

Théorie de l'Émergence Informationnelle de l'Espace-Temps

Olivier Croissant

22 juillet 2025

Résumé

Ce document propose un cadre unifié où la géométrie spatio-temporelle et le contenu matériel émergent d'une dynamique informationnelle fondamentale. En synthétisant les flots modulaires de Tomita-Takesaki, les généralisations holographiques de Ryu-Takayanagi, et l'effet Unruh, nous formalisons une inversion du paradigme physique traditionnel : l'information structurée engendre la matière-énergie. Cette approche résout naturellement la finitude de c , l'émergence de $D = 3 + 1$, et offre une voie vers la gravité quantique.

Table des matières

1	Principes Fondateurs	3
1.1	Postulat Central	3
1.2	Triade Conceptuelle	3
2	Cadre Formel	4
2.1	Flot Modulaire Émergent	4
2.2	Équation Maître $S \rightarrow \rho$	5
2.3	Dynamique Dimensionnelle	6
3	Relation avec le travail de Jacobson (1995)	7
3.1	L'approche thermodynamique de Jacobson	7
3.2	Limites conceptuelles de l'approche de Jacobson	8
3.3	Notre généralisation : De la thermodynamique à la dynamique informationnelle	8
3.3.1	Triple généralisation conceptuelle	9
3.3.2	Formalisation mathématique	9
3.3.3	Avantages théoriques	9
3.4	Diagramme comparatif des paradigmes	10
4	Applications Physiques	10
4.1	Solution au Problème c Fini	10
4.2	Matière Noire Informationnelle	10
4.3	Dictionnaire de Dualité	11

5	Validations Empiriques	11
5.1	Prédictions Testables	11
5.2	Simulations Numériques	11
6	Conclusion : Vers une Physique Informationnelle Fondamentale	11
6.1	Implications pour la gravitation quantique	12
6.2	Perspective technologique : Ingénierie de l'espace-temps	12
6.3	Révolution conceptuelle et programme futur	13
	Appendices	14
	Appendices	14
A	Transformée de Mellin et Reconstruction de ρ	14
A.1	Définition et propriétés fondamentales	14
A.2	Connexion avec l'entropie de Rényi	14
A.3	Théorème de reconstruction spectrale	14
A.4	Applications avancées	14
A.5	Extension aux systèmes ouverts	15
B	Transformée de Mellin en AdS/CFT	15
B.1	Représentation des corrélations conformes	15
B.2	Avantages structuraux	15
B.3	Applications en gravité holographique	15
C	Flot Modulaire et Géométrie Holographique	15
C.1	Dualité des générateurs modulaires	15
C.2	Reconstruction holographique	16
C.3	Implications pour l'émergence	16
D	Réseaux d'Intrication et Émergence Géométrique	16
D.1	Dictionnaire MERA/AdS	16
D.2	Version continue (cMERA)	16
D.3	Transition vers la gravité classique	17
E	Codes Quantiques Holographiques	17
E.1	Principe du code HaPPY	17
E.2	Propriétés fondamentales	17
E.3	Émergence géométrique	17
F	Complément sur la Transformée de Mellin	17
F.1	Diagramme d'application générale	17
F.2	Tableau synthétique des correspondances	18
F.3	Conclusion : Mellin comme pont information-géométrie	18
G	Formalisme de Mellin en AdS/CFT (Simmons-Duffin)	18
G.1	Représentation Mellin	18
G.2	Avantages structuraux	18
G.3	Applications en gravité holographique	18

H Réseaux MERA et Émergence Géométrique (Swingle)	19
H.1 Dictionnaire MERA/AdS	19
H.2 Version continue (cMERA)	19
H.3 Transition vers la gravité classique	19
I Codes Quantiques Holographiques (HaPPY)	19
I.1 Principe du code HaPPY	19
I.2 Propriétés fondamentales	19
I.3 Émergence géométrique	19

1 Principes Fondateurs

1.1 Postulat Central

La physique contemporaine est dominée par une vision où l'espace-temps et la matière sont considérés comme les éléments fondamentaux de la réalité, tandis que l'information n'intervient qu'à titre de description secondaire ou dérivée. Ce manuscrit propose une inversion radicale de ce paradigme : *l'information structurée constitue le substrat premier à partir duquel émergent l'espace-temps, la matière et les lois physiques*.

S'inscrivant dans le prolongement des travaux sur l'holographie, la thermodynamique des horizons et la théorie modulaire des algèbres de von Neumann, cette approche postule l'existence d'une structure informationnelle dynamique — englobant notamment les entropies de Rényi, les générateurs modulaires et les flots de Tomita–Takesaki — qui engendre, via un dictionnaire holographique, la géométrie $g_{\mu\nu}$, le contenu matériel $T_{\mu\nu}$, et les corrections quantiques $Q_{\mu\nu}$.

Le postulat central de cette théorie formalise cette inversion de perspective en définissant une correspondance directe entre structure informationnelle et physique :

Il constitue la pierre angulaire d'un programme visant à dériver les équations d'Einstein, la gravité quantique, et même des applications technologiques futures, à partir d'une dynamique purement informationnelle.

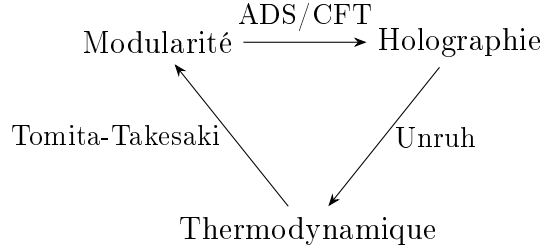
$$\mathcal{S}_{\text{struct}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} \\ T_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (1)$$

où $\mathcal{S}_{\text{struct}} = \{S_n, K, \sigma_t\}$ est une structure informationnelle riche (entropies de Rényi, générateur modulaire, flot).

