

1 Causal Fermion Systems, Cohérence Globale et Complexité

1.1 Cohérence Globale de la Causalité

Dans le cadre des *causal fermion systems* (CFS), un point de l'espace-temps est décrit par un opérateur auto-adjoint de rang fini $x \in L(\mathcal{H})$. La causalité entre deux points x, y est définie à partir du spectre de l'opérateur

$$A_{xy} = P(x, y) P(y, x),$$

où P est le projecteur fermionique.

Définition 1.1 (Relation causale locale). Soient x, y deux points de l'univers CFS. On dit que :

- x et y sont *spacelike* si toutes les valeurs propres de A_{xy} ont même module,
- x et y sont *timelike* si toutes les valeurs propres sont réelles et non toutes de même module,
- x et y sont *lightlike* sinon.

Le passage d'une causalité locale à une structure globale cohérente requiert des conditions supplémentaires.

Axiome 1.1 (Cohérence causale globale). La relation causale \prec définie par les paires timelike vérifie :

1. **Acyclicité** : il n'existe pas de séquence $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_n = x_1$,
2. **Transitivité** : si $x \prec y$ et $y \prec z$, alors $x \prec z$,
3. **Compatibilité spectrale locale** : pour tout triplet (x, y, z) , l'holonomie discrète

$$H_{xyz} := A_{xy} A_{yz} A_{zx}$$

satisfait $\|H_{xyz}\| \leq \varepsilon$ pour un ε petit (contrôle des boucles courtes).

Ces conditions garantissent que l'ensemble (M, \prec) est un ordre partiel causal (DAG), analogue à la structure causale d'une variété lorentzienne.

Objectif

Passer d'un critère *bivarié* (sur x, y) à un *ordre partiel global* (M, \preceq) (acyclique, transitif, « asymptotiquement lorentzien »).

Propositions « actionnables »

(A) Fonction de temps émergente par asymétrie spectrale. Définir une hauteur causale $\tau(x)$ en intégrant une asymétrie spectrale « futur vs passé » de A_{xy} :

$$\tau(x) := \int_M F(\text{Spec}(A_{xy})) d\rho(y),$$

où F pèse différemment les configurations « timelike avant / après ». Si τ est *strictement croissante* le long des arêtes « timelike », alors

$$x \rightarrow y \Rightarrow \tau(x) < \tau(y),$$

ce qui exclut les cycles. *Test pratique* : calculer τ sur des minimiseurs numériques de l'action ; vérifier qu'un tri topologique existe \Rightarrow DAG.

(B) Cohérence locale–globale (type *sheaf gluing*). Construire un pré-faisceau $\mathcal{C}(U)$ des relations causales induites sur tout $U \subset M$. Exiger :

1. **Compatibilité sur recouvrement** U_i (coïncidence de $\mathcal{C}(U_i \cap U_j)$),
2. **Acyclie locale \Rightarrow acyclie globale** (théorème de collage).

Actionnalisable : ajouter à l'action CFS un terme de pénalisation des 2-cycles/3-cycles causaux détectés sur triples (x, y, z) :

$$\mathcal{S}_{\text{loop}}[\rho] = \lambda \sum_{(x,y,z)} \Phi(A_{xy}, A_{yz}, A_{zx}),$$

où Φ est nulle si l'orientation induite par les spectres est acyclique, positive sinon.

(C) « Courbure causale » via holonomie discrète. Définir l'holonomie

$$H_{xyz} := A_{xy} A_{yz} A_{zx}.$$

Imposer $\|H_{xyz}\|$ petit (ou un spectre quasi-réel positif) sur les cycles courts. Cela force une géométrie effective proche d'une variété lorentzienne et supprime les boucles temporelles microscopiques non physiques.

1.2 Dynamique Effective et Collapse

Bien que la formulation originale des CFS soit essentiellement déterministe, la phénoménologie quantique impose un mécanisme de réduction effective des états.

