La correspondance AdS/CFT comme Théorème de Stokes Quantique de l'Information

Olivier Croissant

Table des matières

1 Introduction

La correspondance AdS/CFT, ou dualité jauge/gravité, est l'une des découvertes majeures de la physique théorique contemporaine [1]. Elle énonce une équivalence entre une théorie de jauge conforme en d dimensions (CFT) et une théorie gravitationnelle en $d+1$ dimensions définie sur un espace anti-de Sitter (AdS). Cette idée incarne de manière précise le *principe holographique*, selon lequel toute l'information contenue dans un volume d'espace-temps peut être encodée sur sa frontière.

L'un des moteurs historiques de cette correspondance est l'étude des **trous noirs**. Depuis les travaux de Bekenstein et Hawking, on sait que l'entropie d'un trou noir est proportionnelle à l'aire de son horizon, et non à son volume. Cela suggère que les degrés de liberté gravitationnels dans le bulk sont organisés holographiquement à la surface. AdS/CFT offre un cadre concret pour rendre ce principe opératoire : l'entropie calculée du côté CFT coïncide avec l'aire de l'horizon du côté gravitationnel, validant ainsi la vision holographique.

Cependant, cette correspondance repose sur des hypothèses fortes :
- L'espace-temps gravitationnel est de type AdS, avec courbure négative.
- La théorie conforme sur le bord doit posséder un haut degré de symétrie (par exemple $\mathcal{N}=4$ SYM dans le cas AdS_5/CFT_4).
- L'extension de cette dualité à des contextes plus réalistes, comme l'espace-temps de Sitter (dS) associé à une constante cosmologique positive, demeure encore spéculative et beaucoup moins comprise.

Ces contraintes font d'AdS/CFT non pas une description universelle de la gravité quantique, mais un *laboratoire théorique exceptionnel.* Dans ce cadre, il est possible de calculer des quantités inaccessibles autrement (comme des fonctions de corrélation à couplage fort), d'étudier la physique des trous noirs, et d'explorer les liens profonds entre gravité, théorie quantique des champs et information quantique.

Le ressort profond de cette correspondance est que **l'espace-temps et la gravité ne sont pas fondamentaux**, mais *émergent* comme des structures de traitement et de codage de l'information quantique. La dynamique gravitationnelle n'est alors qu'une manifestation effective de règles plus élémentaires : celles de l'holographie et de l'entrelacement quantique. Autrement dit, le *bulk* et sa géométrie ne sont pas des données premières : ils se reconstruisent à partir du *pattern d'information* situé sur le bord.

Cette perspective rejoint des indices profonds déjà présents en physique quantique et gravitationnelle :
- **Entropie des trous noirs** : l'entropie de Bekenstein–Hawking est proportionnelle à l'aire de l'horizon, signe qu'une surface encode un volume d'information.
- **Effet Unruh** : un observateur accéléré détecte des particules dans le vide, montrant que la notion de matière dépend de l'état informationnel défini par l'espace-temps et par le référentiel. On peut ainsi dire que la matière *apparaît* comme une transformation de l'espace-temps lui-même.
- **Dualité matière/espace-temps** : loin d'être entités séparées, la matière et l'espace-temps peuvent être vus comme deux aspects complémentaires d'un même substrat informationnel en interaction.

Il faut cependant souligner les contraintes de cette correspondance : elle est démontrée dans des contextes hautement symétriques (espaces AdS à courbure négative, supersymétrie étendue) et ne s'applique pas directement à des univers plus réalistes comme l'espace-temps de Sitter (dS), associé à une constante cosmologique positive. Ces limitations n'enlèvent rien à son rôle central : AdS/CFT constitue un *laboratoire théorique* unique pour explorer la gravité quantique, la physique des trous noirs et le lien intime entre géométrie, matière et information quantique.

Dans ce qui suit, nous proposons d'interpréter cette correspondance comme une *généralisation* *holographique du théorème de Stokes*, où l'information quantique du bulk est entièrement encodée sur le bord. Ainsi, la gravité et l'espace-temps apparaissent comme une conséquence de la *logique de l'encodage quantique.*

2 Le parallèle avec le théorème de Stokes

Le théorème de Stokes relie une intégrale volumique à une intégrale de bord :

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Il établit ainsi un principe fondamental : *les degrés de liberté du volume sont encodés sur la frontière.*

AdS/CFT peut se comprendre de manière analogue :

$$Z_{\text{gravité sur AdS}}[\phi|_{\partial AdS} = J] = Z_{\text{CFT sur } \partial AdS}[J].$$

Ceci joue le rôle d'un Stokes quantique : la dynamique dans le *bulk* AdS est entièrement déterminée par des sources définies au bord.

3 Réinterprétation informationnelle

Dans le langage de l'information quantique :

— Les degrés de liberté de la CFT sur le bord agissent comme un *code quantique* qui encode les degrés de liberté gravitationnels du bulk.

— Les corrélateurs CFT $\langle \mathcal{O}(x_1) \cdots \mathcal{O}(x_n) \rangle$ contiennent l'information complète sur les champs gravitationnels qui évoluent dans AdS.

— La métrique d'AdS elle-même peut être vue comme émergente à partir de la structure d'entrelacement quantique dans la CFT (cf. travaux de Van Raamsdonk).

