TEORÍA DE CONJUNTOS

TEORÍA

Un conjunto vacío es aquel que carece de elementos. Un conjunto unitario está formado por un único elemento.

Una propiedad o función proposicional, que se convierte en proposición falsa para todos los elementos del universal, caracteriza por comprensión un conjunto vacío. Designaremos con ϕ al conjunto vacío, y puede definirse simbólicamente así

$$\phi = \{ x / x \neq x \}$$

En este caso la propiedad relativa a x es $P(x) : x \neq x$, la cual resulta falsa cualquiera que sea x.

Si A es el conjunto cuyo único elemento es a, escribiremos

$$A = \{ a \} = \{ x / x = a \}$$

Ejemplo 2-1.

Determinar simbólicamente y por extensión los siguientes conjuntos definidos por comprensión:

i) A es el conjunto de los números enteros cuyo cuadrado es igual a 1.

En este caso la propiedad que caracteriza a los elementos de A es la conjunción de

$$P(x) : x \in \mathbf{Z} \quad \text{y} \quad Q(x) : x^2 = 1$$

Entonces

$$A = \{ x / x \in \mathbf{Z} \wedge x^2 = 1 \}$$

y como universal puede sobrentenderse el conjunto de los números reales o racionales. Si proponemos a **Z** como universal, puede escribirse

$$A = \{ x \in \mathbf{Z} / x^2 = 1 \}$$

Obviamente, la determinación por extensión es

$$A = \{ -1 , 1 \}$$

ii) B es el conjunto de los números naturales mayores que 2, y que no superan a 6.

Considerando a **N** como universal, la propiedad característica de los elementos de B es la conjunción de

$$P(x) : x > 2 \quad \text{y} \quad Q(x) : x \leqslant 6$$

que podemos expresar $\quad R(x) : 2 < x \leqslant 6$

y se tiene

$$B = \{ x \in \mathbf{N} / 2 < x \leqslant 6 \}$$

iii) B es el conjunto de los números naturales cuyo cuadrado es par.

$$B = \{ x \in \mathbf{N} \,/\, x^2 \text{ es par} \}$$

O bien

$$B = \{ x \in \mathbf{N} \,/\, x^2 = 2k \ \wedge \ k \in \mathbf{N} \}$$

¿Cómo se determina la pertenencia de un elemento a B? De acuerdo con la definición de B, dado un número natural, se analiza su cuadrado; si dicho cuadrado es par, el número pertenece a B; si su cuadrado es impar, no pertenece a B. Es decir

$$a \in B \Leftrightarrow a^2 \text{ es par}$$

iv) C es el conjunto de los puntos del plano cuyas distancias a un punto 0 son iguales a 1.

Entendemos que el conjunto universal es el de los puntos del plano α. Si bien 0 es un elemento, como es usual en geometría, lo denotamos con mayúscula. Indicamos la distancia entre A y 0 mediante d (A, 0). Entonces

$$C = \{ X \in \alpha \,/\, d\,(X, 0) = 1 \}$$

es la definición simbólica de la circunferencia de centro 0 y radio 1.

v) D es el conjunto de los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos A y B.

$$D = \{ X \in \alpha \,/\, d\,(X, A) = d\,(X, B) \}$$

D consiste en la mediatriz del segmento AB.

Ejemplo 2-3.

El conjunto S está formado por los posibles resultados que se obtienen al lanzar dos monedas. Los resultados para la primera moneda son c (cara) y s (sello) y por cada uno de ellos se tienen las mismas posibilidades para la segunda, es decir

Entonces

$$S = \{ cc, cs, sc, ss \}$$

Por extensión nos queda

$$B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$$

iii) C es el conjunto de los números reales cuyo cuadrado es igual a -1.

Se tiene

$$C = \{ x \in \mathbf{R} / x^2 = -1 \}$$

Como el cuadrado de ningún número real es negativo, $P(x) : x^2 = -1$ es F para todo real, y resulta $C = \phi$.

Ejemplo 2-2.

La determinación de conjuntos por extensión no es posible en el caso de infinitos elementos y hay que limitarse a la definición por comprensión. La matemática trabaja casi con exclusividad en este sentido, a través de propiedades.

Caracterizamos simbólicamente los siguientes conjuntos:

i) P es el conjunto de los números enteros pares.

Por definición, un entero es par si y sólo si se identifica con el duplo de algún entero. Es decir

$$a \text{ es par} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbf{Z} / a = 2k$$

Entonces

$$P = \{ x \in \mathbf{Z} / x = 2k \wedge k \in \mathbf{Z} \}$$

Es claro que P consiste en el conjunto de los múltiplos de 2.

A veces, acudiendo a un abuso de notación, suele proponerse una aparente determinación por extensión de un conjunto infinito, con la adjunción de puntos suspensivos. Así

$$P = \{ \ldots\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\ldots \}$$

ii) A es el conjunto de los números naturales que son múltiplos de 3.

$$A = \{ x \in \mathbf{N} / x = 3k \wedge k \in \mathbf{N} \}$$

En N no incluimos al cero, y se tiene

$$A = \{ 3, 6, 9, \ldots\ldots \}$$

Si 0 se considera natural, escribiremos $\mathbf{N}_0$ y en este caso

$$A = \{ x \in \mathbf{N}_0 / x = 3k \wedge k \in \mathbf{N}_0 \}$$

Es decir

$$A = \{ 0, 3, 6, 9, \ldots\ldots \}$$

2.3. INCLUSION

2.3.1. Concepto

Sean A y B dos conjuntos. Si ocurre que todo elemento de A pertenece a B, diremos que A está incluido en B, o que A es parte de B, o que A es un subconjunto de B, y escribimos $A \subset B$.

