Intervention de M^{r} CROISSANT

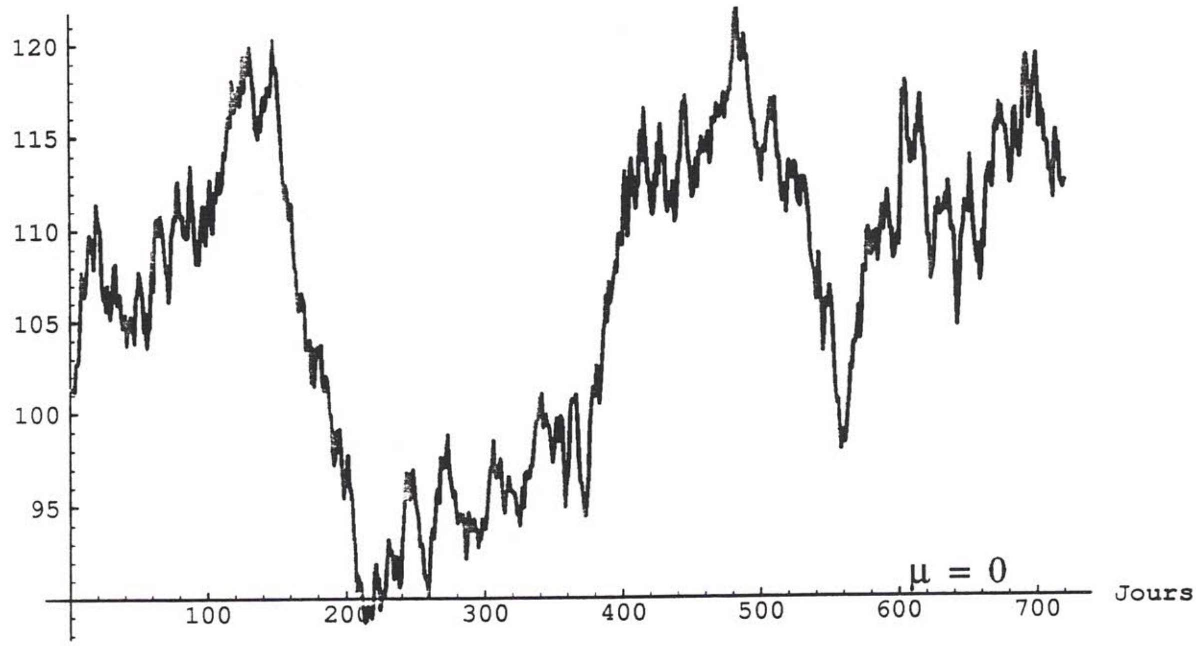
(Union Européenne de CIC)

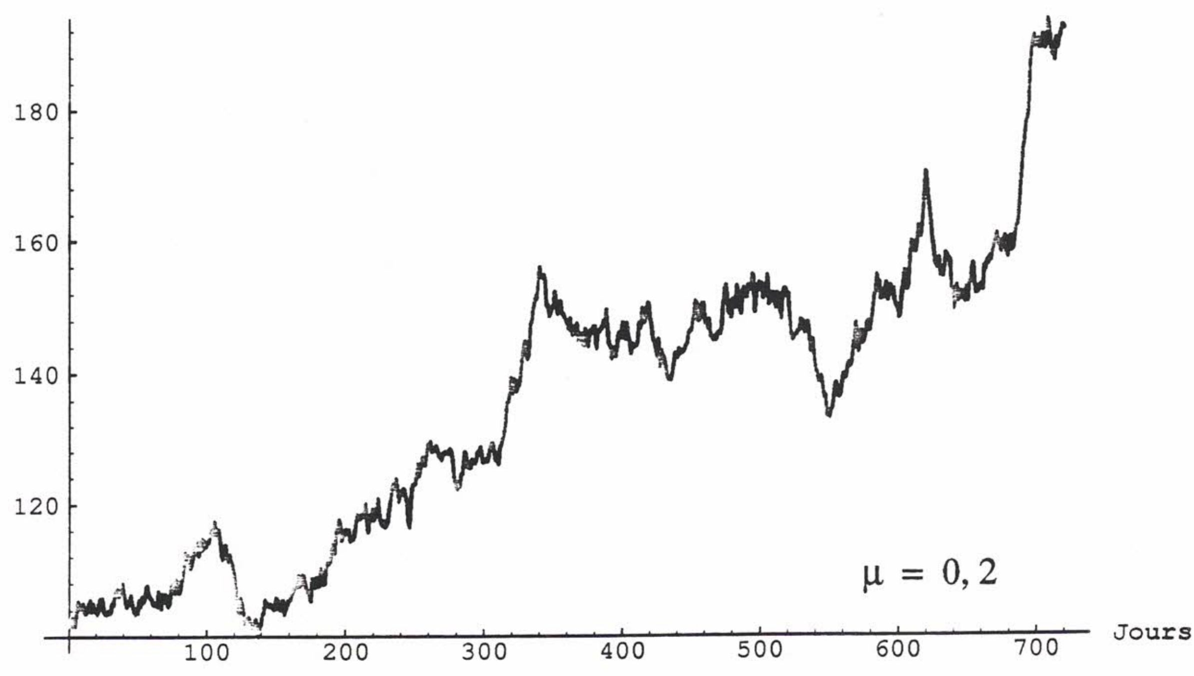
du 15 septembre 92

Gestion dynamique passive

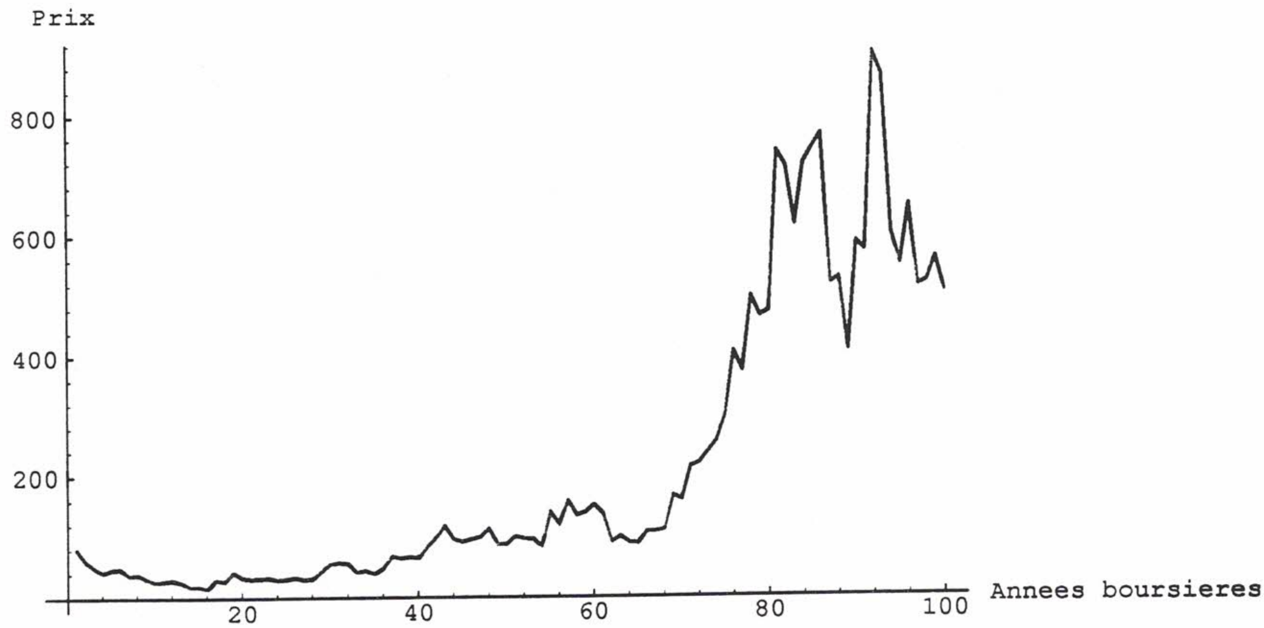
Modèle standard de marché

$$\frac{dX}{X} = \mu dt + \sigma dW$$



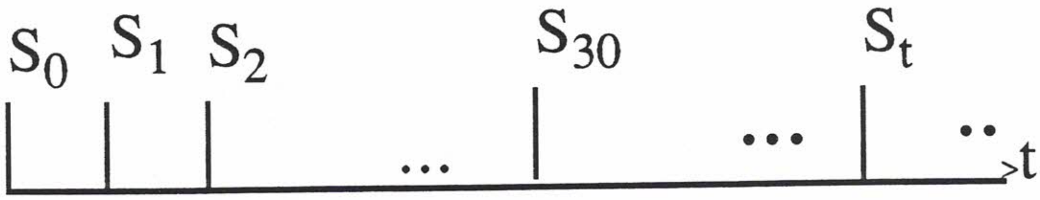


Modèle standard de marché:long terme

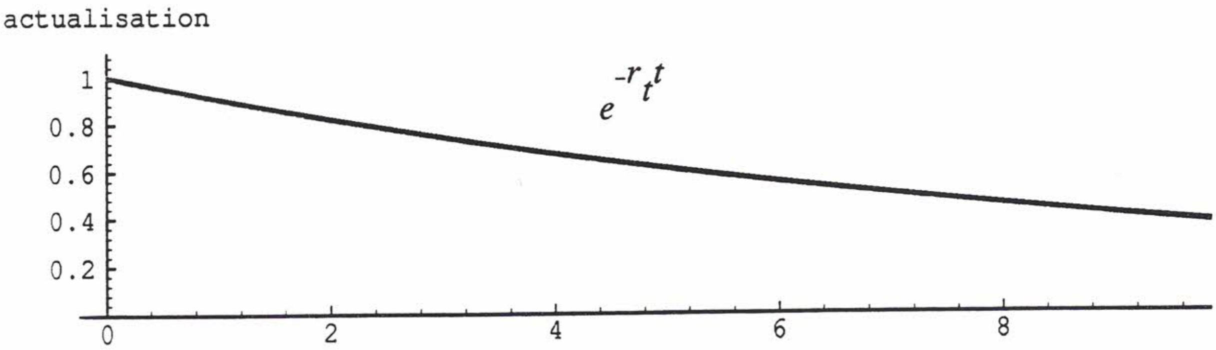


$$E\left(X_t\right) = e^{\frac{\sigma^2}{2}t} \cdot e^{\mu t}$$

Hypothèse de marché viable (arbitré)



r_t = intérêts – dividendes



Si $\quad E\left(e^{-r_{t_1} t1} S_{t1}\right) > E\left(e^{-r_{t_2} t2} S_{t2}\right)$

acheter du S_{t2} au prix $E(S_{t2})$ en t2

vendre du S_{t1} au prix $E(S_{t1})$ en t1

$$\text{marge} \cdot \text{statisque} = E\left(e^{-r_{t_1} t1} S_{t1} - e^{-r_{t_2} t2} S_{t2}\right)$$

$$\text{absence} \cdot \text{d'arbitrage} \Rightarrow E\left(e^{-r_{t_1} t1} S_{t1}\right) = E\left(e^{-r_{t_2} t2} S_{t2}\right)$$

$$\boxed{t \to e^{-r_t t} S_t = \tilde{S}_t \cdot \text{est} \cdot \text{une} \cdot \text{martingale}}$$

Détermination du μ

Si $\tilde{S}$ est une martingale

$$E(\tilde{S}_0) = E(\tilde{S}_T)$$

$$S_0 = e^{-r_T T} E(S_t)$$

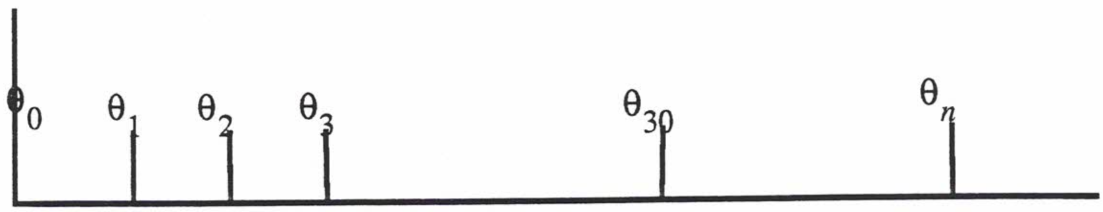
$$S_0 = e^{-r_T T} e^{\left(\mu - \frac{\sigma}{2}\right)T} S_0$$

$$S_0 = e^{\left(\mu - \frac{\sigma}{2} - r_T\right)T} S_0$$

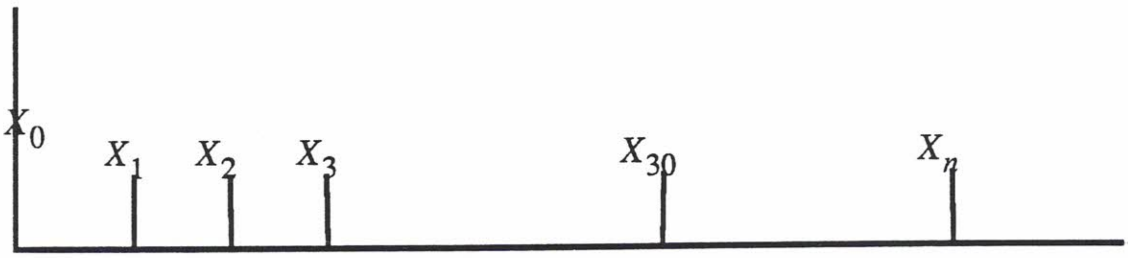
donc $$\boxed{\mu = \frac{\sigma}{2} + r_T}$$

Modèle standard de portefeuille

stock d'actions



prix des actions



Valeur du portefeuille $V_0 = V_0$

$$V_1 = V_0 - \theta_0 \tilde{X}_0 + \theta_0 \tilde{X}_1$$

$$= (V_0 + \theta_0 (\tilde{X}_1 - \tilde{X}_0))$$

$$V_n = V_0 + \theta_0 (\tilde{X}_1 - \tilde{X}_0) + \theta_1 (\tilde{X}_2 - \tilde{X}_1) + \ldots + \theta_{n-1} (\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1})$$

$$V_n = V_0 + \Sigma \theta_{i-1} (\tilde{X}_i - \tilde{X}_{i-1})$$

où θ_{i-1} déterminé en $i - 1$

Résultat fondamental

$$E(V_n) = E(V_0) + \sum_{i=1}^{n} E(\theta_{i-1}\tilde{X}_i) - E(\theta_{i-1}\tilde{X}_{i-1})$$

$E(V_0)$ calculer en n

or θ_{i-1} déterminé en i – 1 donc

$$E(\theta_{i-1}\tilde{X}_i) = \theta_{i-1}E(\tilde{X}_i) \qquad i \leq n$$

$$E(\theta_{i-1}\tilde{X}_{i-1}) = \theta_{i-1}E(\tilde{X}_{i-1}) \quad i \leq n$$

et comme $E(\tilde{X}_{i-1}) = E(\tilde{X}_i)$ ($\tilde{X}$ martingale)

$$E(V_n) = E(V_0) = V_0$$

L'éspérance de tout portefeuille géré est égal à sa valeur initiale

Complétude du marché

Dans un marché viable, sous les hypothèses de modèle standard les options sont réplicables par des stratégies de gestion **sans risque**

$$une\ option \equiv une\ stratégie\ de\ gestion$$

$$telle\ V_{échéance} = H$$

$$viabilité\ du\ marché$$

$$\Longrightarrow$$

$$prix\ (option) = E\left(V_{échéance}\right) = V_0$$

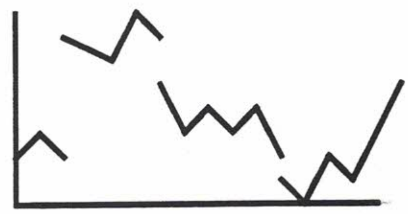
donc le hedge de l'option n'influe pas sur le marge statistique

$$\boxed{\textbf{marge statistique} = \textbf{marge réelle}}$$

Cas d'un modèle plus réaliste

Le modèle X_t n'est pas standard

<u>non complétude du marché (éventuellement)</u>



exemple: marché gaussien + sauts

les options sont non réplicables (en générale)

$$\boxed{\text{marge statistique} \neq \text{marge rèelle}}$$

H portefeuille de hedge

$$E(H_T) = H_0$$

Gestion: cas général

$$V_t = V_0 + \sum_{i=1}^{t} \theta_{i-1}(X_i - X_{i-1}) \qquad \text{cash}$$

$$+ \sum_A \sum_{i=1}^{t} \theta^A_{i-1}(O^A_i - O^A_{i-1}) \qquad \text{options}$$

$$= V_0 + \sum_{i=1}^{t} \theta'_{i-1}(X_i - X_{i-1}) \qquad \text{Portefeuille total}$$

donc V_t est une martingale et $E(V_t) = e^{r_t t} V_0$

On ne peut améliorer l'espérance de profit par un trading particulier (en théorie standard)

Les équations peuvent-être comprises au sens vectoriel

Optimisation par le risque

Question

$$E(V_T) = V_0$$

$$E\left((V_T - H)^2\right) \text{ minimale}$$

dans les marchés incomplets

Réponse

$\boxed{\text{représentation des martingales}}$

$$H = H_0 + \int_{i=1}^{T} \theta_{i-1} (X_i - X_{i-1}) + L_H$$

$$\text{où} \quad \boxed{\begin{array}{l} E\left(L_H^2\right) \text{ minimal} \\ \langle L_H,\ X \rangle = 0 \end{array}}$$

θ est le hedge

comment trouver la stratégie qui minimise le risque en répliquant une option de pay-off H

$$H = E(H) + \int \underbrace{\theta dX}_{\text{base}} + L_H$$

<u>Projection de Kunita-Watanabe</u>

projection sur le sous-espace engendré par X

$$\theta = D_X H$$

<u>Dérivée de Malliavin</u>

avec D dérivation adaptée

Exemple d'application

-si $H=f(X_T)$ et X_T brownien standard

$$P_0 = e^{-r(T-t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f\left(X_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}} \right) e^{\frac{-y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

et $$\theta = \frac{\partial P_0}{\partial X_0}$$

$f = (x-k)^{\dagger} \rightarrow$ call européen de Black et Scholes

$f = (k-x)^{\dagger} \rightarrow$ put européen de Black et Scholes

La notion de marché

-intervention 1 fois par jour à 5h ---> processus à sauts variables

-intervention tous les jours en intradays ---> processus continu + sauts variables

-intervention chaque fois que le cours décale de 3% ---> sauts fixes

Marchés X_t différents

==> couvertures θ_t différents

Deux techniques de gestion passives

$H_t \rightarrow$ pay off garanties

on calcule θ tel $H_T = H_0 + \int_0^T \theta \, dx + L_H$

où L_H minimal

contrainte : $E(H_T) = H_0$

U fonction d'utilité

on calcule θ tel $V_T = V_0 + \int_0^T \theta \, dx$

ou $U(V_T)$ maximal

Extension du formalisme aux swaps

$$G_T = P + \int_0^T \theta dx + L_T \qquad P = E(G_T)$$

$$E(V_t) \equiv 0 = -P + \int (-\theta)\, dX + G_T - L_T$$

$$X \equiv (X_i)_{i \in I} \qquad X_0 \equiv \text{ la monnaie} \qquad X_n \equiv \text{ les autres actifs (n>0)}$$

$$-P + (G_T)_0 \equiv G_A$$ flux certains de monnaie

$$(G_T)_{n>0} \equiv G_B$$ flux certains autres actifs (indexations)

$$\underbrace{G_A + G_B}_{\text{flux garantis du swap}} + \underbrace{\int (-\theta)\, dx}_{\text{gestion optimale du swap}} - \underbrace{L_T}_{\text{risque irréductible}} = 0$$

Algèbre des SWAPS

$$
\begin{aligned}
G_A + G_B + \int \theta_1 \, dx + L_T^1 &= 0 \\
-G_B + G_C + \int \theta_2 \, dx + L_T^2 &= 0 \\
\hline
G_A + G_C + \int (\theta_1 + \theta_2) \, dx + L_T^1 + L_T^2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\text{Cas général} \\
G_1 + G_2 + \ \dots \ + G_n + \int \theta \, dx + L_T = 0 \\
\text{contrainte :} \quad E^* \left(G_1 + \ \dots \ + G_n \right) = 0
\end{array}
}
$$

Fonction ou

garantie $G_1 > 0$ et garantie $G_2 > 0$

$$\Longleftrightarrow$$

G_1 ou G_2 (au mieux)

$$\Longleftrightarrow$$

$$\max\left\{G_1^+,\ G_2^+\right\}$$

Rajout d'une garantie

gestion optimale

$$-P_0 + G_1^+ + \ \dots \ + G_n^+ + \int \theta \, dx + L_T = 0$$

$$E^*\left(G_1^+ + \ \dots \ + G_n^+\right) = P_0$$

garantie supplémentaire : $G_{n+1}^+ = (\dots)^+$

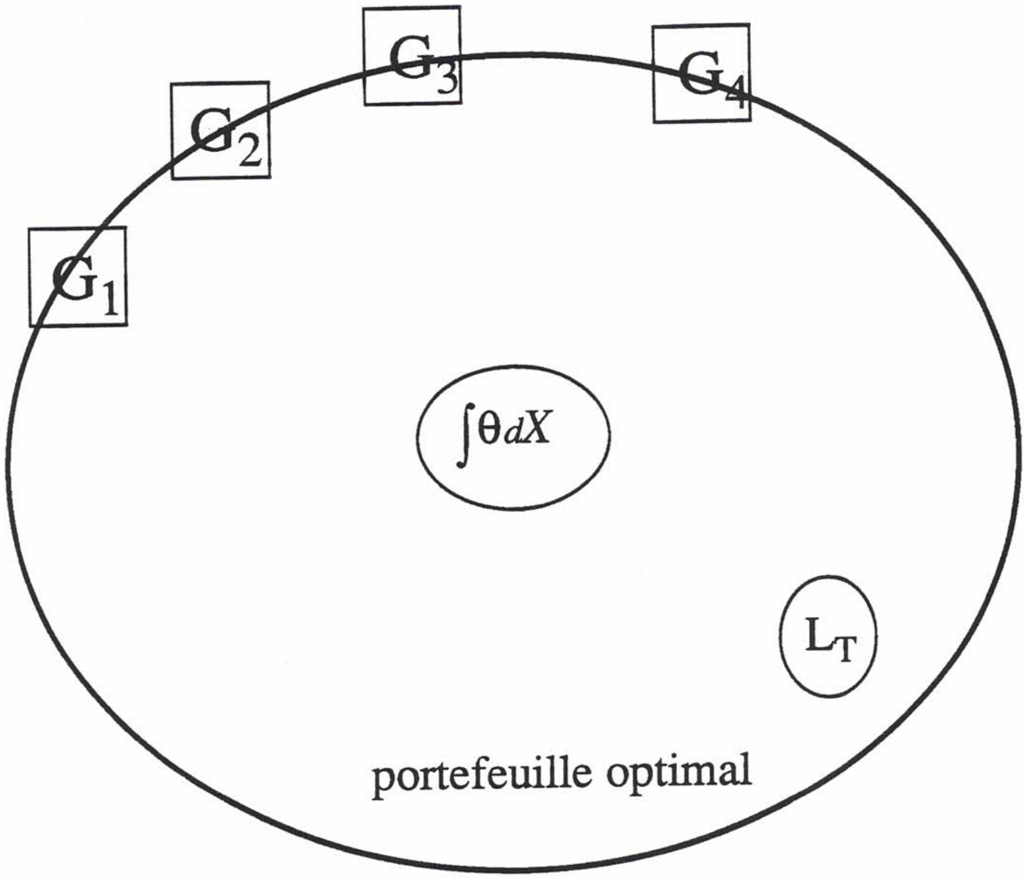
nouvelle gestion optimale

$$-P_0' + \max \left\{G_{n+1}^+, \, G_1^+ + \ \dots \ + G_n^+\right\} + \int \theta' \, dx + L_T = 0$$

ou $P' = P_0 + \epsilon$

ϵ : surcoût lié à la garantie G_{n+1}

Gestion optimale



exemple: $G_1 \equiv$ portefeuille en \$ > 100 M

$G_2 \equiv$ portefeuille en FRF > 500 M

$G_3 \equiv$ performance > 90 % (perf du CAC)

$G_4 \equiv$ montant initial = 250M FRF

$$-G_4 + G_1 \vee G_2 \vee G_3 + \int_0^T \theta dX + L_T = 0$$