# Trabajo Práctico 2

**Optimización**
Aplicaciones Computacionales en Negocios

**Integrantes:**

Victor Navajas
Emiliana Verdun
Elizabeth Wurzel
Mariana Zunino

# Introducción

Se presentó un problema de optimización en el área de planificación de una empresa de cobros minoristas, donde tenemos centrales operativas y oficinas de atención que deben ser abastecidas por las primeras, cumpliendo ciertas restricciones. En este trabajo se planteará un modelo de programación lineal entera para este problema utilizando zimpl como lenguaje de modelado y SCIP como solver. Dentro de la entrega se incluyeron distintos modelos para las distintas cuestiones planteadas en la consigna, instancias adicionales usadas en experimentación y las soluciones dadas por SCIP para cada uno de los modelos en formato txt.

# Ejercicio 1: Modelo básico

En primer lugar, con el objetivo de minimizar los costos de distribución relacionados con la apertura de centrales para abastecer a las oficinas y las distancias de conexión, se planteó el siguiente modelo básico.

## Conjuntos:

$$C = \{1, 2, \ldots, 10\} = \text{Conjunto de centrales operativas extraído de ”centrales.txt”}$$
$$O = \{1, 2, \ldots, 56\} = \text{Conjunto de oficinas extraído de ”oficinas.txt”}$$

## Variables:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la oficina } i \text{ está conectada a la central } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si la central } j \text{ está abierta} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

## Función objetivo:

Minimizar:

$$\sum_{j \in C} \text{costo\_apertura} \cdot y_j + \sum_{i \in O} \sum_{j \in C} \text{d}_{ij} \cdot \text{costo\_cable} \cdot x_{ij}$$

Siendo que el costo de abrir una central de operaciones es de 5700 y que el costo de 1 metro de cable es de 17/1000, la función objetivo es:

$$\sum_{j \in C} 5700 \cdot y_j + \sum_{i \in O} \sum_{j \in C} \text{d}_{ij} \cdot \frac{17}{1000} \cdot x_{ij}$$

## Restricciones:

- Cada oficina debe estar conectada a una única central operativa:

$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in O$$

- Si una oficina está asignada a una central, esa central debe estar abierta:

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in O, \forall j \in C$$

- La suma de las operaciones por hora de las oficinas conectadas a una central no debe exceder la capacidad máxima H ($H = 15000$):

$$\sum_{i \in O} x_{ij} \cdot \text{operaciones}_i \leq H \quad \forall j \in C$$

Este modelo inicial fue implementado en el archivo ”modelo.zpl”, trasladando este modelo al lenguaje zimpl, con las modificaciones que esto implica.

### Resultados:

Con el modelo básico planteado, se encontró un costo mínimo de 34549.843. Dicho mínimo se alcanzó en 9 segundos por el solver y asigna las oficinas a las centrales de la siguiente manera:

- Centrales abiertas: 1, 2, 3, 5, 7, 9.
  - Oficinas asignadas a la central 1: 15, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54
  - Oficinas asignadas a la central 2: 1, 2, 3, 14, 16, 29, 30, 42, 43, 44
  - Oficinas asignadas a la central 3: 10, 11, 18, 19, 21, 31, 32, 33
  - Oficinas asignadas a la central 5: 8, 9, 17, 20, 34, 35, 36, 37, 40, 41
  - Oficinas asignadas a la central 7: 4, 5, 6, 7, 26, 28, 38, 45, 55, 56
  - Oficinas asignadas a la central 9: 12, 13, 22, 23, 24, 25, 27, 39

## Ejercicio 2: Restricción adicional

Se puede agregar una restricción adicional al modelo para que en la solución se considere que una central no pueda atender a más de 10 oficinas, como una manera de hacer las distribuciones más equitativas y no permitir la sobrecarga de una central particular más allá de que pueda cumplir con las restricciones de demanda.

- Cada central no puede atender a más de 10 oficinas:

$$\sum_{i \in O} x_{ij} \leq 10 \qquad \forall j \in C$$

Dicho modelo con la restricción adicional se implementó en el archivo ”modelomodificado.zpl”

### Resultados con restricción adicional:

Teniendo en cuenta esta nueva restricción, el óptimo encontrado no cambia. Fijándonos en el óptimo con el modelo sin esta restricción adicional, a ninguna central se le asignan más de 10 oficinas, por lo que esta restricción no afecta al óptimo. Si se pusiera una menor cantidad de oficinas máximas a las que puede abastecer una central, ya nos encontraríamos con otro caso distinto.

Igualmente, agregando esta restricción se nota una pequeña mejora en el tiempo de ejecución del solver, pasando de tardar 8 segundos en encontrar la solución óptima a tardar 7 segundos. Si bien no parece muy significante, con mayores instancias o cambios en los datasets, esta restricción podría ser de ayuda para la reducción de tiempo de ejecución.