Definición

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$

Esta definición tiene el siguiente significado: si sabemos que $A \subset B$, entonces la proposición $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ es V; recíprocamente, si esta proposición es V, entonces se verifica que $A \subset B$.

En repetidas ocasiones se necesitará demostrar que un conjunto es parte de otro; entonces, de acuerdo con la definición, será suficiente demostrar que cualquier elemento del primero pertenece al segundo

Teniendo en cuenta la equivalencia entre una implicación y la contrarrecíproca, la definición anterior puede expresarse así

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x : x \notin B \Rightarrow x \notin A$$

Además, considerando la equivalencia entre $p \Rightarrow q$ y $\sim (p \wedge \sim q)$, podemos traducir la misma definición de la siguiente manera

$$A \subset B \Leftrightarrow \exists x / x \in A \wedge x \notin B \text{ es F}$$

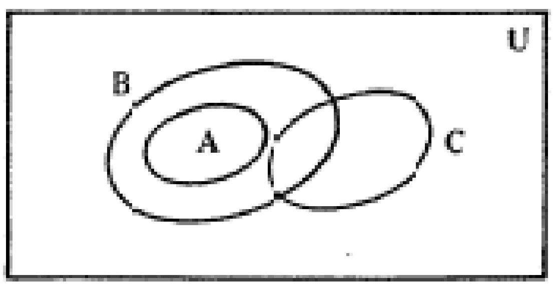
Es decir, en la inclusión no puede darse que haya un elemento de A que no pertenezca a B.

Sobrentendiendo el cuantificador universal, para descargar la notación, escribiremos

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

2.3.2. Diagramas de Venn

Existe una representación visual de los conjuntos dada por diagramas llamados de Venn. En este sentido, el conjunto universal suele representarse por un rectángulo, y los conjuntos por recintos cerrados. Es claro que todo elemento de A pertenece a U, es decir, $A \subset U$. Sean A, B y C subconjuntos de U, como indica el diagrama



En este caso se verifica $A \subset B$.

Ejemplo 2-4.

Sean $U = \mathbf{N}$ y los conjuntos

$$A = \{ x / x \mid 6 \}$$
$$B = \{ x / x \mid 8 \}$$
$$C = \{ x / x \leqslant 2 \}$$

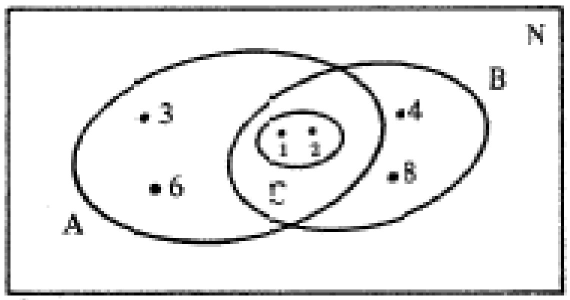
Se pide la representación de tales conjuntos mediante diagramas de Venn. Definimos la relación de divisor en $\mathbf{N}$ mediante

$$a \mid b \quad \text{si y sólo si} \quad \exists \; n \in \mathbf{N} \; / \; b = a \cdot n$$

Teniendo en cuenta esta definición, y la relación de menor o igual, la representación por extensión de tales conjuntos es

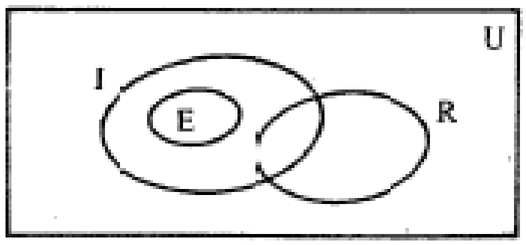
$$A = \{ 1 , 2 , 3 , 6 \} \qquad B = \{ 1 , 2 , 4 , 8 \}$$
$$C = \{ 1 , 2 \}$$

y en términos de diagramas de Venn



Ejemplo 2-5.

Consideremos el conjunto U de todos los triángulos; si I denota el conjunto de los triángulos isósceles, E de los equiláteros y R de los triángulos rectángulos, se tiene



Nota previa:

Por definición, un número natural x es impar si y sólo si existe $k \in N$ tal que $x = 2k - 1$.

Por otra parte, es fácil ver que el producto de dos naturales consecutivos es impar, y que la diferencia entre un número par y uno impar es impar. Vamos ahora a nuestra demostración, la cual consiste en probar las dos inclusiones que definen la igualdad

1º) $A \subset B$. En efecto: sea $x \in A$.

