

Topos et systèmes fermioniques causaux : indécidabilité, décohérence et émergence du temps

Olivier Croissant

Septembre 2025

Table des matières

1	L'intuition de base : la mesure comme création	3
2	Invariants et paramètres d'ordre quantitatifs	7
2.1	Pureté et entropie réduite	7
2.2	Suppression des interférences	7
2.3	Complexité et budget computationnel	7
2.4	Signatures CFS	8
2.5	Diagnostics homotopiques et faisceaux	8
2.6	Écho de Loschmidt et OTOC	8
3	Équations effectives (interfaces de calcul)	13
3.1	Influence fonctional (Feynman–Vernon)	13
3.2	Équation maîtresse GKSL	13
3.3	Version faible et contextuelle (topos)	13
4	Diagramme de phase de la décohérence	13
5	Temps émergent et rôle de Λ	15
6	Cartes et observables cosmologiques	15
7	Pipeline opératoire	15
8	Trois lois falsifiables	15
9	Mesure interne, cohérence et exemple jouet	16
9.1	Born et mesure interne dans le topos	16
9.2	Axiomes de cohérence (valuation intuitionniste)	16
9.3	Lien avec Gleason et cas 2D	16
9.4	Exemple jouet : qubit et interaction entre contextes	16

10 Positionnement par rapport aux approches existantes	18
10.1 Loop Quantum Gravity (LQG)	18
10.2 Théorie des cordes	18

Résumé

Nous proposons un cadre unifié fondé sur la combinaison des topos et des systèmes fermioniques causaux (CFS) afin d’analyser l’indécidabilité et la décohérence comme des structures internes de la théorie, plutôt que comme des limitations externes. La logique intuitionniste du topos localise l’indécidabilité par slicing et booléanisation locale, tandis que la densité ρ des CFS encode les corrélations fermioniques dont émergent les paramètres effectifs de cohérence (temps, métrique, constantes cosmologiques).

Nous introduisons des invariants quantitatifs (pureté, entropie, interférences, complexité, signatures CFS) et des équations effectives (influence fonctional, maîtres GKSL, contraintes faibles) qui permettent de caractériser les transitions de phase de la décohérence. Ces transitions sont reliées à des accidents topologiques dans les corrélations CFS et fournissent une interprétation nouvelle du lien entre complexité computationnelle et émergence du temps.

Ce point de vue se distingue de la Loop Quantum Gravity, qui impose une granularité via les réseaux de spins, et de la théorie des cordes, où le paysage de vacua reflète une indécidabilité massive. Ici, l’indécidabilité est structurante et générative, et son franchissement délimite la frontière entre régimes quantiques et classiques. Nous formulons enfin des lois falsifiables (L1–L3) et identifions des signatures observationnelles (anomalies du CMB, corrélations topologiques de la large-scale structure, ondes gravitationnelles détectées par LIGO/Virgo et futures missions), offrant un programme expérimental clair pour tester la pertinence de l’approche topos–CFS.

1 L’intuition de base : la mesure comme création

On présente souvent la mesure quantique comme un « effondrement » destructeur. Ici, nous adoptons une autre lecture : la mesure est un **acte de création**. Avant d’observer, plusieurs issues restent possibles (des vérités *ouvertes*). Après la mesure, une réalité se fixe : la proposition devient **décidable** (vrai/faux) dans le contexte approprié.

Cadre conceptuel. C’est comme tirer une carte d’un jeu : tant qu’on n’a pas choisi, toutes les cartes sont potentielles ; au moment du tirage, une seule devient réelle. La mesure n’« enlève » rien : elle *ajoute* une vérité au monde.

Point clé. Cet acte de création est **hors du temps externe** : il ne suppose pas d’horloge absolue. Il raffine le « paysage des vérités » disponibles, en accord avec les théories où l’équation fondamentale (comme l’équation de Wheeler–DeWitt) ne fait pas intervenir de temps global [10, 22].

Perspective. Cette intuition motive le cadre proposé : combiner la logique interne des topos et la structure causale des systèmes fermioniques (CFS) pour traiter de manière unifiée trois questions fondamentales : (i) l’indécidabilité inhérente aux théories quantiques de la gravité, (ii) la décohérence comme transition de phase informationnelle, et (iii)

l'émergence du temps comme paramètre effectif de cohérence. Nous proposons ainsi une alternative conceptuelle aux approches dominantes (Loop Quantum Gravity et théorie des cordes), dans laquelle l'indécidabilité n'est pas un défaut mais une structure fondamentale qui organise le passage du quantique au classique.

Topos : un cadre pour la logique contextuelle

L'intuition précédente — la mesure comme création d'information — demande un langage capable d'exprimer à la fois la dépendance au contexte et l'absence de vérité globale. C'est précisément ce que fournit la notion de **topos**. Un topos est une généralisation de l'univers des ensembles : on peut y faire des mathématiques « comme d'habitude », mais la logique interne n'est plus nécessairement classique, elle devient **intuitionniste**. Cela permet de modéliser des situations où certaines propositions restent *ouvertes* (ni vraies ni fausses globalement), jusqu'à ce qu'un acte de mesure les rende décidables.

Définition élémentaire

Un **topos** est un "univers de discours" où l'on peut faire des mathématiques comme dans l'ensemble des ensembles, mais avec une logique souvent **intuitionniste** (la vérité n'est pas forcément binaire partout). Intuition :

- des *objets* qui représentent des collections dépendant d'un **contexte** (point de vue) ;
- des *flèches* (morphisms) qui traduisent les changements de point de vue ;
- un **classificateur de sous-objets** Ω qui code les "valeurs de vérité" internes (Heyting plutôt que booléen pur) [14, 1].

La mesure comme morphisme de topos

Dans cette lecture, une **proposition de mesure** (par ex. « $\sigma_z = +1$ ») est un sous-objet U de l'objet d'états Σ . L'acte de mesurer se décompose en deux gestes conceptuels :

1. **Slicing/conditionnement** : on passe au *slice* \mathcal{E}/U , qui internalise « on regarde le monde *sous la condition* U » ;
2. **Localisation/booléanisation locale** : on choisit une topologie interne j_U qui rend U **décidable** dans un sous-topos $\text{Sh}_{j_U}(\mathcal{E}/U)$.

