DETERMINANTES

Determinante de una matriz 2×2

Para establecer la definición general de un determinante de una matriz cuadrada $n\times n$ y sus propiedades, consideremos primero el caso especial 2×2. Para ello sea

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

definimos su *determinante*, $\det(A)$, como $\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

Observemos que por definición el determinante de una matriz 2×2 es un número real.

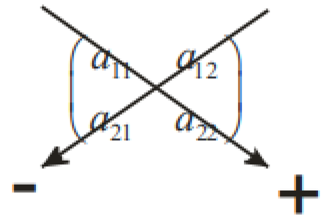
Por ejemplo: si $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces por definición

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2.1-(-2).3=2+6=8$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -4 & 5 \end{vmatrix}=1.5-(-4).\frac{3}{2}=5+6=11$$

$$\det(I)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1.1-0.0=1$$

Una manera de recordar la definición del determinante de matrices 2×2 es



Propiedades del determinante de una matriz 2×2

- Si las filas de la matriz son iguales entonces el determinante es cero.

- Si la matriz B se obtiene de la matriz A al intercambiar dos filas de A, entonces

$$\det(B)=-\det(A)$$

- Si la matriz B se obtiene de la matriz A al sumar a una de sus filas un múltiplo escalar de otra de sus filas, entonces

$$\det(B)=\det(A).$$

- Si la matriz B se obtiene de A al multiplicar una fila por un número real c, entonces $\det(B) = c\det(A)$.

- El determinante de A y de A^t son iguales, es decir
$$\det(A) = \det(A^t)$$

- El determinante del producto de dos matrices es el producto de sus determinantes, es decir
$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Determinante de una matriz 3×3

Utilizamos la definición del determinante de una matriz 2×2 para definir el de una matriz 3×3.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz 3×3, definimos el determinante desarrollado por la primera fila de A de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{0.2}$$

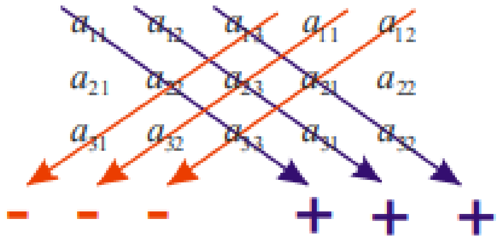
Por ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2((-1).(-2) - 2.5) - (2.(-2) + 3.0) + 3(1.5 - (-1).0) \\ &= 2(2-10) - (-4) + 3.5 = 2(-8) + 4 + 15 \\ &= 3 \end{aligned}$$

y

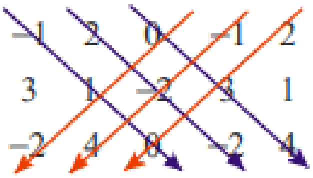
$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3((-2).4 - 1.0) - 5(0.4 - 1.0) - 7(0.0 - (-2).0) \\ &= 3.(-2).4 \\ &= -24 \end{aligned}$$

La formula anterior es más fácil de recordar si tenemos en cuenta el siguiente diagrama: se escribe la matriz y se repiten sus dos primeras columnas:

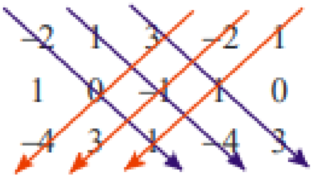


Luego, calculamos los seis productos siguiendo las flechas, poniendo signo menos antes de los productos con flechas hacia la izquierda, y sumando todos. Esta regla de cálculo de matrices es conocida como la Fórmula de Sarros.

Por ejemplo si $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ entonces



$$\det(A)=(-1).1.0+2.(-2).(-2)+0.3.4-2.3.0-(-1).(-2).4-0.1.(-2)$$
$$=0+8+0-0-8-0=8-8=0$$



$$\det(B)=(-2).0.1+1.(-1).(-4)+3.1.3-1.1.1-(-2)(-1).3-3.0.(-4)$$
$$=0+4+9-1-6-0=6$$

Determinante de una matriz $n\times n$

Si A es una matriz $n\times n$, como en el caso 3×3, definimos como el *menor* (i,j) de A, a la matriz M_{ij} de tamaño $(n-1)\times(n-1)$, que se obtiene de A al suprimir la fila i y la columna j.

