Домашнее задание на 17.04 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Докажем формулу:

$$J_k = \int \frac{1}{(y^2+\alpha^2)^k}\,dy = \begin{cases} \frac{1}{2(k-1)\alpha^2}\cdot\frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2}J_{k-1}, & k \geqslant 2 \\ \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha} + C, & k = 1 \end{cases}$$

Для $k \geqslant 2$:

По формуле интегрирования по частям:

$$J_{k-1} = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{y^2}{(y^2+\alpha^2)^k}\,dy$$

Преобразуем $y^2 = (y^2+\alpha^2) - \alpha^2$:

$$\int \frac{y^2}{(y^2+\alpha^2)^k}\,dy = J_{k-1} - \alpha^2 J_k$$

Подставляем обратно:

$$J_{k-1} = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + 2(k-1)(J_{k-1} - \alpha^2 J_k)$$

Решаем относительно J_k:

$$J_{k-1} - 2(k-1)J_{k-1} + 2(k-1)\alpha^2 J_k = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}}$$

$$-(2k-3)J_{k-1} + 2(k-1)\alpha^2 J_k = \frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}}$$

$$J_k = \frac{1}{2(k-1)\alpha^2}\cdot\frac{y}{(y^2+\alpha^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2}J_{k-1}$$

Для $k = 1$:

$$J_1 = \int \frac{1}{y^2 + \alpha^2} \, dy = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha} + C.$$

№2 (a) Найдём:

$$\int \frac{x^4}{(x+1)^3} \, dx$$

Пусть $t = x+1$, тогда $x = t-1$, $dx = dt$. Подставляем в интеграл:

$$\int \frac{(t-1)^4}{t^3} \, dt$$

Раскрываем $(t-1)^4$:

$$(t-1)^4 = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1$$

Делим числитель на знаменатель:

$$\frac{t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1}{t^3} = t - 4 + \frac{6}{t} - \frac{4}{t^2} + \frac{1}{t^3}$$

Тогда:

$$\int \left(t - 4 + \frac{6}{t} - \frac{4}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 4t + 6 \ln|t| + \frac{4}{t} - \frac{1}{2t^2} + C$$

Заменяем $t = x + 1$:

$$\int \frac{x^4}{(x+1)^3} = \frac{(x+1)^2}{2} - 4(x+1) + 6 \ln|x+1| + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$$

Ответ: $\frac{(x+1)^2}{2} - 4(x+1) + 6 \ln|x+1| + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$

(b) Найдём:

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} \, dx$$

Знаменатель:

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

Значит:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad D=\frac{1}{2}$$

Первая дробь:

$$\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|x^2+\sqrt{2}x+1|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+C$$

Вторая дробь:

$$\int\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|x^2-\sqrt{2}x+1|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C$$

Получаем:

$$\int\frac{1}{x^4+1}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C$

(c) Найдём:

$$\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$$

Представим подынтегральную функцию в виде:

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

Умножаем обе части на $(x-1)^2(x^2+1)^2$ и подставляем $x = 1$:

$$4(1)^2 - 8(1) = B(1^2+1)^2 \implies -4 = 4B \implies B = -1.$$

Далее раскрываем скобки и приравниваем коэффициенты при степенях x:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ -2A + B + D = 4, \\ A - 2C + E = -8, \\ -A - 2D + F = 0, \\ C - 2E = 0, \\ D - 2F = 0. \end{cases}$$

Решение системы:

$$A = 1,\ B = -1,\ C = -1,\ D = 0,\ E = -1,\ F = 0.$$

Разбиваем интеграл на части:

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Вычисляем каждую часть:

- $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$
- $\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{x-1}$
- $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
- $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}$

$$\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

Ответ: $\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$

(d) Найдём:

$$\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x + 10}\,dx$$

Положим $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Подставим:

$$\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x + 10}\,dx = \int \frac{1}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 10}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Приводим к общему знаменателю $1+t^2$:

$$3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 10 = \frac{6t + 4(1-t^2) + 10(1+t^2)}{1+t^2} =$$

$$= \frac{6t + 4 - 4t^2 + 10 + 10t^2}{1+t^2} = \frac{6t^2 + 6t + 14}{1+t^2}$$

Подставим:

$$\int \frac{1+t^2}{6t^2+6t+14}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{6t^2+6t+14}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+t+\frac{14}{6}}\,dt$$

Выделим полный квадрат:

$$t^2+t+\frac{7}{3} = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{3}-\frac{1}{4}}\right) = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{21}{12} = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

Следовательно:

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+t+\frac{14}{6}}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}\right)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{21}}\right) + C$$

Подставляем $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\frac{2}{\sqrt{21}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{21}}\right) + C$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{21}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{21}}\right) + C$

(e) Найдём:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^7}}\,dx = \int (x+1)^{-2/3}(x-1)^{-7/3}\,dx$$

Пусть

$$t = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3} \Rightarrow t^3 = \frac{x+1}{x-1}$$

Решая относительно x:

$$x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \quad dx = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt$$

Подставим:

$$\int t^{-2} \cdot (x-1)^{-3} \cdot \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt$$

Упрощаем $(x-1)^{-3}$:

$$(x-1)^{-3} = \left(\frac{2}{t^3-1}\right)^{-3} = \frac{(t^3-1)^3}{8}$$

После сокращений:

$$\frac{-3}{4}\int (t^3-1)dt$$

Найдём:

$$\frac{-3}{4}\int (t^3-1)dt = \frac{-3}{4}\left(\frac{t^4}{4} - t\right) + C = \frac{-3(t^4-4t)}{16} + C$$

Подставляем $t = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3}$ и упрощаем:

$$\frac{-3}{16}\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{4/3} - 4\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3}\right) + C$$