On obtient ainsi un **morphisme géométrique**

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_U^{\text{meas}} := \text{Sh}_{j_U}(\mathcal{E}/U),$$

où U devient vrai/faux localement (décidable), sans fabriquer de "vérité globale" interdite par le théorème de Kochen–Specker [11].

Information logique créée. Le gain de décidabilité se mesure par

$$\Delta I(U) := -\log \mu(U),$$

où μ est la "mesure de Born interne" (une évaluation de probabilité à l'intérieur du topos). Il s'agit d'un **gain sémantique** (raffinement de la vérité), *indépendant* d'un coût thermodynamique d'entropie [21].

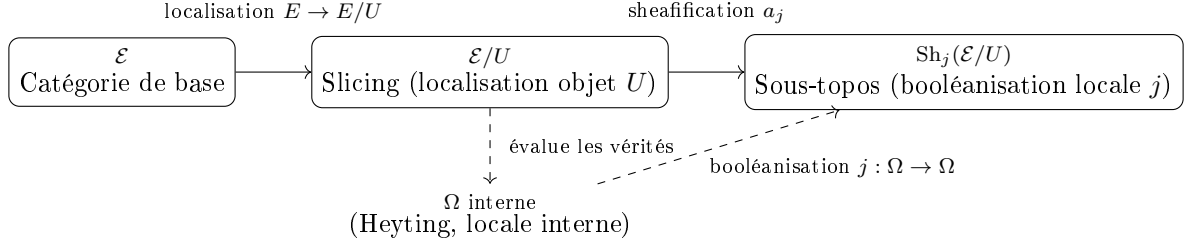


FIGURE 1 – Mesure créatrice : slicing $E \rightarrow E/U$ puis booléanisation locale j menant au sous-topos $\text{Sh}_j(\mathcal{E}/U)$.

Commentaire. On part d'une catégorie de base \mathcal{E} , que l'on localise par rapport à un objet U en formant la *slice* \mathcal{E}/U (focalisation contextuelle). La booléanisation locale j construit ensuite un sous-topos $\text{Sh}_j(\mathcal{E}/U)$ où les propositions deviennent décidables. L'objet des vérités internes Ω évalue les sous-objets ; la flèche pointillée $j : \Omega \rightarrow \Omega$ force certaines propositions indécidables à devenir décidables localement. Le sous-topos résultant héberge une mesure interne μ sur les sous-objets, qui induit des probabilités contextuelles.

Le temps et Wheeler–DeWitt : de « fort » à « faible »

Deux phrases sur Wheeler–DeWitt

L'équation de Wheeler–DeWitt est au cœur de la gravitation quantique canonique. Elle exprime l'**invariance de jauge de la relativité générale** : puisque la théorie est invariante par reparamétrisation du temps, il n'existe plus de temps global privilégié [5, 20].

Cette équation est une **contrainte forte** : elle doit être satisfaite pour tout état Ψ , qui peut être pensé comme une **fonction d'onde sur l'espace des métriques**. Autrement dit, $\Psi[h_{ij}]$ décrit la probabilité d'une configuration géométrique de l'univers, et l'équation

$$\hat{H} \Psi[h_{ij}] = 0$$

assure la cohérence de cette fonction d'onde avec la symétrie fondamentale de la relativité générale. Elle impose donc une contrainte d'**atemporalité fondamentale** : le temps classique disparaît des équations de base.

Version forte et version faible de la contrainte de Wheeler–DeWitt

En formulation *forte*, la contrainte fondamentale de la gravitation quantique canonique s'écrit

$$\hat{H} \Psi = 0,$$

valable pour tout état Ψ de l'espace des métriques. Cette égalité est comprise *point par point*, dans le cadre de la logique classique (ensembliste).

Dans une lecture *faible et contextuelle*, plus adaptée au langage des topos, on ne demande pas l'annulation stricte, mais seulement sa validité après localisation dans chaque contexte C . Formellement, pour toute fonction de test φ_C représentative du contexte, on impose

$$\int \varphi_C(x) \hat{H}(x) \Psi \, d\mu(x) = 0.$$

Autrement dit, la proposition interne

$$[\hat{H}\Psi = 0] \in \Omega(E/U)$$

n'est pas nécessairement vraie dans le topos ambiant E , mais elle devient *décidable localement* dans le sous-topos $Sh_C(E/U)$ associé au contexte C . Ainsi, la contrainte de Wheeler–DeWitt s'interprète comme une cohérence contextuelle entre points de vue, plutôt qu'une égalité globale absolue [18, 6].

Développement des contextes et algèbre de Heyting

Le développement progressif des contextes qui s'intègrent harmonieusement peut se décrire par une **algèbre de Heyting**. Cette structure n'est pas nécessairement un arbre global, sauf localement. En pratique, il existe des **rendez-vous logiques** : des situations atteignables par plusieurs chemins informationnels différents. C'est d'ailleurs cette multiplicité des voies qui explique en grande partie le succès de l'**intégrale de chemin de Feynman** [8], où l'on additionne les contributions de toutes les histoires possibles menant au même résultat observable.

Où interviennent les CFS ?

Dans les *Causal Fermion Systems* [7], la géométrie est encodée par une mesure ρ sur des opérateurs (les relations causales et spectrales sont portées par des "chaînes fermées" A_{xy}). La contrainte faible s'écrit alors comme une **stationnarité spectrale** :

$$\int \phi_C(x) (\ell_\rho(x) - \lambda) \, d\rho(x) = 0, \quad \ell_\rho(x) := \int L(x, y) \, d\rho(y),$$

où L est un lagrangien causal. Cette forme est naturelle dans un cadre où le temps émerge des **corrélations** plutôt que d'une horloge.

2 Invariants et paramètres d'ordre quantitatifs

Dans le cadre combinant Topos et CFS, la décohérence peut être caractérisée de manière opérationnelle à l'aide d'invariants quantitatifs. Ces grandeurs servent de *paramètres d'ordre* : elles indiquent le passage d'un régime indécidable, riche en corrélations, vers un régime décidable où les probabilités émergent [21, 19].

