Pasos para encontrar la inversa de una matriz manualmente

Recordad que si A es una matriz cuadrada de dimensión nxn y es **regular** (su determinante es distinto de 0), entonces existe una matriz llamada **matriz inversa** de A, A^{-1}, tal que

- A^{-1} es de dimensión nxn
- A^{-1} es el inverso multiplicativo de A por ambos lados, es decir,

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I_n} \\ \boldsymbol{A^{-1} \cdot A = I_n} \end{gathered}$$

siendo I_n la matriz identidad de dimensión nxn

- Su determinante es

$$\boldsymbol{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}$$

Inversa mediante Gauss

Dada una matriz A cuadrada de dimensión nxn y **regular**, definimos la matriz por bloques formada por la matriz A y la matriz I_n (matriz identidad de dimensión nxn):

$$\boldsymbol{G = (A|I_n)}$$

Por ejemplo, si A es dimensión 2x2,

$$\boldsymbol{G = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

Y si es de dimensión 3x3,

$$\boldsymbol{G = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

Para calcular la matriz inversa de A, se realizan operaciones elementales fila para conseguir la **forma escalonada reducida** de la matriz G.

Dicho en otras palabras, se realizan operaciones elementales filas hasta conseguir la matriz identidad en el bloque izquierdo de la matriz G, es decir,

$$(I_n|B)$$

Al terminar las operaciones, la matriz identidad que había en el lado derecho se ha transformado en otra matriz B. Esta matriz B es precisamente la matriz inversa de A.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Construimos la matriz por bloques:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para obtener la matriz identidad en el bloque izquierdo sólo tenemos que restarle a la fila 1 cuatro veces la fila 2:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\Big\downarrow F_1 - 4F_2$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

> Como ya tenemos la identidad en el bloque izquierdo, la matriz del bloque derecho es la inversa:
>
> $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos otro ejemplo:

Matriz 1

Calcular la inversa de A mediante Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Construimos la matriz por bloques:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

Restamos a la fila 2 el doble de la fila 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

Sumamos a la fila 1 el doble de la fila 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

Multiplicamos la fila 2 por -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

Ya hemos terminado porque tenemos la identidad en el lado izquierdo. Por tanto, la inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$