Geometría Diferencial Discreta

Emerson León

Universidad de los Andes, Bogotá

Universidad Sergio Arboleda
Bogotá, 02 de octubre de 2015

Geometría Diferencial Discreta

Geometría diferencial: Estudia objetos suaves, funciones continuas, curvas y superficies. Herramientas del cálculo diferencial.

Geometría discreta: Objetos construidos con un número finito de elementos, como puntos, segmentos, polígonos, etc.

Geometría Diferencial Discreta

Geometría diferencial: Estudia objetos suaves, funciones continuas, curvas y superficies. Herramientas del cálculo diferencial.

Geometría discreta: Objetos construidos con un número finito de elementos, como puntos, segmentos, polígonos, etc.

Objetivo

Crear análogos discretos de los objetos, métodos e ideas de la geometría diferencial.

"La idea es discretizar la teoría completa, no solo las ecuaciones."

Geometría Diferencial Discreta

Geometría diferencial: Estudia objetos suaves, funciones continuas, curvas y superficies. Herramientas del cálculo diferencial.
Geometría discreta: Objetos construidos con un número finito de elementos, como puntos, segmentos, polígonos, etc.

Objetivo

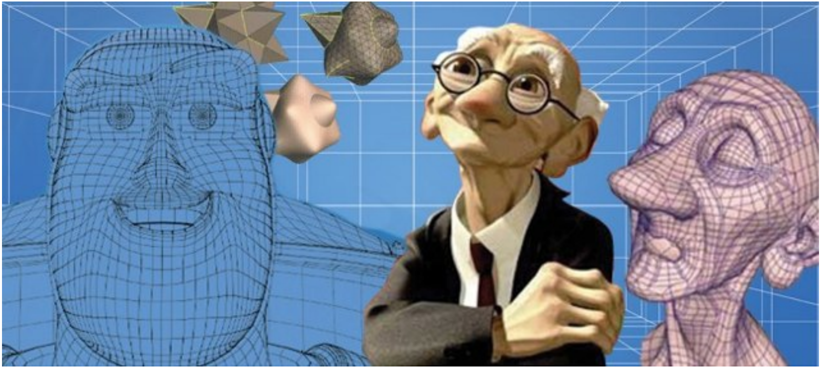
Crear análogos discretos de los objetos, métodos e ideas de la geometría diferencial.

"La idea es discretizar la teoría completa, no solo las ecuaciones."

- Muchas posibles versiones discretas.
- Los objetos continuos pueden obtenerse pasando al límite (cuando las distancias discretas tienden a cero)
- Algunos resultados clásicos pueden entenderse mejor desde el punto de vista discreto.

Aplicaciones

Gráficos y animación por computador



Imágenes por Pixar Animation Studios

Aplicaciones

Visualización y manipulación gráfica (superficies minimales, suavizado, reconstrucción)

Figure 4: Initial and final frames of Willmore flow applied to smooth *(top)* a 44928 triangle dinosaur and *(bottom)* a 24192 triangle hand at interactive rates. 16 smoothing steps require a total of 7.47s and 4.42s, with one-time factorization costing 8.77s and 5.31s, for the dinosaur and the hand, respectively. Images rendered with flat shading.

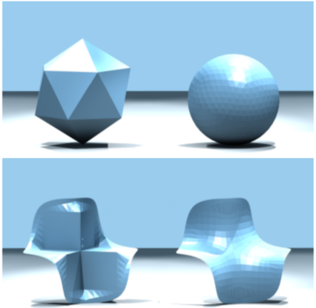
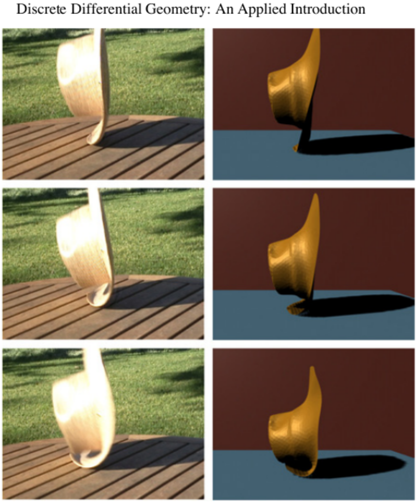


Figure 5: Initial and final frames of Willmore flow applied to solve two tasks posed by Bobenko and Schröder. *(top)* Smoothing a 4-times subdivided icosahedron into a sphere and *(bottom)* a hole filling problem. The sphere converged in 120ms (12ms $\times$ 10 smoothing steps), with 200ms for Hessian prefactorization. The hole filling problem required 640ms after 120ms for prefactorization. Rendered with flat shading.

