Punto 8)

a)

Conjunto de soporte

$$\Omega = \{(X_0, F(X_0)), (X_1, F(X_1)), (X_2, F(X_2))\}$$

Polinomio de interpolación de grado 2)

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \qquad y_0 = F(X_0) \quad y_1 = F(X_1) \quad y_2 = F(X_2)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-X_1)(x-X_2)}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)} \qquad L_1(x) = \frac{(x-X_0)(x-X_2)}{(X_1-X_0)(X_1-X_2)} \qquad L_2(x) = \frac{(x-X_0)(x-X_1)}{(X_2-X_0)(X_2-X_1)}$$

$$P(x) = F(X_0)\frac{(x-X_1)(x-X_2)}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)} + F(X_1)\frac{(x-X_0)(x-X_2)}{(X_1-X_0)(X_1-X_2)} + F(X_2)\frac{(x-X_0)(x-X_1)}{(X_2-X_0)(X_2-X_1)}$$

B) Derivada del polinomio de interpolación y evaluación en X_0

Derivo el primer término con respecto a x

$$(x-X_1)(x-X_2) = (x^2 - X_2x - X_1x + X_1X_2)' = 2x - X_2 - X_1$$

$$F(X_0) \cdot \frac{2x - X_2 - X_1 \cdot ((X_0-X_1)(X_0-X_2)) - \overset{\to 0}{0\,\cancel{(x-X_1)}(x-X_2)}}{((X_0-X_1)(X_0-X_2))^2}$$

$$F(X_0) \cdot \frac{2x - X_2 - X_1}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)}$$

Derivo el segundo término

$$(x-X_0)(x-X_2) = (x^2 - X_2x - X_0x + X_0X_2)' = 2x - X_2 - X_0$$

$$F(X_1)\,\frac{2x - X_2 - X_0\,((X_1-X_0)(X_1-X_2)) - \overset{\to 0}{0\,\cancel{(x-X_0)}(x-X_2)}}{((X_1-X_0)(X_1-X_2))^2}$$

$$F(X_1) \cdot \frac{2x - X_2 - X_0}{(X_1-X_0)(X_1-X_2)}$$

Derivo el tercer término

$(x-x_0)(x-x_1) \pm (x^2 - x_1 x - x_0 x + x_0 x_1)' = 2x - x_1 - x_0$

$$F(x_2) \quad \frac{2x - x_1 - x_0 \cdot ((x_2-x_0)\cancel{(x_2-x_1)}) - 0 \cdot \cancel{(x-x_0)}(x-x_1)}{((x_2-x_0)(x_2-x_1))^2}$$

$$F(x_2) \quad \frac{2x - x_1 - x_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P'(x) = F(x_0) \cdot \frac{2x - x_2 - x_1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + F(x_1) \frac{2x - x_2 - x_0}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + F(x_2) \frac{2x - x_1 - x_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P'(x_0) = F(x_0) \cdot \frac{2x_0 - x_2 - x_1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + F(x_1) \frac{2x_0 - x_2 - x_0}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + F(x_2) \frac{2x_0 - x_1 - x_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P'(x_0) = F(x_0) \frac{2x_0 - x_2 - x_1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + F(x_1) \frac{x_0 - x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + F(x_2) \frac{x_0 - x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

↓

esta es la Derivada aproximada de la Función x_0 cuando se usa el polinomio de Interpolación de grado 2.

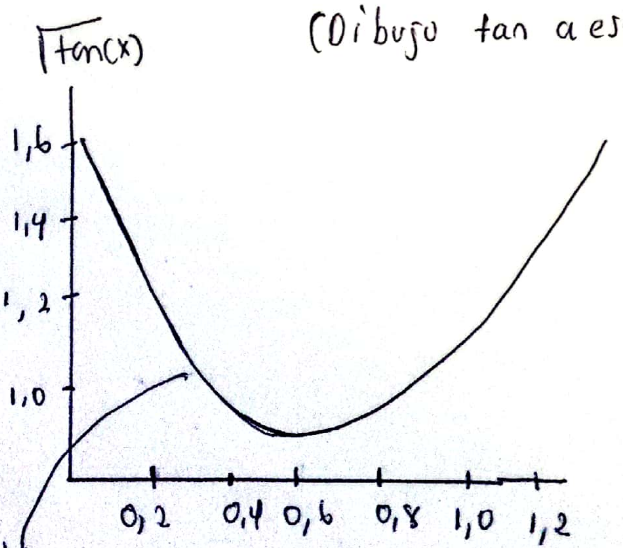
Punto 8 parte e) parte escrita

(Dibujo tan a escala)

$F(x) = \sqrt{\tan(x)}$

$F'(x) = \frac{1}{2}(\tan(x))^{-1/2} \cdot \sec^2(x)$

$$F'(x) = \frac{\sec^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}$$



Representa a la Derivada progresiva, la Derivada Centra y a la original (la mostrada anteriormente)

Punto 7) Parte escrita

La Formula de la derivada progresiva de orden $O(h^2)$

$$F'(x_0) \approx \frac{-3F(x_0)+4F(x_1)-F(x_2)}{2h}$$

La Formula de la derivada central de orden $O(h^2)$

$$F'(x_0) \approx \frac{F(x_1)-F(x-1)}{2h}$$

$$\text{Progresiva\_Error}(x_0) = \left| \frac{-3F(x_0)+4F(x_1)-F(x_2)}{2h} - F'(x_0) \right|$$

y el calculado en el punto e

$$\text{Central\_Error}(x_0) = \left| \frac{F(x_1)-F(x_{-1}}{2h} - F'(x_0) \right|$$

cuando este Par de errores
Son Iguales = del mismo orden=
y Combian h de Forma Proporcional,
Son ambas de ordn $O(h^2)$

(2) Comprueba que las funciones cardinales son base (i.e, $L_i(x) = \delta_{ij}$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$L_i(x) = \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Para $i = j$ -> $L_i(x)$ $x = x_j$

$$L_i(x_j) = \prod_{k\neq i}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = 1$$

- Para $i \neq j$

$$L_i(x_j) = \prod_{k\neq i}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k}$$

$$L_i(x_j) = \left(\frac{x_j - x_0}{x_i - x_0}\right) \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(\frac{x_j - x_j}{x_i - x_j}\right)}_{0} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x_j - x_n}{x_i - x_n}\right)$$

$$L_i(x_j) = 0$$

Por lo que $L_i(x) = \delta_{ij}$