3.1 Codes correcteurs quantiques holographiques

Une idée centrale est que la correspondance AdS/CFT réalise un *code correcteur quantique* :

— L'information d'un opérateur du bulk (par ex. un champ localisé à l'intérieur d'AdS) peut être *reconstruite* à partir de plusieurs régions distinctes du bord.

— Ceci reflète la *redondance* propre aux codes correcteurs : l'information est protégée contre la perte de certaines régions du bord.

— Le modèle dit *HaPPY code* (Pastawski, Preskill et al.) illustre ce mécanisme : un réseau de tenseurs disposés comme un pavage hyperbolique joue le rôle d'une carte discrète de l'espace AdS, chaque tenseur réalisant une isométrie qui distribue l'information.

Mathématiquement, si $\mathcal{H}_{\text{bulk}}$ est l'espace de Hilbert du bulk et $\mathcal{H}_{\text{bdy}}$ celui du bord, l'encodage est donné par une isométrie :

$$V : \mathcal{H}_{\text{bulk}} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\text{bdy}},$$

où V agit comme un code correcteur quantique distribuant l'information du bulk dans les degrés de liberté du bord.

3.2 Conséquences

— **Reconstruction du bulk :** un opérateur ϕ_{bulk} peut être représenté par plusieurs opérateurs $\mathcal{O}_{\text{bdy}}$ agissant sur différentes régions du bord.

— **Robustesse holographique :** la perte d'une partie de la frontière n'entraîne pas la perte d'information gravitationnelle, tant que le code reste correcteur.

— **Lien avec l'entropie :** cette redondance explique pourquoi l'entropie des trous noirs se mesure en aire (surface de l'horizon) et non en volume.

4 Un "théorème de Stokes" informationnel (bulk $\leftrightarrow$ frontière)

L'analogue informationnel du théorème de Stokes consiste à relier une *mesure d'information* définie sur une région du bulk à une quantité définie sur sa région duale au bord. Le choix naturel, robuste au couplage fort et additif, est l'**entropie relative** et, en linéaire, la **première loi de l'intrication**.

4.1 Mesures d'information : entropie relative et Hamiltonien modulaire

Pour un état réduit ρ_A d'une région A (au bord) et un état de référence σ_A, on définit :

$$S_{\mathrm{rel}}(\rho_A \| \sigma_A) = \mathrm{Tr}\big(\rho_A \log \rho_A\big) - \mathrm{Tr}\big(\rho_A \log \sigma_A\big) = \Delta\langle K_A\rangle - \Delta S_A,$$

où $K_A \equiv -\log \sigma_A$ est l'*Hamiltonien modulaire* et S_A l'entropie d'intrication de ρ_A. Côté bulk, on considère la région $W(A)$ (l'*entanglement wedge*) et ses réduites $\rho_{W(A)}$, $\sigma_{W(A)}$.

4.2 Énoncé type JLMS/FLM : Stokes informationnel

Dans le régime semi-classique holographique (grand N, faible courbure), on a l'égalité centrale [1] :

$$\boxed{S_{\mathrm{rel}}^{\mathrm{CFT}}(\rho_A \| \sigma_A) \;=\; S_{\mathrm{rel}}^{\mathrm{bulk}}(\rho_{W(A)} \| \sigma_{W(A)})} \tag{1}$$

Autrement dit, *toute la différence d'information* entre ρ et σ mesurée sur A est *égale* à celle contenue dans le bulk $W(A)$. Ceci joue le rôle d'une formule de « Stokes info » : une grandeur définie dans le volume (bulk) égale une grandeur définie au bord.

En particulier, l'entropie holographique est donnée par la *généralisée*

$$S_A \;=\; \operatorname*{ext}_{\chi_A} \Big[\, \frac{\mathrm{A}(\chi_A)}{4G_N} \;+\; S_{\mathrm{bulk}}(\mathrm{int}(\chi_A)) \,\Big],$$

où χ_A est la *quantum extremal surface* (QES). L'égalité (1) en découle en termes de *différences* (FLM/JLMS).

4.3 Première loi de l'intrication $\Leftrightarrow$ loi de Gauss gravitationnelle

À linéaire près autour de σ (première loi), on a $\delta S_A = \delta\langle K_A\rangle$. Côté bulk, cela devient

$$\boxed{\delta\Big(\frac{\mathrm{A}(\chi_A)}{4G_N}\Big) \;+\; \delta S_{\mathrm{bulk}}(W(A)) \;=\; \delta\langle K_A^{\mathrm{CFT}}\rangle\;,} \tag{2}$$

qui s'interprète comme une *loi de Gauss de l'intrication* : la variation d'*information généralisée* dans le volume (aire + entropie bulk) égale le *flux modulaire* au bord. Via l'identité d'Iyer–Wald, $\delta(\mathrm{A}/4G_N)$ s'écrit comme un *terme de bord* (charge de Noether), renforçant l'analogie « Stokes ».

