

Vers une équation de Wheeler–DeWitt faible dans le cadre des Causal Fermion Systems et des topos de points de vue

1^{er} septembre 2025

Résumé

Nous proposons une reformulation de l'équation de Wheeler–DeWitt, non pas comme une équation différentielle fonctionnelle forte sur l'espace des métriques, mais comme une contrainte *faible et contextuelle*. Cette perspective s'appuie à la fois sur le cadre des *Causal Fermion Systems* (CFS), où la géométrie est remplacée par une mesure universelle sur un espace d'opérateurs, et sur la logique des *topos*, où la vérité et les états physiques deviennent intrinsèquement contextuels. L'équation de Wheeler–DeWitt faible devient ainsi une condition de stationnarité spectrale sur des mesures, assurant la cohérence entre contextes.

1 Introduction

Dans la formulation ADM de la relativité générale, la gravitation est interprétée comme une *géométrie dynamique*, et la fonction d'onde géométrodynamique $\Psi[h_{ij}]$ satisfait l'équation de Wheeler–DeWitt

$$\hat{H} \Psi[h_{ij}] = 0, \quad (1)$$

qui est une contrainte hamiltonienne quantique. Cette équation est *forte* : elle est définie comme équation différentielle fonctionnelle sur l'espace infini-dimensionnel des métriques h_{ij} .

Cependant, deux difficultés apparaissent :

- la définition rigoureuse des opérateurs différentiels fonctionnels est problématique,
- la logique interne de la mécanique quantique suggère que les contraintes dynamiques sont toujours *contextuelles*.

Les CFS et la logique des topos offrent une voie alternative : remplacer les contraintes fortes par des contraintes *faibles*, exprimées comme des égalités intégrales sur les corrélations spectrales définies par la mesure universelle ρ .

Par *version faible*, on entend une condition obtenue après couplage à des tests : au lieu de demander $\hat{H}\Psi = 0$ partout, on impose

$$\int \Psi^* \hat{H} \Psi \mathcal{T} = 0 \quad \text{pour toute observable-test } \mathcal{T} \text{ autorisée.} \quad (2)$$

L'espace des tests sera organisé contextuellement ci-dessous.

2 Topos des contextes

Considérons une catégorie \mathcal{C} des contextes :

- objets : $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, interprétés comme « points de vue » (choix local de base de spin S_x , ou sous-algèbres commutatives),
- morphismes : $u : C \rightarrow C'$, interprétés comme changements de base ou connexions de spin $D_{x,y}$.

Un *préfaisceau d'états* est un foncteur contravariant

$$\mathbf{State} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect},$$

qui à chaque contexte C associe un espace d'états $\mathbf{State}(C)$, et de même pour les observables-tests.

$$\begin{array}{ccc} C & & \mathbf{State}(C) \\ u \downarrow & & \downarrow \mathbf{State}(u) \\ C' & & \mathbf{State}(C') \end{array}$$

Le topos $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ décrit ainsi la multiplicité des points de vue, avec une logique interne intuitionniste (comme dans le faisceau spectral de la mécanique quantique).

3 Causal Fermion Systems : rappel

Dans un CFS, on part d'un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et d'une mesure universelle ρ sur un espace \mathcal{F} d'opérateurs auto-adjoints de rang fini. L'espace-temps est $M = \text{supp } \rho$. Pour $x, y \in M$, le noyau fermionique $P(x, y)$ et le produit fermé $A_{xy} = P(x, y)P(y, x)$ codent la causalité spectrale. Le lagrangien causal $L(x, y)$ définit l'action

$$S[\rho] = \iint L(x, y) \, \mathrm{d}\rho(x) \, \mathrm{d}\rho(y). \quad (3)$$

4 De Wheeler–DeWitt forte à faible

Nous associons à chaque contexte C une *densité contextuelle* de Hamiltonien, non pas comme opérateur différentiel, mais comme forme linéaire sur les tests :

$$\mathcal{H}_\rho[C] : \mathbf{Test}(C) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}_\rho[C](\varphi) := \int_M \varphi_C(x) \ell_\rho(x) \, \mathrm{d}\rho(x), \quad (4)$$

où

$$\ell_\rho(x) := \int_M L(x, y) \, \mathrm{d}\rho(y) \quad (5)$$

est la *fonction potentielle* associée au lagrangien causal.¹ La *contrainte de Wheeler–DeWitt faible contextuelle* est alors :

$$\boxed{\forall C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C}), \forall \varphi \in \mathbf{Test}(C), \quad \mathcal{H}_\rho[C](\varphi) = \lambda \int_M \varphi_C(x) \, \mathrm{d}\rho(x)} \quad (6)$$

pour une constante (contextuellement invariante) $\lambda \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\int_M \varphi_C(x) (\ell_\rho(x) - \lambda) \, \mathrm{d}\rho(x) = 0 \quad \forall (C, \varphi). \quad (7)$$

