Домашнее задание на 17.01 (Теория чисел)

Емельянов Владимир, ПМИ гр №247

№1 Найдём $(123456789, 987654321)$:

$$(123456789, 987654321) = (123456789, 987654321 - 8 \cdot 123456789)$$

$$= (123456789 - 9 \cdot 13717421, 9) = (0, 9) = 9$$

Ответ: 9

№2 Чтобы доказать, что дроби несократимы при всех натуральных значениях n, мы будем использовать критерий несократимости: дробь $\frac{a}{b}$ несократима, если $(a, b) = 1$.

а) $\frac{2n+13}{n+7}$

$$(2n + 13, n + 7) = (n + 6, n + 7) = (n + 6, 1) = 1$$

б) $\frac{2n^2-1}{n+1}$

$$(2n^2 - 1, n + 1) = (2n^2 - 1, 2n^2 + 2n) = (-2n - 1, n + 1)$$

$$= (-2n - 1, 2n + 2) = (1, 2n + 2) = 1$$

№3 Пусть:

$$a = 2a' + 1, \quad b = 2b' + 1, \quad c = 2c' + 1$$

т.к. a, b, c - нечётные

Тогда:

$$(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}) = (\frac{2b'+1+2c'+1}{2}, \frac{2a'+1+2c'+1}{2}, \frac{2a'+1+2b'+1}{2}) =$$

$$(\frac{2b'+2c'+2}{2}, \frac{2a'+2c'+2}{2}, \frac{2a'+2b'+2}{2}) = (b'+c'+1, a'+c'+1, a'+b'+1) =$$

$$= (b'-a', a'+c'+1, b'-c') = (c'-a', a'+c'+1, b'-c') = (c'-a', 2c'+1, b'-c') =$$

$$= (2c'-2a', 2c'+1, 2b'-2c') = (2a'+1, 2c'+1, 2b'+1) = (a, b, c)$$

ч.т.д.

№4 Докажем, что биномиальный коэффициент $\binom{a}{b}$ делится на a, где a и b — взаимно простые натуральные числа и $a \geqslant b$.

Биномиальный коэффициент $\binom{a}{b}$ определяется как:

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} \implies$$

$$\implies b\binom{a}{b} = a\binom{a-1}{b-1}$$

Следовательно, получаем:

$$a \mid b\binom{a}{b} \implies a \mid \binom{a}{b} \text{ (т.к } (a,b)=1)$$

ч.т.д.

№5 Числа ферма выражаются по формуле $f_k = 2^{2^k} + 1$. Найдём рекурсивную формулу:

$$f_{k+1} = 2^{2^{k+1}} + 1 = 2^{2 \cdot 2^k} + 1 = (2^{2^k} + 1 - 1)^2 + 1 = (f_k - 1)^2 + 1$$

Теперь докажем по индукции формулу $f_k = f_0 \cdot ... \cdot f_{k-1} + 2$:

1) <u>База:</u>

$$f_2 = 2^{2^2} + 1 = 16 + 1 = 17 = f_0 \cdot f_1 + 2 = 15 + 2 = 17 \text{ - верно}$$

2) <u>Шаг:</u>

Предположение индукции:

$$f_k = f_0 \cdot ... \cdot f_{k-1} + 2 \implies f_k - f_0 \cdot ... \cdot f_{k-1} = 2$$

Выведем f_{k+1}:

$$f_{k+1} = (f_k - 1)^2 + 1 = (f_0 \cdot ... \cdot f_{k-1} + 1) \cdot (f_k - 1) + 1 =$$

$$= f_0 \cdot ... \cdot f_k + f_k - f_0 \cdot ... \cdot f_{k-1} - 1 + 1 =$$

$$= f_0 \cdot ... \cdot f_k + f_k - f_0 \cdot ... \cdot f_{k-1} = f_0 \cdot ... \cdot f_k + 2 \text{ - доказано}$$