4.4 Écriture intégrale : courant d'information

On peut formaliser (2) sous forme intégrale. Soit Σ_A une hypersurface ancrée sur A dans $W(A)$, de bord $\partial\Sigma_A = A \cup \chi_A$. Il existe un *courant d'information* J_I et un *potentiel de Noether modulaire* Q_I tels que, sur solution des équations du mouvement,

$$\int_{\Sigma_A} \nabla\cdot J_I \;=\; \oint_{\partial\Sigma_A} Q_I \;\iff\; \delta S_{\mathrm{bulk}}(W(A)) \;+\; \delta\Big(\frac{\mathrm{A}(\chi_A)}{4G_N}\Big) \;=\; \delta\langle K_A^{\mathrm{CFT}}\rangle.$$

C'est la version *Stokes* (divergence $\to$ flux) de la conservation d'information modulaires/gravitatoires.

1. Connue comme le résultat de JLMS, équivalente à $K_A^{\mathrm{CFT}} = \frac{\mathrm{A}(\chi_A)}{4G_N} + K_{W(A)}^{\mathrm{bulk}} + \mathcal{O}(1/N)$, où χ_A est la surface extrémale (QES).

Lecture.

- (1) est l'égalité *forte* « bulk = bord » pour l'information (entropie relative).
- (2) est la version *linéarisée* qui identifie la gravitation émergente à une loi de Gauss de l'information.

5 Implications holographiques

Cette vision en termes d'information offre une compréhension unifiée de phénomènes variés :

- **Entropie de trou noir (Bekenstein-Hawking)** : la surface (horizon) encode l'information volumique.
- **Réseaux de tenseurs** : des constructions comme MERA réalisent explicitement un Stokes quantique discret (bulk $\leftrightarrow$ bord).
- **Complexité computationnelle** : la géométrie dans AdS peut être reliée à la complexité d'opérateurs en CFT.

6 Conclusion

Ainsi, la correspondance AdS/CFT apparaît comme une instance du principe général :

$$\text{Information dans le volume} \quad \equiv \quad \text{Information sur le bord},$$

qui généralise le théorème de Stokes à la physique quantique des champs et de la gravité.

Ce point de vue replace l'holographie au cœur d'une réflexion plus large : la gravité et l'espace-temps eux-mêmes ne sont pas des entités fondamentales, mais des *structures émergentes de traitement et de codage de l'information quantique.* De ce fait, la véritable question n'est pas de « quantifier l'espace-temps », mais de comprendre les *lois universelles de l'encodage de l'information* qui rendent possible l'apparition de la géométrie, de la matière et des interactions.

Appendix

A Lagrangiens de la correspondance AdS5/CFT4 Théorie N = 4 Super Yang-Mills

La correspondance AdS/CFT, ou correspondance jauge/gravité, est une des découvertes les plus importantes de la physique théorique récente. Elle établit une équivalence entre une théorie de jauge dans d dimensions et une théorie de gravité dans $(d+1)$ dimensions anti-de Sitter (AdS). La réalisation la plus étudiée est la correspondance $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ qui relie :

- Côté CFT_4 : La théorie $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM) en 4 dimensions avec groupe de jauge $\mathrm{SU}(N)$
- Côté AdS_5 : La théorie des supercordes de type IIB sur l'espace $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$

Ce document se concentre sur la formulation du côté CFT_4 de cette correspondance.

B Théorie $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills

La théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM est une théorie de jauge supersymétrique maximale en quatre dimensions. Elle possède les propriétés remarquables suivantes :

- Invariance conforme (CFT)
- Supersymétrie maximale ($\mathcal{N} = 4$ supercharges)
- Symétrie de jauge $\mathrm{SU}(N)$
- Symétrie R globale $\mathrm{SU}(4) \simeq \mathrm{SO}(6)$

C Contenu des champs

La théorie contient :
- Un champ de jauge A_μ dans l'adjoint de $\mathrm{SU}(N)$
- Six champs scalaires réels ϕ^I $(I = 1, \ldots, 6)$ dans l'adjoint de $\mathrm{SU}(N)$
- Quatre fermions de Weyl ψ^a_α $(a = 1, \ldots, 4)$ dans l'adjoint de $\mathrm{SU}(N)$

Les champs scalaires et les fermions transforment sous la symétrie R :
- Les scalaires ϕ^I dans la représentation **6** de $\mathrm{SU}(4)$
- Les fermions ψ^a dans la représentation **4** de $\mathrm{SU}(4)$

D Lagrangien bosonique

Le lagrangien complet de la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM peut être séparé en parties bosonique et fermionique. La partie purement bosonique s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\text{bos}} = \mathrm{Tr}\left[-\frac{1}{2g^2_{\text{YM}}} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta_I}{8\pi^2} F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} + \sum_{I=1}^{6} D_\mu\phi^I D^\mu\phi^I - \frac{g^2_{\text{YM}}}{2} \sum_{I,J=1}^{6} [\phi^I, \phi^J]^2 \right]$$

où :
- $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_{\text{YM}}[A_\mu, A_\nu]$ est le tenseur de champ de Yang-Mills
- $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ est le dual de Hodge de $F_{\mu\nu}$
- $D_\mu\phi^I = \partial_\mu\phi^I - ig_{\text{YM}}[A_\mu, \phi^I]$ est la dérivée covariante
- g_{YM} est la constante de couplage de Yang-Mills
- θ_I est l'angle thêta instantonique
- La trace Tr est prise sur les indices de jauge du groupe $\mathrm{SU}(N)$