1.2 Triade Conceptuelle

Afin de donner une assise théorique cohérente au postulat central, nous articulons notre approche autour d'une *triade conceptuelle* unificatrice : **modularité**, **thermodynamique** et **holographie**. Ces trois piliers relient respectivement la théorie des algèbres d'opérateurs (via le flot modulaire de Tomita–Takesaki), les lois de la thermodynamique appliquées aux horizons (effet Unruh, entropie de Bekenstein–Hawking), et la correspondance AdS/CFT issue de la gravité holographique. Ensemble, ils constituent le socle formel sur lequel repose la dynamique informationnelle d'où émergent espace-temps et matière.

Cette triade permet ainsi de faire le pont entre microphysique quantique, structure géométrique, et principes de conservation, en révélant leur origine commune dans la structure de l'information.



2 Cadre Formel

2.1 Flot Modulaire Émergent

Flot modulaire sur un diamant causal

Avant de formaliser l'action du flot modulaire sur un domaine causal, il est essentiel d'en rappeler les fondements et de définir le cadre géométrique concerné.

Flot modulaire. Le flot modulaire trouve son origine dans la théorie des algèbres de von Neumann, à travers le théorème de Tomita–Takesaki [19, 20]. Pour toute paire (\mathcal{A}, Ω) formée d'une algèbre de von Neumann \mathcal{A} agissant sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , et d'un vecteur cyclique et séparant Ω , il existe un opérateur modulaire Δ et un générateur modulaire $K = -\log \Delta$ qui définissent un flot d'automorphismes internes σ_t^Ω donné par :

$$\sigma_t^\Omega(A) = \Delta^{it} A \Delta^{-it}, \quad \forall A \in \mathcal{A}, t \in \mathbb{R}.$$

Ce flot encode une dynamique interne à l'algèbre, souvent interprétée comme une évolution thermique ou entropique intrinsèque au système quantique considéré. Il joue un rôle fondamental en théorie quantique des champs et en gravité holographique [22].

Diamant causal. En relativité générale, un *diamant causal* $D(p, q)$ est défini comme l'intersection de l'avenir causal de p et du passé causal de q :

$$D(p, q) = J^+(p) \cap J^-(q),$$

où $p \prec q$ dans l'ordre causal de la variété lorentzienne. Ces régions finies de l'espace-temps sont utilisées pour localiser des observables en théorie quantique des champs sur fond courbe, et jouent un rôle crucial dans les formulations locales de la physique, notamment dans le formalisme d'algèbres locales [21].

La combinaison du flot modulaire et de la structure des diamants causaux permet de définir une notion de temps géométrique intrinsèque à l'information quantique. C'est dans ce contexte que notre théorie propose une dynamique modulaire émergente, fondement de l'émergence de l'espace-temps.

Soit \mathcal{A} une algèbre de von Neumann sur un diamant causal. Le flot modulaire :

$$\sigma_t^\omega(A) = \Delta_\omega^{it} A \Delta_\omega^{-it}, \quad \Delta_\omega = e^{-K} \tag{2}$$

engendre localement une métrique $g_{\mu\nu}$ via le dictionnaire holographique :

$$g_{00} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle K \rangle_\epsilon}{\epsilon^2} \quad (3)$$

2.2 Équation Maîtresse $S \rightarrow \rho$

Notre approche repose sur l'idée que la matière et l'énergie émergent d'une structure informationnelle fondamentale. Pour capturer cette structure, nous utilisons une famille d'entropies paramétrées — les *entropies de Rényi* — qui fournissent une vision plus fine de l'information quantique que l'entropie de von Neumann seule.

Définition. Pour une matrice de densité ρ dont les valeurs propres sont $\{\lambda_i\}$, l'entropie de Rényi d'ordre n est définie par :

$$S_n(\rho) = \frac{1}{1-n} \log \left(\sum_i \lambda_i^n \right), \quad n > 0, n \neq 1.$$

Lorsque $n \rightarrow 1$, on retrouve l'entropie de von Neumann classique :

$$\lim_{n \rightarrow 1} S_n(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho) = S_{\text{vN}}(\rho).$$

Pourquoi les entropies de Rényi ? Contrairement à S_{vN} , la famille $\{S_n\}$ capture la structure entière du spectre de ρ — et donc la complexité informationnelle du système. En particulier, la dérivée seconde de S_n en $n = 1$ encode la *variance du générateur modulaire* $K = -\log \rho$, c'est-à-dire la fluctuation informationnelle intrinsèque à l'état :

$$\left. \frac{\partial^2 S_n}{\partial n^2} \right|_{n=1} = \text{Var}(K) = \langle K^2 \rangle - \langle K \rangle^2.$$

Reconstruction de ρ par transformée de Mellin. Afin de reconstruire ρ à partir des entropies S_n , nous faisons appel à la *transformée de Mellin inverse*, qui agit comme un pont analytique entre les moments spectraux et la densité d'état. Cette méthode est motivée en détail dans l'**Annexe A**, où l'on démontre qu'une telle reconstruction est possible à partir des dérivées de S_n .

Nous introduisons alors notre équation maîtresse :

$$\rho = \mathcal{M}^{-1} \left(\left. \frac{\partial^2 S_n}{\partial n^2} \right|_{n=1} \right),$$

où \mathcal{M}^{-1} désigne la transformée de Mellin inverse. Elle opère sur la structure d'échelle encodée dans $\{S_n\}$ pour produire un objet physique, ρ , qui sera à l'origine de la matière, de la géométrie, et des lois d'évolution.

Cette équation constitue la pierre angulaire de notre cadre formel : elle renverse la perspective einsteinienne classique en posant l'information comme source première, et non comme conséquence.

