ACTIVIDAD DE ARTICULACIÓN E INTEGRACIÓN

Análisis Matemático I y Geometría Analítica

GUÍA DE PROBLEMAS

Profesores Responsables:

Dr. Pablo Ochoa – Mgter. Silvia Raichman

EQUIPOS DE CÁTEDRA

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Ing. Paula Acosta

Prof. Iris Gómez

Ing. Julián Martínez

Lic. Martín Matons

Mgter. Noemí Vega

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Ing. Florencia Codina

Prof. Liliana Collado

Mgter. Eduardo Totter

Ing. Daniel Videla

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Mendoza
Junio de 2016

Guía de problemas de articulación e integración
Análisis Matemático I-Geometría Analítica

La presente Guía contiene problemas asociados a las unidades temáticas 2, 3, 4 y 6 de la asignatura Análisis Matemático I (AMI) y a las unidades 3 y 4 de la asignatura Geometría Analítica (GA). La misma tiene por *objetivos*:

- Favorecer la integración, aplicación y transferencia de contenidos conceptuales y procedimentales entre las asignaturas AMI y GA.
- Promover la articulación de contenidos, favoreciendo los procesos comprensivos y reflexivos, en la etapa en la que el estudiante ya ha avanzado con los desarrollos de ambas asignaturas.
- Facilitar la resolución de problemas del análisis matemático y la geometría analítica.
- Estimular el aprendizaje basado en la resolución de problemas integrando saberes.
- Enriquecer la etapa de preparación de los exámenes finales de ambas asignaturas, con ejercitación integrada.

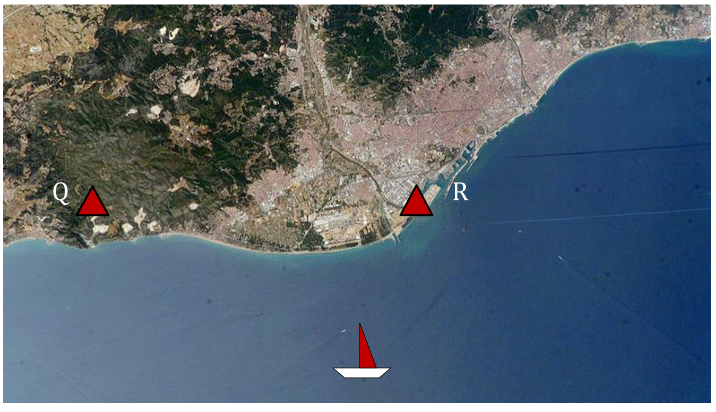
Se sugiere al estudiante, resolver los problemas en forma individual y luego cotejar sus respuestas con las disponibles al final de la Guía.

Problemas:

1- Se cuenta con un terreno de un ancho disponible de 80m para desarrollar la *cubierta parabólica* de un estadio polideportivo.
a) ¿Cuál es la ecuación de la cubierta si su altura central se proyecta de 30m?
b) ¿A qué distancia de los extremos es posible colocar una estructura de 10m de altura?
c) Indique ecuaciones paramétricas que permitan describir al arco y halle con las mismas la altura de un punto situado a 25m del centro.
d) Determine la longitud del arco parabólico que describe la cubierta.

2- Un *arco parabólico* tiene una altura máxima de 40 metros, desde la base del mismo.
a) Si la altura del arco medida a 20m de su eje de simetría es de 15m, seleccione un sistema de coordenadas apropiado, represente gráficamente el problema y determine la *ecuación general* correspondiente al arco dado.
b) ¿Cuál es la distancia a la que se encuentran los puntos extremos del arco sobre su base?
c) Indique *ecuaciones paramétricas* que permitan describir al arco dado.
d) Calcule la longitud del arco parabólico.

3- Un barco envía una señal de auxilio en el momento en el que se encuentra a 160 km de la costa. Dos estaciones guardacostas Q y R, ubicadas a 320 km de distancia entre sí, reciben la señal. A partir de la diferencia entre los tiempos de recepción de la señal, se determina que la nave se encuentra 260 km más cerca de la estación R que de la estación Q.

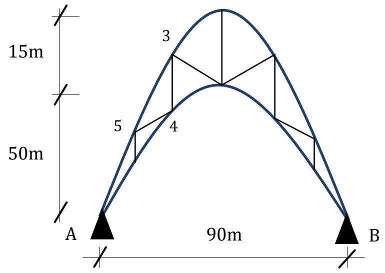


a) Elija un sistema de referencia apropiado e indique las coordenadas correspondientes a la ubicación de la embarcación.
b) Represente gráficamente.
c) Suponga que la embarcación sigue una trayectoria en la cual siempre se encuentra 260 km más cerca de la estación R que de la estación Q. Si la ordenada de la posición del barco varía a una tasa instantánea de 10 km/h cuando envía la señal de auxilio, determine la razón de cambio de la abscisa del barco en ese momento.

