$$

Второй дифференциал:

$$d^2 f_{(x^\circ, y^\circ)}(h) = -\frac{4}{243}\, h_1^2 + \frac{10}{243}\, h_1 h_2 - \frac{4}{243}\, h_2^2$$

Ответ: $d^2 f_{(x^\circ, y^\circ)}(h) = -\frac{4}{243}\, h_1^2 + \frac{10}{243}\, h_1 h_2 - \frac{4}{243}\, h_2^2$

№4 Найдём u'_x,в точке $(x^\circ, y^\circ, z^\circ) = (-5, -1, 2)$ если

$$u(x, y, z) = xy^2z^3$$

при

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3yz$$

Мы знаем что:

$$u'_x = 2xz^3 y(x, z)(y(x, z))'_x + z^3\, y^2$$

Найдём $(y(x, z))'_x$ в точке $(x^\circ, y^\circ, z^\circ)$:

$$F(x, z, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 3yz = 0$$

Проверим опеределитель:

$$\left|(F)'_y\right| = -8 \neq 0$$

Тогда:

$$y(x,z) \text{ - существует}$$

При этом производные:

$$\begin{bmatrix}(y(x,z))'_x & (y(x,z))'_z\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}F'_y\end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix}F'_x & F'_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{5}{4} & \frac{7}{8}\end{bmatrix}$$

Следовательно:

$$(y(x,z))'_x = -\frac{5}{4}$$

Значит:

$$u'_x = 2xz^3y(x,z)(y(x,z))'_x + z^3\,y^2 = -92$$

Ответ: -92

№5 Для начала найдём производные z'_x и z'_y, в точке $(x^\circ, y^\circ, u^\circ, v^\circ) = (x^\circ, y^\circ, 2, 2)$ если известно, что:

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v,z) = x - u^4 - v = 0 \\ F_2(x,y,u,v,z) = y - u^3 - v = 0 \\ F_3(x,y,u,v,z) = z - \sin(2\pi(u+v)) = 0 \end{cases}$$

Проверим опеределитель:

$$\begin{vmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v & (F_1)'_z \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & (F_2)'_z \\ (F_3)'_u & (F_3)'_v & (F_3)'_z \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда:

$$z(x,y)\text{- существует}$$

При этом производные:

$$\begin{bmatrix} (z(x,y))'_x & (z(x,y))'_y \\ (u(x,y))'_x & (u(x,y))'_y \\ (v(x,y))'_x & (v(x,y))'_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v & (F_1)'_z \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & (F_2)'_z \\ (F_3)'_u & (F_3)'_v & (F_3)'_z \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (F_1)'_x & (F_1)'_y \\ (F_2)'_x & (F_2)'_y \\ (F_3)'_x & (F_3)'_y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ -\frac{11\pi}{10} & \frac{31\pi}{10} \end{bmatrix}$$

Следовательно,

$$(z(x,y))'_x = \frac{1}{20}, \quad (z(x,y))'_y = -\frac{1}{20}$$

Найдём дифференциал:

$$d_{(x^\circ,y^\circ)}z(\vec{h}) = \frac{1}{20}h_1 - \frac{1}{20}h_2$$

Ответ: $d_{(x^\circ,y^\circ)}z(\vec{h}) = \frac{1}{20}h_1 - \frac{1}{20}h_2$