

doi:10.3969/j.issn.1001-2400.2013.02.001

## 秩 1 约束下基于圆球的相机标定算法

贾 静<sup>1,2</sup>, 吴成柯<sup>2</sup>

(1. 西安电子科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710071;

2. 西安电子科技大学 综合业务网理论及关键技术国家重点实验室, 陕西 西安 710071)

**摘要:** 利用圆球投影的秩 1 约束特性, 提出了一种基于圆球标定物的相机内参数标定算法. 从绝对二次曲线投影、圆球投影的关系上对秩 1 约束进行了几何解释, 由此推导出圆球投影与绝对二次曲线投影之间的 3 个约束公式. 在几何意义明确的基础上, 分析了球体投影与相机内参数的关系, 并采用非线性优化算法求解相机内参数. 实验结果表明, 该算法的鲁棒性好, 相对于传统算法, 可以提高相机内参数的求解精度.

**关键词:** 相机标定; 圆球; 秩 1 约束; 几何解释

**中图分类号:** TP242.6<sup>+</sup>2; TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2013)02-0001-04

## Rank-1 constraint for camera calibration based on spheres

JIA Jing<sup>1,2</sup>, WU Chengke<sup>2</sup>

(1. School of Mechano-electronic Engineering, Xidian Univ., Xi'an 710071, China;

2. State Key Lab. of Integrated Service Networks, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** With the rank-1 constraint, a method for camera intrinsic parameters calculation based on spheres is proposed. The geometric interpretation of the rank-1 constraint is explored from the relation of the image of the absolute conic and the sphere image. Three algebraic equations are derived from the rank-1 constraint. The relation of the sphere images and the camera intrinsic parameters is clearly interpreted in vision geometry. Finally, a nonlinear optimized method is used with the three constraint equations for improving the accuracy. Experimental results show that our method is robust. Compared with the traditional method, it can improve the accuracy of the results of the intrinsic parameters.

**Key Words:** camera calibration; sphere; rank-1 constraint; geometry interpretation

相机标定的目标是求解相机的内参数和外参数<sup>[1]</sup>, 为视觉跟踪、三维重建、运动分析等工作提供基础. 常用的平面标定物对相机的拍摄位置有限制, 当相机主光轴与标定平面接近平行时, 则无法识别标定的图像. 圆球作为一种常见的几何形体, 可以定义为一种三维标定物, 它同时又有二维标定物的特点. 在相机标定的过程中, 可以只使用一个圆球, 通过拍摄 3 幅图像完成标定<sup>[2]</sup>; 也可以通过放置 3 个或以上的圆球, 仅由 1 幅图像完成标定. 其最重要的优点在于圆球无自身遮挡性, 除受圆球支撑物的遮挡限制外, 相机可以从任意角度拍摄圆球, 尤其适用于多相机系统的标定. 由于圆球具有丰富的视觉几何特性, 最近几年吸引了大量的研究者从不同角度来研究圆球应用于相机标定的问题<sup>[2-8]</sup>.

Zhang 等<sup>[2]</sup>研究了圆球投影的对偶形式与绝对对偶二次曲线投影的关系, 给出了一种线性求解相机内参数的办法, 提出了两个圆球球心投影的连线与灭点的计算方法, 指出它们同时也是相对于绝对二次曲线投影 (Image of the Absolute Conic, IAC) 的对极几何 (pole-polar) 关系, 并以此约束求解 IAC. 但是该方法是基于圆球投影的对偶形式提出的, 其几何意义不明显. Ying 和 Zha<sup>[3]</sup>指出之前的研究无明确的几何意义, 从视觉几何的

收稿日期: 2012-05-30

网络出版时间: 2012-11-16

基金项目: 中央高校基本业务费资助项目 (K5051204006); 国家自然科学基金资助项目 (60775020)

作者简介: 贾 静 (1974—), 女, 西安电子科技大学博士研究生, E-mail: jjia@mail.xidian.edu.cn.