Hypothèse 1.1 (Mélange microscopique). La mesure universelle ρ n'est pas un minimiseur unique, mais un mélange convexe de minimiseurs quasi-dégénérés. Les corrélations fermioniques se décomposent en composantes quasi-orthogonales

$$\rho \simeq \sum_i p_i \rho_i, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1.$$

Proposition 1.1 (Décohérence effective). *Sous l'hypothèse précédente, l'interaction avec des degrés de liberté externes supprime les interférences entre les ρ_i . L'observateur voit un état effectif*

$$\rho_{\text{obs}} \simeq \rho_j \quad \text{avec probabilité } p_j.$$

Ceci reproduit la règle de Born comme loi de fréquence typique.

En outre, une équation maîtresse non linéaire peut apparaître à résolution finie :

$$\dot{\Gamma}_t = \mathcal{L}[\Gamma_t] + \epsilon \mathcal{N}[\Gamma_t],$$

où \mathcal{L} est une dynamique unitaire effective et \mathcal{N} une contraction faible issue du *coarse-graining* CFS. Le paramètre ϵ est fixé par l'échelle de coupure spectrale.

1.3 Borne de Complexité et Vitesse de la Lumière

La vitesse de la lumière c émerge comme limite de propagation de la complexité informationnelle dans le réseau CFS.

Définition 1.2 (Complexité de connexion). Pour deux points x, y , on définit la complexité de connexion $\text{Comp}(x \rightarrow y)$ comme le coût minimal de chaînes causales reliant x à y , mesuré par la décroissance spectrale de A_{xy} et la profondeur de la chaîne.

Théorème 1.1 (Borne de Lieb–Robinson fermionique). *Il existe des constantes $C, \xi > 0$ et une vitesse v_* telles que, pour tout couple d’observables locales O_X, O_Y ,*

$$\|[O_X(t), O_Y]\| \leq C \exp(-(\text{dist}(X, Y) - v_* t) / \xi).$$

On identifie $c := v_$ comme la vitesse maximale de propagation de l’information, interprétée comme la borne de complexité calculatoire du tissu CFS.*

Ainsi, la finitude de la vitesse de la lumière s’interprète comme l’expression physique d’une capacité finie de traitement d’information par le substrat discret de l’univers.

1.4 De l’équation d’Euler–Lagrange à la vitesse finie de propagation

Dans le cadre du principe de l’action causale, les équations d’Euler–Lagrange s’écrivent

$$\nabla_u \left(\int_{\mathcal{F}} \mathcal{L}(x, y) d\rho(y) - \frac{\nu}{2} \right) = 0, \quad \forall u \in \mathfrak{J}, \forall x \in M,$$

où \mathcal{L} est la lagrangienne causale, ρ la mesure universelle, et ∇_u la dérivée par rapport à un jet u . Ces équations, bien que formulées de manière intégrale et non locale, admettent une structure effective analogue à des équations hyperboliques.

Linéarisation. On considère une déformation infinitésimale de la mesure universelle, paramétrée par v . La différentiation des EL conduit aux *équations de champs linéarisées*

$$\langle u, \Delta v \rangle(x) = 0, \quad \forall u \in \mathfrak{J}, \forall x \in M,$$

où Δ est un opérateur linéaire obtenu à partir des dérivées secondes de \mathcal{L} . Ces équations décrivent la dynamique des perturbations autour d’un état de référence.

Régions lenticulaires et intégrales de couche de surface. Pour établir un caractère *hyperbolique*, Finster et collaborateurs introduisent des *régions lenticulaires*, domaines admettant un feuilletage par des couches de surface (*surface layers*). Dans ces domaines, on définit des intégrales de surface qui jouent le rôle d’énergies conservées. Ces fonctionnelles permettent de contrôler la norme d’une solution dans une région à partir des données initiales sur une couche précédente.

