Complexité computationnelle et émergence spatio-temporelle : une approche géométrique

Olivier Croissant

Août 2025

Abstract

Nous proposons une approche de la complexité computationnelle comme ingrédient fondamental de l'émergence de la géométrie spatio-temporelle. En intégrant les perspectives de la théorie de l'information, des systèmes dynamiques géométriques, et des théories quantiques de l'espace-temps (notamment les travaux de Finster et Miranda), nous posons les bases d'une structure computationnelle universelle où la complexité devient un invariant dynamique, topologique et asymptotique.

1 Introduction

L'émergence de l'espace-temps est aujourd'hui envisagée non plus comme un axiome, mais comme une conséquence d'une dynamique plus fondamentale, potentiellement informationnelle ou computationnelle. Dans cette optique, nous proposons de définir une notion géométrique de la complexité computationnelle qui joue un rôle analogue à celui de l'action dans les théories physiques.

2 Machines de Turing et le Cantor bidimensionnel

Eva Miranda et ses collaborateurs ont démontré une correspondance bijective entre les configurations d'une machine de Turing et les points d'un sous-ensemble du Cantor bidimensionnel. Le Cantor bidimensionnel, défini comme un produit d'ensembles de Cantor $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, est un espace topologique totalement discontinu mais non dénombrable, qui peut contenir une richesse structurelle suffisante pour coder une dynamique computationnelle complète.

Dans ce cadre, chaque configuration d'une machine de Turing (état, position de la tête de lecture, contenu de la bande) peut être injectée de manière biunivoque dans un point du Cantor bidimensionnel, à l'aide de fonctions de codage continues. Inversement, la dynamique du calcul est représentée comme une transformation continue (ou localement affine) sur cet espace. Ainsi, le calcul n'est plus vu comme une séquence discrète d'états, mais comme une trajectoire continue dans un espace topologique abstrait.

Ce résultat permet de reformuler les calculs de Turing dans un cadre géométrique, en utilisant les outils de la topologie dynamique, des systèmes de Bratteli–Vershik, ou des feuilletages singuliers. Cette approche ouvre la voie à la simulation de comportements computationnels via des systèmes dynamiques géométriques.

3 Complexité comme volume symplectique

Suivant les travaux d'Eva Miranda et d'autres, nous proposons de modéliser un substrat computationnel à l'aide d'une variété de Poisson $(\mathcal{M}, \pi)$ ou symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$, munie d'un flot hamiltonien à singularités. La complexité computationnelle locale est alors modélisée par une fonction $C : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$C(x) = \int_{\Lambda_x} \omega, \tag{1}$$

où Λ_x est la feuille du feuilletage hamiltonien passant par x.

4 Universalité et modèles de calcul géométriques

Certains systèmes dynamiques géométriques (feuilletages singuliers, bifurcations de type focus-focus) sont Turing-universels. La complexité associée à ces structures est donc une *complexité universelle*, dépassant potentiellement les limites des machines de Turing ou même des ordinateurs quantiques standard. Nous adoptons ici une perspective inspirée des "Topological Kleene Field Theories" (TKFT), où le calcul est inhérent à la topologie du substrat.

5 Indice asymptotique et dimension effective

Nous proposons de caractériser la dimension de l'espace-temps comme une valeur asymptotique extraite d'un indice topologique ou spectral. Par exemple, en partant d'une suite de graphes computationnels $\{G_N\}$ avec un opérateur de type Dirac D_N, on peut définir :

$$\mathrm{Ind}(D_N) \sim c \cdot N^{d_{\mathrm{eff}}/k}, \tag{2}$$

et en déduire la dimension effective d_{eff} dans la limite $N \to \infty$. Ceci est en accord avec des approches spectrales à la Connes ou des expansions de type Seeley–DeWitt.

6 Vers une métrique informationnelle

La distance entre deux régions peut être reconstruite à partir de l'information mutuelle ou de la covariance des observables. Par exemple :

$$ds^2(A, B) = \lim_{\kappa \to \infty} \frac{\log I(A, B)}{\kappa}, \tag{3}$$

où $I(A, B)$ est l'information mutuelle entre les régions A et B, et κ la borne de complexité.

7 Conclusion et perspectives

Cette approche permet de poser des fondations computationnelles à l'espace-temps, où la complexité, la dimension et la métrique sont des invariants asymptotiques issus d'une dynamique géométrique. La suite de ce programme consiste à : (1) formaliser les TKFT, (2) construire un triplet spectral sur les substrats computationnels, (3) extraire des observables physiques via quantification à la Miranda.

References

[1] E. Miranda, *Complexity of the Universe: symplectic and Poisson perspectives*, 2020.

[2] E. Miranda, V. Guillemin, and A. Ratiu, *Geometric models of computation: from classical mechanics to Turing machines and beyond*, Notices of the AMS, 2019.

[3] E. Miranda et al., *Topological and symplectic methods in computation*, to appear.

[4] Eva Miranda and coauthors, *Geometric models of computation: from classical mechanics to Turing machines and beyond*, Notices of the AMS, 2019.