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1076.TN.20121116.0924.201302.1.007.html>

角度明确解释了每一个圆球投影与 IAC 相切于两个双触点(double-contact),但是 double-contact 理论的几何关系较复杂. Wong 等<sup>[4]</sup>从两个圆球球心以及球面的切线旋转形成的圆锥包络出发,求解两幅图像的基础矩阵;并从对偶绝对二次曲面与对偶二次球面的关系推导出相机的内参数,其几何解释与文献[2]的相同. Lu 和 Payandeh<sup>[5]</sup>从二次曲线拟合方法和椭圆的性质方面详细分析了圆球标定的精度问题. Shen 和 Hornsey<sup>[6]</sup>使用 8 个不同颜色的球体对多相机系统进行标定,其中也对精度问题进行了一些有意义的探讨.

笔者在 2011 年提出了圆球投影的秩 1 约束<sup>[7]</sup>,并将其应用于相机外参数的求解,可以极大地提高相机外参数的标定精度. 这里笔者进一步解释了秩 1 约束的几何含义,给出了相机内参数求解过程中所使用的每一个变量非对偶空间的几何意义,从而将平面标定与圆球标定联系起来. 提出了利用秩 1 约束减少求解参数的 3 个基本公式,并建立了目标函数以优化求解相机内参数. 仿真数据和实验结果表明,该算法的鲁棒性好,相对于传统算法,可以很好地提高相机内参数的求解精度.

## 1 秩 1 的几何解释和代数意义

圆球投影到图像平面上,其轮廓为一条二次曲线. 图 1 给出了圆球的投影模型.  $O$  点为相机光心,  $I$  为图像平面,  $Z_c$  轴为相机主光轴. 圆球位于图像平面前的任意空间位置,圆球在图像平面的投影为二次曲线  $c$ ,从  $O$  点看到的这个圆球的轮廓在空间是一个圆,而且与  $O$  点形成一个正圆锥  $Q$ ,定义该圆为  $C$ ,半径为  $r$ ,并且位于空间平面  $\Pi$  上,空间平面  $\Pi$  距离光心  $O$  点的距离为  $h$ . 定义大地坐标系的原点与  $O$  点重合,大地坐标系的  $Z$  方向轴为  $Z_w$ ,它穿过圆球的球心,并与  $\Pi$  平面垂直. 这样,大地坐标系与相机坐标系的关系可用旋转矩阵  $R$  表示. 在该大地坐标系下,相机的投影矩阵为  $P=K[R \mid 0]$ ,其中  $K$  代表相机的内参数,  $K=$

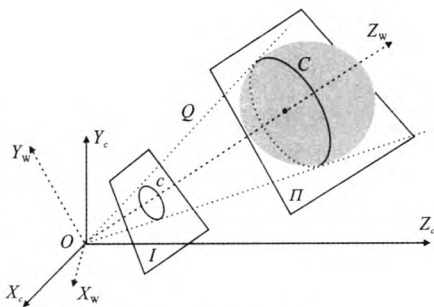


图 1 圆球的投影模型

其中  $a_u$  和  $a_v$  为相机焦距,  $s$  为倾斜因子,  $(u_0, v_0)$  为相机的主点位置.

$$\begin{bmatrix} a_u & s & u_0 \\ 0 & a_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } a_u \text{ 和 } a_v \text{ 为相机焦距, } s \text{ 为倾斜因子, } (u_0, v_0) \text{ 为相机的主点位置.}$$

图 1 中,正圆锥  $Q$  与无穷远平面相交于一条二次曲线,交点  $(X_1, X_2, X_3, X_4)^T$  满足关系  $X_1^2 + X_2^2 - (r/h)^2 X_3^2 = 0, X_4 = 0$ . 而绝对二次曲线  $\Omega$  是位于无穷远平面上的特殊二次曲线<sup>[1]</sup>,其上的点  $(X_1, X_2, X_3, X_4)^T$  满足  $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0, X_4 = 0$ . 可以看出,正圆锥  $Q$  与无穷远平面的交点构成一个圆,并且,该圆与绝对二次曲线构成同心圆关系. 这两个同心圆的 4 个交点两两重合于一对复共轭点  $(1, \pm i, 0, 0)^T$ ,它们同时也是平面  $\Pi$  的两个圆环点. 这两个同心圆在图像平面的投影为二次曲线  $c$  和二次曲线  $\omega$ ,  $c$  即是圆球投影,  $\omega$  即 IAC.  $c$  与  $\omega$  在图像平面的交点则为圆环点的投影  $i$  和  $j$ . 将通过点  $i$  和  $j$  的二次曲线簇记为  $\omega + \lambda c$ ,  $\lambda$  为常数,该二次曲线簇包括一种退化形式,即过点  $i$  和  $j$  的直线  $l_\infty = i \times j$ . 因  $l_\infty$  经过圆环点的投影,所以它也是平面  $\Pi$  的无穷远直线投影. 因此存在某非零  $\lambda$  值,满足

