Conteos en Arreglos de Hiperplanos, Números de Catalan y Funciones de Parqueo

Emerson Julián León Guerrero

Departmento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

con la colaboración de
Humberto Sarria Zapata
Federico Ardila

Trabajo de Grado
2006

Resumen

Arreglos de Hiperplanos

- Arreglo de hiperplanos $\mathcal{A}$ en $\mathbb{R}^n$: colección finita de hiperplanos lineales

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i \cdot x = r_i\}, v_i \in \mathbb{R}^n, r_i \in \mathbb{R}.$$

- Cada hiperplano divide a $\mathbb{R}^n$ en dos regiones.

¿En cuántas regiones queda dividido $\mathbb{R}^n$ por $\mathcal{A}$?

Se tratará de responder esta pregunta asociando las regiones con otros objetos combinatorios, mediante biyecciones.

Arreglos Importantes

Los siguientes arreglos están en $\mathbb{R}^n$. Considere $1 \leq i < j \leq n$.

- Arreglo de Permutaciones $\mathcal{B}_n$:

$$x_i - x_j = 0.$$

- Arreglo de Catalan:

$$x_i - x_j = -1,$$
$$x_i - x_j = 0,$$
$$x_i - x_j = 1.$$

- Arreglo de Shi:

$$x_i - x_j = 0,$$
$$x_i - x_j = -1.$$

Conteos en Arreglos de Hiperplanos

Arreglo de Permutaciones $\mathcal{B}_n$

El arreglo de permutaciones $\mathcal{B}_n$ en $\mathbb{R}^n$ está formado por todos los hiperplanos de la forma

$$x_i - x_j = 0, \text{ para } 1 \leq i < j \leq n.$$

- Dos puntos se encuentran en una misma región si sus coordenadas están en el mismo orden.
- Relación directa con el grupo simétrico S_n.
- La siguiente función es una biyección entre S_n y las regiones de $\mathcal{B}_n$:

$$\nu(\omega) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_{\omega(1)} > x_{\omega(2)} > \cdots > x_{\omega(n)}\}.$$

- El arreglo de permutaciones $\mathcal{B}_n$ divide en $n!$ regiones a $\mathbb{R}^n$.

ver gráfico

Conteos en Arreglos de Hiperplanos

Números de Catalan

Los números de Catalan C_n se definen recursivamente por:

$$C_0 = 1,$$

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_n C_0.$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad \ldots$$

- Para todo valor de n se cumple que

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

- Los números de Catalan cuentan el número de elementos de diversos objetos combinatorios.

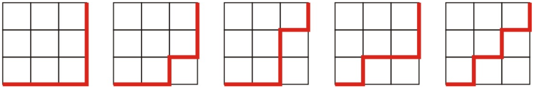
Objetos Contados por los Números de Catalan

Los siguientes conjuntos tienen C_n elementos:

(1) Secuencias $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ con $a_i \leq i$.

$$1,1,1 \qquad 1,1,2 \qquad 1,1,3 \qquad 1,2,2 \qquad 1,2,3$$

(2) Caminos en una cuadrícula de $n \times n$ por debajo de la diagonal.



(3) Secuencias de 1's y -1's, con $2n$ términos, suma total 0 y sumas parciales no negativas.

$$1,1,1,-1,-1,-1 \qquad 1,1,-1,-1,1,-1 \qquad 1,-1,1,-1,1,-1$$
$$1,1,-1,1,-1,-1 \qquad 1,-1,1,1,-1,-1$$

Objetos Contados por los Números de Catalan

Continuación...

(4) Árboles planos con raíz de $n+1$ vértices.

(5) Formas de asociar un producto de $n+1$ variables.

(6) Formas de dividir en triángulos un $n+2$-ágono por medio de $n-1$ diagonales.

(7) Secuencias de enteros $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ entre 1 y n tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ es divisible por $n+1$.

La lista continúa...

Arreglo de Catalan $\mathcal{C}_n$

El *arreglo de Catalan* $\mathcal{C}_n$ está formado por los hiperplanos

$$\begin{gathered} x_i - x_j = -1, \\ x_i - x_j = 0, \\ x_i - x_j = 1, \\ \text{para } 1 \leq i < j \leq n. \end{gathered}$$

Teorema

El número de regiones determinadas por $\mathcal{C}_n$ *es* $n!C_n$.

- Como el arreglo de Catalan contiene el arreglo de permutaciones, divide a $\mathbb{R}^n$ en $n!$ sectores $\nu(\omega)$.
- Falta ver en cuántas regiones se divide cada sector $\nu(\omega)$.