El determinante de A desarrollado con respecto a la primera fila en términos de los determinantes de los menores (i,j) es

$$\det(A)=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}\det(M_{12})+\ldots+(-1)^{n+1}a_{1n}\det(M_{1n}) \tag{0.6}$$

Por ejemplo: Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces por (0.6) tenemos que

$$\det(A)=1.\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}-1.\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}+3.\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}-2.\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos a partir de la regla de Sarros los determinantes de los menores

- $$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}=(-1)(-1).0+0.1.4+(-2).0.2-0.0.0-(-1).1.2-(-2)(-1).4$$
  $$=0+0+0-0+2-4=-2$$

- $$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}=0.(-1).0+0.1.(-1)+(-2).3.2-0.3.0-0.1.2-(-2)(-1)(-1)$$
  $$=0+0-12-0-0+2=-10$$

- $$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}=0.0.0+(-1).1.(-1)+(-2).3.4-(-1).3.0-0.1.4-(-2).0.(-1)$$
  $$=0+1-24-0-0-0=-23$$

- $$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}=0.0.2+(-1)(-1)(-1)+(-2).3.4-(-1).3.2-0.(-1).4-0.0.(-1)$$
  $$=0-1+0+6-0-0=5$$

Por lo tanto, $\det(A)=1.(-2)-1.(-10)+3.(-23)-2.5=-2+10-69-10=-71$.

La formula general del determinante de una matriz A cuadrada $n\times n$ desarrollada con respecto a la fila i en términos de los determinantes de los menores (i,j) es

$$\det(A)=(-1)^{i+1}a_{i1}\det(M_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i2}\det(M_{i2})+\ldots+(-1)^{i+n}a_{in}\det(M_{in}) \qquad (0.7)$$

La fórmula (0.7) es muy útil. Por ejemplo si queremos calcular el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 3 & 11\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$, es conveniente desarrollar por la tercer fila pues tiene una mayor cantidad de elementos nulos

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{3+1}.0.\det(M_{31})+(-1)^{3+2}.0.\det(M_{32})+(-1)^{3+3}.(-2).\det(M_{33})\\ &=(-1)^{6}.(-2).\det(M_{33})=-2.\det\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=-2(1.3-(-2).0)\\ &=-2.1.3=-6\end{aligned}$$

Propiedades del determinante de matrices $n\times n$

Las propiedades del determinante de matrices $n\times n$ son análogas a las propiedades que enunciamos y demostramos para matrices 2×2.

- El determinante de A y de A^t son iguales, es decir
$$\det(A)=\det(A^t)$$
- Si la matriz B se obtiene de la matriz A al intercambiar dos filas de A, entonces
$$\det(B)=-\det(A)$$
- Si dos filas de la matriz A son iguales entonces
$$\det(A)=0$$
- Si una fila de A es nula entonces
$$\det(A)=0$$
- Si la matriz B se obtiene de A al multiplicar una fila por un número real *c*, entonces
$$\det(B)=c\det(A)$$
- Si la matriz B se obtiene de la matriz A al sumar a una de sus filas un múltiplo escalar de otra de sus filas, entonces
$$\det(B)=\det(A)$$
- El determinante del producto de dos matrices es el producto de sus determinantes, es decir
$$\det(AB)=\det(A)\det(B)$$

Estas propiedades son importantes, pues es posible deducir por medio de ellas el valor del determinante sin necesidad de calcularlo por definición. Para ejemplificarlo, hallemos los determinantes siguientes :

a. $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 0$ pues la tercera fila tiene todo sus elementos nulos.

b. $$\det\begin{pmatrix}1 & 5 & 8 & 2\\ 6 & -7 & 0 & -3\\ 3 & 10 & -1 & 2\\ 2 & 10 & 16 & 4\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 5 & 8 & 2\\ 6 & -7 & 0 & -3\\ 3 & 10 & -1 & 2\\ 2.1 & 2.5 & 2.8 & 2.2\end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix}1 & 5 & 8 & 2\\ 6 & -7 & 0 & -3\\ 3 & 10 & -1 & 2\\ 1 & 5 & 8 & 2\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{la fila 1}\\ \text{es igual a}\\ \text{la fila 4}}}{=} 2.0 = 0$$

c. $$\det\begin{pmatrix}3 & 1 & 7 & 2\\ 0 & -3 & 0 & 1\\ 8 & 5 & -1 & 2\\ -5 & -4 & 8 & 0\end{pmatrix} \underset{\text{fila 4} \to \text{fila 4+fila3}}{=} \det\begin{pmatrix}3 & 1 & 7 & 2\\ 0 & -3 & 0 & 1\\ 8 & 5 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 7 & 2\end{pmatrix} = 0$$