Se tiene $x \in A \Rightarrow x$ es impar $\Rightarrow x = 2k - 1$ con $k \in N \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 4k^2 - 4k + 1$ con $k \in N \Rightarrow x^2 = 2 \cdot (2k^2 - 2k) + 2 - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 2 \cdot (2k^2 - 2k + 1) - 1 \Rightarrow x^2 = 2 \cdot k' - 1$ siendo $k' \in N \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2$ es impar $\Rightarrow x \in B$

Hemos utilizado sucesivamente, la definición de A, la definición de número impar, cuadrado de un binomio, la distributividad de la multiplicación, la sustitución de 1 por $(2 - 1)$, nuevamente la distributividad, la definición de número impar, y finalmente la definición de B.

2º) $B \subset A$. Es claro que $x = x \cdot (x + 1) - x^2$.

Ahora bien

$$x \in B \Rightarrow x^2 \text{ es impar} \Rightarrow x \cdot (x + 1) - x^2 \text{ es impar} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \text{ es impar} \Rightarrow x \in A$$

En consecuencia $A = B$.

2.3.4. Propiedades de la inclusión

i) REFLEXIVIDAD. Todo conjunto es parte de sí mismo.

En efecto, si A es un conjunto, la implicación

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in A \quad \text{es} \quad V$$

En consecuencia, por definición, se tiene $A \subset A$.

ii) TRANSITIVIDAD. Si un conjunto es parte de otro y éste es parte de un tercero, entonces el primero está incluido en el tercero

Hipótesis) $A \subset B$ Tesis) $A \subset C$
$B \subset C$

Demostración)

Sea $x \in A$. Por hipótesis se tiene

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$
$$\text{y} \quad x \in B \Rightarrow x \in C$$

Ya que todo triángulo equilátero tiene los tres lados iguales, en consecuencia tiene dos iguales, es decir, es isósceles. Además existen triángulos isósceles que son rectángulos, pero ningún triángulo equilátero es rectángulo.

2.3.3. Igualdad de conjuntos

Es claro que dos conjuntos son iguales si son idénticos, es decir, si tienen los mismos elementos. Entonces, todo elemento del primero pertenece al segundo, y todo elemento de éste pertenece al primero.

Definición

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

Ejemplo 2-6.

Los conjuntos de números reales

$$A = \{ x / x^2 = x \}$$
$$B = \{ x / (x - 1) . x = 0 \}$$

son iguales ya que

$$x \in A \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x . (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in B$$

El bicondicional se desdobla en las dos implicaciones que prueban la doble inclusión, y en consecuencia la igualdad.

Ejemplo 2-7.

Sean los conjuntos de números enteros

$$A = \{ x / x^2 = 1 \}$$
$$B = \{ x / |x| = 1 \}$$

Teniendo en cuenta que el cuadrado de un número entero es igual al cuadrado de su valor absoluto, resulta

$$x \in A \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x|^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x \in B$$

En consecuencia, A = B.

Ejemplo 2-8.

Demostrar que el conjunto de los números naturales impares es igual al conjunto de los números naturales cuyo cuadrado es impar.

Hipótesis) $A = \{ x \in \mathbf{N} / x \text{ es impar} \}$ Tesis) $A = B$

$B = \{ x \in \mathbf{N} / x^2 \text{ es impar} \}$

Demostración)

Entonces, por ley del silogismo hipotético

$$x \in A \Rightarrow x \in C$$

Y, en consecuencia, por definición de inclusión $A \subset C$.

iii) ANTISIMETRIA. Si un conjunto es parte de otro y éste es parte del primero, entonces son iguales.

$$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$$

es una consecuencia de la definición de igualdad.

2.3.5. Caracterización del conjunto vacío

i) **Propiedad.** El conjunto vacío está incluido en cualquier otro.

Hipótesis) A es un conjunto.

Tesis) $\phi \subset A$.

Demostración) Consideramos la siguiente proposición:

$$\forall x : x \in \phi \Rightarrow x \in A$$

la cual es V por ser el antecedente F. En consecuencia, de acuerdo con la definición de inclusión, se tiene $\phi \subset A$.

Nota:

El teorema es válido cualquiera que sea A; en particular, A puede ser vacío.

ii) **Propiedad.** El conjunto vacío es único.

En efecto, suponemos que, además de ϕ, existe ϕ' también vacío. Entonces, de acuerdo con i), es verdadera la proposición

$$\phi' \subset \phi \wedge \phi \subset \phi'$$

y, por definición de igualdad, resulta $\phi' = \phi$

Ejemplo 2-9.

Demostrar $A \subset \phi \Rightarrow A = \phi$.

Como se trata de una igualdad se requieren dos inclusiones.

1º) $\phi \subset A$ por 2.3.5. i).

2º) $A \subset \phi$. Se verifica por hipótesis.

Luego $A = \phi$.

2.4. CONJUNTO DE PARTES

Dado un conjunto A, podemos formar un nuevo conjunto constituido por todos los subconjuntos de A, el cual recibe el nombre de conjunto de partes de A.

