

# ANALYSE SUR L'ESPACE DE WIENER ET PRICING DE PRODUITS DÉRIVÉS.

P. BOURGADE

Ce petit document de travail vise à faire une liste provisoire :

- des méthodes d'approximation possibles pour les EDS ;
- des domaines financiers d'applications possibles ;
- des questions en suspens.

## 1. PRODUITS VANILLES ET APPROXIMATIONS

On rappelle les différentes méthodes d'approximation :

- Molchanov  $\rightarrow$  Henry-Labordère. Cette méthode, basée sur le développement limité exact du noyau de la chaleur en temps petit, donne le smile parfait à  $t = 0$ , mais diverge du Monte-Carlo dès  $t = 1$  ou 2 ans.
- Watanabe  $\rightarrow$  Kahl. Développement limité selon un paramètre du modèle, et non plus dans le temps. Justifié sur le plan théorique par le travail de Watanabe. Calcul direct sans nécessité de distance géodésique : il raisonne directement sur le prix du call.
- Watanabe  $\rightarrow$  Osajima. Il introduit l'énergie, analogue à la distance géodésique, que l'on approxime. Avantage : on a des smiles pertinents à la monnaie et pour de courtes maturités pour n'importe-quelle EDS. Inconvénients : pour un strike et une maturité généraux, les résultats sont très mauvais.
- EDP  $\rightarrow$  Fouque-Papanicolaou-Sircar. Il s'agit du cas où la volatilité admet une distribution stationnaire, stationnarité placée dans l'équation de Fokker-Planck pour la simplifier.
- norme  $L^2 \rightarrow$  Piterbarg. Il approxime la distribution à maturité de la solution d'une EDS par la solution d'une EDS plus simple, en minimisant une norme  $L^2$ . Les prix sont ensuite approximatés par les prix donnés par l'EDS plus simple.

Questions :

- Quelle pondération effectuer entre ces modèles pour avoir un bon smile à tout strike et maturités ?
- Peut-on généraliser la méthode de Kahl à des modèles où la volatilité n'est pas un Ornstein Uhlenbeck ? Le problème est de pouvoir calculer des espérances d'intégrales de ponts pour des diffusions quelconques.
- La méthode Fouque-Papanicolaou-Sircar est jusqu'à présent la plus concluante pour de grandes maturités. Peut-on trouver une justification théorique à ceci et majorer le terme d'erreur ? Idée d'une démonstration : pour de longs temps, comme la volatilité a une mean reversion, seule la distribution stationnaire de cette volatilité intervient.

## 2. « DÉRIVATION » DE TEMPS D'ARRÊT ET PRODUITS AMÉRICAINS.

Donner le prix d'une option américaine revient à trouver un temps d'arrêt optimal. En quoi l'analyse du drap Brownien peut-elle aider ?

Est-ce que le drap Brownien, sans déterminer le temps d'arrêt optimal nécessairement, permet de déterminer la sensibilité du prix d'une option américaine aux paramètres de l'EDS sous-jacente ?

---

*Date:* 18 novembre 2007.

Ceci revient apparemment à « dériver » un temps d'arrêt, en un sens à définir. Une question basique pour comprendre cette notion serait : quelle définition peut-on donner à la dérivation d'un temps d'atteinte d'un niveau donné par le mouvement Brownien. La dérivation classique au sens de Malliavin semble constamment égale à 0...

ENST, 46 RUE BARRAULT, 75634 PARIS CEDEX 13. UNIVERSITÉ PARIS 6, LPMA, 175, RUE DU CHEVALERET F-75013 PARIS.

*E-mail address:* `bourgade@enst.fr`