Contando las regiones en $\mathcal{C}_n$

- Para un punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \nu(\omega)$, sea $y_i = x_i + 1$.
- Basta aclarar cual es el orden de los x_i y y_i para saber en que región de $\mathcal{C}_n$ se encuentra.
  Por ejemplo, un posible orden cuando $n = 3$ es

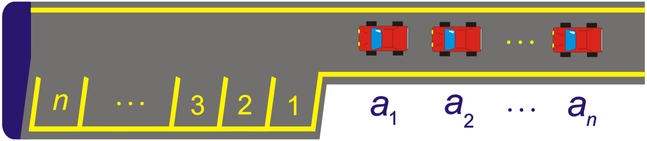
$$y_{\omega(1)} > y_{\omega(2)} > x_{\omega(1)} > y_{\omega(3)} > x_{\omega(2)} > x_{\omega(3)}.$$

- Cambiando cada y_i por 1 y cada x_i por -1, se obtiene una lista de $2n$ términos con suma 0 y sumas parciales no negativas.
  La lista asociada al ejemplo anterior es $1, 1, -1, 1, -1, -1$.
- Hay C_n de estas listas.
- Como esto es válido para toda permutación ω, el número de regiones en $\mathcal{C}_n$ es $n!C_n$.

ver gráfico

Conteos en Arreglos de Hiperplanos

Funciones de Parqueo



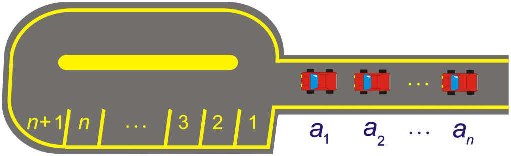
- El auto A_i quiere parquear en el lugar a_i.
- Si el lugar está ocupado, el auto parquea en el siguiente espacio disponible.

Una lista $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ tal que todos pueden parquear se denomina función de parqueo de longitud n.

Contando Funciones de Parqueo

Teorema (Konheim-Weiss, 1966)

Existen en total $(n+1)^{n-1}$ funciones de parqueo de longitud n.



Demostración

Arreglo de Shi

El *arreglo de Shi* $\mathcal{S}_n$ está formado por los hiperplanos

$$x_i - x_j = 0,$$
$$x_i - x_j = 1,$$
$$\text{para } 1 \leq i < j \leq n.$$

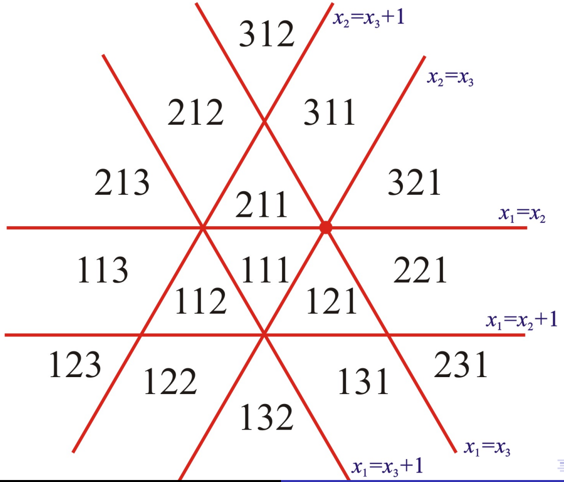
Teorema (Shi, 1986)

El número de regiones en el arreglo $\mathcal{S}_n$ es $(n+1)^{n-1}$.

Prueba biyectiva debida a *S. Pak*.

Arreglo de Shi y Funciones de Parqueo

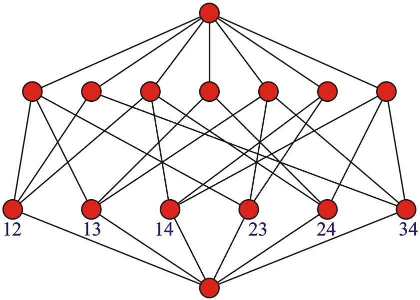
Ejemplo para $n = 3$



Conteos en Arreglos de Hiperplanos

Poset de Intersecciones

- Sea $L(\mathcal{A})$ el conjunto de intersecciones entre hiperplanos del arreglo.
- Estas intersecciones son conjuntos de distintas dimensiones.
- Defina $X \leq Y$ si $Y \subseteq X$.



Poset de intersecciones $L(\mathcal{B}_4)$

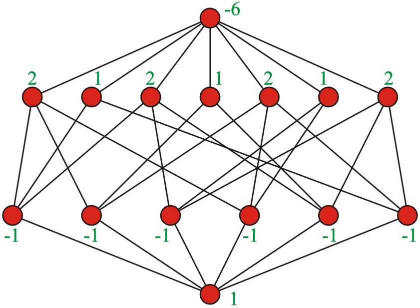
Función de Möbius en $L(\mathcal{A})$

Se define una función $\mu : L(\mathcal{A}) \to \mathbb{N}$ tal que:

- $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$.
- Para los demás $X \in L(\mathcal{A})$ se tiene que

$$\sum_{Y \leq X} \mu(Y) = 0.$$

Esta función es única y sólo depende del poset $L(\mathcal{A})$.