$$(\omega + \lambda c) = l_\infty \cdot l_\infty^T. \quad (1)$$

这种退化形式的秩为 1,即

$$\text{rank}[\omega + \lambda c] = 1, \quad (2)$$

即  $\omega + \lambda c$  中的任意一行或列线性相关. 定义  $c = [c_{mn}]$ ,  $\omega = [\omega_{mn}]$ ,  $m, n = 1, 2, 3$ . 由于  $\omega$  不经过图像平面的原点,可令其中  $\omega_{33} = 1$ . 由式(2),推出以下 3 个约束关系:

$$c_{11} = (-\omega_{11} - \omega_{11}c_{33} + 2\omega_{13}c_{13} + c_{13}^2 + \omega_{13}^2)/(c_{33} + 1), \quad (3)$$

$$c_{12} = (-\omega_{12} - \omega_{12}c_{33} + \omega_{13}c_{23} + c_{13}c_{23} + \omega_{13}\omega_{23} + \omega_{23}c_{13})/(c_{33} + 1), \quad (4)$$

$$c_{22} = (-\omega_{22} - \omega_{22}c_{33} + 2\omega_{23}c_{23} + c_{23}^2 + \omega_{23}^2)/(c_{33} + 1). \quad (5)$$

相机内参数与  $\omega$  之间满足的关系<sup>[8]</sup>为

$$\omega = K^{-T} K^{-1} = \frac{1}{a_u^2 a_v^2 + a_u^2 v_0^2 + (a_v u_0 - s v_0)^2}.$$

$$\begin{bmatrix} a_v^2 & -sa_v & -u_0a_v^2 + v_0sa_v \\ -sa_v & a_u^2 + s^2 & a_vsu_0 - a_u^2v_0 - s^2v_0 \\ -u_0a_v^2 + v_0sa_v & a_vsu_0 - a_u^2v_0 - s^2v_0 & a_u^2a_v^2 + a_u^2v_0^2 + (a_vu_0 - sv_0)^2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

将式(6)矩阵中的各分量代入式(3)~(5),那么,圆球投影  $c$  就可用相机内参数与  $c_{13}$ 、 $c_{23}$  和  $c_{33}$  表示,即  $c(a_u, a_v, s, u_0, v_0, c_{13}, c_{23}, c_{33})$ .

## 2 由秩1约束求解相机内参数

### 2.1 秩1约束下的相机内参数

当图像上有两个圆球投影  $c_1$  和  $c_2$  时,它们分别满足式(1),即

$$(\omega + \lambda_1 c_1) = l_1 \cdot l_1^T, \quad (7)$$

$$(\omega + \lambda_2 c_2) = l_2 \cdot l_2^T. \quad (8)$$

记  $l_1$  和  $l_2$  的交点为  $v_{12}$ ,  $v_{12} = l_1 \times l_2$ . 如图2所示,  $l_1$  和  $l_2$  分别为空间平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的无穷远直线投影,因此  $v_{12}$  同时为平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的无穷远点. 将式(7)和(8)分别乘以  $v_{12}$ , 得

$$\omega \cdot v_{12} + \lambda_1 c_1 \cdot v_{12} = l_1 \cdot l_1^T \cdot v_{12} = 0, \quad (9)$$

$$\omega \cdot v_{12} + \lambda_2 c_2 \cdot v_{12} = l_2 \cdot l_2^T \cdot v_{12} = 0, \quad (10)$$

$$\text{即} \quad \lambda_1 c_1 \cdot v_{12} - \lambda_2 c_2 \cdot v_{12} = 0, \quad (11)$$

$$\text{并进一步推得} \quad c_1 c_2^{-1} \cdot v_{12} - (\lambda_2 / \lambda_1) I \cdot v_{12} = 0, \quad (12)$$