En ADM, $\hat{H}\Psi = 0$ est une contrainte différentielle forte. Nous proposons l'analogue *faible* en CFS :

$$\forall C \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C}), \forall \varphi \in \mathbf{Test}(C), \quad \int_M \varphi_C(x) (\ell_\rho(x) - \lambda) \, \mathrm{d}\rho(x) = 0, \quad (8)$$

où

$$\ell_\rho(x) = \int_M L(x, y) \, \mathrm{d}\rho(y) \quad (9)$$

est la fonction potentielle associée. Ici λ est un multiplicateur de Lagrange lié aux contraintes globales (volume, normalisation, etc.).

1. On peut incorporer les contraintes (e.g. fonctionnelle $T[\rho]$) via des multiplicateurs de Lagrange dans ℓ_ρ .

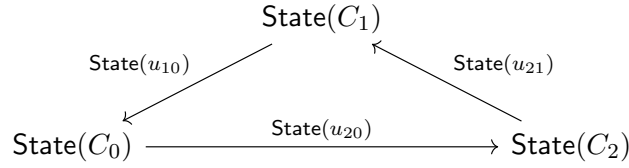
5 Exemple jouet : mini-superspace discret

Considérons un CFS de spin dimension $n = 1$, avec un support discret $M = \{x_1, \dots, x_m\}$. La mesure est $\rho = \sum_i \rho_i \delta_{x_i}$. La contrainte faible (8) devient

$$\sum_{i=1}^m \varphi_C(x_i) (\ell_\rho(x_i) - \lambda) \rho_i = 0 \quad \forall (C, \varphi). \quad (10)$$

Dans ce cas, la minimisation impose que tous les $\ell_\rho(x_i)$ coïncident (modulo λ), ce qui est exactement la stationnarité discrète des points de vue.

6 Diagramme du topos des points de vue



Les morphismes assurent la cohérence entre contextes, et la contrainte de Wheeler–DeWitt faible est une condition de *stationnarité globale* respectant ces compatibilités.

7 Comparaison avec la Wheeler–DeWitt classique

L'équation de Wheeler–DeWitt usuelle s'écrit

$$\left(-16\pi G G_{ijkl} \frac{\delta^2}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} + \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} ({}^{(3)}R - 2\Lambda) \right) \Psi[h_{ij}] = 0, \quad (11)$$

où G_{ijkl} est la super-métrie de DeWitt.

Dans la limite continue des CFS :

- la fonction potentielle $\ell_\rho(x)$ correspond à une densité hamiltonienne effective obtenue par expansion du lagrangien causal $L(x, y)$,
- l'intégrale faible

$$\int_M \varphi(x) (\ell_\rho(x) - \lambda) d\rho(x) = 0$$

reproduit la contrainte ADM intégrée contre une fonction test φ ,

- le rôle des opérateurs différentiels fonctionnels $\frac{\delta^2}{\delta h \delta h}$ est remplacé par la structure spectrale du produit fermé A_{xy} et de ses valeurs propres.

Ainsi, la version faible en CFS est un *analogue spectral* de la contrainte de Wheeler–DeWitt : elle encode la dynamique de la géométrie non pas par des dérivées fonctionnelles sur h_{ij} , mais par des conditions de cohérence sur les mesures ρ et les spectres A_{xy} , dans l'esprit de la géométrie non commutative.

8 Exemple explicite : développement court-distance et terme de courbure

Nous esquissons un calcul (heuristique) montrant comment un terme de courbure scalaire peut émerger dans $\ell_\rho(x)$ à partir du noyau bi-local.

Paramétrix court-distance

Soit y dans un petit voisinage géodésique de x , notons ξ^μ les coordonnées normales en x , et $\sigma(x, y)$ la fonction-monde de Synge. Un paramétrix (de type Hadamard) pour un noyau fermionique en espace-temps courbe prend la forme schématique

$$P(x, y) \simeq \frac{\Gamma(\xi)}{\sigma^2} \left(a_0(x, y) + a_1(x, y) \sigma + \dots \right) + m \frac{1}{\sigma} \left(b_0(x, y) + \dots \right), \quad (12)$$

où $\Gamma(\xi)$ est linéaire en $\gamma \cdot \xi$, et a_k, b_k sont reliés aux coefficients de Seeley–DeWitt (*Hadamard*). Les premières corrections contiennent la courbure, en particulier $a_1(x, x) \propto R(x)$.

