Домашнее задание на 24.02 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{-7x^3y+5xy^3}{x^2+y^2}, & \text{при } (x,y) \neq 0 \\ 0, & \text{при } (x,y) = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)(0,0)$$

Найдём $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ при $(x,y) \neq 0$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x\ (5\,y^4 + 22\,x^2\,y^2 - 7\,x^4)}{y^4 + 2\,x^2\,y^2 + x^4}$$

Найдём $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ при $(x,y) = 0$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+(0,1)t) - f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)}{t} = 0$$

Найдём $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}((0,0)+(1,0)t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)}{t}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{-7t^5}{t^5}\right) = -7$$

Найдём $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)(0,0)$$

Найдём $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ при $(x,y) \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(-21x^2y + 5y^3)(x^2+y^2) - (-7x^3y + 5xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-7x^4y - 26x^2y^3 + 5y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

Найдём $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ при $(x,y) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Найдём $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{5k - 0}{k} = \lim_{k\to 0} 5 = 5$$

Ответ: -7 и 5

№2 $f(x,y) = \begin{cases} \exp(-\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}), & \text{при } xy \neq 0 \\ 0, & \text{при } xy = 0 \end{cases}$

(a) Найдём $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Найдём $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$

Для $h \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(h,k)-f(h,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\exp\left(-\frac{h^2}{k^2}-\frac{k^2}{h^2}\right)-0}{k} = 0$$

Следовательно:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Найдём $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Найдём $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}$$

Для $k \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,k)-f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp\left(-\frac{h^2}{k^2}-\frac{k^2}{h^2}\right)-0}{h} = 0$$

Следовательно:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

Ответ: 0 и 0

(b) Для доказательства разрыва функции f в точке $(0,0)$ покажем, что предел $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует или не равен $f(0,0)=0$. Рассмотрим два различных пути приближения к $(0,0)$:

1) Пусть $y = kx$, где $k \neq 0$. Тогда при $x \neq 0$:

$$f(x, kx) = \exp\left(-\frac{x^2}{(kx)^2} - \frac{(kx)^2}{x^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{k^2} - k^2\right).$$

При $x \to 0$ получаем:

$$\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \exp\left(-\frac{1}{k^2} - k^2\right) \neq 0 \quad \text{для любого } k \neq 0.$$

2) Пусть $y = x$. Тогда:

$$f(x, x) = \exp\left(-\frac{x^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}\right) = \exp(-1 - 1) = e^{-2} \neq 0.$$

Следовательно:

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = e^{-2} \neq 0.$$

Поскольку пределы вдоль различных путей не совпадают с $f(0, 0) = 0$ и между собой, общий предел $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ не существует. Таким образом, функция f разрывна в точке $(0, 0)$.

№3 (a) Функция $f(x, y) = 5 + x^2y + xe^{3y^2}$

Найдем вторые частные производные функции f в точке $(1, -1)$:

Первые производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + e^{3y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xye^{3y^2}$$

Вторые производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 6ye^{3y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xe^{3y^2}(1 + 6y^2)$$

Вычисление в точке $(1,-1)$:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,-1)} = -2, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(1,-1)} = 2-6e^3, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,-1)} = 42e^3$$

Матрица Гессе:

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 2-6e^3 \\ 2-6e^3 & 42e^3 \end{bmatrix}$$

Второй дифференциал:

$$\mathrm{d}^2 f(\overline{a}, \overline{h}) = -2h_1^2 + 2(2-6e^3)h_1h_2 + 42e^3h_2^2 = -2h_1^2 + (4-12e^3)h_1h_2 + 42e^3h_2^2$$

(b) Функция $f(x,y,z) = x - 2xz + x^2z - z^2$, точка $\overline{a} = (-1,2,1)$ Найдем вторые частные производные функции f в точке $(-1,2,1)$:

Первые производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2z + 2xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2x + x^2 - 2z$$

Вторые производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -2 + 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2$$

Остальные вторые производные равны нулю.

Вычисление в точке $(-1,2,1)$:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(-1,2,1)} = 2, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right|_{(-1,2,1)} = -4, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{(-1,2,1)} = -2$$

Матрица Гессе:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Второй дифференциал:

$$\mathrm{d}^2 f(\overline{a}, \overline{h}) = 2h_1^2 - 8h_1h_3 - 2h_3^2 = 2h_1^2 - 8h_1h_3 - 2h_3^2$$

№4 (a) Первый дифференциал $\mathrm{d}\varphi$

Функция $\varphi = g \circ f$, где $f(x, y) = (u, v, w) = (xy^3, x^2 + 5y^2, x^2y)$.