Aplicaciones

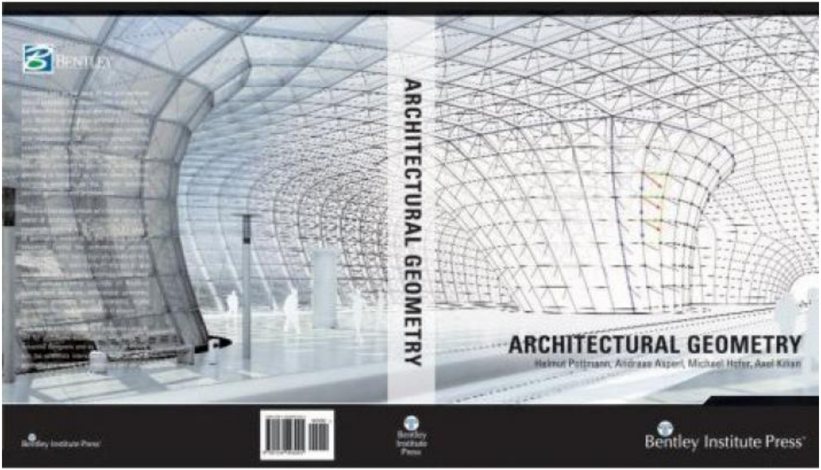
Física y simulaciones (deformaciones, materiales, fluidos)



Imágenes por Eitan Grinspun, Columbia University

Aplicaciones

Arquitectura (forma libre)



Portada de libro, Helmut Pottmann, 2007

Plan de la charla

- Curvatura discreta, teorema de Gauss-Bonnet discreto.
- Redes multidimensionales, Q-nets y redes circulares.

Plan de la charla

- Curvatura discreta, teorema de Gauss-Bonnet discreto.
- Redes multidimensionales, Q-nets y redes circulares. (*Discrete Differential Geometry, Integrable Structure*, por Alexander Bobenko, Yuri Suris, 2008)

Curvatura

Para una circunferencia, la curvatura se define como

$$\kappa = \frac{1}{r}.$$

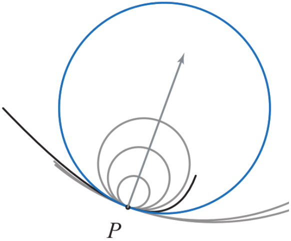
Curvatura

Para una circunferencia, la curvatura se define como

$$\kappa = \frac{1}{r}.$$

Para una curva general, la curvatura κ en un punto P se obtiene tomando r como el radio de la circunferencia osculatriz en P.

Esta es la circunferencia tangente en P que mejor aproxima a la curva cerca al punto. Genéricamente es la única circunferencia tangente que cruza la curva.

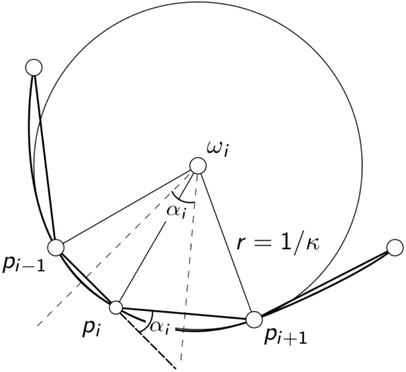


Curvatura de curvas discretas

Cauchy definió el centro de curvatura como el límite de la intersección de dos rectas normales a la curva en dos puntos cercanos a P.
En el caso de una curva discreta, podemos tomar como círculo osculatriz el que pasa por tres puntos consecutivos.