Opérateurs de Green et support causal. En utilisant les estimations d’énergie, on construit des opérateurs de Green *retardé* et *avancé* pour l’opérateur Δ . On obtient ainsi que la solution en un point x ne dépend que des données situées dans le passé (resp. futur) causal de x , défini par la structure induite par les A_{xy} . Cela établit que les perturbations linéarisées possèdent un *support causal*, c’est-à-dire qu’elles se propagent à *vitesse finie*.

Identification avec la vitesse de la lumière. Dans la limite continue, où le CFS se rapproche d’une variété lorentzienne, la vitesse de propagation ainsi définie s’identifie naturellement à la vitesse de la lumière c . On retrouve donc la borne relativiste de causalité, mais obtenue *sans postulat*, comme conséquence directe des équations d’Euler–Lagrange.

Remarque 1.1. Cette preuve diffère conceptuellement d’une inégalité de type Lieb–Robinson (utilisée dans les systèmes quantiques sur réseau), car elle ne repose pas sur un commutateur hamiltonien local, mais sur l’analyse variationnelle des EL, la linéarisation et la construction d’estimations d’énergie dans un cadre intégral non lisse.

1.5 Opérateurs fermioniques et oscillateurs locaux

Dans un système fermionique causal, chaque point d’espace-temps $x \in M$ est représenté par un opérateur auto-adjoint de rang fini $F(x)$ agissant sur l’espace de Hilbert \mathcal{H} . Ces opérateurs codent la structure fermionique par l’intermédiaire du projecteur des états occupés (la mer de Dirac), via le noyau de corrélation

$$P(x, y) = \pi_x P \pi_y,$$

où π_x est la projection associée au point x .

Lien avec les oscillateurs fermioniques. En seconde quantification, les degrés de liberté fermioniques peuvent être réalisés comme un ensemble d’oscillateurs locaux, c’est-à-dire des opérateurs de création et annihilation

$$\{a_x, a_y^\dagger\} = \delta_{xy}, \quad \{a_x, a_y\} = 0,$$

satisfaisant les relations d’anticommutation canoniques (CAR). On peut donc interpréter chaque opérateur $F(x)$ comme la donnée effective d’un mode fermionique local (oscillateur binaire : occupé ou vide).

Réseau d’oscillateurs et propagation. La dynamique globale est équivalente à celle d’un *réseau d’oscillateurs fermioniques* couplés par les corrélations $P(x, y)$. Dans une telle structure :

- la propagation de l’information se fait le long des arêtes du réseau (analogues aux couplages locaux),
- les relations CAR imposent une borne sur la vitesse de propagation des perturbations, de même nature que la borne de Lieb–Robinson dans les systèmes de spin.

Analyse de Finster. Plutôt que de démontrer cette borne par une inégalité de type Lieb–Robinson, Finster procède en partant des équations d’Euler–Lagrange du principe variationnel. La linéarisation des EL conduit à des équations effectives de type hyperbolique pour les perturbations, avec :

1. des *estimations d’énergie* définies par des intégrales de couches de surface,
2. la construction d’opérateurs de Green avancés et retardés,
3. l’existence d’un *support causal* pour les solutions.

Ainsi, la vitesse de propagation est finie et, dans la limite continue, s’identifie à la vitesse de la lumière c .

Lecture informationnelle. On peut alors proposer une interprétation complémentaire :

- les opérateurs fermioniques $F(x)$ forment un registre d'oscillateurs locaux (bits quantiques fermioniques),
- les corrélations $P(x, y)$ définissent le circuit quantique fondamental de l'univers,
- la borne c apparaît comme la *vitesse limite de transmission d'information* dans ce réseau d'oscillateurs,
- ou encore, comme la *borne de complexité calculatoire* intrinsèque du tissu de l'univers.