2.1 Pureté et entropie réduite

On définit la pureté et l'entropie de von Neumann de l'état réduit ρ_S par :

$$\mathcal{P} = \text{Tr}(\rho_S^2), \quad (1)$$

$$S = -\text{Tr}(\rho_S \log \rho_S). \quad (2)$$

La décohérence se traduit par une diminution de la pureté et une augmentation de l'entropie :

$$\text{Décohérence} \uparrow \Rightarrow \mathcal{P} \downarrow, S \uparrow.$$

2.2 Suppression des interférences

Dans une base pointer $\{|i\rangle\}$, on introduit la mesure d'interférence :

$$\mathcal{D} = \sum_{i \neq j} |\langle i | \rho_S | j \rangle|^2.$$

Cet invariant décroît lorsque la décohérence progresse. On l'interprète comme un *paramètre d'ordre* : $\mathcal{D} \rightarrow 0$ correspond à l'extinction des interférences.

2.3 Complexité et budget computationnel

La décohérence peut également s'analyser en termes de complexité :

- *Complexité d'opérateur* : croissance des commutateurs hors-temps (OTOC) [15].
- *Complexité descriptive* : coût $K(\text{état} \mid \text{modèle})$, à la manière de Kolmogorov ou du principe de longueur minimale de description [13].

On introduit un seuil de décohérence lorsque $K > B$, où B est le budget informationnel disponible à l'observateur. Dans le langage topos, cela correspond au choix d'un foncteur de sheafification j , qui engendre des probabilités internes.

2.4 Signatures CFS

Dans le cadre des CFS, les signatures suivantes sont particulièrement pertinentes :

- Corrélateur $C(x, y) = \text{Tr} A_{xy}$ ou norme $\|A_{xy}\|$.

- Longueurs et temps de décohérence $\ell_{\text{dec}}, \tau_{\text{dec}}$ obtenus par décroissance spatiale ou temporelle de C .
- Gaps spectraux dans les opérateurs A_{xy} .
- Profil de $\ell_\rho(x) = \int L(x, y) d\rho(y)$.

Un *accident topologique* se manifeste comme un saut dans la persistance des cycles du graphe G_τ construit sur $C(x, y)$ [4].

2.5 Diagnostics homotopiques et faisceaux

On peut aussi quantifier la décohérence via des outils topologiques :

- **Cohomologie de faisceaux** : un saut de $\dim H^1$ signale un défaut de recollement (transition de régime) [2].
- **Opérateur de gluing \mathcal{G}** : une chute de rang correspond à l'émergence d'îlots « classiques » probabilistes au sein d'un fond indécidable.

2.6 Écho de Loschmidt et OTOC

Enfin, la dynamique de la décohérence se mesure par :

$$\mathcal{L}(t) = |\langle \psi | e^{iHt} e^{-i(H+\delta H)t} | \psi \rangle|^2, \quad (3)$$

$$\text{OTOC}(t) = \langle [W(t), V]^2 \rangle. \quad (4)$$

La décroissance de $\mathcal{L}(t)$ et la croissance de l'OTOC sont des indicateurs directs de la perte de cohérence et du *scrambling* de l'information [15].

De Wheeler faible aux CFS : la faiblesse comme effet de corrélation

Cadre CFS. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe, $M \subset L(\mathcal{H})$ un ensemble d'opérateurs auto-adjoints de rang borné, et ρ une mesure (dite universelle) sur M . Le *lagrangien causal* $L(x, y)$ dépend des *chaînes fermées* $A_{xy} := P(x, y)P(y, x)$ (corrélations fermioniques entre x et y). L'action causale est

$$\mathcal{S}[\rho] = \iint_{M \times M} L(x, y) d\rho(x) d\rho(y),$$

et ses équations d'Euler–Lagrange s'écrivent, de manière abstraite,

$$\delta \mathcal{S}[\rho; \delta \rho] = 0 \quad \text{pour toutes variations admissibles } \delta \rho.$$

Variations admissibles & feuillets de corrélation. Les variations $\delta \rho$ ne sont pas arbitraires : on exige qu'elles *préservent la microstructure* induite par le spectre des A_{xy} (causalité, rang, contraintes spectrales). Un modèle utile est de considérer des *push-forwards*

par des difféomorphismes $F_\varepsilon = \text{id} + \varepsilon X$ qui sont *tangents* aux feuilletts de corrélation : $\rho_\varepsilon := (F_\varepsilon)_* \rho$. Alors

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathcal{S}[\rho_\varepsilon] = \int_M \langle \nabla \ell_\rho(x), X(x) \rangle d\rho(x) = 0,$$

où $\ell_\rho(x) := \int_M L(x, y) d\rho(y)$ et X parcourt un espace restreint de champs (*variations compatibles avec les corrélations*).

Identité faible induite. Par intégration par parties (au sens ρ) dans la géométrie effective portée par les feuilletts de corrélation, on obtient une loi de conservation

$$\int_M \varphi_C(x) \mathcal{H}_{\text{eff}}[\rho](x) d\rho(x) = 0 \quad \text{pour tout test } \varphi_C \in \mathcal{D}_{\text{corr}}(C),$$

où \mathcal{H}_{eff} est l'opérateur effectif (contrainte hamiltonienne dans le continuum émergent) et $\mathcal{D}_{\text{corr}}(C)$ désigne les fonctions de test *compatibles avec la structure de corrélation* dans le contexte C (i.e. constantes le long de certaines directions « interdites » et suffisamment régulières sur les feuilles). Autrement dit, la contrainte fondamentale n'est satisfaite qu'*après test* :

$$\forall C, \int \varphi_C \mathcal{H}_{\text{eff}} d\rho = 0$$

C'est exactement la *version faible/contextuelle* du type Wheeler–DeWitt [6].

Lecture topos. Les contextes C forment une petite catégorie \mathcal{C} (p. ex. sous-objets corrélés, ou recouvrements adaptés). Le sous-topos $Sh_{j_C}(E/U_C)$ encode la logique interne où $[\mathcal{H}_{\text{eff}} = 0]$ devient *localement décidable*. L'agrégation sur les contextes s'exprime par un *coend*

$$\int^{C \in \mathcal{C}} [\mathcal{H}_{\text{eff}} = 0]_C \in \mathcal{N} \subset \Omega,$$

où \mathcal{N} est le « noyau logique » (potentiellement de mesure un) des vérités compatibles mais non globalement décidables. La « faiblesse » de Wheeler est ainsi vue comme la projection de la stationnarité CFS sur les directions de variation autorisées par les corrélations fermioniques.

