MATRICES

La familia García quiere hacer una estimación de sus gastos semanales en alimentación. Para ello realiza una tabla con los productos principales de la canasta familiar que se consumen diariamente, y las cantidades aproximadas:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Carne (en kgs)	0	2	3	1	0	2	4
Verduras y frutas (en kgs)	4	3	2	2	5	3	2
Pastas (en kgs)	1	2	0	3	0	2	0
Lácteos (en litros)	3	4	4	2	3	3	1

Si eliminamos los encabezados, queda este arreglo de núme 4 filas y 7 columnas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

llamado *matriz*.

> ***Definición:*** Una ***matriz*** es un arreglo rectangular de números, los cuales se llaman *entradas* o *elementos* de la matriz.

El **tamaño de una matriz** se describe mediante el número de renglones y de columnas que tiene, en ese orden. La matriz del ejemplo tiene 5 renglones y 7 columnas, de modo que su tamaño se escribe: 5 x 7.

Una matriz de tamaño $mx1$, es decir que tiene una sola columna, se llama *matriz columna*, y una de tamaño $1xn$, o sea con un solo renglón, se llama *matriz renglón* o *matriz fila* (siendo m y n números naturales).

Las matrices se nombran con letras mayúsculas, y sus entradas numéricas con letras minúsculas. En general, la letra que denota una matriz es la letra que denota sus elementos, y se usa una notación de subíndice doble para hacer referencia a la posición de un determinado elemento, indicando primero el número de renglón que ocupa y segundo, el número de columna. Así, para una matriz A, en general se usará a_{ij} para denotar el elemento de la fila i y la columna j, aunque muchas veces es conveniente la notación $\langle A\rangle_{ij}$ para el mismo.

Si llamamos B a la matriz del ejemplo anterior, la entrada que está en el segundo renglón y primera columna es 4, y escribimos: $b_{21} = \langle B\rangle_{21} = 4$.

Con esta notación, una matriz A de tamaño mxn se representa en forma general:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Y un elemento genérico de la fila i y de la columna j, como $\langle A\rangle_{ij}$ o a_{ij}.

Si nombramos $A_{.1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, A_{.2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots\dots, A_{.n} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$, a los vectores columna de A,

(entendiéndose que para cada columna $A_{.k}$, en el doble subíndice "$.\boldsymbol{k}$" el punto expresa todas las filas pero manteniendo la columna en la posición k constante, con $k = 1, \dots, n$.) podemos representar a la matriz como:

$$A = [A_{.1} \quad A_{.2} \quad \cdots \quad A_{.n}]$$

Análogamente se pueden escribir las filas:

$A_{1.} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}], A_{2.} = [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}], \dots\dots\dots, A_{m.} = [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}]$

y la matriz quedaría escrita: $A = \begin{bmatrix} A_{1.} \\ A_{2.} \\ \vdots \\ A_{m.} \end{bmatrix}$.

Cuando el número de renglones es igual al de columnas ($m = n$), la matriz es *cuadrada de orden* n. En ese caso las entradas $a_{11} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{nn}$ se llaman *entradas diagonales* y se encuentran en la *diagonal principal*.

- Una matriz cuadrada cuyas entradas no diagonales son todas 0 se llama n *diagonal*.

- Una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son todas iguales se llama *matriz escalar*.
- Una matriz escalar cuyas entradas diagonales son todas iguales a 1 se llama *matriz identidad*.
- Una matriz cuadrada cuyas entradas debajo de la diagonal son todas 0 se llama *matriz triangular superior*, y si son todas 0 las entradas de arriba de la diagonal, la matriz es *triangular inferior*.

Ejemplos:

❖ $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

A es una matriz diagonal de orden 2, B es una matriz escalar de orden 3, C es la matriz identidad de orden 2 y D es una matriz triangular inferior de orden 4.