MATRICES INVERSIBLES

Una matriz $n \times n$ A es *inversible* si existe una matriz B tal que

$$AB = BA = I_n .$$

La matriz B se llama *matriz inversa* de A.

Por ejemplo: si $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ entonces

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } BA = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por esto, la matriz A es inversible y B es su inversa.

NO TODA MATRIZ ES INVERSIBLE

La matriz inversa es única, es decir, si B y C son matrices inversas de A, entonces $B = C$. Como $AB = CA = I$ tenemos que

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

Como consecuencia de este resultado ahora podemos hablar de <u>*la*</u> matriz inversa. Si A es una matriz inversible, denotaremos por A^{-1} a su inversa.

Propiedades de las matrices inversibles

Sean A y B dos matrices $n \times n$ inversibles y c es un escalar no nulo, entonces

- A^{-1} es inversible y $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- AB es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$
- $\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$
- Una matriz A es inversible sí y sólo sí $\det(A) \neq 0$
- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $ad - bc \neq 0$ entonces A es inversible y

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{0.8}$$

Dada una matriz A cuadrada $n \times n$ con $n \geq 3$ no es tan sencillo hallar una fórmula para su inversa del tipo de (0.8). El siguiente es un algoritmo eficaz para determinar si una matriz es inversible y calcular su inversa al mismo tiempo. Este consiste en reducir por fila la matriz A hacia la matriz identidad por operaciones elementales sobre las filas, y simultáneamente, aplicar estas operaciones a la matriz identidad para hallar la matriz A^{-1}.

Por ejemplo:

a. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ entonces procedemos de la siguiente manera

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\textit{fila } 2 \textit{ por fila } 2+(-3)\textit{ fila } 1]{\textit{reemplazar}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\textit{fila } 2 \textit{ por } (-1)\textit{ fila } 2]{\textit{reemplazar}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\textit{fila } 1 \textit{ por fila } 1+(-2)\textit{ fila } 2]{\textit{reemplazar}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Para saber si no hemos cometido errores tan sólo debemos efectuar el producto de AA^{-1} y comprobar que da la identidad.

b. Si $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$,aplicamos nuevamente el método anterior para invertirla.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{\text{fila 2 por } (-3) \text{ fila 1 + fila 2}\\ \text{fila 3 por } (-2) \text{ fila 1 + fila 3}}]{\text{reemplazamos}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -4 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -4 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{fila 2 por } \frac{1}{4} \text{ fila 2}]{\text{reemplazamos}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 5 & -4 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{fila 3 por } (-5) \text{ fila 1 + fila 3}]{\text{reemplazamos}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{fila 2 por fila 3 + fila 2}\\ \text{fila 1 por } (-2)\text{fila 3 + fila 1}}]{\text{reemplazamos}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{fila 1 por fila 2 + fila 1}]{\text{reemplazamos}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & 1\end{array}\right)$$

Por lo tanto la matriz B es inversible y su inversa es $B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1\\ 1 & -1 & 1\\ \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & 1\end{pmatrix}$

Generalmente no sabremos si la matriz dada es inversible. Si se intenta el procedimiento aplicado a los ejemplos anteriores sobre una matriz que no es inversible, en algún paso del cálculo, se presentará una fila de ceros en el lado izquierdo. Entonces se puede concluir que la matriz dada no es inversible y detener los cálculos.

c. Apliquemos el procedimiento a la matriz $C = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 9 \\ -4 & 16 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -12 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{fila 1 por } \frac{1}{6} \text{ fila 1}]{\text{reeplazamos}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{fila 2 por 4 fila 1 + fila 2}]{\text{reeplazamos}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

notemos que la segunda fila del lado izquierdo se ha anulado, por lo tanto la matriz C no es inversible.