

Topos de la mesure créatrice (measurement as creation)

Olivier Crossant

Idée directrice

Une mesure quantique n'est **pas** un « effondrement » destructif d'information, mais un **acte de création** : elle **enrichit** l'univers des vérités disponibles en raffinant le contexte logique — **sans** présupposer un temps externe. Formellement, une mesure est modélisée par un *morphisme géométrique* qui transforme le topos des états *avant* la mesure en un topos *après* la mesure, où le résultat devient **décidable** (booléen) dans le contexte pertinent. Cette opération est **atemporelle** (pas de paramètre de temps) et s'accorde avec une lecture de l'équation de Wheeler–DeWitt.

1 Cadre de départ

- Topos quantique \mathcal{E} (par exemple presheaves contravariants sur $V(A)$) avec :
 - spectral presheaf Σ ,
 - classificateur Ω (Heyting),
 - valuation interne $\mu : \text{Sub}(\Sigma) \rightarrow [0, 1]^{\leftrightarrow}$ (règle de Born internalisée).
- Un *événement de mesure* est représenté par un *sous-objet* $U \hookrightarrow \Sigma$ (la proposition « le résultat appartient à U »).

2 Mesure = localisation + slicing (création de décidabilité)

On associe à U deux étapes *canoniques* :

1) Slicing (conditionnement interne)

On passe au *slice topos* \mathcal{E}/U , qui internalise le fait que l'univers est considéré *sous la condition* U .

- La valuation se *conditionne* : $\mu \rightsquigarrow \mu|_U$ sur $\text{Sub}(\Sigma)|_U$.
- Les vérités deviennent *contextuelles relatives* à U .

2) Localisation logique (sheafification via Lawvere–Tierney)

On choisit une topologie interne $j_U : \Omega \rightarrow \Omega$ rendant *décidable* (stable/fermée) la proposition U .

- On forme le *sous-topos* $\text{Sh}_{j_U}(\mathcal{E}/U)$ avec foncteur de *sheafification* $a_{j_U} : \mathcal{E}/U \rightarrow \text{Sh}_{j_U}(\mathcal{E}/U)$ (gauche exacte).
- Dans $\text{Sh}_{j_U}(\mathcal{E}/U)$, la proposition « U » est **booléenne** (on a créé la décidabilité du résultat).

Définition (Mesure créatrice). Une *mesure créatrice* est le morphisme géométrique composé

$$\mathcal{E} \xrightarrow{/U} \mathcal{E}/U \xrightarrow{a_{j_U}} \mathcal{E}_U^{\text{meas}} := \text{Sh}_{j_U}(\mathcal{E}/U),$$

où j_U est choisi de sorte que U devienne **décidable** dans $\mathcal{E}_U^{\text{meas}}$.

Intuition. Le passage $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_U^{\text{meas}}$ **crée** un nouvel univers logique où le résultat est tranché *dans le bon contexte* — sans violer Kochen–Specker (on ne fabrique pas une section globale de Σ dans \mathcal{E} ; on travaille dans \mathcal{E}/U puis on booléanise localement).

3 Création d’information (indépendante de l’entropie)

On distingue *information logique contextuelle* et *entropie thermodynamique*.

Information logique créée

Le choix d’un résultat U raffine la Heyting-algèbre interne : on passe d’une valeur de vérité *ouverte* (« possible ») à une valeur *décidable* (oui/non) dans $\mathcal{E}_U^{\text{meas}}$. On peut quantifier ce gain (à la Shannon/algorithmique) par

$$\Delta\mathcal{I}(U) := -\log \mu(U) \quad (\text{en bits, interne via } [0, 1]^{\leftrightarrow}).$$

C’est un *gain sémantique* (raffinement de la vérité), pas un coût thermodynamique.

Indépendance vis-à-vis de l’entropie

L’opération $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_U^{\text{meas}}$ est *logique/catégorique*. Elle n’implique pas, en soi, de variation de l’entropie de von Neumann d’un état physique fermé.

4 Axiomes (CM) pour la mesure créatrice

- **(CM1) Atemporalité.** Le foncteur $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_U^{\text{meas}}$ ne dépend d’aucun paramètre temporel externe.
- **(CM2) Monotonie de l’information.** Si $U \leq V$ (raffinement), alors $\Delta\mathcal{I}(U) \geq \Delta\mathcal{I}(V)$.
- **(CM3) Compatibilité Born interne.** $\mu|_U(X) = \mu(X \wedge U)/\mu(U)$.
- **(CM4) Localité contextuelle.** La décidabilité créée par j_U est *locale* au slice \mathcal{E}/U ; elle n’engendre pas de point global de Σ dans \mathcal{E} .
- **(CM5) Naturalisme (covariance RG).** Sous changement de cadre (diffeomorphismes, raffinement de région, changement de contexte abélien), la construction est *pseudonaturale* (fonctorielle) : elle ne dépend pas d’un fond temporel.

5 Lecture « hors-temps » et Wheeler–DeWitt

Dans une théorie où les états satisfont une *contrainte globale*

$$\widehat{\mathcal{H}} \Psi = 0,$$

(*Wheeler–DeWitt*), l’« évolution » n’est pas temporelle mais un *ordre de raffinement* des vérités :

- L’univers interne des solutions est un objet $\mathcal{S} = \ker(\widehat{\mathcal{H}})$ dans \mathcal{E} .
- Une mesure créatrice sélectionne un *sous-objet décidable* $\mathcal{S}_U \hookrightarrow \mathcal{S}$ via $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_U^{\text{meas}}$.
- Ce passage ne fait *pas évoluer* Ψ *dans le temps* ; il *raffine* la description de manière atemporelle : on conditionne la vérité de propositions sur \mathcal{S} .

Moralité. Le sens de Wheeler–DeWitt est préservé : la dynamique fondamentale est *sans temps* ; ce que l’on appelle « devenir » est la montée dans le treillis des contextes (mesures créatrices) qui augmentent l’information logique disponible.

6 Interface avec CFS

Dans CFS, ρ et les *closed chains* A_{xy} codent la causalité. Avec la mesure créatrice :

- Le résultat U (proposition sur spectres/invariants) devient **décidable** dans $\mathcal{E}_U^{\text{meas}}$.
- Les types causaux (time-/space-/light-like) sont des *prédicats internes* qui, une fois localisés, s'évaluent *sans ambiguïté* pour le contexte mesuré.
- L'action causale interne $\mathbf{S}[\mu]$ s'évalue *conditionnellement* et peut être *réoptimisée* dans $\mathcal{E}_U^{\text{meas}}$ (lecture : *back-reaction* informationnelle).

7 Exemple minimal (qubit, σ_z)

- \mathcal{E} : presheaves sur les contextes $\{\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle\}$.
- Résultat $U = \{\sigma_z = +1\} \hookrightarrow \Sigma$.
- Slice \mathcal{E}/U : on conditionne toutes les propositions par U .
- j_U : topologie interne rendant U **décidable**.
- $\mathcal{E}_U^{\text{meas}}$: topos où « $\sigma_z = +1$ » est **vrai booléen** (localement), sans fabriquer de vérité globale pour σ_x, σ_y .
- Information créée :

$$\Delta\mathcal{I}(U) = -\log \mu(U).$$

Résumé

Une *mesure créatrice* est un morphisme géométrique $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_U^{\text{meas}}$ (slicing + localisation) qui **rend décidable** le résultat dans le contexte adéquat, **augmente l'information logique** (sans préjuger de l'entropie) et **respecte l'atemporalité** attendue d'une théorie contrainte de type Wheeler–DeWitt.