Axiomas de conteo

1) Axiomas de Probabilidad

Sean P_1 y P_2 dos medidas de probabilidad. Definamos $P = a_1 P_1 + a_2 P_2$ donde $a_1 + a_2 = 1$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$: ¿Es P una medida de probabilidad?

Hint = Verifique los axiomas de Kolmogorov para P

Axiomas de Kolmogorov

① No Negatividad =

$P_1(A) \geq 0$ y $P_1(A) \geq 0$ Para cualquier A

$P(A) = a_1 P_1(A) + a_2 P_2(A) \geq 0$

② Normalización =

$P_1(\Omega) = 1$ $P_2(\Omega) = 1$ → por ser medidas de probabilidad

$P(\Omega) = a_1 P(\Omega) + a_2 P_2(\Omega) =$

$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1$

$= a_1 + a_2$

$= 1$

③ Aditividad σ-Finita =

$P_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i)$

$P_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_2(A_i)$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = a_1 P_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + a_2 P_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$

cuando sumamos y usamos propiedades

$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = a_1 \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i) + a_2 \sum_{i=1}^{\infty} P_2(A_i)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_1 P_1(A_i) + a_2 P_2(A_i)\right)$

P todos los parámetros

2) Sean $\Omega = \{1, 2\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\Omega)$ y P una aplicación definida sobre $\mathcal{F}$ dada por:

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \{\emptyset\} \\ 1/3 & \text{si } A = \{1\} \\ 2/3 & \text{si } A = \{2\} \\ 1 & \text{si } A = \{1,2\} \end{cases}$$

muestre detalladamente que P es una medida de probabilidad

Realizamos el mismo proceso anterior pero con este Sistema.

① No Negatividad

Para todos los $A \subseteq \Omega$ se puede ver son mayores o Iguales a 0

$P(A) \geq 0 \quad A \subseteq \Omega$

② Normalización

Para $\Omega = \{1,2\} = 1$ se cumple el axioma

③ aditividad σ-Finita

Para $A_1 = \{1\}$ y $A_2 = \{2\}$

se puede ver que

$$P(A_1 \cup A_2) = P(\{1,2\}) = 1$$

$$P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

P cumple con los axiomas por ende es una medida de probabilidad.

3) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Demuestre las siguientes propiedades básicas de esta medida usando los axiomas de Kolmogorov y diagramas de Venn:

a) $P(\emptyset) = 0$

Usando el axioma de aditividad finita

se tiene que $A \cap B = \emptyset$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Esto nos lleva a que cuando por ejemplo B o A = 0

Obtenemos $P(A) = P(A) + P(\emptyset)$

$P(B) = P(\emptyset) + P(B)$

$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$

Obtenemos $P(\emptyset) = 0$

b) $P(A^c) = 1 - P(A)$

$A^c = \Omega / A$ y $A \cup A^c = \Omega$ y $A \cap A^c = \emptyset$

cuando usamos el mismo axioma anterior

$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

$A \cup A^c = \Omega$ y $P(\Omega) = 1$

$\downarrow$

Axioma de normalización

$1 = P(A) + P(A^c)$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

c) Si dos eventos A y B son tales que $A \subset B$ entonces $P(B) = P(A) + P(B-A)$

Porque tenemos $A \subseteq B$ $B = A \cup (B/A)$ y $A \cap (B/A) = \emptyset$

Cuando usamos el Axioma anterior $P(B) = P(A) + P(B/A)$

D) Dado un evento A, $P(A) \leq 1$ $\forall A \in \mathcal{F}$:

Por el Axioma de Normalización

$P(\Omega) = 1$ y $A \subseteq \Omega$ para cualquier $A \in \mathcal{F}$

$P(\Omega) = P(A) + P(\Omega/A) \geq P(A)$

$P(A) \leq 1$

e) $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

$B = A \cup (B/A)$ y $A \cap (B/A) = 0$ $\rightarrow$ cuando usamos el Axioma de no negatividad

