Домашнее задание на 30.05 (Математический анализ)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 (a) Выберем:

$$f'(x) = \cos(Tx) \implies f(x) = \frac{\sin(Tx)}{T}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} \implies g'(x) = -\frac{2x}{3(x^2+1)^{4/3}}$$

Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(Tx)}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \left.\frac{\sin(Tx)}{T\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\right|_0^{+\infty} + \frac{2}{3T}\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(Tx)}{(x^2+1)^{4/3}}dx$$

Первое слагаемое обращается в ноль, так как:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(Tx)}{\sqrt[3]{x^2+1}} = 0 \quad \text{(числитель ограничен, знаменатель растёт)}$$

Рассмотрим интеграл от модуля:

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{x\sin(Tx)}{(x^2+1)^{4/3}}\right| dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{4/3}}dx$$

Для $x \geqslant 1$:

$$\frac{x}{(x^2+1)^{4/3}} \sim \frac{x}{x^{8/3}} = \frac{1}{x^{5/3}}$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/3}}dx$ сходится, так как $5/3 > 1$.
Поскольку:

$$\frac{x}{(x^2+1)^{4/3}} \leqslant \frac{C}{x^{5/3}} \quad \text{для некоторой константы } C,$$

интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{4/3}} dx$ сходится абсолютно. Следовательно, исходный интеграл также сходится абсолютно

Ответ: сходится