TEORÍA DE CONJUNTOS

TRABAJO PRÁCTICO:

1. Escribe simbólicamente las afirmaciones siguientes:
   a) v pertenece al conjunto M
   b) El conjunto T contiene como subconjunto al conjunto H
   c) Entre los elementos del conjunto G no está el número 2
   d) El conjunto Z no es un subconjunto del conjunto A
   e) El conjunto X no contiene al conjunto K
   f) El conjunto H es un subconjunto propio del conjunto K

2. Completa las proposiciones siguientes con los símbolos $\in$ o $\notin$:
   2 ___ {1,3,5,7},
   5 ___ {2,4,5,6},
   3 ___ $\{x \in \mathbb{N} / 2 < x < 6\}$,
   2 ___ {4,5,6,7},
   8 ___ $\{x \in \mathbb{N} / 8 < x < 10\}$,
   0 ___ Ø,
   América ___ { x / x es el nombre de un país },
   $\frac{12}{8}$ ___ $\mathbb{N}$.

3. Definir por extensión cada uno de los siguientes conjuntos:
   a) $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 4\}$
   c) $B = \{x \in \mathbb{Z} / x - 2 = 5\}$
   e) $T = \{x / x \text{ es una cifra del número } 2324\}$
   b) $C = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es positivo y negativo}\}$
   d) $R = \{x \in \mathbb{Z}\, x^2 = 9\}$
   f) $Q = \{x / x \text{ es una letra de la palabra calcular}\}$
   g) $\{x / x \text{ es una letra de la palabra CORRECTO}\}$

4. Sea $T = \{x \in \mathbb{Z} / 4x = 12\}$. ¿Es $T = 3$? ¿Por qué?

5. De entre los siguientes conjuntos, señala los que son el conjunto vacío:
   $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0\}$
   $B = \{x \in \mathbb{R} / x < 4 \vee x > 6\}$
   $C = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 1 = 0\}$
   $D = \{x \in \mathbb{R} / x + 5 = 5\}$
   $E = \{x \in \mathbb{R} / x < 4 \wedge x > 6\}$
   $F = \{x \in \mathbb{R} / x > 4 \wedge x \text{ no es mayor que } 6\}$

6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos, unitarios, finitos o infinitos?
   a) A = { x / x es día de la semana}
   b) B = { vocales de la palabra vals}
   c) C = { 1, 3, 5, 7, 9, ...}
   d) D = { x / x es un habitante de la luna}
   e) E = { $x \in \mathbb{N}$ / x < 15}
   f) F = { $x \in \mathbb{N}$ / 5 < x < 5 }
   g) G = { $x \in \mathbb{N}$ / x > 15}
   h) H = { $x \in \mathbb{N}$ / 3x = 6}
   i) I = { x / x es presidente del Mar Mediterráneo}
   j) J = { x / x es el número de pelos de todos los eslovacos que viven actualmente}

7. Sea M= $\{r, s, t\}$. Dígase cuáles de las afirmaciones siguientes son correcta. Si alguna es incorrecta, decir el por qué:
   a) $a \in M$, b) $r \subset M$, c) $\{r\} \in M$, d) $\{r\} \subset M$

8. Si $E = \{1, 0\}$, razona cuáles de las afirmaciones siguientes son correctas y cuáles no:
   a) $\{0\} \in E$, b) $\varnothing \in E$, c) $\{0\} \subset E$, d) $0 \in E$ y e) $0 \subset E$.

9. Consideremos el conjunto $A = \{r, s, m, e\}$. Razona la veracidad de las siguientes afirmaciones:
   a) $c \in A$,
   b) $\{r, c, m\} \subset A$,
   c) $\{m\} \subset A$,
   d) $\{e, m, r\} \subset A$
   e) $\{s, e\} \in A$
   f) $\{s, e\} \subset A$

10. En el conjunto de las figuras geométricas del plano se consideran los conjuntos:
   $C = \{x / x \text{ es un cuadrilátero}\}$, $M = \{x / x \text{ es un rombo}\}$, $R = \{x / x \text{ es un rectángulo}\}$, $Q = \{x / x \text{ es un cuadrado}\}$. Decir qué conjuntos son subconjuntos propios de los otros.

TEORÍA DE CONJUNTOS

11. Justifica razonadamente que el conjunto $A=\{2,3,4,5\}$ no es un subconjunto del $C=\{x\in\mathbb{N}/\, x \text{ es par}\}$.

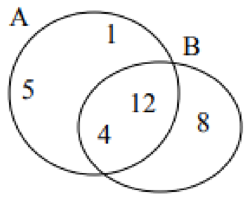
12. Sean los conjuntos:
$V=\{d\}$, $W=\{c,d\}$, $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{a,b\}$ y $Z=\{a,b,d\}$. Establece la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando en cada caso tu respuesta:
a) $Y\subset X$, c) $W\neq Z$, e) $V\not\subset Y$, g) $V\subset X$, i) $X=W$ y
b) $W\not\supset V$, d) $Z\supset V$, f) $Z\not\supset X$, h) $Y\not\subset Z$, j) $W\subset Y$

13. a) ¿Es el conjunto $A=\{1,3,5,7\}$ un subconjunto del conjunto $B=\{x\in\mathbb{Z}/\, x=2n,\, n\in\mathbb{Z}\}$? ¿Y del $C=\{x\in\mathbb{N}/\, x=2n+1,\, n\in\mathbb{N}\}$? ¿Por qué?
b) ¿Y $D=\{2,4,6,7,8\}$ es subconjunto de alguno de los conjuntos A o B del apartado anterior? ¿Por qué?