Conséquence conceptuelle. Si les corrélations A_{xy} sont fortement non locales, l'espace des variations admissibles est *étroit*, et les EL-équations ne peuvent forcer qu'une *contrainte faible* (après test). La rigidité « forte » $\mathcal{H}_{\text{eff}} = 0$ ponctuelle ne réapparaît que dans des régimes où la mesure ρ est suffisamment dé-corrélée (ou localisée) pour rendre toutes les directions test admissibles.

Décohérence comme transition de phase corrélationnelle dans le cadre Topos + CFS

Origine de la décohérence

La décohérence est généralement comprise comme la perte des interférences quantiques due au couplage avec un environnement. Dans une perspective *Topos + Causal Fermion Systems (CFS)*, nous proposons une lecture structurelle plus large : la décohérence est une **transition de phase corrélationnelle**, où certaines intrications ou corrélations à longue portée deviennent inaccessibles pour un observateur à ressources finies. Cette inaccessibilité impose une **booléanisation locale** (via un opérateur de sheafification j dans le topos), et se manifeste comme une émergence des probabilités [21, 19].

Le temps usuel apparaît alors comme une grandeur effective, stabilisée par la hiérarchie des contextes où la décohérence opère. Son écosystème naturel est la relativité générale munie de la constante cosmologique [22].

Taxonomie de la décohérence

Nous distinguons plusieurs axes orthogonaux :

Origine du phénomène

1. **Environnementale** : perte d'information par couplage aux degrés de liberté extérieurs (Feynman–Vernon, GKSL) [3].
2. **Complexité-induite** : coût descriptif K dépassant le budget B de l'observateur, imposant un découpage j .
3. **Contextuelle (topos)** : choix d'un sous-topos $\text{Sh}_j(\mathcal{E})$ qui rend certaines propositions décidable [11].
4. **Gravitationnelle** : horizons (trous noirs, de Sitter), fluctuations métriques [12].
5. **Cosmologique** : expansion, constante cosmologique, transitions d'ère [16].

Par échelle

Locale (qubits, laboratoire), mésoscopique (matière condensée), cosmologique (CMB, structure à grande échelle, GW).

Par topologie corrélationnelle (CFS)

- Fusion ou séparation de composantes du support de ρ .
- Apparition/disparition de cycles robustes dans le graphe de corrélation G_τ (TDA) [4].

- Crossings spectraux dans les invariants des chaînes fermées A_{xy} .

Par réversibilité

Quasi-réversible (écho de Loschmidt élevé) versus irréversible (perte derrière un horizon opérationnel).

Invariants quantitatifs de la décohérence

Mesures standards

$$\mathcal{P} = \text{Tr}(\rho_S^2), \quad S = -\text{Tr}(\rho_S \log \rho_S), \quad (5)$$

$$\mathcal{D} = \sum_{i \neq j} |\langle i | \rho_S | j \rangle|^2. \quad (6)$$

La pureté \mathcal{P} diminue et l'entropie S augmente sous décohérence ; les interférences \mathcal{D} s'effondrent.

Complexité

Seuil de décohérence quand $K > B$ (complexité descriptive K supérieure au budget B). La décohérence est alors l'effet d'une contrainte d'information [13].

Signatures CFS

- Corrélateur $C(x, y) = \text{Tr } A_{xy}$: décroissance spatiale/temps de corrélation $\ell_{\text{dec}}, \tau_{\text{dec}}$.
- Crossings spectraux des A_{xy} .
- Fonctionnelle d'énergie $\ell_\rho(x) = \int L(x, y) d\rho(y)$: bifurcations de crêtes.

Diagnostics topologiques (TDA/faisceaux)

- **TDA** : sauts des nombres de Betti β_k dans G_τ [4].
- **Cohomologie de faisceaux** : $\dim H^1$ en hausse = défaut de recollement [2].
- **Opérateur de gluing** \mathcal{G} : perte de rang = transition.

Échos et scrambling

$$\mathcal{L}(t) = |\langle \psi | e^{iHt} e^{-i(H+\delta H)t} | \psi \rangle|^2, \quad (7)$$

$$\text{OTOC}(t) = \langle [W(t), V]^2 \rangle. \quad (8)$$

La décohérence s'accompagne d'un effondrement de \mathcal{L} et d'une croissance de l'OTOC (scrambling) [15].

Décohérence comme transition de phase

On introduit un paramètre de contrôle λ (couplage environnement, amplitude Λ , budget B). Un accident de décohérence est détecté par un changement brusque de l'un des invariants ci-dessus. Dans CFS, il correspond à un accident topologique du graphe de corrélations ou à un crossing du spectre des A_{xy} .

Temps émergent et relativité générale

Le temps usuel émerge comme paramètre de cohérence effective : il stabilise les trajectoires pointer issues de la booléanisation locale. La relativité générale est alors vue comme une théorie effective valide dans la région décidable. La constante cosmologique agit comme une source de bruit gravitationnel de fond (température de Gibbons–Hawking [9]), garantissant un taux minimal de décohérence à grande échelle.

Conséquences

Dans le cadre Topos + CFS, la décohérence est une transition de phase riche et structurée, dont on peut proposer une taxonomie et des invariants quantitatifs. Elle relie directement la structure des corrélations microscopiques à l'émergence des probabilités, du temps et de la relativité générale. Ainsi, les accidents topologiques de ρ deviennent la clé pour comprendre la genèse des régimes effectifs de la physique observable.

3 Équations effectives (interfaces de calcul)

3.1 Influence functional (Feynman–Vernon)

L'influence de l'environnement s'intègre via des noyaux de bruit et de dissipation, définissant un taux effectif γ . Dans le cadre des CFS, ce taux peut s'exprimer à partir des corrélations A_{xy} ou de la mesure ρ :

$$\gamma \sim \int \mathcal{K}[A_{xy}] d\rho(x) d\rho(y),$$

où \mathcal{K} est un fonctionnel (à calibrer) des spectres et des gaps [3].

