CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Representación de conjuntos numéricos en la recta

1. REPRESENTACIÓN

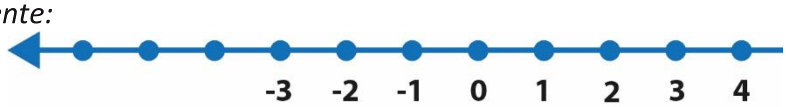
Hemos visto que los conjuntos numéricos o subconjuntos de ellos, se pueden definir por comprensión utilizando una expresión proposicional que caracteriza a los elementos o por extensión a los que representaremos en la recta numérica.

POR EJEMPLO

a. Para el conjunto $\boldsymbol{A} = \{{}^{x}/_{x} \in \boldsymbol{IN} \wedge \boldsymbol{x} < \boldsymbol{6}\}$su representación en la recta es:
Gráficamente:

b. El conjunto $\boldsymbol{B} = \{{}^{x}/_{x} \in \boldsymbol{IN}\}$está escrito por comprensión y sus elementos son los números naturales, puede darse por extensión como $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4} \ldots\}$ nótese que se han utilizado puntos suspensivos porque son infinitos los elementos del conjunto, en la recta se lo representa con una flecha, no obstante si se quiere seguir completando el conjunto lo podemos hacer dado que conocemos el sucesor.
Gráficamente:

c. Consideremos $\boldsymbol{C} = \{{}^{x}/_{x} \in \boldsymbol{Z} \wedge \boldsymbol{x} < \boldsymbol{5}\}$ los elementos del conjunto son números enteros. Por extensión es $\boldsymbol{C} = \{\ldots -\boldsymbol{3}, -\boldsymbol{2}, -\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}\}$ son infinitos sus elementos por eso ponemos puntos suspensivos.
Gráficamente:



d. Sea $\boldsymbol{D} = \{{}^{x}/_{x} \in \boldsymbol{Z} \wedge -\boldsymbol{4} \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{1}\}$ en el conjunto vemos que el 4 está incluido, no así el número 1. En la recta cuando no se incluye un número natural o entero, se indica dejando el círculo sin rellenar.
Gráficamente:

2. INTERVALO REAL

Si ahora definimos un conjunto sobre los números reales $\boldsymbol{D} = \{^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{IR} \wedge \boldsymbol{x} < \boldsymbol{6}\}$, en este caso, es imposible nombrar los infinitos elementos de D, ya que no es factible nombrar dos números reales consecutivos. Entre dos números cualesquiera de ellos hay infinitos números reales por más próximos que nos parezcan.
De aquí surge el concepto de **intervalo real: como una parte o subconjunto del conjunto IR.**
El conjunto D es el subconjunto que contiene a los infinitos reales menores a 6:

$\boldsymbol{D} =]-\infty, \boldsymbol{6}[$ lo escribimos como un **intervalo abierto** de números reales que se representa con un corchete invertido.
Si los representamos en la recta numérica:

Sea $\boldsymbol{P} = \{^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{IR} \wedge -\boldsymbol{3} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{6}\}$ el subconjunto que contiene a los infinitos reales desde el número –3 hasta 6. $\boldsymbol{P} = [-\boldsymbol{3}, \boldsymbol{6}]$ lo escribimos como el intervalo cerrado de –3 a 6.
En la recta numérica se pueden representar:

La razón de clasificar a los intervalos como abiertos o cerrados está relacionada con el hecho de que el elemento pertenezca o no al subconjunto, si decimos por ejemplo:

$x < 5$, 5 no pertenece al conjunto

En este caso lo denominamos intervalo abierto en 5, pero si decimos

$x \geq 2$, 2 si pertenece al conjunto

Lo denominamos intervalo cerrado en 2.

La notación que utilizaremos para designar los intervalos reales en general es corchete invertido cuando el intervalo es abierto en alguno de sus extremos; y corchete cuando el intervalo es cerrado en alguno de sus extremos.