E Formulation en termes de constante de couplage complexe

Il est souvent utile de combiner les deux constantes de couplage en une constante complexe :

$$\tau = \frac{\theta_I}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2_{\text{YM}}}$$

Le lagrangien bosonique peut alors être réécrit de manière plus compacte :

$$\mathcal{L}_{\text{bos}} = \mathrm{Tr}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\tau)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tau)F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} + \sum_{I=1}^{6} D_\mu\phi^I D^\mu\phi^I - \frac{g^2_{\text{YM}}}{2} \sum_{I,J=1}^{6} [\phi^I, \phi^J]^2 \right]$$

F Interprétation physique

- Le terme $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ décrit la dynamique du champ de jauge.
- Le terme $F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}$ est un terme topologique (instanton).
- Les termes $D_\mu\phi^I D^\mu\phi^I$ décrivent la dynamique des champs scalaires et leur interaction avec le champ de jauge.
- Le terme $[\phi^I, \phi^J]^2$ représente un potentiel scalaire qui force les champs scalaires à commuter dans le vide.

G Symétries et propriétés spéciales

La théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM possède des propriétés remarquables :
- **Invariance conforme** : Le groupe de symétrie conforme SO(4,2)
- **Supersymétrie étendue** : 4 supercharges majeures et 4 supercharges conformes
- **Symétrie R** : $\mathrm{SU}(4) \simeq \mathrm{SO}(6)$ qui agit sur les indices I des scalaires
- **Dualité de S** : Invariance sous les transformations $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ agissant sur τ
- **Intégrabilité** : La théorie est conjecturée être exactement intégrable dans la limite de grand N

H Le terme topologique et le terme commutateur

Dans le lagrangien de la théorie $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills, deux termes jouent des rôles fondamentaux dans la description des phénomènes physiques :
- Le terme topologique $\frac{\theta_I}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \widetilde{F}^{\mu\nu}$ qui est lié à la violation de CP
- Le terme de potentiel scalaire $\frac{g_{\mathrm{YM}}^2}{2} \sum_{I,J=1}^{6} [\phi^I, \phi^J]^2$ qui permet l'acquisition de masse par brisure de symétrie

Ce document explique en détail comment ces termes, bien que "facultatifs" dans une certaine perspective, sont essentiels pour décrire des effets physiques observés.

I Le terme topologique et la violation de CP

I.1 Formulation mathématique

Le terme topologique dans le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta_I}{8\pi^2} \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} \widetilde{F}^{\mu\nu})$$

où $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ est le dual de Hodge du tenseur de champ.

I.2 Caractère "facultatif"

Ce terme est qualitativement différent des autres termes du lagrangien :
- C'est une **divergence totale** : Il peut s'écrire comme la dérivée d'un courant topologique
- Il n'affecte pas les **équations du mouvement classiques**
- Il ne contribue pas aux **processus de diffusion perturbatifs**

En ce sens, il est "facultatif" dans la description classique de la théorie.

I.3 Interprétation physique

Ce terme est appelé "topologique" car il peut être écrit comme une dérivée totale :

$$\mathrm{Tr}(F \wedge F) = d\, \mathrm{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

Il ne contribue donc pas aux équations du mouvement classiques, mais a des effets importants en théorie quantique des champs :
- **Effets instantons** : Ce terme est lié aux solutions instantons de la théorie de jauge
- **Angle θ** : Le paramètre θ_I est l'angle thêta qui contrôle la violation de CP
- **Invariance modulaire** : Combiné avec la constante de couplage, il forme le paramètre complexe $\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g_{\mathrm{YM}}^2}$ qui se transforme sous la dualité S

I.4 Rôle dans la théorie quantique

Bien que ce terme soit une divergence totale et n'affecte pas la dynamique classique, il a des conséquences profondes en théorie quantique :

- Il contribue à l'action effective des instantons
- Il affecte la structure du vide quantique (multiple vacua)
- Il est essentiel pour les dualités électromagnétiques de la théorie

I.5 Rôle dans la violation de CP

Malgré son caractère apparemment anodin, ce terme a des conséquences physiques profondes :

- **Violation de CP** : Le paramètre θ_I introduit une violation de la symétrie CP (combinaison de conjugaison de charge et parité)
- **Instantons** : Ce terme contribue à l'action des solutions instantoniques de la théorie de jauge
- **Problème CP fort** : Dans QCD, la valeur mesurée de θ est extrêmement petite ($|\theta| < 10^{-10}$), ce qui constitue un problème non résolu

I.6 Exemple dans QCD

Bien que nous discutions de la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM, le terme θ est également présent en QCD où il a des effets observables :

- Moment dipolaire électrique du neutron
- Désintégrations de mésons neutres
- Ces effets n'ont pas été observés expérimentalement, contraignant fortement θ

J Le terme du commutateur et la brisure de symétrie

J.1 Formulation mathématique

Le terme de potentiel scalaire dans le lagrangien s'écrit :

$$V(\phi) = \frac{g_{\mathrm{YM}}^2}{2} \sum_{I,J=1}^{6} \mathrm{Tr}([\phi^I, \phi^J]^2)$$

J.2 Caractère "facultatif"

Ce terme semble "facultatif" à première vue car :

- Dans le vide classique, on impose $[\phi^I, \phi^J] = 0$ pour minimiser l'énergie
- Les champs scalaires peuvent être diagonalisés simultanément dans le vide
- Le terme semble s'annuler dans la configuration de vide