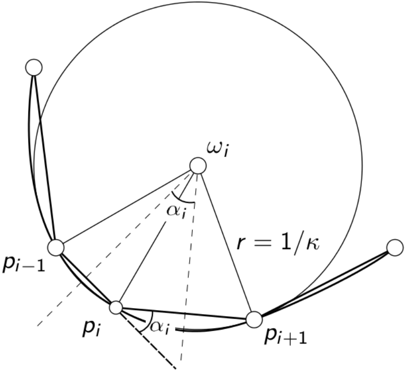
Curvatura de curvas discretas

Cauchy definió el centro de curvatura como el límite de la intersección de dos rectas normales a la curva en dos puntos cercanos a P.
En el caso de una curva discreta, podemos tomar como círculo osculatriz el que pasa por tres puntos consecutivos.



Curvatura de curvas discretas

Cauchy definió el centro de curvatura como el límite de la intersección de dos rectas normales a la curva en dos puntos cercanos a P.
En el caso de una curva discreta, podemos tomar como círculo osculatriz el que pasa por tres puntos consecutivos.



Hay diferentes posibilidades para definir la curvatura discreta.

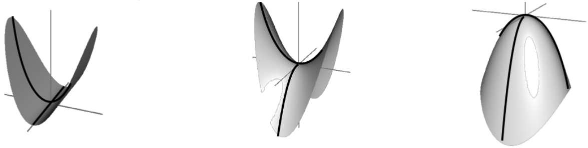
$$\kappa_i^M = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha_i}{\|p_{i+1} - p_{i-1}\|}$$

$$\kappa_i^\theta = \frac{2\alpha_i}{\ell_{i-1} + \ell_i}$$

$$\kappa_i^\alpha = \alpha_i$$

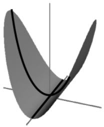
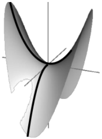
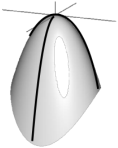
Curvatura de superficies

Para una superficie suave, en cada punto hay dos curvaturas principales κ_1 y κ_2.



Curvatura de superficies

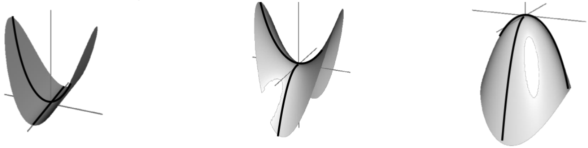
Para una superficie suave, en cada punto hay dos curvaturas principales κ_1 y κ_2.

La curvatura de Gauss se define como $K = \kappa_1 \kappa_2$.
La curvatura media se define como $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$.
La curvatura de Gauss es un valor intrínseco de la superficie. (No depende de el espacio ambiente.)

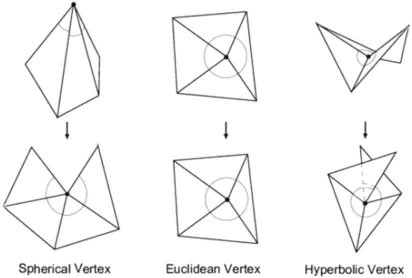
Curvatura de superficies

Para una superficie suave, en cada punto hay dos curvaturas principales κ_1 y κ_2.



La curvatura de Gauss se define como $K = \kappa_1 \kappa_2$.
La curvatura media se define como $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$.
La curvatura de Gauss es un valor intrínseco de la superficie. (No depende de el espacio ambiente.)

La curvatura de gauss $K(v)$ en un vértice v es 2π menos la suma de los ángulos en v.



Teorema de Gauss-Bonnet

La característica de Euler de una superficie (discreta) S está dada por la fórmula $\chi(S) = C + V - A$. Esta es una invariante topológica. Si S es orientable de genero g, entonces $\chi(S) = 2 - 2g$.

Teorema (Gauss-Bonnet)

La integral de la curvatura de Gauss de una superficie compacta suave S es

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S).$$

Teorema de Gauss-Bonnet

La característica de Euler de una superficie (discreta) S está dada por la fórmula $\chi(S) = C + V - A$. Esta es una invariante topológica. Si S es orientable de genero g, entonces $\chi(S) = 2 - 2g$.