Выносим общий множитель и преобразуем:

$$\frac{3(1+x)^{1/3}(-5+3x)}{16(x-1)^{4/3}}+C$$

Ответ: $\frac{3(1+x)^{1/3}(-5+3x)}{16(x-1)^{4/3}}+C$

(f) Найдём:

$$\int \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

Положим $\sqrt{x^2+x+1}=xt+1$. Возведем в квадрат:

$$x^2+x+1=x^2t^2+2xt+1 \implies x=\frac{2t-1}{1-t^2}$$

$$dx=\frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}\,dt$$

Разобьем интеграл на два слагаемых:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx-\int \frac{1}{x}\,dx$$

Первый интеграл:

$$\int \frac{2}{2t-1}\,dt=\ln|2t-1|+C$$

Второй интеграл:

$$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C=\ln\left|\frac{2t-1}{1-t^2}\right|+C$$

Вместе:

$$\ln|2t-1|-\ln\left|\frac{2t-1}{1-t^2}\right|+C=\ln|1-t^2|+C$$

Из замены $t=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$:

$$1-t^2=\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x^2}$$

Получаем:

$$\int \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \ln|2\sqrt{x^2+x+1}-x-2| - 2\ln|x| + C$$

Ответ: $\ln|2\sqrt{x^2+x+1}-x-2| - 2\ln|x| + C$

(g) Найдём:

$$\int \frac{1}{\sin x\cos^5 x}\,dx$$

Пусть $t=\sin x$, тогда $dt=\cos x\,dx$, откуда $dx=\frac{dt}{\cos x}$. Подставляем в интеграл:

$$\int \frac{1}{t\cos^5 x}\cdot\frac{dt}{\cos x} = \int \frac{1}{t\cos^6 x}\,dt$$

Учитывая, что $\cos^2 x = 1-t^2$, получаем $\cos^6 x=(1-t^2)^3$. Интеграл принимает вид:

$$\int \frac{1}{t(1-t^2)^3}\,dt$$

Интеграл имеет вид дифференциального бинома

$$\int t^{-1}(1-t^2)^{-3}\,dt$$

Проверяем условия теоремы Чебышёва: $c=-3\in\mathbb{Z}$, условие выполняется. Применяем замену

$$1-t^2=z$$

тогда

$$dz=-2t\,dt,\quad dt=-\frac{dz}{2t}$$

Интеграл преобразуется:

$$\int \frac{1}{tz^3}\cdot\left(-\frac{dz}{2t}\right) = -\frac{1}{2}\int\frac{dz}{t^2z^3}$$

Так как $t^2=1-z$, получаем:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{(1-z)z^3}$$

Раскладываем подынтегральное выражение:

$$\frac{1}{(1-z)z^3} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z^3}$$

Решая систему уравнений, находим коэффициенты: $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 1$ Интеграл принимает вид:

$$-\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1-z}\,dz + \int \frac{1}{z}\,dz + \int \frac{1}{z^2}\,dz + \int \frac{1}{z^3}\,dz\right).$$

Вычисляем каждый интеграл:
1. $\int \frac{1}{1-z}\,dz = -\ln|1-z|$,
2. $\int \frac{1}{z}\,dz = \ln|z|$,
3. $\int \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z}$,
4. $\int \frac{1}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2z^2}$.

Объединяя результаты и подставляя $z = 1 - t^2 = \cos^2 x$, $t = \sin x$, получаем:

$$-\frac{1}{2}\left(-\ln|\cos^2 x| + \ln|\sin x| - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2\cos^4 x}\right) + C$$

Упрощаем логарифмы:

$$\ln|\sin x| - \ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^4 x} + C$$

Ответ: $\ln|\sin x| - \ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^4 x} + C$

(h) Найдём:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$t = \sqrt[4]{x} \quad \Rightarrow \quad x = t^4, \quad dx = 4t^3 dt$$

Подставляем в интеграл:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+t}}{t^2} \cdot 4t^3 dt = 4\int t \cdot \sqrt[3]{1+t}\,dt$$

Мы имеем:
$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 4\int t\cdot\sqrt[3]{1+t}\,dt$$
Это выражение можно упростить с заменой:
$$u = 1+t \Rightarrow t = u-1, \quad dt = du$$
Тогда:
$$\int t(1+t)^{1/3}dt = \int (u-1)u^{1/3}du = \int (u^{4/3} - u^{1/3})du$$
Это простое почленное интегрирование:
$$\int u^{4/3}du = \frac{u^{7/3}}{7/3} = \frac{3}{7}u^{7/3}, \quad \int u^{1/3}du = \frac{u^{4/3}}{4/3} = \frac{3}{4}u^{4/3}$$
Значит:
$$\int (u^{4/3} - u^{1/3})du = \frac{3}{7}u^{7/3} - \frac{3}{4}u^{4/3} + C$$
Теперь вернёмся назад к x.
$$4\cdot\left(\frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3} - \frac{3}{4}(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}\right) + C$$
Ответ: $4\cdot\left(\frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3} - \frac{3}{4}(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}\right) + C$

(i) Найдём:
$$\int \frac{1}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}dx$$
Замена Абеля:
$$t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{(1-t^2)^{3/2}}$$
Мы знаем:
$$t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow x^2 = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad x^2+1 = \frac{1}{1-t^2}, \quad x^2+2 = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

Также:

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{(1-t^2)^{3/2}}$$

Теперь подставим всё в исходный интеграл:

$$\int \frac{1}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}} \cdot dx = \int \frac{1}{\frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} \cdot \frac{dt}{(1-t^2)^{3/2}}$$

Соберём всё:

$$\int \frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{(1-t^2)^{3/2}} = \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

Интегрируем:

$$\int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t + C$$

$$t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \int \frac{1}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}} dx = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C$$

Ответ: $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C$