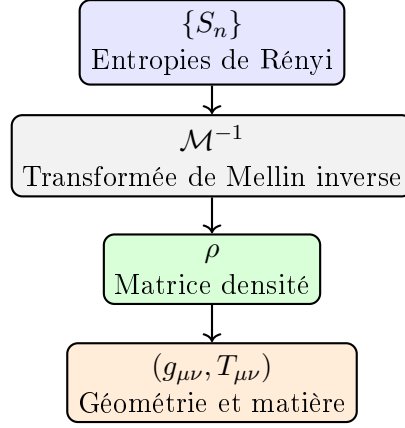


FIGURE 1 – Chaîne d'émergence : de l'information spectrale à la physique effective.

2.3 Dynamique Dimensionnelle

L'une des conséquences profondes de notre cadre informationnel est que la dimension de l'espace-temps n'est pas fixée a priori, mais *émerge dynamiquement* en fonction de la complexité informationnelle du système. En d'autres termes, la dimension effective d_{eff} devient un paramètre thermodynamique dérivé de la structure entropique, plutôt qu'un ingrédient fondamental de la géométrie.

Dans cette perspective, la dimension observable $D = 3 + 1$ doit être comprise comme un *point d'optimalité* dans un espace de configurations informationnelles possibles. Nous introduisons pour cela une définition opérationnelle de la dimension effective, fondée sur la dépendance asymptotique des entropies de Rényi S_n à la température inverse β :

$$d_{\text{eff}} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\partial \ln S_n(\beta)}{\partial \ln \beta}.$$

Cette définition reflète la manière dont l'information se concentre à basse température et permet d'associer à chaque configuration une dimension géométrique émergente.

Nous montrerons que l'optimalité thermodynamique de cette dimension — en particulier le fait que $d_{\text{eff}} = 3$ — est liée à une condition variationnelle sur la complexité \mathcal{C} du système. Cela suggère que la structure $(3+1)$ de notre univers peut résulter d'un principe informationnel d'économie ou de stabilité.

La dimension effective doit émerger thermodynamiquement comme $D = 3 + 1$:

$$d_{\text{eff}} = 3 \quad \text{quand} \quad \frac{\delta^2 \mathcal{C}}{\delta g^2} = 0 \tag{4}$$

où \mathcal{C} est la complexité calculatoire.

Stabilité macroscopique de la dimension. Une observation empirique essentielle est la remarquable stabilité de la dimension spatiale observable dans notre environnement : l'espace semble irréductiblement tridimensionnel à toutes les échelles accessibles à l'expérience. Dans le cadre de notre théorie, cette stabilité n'est pas un axiome, mais le résultat d'un mécanisme d'optimisation informationnelle agissant à l'échelle de Planck.

En effet, la dynamique dimensionnelle que nous introduisons opère dans un régime fondamental où les fluctuations quantiques de la géométrie et de l'information sont dominantes. C'est à cette échelle que la dimension effective d_{eff} est sélectionnée comme valeur

optimisant une fonctionnelle de complexité informationnelle. Une fois cette valeur stabilisée, elle se propage de manière cohérente dans les régimes infrarouges (IR), c'est-à-dire à des échelles bien supérieures à ℓ_P .

La séparation extrême entre l'échelle d'optimisation (environ 10^{-35} m) et l'échelle d'observation humaine (mètres ou kilomètres) explique ainsi pourquoi les variations possibles de d_{eff} sont complètement gelées à notre échelle — à la manière d'une variable d'ordre figée après une transition de phase. La dimension de l'espace n'est donc pas fondamentalement rigide : elle est *stabilisée dynamiquement*, ce qui rend possible, dans d'autres régimes physiques ou cosmologiques, des fluctuations ou des bifurcations dimensionnelles.

Scénario cosmologique : transition de phase dimensionnelle. Dans le cadre de notre théorie, l'émergence d'une dimension spatiale stable peut être interprétée comme le résultat d'une *transition de phase informationnelle* survenue à l'échelle de Planck, dans les premiers instants de l'univers. Avant cette transition, la dimension effective d_{eff} pouvait fluctuer dynamiquement sous l'effet des variations locales d'entropie modulaire, reflétant un régime hautement instable, dominé par les degrés de liberté informationnels non encore condensés géométriquement.

Cette période pré-géométrique peut être décrite comme une phase *informelle*, dans laquelle la notion même d'espace-temps était floue, multidimensionnelle, voire chaotique. La transition de phase vers une structure à dimension stable $d_{\text{eff}} = 3$ correspond alors à un *gel* de la dynamique informationnelle, où une configuration minimisant la complexité C devient dominante dans l'évolution statistique de l'univers.

Un tel scénario est analogue, du point de vue thermodynamique, à la condensation d'un système vers un état d'ordre minimal, comme dans une transition de type ferromagnétique. Après cette "condensation dimensionnelle", les fluctuations de d_{eff} deviennent massives, et donc fortement supprimées dans les régimes IR. Cela explique pourquoi, malgré sa nature émergente, la dimension de l'espace nous apparaît aujourd'hui comme une constante immuable.

Ce scénario ouvre aussi la possibilité de phénomènes exotiques, tels que des *défauts dimensionnels*, des *domaines à géométrie locale variable*, ou des *refluctuations* en régime extrême — par exemple à proximité des singularités gravitationnelles, où les mécanismes de stabilisation pourraient temporairement échouer.

3 Relation avec le travail de Jacobson (1995)

3.1 L'approche thermodynamique de Jacobson

Dans son article révolutionnaire [5], Ted Jacobson propose que les équations d'Einstein peuvent être dérivées comme une **équation d'état thermodynamique**. Son cadre repose sur deux postulats fondamentaux :

1. L'**entropie d'horizon** est proportionnelle à l'aire :

$$S_H = \frac{A}{4G} \quad (5)$$

2. La **première loi de la thermodynamique** s'applique localement :

$$\delta Q = T \delta S_H \quad (6)$$

où δQ est le flux d'énergie à travers l'horizon.