J.3 Interprétation physique

Ce terme représente l'énergie potentielle des champs scalaires et a plusieurs rôles cruciaux :

- **Potentiel de Higgs** : Il détermine les valeurs possibles des champs scalaires dans le vide
- **Interaction entre scalaires** : Il décrit comment les différents champs scalaires interagissent entre eux
- **Brisure de symétrie** : Il peut mener à une brisure spontanée de symétrie

J.4 Rôle dans le mécanisme de Higgs

Cependant, ce terme est essentiel pour le mécanisme de Higgs généralisé :

— **Potentiel de Higgs** : Il détermine la forme du potentiel qui permet la brisure spontanée de symétrie

— **Acquisition de masse** : Lorsque les champs scalaires acquièrent une valeur moyenne non nulle dans le vide ($\langle \phi^I \rangle \neq 0$), les bosons de jauge acquièrent une masse

— **Mode de Goldstone** : Les degrés de liberté correspondant aux générateurs de la symétrie brisée deviennent des bosons de Goldstone

J.5 Structure du vide

Les états de vide classiques de la théorie sont déterminés en minimisant ce potentiel :

$$[\phi^I, \phi^J] = 0 \quad \text{pour tout } I, J$$

Cela signifie que dans le vide, les champs scalaires peuvent être diagonalisés simultanément :

$$\phi^I = \begin{pmatrix} \phi_1^I & & \\ & \ddots & \\ & & \phi_N^I \end{pmatrix}$$

Cette condition donne lieu à la "variété des modules" (moduli space) de la théorie, qui est un espace de solutions de vide possibles.

J.6 Rôle dans la supersymétrie

Ce terme est crucial pour la supersymétrie de la théorie :

— Il est nécessaire pour l'invariance sous les transformations supersymétriques

— Il assure l'équilibre entre les degrés de liberté bosoniques et fermioniques

— Il contribue à l'annulation des divergences ultraviolette, rendant la théorie conforme

J.7 Interprétation géométrique

Dans le contexte de la correspondance AdS/CFT, ce terme a une interprétation géométrique profonde :

— Les six champs scalaires ϕ^I peuvent être interprétés comme les coordonnées transverses d'une D3-brane

— Le commutateur $[\phi^I, \phi^J]$ représente une area non commutative

— Le potentiel $V(\phi)$ mesure l'énergie associée à la non-commutativité de la géométrie

J.8 Exemple de brisure de symétrie

Considérons un cas simple où seulement deux champs scalaires ont une valeur moyenne non nulle dans le vide :

$$\langle \phi^1 \rangle = v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle \phi^2 \rangle = 0, \quad \dots, \quad \langle \phi^6 \rangle = 0$$

Le terme de potentiel devient :

$$V(\phi) = \frac{g_{\text{YM}}^2}{2} \text{Tr}([\langle \phi^1 \rangle, \langle \phi^2 \rangle]^2) + \dots = 0$$

Cependant, si nous considérons des fluctuations autour de ce vide :

$$\phi^I = \langle \phi^I \rangle + \delta\phi^I$$

Le terme $[\delta\phi^I, \delta\phi^J]^2$ génère des interactions entre les fluctuations et peut donner une masse aux bosons de jauge via le mécanisme de Higgs.

K Conclusion sur les termes facultatifs

Les deux termes discutés, bien qu'apparaissant "facultatifs" à première vue, sont en réalité essentiels pour décrire des phénomènes physiques importants :

— Le terme topologique $\theta F\widetilde{F}$ est nécessaire pour comprendre la violation de CP dans les théories de jauge non-abéliennes

— Le terme de commutateur $[\phi^I, \phi^J]^2$ est crucial pour le mécanisme de Higgs généralisé qui donne une masse aux particules

Dans le contexte de la correspondance AdS/CFT, ces termes prennent une signification encore plus profonde :

— Le paramètre θ est relié à certains champs de fond dans la théorie de gravité duale

— Le potentiel scalaire est lié à la géométrie de l'espace internal S^5 dans la dualité

Ainsi, bien que ces termes puissent sembler techniques ou optionnels, ils sont en réalité fondamentaux pour la cohérence de la théorie et sa capacité à décrire des phénomènes physiques observés.

L Géométrie de l'espace $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$

Passons maintenant au côté gravitationnel de cette correspondance : la théorie des supercordes de type IIB sur l'espace $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$.

L.1 Espace anti-de Sitter (AdS)

L'espace AdS_5 est une variété lorentzienne à 5 dimensions à courbure constante négative. C'est une solution des équations d'Einstein avec une constante cosmologique négative.

La métrique d'AdS_5 peut s'écrire sous différentes coordonnées. En coordonnées globales :

$$ds^2_{\mathrm{AdS}_5} = -\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\Omega_3^2$$

où R est le rayon de courbure d'AdS.

L.2 Sphère S^5

La sphère S^5 est une variété riemannienne à 5 dimensions à courbure constante positive. Sa métrique peut s'écrire :

$$ds^2_{S^5} = R^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\Omega_4^2\right)$$

L.3 Espace produit $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$

L'espace total est le produit direct de ces deux espaces :

$$ds^2 = ds^2_{\mathrm{AdS}_5} + ds^2_{S^5}$$

Cette géométrie préserve la supersymétrie maximale en 10 dimensions.

