

Invariance d'échelle et perte d'Itakura-Saito : Une interprétation field-théorique, une borne unifiée et un exemple détaillé

Olivier Croissant

2025

Résumé

Ce travail explore les propriétés géométriques et statistiques de la perte d'Itakura-Saito (IS) à travers le prisme de la théorie des champs. Nous démontrons que minimiser la perte IS équivaut à minimiser un fonctionnel d'énergie pour un champ de prédiction. Une analyse linéarisée révèle que ce fonctionnel correspond à une théorie de champ scalaire massif, qui devient invariant conforme dans la limite des grandes valeurs cibles. Cette invariance améliore la robustesse et l'optimisation en aplatissant le spectre du Hessien. De plus, nous dérivons une borne fondamentale, dépendante de l'architecture, sur la vitesse de propagation de l'information dans les réseaux entraînés avec la perte IS, prouvant que bien que l'invariance conforme améliore le conditionnement, elle ne peut violer cette limite de vitesse causale. La théorie est unifiée avec la dynamique du Noyau Tangent Neural (NTK) et illustrée par un exemple concret.

Table des matières

1	Introduction	2
I	Fondation Field-Théorique	2
2	De la perte à la théorie des champs	3
3	Régime linéarisé et terme de masse	3
4	Propagateur et limite conforme	3
5	Implications pour l'optimisation et la robustesse	4
6	Théorème de conditionnement spectral	4
7	Analogie holographique	5
II	Dynamique et limites de vitesse dans les réseaux	5

8	Une borne unifiée sur la vitesse de propagation dans les réseaux	5
8.1	Interprétations et conséquences	5
9	Dynamique NTK avec perte IS	6
10	Un cône de lumière discret pour l’influence des prédictions	6
11	Stabilité spectrale et taux de convergence	7
12	Queues exponentielles au-delà de la localité stricte	8
III	Synthèse et exemple	8
13	Synthèse : Causalité, conditionnement et invariance conforme	8
14	Un exemple concret 1D (Noyau tridiagonal)	8
15	Conclusion de l’exemple	9
16	Conclusion générale	9
17	Résultats expérimentaux : robustesse à l’architecture	11
A	Appendix A — De la perte Itakura–Saito à une action de champ scalaire	14
	Appendix A — De la perte Itakura–Saito à une action de champ scalaire	14
B	Appendix B — Analyse mathématique : existence, régularité et spectre	17
	Références	21

1 Introduction

Ce travail synthétise et étend les insights géométriques des Annexes D et E de “Risk-Averse Reinforcement Learning with Itakura-Saito Loss” par Udovichenko et al. (2025). Nous présentons un compte-rendu autonome qui interprète la perte d’Itakura-Saito (IS) through the double lentille de la théorie des champs et de l’apprentissage statistique. Cette perspective révèle comment son **invariance d’échelle** inhérente et son **invariance conforme** émergente contribuent à une optimisation plus robuste et mieux conditionnée dans les modèles d’apprentissage automatique. Nous faisons ensuite le lien avec une limite fondamentale sur la dynamique d’apprentissage en dérivant une borne unifiée sur la vitesse de propagation de l’information dans les réseaux, démontrant que les contraintes de causalité architecturales persistent même sous un conditionnement optimal.

Première partie

Fondation Field-Théorique

2 De la perte à la théorie des champs

La perte IS peut être naturellement reformulée comme un fonctionnel d'énergie pour un champ de prédiction. Soit $\varphi(x)$ représentant les prédictions du modèle et $y(x)$ la fonction cible. Nous définissons l'action :

$$S[\varphi] = \int dx \left[\lambda \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{y(x)}{\varphi(x)} - \log \left(\frac{y(x)}{\varphi(x)} \right) - 1 \right],$$

où λ est un paramètre de régularisation. Cette formulation variationnelle cadre la minimisation de la perte IS comme la recherche d'un champ φ qui équilibre la régularité (premier terme) et la fidélité locale à la cible (deuxième groupe de termes).

3 Régime linéarisé et terme de masse

Pour analyser le comportement, nous développons autour d'une cible constante $y(x) = y_0$. Posant $\varphi(x) = y_0 + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon \ll y_0$, le potentiel IS se développe en :

$$V_{\text{IS}}(y_0, \varphi) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{y_0} \right)^2.$$

L'action linéarisée devient alors :

$$S[\varepsilon] \approx \int dx \left[\lambda \left(\frac{d\varepsilon}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2y_0^2} \varepsilon(x)^2 \right].$$

Ceci est équivalent à l'action pour un champ scalaire libre massif, avec le terme de masse donné par :

$$m^2 = \frac{1}{2y_0^2}.$$

4 Propagateur et limite conforme

Le propagateur $G(x)$, qui encode la structure de corrélation du champ, satisfait :

$$\left(-\lambda \frac{d^2}{dx^2} + m^2 \right) G(x) = \delta(x).$$

En une dimension, la solution est :

$$G(x) = \frac{y_0}{\sqrt{2\lambda}} \exp \left(-\frac{|x|}{\sqrt{2\lambda}y_0} \right).$$

Notamment, dans la limite conforme où $y_0 \rightarrow \infty$ (ou équivalamment $\lambda \rightarrow 0$), la masse s'annule $m^2 \rightarrow 0$, et le propagateur se réduit à une loi de puissance :

$$G(x) \sim \frac{1}{|x|}.$$

Ceci signale l'émergence de la symétrie conforme : le système devient sans échelle, exhibant des corrélations à longue portée et sans échelle de longueur intrinsèque.

5 Implications pour l'optimisation et la robustesse

La perte IS offre des propriétés d'optimisation favorables par rapport à l'Erreur Quadratique Moyenne (MSE) :

$$L_{\text{MSE}}(\theta) = \frac{1}{2} \|f(\theta) - y\|^2,$$

$$L_{\text{IS}}(\theta) = \sum_i \left(\frac{y_i}{f_i(\theta)} - \log \frac{y_i}{f_i(\theta)} - 1 \right).$$

Sous un développement local $f = y + \varepsilon$, la perte IS se comporte comme :

$$L_{\text{IS}}(f) \approx \frac{1}{2y^2} \varepsilon^2,$$

ce qui est une **MSE renormalisée** pondérée par $1/y^2$. Ceci incarne une normalisation adaptative implicite :

- **Grandes valeurs cibles** \Rightarrow **pénalité plus faible** sur l'erreur absolue (priorisant l'erreur relative).
- **Petites valeurs cibles** \Rightarrow **pénalité plus forte** sur l'erreur absolue.

Cette mise à l'échelle automatique agit comme une forme de **descente de gradient naturelle**, améliorant la stabilité de l'entraînement, especially pour des données hétéroscédastiques.

6 Théorème de conditionnement spectral

Le lien avec l'invariance conforme impacte directement la géométrie de l'optimisation.

Théorème 6.1 (Réduction de variance spectrale, informel). *Soit $\varphi \sim G$ un ensemble de modèles, et soit $G_{\text{conf}} \subset G$ le sous-ensemble où l'action induite par IS est invariante conforme. Pour une mesure spectrale $\lambda(\varphi)$ du Hessian, nous avons :*

$$\mathbb{E}_{\varphi \in G_{\text{conf}}}[\text{Var}(\lambda(\varphi))] < \mathbb{E}_{\varphi \in G}[\text{Var}(\lambda(\varphi))].$$

L'invariance conforme aplatit le spectre des valeurs propres du Hessian, réduisant son conditionnement et conduisant à des paysages d'optimisation mieux conditionnés et plus robustes.

