# CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

## Conjuntos numéricos

Un conjunto numérico es una agrupación de números que cumplen con una serie de propiedades.

### 1. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

*La noción de número y la de contar han acompañado a la humanidad desde la prehistoria. La causa para que el ser humano comenzara a contar surgió, fundamentalmente, de la necesidad de adaptarse al medio ambiente, proteger sus bienes y distinguir los ciclos de la naturaleza, porque percibían y observaban con cuidado los ritmos que ésta posee y su fina relación con las oportunidades de alimentación y, en general, con la conservación de la vida. Por ejemplo, los cazadores marcaban señales en un palo para saber cuántos animales habían abatido en la cacería.*
*Tuvieron que pasar muchos años para que el hombre fuera cambiando su forma de vida: de cazador y recolector, pasó a ser, además agricultor y ganadero. Por ejemplo, cuando un pastor llevaba sus ovejas a pastar al campo, metía una piedra en su alforja. Luego, cuando las encerraba después del pastoreo, la cantidad de animales debía coincidir con la cantidad de piedras guardadas. Por cada oveja que encerraba, sacaba una piedra de su alforja, si había más piedras que ovejas, significaba que alguna se había perdido. Comparando cantidades es como el hombre comenzó a construir el concepto de número.*

*Piedras usadas por los sumerios en el intercambio comercial.*
*(Aproximadamente en el año 9000 AC)*

El conjunto de los números naturales es aquel conjunto que permite contar. Su primer elemento es 1, a cada número natural le sigue otro que se obtiene agregándole o sumándole una unidad a este, dicho número es su sucesor, lo podemos esquematizar como:

1 → 1+1= → 2+1= → … n+1 es el sucesor de

2 es sucesor de  3 es sucesor de

**Un número natural y su sucesor se llaman consecutivos**

De esta manera se construye el **conjunto de los Números Naturales** que utiliza el símbolo **IN.**

$$\boxed{\mathbf{IN} = \{1, 2, 3, ..., n, n+1, ...\}}$$

**POR EJEMPLO**

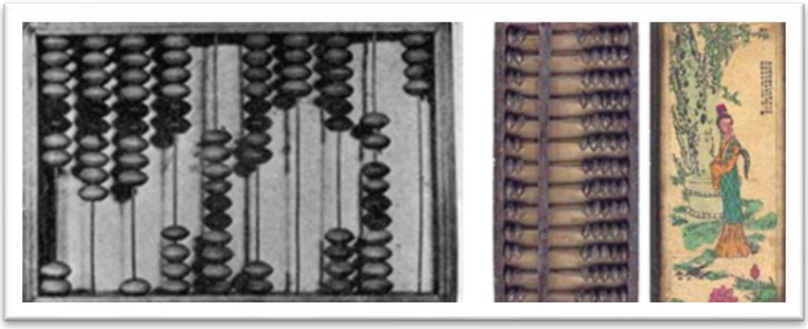
Si sumamos dos números naturales, obtenemos otro número natural 5+ 8 =13, si los restamos 5- 8 = -3, el resultado no es un número natural, por esta razón surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales a los números enteros.

## 2. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

*Los números que hoy llamamos negativos, durante muchísimos años, fueron conocidos como "Números Falsos". En el Siglo V, en Oriente, se manipulaban números positivos y negativos utilizando ábacos, tablillas o bolas de diferentes colores. Cuando los grandes matemáticos de la época resolvían ecuaciones que daban resultados negativos, solían llamarlos absurdos porque aquéllas soluciones eran imposibles. Ya, mucho antes que ellos, los comerciantes chinos usaban en sus cuentas dos colores: los números de las deudas en color rojo y los que no lo eran en color negro.*

*Sin embargo, los indios fueron los primeros en interpretar los números positivos y negativos, como créditos y débitos, respectivamente, distinguiéndolos simbólicamente.*

*A partir del siglo XV, algunos matemáticos muy conocidos comenzaron a utilizar los números negativos en sus trabajos. Stifel, popularizó el uso de los signos "+" y "-" para diferenciar los números positivos y negativos. Hasta entonces, se utilizaba la palabra latina minus que significa menos, o su abreviatura* ***m***



*ÁBACOS ANTIGUOS*

Vimos que la operación diferencia *5 - 8,* no puede efectuarse en los números naturales. Para superar esta dificultad introducimos:

- el número cero 0
- para cada número natural *a* el número negativo *-a*, llamado *opuesto* de *a*

Los números naturales se denominan *enteros positivos* y sus opuestos, *enteros negativos.*

**POR EJEMPLO**

El opuesto del número 2 es el número negativo -2.

