25. En este problema vamos a encontrar la regla de cuadratura de Laguerre de dos puntos.

a) Polinomio de orden dos
Formula de Rodrigues para polinomios de Laguerre.

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

$$L_2(x) = \frac{e^x}{2}\cdot\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x}x^2)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x}x^2)$$

$$\frac{d}{dx} = -e^{-x}x^2 + 2xe^{-x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = e^{-x}x^2 - 2e^{-x}x + 2e^{-x} - 2xe^{-x}$$

$$= e^{-x}x^2 - 4xe^{-x} + 2e^{-x}$$

$$L_2(x) = \frac{e^x}{2}\cdot(e^{-x}x^2 - 4xe^{-x} + 2e^{-x})$$

$$L_2(x) = \frac{\cancel{e^x}}{2}\cdot\cancel{e^{-x}}(x^2 - 4x + 2)$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$$

b) $0 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$

$$x_0, x_1 = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1/2)\cdot 1}}{2\cdot 1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$x_0 = 2 + \sqrt{2}$$
$$x_1 = 2 - \sqrt{2}$$

D M A Scribe

$$\frac{1}{2.8}\int_0^{\alpha} e^{-x}(x-0.6)\,dx$$

D	I
x	e^{-x}
1	$-e^{-x}$

$$\frac{1}{2.8}\int_0^{\alpha} xe^{-x} - 0.6e^{-x}\,dx$$

$$\frac{1}{2.8}\left(\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx - \int_0^{\alpha} 0.6e^{-x}dx\right)$$

$$\frac{1}{2.8}\left(-xe^{-x} - \int e^{-x}dx + 0.6e^{-x}\right)$$

$$\frac{1}{2.8}\left(-xe^{-x} - e^{-x} + 0.6e^{-x}\Big|_0^{\alpha}\right)$$

$$\lim_{x\to\alpha} -\frac{x}{e^{x}} - \frac{1}{e^{x}} + \frac{0.6}{e^{x}} \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{x}{e^{x}} - \frac{1}{e^{x}} + \frac{0.6}{e^{x}} = -1 + 0.6 = -0.4$$

$$\frac{1}{2.8}(-0.4) = +\frac{0.4}{2.8}$$

$$W_1 = \int_0^{\alpha} \frac{e^{-x}(x-3.4)}{0.6-3.4}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2.8}\int_0^{\alpha} e^{-x}(x-3.4)\,dx$$

D	I
$x-3.4$	e^{-x}
1	$-e^{-x}$

$$= -\frac{1}{2.8}\left(-e^{-x}(x-3.4) - \int -e^{-x}dx\right)$$

$$-\frac{1}{2.8}\left(-e^{-x}(x-3.4) - e^{-x}\Big|_0^{\alpha}\right)$$

$$\lim_{x\to\alpha} -e^{-x}(x-3.4) - e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} -e^{-x}(x-3.4) - e^{-x} = +3.4 - 1 = 2.4$$

$$W_1 = +\frac{2.4}{2.8}$$

d) Muestre que la regla es exacta para un polinomio de grado 3

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^3 \, dx = \sum_{i=0}^{1} w_i f(x_i) = 6$$

$w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$

$x_0 = 2+\sqrt{2} = 3.414$

$x_1 = 2-\sqrt{2} = 0.585$

$0.146\cancel{8}^{4} \cancel{(3.41)^3 + 0.85}$

$= 0.1464(3.414)^3 + 0.8535(0.585)^3$

$= 5.826 + 0.1715 \approx 6.$

26.

Considere la función $f(x) = x^3$ en $[0,2]$. Utiliza la suma de Riemann con n subintervalos para aproximar la integral

$$\int_0^2 x^3 \, dx$$

a) Calcule el ancho de cada subintervalo

Si $n = 1$ para $[0,2]$: $\Delta x = \frac{2-0}{1}$

para $n = 2$ para $[a,b]$: $\Delta x = \frac{b-a}{2}$
(para un intervalo

para n intervalos $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$[0,2]$: $\Delta x = \frac{2}{n}$

b) Escriba los puntos nodales $x_i = a + i\Delta x$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ que dividen el intervalo $[0,2]$

Si $x_i = a + i\Delta x$ para i intervalos

para $[0,2]$ $x_i = i\frac{2}{n}$ para $i = 0, 1, 2, n-1$

c)

$f(x) = x^3$

$f(x_i) = (x_i)^3 = \left(i \frac{2}{n}\right)^3$

$\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{2^2} = 4$

d) Muestre que

$$I \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x = 4\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{(n(n-1))^2}{4} \qquad f(x_i)\,\Delta x = \frac{i^3\, 2^3}{n^3} \cdot \frac{2}{n}$$

$$\frac{(n(n-1))^2}{4} \cdot \frac{2^3}{n^3} \cdot \frac{2}{n} = \frac{4(n(n-1))^2}{n^4} = \frac{4n^2(n-1)^2}{n^{4}}$$

$$= \frac{4(n^2 - 2n + 1)}{n^2} = 4\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$