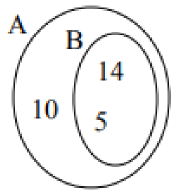
14. Escribe todos los posibles subconjuntos del conjunto y clasifícalos según sean propios o impropios:
a) M= $\{r,s,t\}$, b) $B=\{a,b\}$, c) $C=\{a\}$, d) $\varnothing$.

15. Teniendo en cuenta los siguientes diagramas de Venn, expresa por extensión y por comprensión los conjuntos A y B y compáralos según la relación de inclusión:

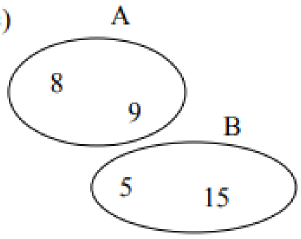
a)



b)



c)



⊛2.4. CONJUNTO DE PARTES

Dado un conjunto A, podemos formar un nuevo conjunto constituido por todos los subconjuntos de A, el cual recibe el nombre de conjunto de partes de A.

Definición

Conjunto de partes de A es el conjunto cuyos elementos son todos subconjuntos de A.

$$P(A) = \{ X / X \subset A \}$$

Los elementos de este conjunto son a su vez conjuntos, y, en consecuencia, $P(A)$ es un conjunto de conjuntos.

De acuerdo con la definición, se tiene

$$X \in P(A) \Leftrightarrow X \subset A$$

El problema de decidir si un objeto es un elemento de $P(A)$ se reduce a determinar si dicho objeto es un subconjunto de A.

De acuerdo con la propiedad reflexiva de la inclusión, cualquiera que sea A, se tiene $A \subset A$, y en consecuencia $A \in P(A)$ por definición de conjunto de partes.

Además, por 2.3.5. i) se sabe que $\phi \subset A$, y por la misma definición $\phi \in P(A)$. Es decir, cualquiera que sea A, el mismo A y el vacío son elementos de $P(A)$.

Ejemplo 2-10.

Determinar el conjunto de partes de $A = \{2, 3, 4\}$

Los elementos de $P(A)$ son todos los subconjuntos de A, es decir

$$\begin{array}{l} \phi \\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\} \\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{3,4\} \\ A \end{array}$$

Y la notación por extensión es

$$P(A) = \{ \phi, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, A \}$$

Ejemplo 2-11.

i) El conjunto de partes del vacío es el conjunto cuyo único elemento es el vacío.

$$P(\phi) = \{ \phi \}$$

ii) La pertenencia relaciona elemento a conjunto, mientras que la inclusión relaciona conjuntos entre sí. Desde este punto de vista, damos los valores de verdad de las siguientes proposiciones relativas al ejemplo 2-10.

$$\begin{array}{ll} \phi \subset A & V \\ \phi \in A & F \\ \phi \in P(A) & V \end{array}$$

2.5. COMPLEMENTACION DE CONJUNTOS

Sean A y B subconjuntos de U.

2.5.1. Definición

Complemento de A es el conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A.

El complemento de A se denotará por A^c; suelen usarse también A' y $\overline{A}$.

En símbolos

$$A^c = \left\{ x \in U \,/\, x \notin A \right\}$$

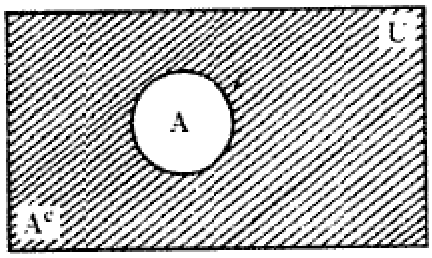
o bien

$$A^c = \left\{ x \,/\, x \notin A \right\}$$

Se tiere

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$$

El diagrama de Venr correspondiente es



La complementación es una operación unitaria, en el sentido de que a partir de un conjunto se obtiene otro.

Es usual también obtener el complemento de un conjunto A, respecto de otro B, en cuyo caso la definición es

$$\mathbf{C_B} A = \left\{ x \in B \,/\, x \notin A \right\}$$

En particular se tiene

i) El complementario del vacío es el universal.

$$x \in U \Rightarrow x \notin \phi \Rightarrow x \in \phi^c$$

O sea $U \subset \phi^c$

Y como $\phi^c \subset U$, resulta $\phi^c = U$

ii) El complementario del universal es el vacío.

$$U^c = \left\{ x \,/\, x \in U \;\wedge\; x \notin U \right\} = \phi$$

2.5.2. Propiedades de la complementación

I) INVCLUCION. $(A^c)^c = A$

Demostración)

$$x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow \sim (x \in A^c) \Leftrightarrow \sim (x \notin A) \Leftrightarrow x \in A$$

En esta demostración hemos utilizado la definición de complemento y la ley involutiva del cálculo proposicional.

II) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$

Demostración) Utilizando sucesivamente las definiciones de complemento, de inclusión y de complemento, se tiene

$$x \in B^c \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A^c$$

Luego

$$B^c \subset A^c$$

Ejemplo 2-13.