7 Analogie holographique

Dans la limite conforme ($y_0 \rightarrow \infty$), l'action se réduit à celle d'un champ scalaire sans masse :

$$S[\varepsilon] = \int dx \lambda \left(\frac{d\varepsilon}{dx} \right)^2,$$

une Théorie Conforme des Champs (CFT) 1D avec fonction de corrélation $G(x) \sim 1/|x|$. En établissant une analogie avec la correspondance AdS/CFT, les prédictions $\varphi(x)$ sur la “frontière” (espace des données) imposent des contraintes de cohérence à longue portée within the représentation latente “en volume” (bulk) du modèle. Cette cohérence globale est un mécanisme hypothétique pour la robustesse de généralisation améliorée observée avec la perte IS.

Deuxième partie

Dynamique et limites de vitesse dans les réseaux

8 Une borne unifiée sur la vitesse de propagation dans les réseaux

Nous considérons maintenant un réseau (un graphe, un treillis ou un circuit computationnel) avec des nœuds V , des arêtes E , une distance métrique $d(x, y)$, et des règles de mise à jour locales. Chaque nœud $x \in V$ a un état $\varphi_x(t)$ évoluant dans le temps. Soit \mathcal{O}_x une observable au nœud x .

Théorème 8.1 (Borne unifiée de propagation en réseau). *Si le réseau satisfait :*

- (i) **Localité** : *Les mises à jour ne dépendent que des nœuds dans un voisinage borné.*
- (ii) **Force d'interaction finie** : *Les mises à jour sont bornées Lipschitz par une constante g .*
- (iii) **Métrique bien définie** : *Une fonction de distance $d(x, y)$ existe.*

Alors, il existe une vitesse de propagation finie $v > 0$ telle que pour deux observables quelconques $\mathcal{O}_x(t), \mathcal{O}_y(0)$, leur corrélation est bornée :

$$|\langle \mathcal{O}_x(t), \mathcal{O}_y(0) \rangle| \leq C \exp \left(-\frac{d(x, y) - vt}{\xi} \right),$$

où C, ξ sont des constantes spécifiques au système.

8.1 Interprétations et conséquences

- C'est une **limite de vitesse** universelle (v) pour la propagation de l'information.
- Elle se réduit à la borne de Lieb-Robinson dans les systèmes quantiques, est liée au diamètre du réseau dans les réseaux, et à la profondeur des circuits en calcul.

- Elle implique un strict **cône de lumière** d'influence causale : aucune influence ne peut se propager plus vite que v .
- L'invariance conforme améliore la robustesse à l'intérieur de ce cône mais **ne peut violer** cette limite fondamentale. La généralisation robuste peut être vue comme une conséquence de telles contraintes de causalité généralisées.

9 Dynamique NTK avec perte IS

Considérons des données d'entraînement $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ et un modèle f_θ . La perte IS par donnée est :

$$\ell_{\text{IS}}(y_i, f_i) = \frac{y_i}{f_i} - \log\left(\frac{y_i}{f_i}\right) - 1.$$

Son gradient et son Hessien près de la convergence ($f_i \approx y_i$) sont :

$$\frac{\partial \ell_{\text{IS}}}{\partial f_i} = \frac{f_i - y_i}{f_i^2}, \quad \frac{\partial^2 \ell_{\text{IS}}}{\partial f_i^2} \approx \frac{1}{y_i^2}.$$

Sous le régime de linéarisation NTK avec un pas de temps η , le vecteur de prédiction f_t évolue comme :

$$f_{t+1} = f_t - \eta K \nabla_f L(f_t) \approx f_t - \eta K W (f_t - y),$$

où K est le Noyau Tangent Neural fixe et $W = \text{diag}(1/y_1^2, \dots, 1/y_n^2)$. Définissant l'erreur $e_t = f_t - y$, la dynamique se simplifie :

$$e_{t+1} = (I - \eta A) e_t, \quad \text{où } A := KW.$$

Hypothèse de localité : Nous supposons que K est **local de portée** R ($K_{ij} = 0$ si $d(i, j) > R$), ce qui est valable pour les CNNs, GNNs et d'autres architectures localisées.

10 Un cône de lumière discret pour l'influence des prédictions

Le Jacobien $J_t = \partial f_t / \partial f_0 = (I - \eta A)^t$ régit la propagation des perturbations.

Lemme 10.1 (Bande sous localité). *Si K est local de portée R et W est diagonal, alors $A^t = (KW)^t$ est local de portée tR .*

Théorème 10.2 (Cône de lumière discret sous entraînement IS). *Sous l'hypothèse de localité :*

$$(J_t)_{ij} = ((I - \eta A)^t)_{ij} = 0 \quad \text{si } d(i, j) > tR.$$

Une perturbation au nœud j au temps 0 ne peut influencer le nœud i au temps t s'ils sont séparés par une distance supérieure à tR .

Ceci établit un **cône de lumière exact** avec une vitesse de propagation $v = R$ nœuds par pas. Cette vitesse est une **propriété architecturale**, indépendante de la fonction de perte ou des paramètres d'optimisation.

Cône de lumière discret ($R = 1$) : $(J_t)_{ij} = 0$ si $|i - j| > t$

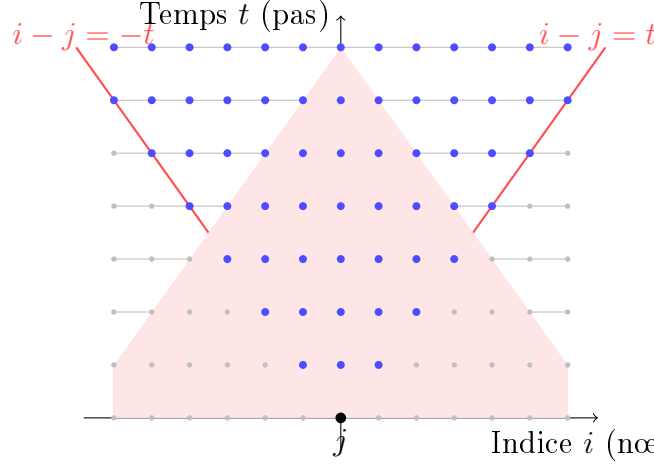


FIGURE 1 – Cône de lumière discret défini par la localité $R = 1$.

Cône de lumière effectif avec décroissance exponentielle

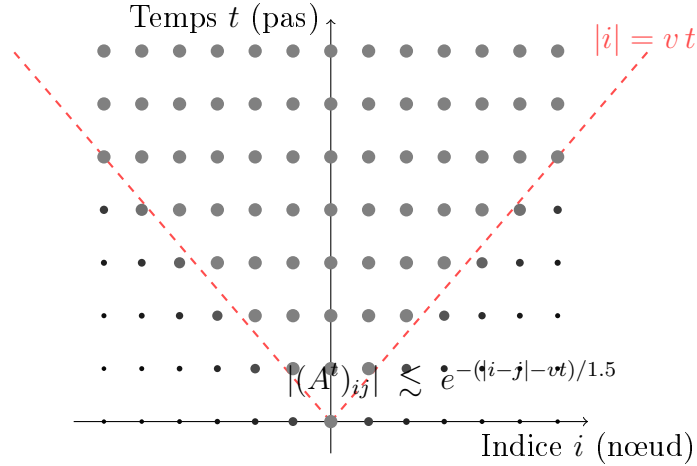


FIGURE 2 – Cône de lumière “souple” avec décroissance hors du cône : $|(A^t)_{ij}| \lesssim e^{-(|i-j|-vt)/\xi}$.