Función de Möbius en $L(\mathcal{B}_4)$

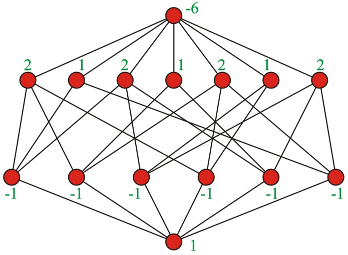
Polinomio Característico

El polinomio característico del arreglo $\mathcal{A}$ se define como

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim(X)}.$$

Para el ejemplo anterior,

$$\chi_{\mathcal{B}_4}(t) = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t.$$



Teorema (Zaslavsky, 1975)

El número de regiones en el arreglo $\mathcal{A}$ es $|\chi_{\mathcal{A}}(-1)|$ y el número de regiones acotadas (relativamente) es $|\chi_{\mathcal{A}}(1)|$.

Conteos en Arreglos de Hiperplanos

Arreglos en Campos Finitos

Es posible considerar algunos arreglos de hiperplanos también en F_p^n, donde F_p es un campo finito.

Teorema

El número de puntos en F_p^n que no pertenecen al arreglo $\mathcal{A}$ es exactamente

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim(X)},$$

para casi todo valor de p.

Es una aplicación de la fórmula de inversión de Möbius.

Demostración

Polinomio Característico de $\mathcal{B}_n$

El trabajo anterior facilita el cálculo del polinomio característico. Por ejemplo, tomando el arreglo de permutaciones $\mathcal{B}_n$:

- Se debe encontrar el número de formas de seleccionar n valores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en F_p, sin que haya repetidos.
- Hay en total $p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)$ posibilidades.

Teorema

El polinomio característico del arreglo $\mathcal{B}_n$ es

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1).$$

Para $n = 4$, se comprueba que

$$\chi_{\mathcal{B}_4}(t) = t(t-1)(t-2)(t-3) = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t.$$

Arreglo Gráfico

- Sea G un grafo simple.
- El número de coloraciones de G con t colores está dada por un polinomio $\chi_G(t)$.
- El *arreglo gráfico* $\mathcal{A}_G$ del grafo G está formado por

$$x_i - x_j = 0,$$

cuando i, j es un arco.

Teorema

Para todo G se cumple que $\chi_G(t) = \chi_{\mathcal{A}_G}(t)$.

Comentarios

- El estudio de arreglos de hiperplanos se relaciona con muchos otros temas y objetos en combinatoria.
- Las demostraciones pueden hacerse de forma biyectiva, usando poca teoría, o mediante otros métodos más sofisticados.
- Los nuevos métodos utilizan herramientas de diversos campos de la matemática.

Referencias

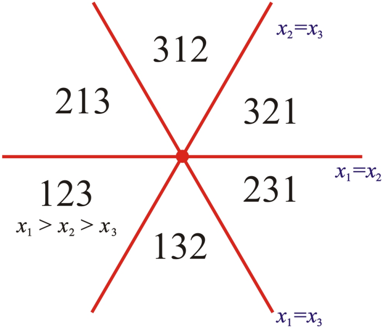
R. Stanley,
An Introduction to Hyperplane Arrangements.