M Théorie des supercordes de type IIB

M.1 Contenu des champs

La théorie des supercordes de type IIB contient les champs suivants :

— **Métrique** G_{MN} : le champ gravitationnel

— **Dilaton** Φ : champ scalaire qui détermine la constante de couplage des cordes

— **Champ de Ramond-Ramond** :
  — Champ scalaire C_0 (axion)
  — Champ à 2 formes C_2
  — Champ à 4 formes C_4 (auto-dual)
— **Champ de Neveu-Schwarz** :
  — Champ à 2 formes B_2
— **Gravitinós** : particules supersymétriques de spin 3/2

M.2 Action effective

L'action effective à basse énergie est la supergravité de type IIB. L'action bosonique s'écrit :

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x\sqrt{-G} \Big[& e^{-2\Phi} \left(R + 4(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2 \right) \\
& -\frac{1}{2}|F_1|^2 - \frac{1}{2}|\widetilde{F}_3|^2 - \frac{1}{4}|\widetilde{F}_5|^2 \Big] \\
& + \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3
\end{aligned}
$$

où :
— $H_3 = dB_2$ est la field strength de Neveu-Schwarz
— $F_1 = dC_0$, $F_3 = dC_2$, $F_5 = dC_4$ sont les field strengths de Ramond-Ramond
— $\widetilde{F}_3 = F_3 - C_0 \wedge H_3$
— $\widetilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2}C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2 \wedge F_3$
— On impose la condition d'auto-dualité $\widetilde{F}_5 = \star\widetilde{F}_5$

N Solution $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$

N.1 Configuration des champs

La solution $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ est caractérisée par :
— Une métrique produit $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ avec rayon de courbure R
— Un flux de Ramond-Ramond à travers la sphère S^5 :

$$\int_{S^5} F_5 = N$$

— Un dilaton constant : $e^{\Phi} = g_s$
— Les autres champs sont nuls : $C_0 = 0$, $B_2 = 0$, $C_2 = 0$

N.2 Relation avec la théorie de jauge

Les paramètres des deux théories sont reliés par :
— Le rayon de courbure R est relié à la charge N des D-branes et à la constante de couplage des cordes :

$$R^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2$$

— La constante de couplage de Yang-Mills est reliée à la constante de couplage des cordes :

$$g_{\mathrm{YM}}^2 = 4\pi g_s$$

— La limite de grand N et forte couplage ($\lambda = g_{\mathrm{YM}}^2 N \gg 1$) correspond à la limite supergravité ($R^4 \gg \alpha'^2$)

O Spectre des excitations

O.1 Champs de la supergravité

Le spectre des champs de la supergravité sur $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ peut être décomposé selon les représentations du groupe de symétrie SO(4,2) × SO(6). Ces champs correspondent aux opérateurs de la théorie de jauge duale.

O.2 État de la corde

Au-delà de la supergravité, la théorie complète des cordes inclut des états massifs correspondant à des opérateurs à dimension conforme élevée dans la théorie de jauge.

P Dictionnaire AdS/CFT

La correspondance établit un dictionnaire précis entre les deux théories :

— Les fonctions de corrélation dans la théorie de jauge sont reliées aux fonctions de partition de la théorie des cordes avec conditions aux limites appropriées

— La dimension conforme Δ des opérateurs est reliée à la masse m des champs dans AdS :

$$\Delta = 2 + \sqrt{4 + m^2 R^2}$$

— La symétrie conforme SO(4,2) de la théorie de jauge correspond au groupe d'isométrie d'AdS_5

— La symétrie R SU(4) de la théorie de jauge correspond au groupe d'isométrie de S^5

Q Applications et développements

La correspondance AdS/CFT a conduit à de nombreux développements :

— Calcul de fonctions de corrélation en théories de jauge fortement couplées

— Étude du confinement via les duals gravitationnels des théories QCD-like

— Application à la physique de la matière condensée (AdS/CMT) *é Relation avec l'information quantique et le paradoxe de l'information des trous noirs*

R Place des supercordes

Le lagrangien bosonique de la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM présente une structure riche malgré sa relative simplicité. Sa formulation exacte est cruciale pour comprendre la correspondance AdS/CFT et ses nombreuses applications en physique théorique, allant de la chromodynamique quantique à la physique de la matière condensée et à l'information quantique.

La théorie des supercordes de type IIB sur $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ fournit une description duale complète de la théorie $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills. Cette correspondance est un outil puissant pour étudier les théories de jauge fortement couplées en utilisant des méthodes gravitationnelles, et a profondément influencé notre compréhension de la gravité quantique, des théories de jauge et de leurs interrelations.

Appendix : Généralisation du théorème de Stokes

Dans cet appendice, nous présentons trois cadres où le théorème de Stokes classique

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

admet des généralisations : les supervariétés, les algèbres différentielles graduées, et la localisation supersymétrique.

S Stokes sur les supervariétés et intégration de Berezin

Une *supervariété* est un espace localement isomorphe à $\mathbb{R}^{m|n}$, muni de coordonnées bosoniques x^μ ($\mu = 1, \dots, m$) et fermioniques θ^α ($\alpha = 1, \dots, n$). Les fonctions sur une supervariété sont des éléments de

$$C^\infty(\mathbb{R}^m) \otimes \Lambda(\theta^1, \dots, \theta^n),$$

c'est-à-dire des fonctions lisses en x à valeurs dans l'algèbre extérieure des variables θ.