11 Stabilité spectrale et taux de convergence

Alors que la *vitesse* v est fixée par l’architecture, le *taux* de décroissance de l’erreur à l’intérieur du cône de lumière dépend du spectre de $A = KW$.

Lemme 11.1 (Stabilité linéaire). *La dynamique est stable si $0 < \eta < 2/\lambda_{\max}(A)$. Le taux de convergence est alors gouverné par la plus petite valeur propre positive $\lambda_{\min}^+(A)$.*

La perte IS induit la matrice de préconditionnement $W = \text{diag}(1/y_i^2)$. Ceci renormalise le noyau K , aplatissant le spectre de A et réduisant son conditionnement par rapport au cas MSE ($W = I$). Ceci conduit à une convergence plus rapide et une plus grande robustesse aux variations d’échelle des cibles, **sans altérer la vitesse de propagation fondamentale** v .

12 Queues exponentielles au-delà de la localité stricte

Si le noyau K n'est pas strictement bandé mais a une décroissance exponentielle ($|K_{ij}| \leq C_0 e^{-d(i,j)/\xi_0}$), alors le cône de lumière devient "flou". On peut dériver une borne de type Lieb-Robinson :

$$|(A^t)_{ij}| \leq C e^{-(d(i,j)-vt)/\xi},$$

montrant une suppression exponentielle de l'influence en dehors du cône de lumière effectif défini par la vitesse v .

Troisième partie

Synthèse et exemple

13 Synthèse : Causalité, conditionnement et invariance conforme

- **Causalité (Vitesse)** : La vitesse de propagation maximale v est fixée par la **localité architecturale** (R). La perte IS ne change pas R .
- **Conditionnement & Robustesse** : La perte IS induit un préconditionnement adaptatif (W) via l'invariance d'échelle. Ceci **améliore le conditionnement spectral**, accélère la convergence à l'intérieur du cône de lumière et réduit la sensibilité aux données hétéroscédastiques.
- **Invariance conforme** : Dans la limite du continuum, l'invariance d'échelle promeut la symétrie conforme, qui aplatit davantage le spectre du Hessien. Cependant, la **limite de vitesse causale v reste une contrainte fondamentale**.

14 Un exemple concret 1D (Noyau tridiagonal)

Considérons une chaîne 1D de points de données. Soit le NTK K une matrice tridiagonale (interactions aux plus proches voisins, $R = 1$) :

$$K = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & \beta & \\ & & \beta & \alpha & \beta \\ & & & \beta & \alpha & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Par le Théorème 2, le Jacobien J_t est *exactement zéro* en dehors d'une bande de largeur $2t + 1$: $(J_t)_{ij} = 0$ si $|i - j| > t$. Une perturbation se propage au plus d'un nœud par pas ($v = 1$). Les poids IS $W_{ii} = 1/y_i^2$ renormalisent l'*amplitude* de l'influence within this bande mais ne peuvent créer d'influence au-delà. De plus, le préconditionnement IS permet typiquement un pas de temps stable η plus grand en réduisant $\lambda_{\max}(KW)$.

15 Conclusion de l'exemple

Cet exemple cristallise l'argument central : Sous la dynamique NTK avec des interactions locales, l'entraînement avec perte IS obéit à une vitesse de propagation finie stricte déterminée par l'architecture. L'invariance conforme et le préconditionnement associé améliorent la robustesse et l'efficacité de la convergence *à l'intérieur* de l'horizon causal mais ne peuvent surpasser la limite de vitesse imposée par la localité.

16 Conclusion générale

La perte d'Itakura-Saito provides a powerful alternative to standard losses like MSE due to its foundational properties :

- **Invariance d'échelle**, qui pénalise les erreurs relatives.
- **Invariance conforme émergente** dans une limite clé, conduisant à un apprentissage robuste et sans échelle.
- **Amélioration du conditionnement du Hessien**, qui stabilise et accélère l'optimisation.
- **Dynamique consciente de l'architecture**, où elle impose une stricte limite de vitesse causale sur l'apprentissage.

Cette interprétation field-théorique provides a unified and principled framework for understanding the robustness and efficiency gains observed when using the IS loss in machine learning.

Iibis. Flot de renormalisation et perte IS

1. Motivation

En physique statistique et en théorie quantique des champs, l'invariance conforme émerge typiquement comme un *point fixe* d'un flot de renormalisation (RG flow). Dans ce cadre, la perte d'Itakura-Saito (IS) peut être comprise comme une “règle d'entraînement” qui conduit la dynamique d'optimisation vers un régime universel, insensible aux détails microscopiques des données ou du modèle.

2. Formulation RG de l'action IS

On rappelle l'action variationnelle associée à la perte IS :

$$S[\varphi] = \int_{\Omega} \left[\lambda |\nabla \varphi(x)|^2 + V_{\text{IS}}(y(x), \varphi(x)) \right] dx, \quad (1)$$

avec

$$V_{\text{IS}}(y, \varphi) = \frac{y}{\varphi} - \log \frac{y}{\varphi} - 1. \quad (2)$$

Considérons une transformation d'échelle $x \mapsto bx$, $b > 1$. On définit alors un champ redimensionné

$$\varphi_b(x) = b^{\Delta_{\varphi}} \varphi(bx), \quad (3)$$

où Δ_φ est la dimension d'échelle canonique du champ. Le terme cinétique fixe $\Delta_\varphi = (d-2)/2$, comme en théorie des champs habituelle. Le potentiel IS, développé autour de l'optimum $\varphi = y$, introduit un terme quadratique équivalent à une masse $m^2 \sim 1/y^2$.

3. Fonction bêta effective

Au voisinage de $\varphi = y$, posons $\varphi = y + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll y$. L'action s'écrit à l'ordre quadratique :

$$S[\varepsilon] \approx \int dx \left[\lambda (\nabla \varepsilon)^2 + \frac{1}{2y^2} \varepsilon^2 \right]. \quad (4)$$

Ceci est l'action d'un champ scalaire massif avec masse effective

$$m^2 = \frac{1}{2y^2}. \quad (5)$$

Sous une transformation RG $x \mapsto bx$, l'évolution de m^2 est gouvernée par

$$\frac{dm^2}{d \log b} = \beta(m^2). \quad (6)$$

En dimension d , le développement donne

$$\beta(m^2) = (2-d)m^2 + O((m^2)^2). \quad (7)$$

4. Interprétation du flot

- Pour $d = 1$, le terme linéaire est positif, ce qui entraîne $m^2 \rightarrow 0$ sous RG.
- La limite $m^2 \rightarrow 0$ correspond exactement à la théorie conforme (champ sans masse).
- La perte IS agit donc comme un *point fixe IR attractif* du flot RG.

