Vers une équation de Wheeler–DeWitt faible dans le cadre des Causal Fermion Systems et des topos de points de vue

Résumé

Nous proposons une reformulation de l'équation de Wheeler–DeWitt, non pas comme une équation différentielle fonctionnelle forte sur l'espace des métriques, mais comme une contrainte *faible et contextuelle*. Cette perspective s'appuie à la fois sur le cadre des *Causal Fermion Systems* (CFS), où la géométrie est remplacée par une mesure universelle sur un espace d'opérateurs, et sur la logique des *topos*, où la vérité et les états physiques deviennent intrinsèquement contextuels. L'équation de Wheeler–DeWitt faible devient ainsi une condition de stationnarité spectrale sur des mesures, assurant la cohérence entre contextes.

1 Introduction

Dans la formulation ADM de la relativité générale, la gravitation est interprétée comme une *géométrie dynamique*, et la fonction d'onde géométrodynamique $\Psi[h_{ij}]$ satisfait l'équation de Wheeler–DeWitt

$$\widehat{H}\,\Psi[h_{ij}] = 0,$$

qui est une contrainte hamiltonienne quantique. Cette équation est *forte* : elle est définie comme équation différentielle fonctionnelle sur l'espace infini-dimensionnel des métriques h_{ij}.

Cependant, deux difficultés apparaissent :

— la définition rigoureuse des opérateurs différentiels fonctionnels est problématique,

— la logique interne de la mécanique quantique suggère que les contraintes dynamiques sont toujours *contextuelles*.

Les CFS et la logique des topos offrent une voie alternative : remplacer les contraintes fortes par des contraintes *faibles*, exprimées comme des égalités intégrales sur les corrélations spectrales définies par la mesure universelle ρ.

2 Topos des contextes

Considérons une catégorie $\mathcal{C}$ des contextes :

— objets : $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, interprétés comme « points de vue » (choix local de base de spin S_x, ou sous-algèbres commutatives),

— morphismes : $u : C \to C'$, interprétés comme changements de base ou connexions de spin $D_{x,y}$.

Un *préfaisceau d'états* est un foncteur contravariant

$$\mathsf{State} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect},$$

qui à chaque contexte C associe un espace d'états $\mathsf{State}(C)$, et de même pour les observables-tests.

$$\begin{array}{ccc} C & & \mathsf{State}(C) \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{State}(u)} \\ C' & & \mathsf{State}(C') \end{array}$$

Le topos $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}$ décrit ainsi la multiplicité des points de vue, avec une logique interne intuitionniste (comme dans le faisceau spectral de la mécanique quantique).

3 Causal Fermion Systems : rappel

Dans un CFS, on part d'un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle .|. \rangle)$ et d'une mesure universelle ρ sur un espace $\mathcal{F}$ d'opérateurs auto-adjoints de rang fini. L'espace-temps est $M = \operatorname{supp} \rho$. Pour $x, y \in M$, le noyau fermionique $P(x, y)$ et le produit fermé $A_{xy} = P(x, y)P(y, x)$ codent la causalité spectrale. Le lagrangien causal

$$L(x, y) := |(xy)^2| - \tfrac{1}{2n}|xy|^2$$

définit l'action

$$S[\rho] = \iint L(x, y)\, \mathrm{d}\rho(x)\, \mathrm{d}\rho(y).$$

4 De Wheeler–DeWitt forte à faible

En ADM, $\widehat{H}\Psi = 0$ est une contrainte différentielle forte. Nous proposons l'analogue *faible* en CFS :

$$\forall C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}),\ \forall \varphi \in \mathsf{Test}(C), \qquad \int_M \varphi_C(x)\, (\ell_\rho(x) - \lambda)\, \mathrm{d}\rho(x) = 0, \tag{1}$$

où

$$\ell_\rho(x) = \int_M L(x, y)\, \mathrm{d}\rho(y)$$

est la fonction potentielle associée. Ici λ est un multiplicateur de Lagrange lié aux contraintes globales (volume, normalisation, etc.).

5 Exemple jouet : mini-superspace discret

Considérons un CFS de spin dimension $n = 1$, avec un support discret $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$. La mesure est $\rho = \sum_i \rho_i \delta_{x_i}$. La contrainte faible devient

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_C(x_i)\, (\ell_\rho(x_i) - \lambda)\, \rho_i = 0 \quad \forall (C, \varphi).$$

Dans ce cas, la minimisation impose que tous les $\ell_\rho(x_i)$ coïncident (modulo λ), ce qui est exactement la stationnarité discrète des points de vue.

6 Diagramme du topos des points de vue

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{State}(C_1) \arrow[dl, "\mathsf{State}(u_{10})"'] & \\
\mathsf{State}(C_0) \arrow[rr, "\mathsf{State}(u_{20})"] & & \mathsf{State}(C_2) \arrow[ul, "\mathsf{State}(u_{21})"']
\end{tikzcd}$$

Les morphismes assurent la cohérence entre contextes, et la contrainte de Wheeler–DeWitt faible est une condition de *stationnarité globale* respectant ces compatibilités.

7 Perspectives physiques

Cette reformulation ouvre plusieurs pistes :

(a) **Temps émergent.** Dans la version forte, le temps extérieur disparaît ("problème du temps"). Ici, le temps est remplacé par la cohérence entre contextes : l'ordre causal et les corrélations spectrales induisent une flèche du temps émergente.

(b) **Invariance de jauge.** Les transformations locales $U(x) \in U(p,q)$ sur chaque fibre S_x se traduisent par des changements de point de vue. L'équation faible est naturellement invariante si les tests φ sont choisis de façon covariante, analogues aux observables gauge-invariantes.

(c) **Décohérence et collapse.** La "discrétisation" des mesures minimisantes dans les CFS suggère un mécanisme naturel de réduction de la fonction d'onde. Dans le langage du topos, il n'y a pas de vérité globale, seulement des vérités contextuelles — ce qui rend compte du caractère relatif de la mesure et du collapse.

En somme, l'équation de Wheeler–DeWitt faible n'est pas seulement une réécriture mathématique : elle offre une interprétation conceptuelle de la dynamique comme *cohérence inter-contextes*, où causalité, temps et collapse émergent de la logique interne.

8 Conclusion

Nous avons proposé une lecture topos-théorique de Wheeler–DeWitt, où la contrainte hamiltonienne devient une condition faible de cohérence spectrale entre contextes, exprimée directement en termes de la mesure universelle d'un CFS. Cela suggère un pont naturel entre quantification de la gravité, causalité spectrale et logique intuitionniste.

Références

[1] Arnowitt, Deser, Misner, *Canonical Variables for General Relativity*, Phys. Rev. (1962).

[2] B. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*, Phys. Rev. (1967).

[3] F. Finster, *Causal Fermion Systems : A Quantum Space-Time Emerging from an Action Principle*, arXiv :1102.2585.

[4] C. Isham, A. Döring, *A Topos Foundation for Theories of Physics*, J. Math. Phys. (2007).