L'intégration se définit ainsi :

— Sur les coordonnées bosoniques x^μ, on utilise l'intégrale de Lebesgue habituelle.

— Sur les coordonnées fermioniques θ^α, on utilise l'*intégration de Berezin*, définie par :

$$\int d\theta\, \theta = 1, \qquad \int d\theta\, 1 = 0,$$

et plus généralement $\int d\theta^n \cdots d\theta^1\, \theta^1\theta^2 \cdots \theta^n = 1$.

Dans ce cadre, il existe un analogue du théorème de Stokes : si ω est une forme différentielle (au sens des supervariétés), alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

où l'intégrale est maintenant une combinaison Lebesgue–Berezin. Cette identité repose sur $d^2 = 0$ et la propriété que l'intégrale de Berezin est une dérivation à support compact.

Ce résultat est la base de nombreux calculs en théorie quantique des champs avec supersymétrie, où l'espace des champs est prolongé par des variables de type Grassmann.

T Version algébrique : Algèbres différentielles graduées

De manière abstraite, le théorème de Stokes repose sur deux ingrédients :

— L'existence d'un opérateur différentiel d de degré $+1$ satisfaisant $d^2 = 0$.

— L'existence d'une *forme d'intégration* (ou trace) $\int$ qui annule les d-exactes :

$$\int d\omega = 0.$$

Toute *algèbre différentielle graduée* (ADG) (A, d) peut donc porter une version abstraite du théorème de Stokes. Par exemple : - En cohomologie de de Rham, $A = \Omega^\bullet(M)$ et d est la différentielle extérieure. - Dans les superalgèbres, A inclut des générateurs pairs et impairs, et d peut être une dérivation graduée.

Dans ce cadre, l'analogue du théorème de Stokes est simplement :

$$\int_A d\omega = 0, \qquad \forall \omega \in A,$$

dès lors que l'intégrale est définie sur A et respecte la règle du degré.

Cela montre que Stokes est essentiellement une propriété de cohomologie : l'intégrale définit un morphisme

$$\int : H^{\bullet}(A, d) \longrightarrow \mathbb{R},$$

et ne dépend que de la classe de cohomologie de ω.

U Application : localisation supersymétrique (Witten)

Une application physique profonde de la généralisation de Stokes est la *localisation supersymétrique*. Dans une théorie supersymétrique, il existe un opérateur nilpotent Q (supercharge ou opérateur BRST) qui agit comme une différentiation graduée : $Q^2 = 0$.

Soit un espace de configurations $\mathcal{F}$ (typiquement, un espace de champs) muni d'une mesure d'intégration $d\mu$. On considère une observable Q-exacte, de la forme QV. Alors :

$$\int_{\mathcal{F}} d\mu \, QV = 0.$$

Ceci est l'analogue supersymétrique du théorème de Stokes : l'intégrale d'une « Q-dérivée » est nulle. Cela implique que l'intégrale de chemin d'une théorie supersymétrique ne dépend pas des déformations du lagrangien par des termes Q-exacts.

Conséquence majeure : l'intégrale de chemin se *localise* sur les points fixes de Q, c'est-à-dire sur les configurations invariantes par supersymétrie. C'est la base de nombreux calculs exacts en supersymétrie (ex. théorèmes de localisation de Witten, calculs de partition exacts en 4d $\mathcal{N} = 2$, indices supersymétriques, etc.).

V Conclusion de l'appendice

Ces trois cadres montrent que le théorème de Stokes n'est pas limité à la géométrie différentielle classique, mais s'étend :

— aux supervariétés via l'intégration de Berezin,

— aux algèbres différentielles graduées par un principe cohomologique,

— aux théories supersymétriques via la localisation.

Dans tous les cas, le cœur du principe reste le même : *l'intégrale d'un exact est nulle.* Ceci donne une justification algébrique et géométrique aux mécanismes d'holographie et d'émergence en physique théorique.

W Vers une formule de Stokes *covariante*

Soit un fibré vectoriel $E \to M^n$ muni d'une connexion ∇ (forme de connexion A) et de sa dérivée extérieure covariante D agissant sur les formes à valeurs dans E. On a $D^2 = \mathsf{R}$, où R (ou F côté jauge) est la courbure : $F = dA + A \wedge A$. Le théorème de Stokes classique repose crucialement sur $d^2 = 0$; remplacer d par D *sans précaution* casse donc l'argument. Il existe cependant trois cadres où une version « Stokes covariant » est valide et utile.