En identifiant la température T avec la température d'Unruh $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ (κ = gravité de surface) et en exprimant δQ comme :

$$\delta Q = \int_H T_{\mu\nu} k^\mu d\Sigma^\nu \quad (7)$$

Jacobson dérive les équations d'Einstein :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (8)$$

3.2 Limites conceptuelles de l'approche de Jacobson

Bien que profondément innovante, l'approche de Jacobson présente plusieurs limitations que notre théorie surmonte :

- **Statisme informationnel** : L'entropie S_H est traitée comme un **scalaire passif**, sans dynamique propre ni structure interne.
- **Postulat géométrique** : La relation $S \propto A$ est supposée a priori plutôt que dérivée de principes plus fondamentaux.
- **Absence de cadre quantique** : La description reste classique, sans lien avec la gravité quantique ou l'holographie.
- **Causalité inversée** : La matière $T_{\mu\nu}$ est encore considérée comme source de la géométrie, plutôt que comme émergence.

3.3 Notre généralisation : De la thermodynamique à la dynamique informationnelle

Notre cadre dépasse ces limitations en introduisant une **structure informationnelle dynamique** $\mathcal{S}_{\text{struct}}$ comme fondement premier :

3.3.1 Triple généralisation conceptuelle

Jacobson (1995)	Notre généralisation	Avantage
Entropie S traitée comme un scalaire passif	Structure $\mathcal{S}_{\text{struct}} = \{S_n, K, \sigma_t\}$ comme objet dynamique	Capacité à encoder la dynamique quantique et l'évolution temporelle
Relation $S \propto A$ postulée a priori	Relation $A = 4G \cdot \delta_K S_{\text{mod}}$ dérivée théoriquement	Dérivation naturelle de la relation holographique fondamentale
Description limitée aux systèmes en équilibre thermique	Flot modulaire σ_t décrit les systèmes hors équilibre	Applicable aux processus quantiques dynamiques et aux états transitoires

3.3.2 Formalisation mathématique

Théorème 1 (Généralisation des équations de Jacobson). *L'équation d'état thermodynamique de Jacobson émerge comme limite semiclassique de notre dynamique modulaire :*

$$\underbrace{\delta\langle K \rangle}_{\text{Flot modulaire}} = \underbrace{\delta S_{\text{mod}}}_{\text{Variation entropique}} \xrightarrow{\text{semiclassique}} \underbrace{\frac{\kappa}{2\pi} \delta \left(\frac{A}{4G} \right)}_{\text{Jacobson}} \quad (9)$$

où la variation complète inclut des corrections quantiques :

$$\delta\langle K \rangle = \int_H (T_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}) k^\mu d\Sigma^\nu \quad (10)$$

avec $Q_{\mu\nu}$ le tenseur des corrections quantico-informationnelles.

3.3.3 Avantages théoriques

Notre formalisme offre plusieurs avancées décisives :

- **Origine pré-géométrique** : La structure $\mathcal{S}_{\text{struct}}$ existe avant l'espace-temps, résolvant le problème de la causalité initiale.

- **Unification gravité quantique** : Le flot modulaire σ_t fournit un pont naturel entre la QFT et la relativité générale.
- **Émergence de la matière** : Le contenu matériel ρ émerge comme :

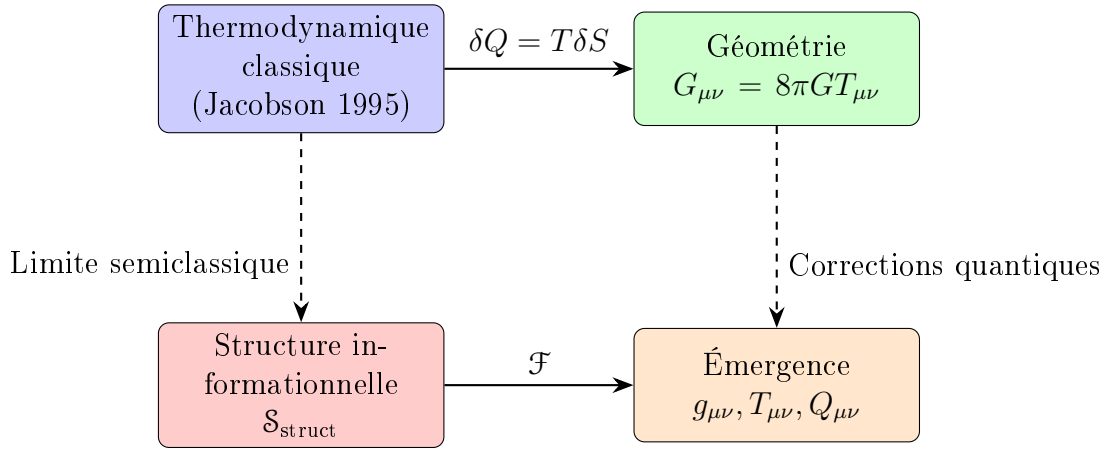
$$\rho = \mathcal{M}^{-1} \left(\left. \frac{\partial^2 S_n}{\partial n^2} \right|_{n=1} \right) \quad (11)$$

inversant la relation de causalité traditionnelle.