По цепному правилу:

$$\mathrm{d}\varphi = g'_u \mathrm{d}u + g'_v \mathrm{d}v + g'_w \mathrm{d}w$$

Вычисляем дифференциалы $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v, \mathrm{d}w$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= y^3 \mathrm{d}x + 3xy^2 \mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}v &= 2x\mathrm{d}x + 10y\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}w &= 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Подставляя в выражение для $\mathrm{d}\varphi$:

$$\mathrm{d}\varphi = g'_u(y^3\mathrm{d}x + 3xy^2\mathrm{d}y) + g'_v(2x\mathrm{d}x + 10y\mathrm{d}y) + g'_w(2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y).$$

Группируя по $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}\varphi = \left(g'_u y^3 + g'_v 2x + g'_w 2xy\right)\mathrm{d}x + \left(g'_u 3xy^2 + g'_v 10y + g'_w x^2\right)\mathrm{d}y.$$

Ответ:

$$\mathrm{d}\varphi = \left(y^3 g'_u + 2x g'_v + 2xy g'_w\right)\mathrm{d}x + \left(3xy^2 g'_u + 10y g'_v + x^2 g'_w\right)\mathrm{d}y.$$

(b) Второй дифференциал $\mathrm{d}^2\varphi$

Второй дифференциал вычисляется по формуле:

$$\mathrm{d}^2\varphi = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)(\mathrm{d}x)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)(\mathrm{d}y)^2.$$

Используя цепное правило для вторых производных и учитывая симметричность смешанных производных, получаем:

$$\mathrm{d}^2\varphi = \mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi) = \mathrm{d}\left(g'_u \mathrm{d}u + g'_v \mathrm{d}v + g'_w \mathrm{d}w\right).$$

Раскрывая дифференциал:

$$\mathrm{d}^2\varphi = \left(g''_{uu}(\mathrm{d}u)^2 + 2g''_{uv}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + 2g''_{uw}\mathrm{d}u\mathrm{d}w + g''_{vv}(\mathrm{d}v)^2 + 2g''_{vw}\mathrm{d}v\mathrm{d}w + g''_{ww}(\mathrm{d}w)^2\right) +$$

$$+g'_u\mathrm{d}^2u + g'_v\mathrm{d}^2v + g'_w\mathrm{d}^2w$$

Вычисляем вторые дифференциалы $\mathrm{d}^2u, \mathrm{d}^2v, \mathrm{d}^2w$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2u &= 6y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6xy(\mathrm{d}y)^2,\\
\mathrm{d}^2v &= 2(\mathrm{d}x)^2 + 10(\mathrm{d}y)^2,\\
\mathrm{d}^2w &= 2y(\mathrm{d}x)^2 + 4x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Подставляя всё в выражение для $\mathrm{d}^2\varphi$:

$$\mathrm{d}^2\varphi = \Big[g''_{uu}(y^3\mathrm{d}x + 3xy^2\mathrm{d}y)^2 +$$

$$2g''_{uv}(y^3\mathrm{d}x + 3xy^2\mathrm{d}y)(2x\mathrm{d}x + 10y\mathrm{d}y)$$

$$+2g''_{uw}(y^3\mathrm{d}x + 3xy^2\mathrm{d}y)(2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y) + g''_{vv}(2x\mathrm{d}x + 10y\mathrm{d}y)^2 + 2g''_{vw}(2x\mathrm{d}x +$$

$$10y\mathrm{d}y)(2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y) +$$

$$g''_{ww}(2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y)^2\Big] + g'_u(6y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6xy(\mathrm{d}y)^2) + g'_v(2(\mathrm{d}x)^2 + 10(\mathrm{d}y)^2) +$$

$$g'_w(2y(\mathrm{d}x)^2 + 4x\mathrm{d}x\mathrm{d}y).$$

Ответ:

$$\mathrm{d}^2\varphi = \left(\mathbf{h}^T \cdot H_g \cdot \mathbf{h}\right) + g'_u\mathrm{d}^2u + g'_v\mathrm{d}^2v + g'_w\mathrm{d}^2w,$$

где $\mathbf{h} = (\mathrm{d}u, \mathrm{d}v, \mathrm{d}w)^T$, H_g — матрица Гессе функции g, а $\mathrm{d}^2u, \mathrm{d}^2v, \mathrm{d}^2w$ заданы выше.

