# 1 Objet de cette note

Il s’agit de présenter des améliorations proposées du modèle SABR en les resituant dans l’ensemble des développement et études qui ont déjà été réalisés a ce sujet.

Notamment nous repréciserons

- les formule qui existent actuellement dans ARM.
- Les modèles présenté par M. Stupar dans ses différents papiers
- Les modèle présenté par J.D. Aubé dans son rapport final de stage
- Les modèles recommandé par nous même lors d’un précédent papier, et ayant abouti a un développement des méthodes dite directes exactes, disponibles actuellement dans la librairie “Closed Forms” du pricier générique “Grand Prix”

# 2 Les Différentes formules dérivées du modèle SABR

Différentes formules ont été développées a partir du modèle SABR pour pricer les options vanille. Ces formules se classent en cinq grandes familles:

- la méthode EDP

- la méthode directe

-la méthode normale Hagan

-la méthode supernormale

-la méthode metanormale

- Originellement Patrick Hagan créateur du modèle a privilégié la méthode normale, chaînon terminal d’une suite d’approximations. Les méthodes supernormales et metanormales sont des généralisations de la méthode normale, où des degrés de liberté supplémentaires sont introduit afin d’essayer d’augmenter l’efficacité de la méthode.La Méthode EDP naît d’une intégration directe du modèle en amont d’une série d’approximations faites pour aboutir à la formule normale mais qui ont un rôle non nul dans certain problèmes que rencontre la formule normale (prix des digitales quand le strike tends vers 0).

La description exacte de ces différentes méthodes est donnée après la description des variantes et définitions intermediaires afin de s'appuyer sur celles-ci

# 3 Les différentes variantes

Les variantes sont de trois types

- calcul de z

- calcul de $\zeta$

-calcul de $f_{avg}$

Nous utilisons les notations du papier de P. Hagan

## 3.1 Calcul de z

la définitions de z est

$$z = \frac{1}{\alpha}\int_K^f \frac{du}{u^\beta}$$

peut se calculer de manière exacte ou approchée, générant donc les variantes suivantes:

| **Calcul de z** | Formule |
|---|---|
| **Variante Exacte** | $z = \frac{1}{\alpha(1-\beta)}((f^{1-\beta}) - K^{1-\beta})$ |
| **Variante Géométrique Générale** | $z = \frac{1}{\alpha}(f_{avg})^{(1-\beta)}\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]$ |
| **Variante Géométrique (Restreinte)** | $z = \frac{1}{\alpha}(fK)^{\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]$ |
| **Variante Arithmétique** | $z = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{f-K}{f_{avg}{}^{\beta}}\right)$ |

z est essentiellement utilisé pour calculer x qui intervient directement dans les formules finales

Notes:

- Variante Arithmétique

On utilise la formule page 10 du document de M. Stupar “Etude au limite et Ajustement de convexité dans le cadre du modèle SABR. Cette formule s’obtient en approximant l’intégrant par une valeur moyenne: $f_{avg}$

$$\frac{1}{\alpha}\int_K^f \frac{du}{u^{\beta}} \approx \frac{1}{\alpha f_{avg}^{\beta}}\int_K^f du = \frac{(f-K)}{\alpha f_{avg}^{\beta}}$$

- Variante Géométrique générale:

par analogie avec l'approximation précédente, on obtient l'approximation géométrique par:

$$\frac{1}{\alpha}\int_K^f \frac{du}{u^\beta} \approx \frac{1}{\alpha f_{avg}^{\beta-1}}\int_K^f \frac{du}{u} = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{f}{K}\right)}{\alpha f_{avg}^{\beta-1}}$$

- Variante Géométrique Restreinte: formule 2.46 du papier de JD Aube

L'approximation géométrique utilisée par JD Aube et P. Hagan s'inspire du calcul ci-dessus avec la moyenne $f_{avg} = \sqrt{fK}$. Son origine peut se comprendre de la manière suivante:

$$\frac{\frac{1}{\alpha}\int_K^f \frac{du}{u^\beta}}{\frac{1}{\alpha}\int_K^f \frac{du}{u}} = \frac{\frac{1}{(1-\beta)}((f^{1-\beta})-K^{1-\beta})}{\mathrm{Log}\left(\frac{f}{K}\right)} \approx (fK)^{\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}\left(1+\frac{(1-\beta)^2}{24}\left(\mathrm{Log}\left(\frac{f}{K}\right)\right)^2+\frac{(1-\beta)^4}{1920}\left(\mathrm{Log}\left(\frac{f}{K}\right)\right)^4\right)$$

JD Aube n'utilise en fait que le premier terme (1) du développement limité.

Ce développement limité autour de beta =1, permet en fait de comprendre l'origine de certaine simplifications faite ultérieurement.

Mais l'intérêt principal de cette variante géométrique restreinte est qu'elle permet d'obtenir des solutions plus intéressante que la variante géométrique générale. L'explication tient au fait que la moyenne $f_{avg}$ utilisée est commune au z, au $\zeta$ et au développement de taylor présents dans la supernormale et la metanormale. L'interaction parait dégrader les résultats. Il serait possible de différencier les $f_{avg}$ en considérant un $f_{avg1}$ et un $f_{avg2}$ mais cela grossirait encore les familles et n'a pas été essayé.

Dans les essais nous présenterons donc les résultat associés a une variante géométrique (restreinte) définie par

$$z = \frac{1}{\alpha}(fK)^{\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]$$

### 3.2 Calcul de zêta (($\zeta$))

zêta (($\zeta$))dans beaucoup de formule de P. Hagan transporte la même information que z mais peut être représenté par une formule différente ayant des propriétés asymptotiques différentes. Dans la formule du smile on a typiquement:

$$\sigma = \frac{H(f, K)}{z}\frac{\zeta}{x}(1 + \mathrm{Correctifs})$$

avec $$x = \frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{\sqrt{1 - 2\rho\nu z + z^2\nu^2} + z\nu - \rho}{1 - \rho}\right)$$

zêta présente donc les mêmes choix que z s:

| **Calcul de $\zeta$** | Formule |
|---|---|
| **Variante Exacte** | $\zeta = \frac{\nu}{\alpha(1-\beta)}((f^{1-\beta}) - K^{1-\beta})$ |

| Calcul de $\zeta$ | Formule |
|---|---|
| **Variante Géométrique** | $\zeta = \frac{\nu}{\alpha}(fK)^{\left(\frac{1-\beta}{2}\right)} \mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]$ |
| **Variante Arithmétique** | $\zeta = \frac{\nu}{\alpha}\left(\frac{f-K}{f_{avg}\beta}\right)$ |

### 3.3 Le calcul de favg ($f_{avg}$)

$f_{avg}$ intervient dans la définition de $\zeta$ (zêta). il sert a modifier la forme de zêta et influence la forme des termes correctif.

Le choix de $f_{avg}$ dans les termes correctifs est équivalent au choix de la valeur de z utilisée dans le calcul de $b_1$ et $b_2$ dans le papier de P. Hagan les choix suivants sont possible:

| **Calcul de** $f_{avg}$ | Formule |
|---|---|
| **Variante Strike** | $f_{avg} = K$ |
| **Variante Forward** | $f_{avg} = f$ |
| **Variante “Arithméti-que”** | $f_{avg} = \frac{f+K}{2}$ |
| **Variante “Géométrique”** | $f_{avg} = \sqrt{fK}$ |

Notes:

- Variante “Géométrique”: C’est le choix de P. Hagan
- Variante “Arithmétique” C’est le choix de M.Stupar dans son équation 2.6

## 4 La méthode EDP

Partant dans le papier de P. Hagan de la formule B.47 du call:

$$V(t, f, \alpha) = (f-K)^{+} + \frac{1}{2}\frac{f-K}{x}\int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tau} + \theta + \kappa\tau} d\tau$$

ou

$$\theta = \frac{1}{4}\alpha\beta f_{avg}^{\beta-1}\nu\rho z^2 + \mathrm{Log}\left[\frac{\alpha(fK)^{\frac{\beta}{2}}z}{f-K}\right] + \mathrm{Log}\left[\frac{x(1-2\nu\rho z+\nu^2 z^2)^{\frac{1}{4}}}{z}\right]$$

On calcule l’intégrale exactement en utilisant les propriétés de la fonction d’erreur:

(Abramowitz page 304, formule 7.4.33

$$\int e^{-b^2x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left[e^{2ab}\left(\mathrm{erf}\left(bx+\frac{a}{x}\right)\right) + e^{-2ab}\left(\mathrm{erf}\left(bx-\frac{a}{x}\right)\right)\right]$$