Demostrar $A = B \Rightarrow A^c = B^c$

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \notin B \Leftrightarrow x \in B^c$$

En virtud de las definiciones de complemento, igualdad y complemento.

Ejemplo 2-14.

i) Si r es una recta incluida en el plano α, entonces su complemento es el par de semiplanos opuestos abiertos, de borde r.

ii) El complementario del conjunto de los números naturales pares es el conjunto de los naturales impares.

iii) El complementario de **Q** en **R** es el conjunto de los números irracionales.

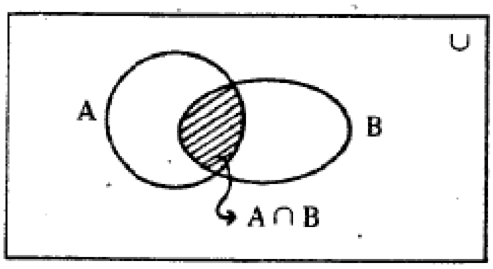
2.6. INTERSECCION DE CONJUNTOS

Sean A y B subconjuntos de U.

2.6.1. Definición

Intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.

El diagrama de Venn correspondiente es



En símbolos se tiene

$$A \cap B = \{x \in U \,/\, x \in A \;\wedge\; x \in B\}$$

O bien, sobrentendido U .

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \;\wedge\; x \in B\}$$

La intersección entre conjuntos es una operación binaria, porque a partir de dos conjuntos se obtiene un tercero

La propiedad que caracteriza a los elementos de la intersección es la de pertenecer simultáneamente a los dos conjuntos, y se establece en términos de una conjunción

La definición de intersección establece

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \;\wedge\; x \in B$$

Si la intersección de dos conjuntos es vacía, dichos conjuntos se llaman disjuntos.

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \phi$$

2.6.2. Propiedades de la intersección

I) IDEMPOTENCIA: $A \cap A = A$.

En efecto

$$x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A \;\wedge\; x \in A \Leftrightarrow x \in A$$

II) ASOCIATIVIDAD: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Utilizando la definición de intersección, y la asociatividad de la conjunción, se tiene

$$x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap B \;\wedge\; x \in C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \;\wedge\; x \in B) \;\wedge\; x \in C \Leftrightarrow x \in A \;\wedge\; (x \in B \;\wedge\; x \in C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in A \;\wedge\; x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$$

III) CONMUTATIVIDAD: $A \cap B = B \cap A$.

La demostración es obvia aplicando la definición de intersección y la conmutatividad de la conjunción.

IV) ELEMENTO NEUTRO PARA LA INTERSECCION ES EL UNIVERSAL.

La intersección opera sobre elementos de P (U), es decir, sobre subconjuntos de U. Interesa determinar si existe un subconjunto de U cuya intersección con cualquier otro no lo altere. Tal elemento de P(U) se llama neutro para la intersección, y en nuestro caso es el mismo U. En efecto

cualquiera que sea $A \subset U$, se verifica $A \cap U = U \cap A = A$

2.7. UNION DE CONJUNTOS

2.7.1. Definición

Unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B.

Simbólicamente se indica

$$A \cup B = \left\{ x \in U \,/\, x \in A \ \vee \ x \in B \right\}$$

Prescindiendo del universal

$$A \cup B = \left\{ x \,/\, x \in A \ \vee \ x \in B \right\}$$

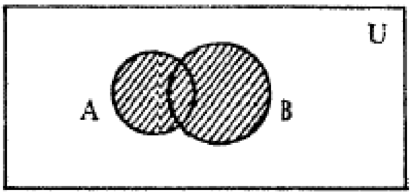
La unión de conjuntos, lo mismo que la intersección, es una operación binaria definida en el conjunto de partes de U.

De acuerdo con la definición, podemos escribir

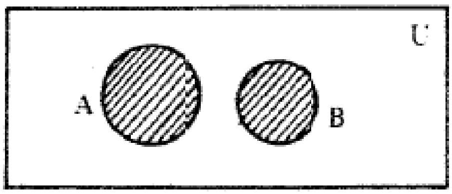
$$a \in A \cup B \Rightarrow a \in A \ \vee \ a \in B$$

El "o" utilizado es incluyente, y pertenecen a la unión aquellos elementos de U para los cuales es verdadera la disyunción; entonces un elemento pertenece a la unión si y sólo si pertenece a alguno de los dos conjuntos.

El diagrama correspondiente es



A la unión pertenecen todos los elementos de los conjuntos dados. En el caso disjunto se tiene



donde la parte sombreada es $A \cup B$.

Es claro que todo conjunto está contenido en su unión con cualquier otro. En efecto

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

en virtud de la ley lógica $p \Rightarrow p \vee q$, y de la definición de unión. Entonces

$$A \subset A \cup B$$ como queríamos.

Ejemplo 2-19.

i) La unión de un par de rectas r y r' contenidas en un plano es el par de rectas.

ii) La unión de dos semiplanos opuestos y cerrados es el plano.

iii) Sean los puntos A, B y C, como en el ejemplo 2-15. iii). Se tiene

$$S(B, A) \cup S(B, C) = r$$
$$S(A, B) \cup S(B, C) = S(A, B)$$

2.7.2. Propiedades de la unión

I) IDEMPOTENCIA. Cualquiera que sea A, se verifica

$$A \cup A = A$$

Pues $$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A$$

por definición de unión, y la ley lógica $p \vee p \Leftrightarrow p$.

