Ministère des Enseignements Secondaires

Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat *Session* : 2016

Spécialité : $F_{1-2-3-4-5-7-8}$,CI

Épreuve : Mathématiques

Durée : 3 heures Coefficient : 3

L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages.

EXERCICE 1 : 4 points

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n, U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2}{U_n}$.

1. Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4. **1pt**

2. On pose $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 1}$.

(a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. **1pt**

(b) Exprimer V_n, puis U_n, en fonction de n. **1pt**

(c) Déterminer la limite de la suite (U_n). **1pt**

EXERCICE 2 : 5 points

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

A/ L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 1 = 0$.

1. Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon r. **0,5pt**

2. **(a)** Vérifier que le point $A(-1, 0, 2)$ appartient à (S). **0,25pt**

(b) Donner une équation du plan tangent à (S) en A. **0,5pt**

3. Soit (P) le plan d'équation $z = 2$.

(a) Calculer la distance du point Ω au plan (P). **0,5pt**

(b) Montrer que l'intersection de (S) et (P) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. **0,75pt**

B/ Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point $K(2, 0)$. A tout point $M(x, y)$ différent de K et d'affixe z, on associe le point $M'(x', y')$ d'affixe $z' = \dfrac{\bar{z} + 2}{z - 2}$, où $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1. Écrire z' sous forme algébrique. **0,75pt**

2. Soit (H) l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.

(a) Montrer que (H) est une partie d'une hyperbole dont on précisera les sommets et les asymptotes. **1pt**

(b) Tracer (H). **0,75pt**

PROBLEME : 11 points

Les parties A et B du problème sont indépendantes.

PARTIE A : 8,5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\dfrac{e^x-3}{e^x+1}$ et on note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité sur les axes : $2cm$)

1. **(a)** Calculer les limites de f à $-\infty$ et à $+\infty$. **0,5pt**

   (b) Montrer que la droite (D_1) d'équation $y=x+3$ est asymptote à (C_f) à $-\infty$. **0,5pt**

   On admet que la droite (D_2) d'équation $y=x-1$ est asymptote à (C_f) à $+\infty$.

2. **(a)** Vérifier que pour tout réel x, on a : $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$. **0,5pt**

   (b) Dresser le tableau de variations de f. **0,75pt**

3. **(a)** Montrer que le point $I(0,1)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_f). **0,5pt**

   (b) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I. **0,25pt**

4. Étudier la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite d'équation $y=1$. **0,5pt**

5. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que

   $-2,8<\alpha<-2,7$. **0,5pt**

6. Tracer (C_f), ses asymptotes et la tangente (T). **2pts**

7. **(a)** Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=x+3-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$. **0,5pt**

   (b) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

8. Soit λ un réel strictement positif. On note (E_λ) le domaine du plan limité par la courbe (C_f), la droite (D_2) et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\lambda$.

   (a) Hachurer (E_2) sur le graphique de la question 4. **0,5pt**

   (b) Calculer en cm^2 et en fonction de λ, l'aire $\mathscr{A}_\lambda$ de (E_λ). **0,5pt**

   (c) Calculer la limite quand λ tend vers $+\infty$ de $\mathscr{A}_\lambda$. **0,5pt**

PARTIE B : 2,5 points

On considère les équations différentielles : $(E_1): 2y''-y'-y=2$; $(E_2): 2y''-y'-y=0$.

1. Montrer qu'il existe une fonction constante f_0 solution de (E_1). **0,5pt**
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E_1) si, et seulement si, $f-f_0$ est solution de (E_2). **0,5pt**
3. Résoudre (E_2). **1pt**
4. En déduire les solutions de (E_1). **0,5pt**