Los números enteros positivos, los números enteros negativos y el número cero, dan lugar al *conjunto de los Números Enteros*, al cual notaremos con **Z**.

$$\boxed{\mathbf{Z} = \{\ \ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\ \}}$$

En este nuevo conjunto, 0 es el *elemento neutro* para la suma, es decir:

$0 + a = a + 0$ para todo número entero $a$.

Las operaciones suma, resta, producto entre números enteros, da siempre otro número entero.

¿Qué pasa si queremos efectuar una división con números enteros?

$\frac{8}{2} = 4 \quad \frac{-6}{3} = -2 \quad \frac{4}{3} = ?$ Su resultado no es un número entero

Lo mismo sucede si hablamos de tres cuartos de kilogramo, dos toneladas y media o de medio año. Surge entonces la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros a los números racionales.

## 3. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Todos los años, en el Antiguo Egipto, hacia el mes de julio, el río Nilo crecía e inundaba todas las tierras de labranza. Esto, por muy raro que parezca, era esperado con mucha alegría porque gracias a las inundaciones, el río dejaba sobre los campos una fina capa de elementos fertilizantes (el limo) que traía en sus aguas.

La inundación duraba hasta el mes de septiembre. En esas fechas, el faraón enviaba a los agrimensores a medir los campos para repartir los terrenos entre los campesinos.

Esta medición la hacían con cuerdas anudadas a una misma distancia. A los agrimensores les asaltó un gran problema: había veces que al medir un campo, sobraba o faltaba un trozo de cuerda, ellos tenían que verificar que cada campo tuviera un determinado número de cuerdas por cada lado, ya que era la unidad de medida con la contaban. Solucionaron este problema inventando un nuevo tipo de número, el fraccionario, que era la razón de dos números enteros.

*En el siglo XIII, Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci introdujo en Europa la barra horizontal para separar numerador y denominador en las fracciones. A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los conocemos hoy. A finales del siglo XVI, SimonStevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc., pero los escribía de una forma complicada. Por ejemplo: al número 456,765 lo escribía 456 (0) 7(1) 6(2) 5(3)*

*En el siglo XVII, aparecieron los números decimales tal y como los escribimos hoy: separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. Los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal en el siglo XVIII, concretamente en 1792.*

*Leonardo de Pisa*

*Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo (ca. 1170 - 1250), también llamado Fibonacci, fue un matemático italiano, famoso por haber difundido en Europa el sistema de numeración arábiga actual- mente utilizado, el que emplea notación posicional (de base 10, o decimal) y un dígito de valor nulo: el cero; y por idear la sucesión de Fibonacci.*

Definimos el conjunto de los números racionales de la siguiente manera:

Los números racionales o fraccionarios se representan por el cociente de dos números enteros, llamados numerador y denominador respectivamente, siendo el denominador distinto de cero.

$$\boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \; con \; a \; y \; b \; enteros \; y \; b \neq 0 \right\}$$

Notemos que todo número entero a es racional, pues se puede representar como la fracción $\frac{a}{1}$. Para esto introducimos, los números fraccionarios, que surgen de la razón o cociente entre dos números enteros $r = \frac{a}{b}$ donde a y b son enteros, con $b \neq 0$

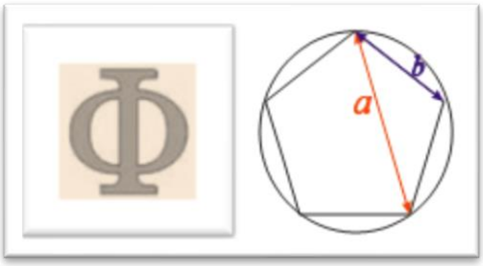
Los números racionales, tienen representación decimal exacta, esto significa que al dividir se obtiene un cociente y el resto es cero. Podemos decir que la escritura decimal de un número racional es, o bien un número decimal finito, o bien periódico.

**POR EJEMPLO**

$\frac{3}{5} = 0{,}6 \; y \; \frac{5}{6} = 0{,}8333 \ldots$ En ambos casos el resto de la división es cero, pero en el segundo ejemplo la cifra decimal 3 se repite indefinidamente, este tipo de números fraccionarios se llaman periódicos.

## 4. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Los griegos, en el siglo VII a.C., descubrieron las magnitudes irracionales. Son números que no pueden ser expresados a través de una fracción. El origen de los números irracionales, fue motivado por el uso de cálculos geométricos que aparecían relacionados con el llamado **número áureo o número de oro**, que es el cociente entre la diagonal a, de un pentágono regular y el lado b del mismo.