Légende :

- nœuds x_i : oscillateurs fermioniques locaux
reliés par $P(x, y)$ (corrélations)
- Cercles ct_1, ct_2 : fronts de
propagation (borne causale c)

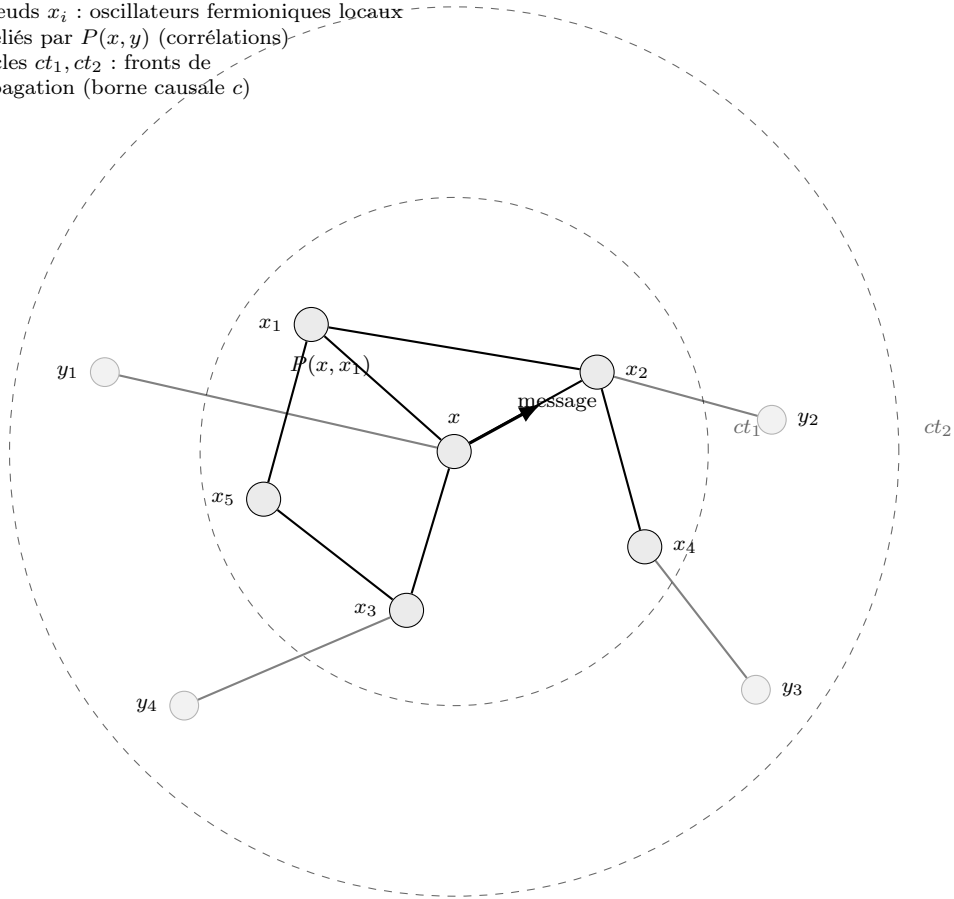


FIGURE 1 — Réseau d'oscillateurs fermioniques locaux (nœuds) couplés par $P(x, y)$. Les cercles pointillés de rayon ct illustrent la borne de propagation causale : l'information issue de x n'atteint les nœuds situés au-delà de ct_1 qu'à l'instant $t_2 > t_1$.

Références

- [1] F. Finster, *Causal Fermion Systems : Discrete Space-Times, Causation and Finite Propagation Speed*, arXiv :1812.00238 [math-ph], 2018. <https://arxiv.org/abs/1812.00238>.
- [2] C. Dappiaggi and F. Finster, *Linearized Fields for Causal Variational Principles : Existence Theory and Causal Structure*, Methods and Applications of Analysis, vol. 27, no. 3, pp. 241–291, 2020. doi :10.4310/MAA.2020.v27.n3.a1, also available at arXiv :1808.03177 [math-ph].