On fait $u = x^2$ et on utilise $\mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x)$ et on obtient:

$$\int_0^t \frac{e^{-b^2u-\frac{a^2}{u}}}{\sqrt{u}}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2b}\left[e^{2ab}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right)-1\right) + e^{-2ab}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{-a}{\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right)+1\right)\right]$$

Donc le résultat est

$$\boxed{V_{call} = \mathrm{Max}[f-K, 0] + \frac{1}{4}e^{\theta}\frac{(K-f)}{x\sqrt{-2\kappa}}\left(e^{2|x|\sqrt{\frac{-\kappa}{2}}}\left(1+\mathrm{Erf}\left[-\frac{|x|}{\sqrt{2T}}-\sqrt{-\kappa T}\right]\right) + e^{-2|x|\sqrt{\frac{-\kappa}{2}}}\left(-1+\mathrm{Erf}\left[\frac{|x|}{\sqrt{2T}}-\sqrt{-\kappa T}\right]\right)\right)}$$

la formule précédente (EDP) a l'avantage d'éviter les approximations qui sont faite pour aboutir a la méthode directe ou normale et qui sont en fait mal vérifiées dans la pratique, a savoir:

$$e^{\kappa t} \approx \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\kappa t\right)^{3/2}} \qquad \frac{\kappa}{3} \approx \frac{\theta}{x^2}$$

Mais ces approximations ne sont importante que pour les valeurs extrêmes du strike et de la maturité

dans la formule de $\theta$ on utilise:

$$b_1 = C'(f_{avg}) = \beta f_{avg}{}^{\beta-1}$$

permettant a $f_{avg}$ d'influencer $\theta$ ainsi que

$$\kappa = \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha^2(\beta-2)\beta f_{avg}^{2(\beta-1)}}{1-2\rho\zeta+\zeta^2} + \frac{6\alpha\beta\nu\rho f_{avg}^{1-\beta}}{1-2\rho\zeta+\zeta^2} + \frac{\nu^4(2-3\rho^2+2\rho\zeta-\zeta^2)}{(1-2\rho\zeta+\zeta^2)^2}\right)$$

permettant a $\zeta$ d'influencer $\kappa$

la formule précédente s'obtient a partir de la formule B.44 de P. Hagan

$$\kappa = \frac{\nu^2\left(\frac{1}{4}\left(I''(\nu z_0)I(\nu z_0) - \frac{1}{8}(I'(\nu z_0))^2\right)\right) + \alpha^2\left(\frac{1}{4}b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right) + \frac{3}{4}\rho\nu\alpha b_1}{1-2\rho\zeta+\zeta^2}$$

et de $\nu z_0 = \zeta$ avec une définition de $b_1$ et de $b_2$ donnée par les formules B.32 du papier de P. Hagan a savoir:

On suppose pour établir les formules ci-dessus que $\kappa$ et donc à fortiori $b_1$ et $b_2$ sont constant. Mais cela est évidement une approximation. Pour tenter d'améliorer cette approximation, $\frac{\zeta}{\nu}$ est introduit qui permet de modifier la formule en adaptant la valeur de $\kappa$ (kappa).

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{B'(\alpha z_0)}{B(\alpha z_0)} \\ b_2 = \dfrac{B''(\alpha z_0)}{B(\alpha z_0)} \end{cases}$$

## 5 La Méthode Directe

P. Hagan calcule la volatilité implicite des call en comparant avec la même formule pour une vol de vol égale a zero.

Le résultat généralisé se met sous la forme:

$$\boxed{\sigma_{directe} = \frac{\mathrm{Log}[f \,\S\, K]}{z}\frac{\zeta}{\nu x}\left(1 - 2\frac{\theta}{x^2}T + \frac{2\mathrm{Log}\left[\dfrac{\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]\sqrt{fK}}{f-K}\right]}{x^2}T\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

c'est la formule 2.39 du document de JD Aube dans lequel on introduit artificiellement le coefficient $\frac{\zeta}{\nu z}$ qui est théoriquement égal a 1,

à l'image de ce qui est fait dans l'équation B.57 du document de P. Hagan

## 6 La méthode Supernormale

P. Hagan établi une relation entre volatilité lognormale et volatilité normale et poursuit son calcul en proposant pour volatilité normale équivalente après généralisation de la formule B.69a du document de P. Hagan:

$$\boxed{\sigma_N = \frac{(f-K)}{z}\frac{\zeta}{\nu x}\left(1 + \left(\frac{(-\beta(2-\beta))\alpha^2}{24 f_{av}^{2-2\beta}} + \frac{\rho\nu\alpha\beta}{4 f_{av}^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right)T\right)}$$

la volatilité lognormale équivalente associée est donc obtenue en convertissant la vol lognormale en vol normale par la formule:

$$\sigma_N = \sigma_{LN}\sqrt{fK}\frac{1+\frac{1}{24}\log^2\left(\frac{f}{K}\right)+\frac{1}{1920}\log^4\left(\frac{f}{K}\right)}{1+\frac{1}{24}\left(1-\frac{1}{120}\log^2\left(\frac{f}{K}\right)\right)\sigma_{LN}^2 T+\frac{1}{5760}\sigma_{LN}^4 T^2}$$

on convertit donc la volatilité normale en volatilité lognormale par:

$$\boxed{\sigma_{super} = (\sigma_N/(\sqrt{fK}))\frac{1+\frac{1}{24}\left(1-\frac{1}{120}\log^2\left(\frac{f}{K}\right)\right)\frac{\sigma_N^2 T}{fK}}{1+\frac{1}{24}\log^2\left(\frac{f}{K}\right)+\frac{1}{1920}\log^4\left(\frac{f}{K}\right)}}$$

Cette famille a été développée pour implémenter de manière modulaire et claire le passage par la volatilité normale. Mais elle ne donne pas de résultat meilleurs que la famille Metanormale présentée maintenant. Elle ne donne donc pas lieu a une implémentation dans la librairie

## 7 La Méthode Metanormale

Cette Famille est la plus importante. On exprime directement la volatilité lognormale en intégrant les développement limités en une seule passe. On ne passe pas par l’étape normale. C’est la formule B.65 du document de P. Hagan.

$$\boxed{\sigma_{meta} = \frac{\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]}{z}\frac{\zeta}{\nu x}\left(1+\left(\frac{\left(2\gamma_2-\gamma_1^2+\frac{1}{f_{avg}^2}\right)\alpha^2}{24 f_{av}^{-2\beta}}+\frac{\rho\nu\alpha\gamma_1}{4 f_{av}^{-\beta}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right)T\right)}$$

ou $\gamma_1 = \frac{\beta}{f_{avg}}$ $\qquad \gamma_2 = \frac{\beta(\beta-1)}{f_{avg}^2}$

## 8 La méthode Normale Hagan

C'est la famille qui englobe directement les méthodes Normales développées par P/ Hagan elle sont définie par:

$$\sigma_{hagan} = \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}}\left(\frac{\zeta}{x}\right)\frac{\left(1+\left(\frac{(1-\beta)^2\alpha^2}{24(fK)^{1-\beta}}+\frac{\rho\alpha\nu\beta}{4(fK)^{(1-\beta)/2}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right)T\right)}{\left(1+\frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2\left(\frac{f}{K}\right)+\frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4\left(\frac{f}{K}\right)\right)}$$

## 9 Liens avec les formules classiques

### 9.1 Formule de P. Hagan

C'est la formule (B69c) de P. Hagan:

Elle correspond à

- Méthode: NormalHagan
- zêta: géométrique
- favg: géométrique

les liens avec la famille metanormale sont les suivants:

Si on choisit:

- Méthode: MetaNormale
- zêta: géométrique
- favg: géométrique

Cela nous donne pour **z: géométrique**:

$$\sigma_{meta} = \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}}\left(\frac{\zeta}{x}\right)\left(1+\left(\frac{(1-\beta)^2\alpha^2}{24(fK)^{1-\beta}}+\frac{\rho\alpha\nu\beta}{4(fK)^{(1-\beta)/2}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right)T\right)$$

dans la quelle on il manque le diviseur, le résultat est donc bon pour beta proche de 1

$$\left(1 + \frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2\left(\frac{f}{K}\right) + \frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4\left(\frac{f}{K}\right)\right)$$

qui manque a l'équation B 65 pour retrouver la formule B69c

on peut aussi utiliser **z arithmetic**

$$z = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{f-K}{f_{avg}\beta}\right) \approx \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sqrt{fK}\,\mathrm{Log}[f/K]\left(1 + \frac{1}{24}\log^2\left(\frac{f}{K}\right) + \frac{1}{1920}\log^4\left(\frac{f}{K}\right)\right)}{f_{avg}\beta}\right)$$

avec $f_{avg} = \sqrt{fK}$ et on obtient:

$$\sigma_{LN} = \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}}\frac{\zeta}{\nu x}\frac{\left(1 + \left(\frac{(1-\beta)^2\alpha^2}{24(fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho\alpha\nu\beta}{4(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right)T\right)}{\left(1 + \frac{1}{24}\log^2\left(\frac{f}{K}\right) + \frac{1}{1920}\log^4\left(\frac{f}{K}\right)\right)}$$

qui donne un bon résultat pour beta proche de 0

Si on utilise **z exact**:

$$z = \frac{1}{\alpha(1-\beta)}((f^{1-\beta}) - K^{1-\beta}) \approx \frac{(fK)^{(1-\beta)/2}}{\alpha}\mathrm{Log}[f/K]\left(1 + \frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2\left(\frac{f}{K}\right) + \frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4\left(\frac{f}{K}\right)\right)$$

on obtient:

$$\sigma_{LN} = \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}} \frac{\zeta}{\nu x} \frac{\left(1 + \left(\frac{(1-\beta)^2\alpha^2}{24(fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho\alpha\nu\beta}{4(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right)T\right)}{\left(1 + \frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2\left(\frac{f}{K}\right) + \frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4\left(\frac{f}{K}\right)\right)}$$

qui est exactement La formule de P. Hagan

Le choix beta=1 correspond donc au modèle actuellement implémenté dans ARM géométrique

### 9.2 Formules de Milan Stupar

Elles s'obtiennent avec le choix suivant:

- Méthode: Metanormale
- z: Exact
- zêta: Arithmétique
- favg: Soit Arithmétique soit Géométrique

Le choix beta=1 correspond donc au modèle actuellement implémenté dans ARM arithmétique (pour le choix favg arithmétique)

### 9.3 Formules de Jean David Aube

le premier modèle est représente par:

- Méthode: Directe
- z: Exact
- zêta: Exact
- favg: Arithmétique

le deuxième modèle est représenté par:

- Méthode: Metanormale
- z: Exact
- zêta: Géométrique
- favg: Géométrique

•

# 10 Convergence de beta vers 1

Pour connaître les comportement des formules quand beta tend vers 1, il suffit d'étudier le comportement de z, $\zeta$ et x dans les différentes variantes de $f_{avg}$

## 10.1 Variante Exacte

$$z = \frac{1}{\alpha(1-\beta)}((f^{1-\beta}) - K^{1-\beta})$$

a la limite $\beta \to 1$ on a: $z \to \frac{1}{\alpha}\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K]}\right]$

## 10.2 Variante Géométrique

on calcule z par l'approximation:

$$z = \frac{1}{\alpha}(fK)^{\frac{(1-\beta)}{2}}\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]$$

a la limite $\beta \to 1$ on a: $z \to \frac{1}{\alpha}\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K]}\right]$

## 10.3 Variante Arithmétique

$$z = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{f-K}{f_{avg}\beta}\right)$$

a la limite $\beta \to 1$ on a: $z \to \frac{1}{\alpha}\left(\frac{f-K}{f_{avg}}\right)$

## 10.4 Sous Variantes

on considère alors les différentes sous-variantes suivant $f_{avg}$

#### 10.4.1 :Sous-Variante “Strike”

$$f_{avg} = K$$

a la limite $\beta \to 1$ on a: $z \to \frac{1}{\alpha}\left(\frac{f-K}{K}\right)$

#### 10.4.2 Sous-Variante “Forward”

$$f_{avg} = f$$

a la limite $\beta \to 1$ on a: $z \to \frac{1}{\alpha}\left(\frac{f-K}{f}\right)$

#### 10.4.3 Sous-Variante “Géométrique”

$$f_{avg} = \sqrt{fK}$$

a la limite $\beta \to 1$ on a: $z \to \frac{1}{\alpha}\left(\frac{f-K}{\sqrt{fK}}\right)$

#### 10.4.4 Sous-Variante “Arithmétique”

$$f_{avg} = \frac{f+K}{2}$$

a la limite $\beta \to 1$ on a: $z \to \frac{2}{\alpha}\left(\frac{f-K}{f+K}\right)$

Ce qui nous permet de considérer à la limite Beta -> 1, que les solutions z géométrique et z exacte équivalente, de même pour les solutions zêta géométrique et zêta exact.

Par contre l’utilisation de z arithmétique ou de zêta arithmétique donnent des solutions non équivalentes qui dépendent du choix de $f_{avg}$

Par conséquent la famille de formules Supernormale avec le choix z exacte a le même comportement que la famille Metanormale avec le choix z géométrique. La différence étant que la conversion vol Normale vers Vol Black est faite avec le choix $f_{avg}$ géométrique dans le cas Super Normale, alors qu’il est fait avec le même choix de $f_{avg}$ que pour le calcule de $\zeta$ dans le cas Meta Normale. Il s’en suit que le choix Supernormale a un comportement lognormal équivalent au comportement normal associé. Le choix de la famille Metanormal permet un simplification a ce niveau qui induit une légère distorsion de la conversion.

### 10.5 Lien avec les Formules de M.Stupar

$$\sigma_{LN} = \frac{\alpha\zeta}{x}\left(1 + \left(\frac{\rho\nu\alpha}{4} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right)T\right)$$

ou le $\zeta$ arithmétique vaut

$$\zeta = \frac{\nu}{\alpha}\left(\frac{f-K}{f_{avg}}\right) = \frac{2\nu}{\alpha}\left(\frac{f-K}{f+K}\right)$$

et le $f_{avg}$ arithmétique vaut

$$f_{avg} = \frac{f+K}{2}$$

la formule avec $\zeta$ arithmétique est bien répliquée par.

$$\sigma_{metanormale} = \frac{\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]}{z}\frac{\zeta}{\nu x}\left(1 + \left(\frac{\rho\nu\alpha\beta}{4} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right)T\right)$$

$$\text{ou } z_{exact} = \frac{1}{\alpha(1-\beta)}((f^{1-\beta}) - K^{1-\beta}) \to \frac{\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]}{\alpha}$$

mais aussi de manière très proche par un formule super normale car:

si on convertit donc la volatilité normale en volatilité lognormale par:

$$\sigma_{LN} \approx \frac{(\sigma_N \S (\sqrt{fK}))}{1 + \frac{1}{24}\log^2\left(\frac{f}{K}\right) + \frac{1}{1920}\log^4\left(\frac{f}{K}\right)}$$

et en utilisant:

$$f - K \approx \sqrt{fK}\,\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]\left(1 + \frac{1}{24}\log^2\left(\frac{f}{K}\right) + \frac{1}{1920}\log^4\left(\frac{f}{K}\right)\right)$$

on obtient

$$\sigma_{supernormale} \approx \frac{\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]}{z}\frac{\zeta}{\nu x}\left(1 + \left(\frac{-\alpha^2}{24} + \frac{\rho\nu\alpha}{4} + \frac{2 - 3\rho^2}{24}\nu^2\right)T\right)$$

et avec $z_{exact(\beta = 1)} = \frac{1}{\alpha}\mathrm{Log}\left[\frac{f}{K}\right]$ cela nous donne bien la formule de Milan à la “petite” correction $\frac{-\alpha^2}{24}$ près

soit la formule

$$\sigma_{milan} \approx \frac{\zeta\alpha}{\nu x}\left(1 + \left(\frac{\rho\nu\alpha}{4} + \frac{2 - 3\rho^2}{24}\nu^2\right)T\right)$$

avec $\zeta = \frac{2\nu}{\alpha}\left(\frac{f - K}{f + K}\right)$ et $x = \frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{\sqrt{1 - 2\rho\xi + \xi^2} + \xi - \rho}{1 - \rho}\right)$

