Ejercicio 1: Modelo básico

En primer lugar, con el objetivo de minimizar los costos de distribución relacionados con la apertura de centrales para abastecer a las oficinas y las distancias de conexión, se planteó el siguiente modelo básico.

Conjuntos:

$$C = \{1, 2, \ldots, 10\} = \text{Conjunto de centrales operativas extraído de "centrales.txt"}$$

$$O = \{1, 2, \ldots, 56\} = \text{Conjunto de oficinas extraído de "oficinas.txt"}$$

Variables:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la oficina } i \text{ está conectada a la central } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si la central } j \text{ está abierta} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función objetivo:

Minimizar:

$$\sum_{j \in C} \text{costo\_apertura} \cdot y_j + \sum_{i \in O} \sum_{j \in C} \mathrm{d}_{ij} \cdot \text{costo\_cable} \cdot x_{ij}$$

Siendo que el costo de abrir una central de operaciones es de 5700 y que el costo de 1 metro de cable es de 17/1000, la función objetivo es:

$$\sum_{j \in C} 5700 \cdot y_j + \sum_{i \in O} \sum_{j \in C} \mathrm{d}_{ij} \cdot \frac{17}{1000} \cdot x_{ij}$$

Restricciones:

- Cada oficina debe estar conectada a una única central operativa:

$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in O$$

- Si una oficina está asignada a una central, esa central debe estar abierta:

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in O, \forall j \in C$$

- La suma de las operaciones por hora de las oficinas conectadas a una central no debe exceder la capacidad máxima H ($H = 15000$):

$$\sum_{i \in O} x_{ij} \cdot \text{operaciones}_i \leq H \quad \forall j \in C$$

Resultados:

Con el modelo básico planteado, se encontró un costo mínimo de 34549.843. Dicho mínimo se alcanzó en 9 segundos por el solver y asigna las oficinas a las centrales de la siguiente manera:

- Centrales abiertas: 1, 2, 3, 5, 7, 9.
  - Oficinas asignadas a la central 1: 15, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54
  - Oficinas asignadas a la central 2: 1, 2, 3, 14, 16, 29, 30, 42, 43, 44

– Oficinas asignadas a la central 3: 10, 11, 18, 19, 21, 31, 32, 33
– Oficinas asignadas a la central 5: 8, 9, 17, 20, 34, 35, 36, 37, 40, 41
– Oficinas asignadas a la central 7: 4, 5, 6, 7, 26, 28, 38, 45, 55, 56
– Oficinas asignadas a la central 9: 12, 13, 22, 23, 24, 25, 27, 39

Ejercicio 2: Restricción adicional

Se puede agregar una restricción adicional al modelo para que en la solución se considere que una central no pueda atender a más de 10 oficinas, como una manera de hacer las distribuciones más equitativas y no permitir la sobrecarga de una central particular más allá de que pueda cumplir con las restricciones de demanda.

- Cada central no puede atender a más de 10 oficinas:

$$\sum_{i \in O} x_{ij} \leq 10 \qquad \forall j \in C$$

Resultados con restricción adicional:

Teniendo en cuenta esta nueva restricción, el óptimo encontrado no cambia. Fijándonos en el óptimo con el modelo sin esta restricción adicional, a ninguna central se le asignan más de 10 oficinas, por lo que esta restricción no afecta al óptimo. Si se pusiera una menor cantidad de oficinas máximas a las que puede abastecer una central, ya nos encontraríamos con otro caso distinto.

Igualmente, agregando esta restricción se nota una pequeña mejora en el tiempo de ejecución del solver, pasando de tardar 8 segundos en encontrar la solución óptima a tardar 7 segundos. Si bien no parece muy significante, con mayores instancias o cambios en los datasets, esta restricción podría ser de ayuda para la reducción de tiempo de ejecución.

Ejercicio 3: Parámetro adicional

Para analizar la factibilidad del modelo con respecto a la capacidad máxima de operaciones por hora de cada central modificamos el modelo básico inicial para encontrar el mínimo valor para el cual el problema es factible. Antes de armar este modelo notamos que para que el modelo pueda ser factible necesitamos que se cumpla:

$$H \cdot |\mathrm{C}| \geq \sum_{i \in O} \text{operaciones}_i \tag{1}$$

Para la instancia en particular dada, además, también se necesita lo siguiente:

$$H \cdot 10 \geq 88000$$

Sabemos que si no se cumple esto el modelo no va a ser factible. Aún así si se cumple hay chances de que no sea factible, dado que tenemos la restricción de que cada oficina solo puede estar abastecida por una central. Si no tuviéramos esa restricción y una central pudiera abastecer parcialmente a una oficina, cumplir una fracción de la demanda de esa oficina, en ese caso podríamos estar seguros de que si se cumple (1) el modelo es factible. Como no estamos en ese caso propusimos un modelo para encontrar este mínimo.

El modelo propuesto tiene únicamente 2 cambios. Primero se define H (Capacidad maxima de operaciones por hora que procesa una central) como una variable, la cual debe ser mayor o igual que 0. Y luego se modifica la función objetivo para minimizar H, se ignora totalmente el costo de abrir una central y de conectar las oficinas a las centrales que las abastecen ya que no influye en la factibilidad del modelo. Así al correrlo nos da el mínimo de la capacidad máxima de operaciones por hora de cada central para el cuál se cumplen las restricciones, es decir, el mínimo para el cuál el modelo sigue siendo factible. En esta instancia ese mínimo fue de 8800 horas. Se cumple la ecuación por igualdad ya que $H \cdot |\text{Centrales}|$ nos da exactamente la sumatoria de la demanda de operaciones de cada oficina.

Ejercicio 4: Experimentación con Instancias

Para la experimentación del modelo y ver su factibilidad, fueron planteadas diferentes instancias de prueba.

56 oficinas, 6 centrales:

Reduciendo la cantidad de centrales que pueden abrirse a las primeras 6, el solver tiene una ejecución casi instantánea, con un tiempo marcado de 0.0 y con 8 soluciones posibles exploradas. El óptimo alcanzado utiliza las 6 centrales y cuesta 34666.837, lo cual es un poco peor que el óptimo encontrado con las instancias originales. Con la solución óptima encontrada, ninguna central abastece a más de 10 oficinas.

100 oficinas, 20 centrales:

Tomando una matriz de distancias de 100x20, ya comienza a complicarse la resolución en un tiempo razonable del modelo utilizando el planteo básico. Fue establecido un límite de tiempo de 1 hora y no se encontró un óptimo, sino que el modelo se cortó con un mínimo encontrado de 57351.305.

Resulta interesante ver que utilizando el modelo con la restricción adicional de un máximo de 10 oficinas por central, se llegó rápidamente a un óptimo de 57352.41. En solo 10 segundos se llegó a eso, aunque se puede ver que tiene un costo mayor que la resolución utilizando el modelo básico a pesar de que este no llegó al óptimo.

1000 oficinas, 200 centrales:

Con esta instancia y estos números tan grandes ya la implementación de los modelos toma mucho tiempo y al momento de corte pasada 1 hora se ve cómo el costo mínimo encontrado se dispara a comparación de las otras instancias, con una solución no óptima cuyo costo es de 1040683.412.

Se incrementó el tiempo de ejecución máximo a 5 horas para ver si se llegaba a encontrar un óptimo, pero no resultó posible. La gran cantidad de oficinas y centrales dificulta ya el hallazgo de un óptimo en tiempo razonable.