II) ASOCIATIVIDAD. Cualesquiera que sean A, B y C

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

La demostración es análoga a la propuesta en el caso de la asociatividad de la intersección, utilizando ahora la definición de unión y propiedades de la disyunción.

III) CONMUTATIVIDAD. Para todo par de subconjuntos de U, se verifica

$$A \cup B = B \cup A$$

pues $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \;\vee\; x \in B \Leftrightarrow x \in B \;\vee\; x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$

IV) ELEMENTO NEUTRO PARA LA UNION ES EL CONJUNTO VACIO.
Es decir, cualquiera que sea $A \subset U$, se tiene

$$A \cup \phi = \phi \cup A = A$$

Tratamos sólo el caso $A \cup \phi = A$, ya que la conmutatividad nos exime de la otra situación.

Sabemos por 2.7.1. que $A \subset A \cup \phi$ (1)

Sea ahora $x \in A \cup \phi \Rightarrow x \in A \;\vee\; x \in \phi \Rightarrow x \in A$

por definición de unión, y por ser falso $x \in \phi$.

Luego $A \cup \phi \subset A$ (2)

Por (1) y (2) resulta la igualdad propuesta.

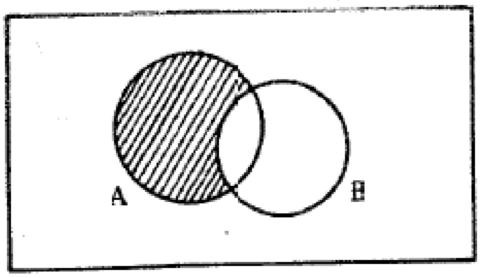
2.10. DIFERENCIA DE CONJUNTOS

2.10.1. Definición

Diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

$$A - B = \left\{ x \,/\, x \in A \;\wedge\; x \notin B \right\}$$

El diagrama correspondiente es



Es claro que $A - B \neq B - A$: es decir, la diferencia de conjuntos no es conmutativa.

2.11. DIFERENCIA SIMETRICA

Sean A y B dos subconjuntos de U.

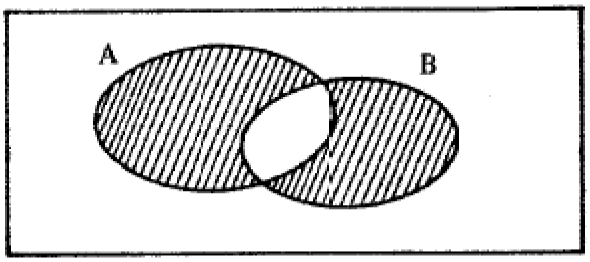
2.11.1. Definición

Diferencia simétrica de los conjuntos A y B es la unión de los conjuntos A − B y B − A.

La notación es

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) \qquad (1)$$

y el diagrama correspondiente



Otra identificación de la diferencia simétrica es

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \qquad (2)$$

que se deduce como consecuencia inmediata de la definición, teniendo en cuenta que la diferencia entre dos conjuntos es igual a la intersección del primero con el complemento del segundo, según 2.10.2.

Resulta también

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) \qquad (3)$$

Propiedades entre conjuntos

PROPIEDAD:	UNIÓN	INTERSECCIÓN
ASOCIATIVIDAD	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
CONMUTATIVIDAD	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
IDEMPOTENCIA	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
ABSORVENCIA	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
DISTRIBUTIVIDAD	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap A)$
NEUTRALIDAD	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap U = A$
COMPLEMENTO	$A \cup A^c = U$	$A \cap A^c = \emptyset$
LEY DE MORGAN	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

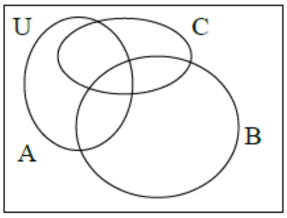
Operaciones con conjuntos

25. Consideremos $U=\{a,b,c,d,e\}$ como conjunto universal y los subconjuntos $A=\{a,b,d\}$, $B=\{b,d,e\}$ y $C=\{a,b,e\}$. Halla:

$A\cup B$,	$A\cup(B\cup C)$	$A-B$,	$B\cap A'$,	U',	$(A\cup B)'$,
$A\cup C$,	$A\cap A$,	$(A')'$,	$A-A$,	$A\cup A'$,	$A'\cap B'$,
$B\cup C$,	$B\cap C$,	$C-A$,	A',	$A\cap A'$,	$(B-C)'$,
$B\cup B$,	$(A\cap B)\cap C$	$B-C$,	B',	$\emptyset'$,	$A\cup B'$,
$A\cap B$,	$A\cap(B\cap C)$	$B-A$,	$(A\cap C)'$,	$A'\cup C'$,	$B'-A'$

26. Idem al anterior, para $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ como conjunto universal y $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{a,c,e,g\}$ y $C=\{b,e,f,g\}$.