## Ejercicio 3: Factibilidad Modelo

Para analizar la factibilidad del modelo con respecto a la capacidad máxima de operaciones por hora de cada central modificamos el modelo básico inicial para encontrar el mínimo valor para el cual el problema es factible. Antes de armar este modelo notamos que para que el modelo pueda ser factible necesitamos que se cumpla:

$$H \cdot |\mathrm{C}| \geq \sum_{i \in O} \text{operaciones}_i \tag{1}$$

Para la instancia dada:

$$H \cdot 10 \geq 88000$$

Sabemos que si no se cumple esto el modelo no va a ser factible. Aún así si se cumple hay chances de que no sea factible, dado que tenemos la restricción de que cada oficina solo puede estar abastecida por una central. Si no tuviéramos esa restricción y una central pudiera abastecer parcialmente a una oficina, cumplir una fracción de la demanda de esa oficina, en ese caso podríamos estar seguros de que si se cumple (1) el modelo es factible. Como no estamos en ese caso propusimos un modelo para encontrar este mínimo.

El modelo propuesto, implementado en "factibilidadmodelo.zpl", tiene únicamente 2 cambios. Primero se define H (Capacidad maxima de operaciones por hora que procesa una central) como una variable, la cual debe ser mayor o igual que 0. Y luego se modifica la función objetivo para minimizar H, se ignora totalmente el costo de abrir una central y de conectar las oficinas a las centrales que las abastecen ya que no influye en la factibilidad del modelo. Así al correrlo nos da el mínimo de la capacidad máxima de operaciones por hora de cada central para el cuál se cumplen las restricciones, es decir, el mínimo para el cuál el modelo sigue siendo factible. En esta instancia ese mínimo fue de 8800 horas. Se cumple la ecuación por igualdad ya que $H \cdot |\text{Centrales}|$ nos da exactamente la sumatoria de la demanda de operaciones de cada oficina.

Además, también se analizó la factibilidad del modelo con la restricción adicional. En ese caso para que el modelo pueda ser factible se debe complir (1) y la siguiente restricción:

$$\frac{|\text{O}|}{|\text{C}|} \leq T$$

Para la instancia dada:

$$\frac{|56|}{|10|} \leq T$$

$$5.6 \leq T$$

Definiendo T como el máximo de oficinas que puede abastecer una central. Se vio que al minimizar el modelo propuesto para analizar la factibilidad en el modelo inicial pero agregando la restricción adicional, el valor mínimo de H no cambió, fue también de 8800. Esto no resulta sorprendente ya que como vimos en los puntos anteriores, el valor óptimo era el mismo en el modelo inicial y el modelo modificado, por lo que la restricción no añadía cortes importantes al modelo en la instancia dada. Pero al plantear un modelo que minimizara H y T, implementado en "factibilidadmodelomodificado.zpl", se vió que a pesar de que el valor mínimo de H siguiera siendo 8800, T, que en modelo modificado estaba fijado en 10, bajó a 6. Esto resultó interesante, ya que H se mantuvo, se pensó que tal vez el modelo da prioridad a minimizar H porque es un valor más grande que T, podría resultar interesante asignarle un peso para darle más importancia a una variable o a otra.

# Ejercicio 4: Experimentación con Instancias

Para la experimentación del modelo y ver su factibilidad, fueron planteadas diferentes instancias de prueba. Se incluyó en la entrega 9 archivos con las instancias generadas para la experimentación, 3 para cada experimentación, uno con las distancias, uno con las oficinas y otro con las centrales.

## 56 oficinas, 6 centrales:

Reduciendo la cantidad de centrales que pueden abrirse a las primeras 6, el solver tiene una ejecución casi instantánea, con un tiempo marcado de 0.0 y con 8 soluciones posibles exploradas. El óptimo alcanzado utiliza las 6 centrales y cuesta 34666.837, lo cual es un poco peor que el óptimo encontrado con las instancias originales. Con la solución óptima encontrada, ninguna central abastece a más de 10 oficinas.

## 100 oficinas, 20 centrales:

Tomando una matriz de distancias de 100x20, ya comienza a complicarse la resolución en un tiempo razonable del modelo utilizando el planteo básico. Fue establecido un límite de tiempo de 1 hora y no se encontró un óptimo, sino que el modelo se cortó con un mínimo encontrado de 57351.305.

Resulta interesante ver que utilizando el modelo con la restricción adicional de un máximo de 10 oficinas por central, se llegó rápidamente a un óptimo de 57352.41. En solo 10 segundos se llegó a eso, aunque se puede ver que tiene un costo mayor que la resolución utilizando el modelo básico a pesar de que este no llegó al óptimo.

## 1000 oficinas, 200 centrales:

Con esta instancia y estos números tan grandes ya la implementación de los modelos toma mucho tiempo y al momento de corte pasada 1 hora se ve cómo el costo mínimo encontrado se dispara a comparación de las otras instancias, con una solución no óptima cuyo costo es de 1040683.412.

Se incrementó el tiempo de ejecución máximo a 5 horas para ver si se llegaba a encontrar un óptimo, pero no resultó posible. La gran cantidad de oficinas y centrales dificulta ya el hallazgo de un óptimo en tiempo razonable.

## Conclusión

En definitiva, fueron explorados en este trabajo diferentes planteos para el modelo de abastecimiento de oficinas a partir de centrales, viendo la importancia de los tamaños de instancias y las restricciones de los modelos para encontrar una solución factible en un tiempo razonable. A mayor tamaño de instancias es natural que cueste más tiempo encontrar un óptimo, pero es posible a través de restricciones adicionales encontrar un óptimo en menor tiempo.