3.2 Équation maîtresse GKSL

L'évolution de l'état réduit suit :

$$\dot{\rho}_S = -i[H_{\text{eff}}, \rho_S] + \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} (L_{\alpha} \rho_S L_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{L_{\alpha}^{\dagger} L_{\alpha}, \rho_S\}).$$

Les opérateurs L_{α} représentent les observables pointer associées aux feuillets de corrélation, et les coefficients Γ_{α} sont des fonctionnelles des A_{xy} [3].

3.3 Version faible et contextuelle (topos)

Pour chaque contexte C ,

$$\int \phi_C \mathcal{H}_{\text{eff}}[\rho] d\rho = 0,$$

et la probabilité interne d'un événement U est donnée par $\mu_C(U)$. La décohérence correspond alors au choix d'un j_C (booléanisation locale), entraînant la perte des termes d'interférence dans μ_C [11].

4 Diagramme de phase de la décohérence

On introduit un paramètre de contrôle λ (couplage environnemental, taux d'expansion, amplitude Λ , budget B). Les observables $\{\mathcal{P}, \mathcal{D}, \ell_{\text{dec}}, \tau_{\text{dec}}, \dim H^1, \text{persist}\}$ permettent de tracer la transition :

- rupture non-analytique ou cross-over,
- en CFS : coïncidence avec un accident topologique du graphe G_{τ} ou un crossing du spectre des A_{xy} [4].

5 Temps émergent et rôle de Λ

Le temps usuel apparaît comme un paramètre de cohérence effective, stabilisé par la hiérarchie des découpages j . La relativité générale s'interprète comme une théorie effective dans la région décidable (où les contraintes faibles s'alignent en géodésiques) [22]. La constante cosmologique Λ agit comme un bruit gravitationnel de fond (horizon, température de Gibbons–Hawking [9]), imposant un taux minimal τ_{dec}^{-1} à grande échelle.

6 Cartes et observables cosmologiques

- **Lensing (faible/fort)** : un accroissement de $\Delta \text{persist}(\beta_1)$ implique des anomalies locales de la convergence κ (arcs, flux ratios).

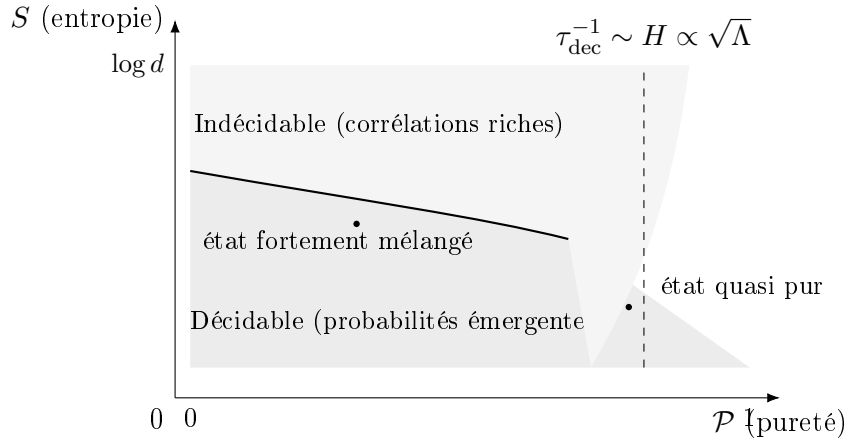


FIGURE 2 – Diagramme de phase de la décohérence.

Commentaire. L'axe horizontal correspond à la pureté $\mathcal{P} = \text{Tr}(\rho_S^2)$ (de 0 à 1), l'axe vertical à l'entropie $S = -\text{Tr}(\rho_S \log \rho_S)$ (de 0 à $\log d$).

La zone claire en haut à droite correspond au régime *indécidable*, où la pureté reste élevée et les corrélations quantiques sont riches : la logique interne est non booléenne et les probabilités classiques ne sont pas encore définies globalement. La zone plus sombre en bas à gauche correspond au régime *décidable*, où les interférences disparaissent ($\mathcal{D} \rightarrow 0$) et les contextes convergent vers une description probabiliste classique.

La courbe épaisse qui sépare ces régions illustre une transition de phase de décohérence, interprétée comme la manifestation d'accidents topologiques dans la structure des corrélations CFS (sauts de persistance dans les graphes G_τ).

La ligne verticale en tirets rappelle le rôle de la constante cosmologique Λ : même les états très purs subissent une décohérence minimale induite par le bruit gravitationnel de fond ($\tau_{\text{dec}}^{-1} \sim H \propto \sqrt{\Lambda}$).

Les marqueurs ponctuels représentent des états types : un état quasi pur (encore indécidable), et un état fortement mélangé (décidable).

- **Structure à grande échelle (LSS)** : cycles persistants \leftrightarrow filaments/vides ; décohérence \leftrightarrow gaussianisation locale (kurtosis \downarrow , skewness $\rightarrow 0$).
- **CMB / lensing CMB** : défauts de recollement \Rightarrow excès locaux dans $C_\ell^{\phi\phi}$.
- **Ondes gravitationnelles (GW)** : transitions de phase \Rightarrow bosses dans $\Omega_{\text{GW}}(f)$ et échanges de modes quasi-normaux.

7 Pipeline opératoire

1. Construire G_τ sur $C(x, y) = \text{Tr } A_{xy}$ (ou $\|A_{xy}\|$).
2. Appliquer l'analyse topologique (TDA) : barcodes, persistance $\beta_k(\tau)$ [4].
3. Étudier les contraintes de recollement de faisceaux sur un recouvrement $\{C\}$; suivre $\dim H^1$ [2].
4. Calculer les invariants $\{\mathcal{P}, \mathcal{D}, \ell_{\text{dec}}, \tau_{\text{dec}}, \text{OTOC}, \mathcal{L}(t)\}$.
5. Balayer λ (ou Λ, B) et détecter les ruptures.
6. Mapper les résultats vers les observables cosmologiques $(\kappa, C_\ell, \Omega_{\text{GW}})$ et comparer aux données.