Donc en conclusion

La formule de Milan (arithmétique et géométrique) appartient à la classe des formules metanormale avec z exact ou géométrique et zêta arithmétique.
De manière approximative, la formule de Milan appartient aussi
à la classe des formules supernormales toujours avec z exact ou géométrique et zêta arithmétique

pour les calculs numerique , il est uitile de savoir que

$$\lim_{\rho \to 1} (x) = \frac{1}{\nu}\ln\left(1 + \frac{z\nu}{|1 - z\nu|}\right)$$

et que quand f->K,

$$\frac{\zeta}{\nu x} \sim 1 - \frac{\zeta}{12}(6\rho + \zeta(-2 + 3\rho^2))$$

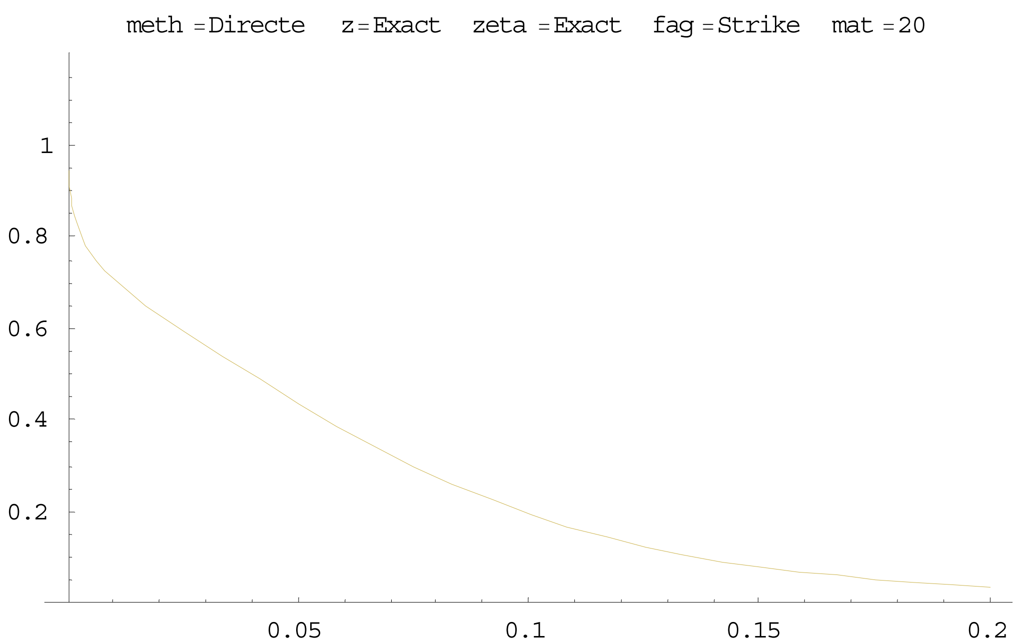
et donc

$$\sigma_{milan} \approx \alpha\left(1 + \left(\frac{\rho\nu\alpha}{4} + \frac{2 - 3\rho^2}{24}\nu^2\right)T\right)\left(1 - \frac{\zeta}{12}(6\rho + \zeta(-2 + 3\rho^2))\right)$$

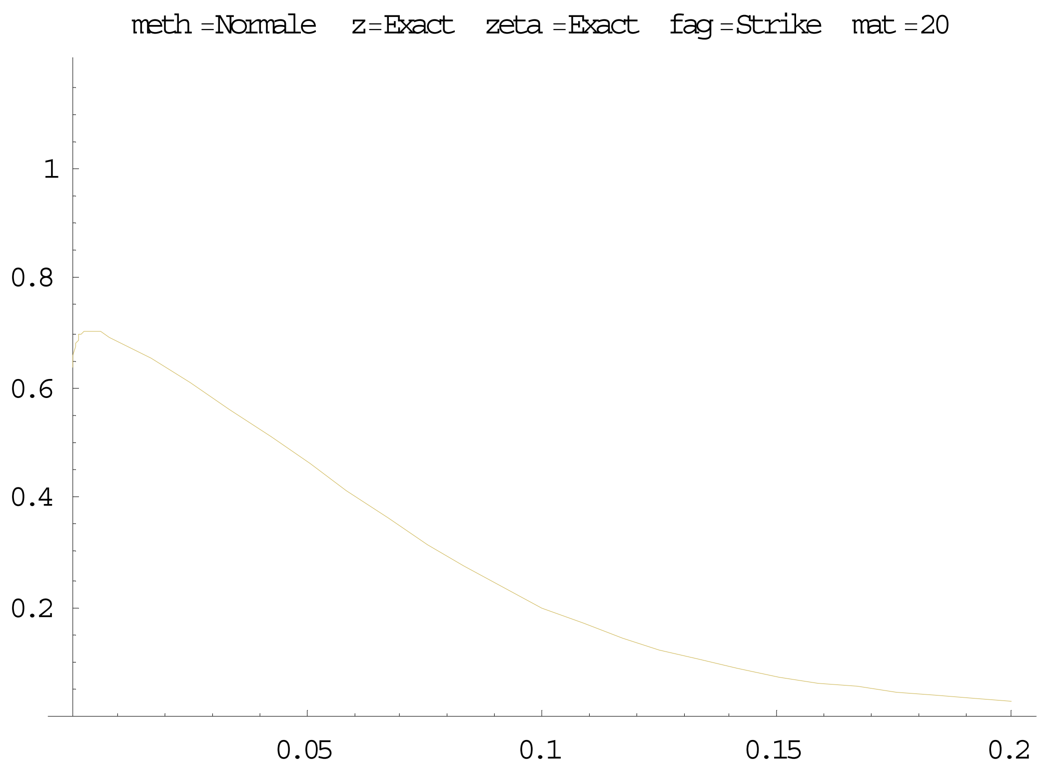
# 11 Comparaison des méthodes

## 11.1 Amélioration de la convergence apportée par la Directe

Comme le montre les graphiques la directe z=Exacte, zêta=Exact,fag=Strike, correspondant a l'ancienne dénomination "Directe Exacte zero" a une digitale qui tend vers 0 quand le strike tend vers zero pour des maturités même élevée



elle corresponds donc a un progrès notoire par rapport a la normale recommandée dans le rapport de P.Hagan pour la même digitale se présente comme:




### 11.2 Croisement de deux critères a 30 ans

Toujours avec le but d'améliorer le comportement des fonctionnelles pour les grande maturités, la famille des meta normales a été créée avec beaucoup de souplesse. Les tests de sélection sont donc pensés avec une maturité de 30 ans.

Ces test comportent:

- Convergence de la digitale vers 1 quand k->0: Seul sont retenues les situations ou une convergence vers la digitale est observée, de manière monotone et pas trop accidentelle

- Convergence des prix de call vers 0 quand k-> infini: seul sont retenues les situations ou une convergence vers zero du call est observée

Signification des sigles:

- SA: Formule Analytique PDE

- Su: Formule Supernormale
- M: Formule Metanormale
- D: Direct
- NH: NormalHagan

TABLE 1.

| z méthode | ζ méthode | $f_{avg}$ | Digital Acceptable | Call Acceptable | Résultat | Commentaire |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Exact | Exact | Forward | SA | SA,Su,D,NH,M | SA | |
| Exact | Exact | Strike | SA,D | SA,Su,D,NH,M | SA,D | |
| Exact | Exact | Arith-metic | SA | SA,Su,D,NH,M | SA | |
| Exact | Exact | Géomé-trique | SA | SA,Su,D,NH,M | SA | Test Digital: D presque bien |
| Exact | Geome-tric | Forward | SA | SA,NH | SA | Test Call: Su,M,D décroissent trop vite |
| Exact | Geome-tric | Strike | SA,D,M | SA,**NH** | SA | Test Call: Su M,D ne décroissent pas |
| Exact | Geome-tric | Arith-metic | SA | SA,NH | SA | Test Call: Su M,D ne décroissent pas |
| Exact | Geome-tric | Geome-tric | SA,D | SA,Su,D,NH,M | SA | |
| Exact | Arith-metic | Forward | SA,D,Su,M | SA,NH | SA | |

TABLE 1.

| z méthode | ζ méthode | $f_{avg}$ | Digital Acceptable | Call Acceptable | Résultat | Commentaire |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Exact | Arith-metic | Strike | SA | SA,NH | | Test Call: Su,D,M baisse trop vite |
| Exact | Arith-metic | Arith-metic | SA,M,D | SA,Su,D,NH,M | SA,M,D | Attention: Test Call: D,M baisse vite (trop peut être!) |
| Exact | Arith-metic | Geome-tric | SA | SA,NH | SA | |
| Geome-tric | Exact | Forward | SA | SA,Su,D,NH,M | SA | Test Digital: D résiste bien |
| Geome-tric | Exact | Strike | SA | SA,D,NH,M | | Test Digital: D est presque bien |
| Geome-tric | Exact | Arith-metic | SA | SA,Su,D,NH,M | SA | |
| Geome-tric | Exact | Geome-tric | SA | SA,Su,D,NH,M | SA | Test Digital: D résiste bien |
| Geome-tric | Arith-metic | Forward | SA,M,D | SA,NH | SA | Test Call: D,M explose |
| Geome-tric | Arith-metic | Strike | SA | SA,NH | SA | Test Call: D,M baisse trop vite |
| Geome-tric | Arith-metic | Arith-metic | | SA,Su,D,NH,M | | Test Digital: D presque bien, SA rejoint 1 trop brutalement |
| Geome-tric | Arith-metic | Geome-tric | SA | SA,NH | SA | M: M. Stupar |