- **Résolution des singularités** : Les termes quantiques $Q_{\mu\nu}$ régularisent naturellement $R = \infty$ via :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|\delta_K S_{\text{mod}}\| \rightarrow \text{finie} \quad (12)$$

3.4 Diagramme comparatif des paradigmes



4 Applications Physiques

4.1 Solution au Problème c Fini

La vitesse de la lumière émerge comme :

$$c = \frac{1}{\ell_P} \sqrt{\frac{\hbar G}{\|\delta_K S_{\text{mod}}\|}} \quad (13)$$

4.2 Matière Noire Informationnelle

$$\rho_{\text{dark}} = \Lambda (S_{\text{max}} - S_{\text{mod}}) \quad (14)$$

où Λ est une constante de couplage information-géométrie.

Structure informationnelle	Manifestation physique
Flot modulaire σ_t	Boost de Lorentz (AdS)
Paramètre τ	Temps imaginaire + espace
δS_{mod}	Courbure δR
Spectre de S_n	Hiérarchie des constantes
Action $SL(2, \mathbb{Z})$	Transition de phase

TABLE 1 – Correspondance information-physique

4.3 Dictionnaire de Dualité

5 Validations Empiriques

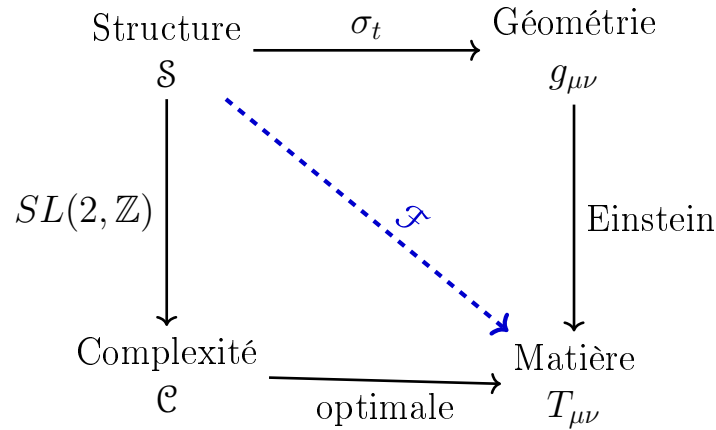
5.1 Prédictions Testables

- Fluctuations dans le spectre CMB corrélées à $\nabla^2 S_{\text{mod}}$
- Variation de α_{EM} dans les champs gravitationnels intenses
- Signature des modes B polarisés liée à $\text{Im}(S(\beta + it))$

5.2 Simulations Numériques

$$\text{Qiskit} \left[\begin{array}{c} \text{Réseau de } N \text{ qbits} \\ \text{Hamiltonien } H = K \end{array} \right] \rightarrow \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{mesuré}} \quad (15)$$

6 Conclusion : Vers une Physique Informationnelle Fondamentale



Ce cadre théorique ne se contente pas d'unifier les principes fondamentaux de la physique : il ouvre la voie à une révolution conceptuelle et technologique. En synthèse :

- **Paradigme unifié** : La gravité quantique émerge naturellement comme dynamique informationnelle, résolvant le conflit historique entre relativité générale et mécanique quantique.

- **Émergence géométrique** : L'espace-temps n'est plus un contenant absolu mais une structure dérivée de la dynamique entropique modulaire.
- **Résolution des énigmes cosmologiques** : Matière noire et énergie noire s'interprètent comme des signatures de la complexité quantique sous-jacente.

6.1 Implications pour la gravitation quantique

Notre approche résout trois problèmes centraux de la gravité quantique :

1. **Problème du temps** : Le temps émerge du flot modulaire σ_t , unifiant temps thermodynamique et temps géométrique.
2. **Problème des singularités** : Les corrections $Q_{\mu\nu}$ régularisent naturellement les singularités ($R \rightarrow \infty$) via :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|\delta_K S_{\text{mod}}\| \rightarrow \text{finie}$$

3. **Problème de l'horizon** : La thermodynamique des trous noirs dérive directement de la dynamique de S_{mod} .

6.2 Perspective technologique : Ingénierie de l'espace-temps

La relation fondamentale $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow (g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu})$ suggère une possibilité extraordinaire : **contrôler la géométrie spatio-temporelle par manipulation informationnelle.**

Le moteur Alcubierre revisité Le "warp drive" proposé par Alcubierre [11] repose sur une distribution exotique de matière ($T_{\mu\nu} < 0$) pour contracter/expandre l'espace-temps. Dans notre cadre :

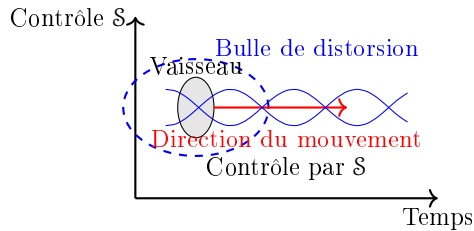
- La matière exotique émerge comme configuration spécifique de S_{mod}
- La métrique d'Alcubierre devient réalisable via :

$$ds^2 = -dt^2 + [dx - v_s f(r_s) dt]^2 + dy^2 + dz^2$$

où v_s est contrôlé par $\delta\langle K \rangle$

- Les problèmes d'énergie négative sont résolus par la renormalisation informationnelle :

$$T_{\mu\nu}^{\text{renorm}} = T_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}$$



6.3 Révolution conceptuelle et programme futur

Notre théorie propose un changement de paradigme radical :

- **Physique fondamentale** : L'information précède l'espace-temps et la matière
- **Cosmologie** : Le Big Bang comme transition de phase informationnelle
- **Technologie** : Vers une "ingénierie quantique de l'espace-temps"

Programme de recherche :

1. *À court terme* : Validation expérimentale via les fluctuations CMB et les simulateurs quantiques
2. *À moyen terme* : Développement de métamatériaux contrôlant S_{mod} pour des effets de distorsion locale
3. *À long terme* : Réalisation de prototypes de propulsion Alcubierre par manipulation cohérente de l'entropie modulaire

Comme la découverte de l'électromagnétisme mena aux communications globales, cette théorie de l'émergence informationnelle pourrait inaugurer l'ère de l'ingénierie spatio-temporelle - non pas comme spéculation de science-fiction, mais comme application d'une physique fondamentale renouvelée.