Igualdad de matrices

***Definición*:** Si A es una matriz de tamaño mxn y B una matriz de rxs,

$$A = B \quad \text{si} \quad m = r,\; n = s \;\text{ y }\; \langle A \rangle_{\mathrm{ij}} = \langle B \rangle_{\mathrm{ij}} \quad \text{para todo } i \text{ y para todo } j.$$

Es decir, dos matrices son iguales si son del mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

Ejemplos:

❖ $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$. Si $\mathrm{a} = 3,\ \mathrm{b} = 4,\ \mathrm{c} = -1,\ \mathrm{d} = \mathrm{e} = 0,\ \mathrm{f} = 2$, $A = B$.

❖ $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}$, $D = [5 \quad 0{,}3]$. Aunque tienen los mismos elementos, $C \neq D$, pues no tienen el mismo tamaño.

Adición de matrices y Multiplicación de un escalar por una matriz

Generalizando a partir de la adición de vectores y la multiplicación de escalar por vector, para matrices definimos las mismas operaciones por componentes.

Definición: Si A y B son matrices de tamaño mxn, la suma de A y B es la matriz $A+B$ de tamaño mxn cuyos elementos son:

$$\langle A+B\rangle_{ij} = \langle A\rangle_{ij} + \langle B\rangle_{ij} \qquad \text{para todo } i=1,\dots,m \text{ y para todo } j=1,\dots,n.$$

Es decir, la suma de matrices está definida sólo para matrices de igual tamaño y el resultado es otra matriz del mismo tamaño cuyos elementos se obtienen sumando los elementos correspondientes.

Ejemplo:

❖ Si $A=\begin{bmatrix}2 & -6 & 5\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & -25\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$ sólo A y B se pueden sumar:

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & -6 & 5\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0 & -25\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+3 & -6+0 & 5-25\\ 3+4 & 0+2 & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -6 & -20\\ 7 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

Definición: Si A es una matriz de tamaño mxn y $c \in R$, la multiplicación del escalar c por la matriz A es la matriz cA de tamaño mxn cuyos elementos son:

$$\langle c\,A\rangle_{ij} = \text{c}\,\langle A\rangle_{ij} \qquad \text{para todo } i=1,\dots,m \text{ y para todo } j=1,\dots,n.$$

Ejemplos:

❖ Si $A=\begin{bmatrix}2 & -6 & 5\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$:

- $3A=\begin{bmatrix}3.2 & 3.(-6) & 3.5\\ 3.3 & 3.0 & 3.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -18 & 15\\ 9 & 0 & 3\end{bmatrix}$
- $-2C=\begin{bmatrix}-2.0 & -2.1\\ -2.2 & -2.(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -4 & 6\end{bmatrix}$

La matriz $(-1)A$ que se escribe $-A$ es la "opuesta de A". En el ejemplo:

$$-A=\begin{bmatrix}-2 & 6 & -5\\ -3 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Y al igual que ocurre con los números reales y con los vectores, podemos usar este hecho para definir la *diferencia* de dos matrices: Si A y B son matrices de igual tamaño, la diferencia $A-B$ es:

$$A - B = A + (-B)$$

Para las matrices del ejemplo anterior:

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & -25 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & 25 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 30 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz cuyos elementos son todos 0 se llama *matriz cero* o *matriz nula* y se denota como $\mathbf{0}$ o $\boldsymbol{N}$. Según el contexto se entenderá cuál es su tamaño. Es claro que $A + \mathbf{0} = A = \mathbf{0} + A$ para la matriz nula del mismo tamaño que A, y que $A - A = \mathbf{0} = -A + A$.