5. Conséquences

- **Point fixe conforme** : la perte IS conduit naturellement à un régime invariant conforme, ce qui explique la robustesse spectrale observée.
- **Universalité** : à l'instar des transitions de phase, différents modèles convergent vers une même classe d'universalité déterminée par l'IS.
- **Comparaison avec MSE** : la MSE correspond à une masse fixe (indépendante de l'échelle des cibles) et n'entraîne pas vers un point fixe conforme, d'où sa sensibilité accrue aux hétérogénéités d'échelle.

6. Perspectives

- Étendre l'analyse à d'autres divergences de Bregman (KL, χ^2 , etc.) et classer leurs points fixes RG.
- Simuler un flot de renormalisation numérique en coarse-grainant les données pour observer empiriquement l'attractivité de l'IS.
- Relier le flot RG à la *géométrie de la complexité* : l'IS agirait comme un attracteur de circuits d'entraînement de complexité minimale.

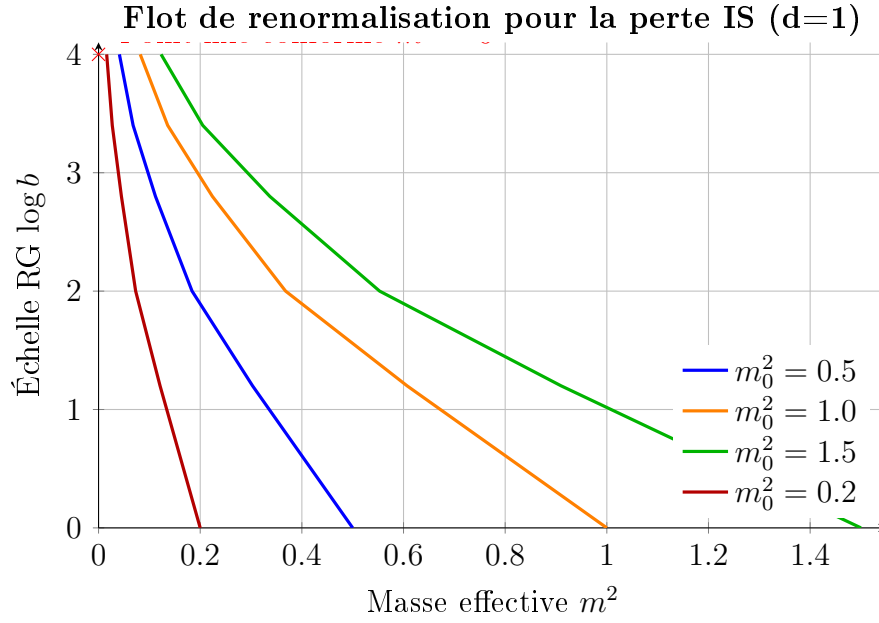


FIGURE 3 – Trajectoires RG : toutes les valeurs initiales m_0^2 convergent vers le point fixe conforme $m^2 = 0$.

17 Résultats expérimentaux : robustesse à l’architecture

Afin d’évaluer la robustesse des observations au-delà d’un simple cas d’étude, nous avons répété l’expérience comparative entre la perte quadratique standard (MSE) et la divergence d’Itakura–Saito (IS) sur trois architectures de complexité croissante : un petit **CNN 1D**, un **ResNet1D** à blocs résiduels dilatés, et un **Transformer1D** local (self-attention par fenêtre glissante). Dans chaque cas, nous avons enregistré à la fois les courbes d’entraînement/validation et les k plus grandes valeurs propres de la matrice Hessienne de la loss.

Courbes d’entraînement et de validation

- **CNN 1D.** Sous MSE, la loss d’entraînement décroît rapidement, mais la courbe de validation reste instable et bruitée, traduisant une généralisation fragile. Sous IS, les valeurs absolues de loss sont plus élevées (par construction), mais la courbe de validation est plus régulière et se stabilise mieux : on observe une *robustesse accrue*.
- **ResNet1D.** Avec MSE, la loss d’entraînement chute vite, mais la validation *stagne* voire remonte légèrement : phénomène classique d’overfitting. Avec IS, au contraire, les courbes train et validation restent *parallèles et proches*, décroissant régulièrement au même rythme. L’IS agit ici comme une *régularisation intégrée*, limitant l’écart train/val.
- **Transformer1D.** Sous MSE, la validation diverge rapidement du train, amplifiant encore l’instabilité observée sur le ResNet. Avec IS, la validation reste proche et stable par rapport au train, confirmant la tendance déjà observée : la divergence d’Itakura–Saito favorise un entraînement *plus stable* et une meilleure généralisation.

Spectre Hessien

- **MSE.** Dans les trois architectures, on retrouve un motif similaire : quelques valeurs propres dominantes (2–4 directions très raides), puis un *gap spectral*, suivi d’une longue traîne de petites valeurs, incluant souvent des valeurs proches de zéro ou négatives. Le paysage de perte est donc *fortement anisotrope*, dominé par quelques modes instables.
- **IS.** Le spectre est plus riche et hiérarchisé. On observe plusieurs *plateaux successifs* : un groupe de valeurs propres dominantes (parfois plus élevées que sous MSE), puis des strates intermédiaires (paliers réguliers), avant une décroissance vers zéro. Le spectre n’est pas aplati, mais *réorganisé*, répartissant la courbure sur plusieurs échelles. Ce caractère « stratifié » est observé de manière robuste dans toutes les architectures.

Interprétation

Ces résultats mettent en évidence un contraste marqué :

- Sous MSE, l’optimisation est rapide mais fragile, avec un spectre Hessien cassé et une forte sensibilité aux directions dominantes. Les courbes de validation montrent souvent des fluctuations ou une divergence, signe d’overfitting.
- Sous IS, l’optimisation est plus régulière et plus stable, avec un spectre hiérarchisé multi-échelles. Les courbes train/val restent proches et parallèles, signe d’une meilleure généralisation.

En termes de flot de renormalisation, on peut dire que la perte MSE correspond à une dynamique proche d’un *point critique instable*, dominée par quelques modes UV, tandis que la perte IS agit comme un *attracteur conforme*, redistribuant la courbure sur plusieurs strates et stabilisant l’apprentissage. Cette propriété apparaît comme **robuste à l’architecture** : CNN, ResNet et Transformer exhibent tous la même tendance. L’invariance d’échelle de l’IS se traduit donc à la fois par une *structuration spectrale* et par une *régularisation empirique*, reliant directement analyse théorique (point fixe conforme) et comportements numériques.