8 Trois lois falsifiables

- L1 (Seuil de complexité).** Il existe B^\star tel que si $K > B^\star$, alors $\mathcal{D} \rightarrow 0$ et $\dim H^1 \uparrow$ (décohérence par complexité) [13].
- L2 (Accident CFS \Rightarrow signature).** Un saut robuste de persistance dans G_τ précède une variation observable $(\kappa, C_\ell^{\phi\phi}, \text{pic de } \Omega_{\text{GW}})$ [4].
- L3 (Λ -décohérence).** À grande échelle, τ_{dec}^{-1} admet un plancher contrôlé par Λ , testable par les cartes de lensing à grande échelle [9].

9 Mesure interne, cohérence et exemple jouet

9.1 Born et mesure interne dans le topos

Soit $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une algèbre de von Neumann. Les contextes V sont ses sous-algèbres abéliennes ; leurs spectres de Gelfand Σ_V forment le *spectral presheaf* $\underline{\Sigma}$. À toute projection $P \in \mathcal{N}$ on associe sa daseinisation extérieure $\delta_V^o(P) \subseteq \Sigma_V$, clopen dans chaque contexte V , ce qui définit un sous-objet clopen $\underline{\delta^o(P)} \subseteq \underline{\Sigma}$.

Un état ρ induit une mesure interne sur les clopens par

$$\mu_\rho(\underline{U}) = \text{tr}(\rho E_{\underline{U}}),$$

où $E_{\underline{U}}$ est la projection correspondant à \underline{U} (via la traduction projection \leftrightarrow clopen par daseinisation). Restreinte à un contexte V , μ_ρ coïncide avec la règle de Born classique sur Σ_V .

9.2 Axiomes de cohérence (valuation intuitionniste)

Sur la Heyting-algèbre des clopens $\text{Sub}_{\text{cl}}(\Sigma)$, une mesure interne est une valuation μ telle que : (i) $\mu(\perp) = 0$, $\mu(\top) = 1$; (ii) $U \leq V \Rightarrow \mu(U) \leq \mu(V)$; (iii) $\mu(U \vee V) + \mu(U \wedge V) = \mu(U) + \mu(V)$; (iv) $\mu(\bigvee_{i \in I} U_i) = \sup_{J \in I} \mu(\bigvee_{i \in J} U_i)$ pour toute famille dirigée (U_i) ; (v) naturalité sous les restrictions de contexte. Ces conditions remplacent la σ -additivité classique par une continuité dirigée adaptée à la logique intuitionniste.

9.3 Lien avec Gleason et cas 2D

Pour $\dim \mathcal{H} \geq 3$, toute mesure finiment additive sur la lattice des projections (et régulière) provient d'un état (théorème de Gleason). Via la daseinisation $P \mapsto \underline{\delta^o(P)}$, on obtient $\mu_\rho(\underline{\delta^o(P)}) = \text{tr}(\rho P)$, qui vérifie les axiomes précédents. En dimension 2, on utilise l'extension de type Busch–Gleason (POVMs) ou une hypothèse de régularité afin de reconstruire ρ .

9.4 Exemple jouet : qubit et interaction entre contextes

Soit $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$. Le contexte $C_{\vec{n}}$ est l'algèbre abélienne engendrée par $\sigma_{\vec{n}}$. Pour la proposition $P_+^{(\vec{n}_0)} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{n}_0 \cdot \vec{\sigma})$:

$$\mu_\rho(\underline{\delta^o(P_+^{(\vec{n}_0)})}) = \text{tr}(\rho P_+^{(\vec{n}_0)}) = \frac{1 + \vec{r} \cdot \vec{n}_0}{2}.$$

Vue dans $C_{\vec{n}}$, la daseinisation fournit une probabilité $\mu_\rho^{(\vec{n})} = \frac{1 + \vec{r} \cdot \vec{n}}{2}$, qui dépend de l'angle entre \vec{n} et \vec{n}_0 . On peut quantifier l'interaction entre contextes par

$$\mathcal{I}(C_{\vec{n}}, C_{\vec{m}} \mid \underline{\delta^o(P_+^{(\vec{n}_0)})}) := \left| \log \frac{1 + \vec{r} \cdot \vec{m}}{1 + \vec{r} \cdot \vec{n}} \right|,$$

ou via la distance de Jensen–Shannon entre les distributions binaires correspondantes. La calibration de $\Delta I(U) = -\log \mu_\rho(U)$ est alors immédiate dans chaque contexte.

10 Positionnement par rapport aux approches existantes

10.1 Loop Quantum Gravity (LQG)

L'approche topos–CFS peut être comparée à la gravité quantique à boucles (LQG), développée notamment par Rovelli [22, 23] et Ashtekar [24, 25]. La LQG impose une discrétisation du temps et de l'espace via des réseaux de spins géométriques, alors que notre

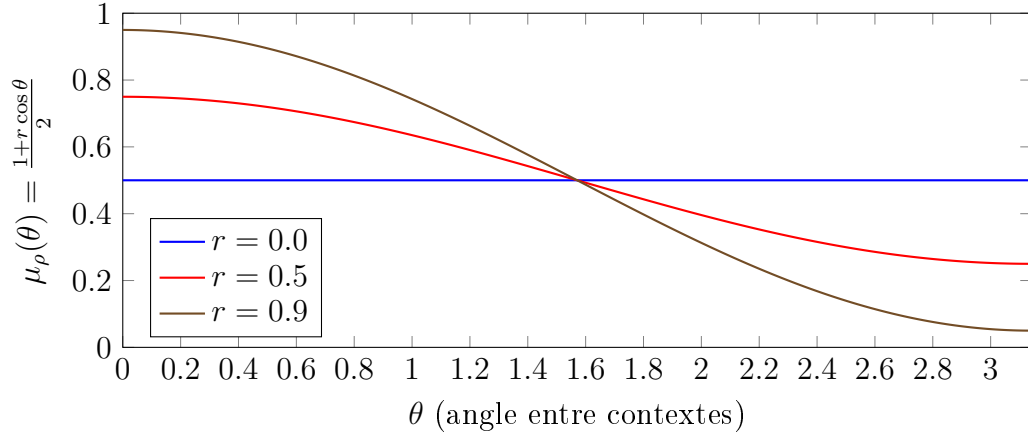


FIGURE 3 – Qubit : probabilité $\mu_\rho(\theta)$ en fonction de l'angle entre contextes.