Propiedades de la suma de matrices y la multiplicación de escalar por matriz

Si A, B, C son matrices del mismo tamaño y c, d son escalares, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

I. $A + B = B + A$
II. $A + (B + C) = (A + B) + C$
III. Existe la matriz $\mathbf{0}$ llamada matriz nula del mismo tamaño que A, tal que $A + \mathbf{0} = A$, cualquiera sea la matriz A.
IV. Cualquiera sea la matriz A existe la matriz $-A$, tal que: $A + (-A) = \mathbf{0}$
V. $c(A + B) = cA + cB$
VI. $(c + d)A = cA + dA$
VII. $(c.d)A = c(dA)$
VIII. $1A = A$

Multiplicación de matrices

Definición: Si A es una matriz de tamaño mxn y B una matriz de tamaño nxr, el producto $A.B$ es otra matriz de tamaño mxr cuyo elemento ij es:

$$\langle A.B \rangle_{ij} = \langle A \rangle_{i1} \langle B \rangle_{1j} + \langle A \rangle_{i2} \langle B \rangle_{2j} + \cdots + \langle A \rangle_{in} \langle B \rangle_{nj}$$

para todo $i = 1, \dots, m$ y para todo $j = 1, \dots, r$.

Observemos los tamaños de ambas matrices: es requisito fundamental que para poder multiplicar $A.B$ *el número de* ***columnas de*** A *debe ser* ***igual*** *al número de* ***renglones de*** B. Y el tamaño de la matriz resultante es la cantidad de renglones de A por la cantidad de columnas de B.

$$\begin{array}{ccccc} A & . & B & = & A.B \\ m\times n & & n\times r & & m\times r \end{array}$$

Con respecto al cálculo de los elementos, vemos que para calcular el elemento ij de $A.B$ sólo hay que considerar el renglón i de A y la columna j de B, se multiplican los elementos correspondientes y se suman los resultados obtenidos.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

Vemos así que en la expresión $\langle A\,B\rangle_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ los subíndices exteriores son i y j en todos los términos, mientras que los subíndices interiores son iguales dentro de cada término y se van incrementando desde 1 hasta n.

Ejemplos:

❖ $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -6 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{4x3}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & 5 & -6 \\ -3 & 0 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}_{3x5}$

Podemos multiplicar $A\,B$ porque el número de columnas de A coincide con la cantidad de renglones de B (3), y en este caso el tamaño de $A.B$ será $4x5$. Calculemos por ejemplo los elementos del producto en las posiciones (2,1) y (4,4), es decir $\langle A\,.\,B\rangle_{21}$ y $\langle A\,.\,B\rangle_{44}$:

$$\langle A\,B\rangle_{21} = 1 \text{ x } 4 + 0 \text{ x } 5 + 4 \text{ x}(-3) = 4 - 12 = -8$$

$$\langle A\,B\rangle_{44} = -4 \text{ x } 2 + 2 \text{ x } 5 + 0 \text{ x } 8 = -8 + 10 = 2$$

Observemos que en este caso, si bien es posible realizar la multiplicación $A.B$, no es posible hacer $B.A$ ya que el número de columnas de B (5) no es igual al número de filas de A (4).

❖ $C = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

En este caso sólo es posible el producto $C\,D$:

$$C.D = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2x7 + (-6)x3 + 5x5 & 2x(-2) + (-6)x1 + 5x(-4) & 2x0 + (-6)x8 + 5x6 \\ 3x7 \ + \ 0x3 + \ 1x5 & 3x(-2) + \ 0x1 + \ 1x(-4) & 3x0 \ + \ 0x8 \ + 1x6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & -30 & -18 \\ 26 & -10 & 6 \end{bmatrix}$$

❖ Volvamos al ejemplo del principio, donde en una matriz aparecen las cantidades de elementos básicos que la familia consume cada día de la semana. Supongamos que se quiere saber cuánto dinero gastaría por día comprando todo en el negocio I o todo en el negocio II. Vamos a disponer en una matriz los precios de cada uno de los productos (en promedio, por kg y por litro) en cada uno de los negocios. Arriba y a la izquierda de la matriz colocamos lo que representan las filas (los dos negocios) y las columnas (los productos: C para "carne", V para "verduras y frutas", P para "pastas" y L para "lácteos"

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathrm{C} & \mathrm{V} & P & L \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} & \begin{bmatrix} 650 & 80 & 220 & 74 \\ 590 & 95 & 190 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