R. Stanley,
Hiperplane arrangements, parking functions and tree inversions.

A. Postnikov and R. Stanley,
Deformation of Coxeter Hyperplane Arrangements.

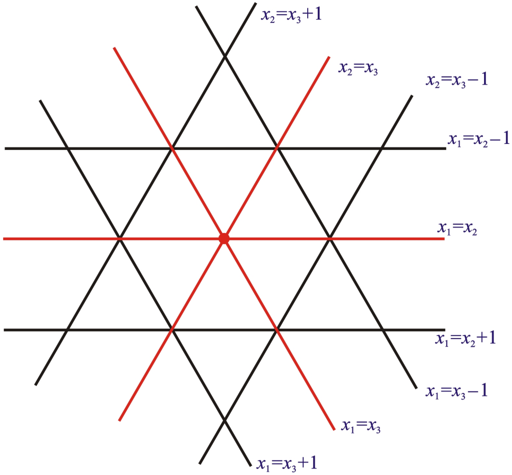
Arreglo de Permutaciones

Ejemplo para $n = 3$



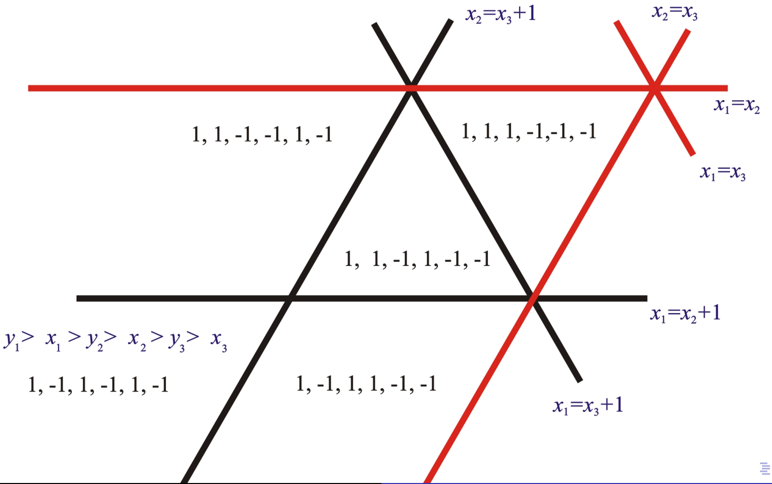
Arreglo de Catalan

Ejemplo para $n = 3$



Biyección para el Arreglo de Catalan

Ejemplo para $n = 3$



Regiones Acotadas en $\mathcal{C}_n$

El vector $(1, 1, \ldots, 1)$ es paralelo a todos los hiperplanos. Por tal razón, no tiene regiones acotadas en $\mathbb{R}^n$.
Las regiones *relativamente acotadas* de este arreglo son aquellas que son acotadas sobre el hiperplano $\sum x_i = 0$.

Teorema

El número de regiones relativamente acotadas en el arreglo $\mathcal{C}_n$ es exactamente $n!C_{n-1}$.

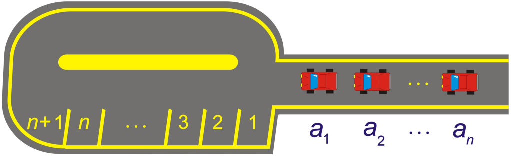
De la relación construida entre las regiones y las listas de 1's y -1's, se observa que las regiones acotadas corresponden a las listas donde todas las sumas parciales son positivas (hay C_{n-1} de estas listas).

Contando Funciones de Parqueo

Teorema (Konheim-Weiss, 1966)

Existen en total $(n+1)^{n-1}$ funciones de parqueo de longitud n.

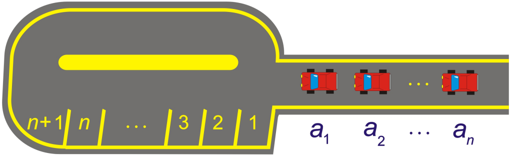
- Agregue un espacio adicional $(n+1)$.
- Permita que los autos prefieran este espacio.
- Si $(n+1)$ está ocupado, los autos se dirigen al lugar 1.



Contando Funciones de Parqueo

- Una elección es función de parqueo si queda libre $n+1$.
- Si $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ deja libre el lugar k, entonces $(a_1+i, a_2+i, \cdots, a_n+i)$ deja libre el lugar $k+i$ (módulo $n+1$).
- El número de funciones de parqueo es

$$\frac{(n+1)^n}{n+1} = (n+1)^{n-1}.$$



Arreglos en Campos Finitos

Teorema

El número de puntos en F_p^n que no pertenecen al arreglo $\mathcal{A}$ es exactamente

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim(X)},$$

para casi todo valor de p.

- Si $\dim(Y) = k$, entonces Y tiene en total p^k elementos.
- En la definición de $\chi_{\mathcal{A}}$, cada término $\mu(Y)p^k$ cuenta cada elemento en Y multiplicado por $\mu(Y)$.

Contando Puntos Fuera de los Hiperplanos

- Cada punto de F_p^n contenido en alguno de los hiperplanos se cuenta
$$\sum_{Y \leq X} \mu(Y) = 0,$$
donde X es la intersección de los hiperplanos en los que está el punto.
- Los puntos que no pertenecen a ningún hiperplano de $\mathcal{A}$ se cuentan una vez (con $X = F_p^n$).
- $\chi_{\mathcal{A}}(p)$ cuenta los puntos que no están en ningún hiperplano.

Es necesario que el poset de intersecciones visto en F_p^n sea isomorfo a $L(\mathcal{A})$ visto en $\mathbb{R}^n$.

Polinomio Característico de $\mathcal{C}_n$

- Se debe encontrar el número de formas de seleccionar n valores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en F_p, sin que haya repetidos ni consecutivos.
- Para x_n hay p posibilidades.
- Para escoger el conjunto de valores de las otras coordenadas x_i, hay en total $\binom{p-n-1}{n-1}$ posibilidades.
- Estas se pueden permutar de $(n-1)!$ formas.

Teorema

El polinomio característico del arreglo de Catalan es

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(t) = t\binom{t-n-1}{n-1}(n-1)! = t(t-n-1)(t-n-2)\cdots(t-2n+1).$$