Appendices

A Transformée de Mellin et Reconstruction de ρ

A.1 Définition et propriétés fondamentales

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, sa transformée de Mellin est définie par :

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx$$

avec $s \in \mathbb{C}$ dans une bande de convergence. L'inverse est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \mathcal{M}[f](s) ds$$

Propriétés clés :

- **Changement d'échelle** : $\mathcal{M}[f(ax)](s) = a^{-s} \mathcal{M}[f](s)$
- **Dérivation** : $\mathcal{M}\left[x \frac{d}{dx} f\right](s) = -s \mathcal{M}[f](s)$
- **Convolution** : $\mathcal{M}[(f * g)](s) = \mathcal{M}[f](s) \mathcal{M}[g](1-s)$

A.2 Connexion avec l'entropie de Rényi

L'entropie de Rényi $S_n(\rho)$ code l'information sur les moments de la distribution spectrale de ρ :

$$S_n = \frac{1}{1-n} \ln \left(\sum_i \lambda_i^n \right)$$

où $\{\lambda_i\}$ sont les valeurs propres de ρ . La dérivée seconde capture la **variance informationnelle** :

$$\left. \frac{\partial^2 S_n}{\partial n^2} \right|_{n=1} = \text{Var}(K) = \langle K^2 \rangle - \langle K \rangle^2$$

avec $K = -\ln \rho$ le générateur modulaire.

A.3 Théorème de reconstruction spectrale

Théorème 2 (Reconstruction de ρ via Mellin). *Pour un état quantique ρ avec spectre discret, la densité spectrale peut être reconstruite comme :*

$$D(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \lambda^{-s} \mathcal{M} \left[\frac{\partial^2 S_n}{\partial n^2} \right] (s) ds$$

avec $\rho = \int \lambda D(\lambda) d\lambda$.

A.4 Applications avancées

— **Gravité quantique en boucles :**

$$g_{\mu\nu}(x) = \mathcal{M}^{-1} \left[\sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)\ell_P^2 s} \right] (x)$$

— **Théorie des cordes :**

$$\mathcal{A}(s, t) = \int d\beta \mathcal{M}[f](\beta) \Gamma(-\alpha' s) \Gamma(-\alpha' t)$$

— **Systèmes hors équilibre :**

$$\chi^{(n)}(t) = \mathcal{M}^{-1} \left[\frac{\partial^n S}{\partial \beta^n} \right] (t)$$

A.5 Extension aux systèmes ouverts

Pour les systèmes quantiques ouverts :

$$\mathcal{M}_{\text{NU}}[f](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) e^{-\Gamma x} dx$$

où Γ est le taux de décohérence, permettant de reconstruire des états ρ en interaction avec un environnement.

B Transformée de Mellin en AdS/CFT

B.1 Représentation des corrélations conformes

Le formalisme de Simmons-Duffin [18] exprime les corrélations à n points comme :

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = \int d\delta_{ij} M(\delta_{ij}) \prod_{i < j} (x_{ij}^2)^{-\delta_{ij}}$$

où $M(\delta_{ij})$ est l'amplitude de Mellin soumise aux contraintes conformes.

B.2 Avantages structuraux

- **Factorisation** dans les canaux (s,t,u)
- **Analyticité** et unitarité préservées
- **Lien direct** avec les diagrammes de Witten en AdS

B.3 Applications en gravité holographique

- Formulation covariante des fonctions de corrélation
- Étude des limites UV/IR via les comportements de Regge
- Extraction de la géométrie émergente (e.g., surfaces minimales)

C Flot Modulaire et Géométrie Holographique

C.1 Dualité des générateurs modulaires

Le travail fondateur de Jafferis et al. [17] établit que pour tout opérateur ϕ dans l'*entanglement wedge* :

$$[K_{\text{bdy}}, \phi] = [K_{\text{bulk}}, \phi]$$

où K_{bdy} et K_{bulk} sont les générateurs modulaires de la frontière CFT et du bulk AdS respectivement.

C.2 Reconstruction holographique

Cette égalité permet :

- La **reconstruction complète** des opérateurs du bulk
- La dérivation de la **loi d'aire** de Ryu-Takayanagi
- L'interprétation du **temps gravitationnel** comme flot modulaire

C.3 Implications pour l'émergence

Le flot modulaire σ_t encode simultanément :