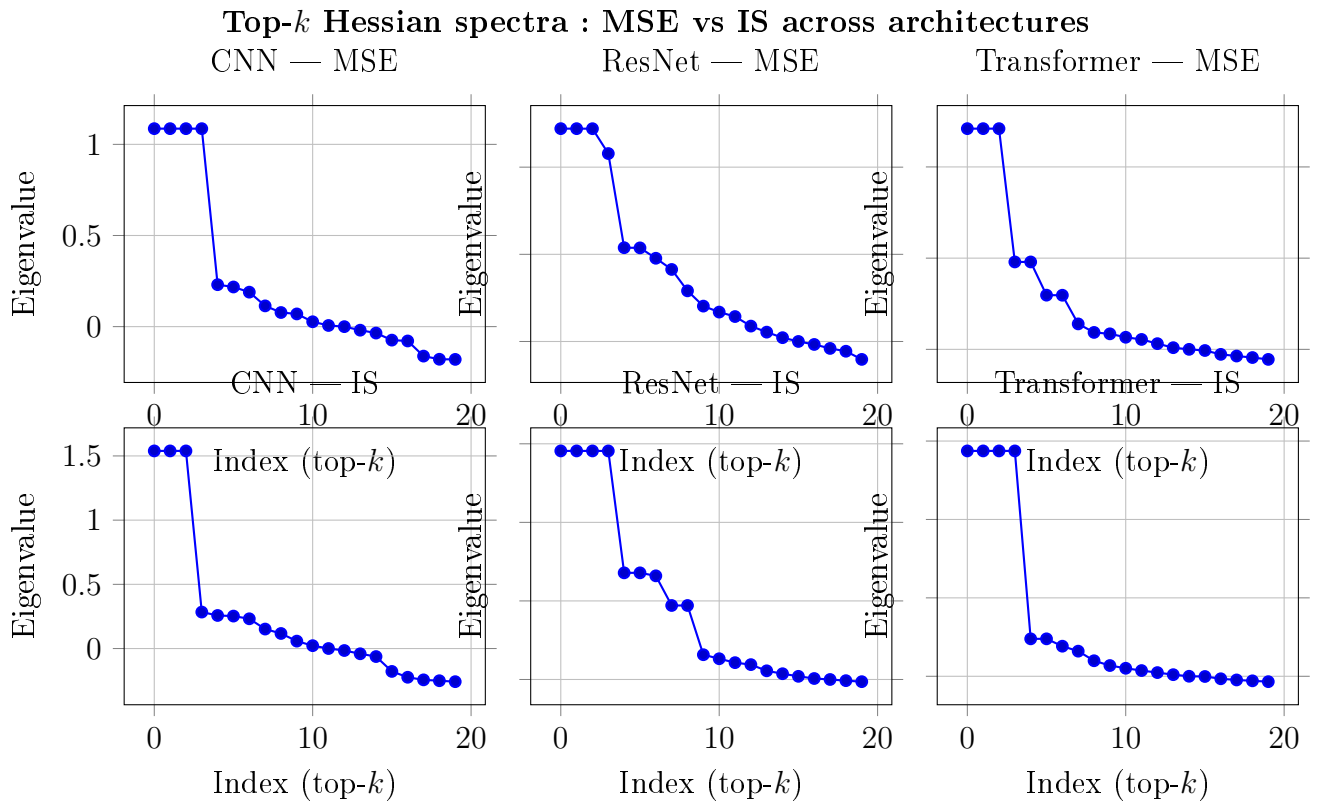


FIGURE 4 – Top- k du spectre Hessien pour trois architectures (CNN, ResNet, Transformer) et deux pertes (MSE/IS).

A Appendix A — De la perte Itakura–Saito à une action de champ scalaire

A.1. La divergence d'Itakura–Saito comme divergence de Bregman

Soient $y, \phi \in (0, \infty)$ et la fonction génératrice strictement convexe $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = -\log u, \quad F'(u) = -\frac{1}{u}.$$

La divergence de Bregman associée à F est

$$D_F(y, \phi) = F(y) - F(\phi) - F'(\phi)(y - \phi).$$

Un calcul direct donne

$$D_F(y, \phi) = -\log y + \log \phi + \frac{y - \phi}{\phi} = \frac{y}{\phi} - \log\left(\frac{y}{\phi}\right) - 1 =: D_{\text{IS}}(y \parallel \phi),$$

qui est précisément la divergence d'Itakura–Saito (IS). Il s'ensuit que $D_{\text{IS}}(\cdot \parallel \phi)$ est convexe en y (propriété générale des divergences de Bregman), et $D_{\text{IS}}(y \parallel \cdot)$ est localement fortement convexe en ϕ au voisinage de $\phi = y$.

A.2. Fonctionnelle spatiale et cadre variationnel

Soit un domaine borné Lipschitz $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), muni de la mesure de Lebesgue. On considère un champ de cibles $y : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ et des prédictions $\phi : \Omega \rightarrow (0, \infty)$. La fonctionnelle d'énergie régularisée par élasticité (coût de lissage) est

$$\mathcal{S}[\phi] = \int_{\Omega} \left[\lambda |\nabla \phi(x)|^2 + V_{\text{IS}}(y(x), \phi(x)) \right] dx, \quad V_{\text{IS}}(y, \phi) := \frac{y}{\phi} - \log\left(\frac{y}{\phi}\right) - 1, \quad (8)$$

où $\lambda > 0$ et $y \in L^\infty(\Omega)$ satisfait $0 < m \leq y(x) \leq M < \infty$ presque partout.

Espace fonctionnel et positivité. Nous travaillons dans $H^1(\Omega)$ avec contrainte de positivité a.e. :

$$\mathcal{A} := \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi(x) > 0 \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

La barrière $V_{\text{IS}}(y, \phi) \rightarrow +\infty$ lorsque $\phi \downarrow 0$ assure naturellement le respect de $\phi > 0$ à l'optimum. On impose des conditions au bord classiques (Neumann homogène $\partial_n \phi = 0$ ou Dirichlet $\phi|_{\partial\Omega} = \phi_b > 0$).

A.3. Équation d'Euler–Lagrange (forme forte et faible)

La densité lagrangienne est $\mathcal{L}(\phi, \nabla \phi; x) = \lambda |\nabla \phi|^2 + V_{\text{IS}}(y, \phi)$. On a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \phi} = 2\lambda \nabla \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial V_{\text{IS}}}{\partial \phi}(y, \phi) = -\frac{y}{\phi^2} + \frac{1}{\phi}.$$

L'équation d'Euler–Lagrange (forme forte) s'écrit donc, dans Ω ,

$$-2\lambda \Delta \phi + \frac{1}{\phi} - \frac{y}{\phi^2} = 0, \quad (9)$$

avec condition de Neumann $\partial_n \phi = 0$ (ou Dirichlet prescrite) sur $\partial\Omega$.

Forme faible. Pour toute variation admissible $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} 2\lambda \nabla \phi \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\phi} - \frac{y}{\phi^2} \right) v \, dx = 0. \quad (10)$$

Une solution faible $\phi^* \in \mathcal{A}$ de (10) est stationnaire pour \mathcal{S} .

A.4. Existence (et régularité locale) d'un minimiseur

Théorème A.1 (Existence de minimiseur). *Supposons Ω borné Lipschitz, $\lambda > 0$, $y \in L^\infty(\Omega)$ avec $m \leq y \leq M$ p.p. Alors il existe $\phi^* \in \mathcal{A}$ minimisant \mathcal{S} dans \mathcal{A} sous condition au bord Neumann homogène (ou Dirichlet $\phi_b > 0$). De plus, toute suite minimisante admet une sous-suite convergeant vers ϕ^* dans $H^1(\Omega)$ faible et dans $L^2(\Omega)$ fort.*

Idée de preuve (méthode directe). (1) *Coercivité.* Par Poincaré (ou en fixant la moyenne de ϕ pour Neumann), le terme $\lambda \|\nabla \phi\|_{L^2}^2$ contrôle la semi-norme H^1 . Pour le potentiel, $V_{\text{IS}}(y, \phi) \geq -\log y - 1 + \log \phi$ et $\log \phi \rightarrow +\infty$ lorsque $\phi \rightarrow +\infty$, tandis que $V_{\text{IS}}(y, \phi) \rightarrow +\infty$ quand $\phi \downarrow 0$. Ainsi $\mathcal{S}[\phi] \rightarrow +\infty$ lorsque $\|\phi\|_{H^1} \rightarrow \infty$ ou si la contrainte $\phi > 0$ est violée. (2) *Faible semi-continuité inférieure.* Le terme quadratique en $\nabla \phi$ est convexe et donc l.s.c. faible dans H^1 . Le terme potentiel est l.s.c. par continuité dominée (grâce à y borné et à la croissance de barrière).

