Wheeler–DeWitt comme contrainte faible contextuelle et reformulation en Causal Fermion Systems

Résumé

Nous esquissons une lecture *contextuelle* de l'équation de Wheeler–DeWitt : au lieu d'une équation différentielle fonctionnelle forte sur la métrique spatiale, on impose une contrainte faible formulée sur un topos de *contextes* (points de vue). Nous montrons ensuite comment l'implémenter naturellement dans le cadre des Causal Fermion Systems (CFS), où les champs fondamentaux sont remplacés par une mesure universelle ρ et des opérateurs de corrélation. La dynamique devient alors une condition de *stationnarité contextuelle* d'une forme linéaire construite à partir du lagrangien causal.

1 De la version forte à la version faible

En géométrodynamique ADM, la fonction d'onde $\Psi[h_{ij}]$ satisfait la contrainte hamiltonienne

$$\widehat{H}\,\Psi[h_{ij}] = 0, \tag{1}$$

où $\widehat{H}$ est un opérateur différentiel fonctionnel (super-métrique de DeWitt, courbure scalaire, etc.). Nous appelons cela la *version forte* (valable point par point dans l'espace des métriques).

Par *version faible*, on entend une condition obtenue après couplage à des tests : au lieu de demander $\widehat{H}\Psi = 0$ partout, on impose

$$\int \Psi^*\,\widehat{H}\,\Psi\,\mathcal{T} \;=\; 0 \qquad \text{pour toute observable-test } \mathcal{T} \text{ autorisée.} \tag{2}$$

L'espace des tests sera organisé contextuellement ci-dessous.

2 Contexte, topos et compatibilités

Considérons une petite catégorie $\mathcal{C}$ des *contextes* : objets $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, morphismes $u : C \to C'$ (restrictions, changements de base, transport via une connexion de spin). Un *préfaisceau d'états* est un foncteur contravariant

$$\mathsf{State} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}, \qquad C \mapsto \mathsf{State}(C),$$

où $\mathsf{State}(C)$ est l'espace des états/sections vus depuis C. Les *observables-tests* forment un autre préfaisceau $\mathsf{Test} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}$, et tout morphisme $u : C \to C'$ induit des maps de restriction $\mathsf{State}(u) : \mathsf{State}(C') \to \mathsf{State}(C)$ et $\mathsf{Test}(u) : \mathsf{Test}(C') \to \mathsf{Test}(C)$. Le topos $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ fournit la logique interne, *intuitionniste*.

3 Rappel minimal sur les CFS

Soit un espace de Hilbert des particules $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, et $\mathcal{F} \subset L(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs auto-adjoints de rang fini à signatures bornées. Une *mesure universelle* ρ sur $\mathcal{F}$ définit l'espace-temps $M := \operatorname{supp}\rho$. Pour $x \in M$, l'espace de spin est $S_x := x(\mathcal{H})$ (forme indéfinie). Le *noyau* *fermionique* $P(x,y) : S_y \to S_x$ et le *produit fermé* $A_{xy} := P(x,y)P(y,x) : S_x \to S_x$ encodent la causalité spectrale. Le *lagrangien causal* $L(x,y)$ et l'*action*

$$S[\rho] \;=\; \iint L(x,y)\,\mathrm{d}\rho(x)\,\mathrm{d}\rho(y)$$

sont minimisés (sous contraintes) par variation de ρ. Les changements de base locaux $U(x) \in U(p,q)$ agissent fibre par fibre S_x.

4 Wheeler–DeWitt *faible* comme stationnarité contextuelle

Nous associons à chaque contexte C une *densité contextuelle* de Hamiltonien, non pas comme opérateur différentiel, mais comme forme linéaire sur les tests :

$$\mathcal{H}_\rho[C] : \mathsf{Test}(C) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathcal{H}_\rho[C](\varphi) \;:=\; \int_M \varphi_C(x)\,\ell_\rho(x)\,\mathrm{d}\rho(x), \tag{3}$$

où

$$\ell_\rho(x) \;:=\; \int_M L(x,y)\,\mathrm{d}\rho(y) \tag{4}$$

est la *fonction potentielle* associée au lagrangien causal.[1] La *contrainte de Wheeler–DeWitt faible contextuelle* est alors :

$$\boxed{\forall\, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}),\; \forall\, \varphi \in \mathsf{Test}(C), \qquad \mathcal{H}_\rho[C](\varphi) \;=\; \lambda \int_M \varphi_C(x)\,\mathrm{d}\rho(x)} \tag{5}$$

pour une constante (contextuellement invariante) $\lambda \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\int_M \varphi_C(x)\,\big(\ell_\rho(x) - \lambda\big)\,\mathrm{d}\rho(x) \;=\; 0 \qquad \forall\,(C,\varphi). \tag{6}$$

Commentaires.

— (5) est l'analogue *faible* de la contrainte hamiltonienne : elle ne requiert aucune dérivée fonctionnelle sur un champ métrique ; elle ne demande que la stationnarité *intégrale* des corrélations spectrales.

— La naturalité dans C impose la *cohérence contextuelle* (compatibilité aux morphismes de $\mathcal{C}$).

— L'invariance locale $U(p,q)$ est préservée si Test est construit à partir d'observables qui se transforment covariamment sur les fibres S_x (p. ex. via transport par la connexion de spin).

5 Lien avec ADM et perspectives

Dans la limite continue géométrique, ℓ_ρ devient une densité hamiltonienne effective. Alors (5) reproduit la contrainte ADM *après test* sur des observables adaptées (fonctions cylindriques, régulateurs géométriques). Cette voie contourne la régularisation des opérateurs différentiels et met l'accent sur la *dynamique des points de vue* (topos), cohérente avec la causalité spectrale.

Briques techniques optionnelles. On peut raffiner (i) en ajoutant les contraintes secondaires via multiplicateurs, (ii) en remplaçant φ_C par des sections test naturelles d'un préfaisceau de densités, (iii) en utilisant une version *locale* de ℓ_ρ contrainte à un voisinage géodésique (par transport parallèle discret et chaînes A_{xy}), pour faire apparaître un analogue de courbure et le lien avec la Levi–Civita.

1. On peut incorporer les contraintes (*e.g.* fonctionnelle $T[\rho]$) via des multiplicateurs de Lagrange dans ℓ_ρ.