Домашнее задание на 01.12 (Математичский анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 (a) $f = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$

1. Найдем производную f через производные u и v:

$$f' = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) =$$

$$= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2+u^2}$$

2. Теперь выразим дифференциал $\mathrm{d}f$:

$$\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{u^2+v^2}$$

(b) $f = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$

1. Сначала найдем производную f:

$$f' = -\frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(u^2+v^2)$$

$$f' = -\frac{u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx}}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

2. Теперь выразим дифференциал $\mathrm{d}f$:

$$\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x = -\frac{u\mathrm{d}u + v\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

№2 (a) Доказательство: $(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos(ax+b+\pi/2 \cdot n)$

1) Базa индукции ($n=1$):

$$(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b) = a^1\cos(ax+b+\pi/2)$$

База индукции верна.

2) Шаг индукции:

Предположим, что утверждение верно для $n=k$:

$$(\cos(ax+b))^{(k)} = a^k \cos(ax+b+\pi/2 \cdot k)$$

Теперь докажем для $n=k+1$:

$$(\cos(ax+b))^{(k+1)} = ((\cos(ax+b))^{(k)})' =$$

$$= (a^k\cos(ax+b+\pi/2\cdot k))' =$$

$$= a^k \cdot \left(-\sin\left(a\,x + \frac{\pi\,k}{2} + b\right)\right) \cdot \left(a\,x + \frac{\pi\,k}{2} + b\right)' =$$

$$= -a^{k+1}\,\sin\left(a\,x + \frac{\pi\,k}{2} + b\right) = a^{k+1}\cos(ax+b+\pi/2\cdot(k+1))$$

Таким образом, утверждение верно для $n=k+1$.

По принципу математической индукции, утверждение верно для всех $n \in \mathbb{N}$.

(b) Доказательство: $(\ln(ax+b))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$

1) База индукции ($n=1$):

$$(\ln(ax+b))' = \frac{a}{ax+b}$$

Это соответствует:

$$\frac{(-1)^{1-1}(1-1)!a^1}{(ax+b)^1} = \frac{1\cdot a}{(ax+b)} = \frac{a}{ax+b}$$

База индукции верна.

2) <u>Шаг индукции:</u>

Предположим, что утверждение верно для $n = k$:

$$(\ln(ax+b))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!a^k}{(ax+b)^k}$$

Теперь докажем для $n = k+1$:

$$(\ln(ax+b))^{(k+1)} = ((\ln(ax+b))^{(k)})' = \left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!a^k}{(ax+b)^k}\right)' =$$

$$= (k-1)!\ (-1)^{k-1}\ a^k \cdot \left(\frac{1}{(a\,x+b)^k}\right)'$$

$$= (k-1)!\ (-1)^{k-1}\ a^k \cdot \left(-\frac{\left((a\,x+b)^k\right)'}{(a\,x+b)^{2\,k}}\right)$$

$$= (k-1)!\ (-1)^{k-1}\ a^k \cdot \left(-\frac{ak\,(a\,x+b)^{k-1}}{(a\,x+b)^{2\,k}}\right) = \frac{(-1)^k k! a^{k+1}}{(ax+b)^{k+1}}$$

Утверждение верно для $n = k+1$.

По принципу математической индукции, утверждение верно для всех $n \in \mathbb{N}$.

№3 (a) Найдём n-ю производную функции $f(x) = \frac{x-13}{x^2-x-6}$

Сначала упростим функцию $f(x)$ с помощью разложения на простейшие дроби.

Найдем корни знаменателя:

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

Таким образом, $f(x)$ можно записать как:

$$f(x) = \frac{x-13}{(x-3)(x+2)}$$

Разложим на простейшие дроби:

$$f(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

$$x - 13 = A(x-3) + B(x+2)$$

$$x - 13 = Ax - 3A + Bx + 2B = (A+B)x + (-3A+2B)$$

Сравним коэффициенты:

$$\begin{cases} A + B = 1 \quad (\text{коэффициент при } x) \\ -3A + 2B = -13 \quad (\text{свободный член}) \end{cases}$$

$$-3A + 2(1-A) = -13$$

$$-3A + 2 - 2A = -13 \implies -5A = -15 \implies A = 3$$

$$3 + B = 1 \implies B = -2$$

Таким образом, разложение:

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-3}$$

Теперь найдем n-ю производную:

$$f^{(n)}(x) = 3 \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} - 2 \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$$

(b) Найдём n-ю производную функции $h(x) = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$

Мы знаем, что:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (*)$$

где $f(x) = x^2 + x + 1$ и $g(x) = e^{-3x}$.