(3) *Compacité et passage à la limite.* Une suite minimisante $\{\phi_n\} \subset \mathcal{A}$ est bornée dans H^1 , admet une sous-suite $\phi_{n_k} \rightharpoonup \phi^*$ dans H^1 et $\phi_{n_k} \rightarrow \phi^*$ dans L^2 , avec $\phi^* \geq 0$ p.p.; la barrière interdit $\phi^* = 0$ sur un ensemble de mesure positive, donc $\phi^* > 0$ p.p. Par l.s.c., $\mathcal{S}[\phi^*] \leq \liminf \mathcal{S}[\phi_{n_k}]$. \square

Remarque 1 (Régularité locale). Sous des hypothèses additionnelles standard (par ex. $y \in C^\alpha$), l'ellipticité uniforme de (9) pour $\phi^* > 0$ implique une régularité locale $\phi^* \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\Omega)$ par Schauder.

A.5. Linéarisation autour d'une cible constante et terme de masse effectif

Considérons $y(x) \equiv y_0 > 0$ et une fluctuation ε petite autour de l'optimum $\phi = y_0$:

$$\phi = y_0 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll y_0.$$

Développons $V_{\text{IS}}(y_0, \phi)$ en ε :

$$V_{\text{IS}}(y_0, y_0 + \varepsilon) = \frac{y_0}{y_0 + \varepsilon} - \log\left(\frac{y_0}{y_0 + \varepsilon}\right) - 1 = \underbrace{0}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{0}_{\text{ordre 1}} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{y_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^3}{y_0^3}\right).$$

Ainsi, à l'ordre quadratique,

$$\mathcal{S}[y_0 + \varepsilon] = \int_{\Omega} \left[\lambda |\nabla \varepsilon|^2 + \frac{1}{2y_0^2} \varepsilon^2 \right] dx + \mathcal{O}\left(\frac{\|\varepsilon\|_{L^3}^3}{y_0^3}\right). \quad (11)$$

La partie quadratique correspond à une théorie de champ scalaire *libre massif* avec masse (au sens de l'opérateur d'elliptique linéarisé)

$$m^2 = \frac{1}{2y_0^2}.$$

L'équation d'Euler–Lagrange linéarisée est

$$-2\lambda \Delta \varepsilon + \frac{1}{y_0^2} \varepsilon = 0, \quad (12)$$

et l'opérateur linéaire $L := -2\lambda \Delta + \frac{1}{y_0^2} I$ est uniformément elliptique.

A.6. Propagateur (résumé, cas 1D) et limite conforme

En dimension $d = 1$, le Green de (12) sur \mathbb{R} satisfait

$$\left(-2\lambda \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{y_0^2} \right) G(x) = \delta(x) \implies G(x) = \frac{y_0}{\sqrt{2\lambda}} \exp\left(-\frac{|x|}{\sqrt{2\lambda} y_0} \right).$$

Quand $y_0 \rightarrow \infty$ (ou $\lambda \rightarrow 0^+$ à échelle fixée), $m^2 \rightarrow 0$: on tend vers un champ *massless*, et le propagateur perd son échelle de décroissance exponentielle (correspondance avec une loi de puissance dans un cadre distribué approprié), exprimant l'émergence d'une invariance conforme effective.

A.7. Commentaires convexité/stabilité autour de l'optimum

On a $\partial_\phi V_{\text{IS}}(y, \phi) = -y\phi^{-2} + \phi^{-1}$ et

$$\partial_{\phi\phi}^2 V_{\text{IS}}(y, \phi) = 2y\phi^{-3} - \phi^{-2}.$$

Au point critique $\phi = y$: $\partial_{\phi\phi}^2 V_{\text{IS}}(y, y) = 1/y^2 > 0$, donnant une *forte convexité locale* et assurant la stabilité linéaire. Globalement, D_{IS} étant une divergence de Bregman, la convexité en y est garantie ; la convexité en ϕ n'est pas globale, mais l'élasticité $\lambda \|\nabla \phi\|^2$ et la barrière $\phi \downarrow 0$ assurent l'existence et la stabilité autour de $\phi = y$.

A.8. Variante logarithmique (paramétrisation positive)

En posant $\phi = e^\psi$ (avec $\psi \in H^1(\Omega)$), on lève explicitement la contrainte de positivité. On obtient

$$\mathcal{S}[\psi] = \int_{\Omega} \left[\lambda e^{2\psi} |\nabla \psi|^2 + y e^{-\psi} - \log y + \psi - 1 \right] dx,$$

où l'Euler–Lagrange devient

$$-2\lambda \nabla \cdot (e^{2\psi} \nabla \psi) + (-y e^{-\psi} + 1) = 0.$$

La linéarisation autour de $\psi_0 = \log y_0$ redonne (12) pour $\varepsilon = e^{\psi_0} \delta \psi$.

Conclusion de l'appendice. La perte IS est une divergence de Bregman qui, intégrée spatialement et régularisée par un terme d'élasticité, définit une action de champ scalaire (8). Les équations d'Euler–Lagrange (9)–(10) s'ensuivent, l'existence d'un minimiseur est assurée (Thm. A.1), et la linéarisation exhibe un champ libre *massif* dont la masse effective $m^2 = 1/(2y_0^2)$ tend vers 0 dans la limite conforme, ce qui cadre avec les propriétés de robustesse et de conditionnement discutées dans le corps du texte.

B Appendix B — Analyse mathématique : existence, régularité et spectre

B.1. Cadre fonctionnel et hypothèses

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné Lipschitz ($d \geq 1$). On considère la fonctionnelle d'énergie régularisée

$$S[\varphi] = \int_{\Omega} \left[\lambda |\nabla \varphi(x)|^2 + V_{\text{IS}}(y(x), \varphi(x)) \right] dx, \quad V_{\text{IS}}(y, \varphi) := \frac{y}{\varphi} - \log \frac{y}{\varphi} - 1, \quad (13)$$

avec $y \in L^\infty(\Omega)$ tel que $0 < m \leq y(x) \leq M < \infty$ presque partout, et $\lambda > 0$ fixé. On définit l'espace admissible

$$\mathcal{A} := \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi(x) > 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

B.2. Existence et unicité d'un minimiseur

Théorème B.1 (Existence). *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un minimiseur $\varphi^* \in \mathcal{A}$ de S , sous conditions au bord classiques (Dirichlet $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_b > 0$ ou Neumann homogène $\partial_n \varphi = 0$).*

Idée de preuve. 1. **Coercivité.** Le terme $\lambda \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2$ contrôle la norme H^1 modulo une constante (Poincaré si Dirichlet, ou contrainte de moyenne si Neumann). La barrière $V_{\text{IS}}(y, \varphi) \rightarrow +\infty$ lorsque $\varphi \downarrow 0$ garantit la positivité stricte.