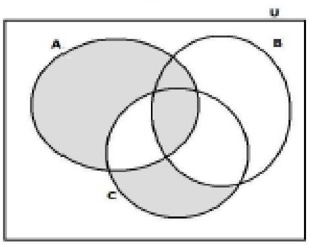
27. Representa en el diagrama de Venn dado al margen los siguientes conjuntos:



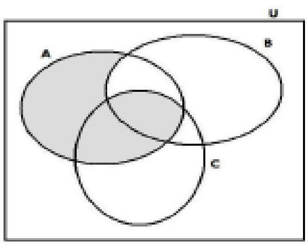
$A\cup B$,	$A-B$,	U',
$A\cup C$,	$(A')'$,	$A\cup A'$,
$B\cup C$,	$C-A$,	$A\cap A'$,
$B\cup B$,	$B-C$,	$\emptyset'$,
$A\cap B$,	$B-A$,	$A'\cup C'$,
$A\cap A$,	$B\cap A'$,	$(A\cup B)'$,
$B\cap C$,	$A-A$,	$A'\cap B'$,
$(A\cap B)\cap C$,	A',	$(B-C)'$,
$A\cap(B\cap C)$,	B',	$A\cup B'$,
	$(A\cap C)'$,	$B'-A'$

28. Escibe la expresión que corresponde al conjunto marcado en gris en el diagrama de la derecha.

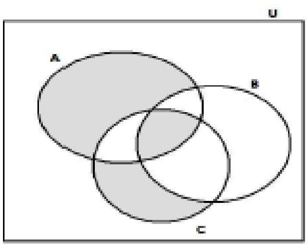
a)



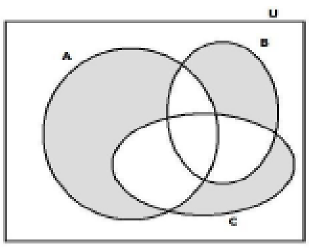
b)



c)



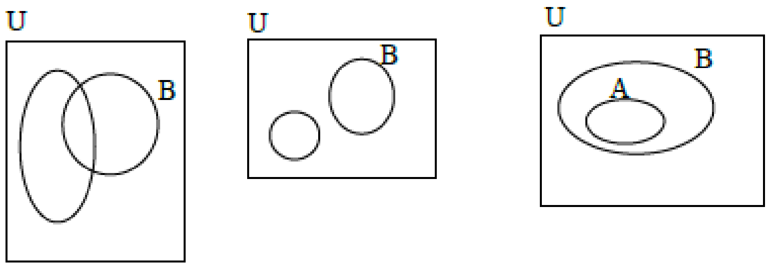
d)



TEORÍA DE CONJUNTOS

30. Representa, en cada uno de los diagramas de Venn dados, los siguientes conjuntos:

$A\cup B$,	$A-B$,	$A'\cap B'$,	A',	$A\cup B'$,
$B\cup B$,	$(A')'$,	$(A\cap B)'$,	B',	$B'-A'$
$A\cap B$,	$B\cap A'$,	$A'\cup B'$,	U',	$A\cup(B\cap A)$,
$A\cap A$,	$(A\cup B)'$	$A-A$,	$A\cup A'$,	$B\cap(A\cup B)$.
$B-A$,			$A\cap A'$,	



31. Si U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} es el conjunto universal y A = {1, 4, 7, 10}, B = {1, 2, 3, 4, 5}, C = {2, 4, 6, 8}, define por extensión los siguientes conjuntos:

a) A ∪ B,
b) A − B,
c) A',
d) U',
e) B ∩ U
f) B' ∩ (C − A)
g) $(A\cap B)'$ ∪ C
h) B ∩ C
i) A ∪ ∅
j) A ∩ (B ∪ C)
k) (A ∩ B) ∪ C
l) A ∩ B) − C
m) (A ∪ B) − (C − B)

32. Sea U = {1, 2, 3, 4, 5, . . . , 12} el conjunto universal. Consideremos los subconjuntos, A = {1, 3, 5, 7, 9, 11}, B = {2, 3, 5, 7, 11}, D = {2, 4, 8} y C = {2, 3, 6, 12}. Determina los conjuntos:

a) A ∪ B
b) A ∩ C
c) (A ∪ B) ∩ C'
d) A − B
e) C − D
f) (B − D) ∪ (D − B)

33. a) ¿Conoces algún conjunto que sea subconjunto de su complementario? b) ¿Existe algún conjunto que sea disjunto consigomismo?

34. Sean $A=\{x\in\mathbb{R}/-2<x\leqslant 10\}$ y $B=\{x\in\mathbb{R}/x>1\}$ Expresa dichos conjuntos mediante intervalos y calcula la unión, la intersección y la diferencia de uno con el otro. Calcula, además, los complementario y comprueba que se cumplen las leyes de De Morgan.

35. Se consideran los conjuntos A = (– 7, 3), B = [– 2, 5), C = (– 4, 9] y D = [– 1,8]. Expresa cada intervalo por comprensión y calcula $A\cup B$, $A'\cap B$, $(B\cup C)\cap D$, $(B-A)\cup(C-D)$, $(A-B)'$ y $(B-A)'$.