Faisceau spectral, topos de Grothendieck et morphismes géométriques (avec diagrammes)

1 Le faisceau spectral en mécanique quantique

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann (par exemple $B(\mathcal{H})$, les opérateurs bornés sur un espace de Hilbert). On définit la catégorie des *contextes* $\mathcal{V}(\mathcal{A})$:

— objets : sous-algèbres abéliennes maximales $V \subseteq \mathcal{A}$,

— morphismes : inclusions $i_{V'V} : V' \hookrightarrow V$.

Pour chaque V, on associe son spectre de Gelfand $\Sigma(V)$ (espace compact de caractères $V \to \mathbb{C}$).

On définit le *faisceau spectral* (plus précisément un préfaisceau)

$$\Sigma : \mathcal{V}(\mathcal{A})^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}, \qquad \Sigma(V) = \mathrm{Spec}(V), \quad \Sigma(i_{V'V})(\lambda) = \lambda|_{V'}.$$

Il vit dans le topos des préfaisceaux

$$\widehat{\mathcal{V}(\mathcal{A})} := \mathbf{Set}^{\mathcal{V}(\mathcal{A})^{op}}.$$

En logique topos, le faisceau spectral joue le rôle d'« espace d'états généralisé » : il n'a pas de section globale (théorème de Kochen–Specker), seulement des sections locales.

2 Morphismes géométriques

Un *morphisme géométrique* entre topos $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est donné par une adjonction

$$f^* \dashv f_* \quad \text{avec} \quad f^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E} \text{ exact à gauche}, \ f_* : \mathcal{E} \to \mathcal{F},$$

et l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(f^*X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(X, f_*Y).$$

Cela généralise les applications continues $f : X \to Y$ qui induisent $f : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y)$.

3 Cribles et topos de Grothendieck

Soit $\mathcal{C}$ petite et $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Un *crible* S sur c est un ensemble de flèches $d \to c$ fermé par précomposition. Une topologie de Grothendieck J associe à chaque c des cribles *couvrants*. Un préfaisceau $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ est un faisceau si toute famille compatible indexée par un crible couvrant se recolle en une section unique. Un *topos de Grothendieck* est la catégorie des faisceaux sur un site $(\mathcal{C}, J)$.

4 Exemple concret : restriction de contextes et transport du prefaisceau spectral

Soit $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{A})$ une sous-catégorie de contextes (p. ex. ceux accessibles expérimentalement), et $i : \mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{V}(\mathcal{A})$ l'inclusion. Alors i induit un morphisme géométrique entre topos de préfaisceaux :

$$i : \widehat{\mathcal{W}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{A})}.$$

Le foncteur image inverse i^* agit par *restriction* sur les objets, en particulier

$$i^*(\Sigma) = \Sigma|_{\mathcal{W}}.$$

Diagrammes

(1) Inclusion de sites.

$$\mathcal{W} \xhookrightarrow{\ i\ } \mathcal{V}(\mathcal{A})$$

(2) Morphisme géométrique induit (adjonction).

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{W}} \arrow[r, bend left, "i^*"] & \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{A})} \arrow[l, bend left, "i_*"] \end{tikzcd} \qquad \text{avec } i^* \dashv i_*.$$

(3) Action sur le prefaisceau spectral.

$$\begin{tikzcd} \Sigma \in \widehat{\mathcal{V}(\mathcal{A})} \arrow[d, mapsto, "i^*"] \\ i^*\Sigma = \Sigma|_{\mathcal{W}} \in \widehat{\mathcal{W}} \end{tikzcd}$$

Lecture physique

Restreindre les contextes revient à limiter les observables disponibles ; le morphisme géométrique assure la cohérence de la logique interne lors de ce passage, et le prefaisceau spectral se transporte naturellement par i^*.

Résumé. Le *faisceau spectral* encode l'état contextuel via les spectres de Gelfand. Les *morphismes géométriques* sont les bonnes flèches entre topos (adjonction $i^* \dashv i_*$). Les *cribles* fondent la notion de faisceau sur un site. Dans l'exemple quantique, l'inclusion i restreint Σ en $\Sigma|_{\mathcal{W}}$.