Procesos de Markow

Ejercicio 2) Cadena de producción

a) Describa las variables observables del problema

✓ Producto terminado o fuera del sistema

✓ Producción

✓ Empaque

✓ Probabilidad de avanzar de producción a Empaque (90%)

✓ Probabilidad de permanecer en producción por defecto (10%)

✓ Probabilidad de avanzar de Empaque a producto terminado (95%)

✓ Probabilidad de quedarse en Empaque (5%)

b) Defina el conjunto de estados $S=\{S_1, S_2, S_3\}$

S_1 = Estación de producción S_2 = Estación de Empaque S_3 = Producto terminado o fuera del sistema

c) Matriz de transición P se construye considerando las probabilidades de procesos estocásticos.

$$P=\begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,95 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde
0,1 es 10%.
0,9 es 90%.
0,05 es 5%.
0,95 es 95%.
1 es producto terminado

D) encuentre el estado estable tanto algebraicamente como numéricamente. Recuerde $\pi P=\pi$ para el estado estable ¿Que interpretación le da al estado estable?

$\pi P = \pi$

$\sum \pi_i = 1$ entonces tengo que $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$

Me queda el sgt sistema de ecuaciones para hallar el valor de π

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.1\,\pi_1 \\ \pi_2 = 0{,}9\pi_1 + 0{,}05\pi_2 \\ \pi_3 = 0{,}95\pi_2 + \pi_3 \end{cases}$$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

$\pi_1 = 0{,}10\pi \rightarrow 0{,}9\pi_1 = 0 \quad \pi_1 = 0$

$\pi_3 = 0{,}95\pi_2 + \pi_3 \Rightarrow 0{,}05\pi_3 = 0{,}95\pi_2$

$\pi_3 = 19\pi_2$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

$0 + \pi_2 + 19\pi_2 =$

$20\pi_2 = 1$

$\pi_2 = 0{,}05$

$\pi_3 = 19\pi_2$

$\pi_3 = 19(0{,}05)$

$= 0{,}95$

$\pi = (\boxed{0}, \boxed{0{,}05}, \boxed{0{,}95})$

e) P(ambas ocupada) = 0

F) P(al menos una estación ocupada) = $\pi_1 + \pi_2 = 0 + 0{,}05 = 0{,}05$

g) P(producción vacía) = $1 - \pi_1 = 1 - 0 = 1$

Punto 3)

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}95 \\ 0{,}02 & 0 & 0{,}98 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \pi_1 = 0{,}1\pi_1 + 0{,}02\pi_3 \\ \pi_2 = 0{,}9\pi + 0{,}05\pi_2 \\ \pi_3 = 0{,}95\pi_2 + 0{,}98\pi_3 \end{cases}$$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

$\pi_1 = 0{,}1\pi + 0{,}02\pi_3 \Rightarrow 0{,}9\pi = 0{,}02\pi_3 \rightarrow \pi_1 = \dfrac{0{,}02}{0{,}9}\pi_3$

$\pi_3 = 0{,}95\pi_2 + 0{,}98\pi_3 \rightarrow 0{,}02\pi_3 = 0{,}95\pi_2 \rightarrow \pi_3 = \dfrac{0{,}95}{0{,}02}\pi_2 = 47{,}5\pi_2$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

$\pi_1 = \dfrac{0{,}02}{0{,}9}\pi_3$ y $\pi_3 = 47{,}5\pi_2$

$$\frac{0{,}02(47{,}5\pi_2)}{0{,}9} + \pi_2 + 47{,}5\pi_2 = 1$$

$$\frac{0{,}95}{0{,}9}\pi_2 + \pi_2 + 47{,}5\pi_2 = 1$$

$$1{,}055\pi_2 + \pi_2 + 47{,}5\pi_2 = 1$$

$$49{,}555\pi_2 = 1 \rightarrow \pi_2 = \frac{1}{49{,}55} \approx 0{,}0202$$

$\pi_3 = 47{,}5\pi_2 = 47{,}5(0{,}0202) \approx 0{,}9586$

$\pi_1 = \dfrac{0{,}02\pi_3}{0{,}96} = \dfrac{0{,}02\ (0{,}9586)}{0{,}9} = 0{,}0213$

e) Igual que el anterior $= 0$

F) P(al menos una estación ocupada) $= \pi_1 + \pi_2 = 0{,}0213 + 0{,}0202 = 0{,}0415$

g) P(Producción vacía) $= 1 - \pi_1 = 1 - 0{,}0213 = 0{,}9787$

→ En el punto 2 la estación de producción nunca tiene un producto ($\pi_1 = 0$), esto indica que el sistema es muy eficiente al mover productos hacia empaque y mercado

→ En el punto 3, con la suma del 2% de regresos a producción, la probabilidad de que la producción esté vacía disminuye (0,9787) y las estaciones están menos ocupados de forma simultánea