Teorema (Gauss-Bonnet)

La integral de la curvatura de Gauss de una superficie compacta suave S es

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S).$$

Teorema (Gauss-Bonnet discreto)

La suma de la curvatura discreta en los vértices de una superficie discreta compacta S es

$$\sum_v K(v) = 2\pi\chi(S).$$

Teorema de Gauss-Bonnet discreto

Teorema (Gauss-Bonnet discreto)

La suma de la curvatura discreta en los vértices de una superficie discreta compacta S es

$$\sum_{v} K(v) = 2\pi\chi(S).$$

Teorema de Gauss-Bonnet discreto

Teorema (Gauss-Bonnet discreto)

La suma de la curvatura discreta en los vértices de una superficie discreta compacta S es

$$\sum_v K(v) = 2\pi\chi(S).$$

Demostración: Si S es triangulada, la suma de los ángulos en cada triángulo es π. Además, cada arista se encuentra en dos triángulos, así que $2A = 3C$. Entonces

$$\sum_v K(v) = 2\pi V - \pi C = \pi(2V - C - 2A + 3C)$$

$$= 2\pi(V + C - A) = 2\pi\chi(S).$$

Teorema de Gauss-Bonnet combinatorio

La curvatura combinatoria en un vértice v de una superficie triangulada S es $K^*(v) = 6 - T(v)$ donde $T(v)$ es el número de triángulos que contienen a v.
Idea: Suponga que todos los triángulos son equiláteros.

Teorema (Gauss-Bonnet combinatorio)

La suma de la curvatura combinatoria en los vértices de una superficie discreta compacta S es

$$\sum_v K^*(v) = 6\chi(S).$$

Redes multidimensionales

Son funciones de $\mathbb{Z}^m$ en $\mathbb{R}^n$. En ellas se impondrán diferentes condiciones geométricas que representan tipos particulares de curvas y transformaciones.

Redes multidimensionales

Son funciones de $\mathbb{Z}^m$ en $\mathbb{R}^n$. En ellas se impondrán diferentes condiciones geométricas que representan tipos particulares de curvas y transformaciones. Una ventaja es que esto permite encontrar una simetría entre las curvas y sus transformaciones.

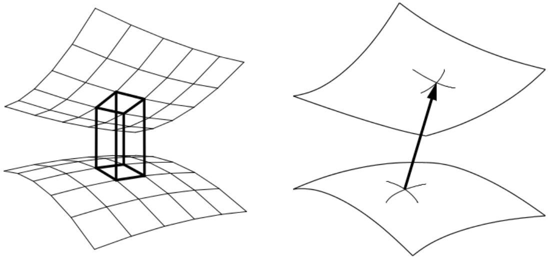


Figure 2: From the discrete master theory to the classical theory: surfaces and their transformations appear by refining two of three net directions.

Este punto de vista también ha permitido entender mejor fenómenos generales como los sistemas integrables.
Se propone en la *consistencia* como noción de integrabilidad.

Q-nets

Una *Q-net* es una red multidimensional $f : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}^n$ donde cada cuadrilátero elemental es plano.
Sea $z \in \mathbb{Z}^m$, y $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$.
Se define $f_i(z) = f(z + e_i)$ y $\delta_i f(z) = f_i(z) - f(z)$.
La función f es una *Q-net* si para todo $z \in \mathbb{Z}^m$ y para todo par $1 \leq i \leq j \leq m$ los cuatro puntos

$$f(z),\ f_i(z),\ f_j(z),\ f_{ij}(z)$$

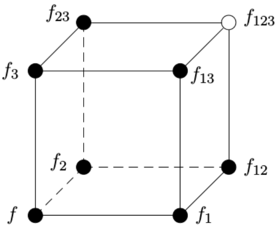
son coplanares. Esto puede expresarse mediante la existencia reales c_{ij} y c_{ji} para todo z tal que

$$\delta_{ij} f(z) = c_{ij} \delta_i f(z) + c_{ji} \delta_j f(z)$$

donde $\delta_{ij} f(z) = f_{ij}(z) - f(z)$.

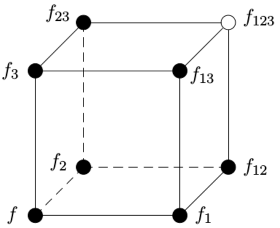
Consistencia

Si conocemos el valor de f en tres cuadriláteros elementales al rededor de un punto (ver figura), el punto f_{123} queda definido de manera única.
Esto es un sistema 3D.



