多因子远期利率期限结构模型

冯晶晶　胡 艳　姚 杰　　西安培华学院通识教育中心

摘　要：首先介绍远期利率，期限结构等基本的概念，给出远期利率的一个简单模型，即简单利率模型。对远期利率进行建模，得到单因子HJM模型，并对该模型进行分析，得到模型中的四个条件，从而保证了该模型无套利。进一步将单因子模型推广到n因子模型，得到多因子HJM模型，并研究多因子HJM模型的性质。最后给出广义多因子正态模型。

关键词：利率期限　远期利率　单因子模型　多因子模型

一、预备知识

利率期限结构是指在相同的风险水平下， 利率与到期期限之间的数量关系， 或者说是理论上的零息票债券收益率曲线。利率不仅是一个重要的经济变量，对货币政策、 汇率等宏观经济变量具有显著的影响；而且利率衍生品市场是国际金融衍生品市场一个最主要的部分，利率变动对利率衍生品的定价具有决定性作用，其他金融产品的定价同样也会受到很大影响。

称$f(t,T)=-\frac{\partial}{\partial T}\log P(t,T)$为远期利率，为$T$时刻瞬时借款的远期价格.其中$P(t,T)$为债券价格。

单因子HJM模型：给定一初始的远期利率曲线$f(0,T)$对每一到期日T的远期利率满足以下方程：$f(t,T)=f(0,T)+\int_0^t\sigma(s,T)dW_s+\int_0^t\alpha(s,T)ds$，$0\le t\le T$或写成微分形式为：$d_tf(t,T)=\sigma(t,T)dW_t+\alpha(t,T)dt$.波动率$\sigma(t,T)$及漂移$\alpha(t,T)$可能依赖于Brown运动$W_t$的历史以及直到$t$时刻的利率本身。单因子模型的缺点在于债券价格的所有增量都是完全相关的。对于许多应用来说，该假设太粗糙了，特别是如果我们想要对依赖于收益曲线上的两点之差的衍生证券定价时更是如此。

二、多因子模型

多因子模型涉及到由一族独立的Brown运动驱动的各种各样的过程，在n因子模型中，有n个Brown运动$W_1(t),\cdots,W_n(t)$，每个$T-$债券远期利率过程都有一个对应每个Brown运动$W_i(t)$的波动率$\sigma_i(t,T)$，从而允许不同的债券以不同的方式依赖于外部的“干扰”，并且与其他某些债券相关性强一些，与某些债券相关性弱一些。多因子HJM模型的一般形式为$f(t,T)=f(0,T)+\sum_{i=1}^n\int_0^t\sigma_i(s,T)dW_i(s)+\int_0^t\alpha(s,T)ds$，该式表明远期利率过程的初始值为$f(0,T)$，由多个Brown运动驱动且漂移。$f(t,T)$的瞬时平方波动率以及两个远期利率$f(t,T)$和$f(t,S)$的增量的协方差分别为$\sum_{i=1}^n\sigma_i^2(t,T)$和$\sum_{i=1}^n\sigma_i(t,T)\sigma_i(t,S)$可把瞬时利率$r_t=f(t,t)$写为$r_t=f(0,t)+\sum_{i=1}^n\int_0^t\sigma_i(s,t)dW_i(s)+\int_0^t\alpha(s,t)ds$。

多因子HJM模型：波动率和漂移的条件，假定

（1）对每一T，过程$\sigma_i(t,T)$及$\alpha(t,T)$为$F-$可料的且它们的积分$\int_0^T\sigma_i^2(t,T)$及$\int_0^T|\alpha(t,T)|$均为有限的。

（2）初始的远期曲线$f(0,T)$为确定性的，且满足条件$\int_0^T|f(0,u)|du<\infty$。

（3）漂移α有有限积分，即$\int_0^T\int_0^u|\alpha(t,u)|dtdu<\infty$。

（4）每一波动率σ_i有有限期望，即$E\int_0^T\left|\int_0^u\sigma_i(t,u)dW_i(t)\right|du<\infty$。

为了使贴现债券价格为鞅，需要以下条件。

多因子HJM模型：市场完备性条件（1）。

（1）对$1\le i\le n$，存在可料过程$\gamma_i(t)$，使得$\alpha(t,T)=\sum_{i=1}^n\sigma_i(t,T)(\gamma_i(t)-\sum_i(t,T))$，对所有$t\le T$.