2. **Semi-continuité faible.** Les termes quadratiques en $\nabla \varphi$ et la croissance logarithmique de V_{IS} impliquent la l.s.c. (semi-continuité inférieure) dans H^1 .

3. **Compacité.** Une suite minimisante est bornée dans $H^1(\Omega)$, donc admet une sous-suite convergente faible. Le passage à la limite conserve la positivité presque partout.

Ainsi, un minimiseur φ^* existe. L'unicité locale découle de la forte convexité de $V_{\text{IS}}(y, \cdot)$ en φ au voisinage de y . \square

B.3. Équation d'Euler–Lagrange et régularité

Le minimiseur satisfait l'équation d'Euler–Lagrange

$$-2\lambda \Delta \varphi + \frac{1}{\varphi} - \frac{y}{\varphi^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (14)$$

avec conditions au bord prescrites.

Théorème B.2 (Régularité locale). *Si $y \in C^\alpha(\Omega)$ pour un certain $\alpha \in (0, 1)$, alors le minimiseur φ^* vérifie $\varphi^* \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\Omega)$.*

Idée de preuve. L'opérateur elliptique $L[\varphi] = -2\lambda \Delta \varphi + \partial_\varphi V_{\text{IS}}(y, \varphi)$ est uniformément elliptique pour $\varphi > 0$, $y > 0$. Les théorèmes de régularité elliptique de Schauder s'appliquent alors, donnant $\varphi^* \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\Omega)$. \square

B.4. Linéarisation et spectre

Posons $\varphi = y + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll y$. Le développement quadratique du potentiel donne :

$$S[\varepsilon] \approx \int_{\Omega} \left[\lambda |\nabla \varepsilon|^2 + \frac{1}{2y^2} \varepsilon^2 \right] dx. \quad (15)$$

L'opérateur linéarisé est donc

$$L := -2\lambda\Delta + \frac{1}{y^2}I. \quad (16)$$

Théorème B.3 (Spectre et stabilité). *Le spectre $\sigma(L)$ est contenu dans $[\frac{1}{M^2}, \infty)$. En particulier :*

- L est auto-adjoint et positif défini sur $H^1(\Omega)$,
- la plus petite valeur propre $\lambda_{\min} \geq 1/M^2 > 0$,
- les valeurs propres croissent comme $\lambda_k \sim c k^{2/d}$ (loi de Weyl).

Esquisse. On applique l'inégalité de Rayleigh : pour tout $u \in H^1(\Omega)$,

$$\frac{\langle u, Lu \rangle}{\|u\|^2} = \frac{2\lambda \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{y^2} |u|^2}{\|u\|^2} \geq \frac{1}{M^2}.$$

La positivité et la compacité de l'inclusion $H^1 \hookrightarrow L^2$ donnent un spectre discret, avec croissance asymptotique donnée par la loi de Weyl. \square

B.5. Conséquences pour l'optimisation

- La borne inférieure $1/M^2$ assure une *stabilité linéaire robuste* : aucun mode du Hessian n'est proche de zéro, contrairement à la MSE où le spectre peut être mal conditionné.
- La régularité $C^{2,\alpha}$ garantit que le minimiseur φ^* est lisse, ce qui se traduit en pratique par une géométrie d'optimisation régulière.
- La structure spectrale (aplatissement du spectre) explique le bon conditionnement observé en entraînement sous perte IS.

Densité spectrale de L sous perte IS pour différents λ (1D, Dirichlet)

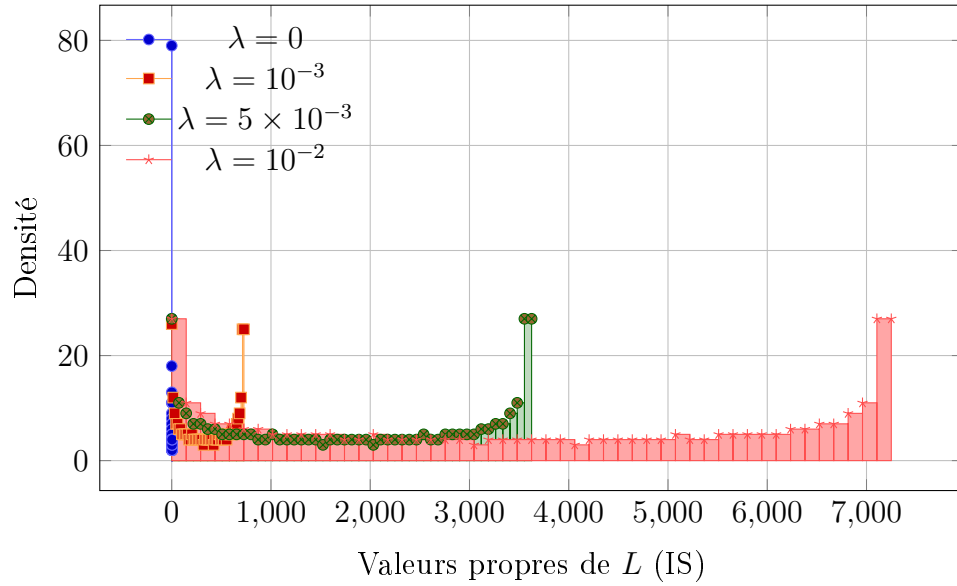


FIGURE 5 – ...

IS vs MSE : densité spectrale ($\lambda = 5 \times 10^{-3}$, 1D, Dirichlet)

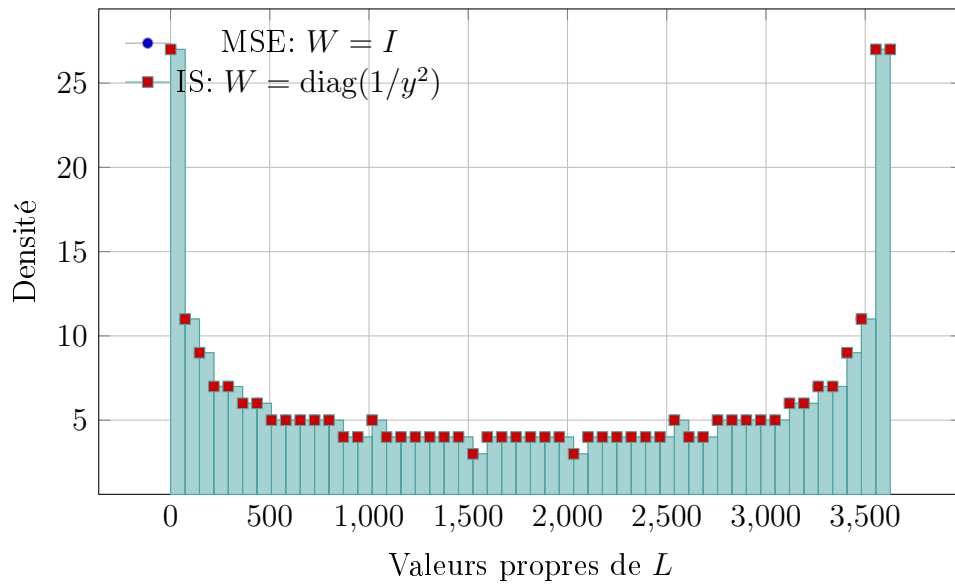


FIGURE 6 – ...