$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] = \{^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{IR}: \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ **INTERVALO CERRADO**

$]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[= \{^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{IR}: \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$**INTERVALO ABIERTO**

$]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] = \{^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{IR}: \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$**INTERVALO SEMIABIERTO A IZQUIERDA**

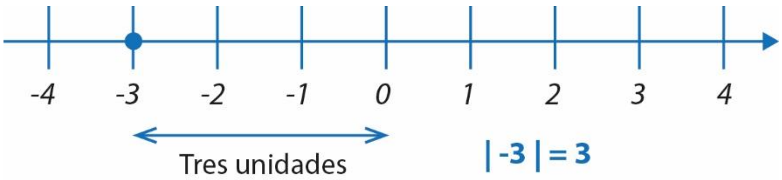
$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[= \{^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{IR}: \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$**INTERVALO SEMIABIERTO A DERECHA**

Los intervalos se usarán con mucha frecuencia en la descripción del comportamiento de funciones y en la representación del conjunto solución de inecuaciones, entre otros.

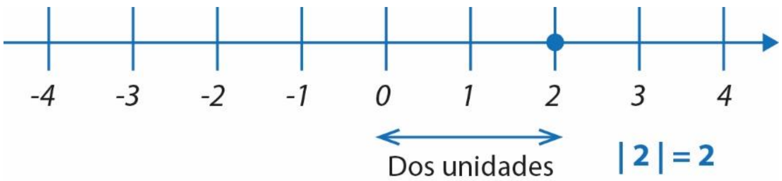
3. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número es la distancia que lo separa del 0 (cero) sobre la recta numérica.

Se simboliza con barras, por ejemplo | - 3 | representa el valor absoluto de 3. Para obtener su valor, consideramos su distancia al 0. Por tratarse de una distancia es un número siempre positivo.



Si el número al que se le quiere calcular su valor absoluto es positivo, por ejemplo | 2 | el resultado nos da el mismo número por estar ubicado en la recta a la derecha del 0.



Para todo número real x: $|x| = x$ si x es positivo, en símbolos $x \geq 0$ $|x| = -x$ si x es negativo, en símbolos $x > 0$

En la definición debemos tener en cuenta que el signo menos significa el opuesto del número.

POR EJEMPLO

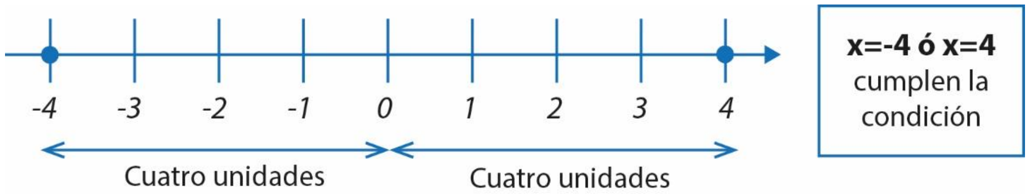
$|5| = x$ 5 es positivo, por lo tanto $|5| = 5$

$|-5| = -x$ -5 es negativo, por lo tanto $|-5| = -(-5) = 5$

El valor absoluto SIEMPRE nos da un número positivo

Podemos escribir conjuntos numéricos por comprensión, utilizando la notación de valor absoluto. En los siguientes ejemplos, consideramos a **x** como elementos de un conjunto.

Si tenemos | x | = 4 se trata de los números cuya distancia al cero es 4. Si lo graficamos vemos que hay dos números que cumplen esta condición.



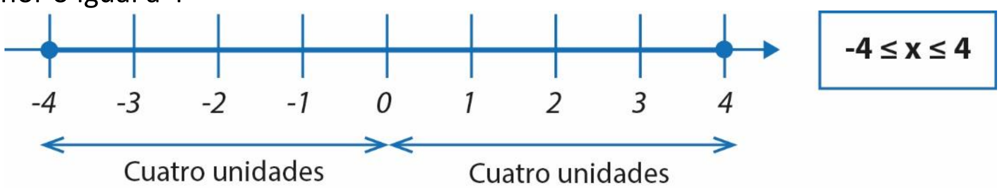
Escribimos el conjunto

- Por comprensión: $A = \{{}^{x}/_{x} \in Z \ \wedge |x| = 4\}$
- Por extensión: $A = \{-4, 4\}$