*Un número nada fácil de imaginar, que convive con la humanidad (porque aparece en la naturaleza y desde la época griega hasta nuestros días en el arte y el diseño), es el llamado número de oro o también sección áurea, proporción áurea, razón áurea o número de Fidias.*


*Se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la razón áurea, así como una importancia mística. A lo largo de la historia, se le ha atribuido importancia en diversas obras de arquitectura y artes.*

El primer matemático en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue Euclides, quién demostró que este número no puede ser descripto como la razón de dos números enteros, es decir, que es un número irracional. Otros dos números irracionales muy conocidos son **π** y ***e***. El número **π** se define como la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Los antiguos egipcios (hacia 1600 a.C.) ya sabían que existía esta relación. Recién en el año 1761 Lambert demuestra formalmente que el número **π** es irracional.

El número irracional ***e*** aparece en un apéndice de un trabajo sobre logaritmos de Napier, no obstante, esta tabla no contenía el valor de la constante, sino que era simplemente una lista de logaritmos naturales calculados a partir de ésta. El "descubrimiento" de la constante está acreditado a Bernoulli. En el año 1727 Euler comenzó a utilizar la letra ***e*** para identificar la constante.

## 5. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Todos los números racionales e irracionales forman el **conjunto de los números reales**, en símbolos **IR**.

Veamos la representación gráfica de todos los conjuntos explicados anteriormente.

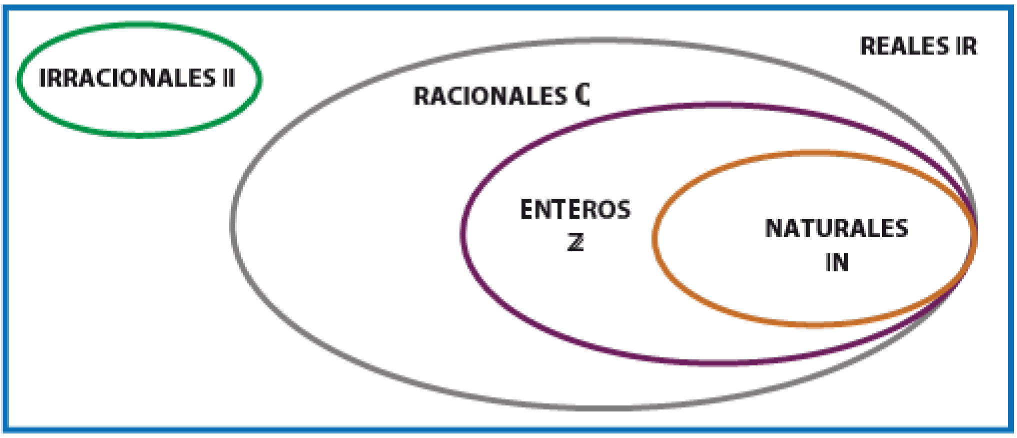



*Gráfico Nº 1: Conjunto de los números reales*

El diagrama anterior podemos esquematizarlo de la siguiente manera:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Números naturales: **N**<br>0 (cero)<br>Números negativos | Números enteros: **Z** | Números racionales: **Q** | Números reales: **R** |
| | Números fraccionarios | Números irracionales: **I** | |

*Esquema Nº 1: Conjunto de los números reales*

Los conjuntos numéricos o subconjuntos de ellos, se pueden definir por **comprensión** utilizando una expresión proposicional que caracteriza a los elementos, o por **extensión** cuando se nombran todos sus elementos. Si trabajamos con conjuntos numéricos, esto último solo se puede aplicar a los números naturales y enteros, dado que es posible conocer en estos conjuntos el elemento anterior y el posterior.

**POR EJEMPLO**

Si llamamos A al conjunto formado por los números naturales menores que 6, lo escribimos:

- Por comprensión $A = \{{}^{x}/_{x} \in IN \wedge x < 6\}$
- Por extensión $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Vamos a ver relaciones y propiedades importantes entre conjuntos, que se necesitarán en el desarrollo del tema: Pertenencia e inclusión.

PERTENENCIA

Cuando queremos establecer una relación entre elemento y conjunto.

La pertenencia se designa con el símbolo ∈ y su negación ∉ indica la no pertenencia.

- En el ejemplo anterior: 2∈A y 6∉ A

INCLUSIÓN

Se dice que un conjunto B está incluido en otro conjunto A, cuando todos los elementos de B pertenecen al conjunto A.

En símbolos: B ⊂ A ⇒ es un subconjunto de A

En el Gráfico N° 1 podemos observar

$$\begin{cases} IN \subset Z \Rightarrow IN\ es\ un\ subconjunto\ de\ Z \\ Q \subset IR \Rightarrow Q\ es\ un\ subconjunto\ de\ IR \end{cases}$$

**POR EJEMPLO**

$A \subset IN$ dado que todos los elementos de A pertenecen a IN, de la misma manera, podríamos decir que $A \subset Z$ dado que el conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros.

✓ El siguiente video te permitirá comprender y reafirmar mejor los conjuntos numéricos.

https://www.youtube.com/watch?v=4XmJUvF4Pv