Commentaire. On considère un état de qubit $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$, représenté par son vecteur de Bloch \vec{r} . Pour un contexte $C_{\vec{n}}$ correspondant à la mesure de spin le long de la direction \vec{n} , la probabilité d'obtenir $+1$ est donnée par la règle de Born : $\mu_\rho(\theta) = \frac{1+r \cos \theta}{2}$, où θ est l'angle entre \vec{r} et \vec{n} . Plus l'état est pur ($r \rightarrow 1$), plus $\mu_\rho(\theta)$ varie fortement avec θ , signalant une forte dépendance contextuelle. En revanche, pour un état totalement mélangé ($r = 0$), la probabilité reste constante $\mu_\rho = 1/2$, indépendamment de la base de mesure.

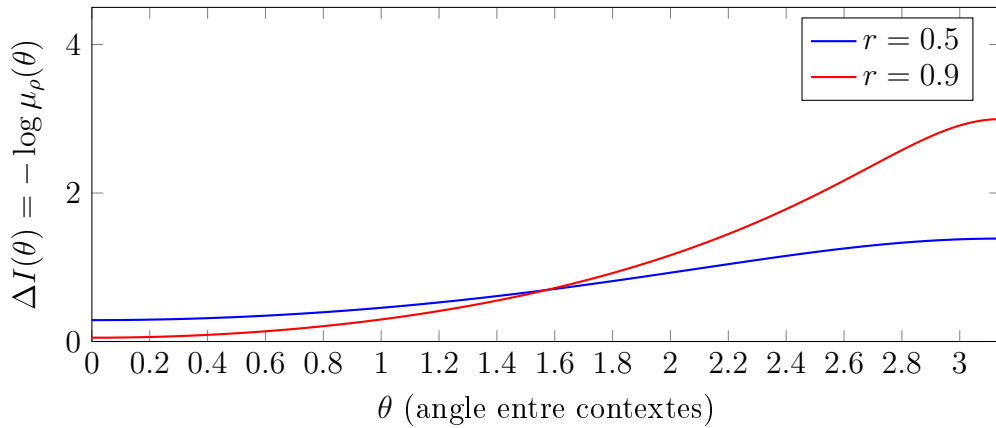


FIGURE 4 – Qubit : gain d'information $\Delta I(\theta) = -\log \mu_\rho(\theta)$.

Commentaire. La deuxième figure représente le *gain d'information* $\Delta I(\theta) = -\log \mu_\rho(\theta)$. L'écart de ΔI entre deux contextes $C_{\vec{n}}$ et $C_{\vec{m}}$ mesure ainsi l'*interaction contextuelle*. Quand μ_ρ devient très petit, ΔI diverge, signalant un événement improbable et donc fortement informatif. Cet indicateur quantifie combien la logique interne (Heyting) varie selon le choix de contexte, et comment la booléanisation locale j conduit progressivement à une stabilisation probabiliste.

contrainte faible reste *atemporelle*, enracinée dans la logique contextuelle et la daseinisation des observables.

Un point crucial est que la LQG se confronte à l'*indécidabilité globale* (paradoxe de la mesure, difficulté à extraire une dynamique unifiée), tandis que le cadre topos–CFS localise cette indécidabilité grâce au slicing \mathcal{E}/U et à la booléanisation contextuelle. Les signatures CFS fournissent une alternative potentiellement testable aux lacets de spin, ouvrant la possibilité d'examiner les corrélations fermioniques dans les données gravitationnelles (e.g. LIGO/Virgo [28]).

10.2 Théorie des cordes

La théorie des cordes souffre de la prolifération des vacua (le *landscape*) [26, 27], interprétée ici comme une *indécidabilité massive*. Alors que les cordes visent une vérité globale à travers des compactifications, l'approche topos–CFS considère l'indécidabilité comme une structure fondamentale : elle appartient au noyau toposique et n'est pas un défaut contingent.

Le lien entre l'énergie noire et la « frontière décidable » est une hypothèse féconde : le seuil de décohérence $\tau_{\text{dec}} \sim 1/\sqrt{\Lambda}$ serait directement relié à la constante cosmologique. Enfin, la possibilité que les CFS produisent des signatures topologiques (absentes dans les cordes) ouvre la voie à des tests observationnels, par exemple à travers les anomalies du CMB (Planck [29], Simons Observatory [30]).

Conclusion

Nous avons proposé un cadre combinant topos et systèmes fermioniques causaux (CFS) afin de décrire la décohérence et l'indécidabilité comme des structures internes, plutôt que comme des limitations extérieures de la théorie. La logique intuitionniste du topos permet de localiser l'indécidabilité via le slicing \mathcal{E}/U , tandis que la densité ρ des CFS encode les corrélations fermioniques qui façonnent les signatures observables. Dans cette perspective, le temps usuel émerge comme un paramètre de cohérence effective, et la relativité générale se lit comme une théorie effective dans la région décidable.

Ce cadre se distingue de la Loop Quantum Gravity (où la granularité est imposée par les réseaux de spins) et de la théorie des cordes (où le paysage de vacua reflète une indécidabilité massive). Ici, l'indécidabilité est une structure fondamentale et productive, qui organise le passage du quantique au classique par des transitions de phase topologiques. Le seuil de décohérence $\tau_{\text{dec}} \sim 1/\sqrt{\Lambda}$ relie directement cette dynamique à la constante cosmologique, ouvrant une piste pour lier l'énergie noire et l'émergence du temps.

Enfin, nous avons formulé des lois falsifiables (L1–L3) et identifié des signatures observables : anomalies du CMB, corrélations topologiques de la large-scale structure, et motifs dans les ondes gravitationnelles (LIGO/Virgo, futures missions spatiales). Ces pistes four-

nissent un programme expérimental clair, permettant de tester si la structure topos–CFS constitue bien une alternative viable et prédictive aux approches traditionnelles de la gravité quantique.

