Домашнее задание на 17.04 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Докажем формулу:

$$J_k = \int \frac{1}{(y^2+\alpha^2)^k}\,dy = \begin{cases} \frac{1}{2(k-1)\alpha^2}\cdot\frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2}J_{k-1}, & k \geqslant 2 \\ \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha} + C, & k = 1 \end{cases}$$

Для $k \geqslant 2$:

По формуле интегрирования по частям:

$$J_{k-1} = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{y^2}{(y^2+\alpha^2)^k}\,dy$$

Преобразуем $y^2 = (y^2+\alpha^2) - \alpha^2$:

$$\int \frac{y^2}{(y^2+\alpha^2)^k}\,dy = J_{k-1} - \alpha^2 J_k$$

Подставляем обратно:

$$J_{k-1} = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + 2(k-1)(J_{k-1} - \alpha^2 J_k)$$

Решаем относительно J_k:

$$J_{k-1} - 2(k-1)J_{k-1} + 2(k-1)\alpha^2 J_k = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}}$$

$$-(2k-3)J_{k-1} + 2(k-1)\alpha^2 J_k = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}}$$

$$J_k = \frac{1}{2(k-1)\alpha^2}\cdot\frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2}J_{k-1}$$

Для $k=1$:

$$J_1 = \int \frac{1}{y^2+\alpha^2}\,dy = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha} + C.$$

№2 (a) Найдём:

$$\int \frac{x^4}{(x+1)^3}\,dx$$

Пусть $t=x+1$, тогда $x=t-1$, $dx=dt$. Подставляем в интеграл:

$$\int \frac{(t-1)^4}{t^3}\,dt$$

Раскрываем $(t-1)^4$:

$$(t-1)^4 = t^4-4t^3+6t^2-4t+1$$

Делим числитель на знаменатель:

$$\frac{t^4-4t^3+6t^2-4t+1}{t^3} = t-4+\frac{6}{t}-\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3}$$

Тогда:

$$\int\left(t-4+\frac{6}{t}-\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{t^2}{2}-4t+6\ln|t|+\frac{4}{t}-\frac{1}{2t^2}+C$$

Заменяем $t=x+1$:

$$\int \frac{x^4}{(x+1)^3} = \frac{(x+1)^2}{2}-4(x+1)+6\ln|x+1|+\frac{4}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$$

Ответ: $\frac{(x+1)^2}{2}-4(x+1)+6\ln|x+1|+\frac{4}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$

(b) Найдём:

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$$

Знаменатель:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

Значит:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D = \frac{1}{2}$$

Первая дробь:

$$\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln|x^2+\sqrt{2}x+1| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + C$$

Вторая дробь:

$$\int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln|x^2-\sqrt{2}x+1| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) + C$$

Получаем:

$$\int \frac{1}{x^4+1}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) + C$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) + C$

(c) Найдём:

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\, dx$$

Представим подынтегральную функцию в виде:

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

Умножаем обе части на $(x-1)^2(x^2+1)^2$ и подставляем $x=1$:

$$4(1)^2 - 8(1) = B(1^2+1)^2 \implies -4 = 4B \implies B = -1.$$

Далее раскрываем скобки и приравниваем коэффициенты при степенях x:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ -2A + B + D = 4, \\ A - 2C + E = -8, \\ -A - 2D + F = 0, \\ C - 2E = 0, \\ D - 2F = 0. \end{cases}$$

Решение системы:

$$A = 1,\ B = -1,\ C = -1,\ D = 0,\ E = -1,\ F = 0.$$

Разбиваем интеграл на части:

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Вычисляем каждую часть:

- $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$
- $\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{x-1}$
- $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
- $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}$

$$\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

Ответ: $\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$