W.1 (I) Intégration par parties covariante avec appariement invariant

Soient $\alpha \in \Omega^p(M, E)$ et $\beta \in \Omega^{n-p-1}(M, E^*)$, et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \otimes E^* \to \mathbb{R}$ un appariement fibre-à-fibre compatible avec la connexion (i.e. $D\langle \alpha, \beta \rangle = \langle D\alpha, \beta \rangle + (-1)^p \langle \alpha, D\beta \rangle$). Alors

$$d\big(\langle \alpha \wedge \beta \rangle\big) = \langle D\alpha \wedge \beta \rangle + (-1)^p \langle \alpha \wedge D\beta \rangle.$$

En intégrant sur M et en appliquant Stokes au scalaire $\langle \alpha \wedge \beta \rangle$:

$$\int_M \langle D\alpha \wedge \beta \rangle + (-1)^p \int_M \langle \alpha \wedge D\beta \rangle = \int_{\partial M} \langle \alpha \wedge \beta \rangle.$$

Lecture : c'est la *formule de Green* covariante (ou Stokes « avec connexion »). Elle est la bonne façon de *substituer D à d* dès qu'on ramène l'intégrande à un scalaire via un appariement invariant.

Cas plat. Si la connexion est *plate* ($F = 0$), alors $D^2 = 0$ et on récupère un complexe cohomologique covariant. Dans ce cas, des identités de type $\int_M D\omega = \int_{\partial M} \omega$ peuvent tenir pour des classes appropriées.

W.2 (II) Transgression de Chern–Weil : « Stokes covariant » global

Soit P un polynôme invariant de degré k sur l'algèbre de Lie (ex. : $P(X) = \mathrm{Tr}(X^k)$). La forme caractéristique $P(F)$ est fermée : $d\,P(F) = 0$ (Bianchi $DF = 0$). Il existe une *forme de transgression* (Chern–Simons) $Q_{2k-1}(A)$ telle que

$$d\,Q_{2k-1}(A) = P(F) \quad \text{(localement, ou globalement si la trivialisation au bord est fixée).}$$

Par Stokes,

$$\int_M P(F) \;=\; \int_{\partial M} Q_{2k-1}(A).$$

Exemples.

- $n = 4$, $k = 2$ (Yang–Mills) : $P(F) = \mathrm{Tr}(F \wedge F)$, $Q_3(A) = \mathrm{Tr}\big(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A\big)$. D'où $\int_M \mathrm{Tr}(F \wedge F) = \int_{\partial M} Q_3(A)$.
- **Gravitationnel** (connexion de spin ω, courbure R) : $\mathrm{Tr}(R \wedge R) = d\,Q_3(\omega)$ donne le *Chern–Simons gravitationnel* au bord.

Lecture : c'est exactement une version *covariante* du principe « volume $\leftrightarrow$ bord ». Elle sous-tend l'*anomaly inflow* : un terme topologique dans le bulk induit l'anomalie (non-conservation) sur le bord.

W.3 (III) Super-connexions (Quillen) et caractère de Chern

Pour un fibré gradué $E = E^+ \oplus E^-$ muni d'une *super-connexion* $\mathbb{A}$ (1-forme + termes de degré supérieur), la courbure $\mathbb{F} = \mathbb{A}^2$ est une *forme* à valeurs endomorphismes. Le *caractère de Chern* super-tracé est fermé :

$$d\,\mathrm{Str}\Big(e^{-\mathbb{F}}\Big) = 0,$$

et deux super-connexions reliées par homotopie diffèrent par un terme *exact* $d(\cdots)$ (transgression). Stokes donne donc, pour une famille interpolante,

$$\int_M \mathrm{Str}\Big(e^{-\mathbb{F}_1}\Big) - \mathrm{Str}\Big(e^{-\mathbb{F}_0}\Big) = \int_{\partial M} \text{(forme de Chern–Simons généralisée).}$$

Lecture : c'est la version la plus générale (utile en indices supersymétriques, K-théorie différentielle, etc.).

W.4 Commentaires pour l'holographie

- Le **remplacement** $d \to D$ est *cohérent* dès qu'on *trace/pare* pour obtenir un scalaire (I), ou qu'on travaille avec *formes caractéristiques* (II), ou super-connexions (III).
- La condition structurale clé devient $\boxed{DF = 0}$ (Bianchi) et l'*invariance* du trace/polynôme : c'est ce qui remplace $d^2 = 0$ dans les preuves.

— En AdS/CFT, $\displaystyle\int_M P(F)$ ou $\int_M \mathrm{Tr}(R \wedge R)$ jouent le rôle de *termes de bulk* dont la *transgression* au bord est un *Chern–Simons* : c'est le mécanisme standard des *anomalies de bord* (inflow), signature d'un Stokes covariant *physiquement* opérant.

Références

[1] J. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231, arXiv:hep-th/9711200.

[2] S. Ryu, T. Takayanagi, *Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT*, Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 181602, arXiv:hep-th/0603001.

[3] F. Pastawski, B. Yoshida, D. Harlow, J. Preskill, *Holographic quantum error-correcting codes : Toy models for the bulk/boundary correspondence*, JHEP 06 (2015) 149, arXiv:1503.06237.

[4] T. Faulkner, A. Lewkowycz, J. Maldacena, *Quantum corrections to holographic entanglement entropy*, JHEP 11 (2013) 074, arXiv:1307.2892.

[5] D. L. Jafferis, A. Lewkowycz, J. Maldacena, S. J. Suh, *Relative entropy equals bulk relative entropy*, JHEP 06 (2016) 004, arXiv:1512.06431.

[6] N. Engelhardt, A. C. Wall, *Quantum Extremal Surfaces : Holographic Entanglement Entropy beyond the Classical Regime*, JHEP 01 (2015) 073, arXiv:1408.3203.