$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$

f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Usando propiedad de Exclusión $A \cup B$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\rightarrow$ esto lleva a la fórmula de forma directa

g) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap$

$\downarrow$

Se aplica la fórmula de Exclusión para tres conjunto y esto lleva a la Fórmula directa

h) probabilidad de la diferencia: Use $A - B = A \cap B^c$, Para mostrar

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A-B) = P(A \cap B^c)$

Por Axioma de aditividad finita $\quad P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

i) Probabilidad de la diferencia Simétrica = usa $(A-B) \cup (B-A)$

Para mostrar: $P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Esto significa la probabilidad que ocurra A o B pero no Ambos Eventos al tiempo.

$$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Usando aditividad =

$$P(A-B) \cup (B-A)) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

con la formula de $P(A \cup B)$ =

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P((A-B) \cup (B-A)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Tecnicas de conteo
Ejercicios del 1 al 20
Realizar los ejercicios y establece si es variación, permutación o combinación; con o sin repetición

1) Carlos, Manuel y Sandra
- Permutación sin repetición

$$P(3,2)=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{3!}{1!}=3\times2=6$$

2) Formas de preparar una ensalada
- Combinación sin repetición

$$C(3,2)=\frac{3!}{2!(3-2)!}=\frac{3\cdot2}{2\cdot1}=3$$

3) Formas de hacer cola
- permutación sin repetición

$$P(5,5)=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$$

4) Formas de un juez de otorgar premio

$$P(8,3)=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8\times7\times6}{1}=336$$

- permutación sin repetición

5) Capitán solicita 2 marineros para realizar un trabajo
- combinación sin repetición

$$C(10,2)=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10\times9}{2\times1}=45$$

6) Eduardo tiene 7 libros - permutación sin repetición

$$P(7,5)=\frac{7!}{(7-5)!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3}{1}=2520$$

7) En un salón de 10 alumnos
- combinación sin repetición

$$C(10,2)=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}=45$$

8) Palabras diferentes con Remember
- Permutación con repeticiones

$$P = \frac{8!}{2! \times 3!} = \frac{40320}{216} = 3360$$

9) club de Basketball con 12 jugadoras
- Combinación sin repetición

$$C(11,5) = \frac{11!}{5!\,(11-5)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462$$

10) Con 4 Frutas diferentes. cuantos Jugos con 2 frutas
- combinación con restricción

$$C(4,2) = 6 \qquad 6 + 4 + 1 = 11$$
$$C(4,3) = 4$$
$$C(4,4) = 1$$

11) Curso de 10 estudiantes - permutación sin repeticiones

$$P(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

12) Campeonato con 8 equipos
- permutación sin repetición

$$P(8,2) = \frac{8!}{(8-2)!} = 8 \cdot 7 = 56$$

13) ¿cuantos números de 3 cifras distintas se pueden formar con los digitos del 1 al 7?
- permutación sin Repetición

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

14)
- Repetición

$$7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

15) De un grupo de 10 Estudiantes
- combinación sin repetición

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

16) ¿cuantas placas diferentes se pueden hacer con 3 letras y 3 digitos?

- Repetición

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17.576.000$$

17) n personas van a jugar cartas al rededor de una mesa

- Permutación

Permutaciones en un circulo $= (n-1)!$

18) Heladería con 7 sabores

- Combinación sin repetición

$$C(7,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

19) En un almacén venden 6 sabores de gaseosa

- Combinación sin repetición

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

20) Demuestre la formula de combinación con repetición

$$C_r^m = \binom{n+r-1}{r}$$

Se tienen la distribución cuerpos para n cantidades

$$X_1 + X_2 + \ldots X_n = r$$

como se quiere ordenar las secuencias se obtiene como metodo

$$r+(n-1) = n+r-1$$

luego las maneras de escoger r posiciones de $n+r-1$ se da por el siguiente =

$$\binom{n+r-1}{r} = \left(\frac{(n+r-1)!}{r! \cdot (n-1)!}\right)$$

Ejercicios probabilidad condicional y total

(1) $\Omega: 1000$

185 hombres usan gafas
415 " no usan
115 mujeres que usan

a) $P(H) = \frac{\cancel{600}}{1000} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{10}} \frac{3}{5}$

