Faisceau spectral, topos de Grothendieck et morphismes géométriques

Olivier Croissant

1 Le faisceau spectral en mécanique quantique

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann (par exemple $B(\mathcal{H})$, les opérateurs bornés sur un espace de Hilbert). [1]

On définit la catégorie des *contextes* $\mathcal{V}(\mathcal{A})$:

— objets : sous-algèbres abéliennes maximales $V \subseteq \mathcal{A}$,

— morphismes : inclusions $i_{V'V} : V' \hookrightarrow V$.

Pour chaque V, on associe son spectre de Gelfand $\Sigma(V)$ (espace compact de caractères $V \to \mathbb{C}$).

On définit alors le *faisceau spectral* (plus précisément un préfaisceau) :

$$\Sigma : \mathcal{V}(\mathcal{A})^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}, \qquad \Sigma(V) = \mathrm{Spec}(V), \;\; \Sigma(i_{V'V})(\lambda) = \lambda|_{V'}.$$

Cet objet vit dans le topos de préfaisceaux

$$\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{A})} := \mathbf{Set}^{\mathcal{V}(\mathcal{A})^{op}}.$$

Le faisceau spectral joue le rôle d'« espace d'états généralisé » en logique topos : il n'a pas de section globale (théorème de Kochen–Specker), mais seulement des sections locales.

2 Morphismes géométriques

Un *morphisme géométrique* entre deux topos $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est un couple

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \qquad (f^*, f_*),$$

où $f^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ est exact à gauche (préserve les limites finies) et f_* en est l'adjoint droit, avec

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(f^*X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(X, f_*Y).$$

Ils généralisent les applications continues : si $f : X \to Y$ est continue alors $f : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y)$ est un morphisme géométrique.

1. Les accents dans les formules sont évités pour limiter les césures difficiles.

3 Cribles et topos de Grothendieck

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Un *crible* S sur c est un ensemble de flèches arrivant dans c, fermé par précomposition : si $f : d \to c \in S$ et $g : e \to d$, alors $f \circ g : e \to c \in S$.

Une *topologie de Grothendieck* J associe, à chaque c, une collection $J(c)$ de cribles *couvrants* satisfaisant les axiomes usuels. Un préfaisceau $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ est un faisceau pour J si, pour tout crible couvrant $S \in J(c)$, toute famille compatible $\{s_f\}_{f \in S}$ se recolle en une section unique de $F(c)$. Un *topos de Grothendieck* est la catégorie des faisceaux sur un site $(\mathcal{C}, J)$.

4 Exemple concret en logique quantique

Considérons le spectral presheaf $\Sigma \in \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{A})}$. Soit $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{A})$ une sous-catégorie (p. ex. contextes effectivement accessibles). L'inclusion $i : \mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{V}(\mathcal{A})$ induit un morphisme géométrique

$$i : \widehat{\mathcal{W}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{A})},$$

dont l'image inverse agit par restriction :

$$i^*(\Sigma) = \Sigma|_{\mathcal{W}}.$$

Interprétation : restreindre les contextes revient à limiter les observables accessibles ; le morphisme géométrique garantit la cohérence de la logique interne lors de cette restriction.

Résumé. Le *faisceau spectral* est un préfaisceau associant à chaque contexte abélien le spectre de Gelfand. Les *morphismes géométriques* sont les bonnes flèches entre topos. Les *cribles* définissent les topologies de Grothendieck. En logique quantique, une inclusion de sites induit un morphisme géométrique qui restreint le spectral presheaf de manière naturelle.