TABLE 1.

| z méthode | ζ méthode | $f_{avg}$ | Digital Acceptable | Call Acceptable | Résultat | Commentaire |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Geometric | Geometric | Forward | SA | SA,**NH** | | Test Call: D, Su,M baisse trop vite |
| Geometric | Geometric | Strike | SA,M,D | SA,NH | SA | Test Call: D ne baisse pas assez vite |
| Geometric | Geometric | Arithmetic | SA | SA,NH | | |
| Geometric | Geometric | Geometric | SA | SA,Su,D,NH ,M | SA | Test Digital: D presque bien |
| Arithmetic | Exact | Forward | | | | Chaotic |
| Arithmetic | Exact | Strike | | | | Chaotic |
| Arithmetic | Exact | Arithmetic | | SA | | Test Digital: Aucun ne parvient a rejoindre1 |
| Arithmetic | Exact | Geometric | SA,D,M,Su | SA,D,Su,M | SA,D,M,Su | Test Call: D,M,Su baisse très vite!(sans doute trop) |
| Arithmetic | Geometric | Forward | | | | Chaotic |
| Arithmetic | Geometric | Strike | | | | Chaotic |
| Arithmetic | Geometric | Arithmetic | | SA | | Test Digital SA n’est pas monotone |

TABLE 1.

| z méthode | ζ méthode | $f_{avg}$ | Digital Acceptable | Call Acceptable | Résultat | Commentaire |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Arith-metic | Geome-tric | Geome-tric | SA,D,M,Su | SA,D,Su,M | SA,D,M,Su | Test Call: D,M,Su baisse très vite!(sans doute trop) |
| Arith-metic | Arith-metic | Forward | | | | Chaotic |
| Arith-metic | Arith-metic | Strike | M, | M,SA | M | Test Digital: SA a une rupture de pente |
| Arith-metic | Arith-metic | Arith-metic | | SA,D,M | | Test Digital: SA non monotone |
| Arith-metic | Arith-metic | Geome-tric | SA,D,Su,M | SA,D,Su,M | SA,D,Su,M | Test Call: SA,D,M baisse très vite! |

## 12 Solutions retenues

De cette étude exhaustive, plusieurs famille de solutions ont retenue notre attentions:

### 12.1 Amélioration de la directe Exacte/Exacte

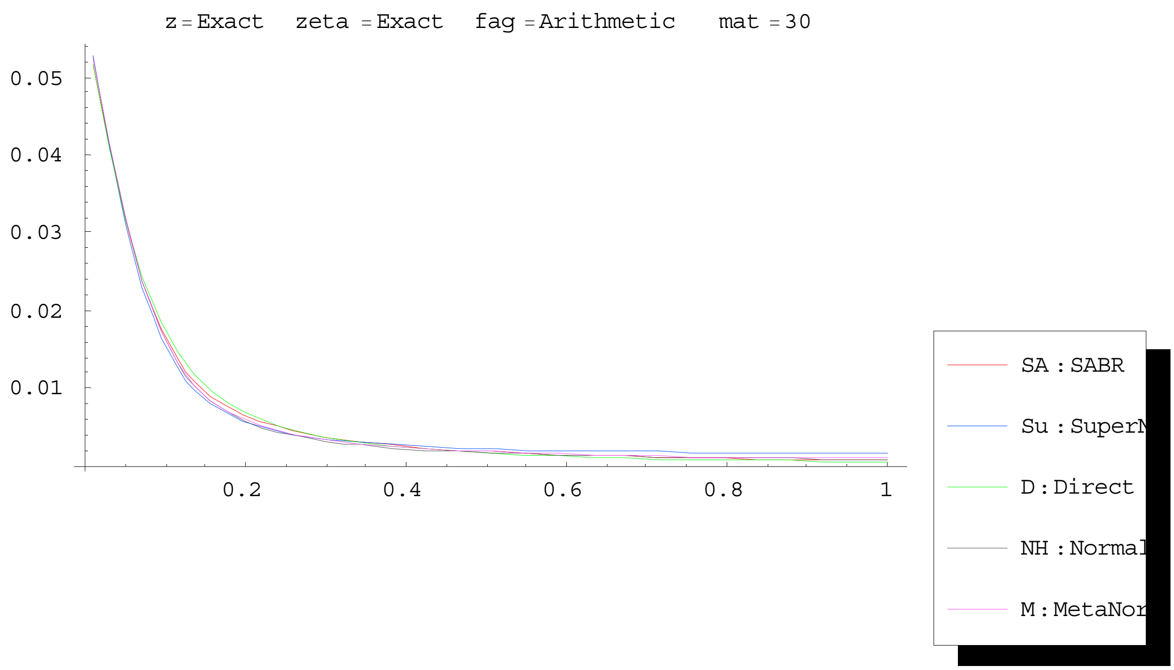
Le choix implémenté actuellement est pour les directes

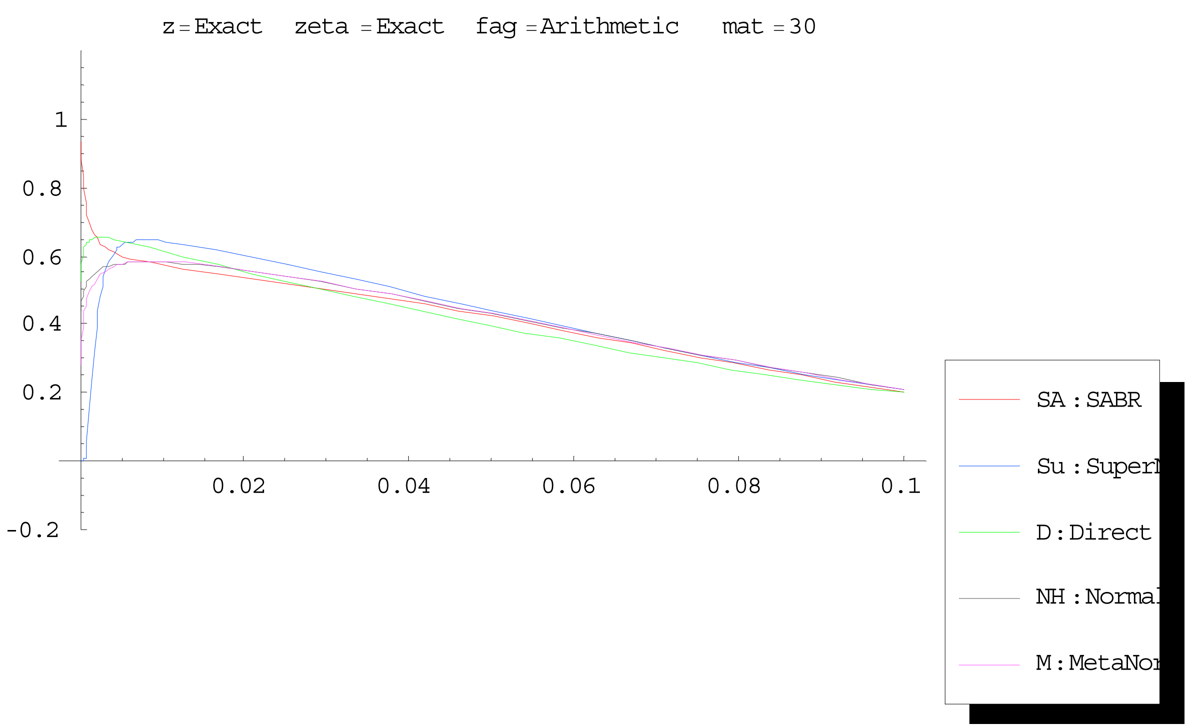
Exacte/Exacte/Arithmétique, Géométrique/Géométrique/Arithmétique et Arithmétique/Arithmétique/Arithmétique

Au vu des courbes obtenues, il aurait avantage a utiliser pour les longues maturités une solution