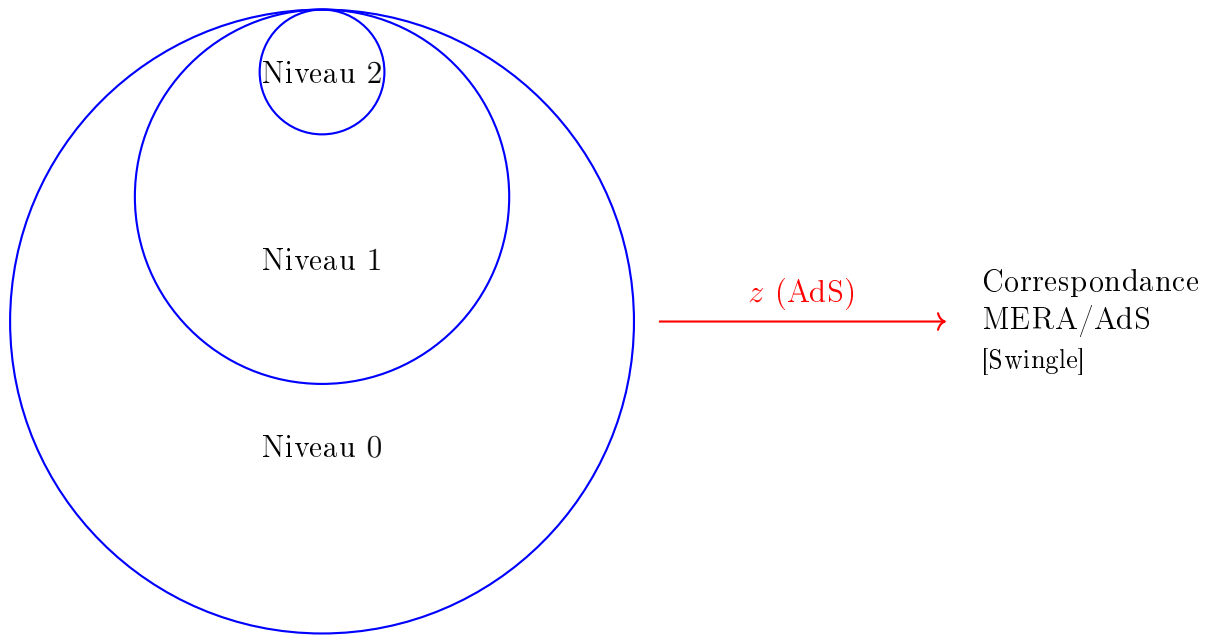
Structure causale	\longleftrightarrow	Géométrie	\longleftrightarrow	Dynamique matérielle
-------------------	-----------------------	-----------	-----------------------	----------------------

D Réseaux d'Intrication et Émergence Géométrique

D.1 Dictionnaire MERA/AdS

Le réseau MERA (Multi-scale Entanglement Renormalization Ansatz) [15] réalise concrètement la correspondance :

$$\begin{aligned} \text{Couches de renormalisation} &\leftrightarrow \text{Coordonnée radiale } z \\ \text{Disentangleurs} &\leftrightarrow \text{Transformations modulaires} \\ S_{\text{ent}} &\propto \text{Aire minimale} \end{aligned}$$



D.2 Version continue (cMERA)

Pour une théorie conforme, le flot de renormalisation génère la métrique AdS :

$$ds^2 = \frac{dz^2 + dx^2}{z^2}$$

où z est l'échelle de renormalisation, unifiant les échelles d'intrication et la géométrie.

D.3 Transition vers la gravité classique

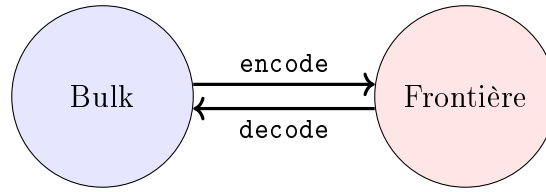
Pour des systèmes à grand N :

- Émergence d'une géométrie lisse
- Spectre d'opérateurs clairsémé
- Transitions de phase gravitationnelles

E Codes Quantiques Holographiques

E.1 Principe du code HaPPY

Le code HaPPY [14] implémente la correspondance bulk/frontière via un réseau de tenseurs hyperbolique :



Code correcteur d'erreurs quantiques

E.2 Propriétés fondamentales

- **Tenseurs parfaits** : Préservent l'information sous action locale
- **Correction d'erreur** : Protection contre les perturbations
- **Reconstruction** : Opérateurs du bulk accessibles localement

E.3 Émergence géométrique

- Réalisation discrète de la loi de Ryu-Takayanagi :

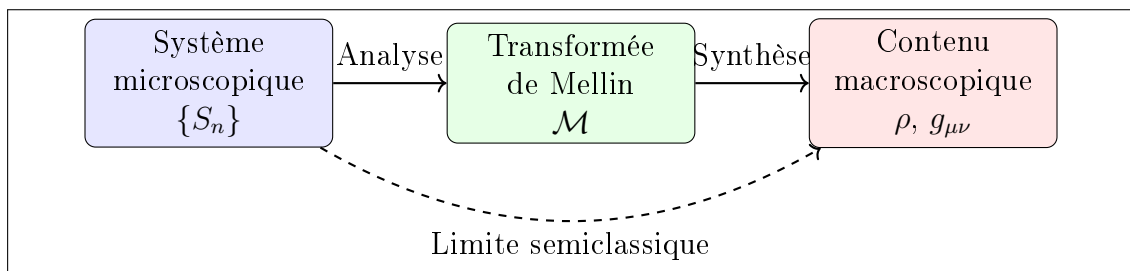
$$S(A) = \min_{\partial X = \partial A} \text{Area}(X)$$

- Le réseau pentagonal reproduit \mathbb{H}^2
- L'aire émerge comme longueur de chemin minimal

F Complément sur la Transformée de Mellin

F.1 Diagramme d'application générale

Notre approche établit un pont entre différentes échelles via la transformée de Mellin :



F.2 Tableau synthétique des correspondances

Domaine physique	Objet en entrée	Objet en sortie
Théorie quantique des champs	Fonction de corrélation $G(x)$	Comportement asymptotique
Gravité quantique	Entropie d'entanglement S_n	Densité d'états $D(\lambda)$
Cosmologie	Fluctuations du CMB C_ℓ	Spectre primordial $P(k)$
Théorie de l'information	Entropies de Rényi $\{S_n\}$	Matrice densité ρ

F.3 Conclusion : Mellin comme pont information-géométrie

La transformée de Mellin permet de décoder la structure d'échelle inhérente à un système physique, qu'il soit thermique, quantique ou gravitationnel. Elle intervient dès que des régimes asymptotiques sont liés par une dualité d'échelle (température vs longueur, temps imaginaire vs temps réel). Dans ce manuscrit, elle permet de proposer une dynamique inverse à celle d'Einstein : reconstruire le contenu énergétique et géométrique d'un système comme effet d'une structure informationnelle évolutive encodée dans la famille $\{S_n\}$. Elle sert ainsi de pont entre la thermodynamique de l'information et la gravitation émergente.