Найдем производную $g^{(n)}(x)$:

$$g^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$$

Найдем производную $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + x + 1)^{(n)} = (x^2)^{(n)} + (x)^{(n)} + (1)^{(n)} =$$
$$= (x^2)^{(n)} + (x)^{(n)} =$$

При $n = 1$:

$$f^{(n)}(x) = 2x + 1$$

При $n = 2$:

$$f^{(n)}(x) = 2$$

При $n > 2$:

$$f^{(n)}(x) = 0$$

Следовательно:

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} (-3)^{n-k} e^{-3x}$$

(c) Найдём n-ю производную функции $f(x) = \sin(3x) \cdot \cos^2(5x)$

Используем формулу двойного угла:

$$\cos^2(5x) = \frac{1+\cos(10x)}{2}$$

Таким образом:

$$f(x) = \sin(3x)\cdot\frac{1+\cos(10x)}{2} = \frac{1}{2}\sin(3x) + \frac{1}{2}\sin(3x)\cos(10x)$$

Теперь преобразуем второе слагаемое в сумму:

$$\frac{1}{2}\sin(3x)\cos(10x) = \frac{1}{4}\left(\sin(13x) - \sin(7x)\right)$$

Получилось:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(13x) - \frac{1}{4}\sin(7x)$$

Найдём $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{2}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(13x) - \frac{1}{4}\sin(7x)\right)^{(n)}$$

Воспользуемся тем, что:

$$(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n\cos(ax+b+\pi/2\cdot n) =$$

$$= (-1)^n a^n \sin\left(ax+b\right)$$

Получим:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^n 3^n \sin\left(3x\right) + \frac{1}{4}(-1)^n 13^n \sin\left(13x\right) - \frac{1}{4}(-1)^n 7^n \sin\left(7x+b\right)$$

№4 (a) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)-2\cdot\arcsin x}{x^3}$ - При $x\to 0$:

- $f(0) = \arcsin(0) - 2\arcsin(0) = 0 - 0 = 0$.
- $g(0) = 0^3 = 0$.
- Оба предела равны нулю, следовательно, неопределённость $\frac{0}{0}$.

-Функции $f(x)$ и $g(x)$ являются составными и элементарными функциями, которые дифференцируемы в окрестности точки $x = 0$.

Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad g'(x) = 3x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

Применяем правило Лопиталя снова:

$$f''(x) = \frac{8x}{(1-(2x)^2)^{3/2}} - \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}}, \quad g''(x) = 6x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{8x}{(1-(2x)^2)^{3/2}} - \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}}}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{8}{(1-0)^{3/2}} - \frac{2}{(1-0)^{3/2}} = \frac{8-2}{6} = 1$$

Ответ: 1

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$

- $f(x) = x^x - x$ и $g(x) = 1 - x + \ln x$.

- При $x \to 1$, $f(1) = 1^1 - 1 = 0$ и $g(1) = 1 - 1 + \ln(1) = 0$.

Применим правило Лопиталя:

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) - 1, \quad g'(x) = -1 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{-1 + \frac{1}{x}}$$

Применяем правило Лопиталя снова:

$$f''(x) = x^x\left(\frac{1}{x} + \ln x + 1\right) + x^x(\ln x + 1)(\ln x + 1) = x^x\left(\frac{1}{x} + 2\ln x + 1\right).$$

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^x\left(\frac{1}{x} + 2\ln x + 1\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{1\,(1+0+1)}{-1} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Ответ: -2

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)$
Преобразуем предел:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Теперь, когда $x \to +\infty$, $\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right) \to 0$ и $\frac{1}{x} \to 0$, мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Теперь применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}.$$

Вычислим производные:

1. Для числителя:

$$\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)\right)' = \frac{1}{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

2. Для знаменателя:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Теперь подставим производные в предел:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg}(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)}.$$

При $x \to +\infty$, $\operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{\frac{\pi}{2}(1+x^2)} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x^2}{\pi(1+x^2)} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{\pi(\frac{1}{x^2}+1)} = -\frac{2}{\pi}.$$

Ответ: $-\frac{2}{\pi}$

№5 Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x}.$$

Проверка неопределенности

При $x \to 0$:

- $x^3 \to 0$,
- $\sin \frac{1}{x}$ колеблется между -1 и 1, следовательно, $x^3 \sin \frac{1}{x} \to 0$,
- $\sin^2 x \to 0$.

Таким образом, мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Правило Лопиталя можно применять только в тех случаях, когда функции в числителе и знаменателе являются дифференцируемыми в окрестности точки, к которой стремится x. В данном случае $\sin \frac{1}{x}$ не является дифференцируемой в точке $x = 0$, так как $\frac{1}{x}$ стремится к бесконечности, и sin не имеет предела в этой точке. Поэтому правило Лопиталя не применимо.

Найдём предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(\sin\frac{1}{x})}{(x+\overline{o}(x^2))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(\sin\frac{1}{x})}{x^2+\overline{o}(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sin\frac{1}{x})}{1+\overline{o}(x^2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x(\sin\frac{1}{x})}{1+0}=\lim_{x\to 0}x(\sin\frac{1}{x})=0$$

Ответ: 0