Appendix A. Valuation intuitionniste & Born interne

A.1 Valuation intuitionniste \Rightarrow cohérence faible de WDW

Soit $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une algèbre de von Neumann, et $\underline{\Sigma}$ le spectral presheaf sur la catégorie des contextes $V \subset \mathcal{N}$ abéliens. Sur la Heyting-algèbre des clopens $\text{Sub}_{\text{cl}}(\underline{\Sigma})$, une *valuation* est une application $\mu : \text{Sub}_{\text{cl}}(\underline{\Sigma}) \rightarrow [0, 1]$ vérifiant : (i) $\mu(\perp) = 0$, $\mu(\top) = 1$; (ii) $U \leq V \Rightarrow \mu(U) \leq \mu(V)$; (iii) modularité $\mu(U \vee V) + \mu(U \wedge V) = \mu(U) + \mu(V)$; (iv) *continuité dirigée* (Scott-continuité) : pour toute famille dirigée (U_i) , $\mu(\bigvee_i U_i) = \sup_{J \in I} \mu(\bigvee_{i \in J} U_i)$; (v) naturalité sous les restrictions de contexte.

Lemme 1 (linéarité modulaire sur les clopens). *Pour toute famille finie (U_k) de clopens deux-à-deux disjoints, $\mu(\bigvee_k U_k) = \sum_k \mu(U_k)$.*

Démonstration. Par récurrence en utilisant (iii) et disjonction ($U_i \wedge U_j = \perp$ pour $i \neq j$). \square

Considérons la contrainte faible de Wheeler–DeWitt (WDW) écrite dans un contexte C comme

$$\int \phi_C(x) \hat{H}(x) \Psi d\mu(x) = 0,$$

où l'intégrale est l'intégration interne par rapport à la valuation μ . En représentant ϕ_C et les projecteurs spectrales de \hat{H} par des clopens, la linéarité modulaire assure l'additivité finie des contributions et la Scott-continuité assure la stabilité par raffinement de tests (familles dirigées de clopens). Ainsi, la validité de la contrainte dans tout contexte C est stable par raffinement et recollement : c'est la *cohérence faible*. \square

A.2 Mesure de Born interne par daseinisation et lien avec Gleason

À toute projection $P \in \mathcal{N}$ on associe sa daseinisation extérieure $V \mapsto \delta_V^o(P)$, clopen de Σ_V , qui assemble un sous-objet clopen $\underline{\delta^o(P)} \subset \underline{\Sigma}$. Soit ρ un état normal sur \mathcal{N} . On définit la mesure interne induite

$$\mu_\rho(\underline{U}) := \text{tr}(\rho E_{\underline{U}}),$$

où $E_{\underline{U}}$ est la projection correspondant à \underline{U} par la traduction projection \leftrightarrow clopen. Alors pour toute projection P ,

$$\mu_\rho(\underline{\delta^o(P)}) = \text{tr}(\rho P),$$

c'est-à-dire la règle de Born, vue à travers les contextes. Pour $\dim \mathcal{H} \geq 3$, la mesure finiment additive sur la lattice des projections qui vérifie les conditions de régularité est donnée par un état ρ (théorème de Gleason). La construction ci-dessus transporte alors Born vers une valuation interne satisfaisant (i)–(v). En dimension 2, on utilise l'extension de type Busch–Gleason (POVMs) ou une hypothèse de régularité pour reconstruire ρ . \square

Références

- [1] J. L. Bell, *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*, Polimetrica, 2005.
- [2] G. E. Bredon, *Sheaf Theory*, Springer, 1997.
- [3] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press, 2002.
- [4] G. Carlsson, *Topological Data Analysis*, Annual Review of Statistics, 2020.
- [5] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*, Phys. Rev. 160, 1967.
- [6] B. Dittrich, *Partial and Complete Observables for Canonical General Relativity*, Class. Quant. Grav., 2007.
- [7] F. Finster, *The Continuum Limit of Causal Fermion Systems*, arXiv :1605.04742, 2016.
- [8] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965.
- [9] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, *Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation*, Phys. Rev. D, 1977.
- [10] C. J. Isham, *Topos Theory and Consistent Histories : The Internal Logic of the Set of All Consistent Sets*, Int. J. Theor. Phys., 2003.
- [11] C. J. Isham, J. Butterfield, *Topos Perspective on the Kochen-Specker Theorem*, Int. J. Theor. Phys., 1998.
- [12] C. Kiefer, *Quantum Gravity*, Oxford University Press, 2012.
- [13] M. Li, P. M. B. Vitányi, *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*, Springer, 2008.
- [14] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer, 1992.
- [15] J. Maldacena, S. H. Shenker, D. Stanford, *A Bound on Chaos*, JHEP, 2016.
- [16] T. Padmanabhan, *Decoding the Universe*, Cambridge University Press, 2010.
- [17] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, 2004.
- [18] C. Rovelli, *Forget Time*, Found. Phys., 2011.

- [19] M. Schlosshauer, *Decoherence and the Quantum-To-Classical Transition*, Springer, 2007.
- [20] J. A. Wheeler, *Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics*, in Battelle Rencontres, 1968.
- [21] W. H. Zurek, *Decoherence, Einselection, and the Quantum Origins of the Classical*, Rev. Mod. Phys., 2003.
- [22] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge University Press (2004).
- [23] C. Rovelli and F. Vidotto, *Covariant Loop Quantum Gravity : An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*, Cambridge University Press (2014).
- [24] A. Ashtekar, “New Variables for Classical and Quantum Gravity,” *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244 (1986).
- [25] A. Ashtekar and J. Lewandowski, “Background independent quantum gravity : A status report,” *Class. Quant. Grav.* **21**, R53–R152 (2004).
- [26] M. R. Douglas, “The statistics of string/M theory vacua,” *JHEP* **05**, 046 (2003).
- [27] F. Denef and M. R. Douglas, “Distributions of flux vacua,” *JHEP* **05**, 072 (2008).
- [28] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,” *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [29] Planck Collaboration, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020).
- [30] Simons Observatory Collaboration, “The Simons Observatory : Science goals and forecasts,” *JCAP* **2019**, no. 02, 056 (2019).