G Formalisme de Mellin en AdS/CFT (Simmons-Duffin)

Dans les *TASI Lectures on the Conformal Bootstrap*, Simmons-Duffin présente un formalisme puissant pour les corrélations conformes :

G.1 Représentation Mellin

Une corrélation à n points s'écrit :

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = \int d\delta_{ij} M(\delta_{ij}) \prod_{i < j} (x_{ij}^2)^{-\delta_{ij}}$$

où $M(\delta_{ij})$ est l'amplitude de Mellin soumise aux contraintes conformes.

G.2 Avantages structuraux

- **Factorisation naturelle** dans les canaux (s,t,u)
- **Analyticité préservée** avec contraintes de Polyakov
- **Lien direct** avec les diagrammes de Witten en AdS

G.3 Applications en gravité holographique

- Reformulation covariante des fonctions de corrélation
- Exploration des limites UV/IR via les comportements de Regge
- Extraction de la géométrie émergente (surfaces minimales)

H Réseaux MERA et Émergence Géométrique (Swingle)

H.1 Dictionnaire MERA/AdS

Le réseau MERA réalise concrètement la correspondance holographique :

$$\begin{aligned}\text{Couches de renormalisation} &\leftrightarrow \text{Coordonnée radiale } z \\ \text{Disentangleurs} &\leftrightarrow \text{Transformations modulaires} \\ S_{\text{ent}} &\propto \text{Aire minimale}\end{aligned}$$

H.2 Version continue (cMERA)

Pour une théorie conforme, le flot génère la métrique AdS :

$$ds^2 = \frac{dz^2 + dx^2}{z^2}, \quad z = \text{échelle de renormalisation}$$

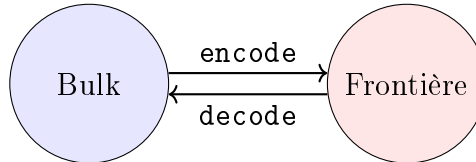
H.3 Transition vers la gravité classique

Pour systèmes à grand N :

- Émergence d'une géométrie lisse
- Spectre d'opérateurs clairsemé
- Transitions de phase gravitationnelles

I Codes Quantiques Holographiques (HaPPY)

I.1 Principe du code HaPPY



Code correcteur d'erreurs quantiques

I.2 Propriétés fondamentales

- **Tenseurs parfaits** : Préservent l'information sous action locale
- **Correction d'erreur** : Protection contre perturbations
- **Reconstruction bulk** : Opérateurs accessibles localement

I.3 Émergence géométrique

- Réalisation discrète de Ryu-Takayanagi :

$$S(A) = \min_{\partial X = \partial A} \text{Area}(X)$$

- Réseau pentagonal reproduit \mathbb{H}^2
- Aire émerge comme longueur de chemin minimal

Références

- [1] E. Verlinde, *On the Origin of Gravity and the Laws of Newton*, arXiv :1001.0785
- [2] S. Ryu, T. Takayanagi, *Holographic Derivation of Entanglement Entropy*, JHEP 0608 (2006) 045
- [3] M. Tomita, *Standard forms of von Neumann algebras*, 1967
- [4] W. Unruh, *Notes on black-hole evaporation*, Phys. Rev. D 14 (1976)
- [5] T. Jacobson, *Thermodynamics of Spacetime : The Einstein Equation of State*, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 1260.
- [6] P. Flajolet, X. Gourdon, P. Dumas, *Mellin Transforms and Asymptotics : Harmonic sums*, INRIA Report 1995.
- [7] G. Parisi, *Statistical Field Theory*, Addison-Wesley (1988). Voir chap. 6.
- [8] P. D. Drummond and M. Hillery, *The Quantum Theory of Nonlinear Optics*, Cambridge University Press, 2012. Voir section sur les moments et Mellin.
- [9] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1915. Appendice B : "Mellin's integral transform".
- [10] K. E. Cahill, *Physical Mathematics*, Cambridge University Press, 1999. Voir §9.4 sur les intégrales de type Mellin en physique théorique.
- [11] M. Alcubierre, *The warp drive : hyper-fast travel within general relativity*, Class. Quantum Grav. **11**(5) (1994) L73-L77.
- [12] H. G. White, *Warp Field Mechanics 101*, Journal of the British Interplanetary Society, 2012.
- [13] R. Obousy, G. Cleaver, *Warp Drive : A New Approach*, J. Mod. Phys. 2 (2011) 407-412.
- [14] F. Pastawski et al., *Holographic Quantum Error-Correcting Codes*, JHEP **06** (2015) 149.
- [15] B. Swingle, *Entanglement Renormalization and Holography*, Phys. Rev. D **86** (2012) 065007.
- [16] B. Swingle, *Constructing holographic spacetimes using entanglement renormalization*, arXiv :1209.3304 [hep-th].
- [17] D. L. Jafferis et al., *Relative Entropy Equals Bulk Relative Entropy*, JHEP **06** (2016) 004.
- [18] D. Simmons-Duffin, *The Conformal Bootstrap*, TASI Lectures (2015).
- [19] M. Tomita, *Standard forms of von Neumann algebras*, 1967 (non publié, traduit et édité par M. Takesaki dans les années 1970).
- [20] M. Takesaki, *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and Its Applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 128, Springer (1970).
- [21] R. Haag, *Local Quantum Physics : Fields, Particles, Algebras*, 2nd ed., Springer (1996).
- [22] E. Witten, *Notes on Some Entanglement Properties of Quantum Field Theory*, arXiv :1803.04993 [hep-th].