Домашнее задание на 24.01 (Теория чисел)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Докажем равенства:

а) $(a, b) = (a + b, [a, b])$ Пусть:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}, \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot p_n^{\beta_n}$$

Пользуясь тем, что:

$$(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min(\alpha_n, \beta_n)}$$

$$[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max(\alpha_n, \beta_n)}$$

Перепишем искомое равенство:

$$p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} = (p_i^{\alpha_i} + p_i^{\beta_i}, p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)})$$

Без ограничения общности будем считать, что:

$$\alpha_i \leqslant \beta_i \quad \forall i$$

Тогда получим:

$$p_i^{\alpha_i} = (p_i^{\alpha_i} + p_i^{\beta_i}, p_i^{\beta_i}) \implies p_i^{\alpha_i} = (p_i^{\alpha_i}(1 + p_i^{\beta_i - \alpha_i}), p_i^{\beta_i}) \Leftrightarrow$$

Следовательно, так как $1 + p_i^{\beta_i - \alpha_i}$ не делится на p_i, то:

$$\Leftrightarrow p_i^{\alpha_i} = p_i^{\alpha_i} \text{ - верно}$$

б) $\frac{(a,b)(b,c)(c,a)}{(a,b,c)^2} = \frac{[a,b][b,c][c,a]}{[a,b,c]^2}$

Пусть:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}, \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot p_n^{\beta_n}, \quad c = p_1^{\gamma_1} \cdot ... \cdot p_n^{\gamma_n}$$

Пользуясь тем, что:

$$(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min(\alpha_n, \beta_n)}$$

$$[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max(\alpha_n, \beta_n)}$$

Искомое равенство можно переписать как:

$$\frac{\min(\alpha_i, \beta_i) \min(\beta_i, \gamma_i) \min(\gamma_i, \alpha_i)}{\min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)^2} = \frac{\max[\alpha_i, \beta_i] \max[\beta_i, \gamma_i] \max[\gamma_i, \alpha_i]}{\max[\alpha_i, \beta_i, \gamma_i]^2} \quad \forall i$$

Без ограничения общности будем считать, что:

$$\alpha_i \leqslant \beta_i \leqslant \gamma_i \quad \forall i$$

Тогда:

$$\frac{\min(\alpha_i, \beta_i) \min(\beta_i, \gamma_i) \min(\gamma_i, \alpha_i)}{\min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)^2} = \frac{\max[\alpha_i, \beta_i] \max[\beta_i, \gamma_i] \max[\gamma_i, \alpha_i]}{\max[\alpha_i, \beta_i, \gamma_i]^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_i \beta_i \alpha_i}{\alpha_i^2} = \frac{\beta_i \gamma_i \gamma_i}{\gamma_i^2} \Leftrightarrow \beta_i = \beta_i \text{ - верно}$$

№2 Чтобы узнать, каким количеством нулей оканчивается число 1000!, узнаем сколько в нём делителей равных 2 и 5.

Для этого воспользуемся формулой:

$$\nu_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots$$

Получается:

$$\nu_2(1000!) = \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{1000}{512}\right] = 994$$

$$\nu_5(1000!) = \left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{25}\right] + \dots + \left[\frac{1000}{625}\right] = 249$$

Следовательно, делителей равных 10 у числа 1000!:

$$\min(249, 994) = 249$$

Ответ: 249

№3 Нам известно, что $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$. Найдём сначала $\sigma(p^\alpha)$:

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$$

Докажем, что:

$$\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b), \text{ где } (a, b) = 1$$

То есть:

$$\sum_{d \mid ab} d = \sum_{d_1 \mid a} d_1 \cdot \sum_{d_2 \mid b} d_2$$

Пусть:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}, \quad b = q_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot q_s^{\beta_s}$$

$$d \mid mn \implies d = p_1^{\gamma_1} \cdot ... \cdot p_k^{\gamma_k} \cdot q_1^{\omega_1} \cdot ... \cdot q_s^{\omega_s} = d_1 \cdot d_2 \implies$$

$$\implies \sum_{d \mid ab} d = \sum_{d_1 \mid a} d_1 \cdot \sum_{d_2 \mid b} d_2 \implies$$

$$\implies \sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b), \text{ где } (a, b) = 1$$

Получается, что:

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_s^{\alpha_s}) = \sigma(p_1^{\alpha_1}) \cdot ... \cdot \sigma(p_s^{\alpha_s}) =$$

$$= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_1^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots$$

№4 Вычислим $\tau(\sigma(108))$:

$$108 = 3^3 \cdot 2^2$$

Следовательно:

$$\sigma(108) = \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{2^3 - 1}{2 - 1} = 40 \cdot 7 = 280$$

$$280 = 5 \cdot 7 \cdot 2^3$$

Получается:

$$\tau(\sigma(108)) = (1+1)(1+1)(3+1) = 4 \cdot 4 = 16$$

№5 Решим уравнения в целых числах:

a) $19x + 88y = 2$

$$\begin{pmatrix} 19 & 88 & | & -2 \\ 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 19 & 12 & | & -2 \\ 1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 12 & | & -2 \\ 5 & -4 & | & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 5 & | & -2 \\ 5 & -9 & | & 0 \\ -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & | & -2 \\ 14 & -9 & | & 0 \\ -3 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & -2 \\ 14 & -23 & | & 0 \\ -3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & -2 \\ 14 & -37 & | & 0 \\ -3 & 8 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & -2 \\ 88 & -37 & | & 0 \\ -19 & 8 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 \\ -37 & 88 & | & 0 \\ 8 & -19 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ -37 & 88 & | & -74 \\ 8 & -19 & | & 16 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -74 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 88 \\ -19 \end{pmatrix} t \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

б) $102x + 165y = 9$

$$\begin{pmatrix} 102 & 165 & | & -9 \\ 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 102 & 63 & | & -9 \\ 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 39 & 63 & | & -9 \\ 2 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 39 & 24 & | & -9 \\ 2 & -3 & | & 0 \\ -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 15 & 24 & | & -9 \\ 5 & -3 & | & 0 \\ -3 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 15 & 9 & | & -9 \\ 5 & -8 & | & 0 \\ -3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 9 & | & -9 \\ 13 & -8 & | & 0 \\ -8 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 3 & | & -9 \\ 13 & -21 & | & 0 \\ -8 & 13 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & | & -9 \\ 55 & -21 & | & 0 \\ -34 & 13 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & | & -9 \\ -21 & 55 & | & 0 \\ 13 & -34 & | & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & | & 0 \\ -21 & 55 & | & -63 \\ 13 & -34 & | & 39 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63 \\ 39 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 55 \\ -34 \end{pmatrix} t \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$