№5 (a) Формула Тейлора 3-го порядка для $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ в точке $(1, 2)$

Выполним замену переменных: $x = 1+h$, $y = 2+k$, где $h = x-1$, $k = y - 2$. Подставим в функцию и разложим:

$$\begin{aligned} f(1+h, 2+k) &= (1+h)^3 - 2(2+k)^3 + 3(1+h)(2+k) \\ &= 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 2(8 + 12k + 6k^2 + k^3) + 3(2 + 2h + k + hk) \\ &= 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 16 - 24k - 12k^2 - 2k^3 + 6 + 6h + 3k + 3hk \\ &= -9 + 9h - 21k + 3h^2 + 3hk - 12k^2 + h^3 - 2k^3. \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем формулу Тейлора 3-го порядка:

$$f(x, y) = -9+9(x-1)-21(y-2)+3(x-1)^2+3(x-1)(y-2)-12(y-2)^2$$

$$+(x-1)^3 - 2(y-2)^3$$

(b) Формула Тейлора 2-го порядка для $f(x, y) = \arctan\left(x^2y - 2e^{x-1}\right)$ в точке $(1, 3)$

Сначала вычислим значение функции и производных в точке $(1, 3)$:

$$f(1, 3) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Обозначим $u = x^2y - 2e^{x-1}$. Вычислим производные u:

$$u(1,3)=1,$$
$$u_x(1,3)=4,\quad u_y(1,3)=1,$$
$$u_{xx}(1,3)=4,\quad u_{xy}(1,3)=2,\quad u_{yy}(1,3)=0.$$

Производные функции $f=\arctan(u)$:

$$f_x=\frac{u_x}{1+u^2}\bigg|_{(1,3)}=2,\quad f_y=\frac{u_y}{1+u^2}\bigg|_{(1,3)}=\frac{1}{2},$$
$$f_{xx}=\frac{u_{xx}(1+u^2)-2uu_x^2}{(1+u^2)^2}\bigg|_{(1,3)}=-6,$$
$$f_{xy}=\frac{u_{xy}(1+u^2)-2uu_xu_y}{(1+u^2)^2}\bigg|_{(1,3)}=-1,$$
$$f_{yy}=\frac{u_{yy}(1+u^2)-2uu_y^2}{(1+u^2)^2}\bigg|_{(1,3)}=-0.5.$$

Формула Тейлора 2-го порядка:

$$f(x,y)=\frac{\pi}{4}+2(x-1)+\frac{1}{2}(y-3)$$
$$+\frac{1}{2}\left[-6(x-1)^2-2(x-1)(y-3)-0.5(y-3)^2\right]+o\left((x-1)^2+(y-3)^2\right).$$

Упрощая:

$$f(x,y)=\frac{\pi}{4}+2(x-1)+\frac{1}{2}(y-3)-$$
$$3(x-1)^2-(x-1)(y-3)-\frac{1}{4}(y-3)^2+o\left((x-1)^2+(y-3)^2\right).$$

№6 Для нахождения функции $f(x,y)$, удовлетворяющей заданным условиям, воспользуемся методом интегрирования частных производных.

Из условия $f'_x(x,y) = 3x^2y - 4y^2$ интегрируем по x:

$$\int (3x^2y - 4y^2)\,dx = x^3y - 4xy^2 + C(y),$$

где $C(y)$ — функция, зависящая только от y.

Вычислим $f'_y(x,y)$ из полученного выражения:

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^3y - 4xy^2 + C(y)\big) = x^3 - 8xy + C'(y).$$

Сравнивая с условием $f'_y(x,y) = x^3 - 8xy + 6y$, получаем:

$$C'(y) = 6y \quad \Rightarrow \quad C(y) = \int 6y\,dy = 3y^2 + C,$$

где C — константа.

Подстановка $C(y)$ в $f(x,y)$:

$$f(x,y) = x^3y - 4xy^2 + 3y^2 + C.$$

Используем условие $f(1,1) = 5$:

$$1^3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 + C = 5 \quad \Rightarrow \quad 1 - 4 + 3 + C = 5 \quad \Rightarrow \quad C = 5.$$

Ответ: