A Bi-Dimensional SABR Framework for Spread Option Pricing

Olivier Croissant

24 juillet 2025

Résumé

We introduce a generalization of the classical SABR stochastic volatility model to two underlying assets, aiming to price spread options. The model accounts for both individual volatilities and cross-correlations, including stochastic volatility co-movements. We derive a closed-form approximation for the instantaneous variance of the spread, and propose a pricing formula in the spirit of Hagan's expansion. The method allows for efficient calibration and highlights the role of transverse correlations. We validate our approach with Monte Carlo simulations and apply it to market data.

1 Introduction

Spread options, defined on the difference of two underlying assets, are widely used in commodity, equity, and energy markets. While standard Black-Scholes or univariate SABR models fail to capture the full dynamics of such instruments, we present a bi-dimensional SABR framework that incorporates the joint dynamics of two correlated assets, each with its own stochastic volatility.

2 Bi-Dimensional SABR Model

Let S_1, S_2 be two underlying assets with dynamics :

$$
\begin{aligned}
dS_1 &= \alpha_1 S_1^{\beta_1} dW_1, \\
d\alpha_1 &= \nu_1 \alpha_1 dW_{v1}, \\
dS_2 &= \alpha_2 S_2^{\beta_2} dW_2, \\
d\alpha_2 &= \nu_2 \alpha_2 dW_{v2}
\end{aligned}
$$

where W_1, W_2, W_{v1}, W_{v2} are Brownian motions with general correlation matrix Corr $\in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

3 Closed-Form Spread Variance Formula

We define the instantaneous variance of the spread $F = S_2 - S_1$ as :

$$\mathrm{Var}[dF] = \alpha_1^2 S_1^{2\beta_1} - 2\alpha_1\alpha_2\rho_s S_1^{\beta_1} S_2^{\beta_2} + \alpha_2^2 S_2^{2\beta_2}$$

4 Application to Market Data

Using observed implied volatilities of spread options, we calibrate the transverse correlations $\rho_{c12}, \rho_{c21}, \rho_v$ while keeping individual SABR parameters fixed. Calibration significantly improves the fit compared to standard models.

5 Comparison with Monte Carlo Simulations

We simulate the full 4-dimensional stochastic system using log-Euler schemes with antithetic variance reduction. Analytical pricing closely matches Monte Carlo results, within bid-ask spreads.

6 Conclusion

We provide a theoretically grounded and practically effective approach to pricing spread options under a bi-dimensional SABR model. Our closed-form approximation is efficient and flexible for calibration.

A Derivation of the Spread Variance Formula

We compute the instantaneous variance of the spread $F = S_2 - S_1$ using the Jacobian ∇F and the covariance matrix Σ :

$$\mathrm{Var}[F] = \nabla F^T \cdot \Sigma \cdot \nabla F$$

From symbolic computations, we recover :

$$\mathrm{Var}[dF] = \alpha_1^2 S_1^{2\beta_1} - 2\alpha_1\alpha_2\rho_s S_1^{\beta_1} S_2^{\beta_2} + \alpha_2^2 S_2^{2\beta_2}$$

Cette section détaille la dérivation d'une formule de valorisation pour une option spread sous une extension bidimensionnelle du modèle SABR, appelée BiSABR. La méthodologie suit une approche similaire à celle utilisée pour le modèle SABR original, en transformant le problème en une équation différentielle partielle (EDP) pour la densité de probabilité, puis en effectuant des changements de variables pour simplifier l'analyse.

A.1 Modélisation Stochastique des Sous-jacents et Volatilités

Nous considérons deux sous-jacents financiers, F_1 et F_2, dont les dynamiques sont décrites par des processus de type SABR [?]. Leurs volatilités stochastiques, α_1 et α_2, suivent des processus de Heston. Les équations différentielles stochastiques (EDS) sont données par :

$$dF_1 = \alpha_1 C_1[F_1] dW_1 \tag{1}$$
$$d\alpha_1 = v_1 \alpha_1 dW_{v1} \tag{2}$$
$$dW_1 dW_{v1} = \rho_1 dt \tag{3}$$
$$dF_2 = \alpha_2 C_2[F_2] dW_2 \tag{4}$$
$$d\alpha_2 = v_2 \alpha_2 dW_{v2} \tag{5}$$
$$dW_2 dW_{v2} = \rho_2 dt \tag{6}$$

où $C_1[F_1]$ et $C_2[F_2]$ sont des fonctions décrivant la dépendance de la volatilité des sous-jacents (typiquement $F_i^{\beta_i}$), et ϵ est un petit paramètre pour la perturbation singulière.

Des corrélations supplémentaires entre les processus de Wiener sont introduites pour capturer les interactions croisées :

$$dW_1 dW_2 = \rho_s dt \tag{7}$$
$$dW_1 dW_{v2} = \rho_{c12} dt \tag{8}$$
$$dW_2 dW_{v1} = \rho_{c21} dt \tag{9}$$
$$dW_{v1} dW_{v2} = \rho_v dt \tag{10}$$

A.2 Équation de Fokker-Planck (Équation de Kolmogorov Directe)

La densité de probabilité $p(t, f_1, \alpha_1, f_2, \alpha_2, T, F_1, F_2, A_1, A_2)$ est définie comme la probabilité que les variables d'état atteignent certaines valeurs à un instant T étant donné leurs valeurs à l'instant t. Son évolution est régie par l'équation de Kolmogorov directe :

$$\begin{aligned}
p_T = &\frac{1}{2}\epsilon^2 A_1^2 [C_1[F_1]]^2 p_{F_1F_1} + \frac{1}{2}\epsilon^2 A_2^2 [C_2[F_2]]^2 p_{F_2F_2} \\
&+ \frac{1}{2}\epsilon^2 \nu_1^2 [A_1^2 p]_{A_1A_1} + \frac{1}{2}\epsilon^2 \nu_2^2 [A_2^2 p]_{A_2A_2} \\
&+ \epsilon^2 \rho_1 v_1 [A_1^2 C_1[F_1] p]_{A_1F_1} + \epsilon^2 \rho_2 v_2 [A_2^2 C_2[F_2] p]_{A_2F_2} \\
&+ \epsilon^2 \rho_s A_1 A_2 [C_1[F_1] C_2[F_2] p]_{F_1F_2} \\
&+ \epsilon^2 \rho_v v_1 v_2 [A_1 A_2 p]_{A_1A_2} + \epsilon^2 \rho_{c12} A_1 v_2 [C_1[F_1] A_2 p]_{F_1A_2} \\
&+ \epsilon^2 \rho_{c21} A_2 v_1 [C_2[F_2] A_1 p]_{F_2A_1}
\end{aligned} \tag{11}$$

avec la condition initiale $p = \delta[F_1 - f_1] \times \delta[F_2 - f_2] \times \delta[A_1 - \alpha_1] \times \delta[A_2 - \alpha_2]$ à $T = t$.

A.3 Valorisation de l'Option Spread et Changement de Variables

La valeur d'une option spread à la date t, avec un strike K et une maturité t_{exp}, est donnée par l'espérance du payoff $\max[f_1 - f_2 - K, 0]$. Ceci s'exprime par l'intégrale suivante :

$$V(t, f_1, f_2, \alpha_1, \alpha_2) = E\left[(F_1(t_{\text{exp}}) - F_2(t_{\text{exp}}) - K)^+ \middle| F_1(t) = f_1, F_2(t) = f_2, \alpha_1(t) = \alpha_1, \alpha_2(t) = \alpha_2\right]$$

Afin de simplifier l'analyse, un changement de variables est introduit :

$$S = F_1 - F_2 \tag{12}$$

$$B = F_2 \tag{13}$$

Les dérivées de la fonction de valorisation H par rapport à F_1 et F_2 sont alors exprimées en fonction de S et B. Après substitution dans l'équation de Kolmogorov directe et intégration par parties, la valeur de l'option peut être exprimée sous la forme :

$$v(t, f_1, f_2, \alpha_1, \alpha_2) = (f_1 - f_2 - K)^+ + \int_0^{t_{\text{exp}}} dT \int_0^\infty dA_1 \int_0^\infty dA_2 \int_0^\infty dB \cdot G(A_1, A_2, B) \cdot p_{S=K}$$

où

$$G(A_1, A_2, B) = \frac{1}{2}\epsilon^2 A_1^2 C_1[K+B]^2 + \frac{1}{2}\epsilon^2 A_2^2 C_2[B]^2 - \epsilon^2 \rho_s A_1 A_2 C_1[K+B] C_2[B]$$

En définissant une nouvelle fonction $P(t, f_1, f_2, \alpha_1, \alpha_2)$:

$$P(t, f_1, f_2, \alpha_1, \alpha_2) = \int_0^\infty dA_1 \int_0^\infty dA_2 \int_0^\infty dB \cdot G(A_1, A_2, B) \cdot p_{S=K}$$

Il est montré que P satisfait une équation de Kolmogorov rétrograde similaire à l'équation de pricing originale, avec une condition terminale spécifique à $T = t$.

Finalement, la valeur de l'option spread est donnée par :

$$V(t_{\text{exp}}, f_1, f_2, \alpha_1, \alpha_2) = (f_1 - f_2 - K)^+ + \int_0^{t_{\text{exp}}} dT \cdot P(t, f_1, f_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

Cette équation peut être réécrite en utilisant les variables S et B.

A.4 Simplification par Transformation de Volatilité du Spread

Pour rapprocher l'EDP obtenue d'une forme de type SABR unidimensionnelle, une nouvelle variable, α_{11}, est introduite pour représenter la volatilité effective du spread :

$$\alpha_{11} = \sqrt{\alpha_1^2 C_1[s+b]^2 + \alpha_2^2 C_2[b]^2 - 2\rho_s \alpha_1 C_1[s+b] \alpha_2 C_2[b]}$$

Ce changement de variable, ainsi que $s_1 = s$, $b_1 = b$, et $\alpha_{22} = \alpha_2$, permet de réécrire l'EDP pour P. Les dérivées partielles de P par rapport aux variables originales sont exprimées en fonction des dérivées par rapport aux nouvelles variables. Après des calculs détaillés des dérivées secondes, l'EDP pour P peut être réorganisée pour isoler un terme de diffusion principal sur s_1 :

$$-\partial_t P = \frac{1}{2} A_{s_1}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial s_1^2} + A_{\alpha_{11} s_1} \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_{11} \partial s_1} + A_{\alpha_{11}}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_{11}^2} + A_{\alpha_{11}} \frac{\partial P}{\partial \alpha_{11}} + \dots$$

où les coefficients $A_{s_1}^2$, $A_{\alpha_{11} s_1}$, $A_{\alpha_{11}}^2$, et $A_{\alpha_{11}}$ sont des fonctions des variables d'état et des paramètres du modèle, incluant les termes croisés et les termes de drift résultant de la transformation. Ces coefficients sont complexes et intègrent la dynamique combinée du spread et de ses volatilités sous-jacentes. Les termes non inclus dans cette forme simplifiée sont identifiés comme des termes négligés.

A.5 Transformation Inverse

La transformation inverse permet d'exprimer les variables originales en fonction des nouvelles variables. Notamment, α_1 peut être exprimé comme :

$$\alpha_1 = \frac{\rho_s \alpha_{22} C_2[b_1] + \sqrt{\alpha_{11}^2 - (1-\rho_s^2)\alpha_{22}^2 C_2[b_1]^2}}{C_1[s_1 + b_1]}$$

Cette relation implique l'identité utile :

$$\sqrt{\alpha_{11}^2 - (1-\rho_s^2)\alpha_{22}^2 C_2[b_1]^2} = \alpha_1 C_1[s_1 + b_1] - \rho_s \alpha_{22} C_2[b_1]$$

Les dérivées de α_1 par rapport aux nouvelles variables sont également calculées, ce qui est crucial pour le traitement des termes dans l'EDP transformée.

A.6 Généralisation du Payoff

Le modèle peut être étendu pour valoriser un payoff de la forme Payoff $=$ $\max[a_1 f_1 - a_2 f_2 - K, 0]$. Ceci est réalisé par un changement de variable simple sur les forwards, $\tilde{F}_1 = a_1 F_1$ et $\tilde{F}_2 = a_2 F_2$. Cette transformation permet de redéfinir les paramètres α_1 et α_2 effectivement comme $\tilde{\alpha}_1 = a_1^{1-\beta_1}\alpha_1$ et $\tilde{\alpha}_2 = a_2^{1-\beta_2}\alpha_2$, ramenant ainsi le problème à la forme initiale avec un payoff standard sur le spread.

La démonstration complète établit un cadre pour la valorisation d'options spread sous un modèle BiSABR, en transformant l'EDP sous-jacente en une forme plus propice à l'analyse et à d'éventuelles approximations numériques.

B Modèle BiSABR pour les Options Spread

B.1 Dynamiques des processus

Les sous-jacents et leurs volatilités suivent :

$$dF_1 = \alpha_1 F_1^{\beta_1} dW_1, \qquad d\alpha_1 = \nu_1 \alpha_1 dW_{\nu_1} \tag{14}$$

$$dF_2 = \alpha_2 F_2^{\beta_2} dW_2, \qquad d\alpha_2 = \nu_2 \alpha_2 dW_{\nu_2} \tag{15}$$

Avec les corrélations croisées :

$$dW_1 dW_2 = \rho_s dt \tag{16}$$

$$dW_1 dW_{\nu_2} = \rho_{c12} dt \tag{17}$$

$$dW_2 dW_{\nu_1} = \rho_{c21} dt \tag{18}$$

$$dW_{\nu_1} dW_{\nu_2} = \rho_v dt \tag{19}$$

B.2 Volatilité effective du spread

Pour le spread $S = F_1 - F_2$:

$$\alpha_{\text{sp}} = \sqrt{(F_1^{\beta_1}\alpha_1)^2 + (F_2^{\beta_2}\alpha_2)^2 - 2\rho_s(F_1^{\beta_1}\alpha_1)(F_2^{\beta_2}\alpha_2)}$$

B.3 Paramètres du modèle SABR équivalent

- **Volatilité du vol :**

$$\gamma_{\text{sp}} = \frac{1}{\alpha_{\text{sp}}^2}\sqrt{\text{vBISABR1}\left(F_1, \alpha_1, \beta_1, \rho_1, \nu_1, F_2, \alpha_2, \beta_2, \rho_2, \nu_2, \rho_s, \rho_v, \rho_{c12}, \rho_{c21}, X_1, X_2, \alpha_{\text{sp}}\right)}$$

- **Corrélation effective :**

$$\rho_{\text{sp}} = \frac{\text{pBISABR1}\left(F_1, \alpha_1, \beta_1, \rho_1, \nu_1, F_2, \alpha_2, \beta_2, \rho_2, \nu_2, \rho_s, \rho_v, \rho_{c12}, \rho_{c21}, X_1, X_2\right)}{\gamma_{\text{sp}}\alpha_{\text{sp}}^3}$$

- **Terme de dérive :**

$$\mu_{\text{sp}} = \text{pBISABR1}\left(F_1, \alpha_1, \beta_1, \rho_1, \nu_1, F_2, \alpha_2, \beta_2, \rho_2, \nu_2, \rho_s, \rho_v, \rho_{c12}, \rho_{c21}, X_1, X_2\right)$$

B.4 Transformation de la variable de strike

$$z = \frac{1}{\alpha_1\beta_1}\int_{(K+F_2)^{\beta_1}}^{F_1^{\beta_1}} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - rG + F}}$$

où $G = \frac{2F_2^{\beta_2}\alpha_2\rho_s}{\alpha_1}$, $F = F_2^{2\beta_2}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2$.

B.5 Formule finale du prix

Le prix de l'option spread s'écrit :

$$V = \text{SABRgeneric6}\left((F_1 - F_2 - K)^+, z, b_1, b_2, z_{\text{avg}}, \sqrt{C(K)}, T, \mu_{\text{sp}}, \alpha_{\text{sp}}, \rho_{\text{sp}}, \gamma_{\text{sp}}\right) \tag{20}$$

avec :

$$b_1 = \left.\frac{\partial C}{\partial s}\right|_{s=\text{avg}} \tag{21}$$

$$b_2 = \left.\frac{\partial^2 C}{\partial s^2}\right|_{s=\text{avg}} C(\text{avg}) + b_1^2 \tag{22}$$

$$C(s) = \frac{\sqrt{(s+F_2)^{2\beta_1}\alpha_1^2 + F_2^{2\beta_2}\alpha_2^2 - 2(s+F_2)^{\beta_1}F_2^{\beta_2}\alpha_1\alpha_2\rho_s}}{\alpha_{\text{sp}}} \tag{23}$$

$$z_{\text{avg}} = z\left(\frac{F_1 - F_2 + K}{2}\right) \tag{24}$$

B.6 Extension aux poids personnalisés

Pour un payoff généralisé $\max(a_1F_1 - a_2F_2 - K, 0)$:

$$\begin{aligned} V_{\text{gen}} = \text{BISABRspreadOption}\Big(&a_1F_1, a_1^{1-\beta_1}\alpha_1, \beta_1, \rho_1, \nu_1, \\ &a_2F_2, a_2^{1-\beta_2}\alpha_2, \beta_2, \rho_2, \nu_2, \\ &\rho_s, \rho_v, \rho_{c12}, \rho_{c21}, K, T) \end{aligned} \tag{25}$$