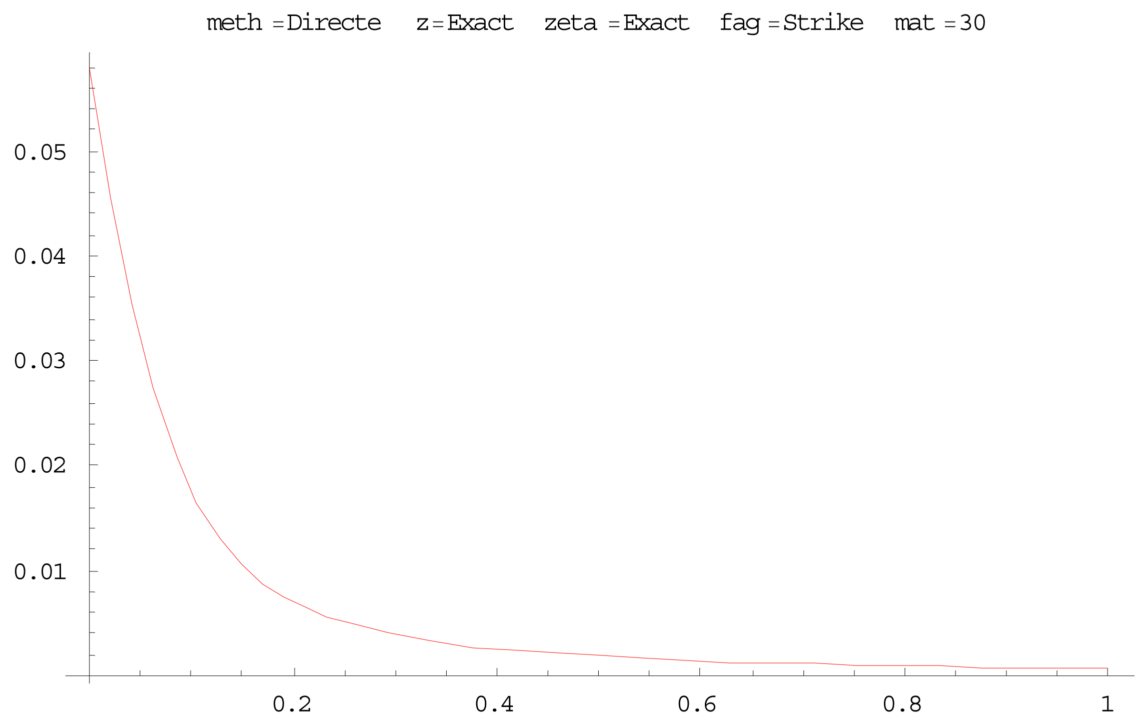
Exacte/Exacte/Strike

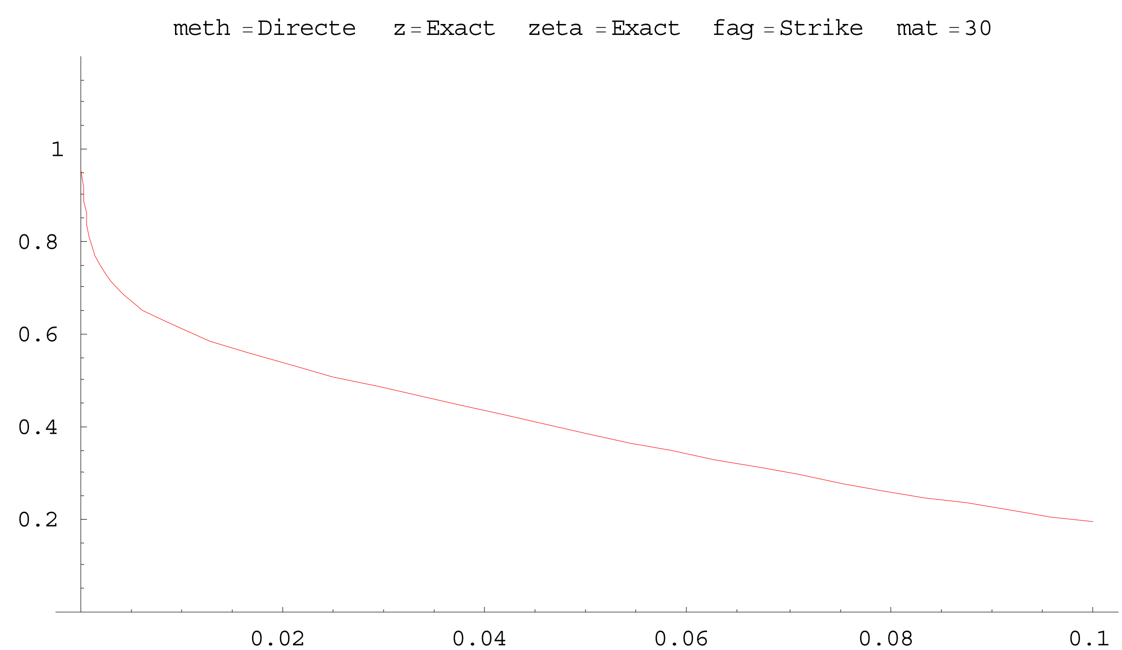
Les courbes qui appuient cette conclusion sont données ici:



ou l'on voit la digitale de la famille D certes être exploitable plus loin que la normale hagan, mais pas converger vers 1 quand K-> 0,Contrairement aux graphes suivants de la directe Exact/Exacte/Strike:



## 12.2 Autres cas recommandés

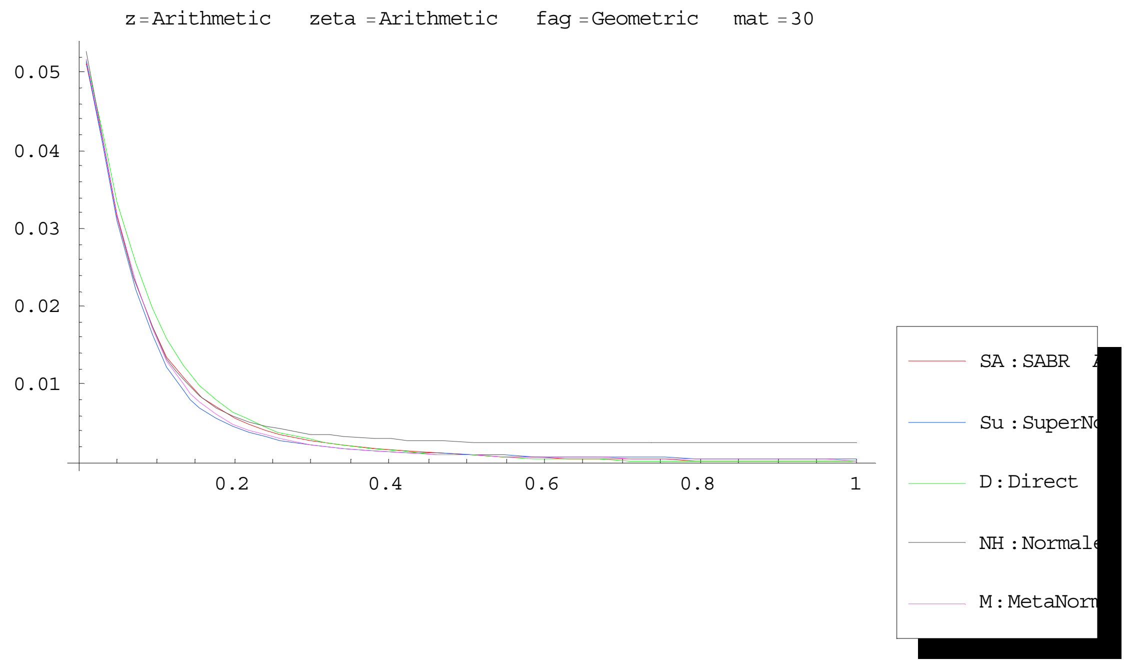
Les tests montrent que la directe peut s’utiliser aussi dans les cas suivants:

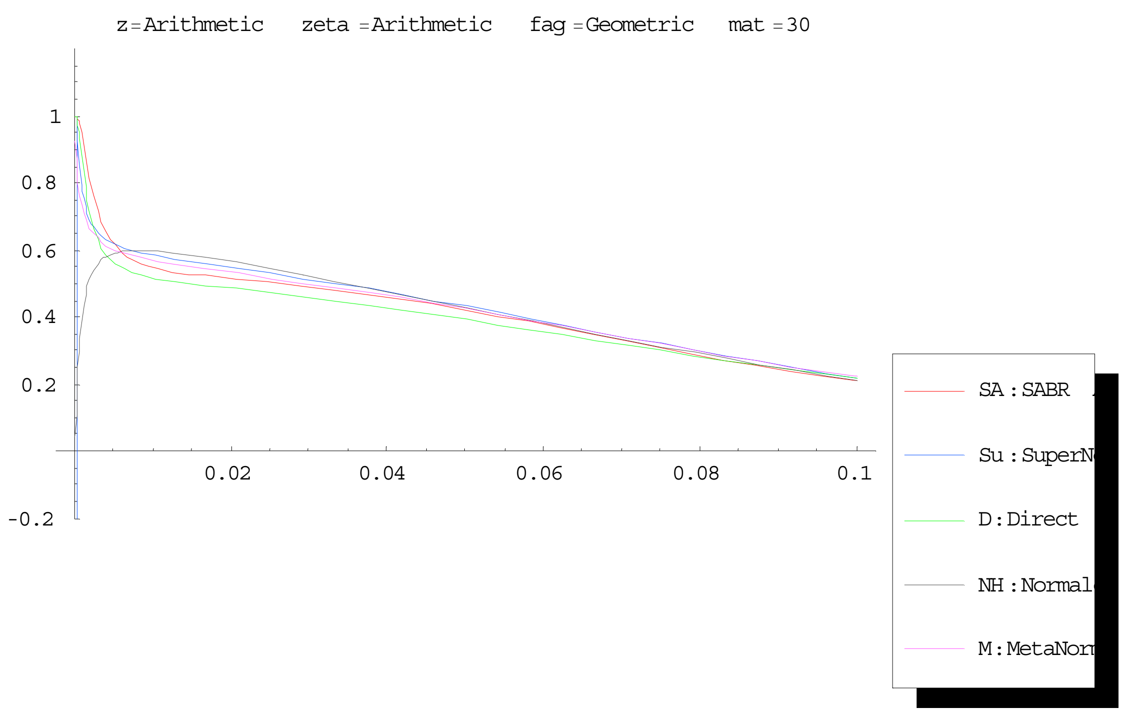
Arithmetic/exact/Géométrique

Arithmetic/Géométrique/Géométrique

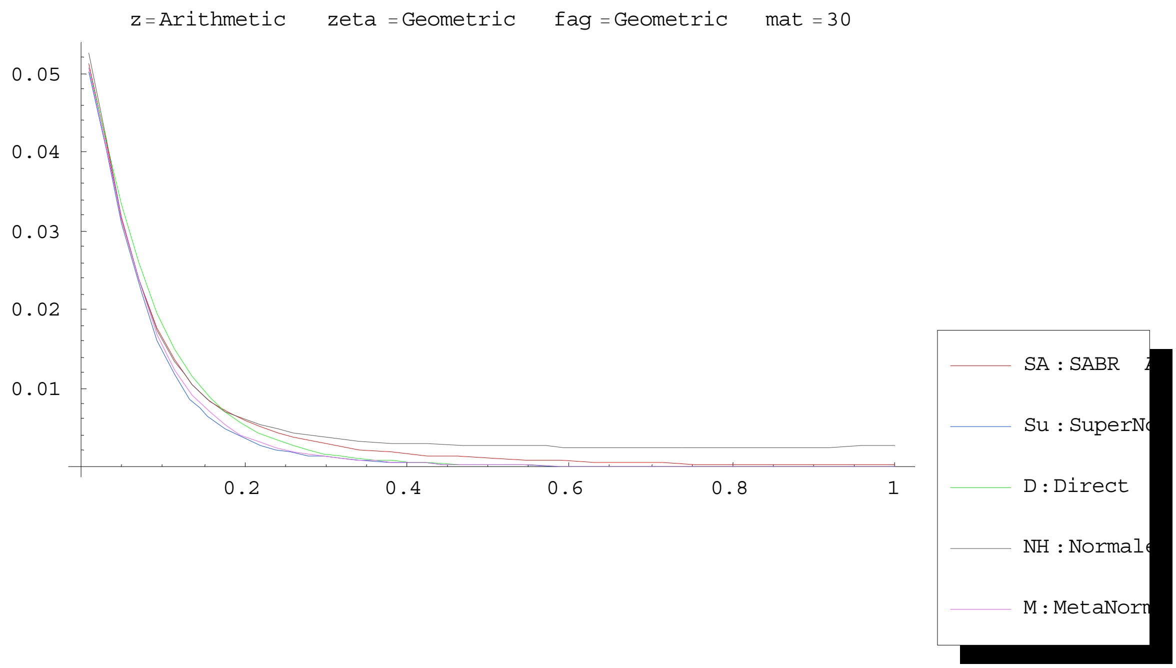
Arithmetic/Arithmetic/Géométrique

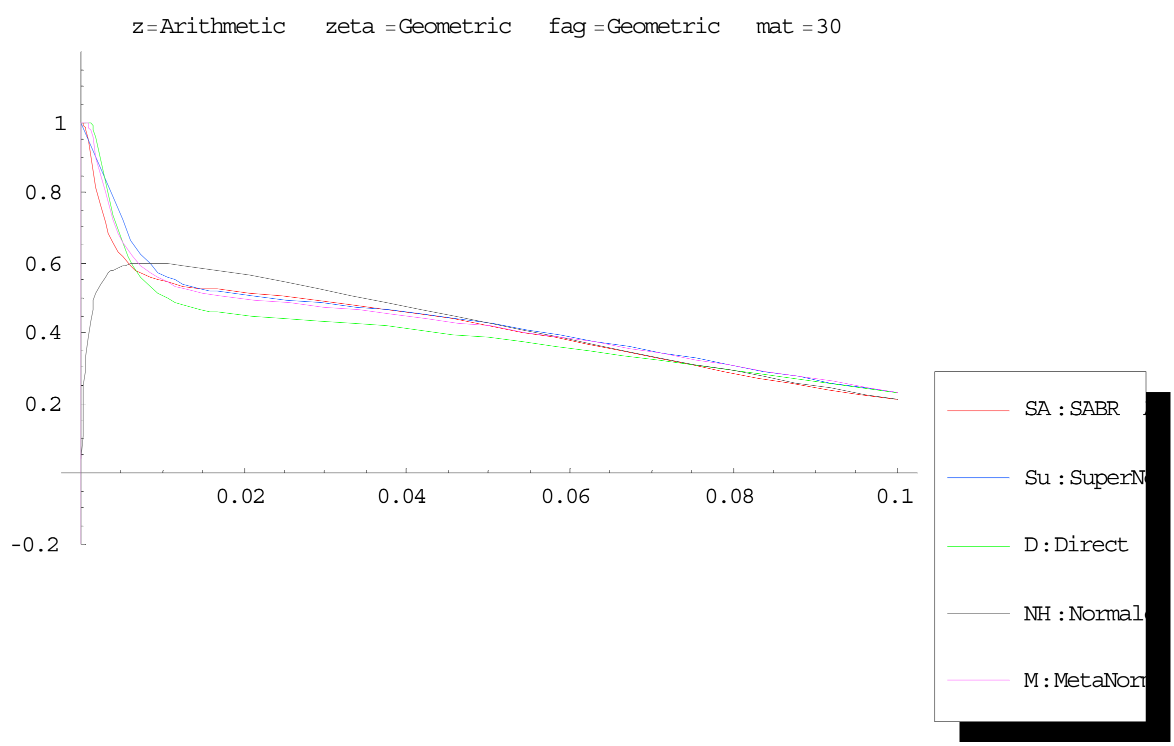
Les trois groupes de courbes sont données ici