其中,  $I$  是单位阵;  $v_{12}$  通过求解矩阵  $c_1 c_2^{-1}$  的特征向量获得. 如果

有第3个圆球,由式  $\omega + \lambda_3 c_3 = l_3 \cdot l_3^T$ , 同理可以求解  $v_{13}$ .  $v_{13}$  同时

为平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_3$  的无穷远点投影. 当  $v_{12}$  和  $v_{13}$  解出后,直线  $l_1$  的解为  $l_1 = v_{12} \times v_{13}$ . 当有更多的圆球投影时,可以得到  $l_1$  上更多的点,进而能拟合求解  $l_1$ .

平面  $\Pi_1$  的圆环点在图像平面的投影为  $l_1$  与  $c_1$  的交点,记为  $\{i_1, j_1\} = c_1 \cap l_1$ , 同理也可以解得  $\Pi_2$  和  $\Pi_3$  平面的圆环点投影  $\{i_2, j_2\} = c_2 \cap l_2$  和  $\{i_3, j_3\} = c_3 \cap l_3$ . 这样,对圆球的每次拍摄,都可以获得一组对应的圆环点投影,这些圆环点投影位于绝对二次曲线投影  $\omega$  上. 在至少有3个圆球投影的情况下,可以线性求解  $\omega$ , 经过 Cholesky 分解即可得到相机内参数. 与已有的方法相比,上述方法中所使用的每一个变量均有明确的几何意义.

### 2.2 秩1约束下的优化算法

在有  $N$  个圆球投影情况下,沿着第  $i$  个圆球投影轮廓边缘较均匀地取  $M$  个点,记为  $x_j^i, i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, M (M \geq 5)$ , 为消除图像噪声的影响,  $M$  可以取一个较大的值. 以点  $x_j^i = (x_j^i, y_j^i, 1)^T$  到其对应二次曲线  $c^i$  的 Sampson 几何距离最小建立目标函数<sup>[1]</sup>, 即

$$d(x, c)^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{(x_j^i)^T c^i x_j^i)^2}{4[(c^i x_j^i)_1^2 + (c^i x_j^i)_2^2]}, \quad (13)$$

其中,  $c^i x_j^i$  是三维矢量,  $(c^i x_j^i)_k$  表示该三维矢量的第  $k$  个分量.

在该目标函数中,未知量为  $c^i(a_u, a_v, s, u_0, v_0, c_{13}^i, c_{23}^i, c_{33}^i)$  中的参数,其中  $a_u, a_v, s, u_0, v_0$  为相机内参数,  $c_{13}^i, c_{23}^i, c_{33}^i$  为圆球投影二次曲线  $c^i$  的系数,从而将秩1约束用于相机内参数的求解,不需要求解二次曲线  $c^i$  的全部5个参数. 该目标函数可用 Levenberg-Marquardt 非线性优化算法求解. 其中,圆球投影  $c^i$  的初值以最小二乘椭圆拟合方法获得; 内参数的初值由2.1节中所述线性方法求得.

## 3 实验结果

### 3.1 仿真实验

设相机内参数为:  $a_u=1000, a_v=1200, s=10, u_0=500, v_0=400$ , 图像分辨率为  $1000 \times 800$ , 仿真3个圆

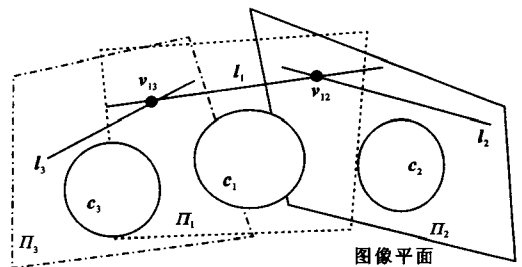


图2 圆球的3个投影及其所对应的无穷远直线投影

球投影到图像上,并加入均值为 0、方差  $\sigma$  从 0 变化到 2 像素的高斯噪声. 对于每一个圆球投影,可通过亚像素边缘检测算法找出 100 个边缘点. 通过文中算法计算每个噪声水平下相机的内参数,重复试验 100 次,并求平均值. 图 3 显示了  $a_u$ 、 $s$  和  $u_0$  随噪声水平不同而变化的情况. 因为目前各种线性求解方法包括前面 2.1 节中所提出的线性方法所求结果差异不大<sup>[2,4,6]</sup>,故将文中算法结果与典型的 Orthogonal 算法<sup>[2,6]</sup>结果进行比较. 从结果看,文中算法可以提高内参数的计算精度.