Podríamos escribir el conjunto A sobre el conjunto de los números reales:

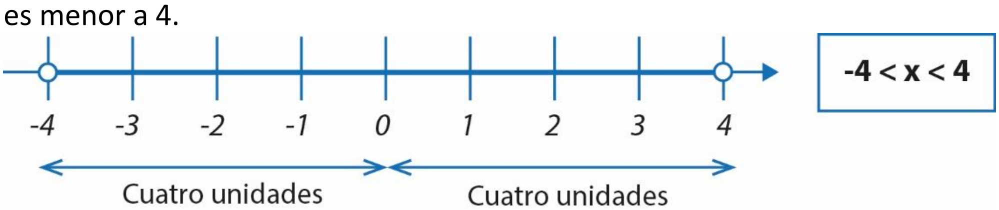
- Por comprensión: $A = \{{}^{x}/_{x} \in IR \ \wedge |x| = 4\}$
- Por extensión: $A = [-4] \cup [4]$

Si en el ejemplo tenemos |x|≤ 4 se trata de los números cuya distancia al cero es menor o igual a 4



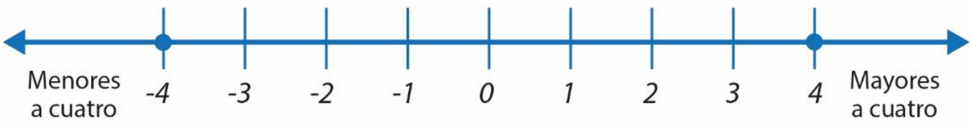
- Por comprensión: $A = \{{}^{x}/_{x} \in IR \ \wedge |x| \leq 4\}$
- Por extensión: $A = [-4, 4]$ es un intervalo cerrado

Si ahora consideramos el caso |x| < 4 se trata de los números cuya distancia al cero es menor a 4.



Si tenemos |x| ≥ 4, se trata de los números cuya distancia al cero es mayor o igual a 4.

Gráficamente:



x ≤ -4
ó
x ≥ 4

En este caso tenemos dos intervalos:

- Por comprensión: $A = \{^{x}/_{x} \in IR \ \wedge |x| \geq 4\}$
- Por extensión: $A =]-\infty, -4] \cup [4, \infty[$

Los ejemplos vistos se resumen en las propiedades de valor absoluto.

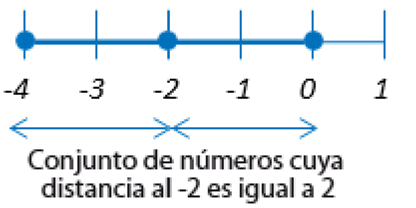
|x| = k ⇔ x = k ó x = -k
Si: Para todo k positivo, para todo x: |x| ≤ k ⇔ - k ≤ x ≤ k
Para todo k positivo, para todo x: |x| ≥ k ⇔ x ≤ - k ó x ≥ k

Todo lo visto es válido para |x-a| ≤ k ó |x+a| ≤ k en el primer caso la distancia no es con respecto al cero, sino en relación al punto a; en el segundo caso se trata de la distancia de x al número (-a)

POR EJEMPLO

$A = \{^{x}/_{x} \in IR \ \wedge |x+2| \leq 2\}$

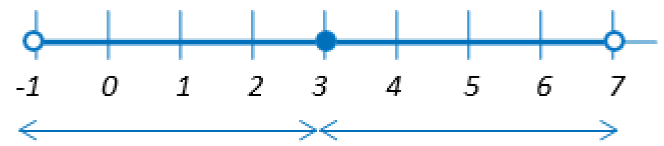
Gráficamente para el conjunto A:



-4 ≤ x ≤ 0

$B = \{^{x}/_{x} \in IR \ \wedge |x-3| < 4\}$

Gráficamente para el conjunto B:



Conjunto de números cuya distancia al 3 es menor a4

$-1 < x < 7$

✓ Los siguientes videos te permitirán comprender y reafirmar mejor estos contenidos.

https://www.youtube.com/watch?v=RB6N6SlOKqc

https://www.youtube.com/watch?v=yhdmoH_lyeU