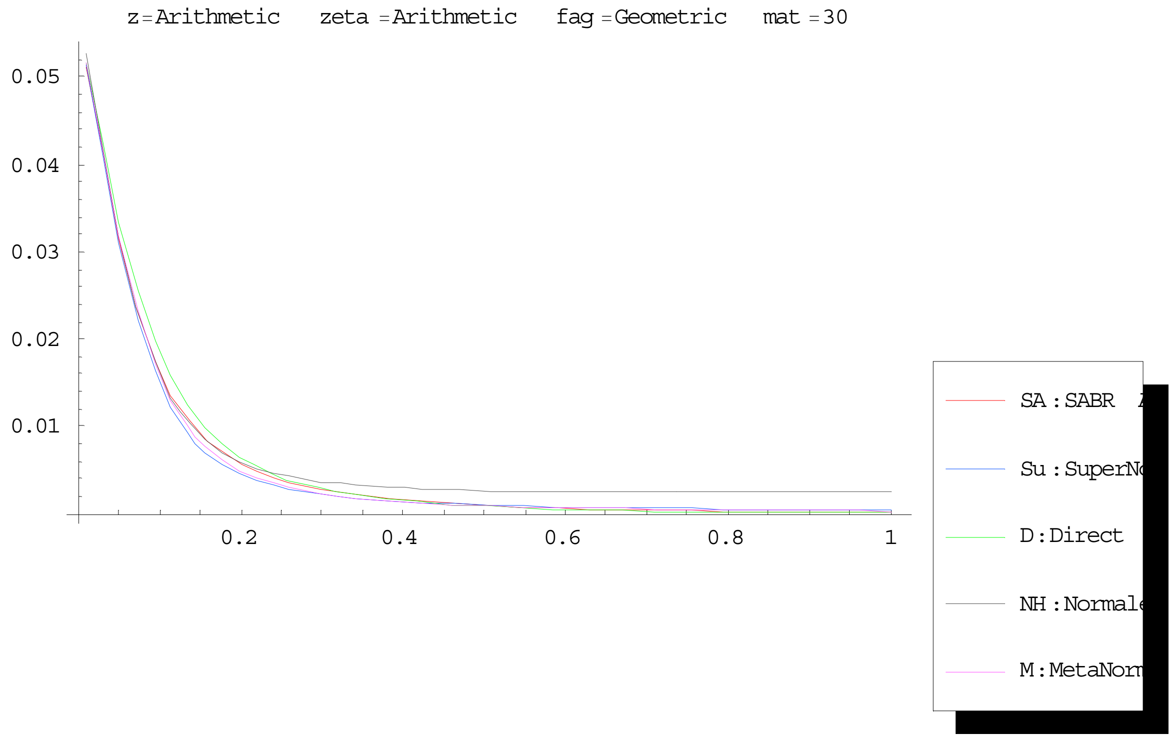



puis

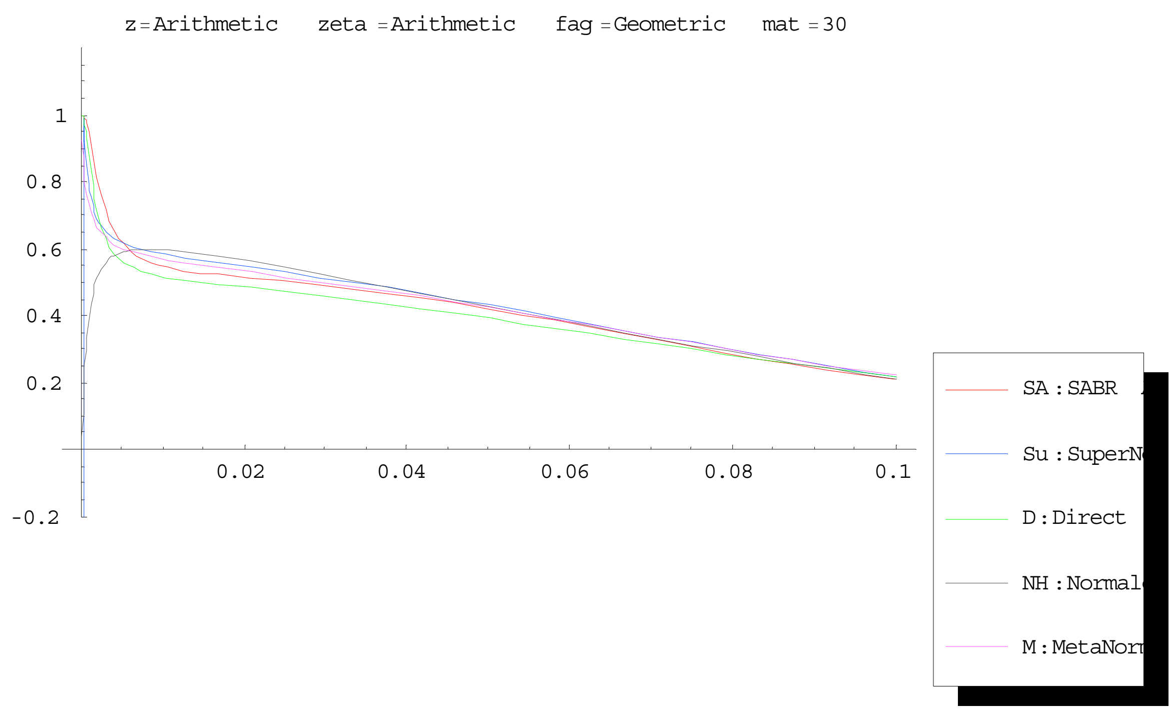

z = Arithmetic zeta = Geometric fag = Geometric mat = 30
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.2
0.4
0.6
0.8
1
SA : SABR
Su : SuperNo
D : Direct
NH : Normale
M : MetaNorm


z = Arithmetic zeta = Geometric fag = Geometric mat = 30
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
SA : SABR
Su : SuperNo
D : Direct
NH : Normale
M : MetaNorm

enfin



z = Arithmetic zeta = Arithmetic fag = Geometric mat = 30
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.2
0.4
0.6
0.8
1
SA : SABR
Su : SuperNo
D : Direct
NH : Normale
M : MetaNorm

z = Arithmetic zeta = Arithmetic fag = Geometric mat = 30
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
SA : SABR
Su : SuperNo
D : Direct
NH : Normale
M : MetaNorm

Les courbes sont très similaires. Néanmoins on note les points suivants:

- La directe sous-estime les digitales par rapport a la solution analytique et la meta normale.
- La meta normale parait équivalente a la super normale, il n'y a donc pas d'avantage a modulariser le passage de la vol normale a la vol log normale comme dans la super normale. Nous recommandons donc de choisir une méthode metanormale plutôt qu'une méthode normale
- Ce Qui est important est d'avoir z arithmétique et fag géométrique. Les solution zêta géométrique et zêta exact sont très proche comme on peut s'en douter en considérant leur équivalence quand K->0. Ce qui les différencie de zêta arithmetic.

# 13 Développements prévus de la librairie "Closed Forms"

La librairie Closed Forms contient les formules suivantes:

## 13.1 Formules SABR:

| Flag "closed Form" actuel | Identification dans la nouvelle classification |
|---|---|
| DIRECTEXACT | Direct / Exact / Exact / Arithmetic |
| DIRECTGEOMETRIC | Direct / Géometric / Géometric / Arithmetic |
| DIRECTARITHMETIC | Direct / Arithmetic / Arithmetic / Arithmetic |
| NORMALEXACT | Normale Hagan / Exact/ - /- |
| NORMALGEOMETRIC | Normale Hagan / Géometric / - |
| NORMALARITHMETIC | Normale Hagan / Arithmetic / - |
| ANALYTICZP0 | EDP / Exact / Exact / Strike |
| ANALYTICZP2 | EDP / Exact / Exact / Arithmetic |

## 13.2 les formules de ARM sont les suivantes:

| Nom Usuel | Identification dans la nouvelle classification |
|---|---|
| SABR_IMPLNVOL | Direct / Exact / Exact / Arithmetic |
| SABR_G ou SABR_A | Normale Hagan |

### 13.3 Les formule recommandé par M.Stupar:

| Nom Usuel | Identification dans la nouvelle classification |
|---|---|
| ARITHMETIC | MetaNormale / Exact / Exact / Arithmetic |
| GEOMETRIC | MetaNormale / Exact / Arithmetic / Géometric |

### 13.4 Les Formules recommandé par JD Aubé

| Nom Usuel | Identification dans la nouvelle classification |
|---|---|
| DIRECT | Direct / Exact / Exact / Arithmetic |
| NORMALE | MetaNormale / Exact / Géometric / Géometric |

### 13.5 Les extensions de la directe recommandées dans cette note

| Flag “closed Form” actuel | Identification dans la nouvelle classification |
|---|---|
| DIRECTEXACT0 | Direct / Exact / Exact / Strike |
| DIRECTARIEXAGEO | Direct / Arithmetic / Exact / Géometric |
| DIRECTARIGEOGEO | Direct / Arithmetic / Géometric / Géometric |
| DIRECTARIARIGEO | Direct / Arithmetic / Arithmetic / Géometric |

### 13.6 La nouvelle Famille de normale recommandée dans cette note:

| Flag “closed Form” actuel | Identification dans la nouvelle classification |
|---|---|
| METANORMALEEXACT | MetaNormale / Arithmetic / Exact / Géometric |
| METANORMALEGEOMETRIC | MetaNormale / Arithmetic / Géometric / Géometric |
| METANORMALEARITHMETIC | MetaNormale / Arithmetic / Arithmetic / Géometric |

## 14 Conclusion

L’Etude exhaustive des équations de P. Hagan ainsi que des développements associes a permis de continuer d’améliorer l’efficacité des formule de type SABR pour décrire le smile. Les nouvelles formules sont groupable en trois catégories:

- une formule plus analytique mais légèrement plus coûteuse a implémenter qui parait très robuste.Elle donne une valeur de call plutôt qu’une valeur de volatilité implicite

- une amélioration des formules directes: la Directe Exacte/Exacte/Strike. La formulation directe confirme son intérêt dans de nouvelles versions: Arithmetic/Géometric/Géometric ou Arithmetic/Exact/Géometric ou bien Arithmetic/Arithmetic/Géometric

-une évolution des modèles normaux: la famille metanormale dans la version Arithmetic/Géometric/Géometric ou Arithmetic/Exact/Géometric ou bien Arithmetic/Arithmetic/Géometric. qui font bien converger la digitale vers 1 lors de la convergence du strike vers zero