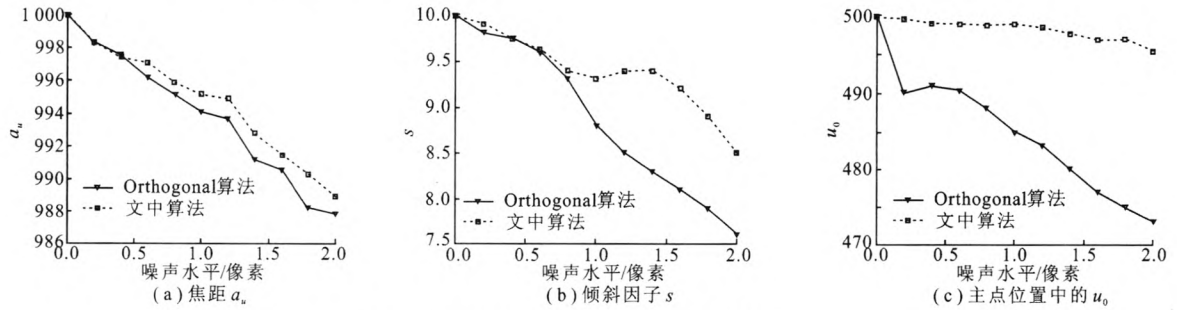


图 3 内参数均值随噪声水平变化的情况

3.2 真实实验

对一个三星级乒乓球(半径为 20 mm,圆度误差小于 0.15 mm)从不同角度拍摄 15 幅图像,图像分辨率为  $1628 \times 1236$ . 将这些图像中的乒乓球边缘绘制在同一幅图像如图 4 所示,采用文中算法和 Orthogonal 算法计算相机内参数,并与 Zhang 的平面棋盘格标定板<sup>[9]</sup>(每个棋盘格的大小为  $5\text{ mm} \times 5\text{ mm}$ ,精度为  $1\text{ }\mu\text{m}$ )的结果进行比较,见表 1. 由实验结果可得,文中算法与 Orthogonal 算法相比,文中算法所计算的相机内参数更接近平面标定标板的结果.

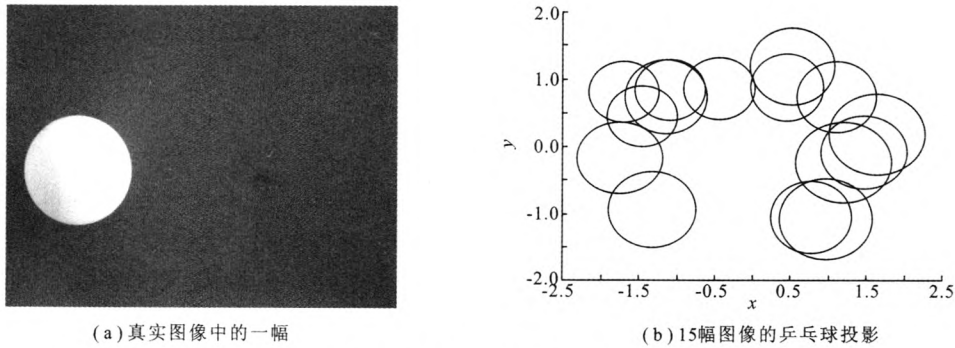


图 4 真实实验中的情况

表 1 文中算法与其他算法对真实图像计算的相机内参数比较

	$a_u$	err/%	$a_v$	err/%	$s$	$u_0$	err/%	$v_0$	err/%
Zhang <sup>[9]</sup> (ground truth)	1171.5		1171.3		0	781.5		600.7	
Orthogonal 算法 <sup>[2,6]</sup>	1204.5	2.8	1224.2	4.5	14.0	787.2	0.7	644.6	7.3
文中算法	1198.5	2.3	1199.1	2.3	2.8	782.3	0.1	599.1	0.3

4 结束语

圆球可用于相机内参数的精确求解. 对秩 1 约束进行了几何意义上的解释,对相机内参数求解过程中所使用的每一个变量解释了其几何意义,提出了利用秩 1 约束减少求解参数的 3 个基本公式,并建立了目标函数以优化求解相机内参数. 相对于传统算法,文中算法可以提高相机内参数的求解精度,获得了较好的内参数.