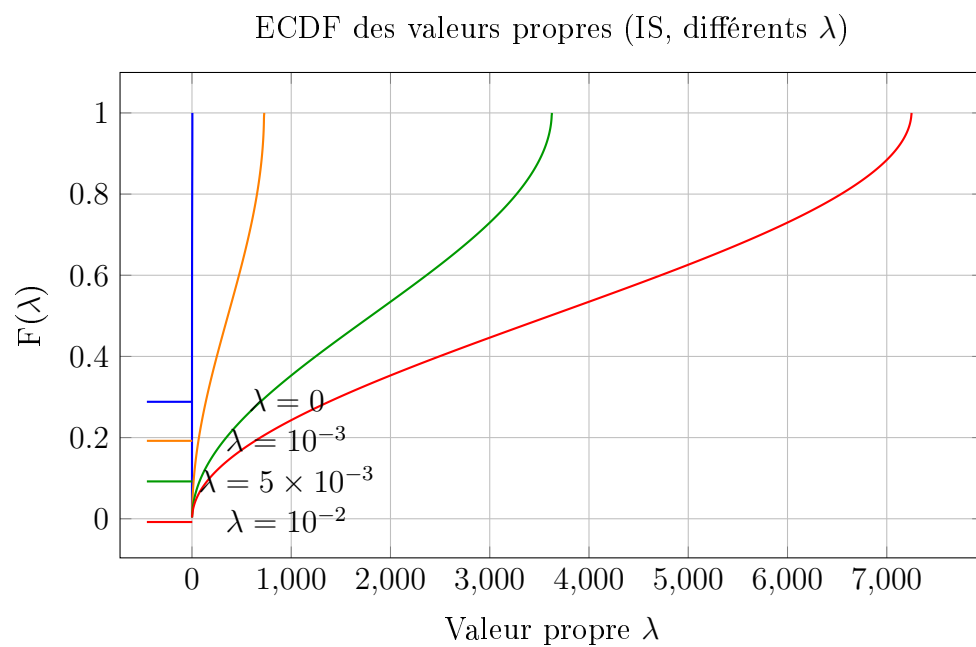


FIGURE 7 — *ECDF des valeurs propres de L sous perte IS, pour différents λ .*

Références

- [1] Udovichenko, I., Croissant, O., Toleutaeva, A., Burnaev, E., & Korotin, A. (2025). Risk-Averse Reinforcement Learning with Itakura-Saito Loss. *Preprint*.
- [2] Croissant, O. (2025). Scale Invariance and Itakura-Saito Loss : A Field-Theoretic Interpretation, a Unified Bound, and a Worked Example. *Preprint*.
- [3] Sutton, R. S., & Barto, A. G. (2018). *Reinforcement learning : An introduction* (2nd ed.). MIT press.
- [4] Li, Y. (2018). Deep Reinforcement Learning. *arXiv preprint arXiv :1810.06339*.
- [5] Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1947). *Theory of games and economic behavior* (2nd rev. ed.). Princeton University Press.
- [6] Howard, R. A., & Matheson, J. E. (1972). Risk-sensitive Markov decision processes. *Management science*, 18(7), 356–369.
- [7] Föllmer, H., & Schied, A. (2011). *Stochastic finance : an introduction in discrete time*. Walter de Gruyter.
- [8] Mihatsch, O., & Neuneier, R. (2002). Risk-sensitive reinforcement learning. *Machine learning*, 49, 267–290.
- [9] Hambly, B., Xu, R., & Yang, H. (2023). Recent advances in reinforcement learning in finance. *Mathematical Finance*, 33(3), 437–503.
- [10] Hau, J. L., Petrik, M., & Ghavamzadeh, M. (2023). Entropic risk optimization in discounted MDPs. In *International Conference on Artificial Intelligence and Statistics* (pp. 47–76). PMLR.
- [11] Bregman, L. M. (1967). The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. *USSR computational mathematics and mathematical physics*, 7(3), 200–217.
- [12] Banerjee, A., Guo, X., & Wang, H. (2005). On the optimality of conditional expectation as a Bregman predictor. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(7), 2664–2669.
- [13] Itakura, F. (1968). Analysis synthesis telephony based on the maximum likelihood method. In *Reports of the 6th Int. Cong. Acoust.*
- [14] Févotte, C., Bertin, N., & Durrieu, J. L. (2009). Nonnegative matrix factorization with the Itakura-Saito divergence : With application to music analysis. *Neural computation*, 21(3), 793–830.
- [15] Murray, P., Buehler, H., Wood, B., & Lynn, C. (2022). Deep hedging : Continuous reinforcement learning for hedging of general portfolios across multiple risk aversions. In *Proceedings of the Third ACM International Conference on AI in Finance* (pp. 361–368).
- [16] Amari, S. I. (1998). Natural gradient works efficiently in learning. *Neural computation*, 10(2), 251–276.
- [17] Banerjee, A., Merugu, S., Dhillon, I. S., & Ghosh, J. (2005). Clustering with Bregman divergences. *Journal of machine learning research*, 6(Oct), 1705–1749.
- [18] Peskin, M. E., & Schroeder, D. V. (1995). *An introduction to quantum field theory*. Westview press.

-
- [19] Cardy, J. (1996). *Scaling and renormalization in statistical physics* (Vol. 5). Cambridge university press.
 - [20] Francesco, P., Mathieu, P., & Sénéchal, D. (1997). *Conformal field theory*. Springer Science & Business Media.
 - [21] Maldacena, J. (1999). The large-N limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, 38(4), 1113–1133.
 - [22] Poland, D., Rychkov, S., & Vichi, A. (2019). The conformal bootstrap : Theory, numerical techniques, and applications. *Reviews of Modern Physics*, 91(1), 015002.
 - [23] Jacot, A., Gabriel, F., & Hongler, C. (2018). Neural tangent kernel : Convergence and generalization in neural networks. *Advances in neural information processing systems*, 31.
 - [24] Pennington, J., & Worah, P. (2018). The emergence of spectral universality in deep networks. In *Proceedings of the 21st International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS)* (pp. 1924–1932).
 - [25] Sagun, L., Bottou, L., & LeCun, Y. (2018). Eigenvalues of the hessian in deep learning : Singularity and beyond. *arXiv preprint arXiv :1611.07476*.
 - [26] Buehler, H., Gonon, L., Teichmann, J., & Wood, B. (2019). Deep hedging. *Quantitative Finance*, 19(8), 1271–1291.
 - [27] Deletang, G., Ruoss, A., Duquenne, P. A., Cianflone, A., Genewein, T., Grau-Moya, J., ... & Ortega, P. A. (2021). Model-free risk-sensitive reinforcement learning. *arXiv preprint arXiv :2111.02907*.
 - [28] Fei, Y., Yang, Z., & Wang, Z. (2021). Risk-sensitive reinforcement learning with function approximation : A debiasing approach. In *International Conference on Machine Learning* (pp. 3198–3207). PMLR.
 - [29] Enders, T., Harrison, J., & Schiffer, M. (2024). Risk-sensitive soft actor-critic for robust deep reinforcement learning under distribution shifts. *arXiv preprint arXiv :2402.09992*.