Chaîne fermée et invariants spectraux

Le produit fermé $A_{xy} := P(x, y)P(y, x)$ admet alors un développement en puissances de ξ . Après moyenne angulaire sur la sphère S^3 (en dimension 4), on utilise

$$\langle \xi^\mu \xi^\nu \rangle = \frac{\xi^2}{4} \eta^{\mu\nu}, \quad \langle \xi^\mu \xi^\nu \xi^\alpha \xi^\beta \rangle = \frac{\xi^4}{24} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}). \quad (13)$$

Les invariants spectraux de A_{xy} (par ex. traces des puissances) s’expriment alors comme séries en ξ dont les coefficients locaux impliquent $R, R_{\mu\nu}$, etc.

Intégration radiale et coupure

En introduisant une coupure ultra-violette ε (rayon géodésique) et une densité locale $w(x)$ telle que $d\rho(y) \simeq w(x) d^4\xi$, on obtient, pour la fonction potentielle,

$$\ell_\rho(x) = \int L(x, y) d\rho(y) \simeq c_0 \varepsilon^{-4} + c_1 \varepsilon^{-2} R(x) + c_2 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) (\alpha_1 R^2 + \alpha_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) + \dots, \quad (14)$$

où c_0, c_1, c_2, α_i sont des constantes (dépendant des détails du paramétrix et de la définition précise de L). Le terme en $\varepsilon^{-2} R$ est l’analogue du terme d’Einstein–Hilbert (potentiel géométrique).

Lien avec Wheeler–DeWitt

En insérant ce développement dans la contrainte faible (8) et en regroupant les divergences dans une renormalisation des constantes (λ , constante cosmologique effective, etc.), on obtient, au niveau dominant,

$$\int_M \varphi_C(x) \sqrt{h(x)} (\alpha^{(3)} R(x) - 2\Lambda_{\text{eff}} + \dots) d^3x = 0, \quad (15)$$

ce qui reproduit la partie *potentielle* (courbure scalaire et cosmologique) de la contrainte de Wheeler–DeWitt, de manière *faible* (intégrée contre les tests contextuels φ_C). La partie *cinétique* (termes quadratiques en les moments canoniques via la super-métrique de DeWitt) apparaît en général dans le continuum via une analyse canonique de la dépendance non locale de $P(x, y)$ et du choix de feuilletage (au-delà de la portée de cette esquisse).

9 Perspectives physiques

Cette reformulation ouvre plusieurs pistes :

- (a) **Temps émergent.** Dans la version forte, le temps extérieur disparaît (“problème du temps”). Ici, le temps est remplacé par la cohérence entre contextes : l’ordre causal et les corrélations spectrales induisent une flèche du temps émergente.

- (b) **Invariance de jauge.** Les transformations locales $U(x) \in U(p, q)$ sur chaque fibre S_x se traduisent par des changements de point de vue. L'équation faible est naturellement invariante si les tests φ sont choisis de façon covariante, analogues aux observables gauge-invariantes.
- (c) **Décohérence et collapse.** La “discrétisation” des mesures minimisantes dans les CFS suggère un mécanisme naturel de réduction de la fonction d'onde. Dans le langage du topos, il n'y a pas de vérité globale, seulement des vérités contextuelles — ce qui rend compte du caractère relatif de la mesure et du collapse.

En somme, l'équation de Wheeler–DeWitt faible n'est pas seulement une réécriture mathématique : elle offre une interprétation conceptuelle de la dynamique comme *cohérence inter-contextes*, où causalité, temps et collapse émergent de la logique interne.

10 Conclusion

Nous avons proposé une lecture topos-théorique de Wheeler–DeWitt, où la contrainte hamiltonienne devient une condition faible de cohérence spectrale entre contextes, exprimée directement en termes de la mesure universelle d'un CFS. Cela suggère un pont naturel entre quantification de la gravité, causalité spectrale et logique intuitionniste.

Références

- [1] Arnowitt, Deser, Misner, *Canonical Variables for General Relativity*, Phys. Rev. (1962).
- [2] B. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*, Phys. Rev. (1967).
- [3] F. Finster, *Causal Fermion Systems : A Quantum Space-Time Emerging from an Action Principle*, arXiv :1102.2585.
- [4] C. Isham, A. Döring, *A Topos Foundation for Theories of Physics*, J. Math. Phys. (2007).