b) $P(M) = \frac{400}{1000} = \frac{2}{5}$

c) $P(G) = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10}$

sabemos que es mujer

d) $P(G/M) = \frac{\cancel{115}}{400} \cdot \frac{\cancel{400}}{\cancel{1000}} = \frac{23}{80}$

(2)

a) $P(R) = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_{2}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{10}_{5}} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{10}} \; 5/10 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} = \frac{1}{2}$

$+$

$\frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} =$

b) $P(N) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{10} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{10} = \frac{1}{30} + \frac{2}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

c) $P(1/N) = \dfrac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{5}$

d) $P(2/N) = \dfrac{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{10}}{\frac{1}{6}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

(3)

$\Omega = 5$

$P(F \cap F) = P(F)\cdot P(F_1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Ejercicios teorema Bayes

(1)

a) $P(M)$

$P(F) = 0.4 \qquad P(NF) = 0.6$

$P(M/F) = 0.25 \qquad P(M/NF) = 0.6$

$P(M) = 0.25\cdot 0.4 + 0.6\cdot 0.6$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10} = 23/50$

$\frac{1}{10} +$

b) $P(F \cap H) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

c) $P(F/M) = \dfrac{P(M/F)\cdot P(F)}{P(M)} = \dfrac{0.25\cdot 0.4}{\frac{23}{50}} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{23}{50}} =$

D M A Scribe

(2)

[1,2,3,4]

a) $\pi(\lambda) = [0.4, 0.3, 0.2, 0.1]$

$\lambda = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1$

$\lambda = 2.0$

Generales de probabilidad

(1)

a) $P(A) = \frac{P(F)}{P(T)} = \frac{3}{36} \frac{1}{12}$ Combinaciones favorables

1 4 1
1 + 2 } 3
2 + 1

b) $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

1, 3, 5

(2)

Quito 2

$P(ND) = \frac{48! - 44!}{5!} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{5!} =$

$P(T) = \frac{50! - 45!}{5!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5!}$

$P(ND_r) = \frac{P(ND)}{P(T)} = \frac{45 \cdot 44}{50 \cdot 49} = 0.808$

$P(D) = 1 - 0.808 = 0.192 = \frac{47}{245}$

(3)

a) $P(A \cup B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$

b) $P(D \cup C - D \cap C) = 0.6 + 0.8 - 1 = 0.4$

④ $P_1 = \frac{365}{365}$ $P_2 = \frac{364}{365}$ ... $P_n = \frac{365-(n-1)}{365}$, $\sum_1^n$

$\therefore P(n) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-(n-1))}{365^n}$

⑤

a) Suma 8 : (2,6), (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)

$P(A) = \frac{5}{36}$

b) $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

⑥ ~~PE~~ CODIGO

⑦.

Muestreo

(10) d_1, d_2, d_3 millas a velocidades v_1, v_2, v_3

Demostrar que V dada por $\frac{d_1 + d_2 + d_3}{V} = \frac{d_1}{V_1} + \frac{d_2}{V_2} + \frac{d_3}{V_3}$

$$V = \frac{d}{t} \qquad t_T = \frac{d_T}{V_P} = \frac{d_1}{V_1} + \frac{d_2}{V_2} + \frac{d_3}{V_3}$$

$$d_T = d_1 + d_2 + d_3$$

$$t_T = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{V_P} = \frac{d_1}{V_1} + \frac{d_2}{V_2} + \frac{d_3}{V_3}$$