Consistencia

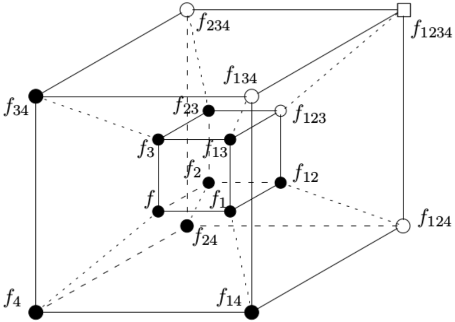
Si conocemos el valor de f en tres cuadriláteros elementales al rededor de un punto (ver figura), el punto f_{123} queda definido de manera única.
Esto es un sistema 3D.



Teorema

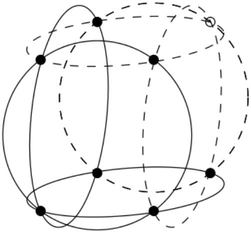
Esta construcción es 4D-consistente!

Todas las formas de calcular el punto f_{1234} producen el mismo resultado.



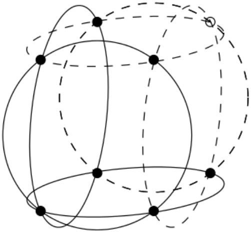
Redes circulares

Una Q-net $f : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}^n$ es una *red circular* si todos los cuadriláteros elementales son concíclicos. Esta propiedad es compatible con el sistema 3D.

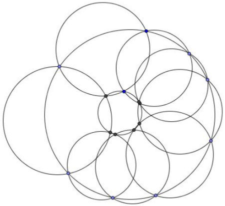


Redes circulares

Una Q-net $f : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}^n$ es una *red circular* si todos los cuadriláteros elementales son concíclicos. Esta propiedad es compatible con el sistema 3D.



Esta es una consecuencia del teorema de Miquel (1838).



Además se cumple que todo d-cubo elemental está contenido en una $(d-1)$-esfera (o en un $(d-1)$-plano).

Q-nets en cuádricas

La compatibilidad de las Q-nets con cuadriláteros concíclicos también es consecuencia de un resultado mas general.
Una cuádrica C en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ que son solución a un polinomio cuadrático

$$q(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Teorema (Doliwa, 1999)

Si siete puntos f, f_i y f_{ij} (con $1 \leq i < j \leq 3$) de un cubo elemental en una Q-net pertenecen a una cuádrica C, entonces el octavo punto f_{123} también debe estar en C.

Basado en un teorema sobre puntos asociados (8 puntos en la intersección de 3 cuádricas).

Teorema (Pedoe, 1970)

Considere ocho puntos asociados. Si siete de estos puntos pertenecen a una cuádrica C, entonces el octavo punto también debe estar en C.

Un teorema de incidencia en $\mathbb{R}^3$

Un politopo es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos.

Teorema

Sea Q un politopo en $\mathbb{R}^3$ con vértices $A_1, \ldots, A_m$. Sean $B_1, \ldots, B_m$ otros puntos en $\mathbb{R}^3$ diferentes de los vértices de Q. Si los puntos A_i, A_j, B_i, B_j son coplanares para todas las aristas A_iA_j de Q excepto una, entonces para la arista restante los cuatro puntos correspondientes también son coplanares.

Un teorema de incidencia en $\mathbb{R}^3$

Un politopo es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos.

Teorema

Sea Q un politopo en $\mathbb{R}^3$ con vértices $A_1, \ldots, A_m$. Sean $B_1, \ldots, B_m$ otros puntos en $\mathbb{R}^3$ diferentes de los vértices de Q. Si los puntos A_i, A_j, B_i, B_j son coplanares para todas las aristas A_iA_j de Q excepto una, entonces para la arista restante los cuatro puntos correspondientes también son coplanares.

Este teorema fue encontrado estudiando la dimensión de espacios de n-particiones (particiones de $\mathbb{R}^3$ en n regiones convexas).