Axiomas de conteo

Axiomas de Probabilidad

1) Sean P_1 y P_2 dos medidas de probabilidad. Definamos $P = a_1 P_1 + a_2 P_2$ donde $a_1 + a_2 = 1$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$: ¿Es P una medida de probabilidad?

Hint = Verifique los axiomas de Kolmogorov para P

Axiomas de Kolmogorov

① No Negatividad =

$P_1(A) \geq 0$ y $P_1(A) \geq 0$ para cualquier A

$P(A) = a_1 P_1(A) + a_2 P_2(A) \geq 0$

② Normalización =

$P_1(\Omega) = 1$ $P_2(\Omega) = 1$ → por ser medidas de probabilidad

$P(\Omega) = a_1 P(\Omega) + a_2 P_2(\Omega)$

$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1$

$= a_1 + a_2$

$= 1$

③ Aditividad σ-Finita =

$P_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i)$

$P_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_2(A_i)$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = a_1 P_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + a_2 P_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$

cuando sumamos y usamos propiedades

$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = a_1 \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i) + a_2 \sum_{i=1}^{\infty} P_2(A_i)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_1 P_1(A_i) + a_2 P_2(A_i)\right)$

P todos los parámetros

2) Sean $\Omega = \{1,2\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\Omega)$ y P una aplicación definida sobre $\mathcal{F}$ dada por:

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \{\emptyset\} \\ 1/3 & \text{si } A = \{1\} \\ 2/3 & \text{si } A = \{2\} \\ 1 & \text{si } A = \{1,2\} \end{cases}$$

muestre detalladamente que P es una medida de probabilidad

Realizamos el mismo proceso anterior pero con este sistema.

① No negatividad

Para todos los $A \subseteq \Omega$ se puede ver son mayores o iguales a 0

$P(A) \geq 0 \quad A \subseteq \Omega$

② Normalización

Para $\Omega = \{1,2\} = 1$ se cumple el axioma

③ aditividad σ-Finita

Para $A_1 = \{1\}$ y $A_2 = \{2\}$

se puede ver que

$$P(A_1 \cup A_2) = P(\{1,2\}) = 1$$

$$P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

P cumple con los axiomas por ende es una medida de probabilidad.

3) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Demuestre las siguientes propiedades básicas de esta medida usando los axiomas de Kolmogorov y diagramas de Venn:

a) $P(\emptyset) = 0$

Usando el axioma de aditividad finita

se tiene que $A \cap B = \emptyset$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Esto nos lleva a que cuando por ejemplo B o A = 0

Obtenemos $P(A) = P(A) + P(\emptyset)$

$P(B) = P(\emptyset) + P(B)$

$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$

Obtenemos $P(\emptyset) = 0$

b) $P(A^c) = 1 - P(A)$

$A^c = \Omega / A$ y $A \cup A^c = \Omega$ y $A \cap A^c = \emptyset$

cuando usamos el mismo axioma anterior

$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

$A \cup A^c = \Omega$ y $P(\Omega) = 1$

↓

Axioma de normalización

$1 = P(A) + P(A^c)$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

c) Si dos eventos A y B son tales que $A \subset B$ entonces $P(B) = P(A) + P(B-A)$

Porque tenemos $A \subseteq B$ $B = A \cup (B/A)$ y $A \cap (B/A) = \emptyset$

Cuando usamos el axioma anterior $P(B) = P(A) + P(B/A)$

D) Dado un evento A, $P(A) \leq 1$ $\forall A \in \mathcal{F}$:

Por el Axioma de Normalización

$P(\Omega) = 1$ y $A \subseteq \Omega$ para cualquier $A \in \mathcal{F}$

$P(\Omega) = P(A) + P(\Omega/A) \geq P(A)$

$P(A) \leq 1$

e) $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

$B = A \cup (B/A)$ y $A \cap (B/A) = 0$ → cuando usamos el axioma de no negatividad

$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$

f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Usando propiedad de exclusión $A \cup B$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

→ esto lleva a la fórmula de forma directa

g) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap$

↓

Se aplica la fórmula de exclusión para tres conjuntos y esto lleva a la fórmula directa

h) probabilidad de la diferencia: Use $A - B = A \cap B^c$, para mostrar

$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A-B) = P(A \cap B^c)$

Por Axioma de aditividad finita $\quad P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

i) Probabilidad de la diferencia Simétrica = $\cup$ (A-B) $\cup$ (B-A)

Para mostrar: $P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Esto significa la probabilidad que ocurra A o B pero no Ambos Eventos al tiempo.

$$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Usando aditividad =

$$P((A-B) \cup (B-A)) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

con la formula de $P(A \cup B)$ =

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P((A-B) \cup (B-A)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Escaneado con CamScanner

Tecnicas de conteo

Ejercicios del 1 al 20

Realizar los ejercicios y establecer si es variación, permutación o combinación; con o sin repetición

1) Carlos, Manuel y Sandra

- Permutación sin repetición

$$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3 \times 2 = 6$$

2) Formas de preparar una ensalada

- Combinación sin repetición

$$C(3,2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$$

3) Formas de hacer cola

- permutación sin repetición

$$P(5,5) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

4) Formas de un juez de otorgar premio

$$P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1} = 336$$

- permutación sin repetición

5) Capitán solicita 2 marineros para realizar un trabajo

- combinación sin repetición

$$C(10,2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

6) Eduardo tiene 7 libros - permutación sin repetición

$$P(7,5) = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{1} = 2520$$

7) En un salón de 10 alumnos

- combinación sin repetición

$$C(10,2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

8) Palabras diferentes con Remember
- Permutación con repeticiones

$$P = \frac{8!}{2! \times 3!} = \frac{40320}{216} = 2360$$

9) club de Basketball con 12 jugadoras
- Combinación sin repetición

$$C(11,5) = \frac{11!}{5!\,(11-5)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462$$

10) Con 4 Frutas diferentes. cuantos jugos con 2 frutas
- combinación con restricción

$C(4,2)=6$ $\qquad 6+4+1=11$

$C(4,3)=4$

$C(4,4)=1$

11) Curso de 10 estudiantes - permutación sin repeticiones

$$P(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

12) Campeonato con 8 equipos
- permutación sin repetición

$$P(8,2) = \frac{8!}{(8-2)!} = 8 \cdot 7 = 56$$

13) ¿cuantos números de 3 cifras distintas se pueden formar con los digitos del 1 al 7?
- permutación sin repetición

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

14)
- Repetición

$$7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

15) De un grupo de 10 estudiantes
- combinación sin repetición

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

16) ¿ Cuantas placas diferentes se pueden hacer con 3 letras y 3 digitos?

- Repetición

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17.576.000$$

17) n personas van a jugar cartas alrededor de una mesa

- Permutación

Permutaciones en un circulo $= (n-1)!$

18) Heladería con 7 sabores

- Combinación sin repetición

$$C(7,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

19) En un almacén venden 6 sabores de gaseosa

- Combinación sin repetición

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

20) Demuestre la formula de combinación con repetición

$$C_r^m = \binom{n+r-1}{r}$$

Se tienen la distribución cuerpos para n cantidades

$$X_1 + X_2 + \ldots X_n = r$$

como se quiere ordenar las secuencias se obtiene como metodo

$$r + (n-1) = n + r - 1$$

luego las maneras de escoger r posiciones de $n+r-1$ se da por el siguiente =

$$\binom{n+r-1}{r} = \left(\frac{(n+r-1)!}{r! \cdot (n-1)!}\right)$$

Escaneado con CamScanner