（2）期望$E\exp\frac{1}{2}\sum_i^n\int_0^T\gamma_i^2(t)dt<\infty$。

在多因子模型中，漂移可以与它的风险中性值相差n维的自由度。也就是说，作为T的函数，$\alpha(t,\cdot)$可以与风险中性值相差$\sigma_i(t,\cdot)$的线性组合。除了一点差异之外，多因子模型与单因子模型相同。在多因子模型中，漂移可以与它的风险中性值相差维的自由度。

多因子HJM模型：市场完备性条件（2）。

需要以下条件：

（1）对几乎所有的(t,ω)，$t<T_1$和每个到期日集$T_1<T_2<\cdots<T_n$，矩阵$A_i=(\Sigma_i(t,T_j))_{i,j=1}^n$为非奇异的。

（2）期望$E\exp\frac{1}{2}\sum_i^n\int_0^T(\gamma_i(t)-\sum_i(t,T))^2dt<\infty$。

下面我们用完全一般的n因子模型作为例子说明，如果可以将波动率曲面$\sigma_i(t,T)$写成乘积的形式$\sigma_i(t,T)=x_i(t)y_i(T)$，其中$x_i$和$\gamma_i$为确定性函数.则远期利率由下式所驱动：$d_tf(t,T)=\sum_{i=1}^n y_i(T)x_i(t)dW_i(t)+\alpha(t,T)dt$，

这里x_i决定了t时刻“第i型扰动”的大小，

函数y_i控制了对不同到期日扰动的方式。在单因子$n=1$情形，这个框架将Ho-Lee模型和Vasicek模型相结合。

为了使市场是完备的，我们需要对α和施加两个条件。首先，存在n个$F-$可料过程$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$，使得$\alpha(t,T)=\sum_{i=1}^n x_i(t)y_i(t)(\gamma_i(t)+x_i(t)Y_i(t,T))$，$Y_i(t,T)=\int_t^T y_i(u)du$。其次，对所有$t<T_1$的及每个由$n$个到期日$T_1<T_2<\cdots<T_n$组成集合，矩阵$A_t=(a_{ij}(t))$，$(a_{ij}(t)=Y_j(t,T_i))$必须为非奇异的，该条件既是说所有的函数都不相同。

对一般的波动率曲面$\sigma_i(t,T)=x_i(t)y_i(t)$，短期利率和远期利率都服从正态分布，因此债券价格服从对数正态分布。令F表示t时刻债券$T-$的价格，$F=\frac{P(0,T)}{P(0,t)}$。令σ为$T-$债券直到t时刻的远期波动率，即σ^2t为$\log P(t,T)$的方差，则标的物为$T-$债券、敲定价为k及执行时刻t的期权在时刻0的价值为

$$V_0=P(0,t)(F\Phi(\frac{\log\frac{F}{k}+\frac{1}{2}\sigma^2t}{\sigma\sqrt{t}})-k\Phi(\frac{\log\frac{F}{k}-\frac{1}{2}\sigma^2t}{\sigma\sqrt{t}}))$$

参考文献：

[1]戴国强，李良松. 利率期限结构模型估计结果影响因素经验研究[J]. 中国管理科学，2010， 18（1）：9—17.

[2]周荣喜，王晓光. 基于多因子放射利率期限结构模型的国债定价[J]. 中国管理科学，2011，19（4）：:26—30.

[3]范龙振. 短期利率模型在上交所债券市场上的实证分析[J]. 管理科学学报，2007，10(2)：80—89.

[4]林海. 利率期限结构研究述评[J]. 管理科学学报，2007,10（1）：79—98.

[5]罗孝玲，黄玲英，陈晓红. 利率期限结构的三因子高斯动态模型及应用[J]. 2015，23（5）：7—13.

作者简介：冯晶晶（1984—）女，陕西韩城人。理学硕士，讲师。研究方向：金融数学。

※基金项目：西安培华学院校级课题资助项目(PHKT16028)：多因子远期利率期限结构模型.