Supongamos que se quiere calcular cuánto gasta por día en cada negocio, para así determinar dónde conviene comprar cada día. Llamemos A a la matriz de las cantidades y B a esta última que contiene los precios. La multiplicación que nos puede brindar la información que se busca es $B.A$:

$$B.A = \begin{bmatrix} 650 & 80 & 220 & 74 \\ 590 & 95 & 190 & 60 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 762 & 2276 & 2406 & 1618 & 622 & 2202 & 2834 \\ 750 & 2085 & 2200 & 1470 & 655 & 2025 & 2610 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, la 7º columna de $B.A$ indica, que los domingos, en el negocio I gastaría \$2834 $(650.4 + 80.2 + 220.0 + 74.1 = 2834)$ mientras que en el II el gasto sería de \$2610 $(590.4 + 95.2 + 190.0 + 60.1 = 2610)$.

Producto de matrices como combinación lineal

Si A es una matriz de matriz de tamaño mxn y B es una matriz de $nx1$, podemos efectuar la multiplicación $A.B$. Esto es, la multiplicación de una matriz de tamaño mxn por una matriz columna y, su resultado da una combinación lineal de las columnas de A.

Es decir:

Si A es una matriz $m \times n$ y $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ es una matriz de tamaño $nx1$, entonces el producto $A.B$ está definido y viene dado por:

$$A.B = b_1 A_{.1} + b_2 A_{.2} + \cdots + b_n A_{.n},$$

donde $A_{.j}$ hace referencia a **la *j*-ésima columna** de matriz A.

Veamos esto en un ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 106 \end{bmatrix}$$

A esta matriz del resultado se llega mediante los siguientes cálculos:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ x } \mathbf{5} + 3 \text{ x } \mathbf{6} + 1 \text{ x } \mathbf{8} \\ 4 \text{ x } \mathbf{5} + 5 \text{ x } \mathbf{6} + 7 \text{ x } \mathbf{8} \end{bmatrix} = \mathbf{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \mathbf{6} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \mathbf{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

que es una *combinación lineal de las columnas de A,* y los coeficientes de esta combinación son justamente las entradas de la matriz columna B.

Ejemplo:

❖ $$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$A.X = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

De esta forma escribiremos más adelante los sistemas de ecuaciones lineales.

Propiedades de la multiplicación de matrices

Suponiendo que los tamaños de las matrices A, B y C son tales que las operaciones indicadas se pueden efectuar, y que c es un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

I. $A\,.(B.C) = (A\,.B)\,.C$
II. $A.(B + C) = A\,.B + A.C$
III. $(A + B).C = A.C + B\,C$
IV. $c\,(A.B) = (c\,A).B = A.(c\,B)$
V. $I_m.A = A.I_n = A$ si A es mxn

Definición: Si A es una matriz de tamaño mxn, *la traspuesta de* A es la matriz A^T de tamaño nxm cuyos elementos son: $\langle A^T \rangle_{ij} = \langle A \rangle_{ji}$

Es decir que los renglones de A^T son las columnas de A y las columnas de A^T son los renglones de A. Luego la i-ésima columna de A^T es el i–ésimo renglón de A para todo i.

Ejemplos:

- Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$
- Si $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $C^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

Definición: Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $A^T = A$, es decir, si es igual a su traspuesta.

Ejemplos:

- Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \\ -5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

A no es simétrica porque no es cuadrada

B no es simétrica porque $B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \neq B$

C es simétrica porque $C^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \\ -5 & 7 & 2 \end{bmatrix} = C$

A no es simétrica porque no es cuadrada

B no es simétrica porque $B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \neq B$

C es simétrica porque $C^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \\ -5 & 7 & 2 \end{bmatrix} = C$

Propiedades de la traspuesta de una matriz

Suponiendo que los tamaños de las matrices A y B son tales que las operaciones indicadas se pueden efectuar y, que c es un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

I. $(A^T)^T = A$

II. $(A + B)^T = A^T + B^T$

III. $(c\,A)^T = c\,(A^T)$

IV. $(A^r)^T = (A^T)^r$ para todo r entero no negativo

V. $(A\,B)^T = B^T\,A^T$