参考文献:

[1] Hartley R, Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision [M]. 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

(下转第 42 页)

- Induced by the Intense Electromagnetic Pulse[J]. Acta Physica Sinica, 2010, 59(11): 8118-8124.
- [9] English A C. Physical Investigation of the Mesoplasma in Silicon[J]. IEEE Trans on Electron Devices, 1966, 13(8): 662-667.
- [10] Egawa H. Avalanche Characteristics and Failure Mechanism of High Voltage Diodes[J]. IEEE Trans on Electron Devices, 1966, 13(11): 754-758.
- [11] Ward A L. Studies of Second Breakdown in Silicon Diodes[J]. IEEE Trans on Parts, Hybrids, and Packaging, 1977, 13(4): 361-368.
- [12] Ward A L. Calculations of Second Breakdown[J]. IEEE Trans on Nuclear Science, 1977, 24(6): 2357-2360.
- [13] Amerasekera A, Chang M C, Seitchik J A, et al. Self-heating Effects in Basic Semiconductor Structures[J]. IEEE Trans on Electron Devices, 1993, 40(10): 1836-1844.
- [14] Tasca D M, Peden J C, Miletta J. Non-Destructive Screening for Thermal Second Breakdown[J]. IEEE Trans on Nuclear Science, 1972, 19(6): 57-67.
- [15] DESSIS. User's manual Version 10.0[M]. Zurich: Integrated Systems Engineering AG, 2004.
- [16] Alexander D. Electrical Overstress Failure Modeling for Bipolar Semiconductor Components[J]. IEEE Trans on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology, 1978, 1(4): 345-353.
- [17] Weitzsch F. A Discussion of Some Known Physical Models for Second Breakdown[J]. IEEE Trans on Electron Devices, 1966, 13(11): 731-734.
- [18] Melchior H, Strutt M J O. Secondary Breakdown in Transistors[J]. Proc of the IEEE, 1964, 52(4): 439-440.
- [19] Tasca D M. Pulse Power Failure Modes in Semiconductors[J]. IEEE Trans on Nuclear Science, 1970, 17(6): 364-372.
- [20] Wunsch D C, Bell R R. Determination of Threshold Failure Levels of Semiconductor Diodes and Transistors Due to Pulse Voltages[J]. IEEE Trans on Nuclear Science, 1968, 15(6): 244-259.

(编辑: 郭 华)

---

(上接第 4 页)

- [2] Zhang H, Wong K, Zhang G Q. Camera Calibration from Images of Spheres [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(3): 499-503.
- [3] Ying X, Zha H. Geometric Interpretations of the Relation between the Image of the Absolute Conic and Sphere Images [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2006, 28(12): 2031-2036.
- [4] Wong K K, Zhang G, Chen Z. A Stratified Approach for Camera Calibration Using Spheres [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2011, 20(2): 305-316.
- [5] Lu Y, Payandeh S. On the Sensitivity Analysis of Camera Calibration from Images of Spheres [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2010, 114(1): 8-20.
- [6] Shen E, Hornsey R. Multi-Camera Network Calibration with a Non-Planar Target [J]. IEEE Sensors Journal, 2011, 11(10): 2356-2364.
- [7] Jia J, Jiang G, Wu C K, et al. Accurate Positioning Using a Sphere in Single Views[J]. Electronics Letters, 2011, 47(21): 1175-1176.
- [8] 李龙, 何明一, 李娜. 椭圆拟合的圆环模板摄像机标定[J]. 西安电子科技大学学报, 2010, 37(6): 1148-1154.  
Li Long, He Mingyi, Li Na. Camera Calibration Based on the Circular Pattern and Ellipse Fitting[J]. Journal of Xidian University, 2010, 37(6): 1148-1154.
- [9] Zhang Z Y. A Flexible New Technique for Camera Calibration [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(11): 1330-1334.

(编辑: 齐淑娟)