Домашнее задание на 10.04 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Первое равенство неверно, так как:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + C_1 - (\ln(x) + C_2) = C_1 - C_2$$

Второе равенство верно. Третье равенство неверно - аналогично первому.

№2 (a) Рассмотрим интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2 \implies$$

$$\implies \arcsin x + \arccos x = C_2 - C_1 = C$$

Значит, в любой точке сумма константа:

$$\arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$

(b) Рассмотрим интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{dx} = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + C_2 \implies$$

$$\implies \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = C_2 - C_1 = C$$

Значит, в любой точке сумма константа:

$$C_2(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

№3 (a) Разложим:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x^2+1}$$

$$= \frac{(A+B)x^3 + (A-B+C)x^2 + (A+B)x + (A-B-C)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A+B=0 \\ A-B-C=1 \end{cases} \implies A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{2}$$

Следовательно:

$$\int \frac{1}{x^4-1}\ \mathrm{dx} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1} \right) \mathrm{dx} =$$

$$= \int \frac{1}{x^4-1}\ \mathrm{dx} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

Ответ: $\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

(b) Найдём:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-8-12x-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \arcsin(2x+3) + C$$

Ответ: $\frac{1}{2}\arcsin(2x+3) + C$

(c) Найдём:

$$\int \frac{1}{\sin x}\ \mathrm{dx} = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\ \mathrm{dx}$$

Замена $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x\,dx \implies -dt = \sin x\,dx$

$$-\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C$

(d) Найдём:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

Обозначим исходный интеграл за I:

$$I = x\sqrt{a^2+x^2} - I + a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

$$2I = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

Ответ: $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

(e) Найдём:

$$\int \sin^5 x\,dx = \int \sin x{\cdot}\sin^4 x\,dx = -\sin^4 x\cos x{+}4\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx =$$

$$= -\sin^4 x\cos x + 4\int \sin^3 x\,dx - 4\int \sin^5 x\,dx.$$

Обозначим исходный интеграл за I:

$$I = -\sin^4 x \cos x + 4 \int \sin^3 x \, dx - 4I.$$

$$5I = -\sin^4 x \cos x + 4 \int \sin^3 x \, dx.$$

Вычислим:

$$\int \sin^3 x \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Получилось:

$$I = -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4 \cos x}{5} + \frac{4 \cos^3 x}{15} + C$$

Ответ: $-\frac{\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4 \cos x}{5} + \frac{4 \cos^3 x}{15} + C$

(f) Найдём:

$$\int x^2 \arccos x \, dx = \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Замена $t = \sqrt{1-x^2}$:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} + C$$

Следовательно:

$$\int x^2 \arccos x \, dx = \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{9} + C$$

Ответ: $\frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{9} + C$

(g) Найдём:

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx =$$

Вычислим:

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$$

Подставим:

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$$

Следовательно:

$$2\int \sin(\ln x)\,dx = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C \implies$$

$$\implies \int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C$$

Ответ: $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C$

(h) Найдём:

$$\int \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1-\cos x}\ln(\cos x)dx =$$

$$= -\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\ln(\cos x) - \int (-ctg\left(\frac{x}{2}\right))(-tg(x))dx =$$

$$= -\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\ln(\cos x) - \int ctg\left(\frac{x}{2}\right)tg(x)dx$$

Вычислим:

$$\int ctg\left(\frac{x}{2}\right)tg(x)dx = x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right) + C$$

Подставим:

$$\int \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos x}\,dx = -\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\ln(\cos x) - (x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)) + C =$$

$$= -\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\ln(\cos x) - x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right) + C$$