4- Se desea construir una cubierta de *generatriz parabólica* para un estadio deportivo que cubra un espacio circular de 120 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 36 m.
a) Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho estadio.
b) Determine la cantidad de material que necesita para construir la cubierta sabiendo que ésta debe tener un espesor promedio de 0.5 m.

5- Se desea construir una cubierta de *generatriz semielíptica* para un centro deportivo, que cubra un espacio circular de 140 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 40m.
a) Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho estadio.
b) Determine la cantidad de material que necesitará para construir la cubierta, sabiendo que ésta debe tener un espesor promedio de 0.6 m.

6- La estructura reticulada de la figura está formada por dos arcos parabólicos y posee una longitud entre los apoyos A y B de 90m. La altura máxima de ambos arcos es de 50m y 65m respectivamente. Los montantes verticales se encuentran a una distancia horizontal de 15m entre sí.
a) Seleccione un sistema de coordenadas apropiado y determine las ecuaciones de los arcos.
b) Calcule la longitud del montante 3-4 y de la diagonal 4-5.
c) Si se desea cubrir con una membrana metálica la estructura entre los arcos, ¿cuánto material necesitaría para hacerlo? Desprecie el espesor de la membrana.



Respuestas:

1. Se cuenta con un terreno de un ancho disponible de 80m para desarrollar la *cubierta parabólica* de un estadio polideportivo.
a) ¿Cuál es la ecuación de la cubierta si su altura central se proyecta de 30m?
b) ¿A qué distancia de los extremos es posible colocar una estructura de 10m de altura?
c) Indique ecuaciones paramétricas que permitan describir al arco y halle con las mismas la altura de un punto situado a 25m del centro.
d) Determine la longitud del arco parabólico que describe la cubierta.

a) Elegimos un sistema de coordenadas, tal como indica la Figura 1.

$x^2 = 2p(y-k)$

$x^2 = 2p(y-30)$

El punto Q pertenece a la parábola, por lo tanto:

$Q(40,0) \quad ; \quad 40^2 = 2p(0-30) \quad \therefore \quad p = -\dfrac{80}{3}m$

$$\boxed{x^2 = -\frac{160}{3}(y-30)}$$

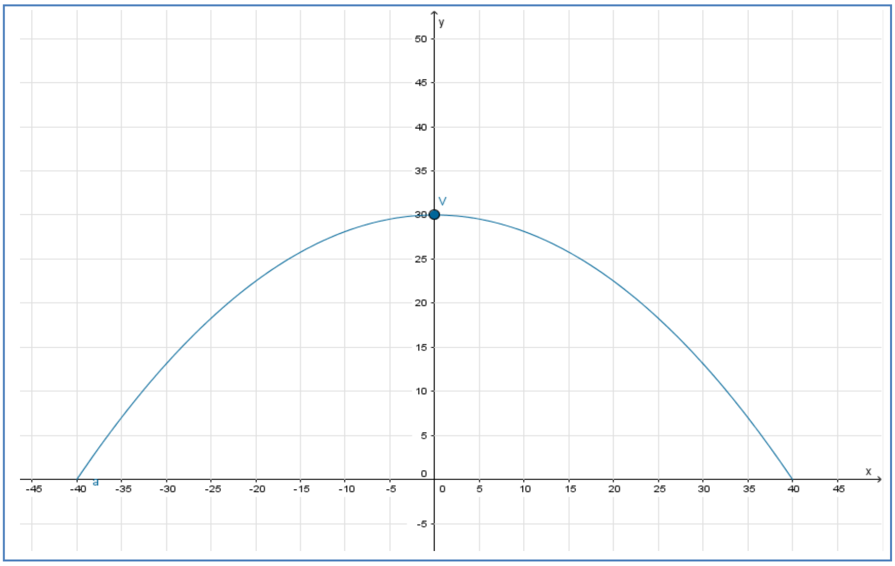


Figura 1.

b)

Si $y = 10$, $\quad x^2 = -\dfrac{160}{3}(10-30)$

$x^2 = -\dfrac{160}{3}(-20)$

$x_1 = 32.66m;\ x_2 = -32.66m$

$dist_{x1A} = (40-32.66)m = 7.34m \qquad \boxed{dist_{x1A} = 7.34m}$

c)

Si $x = t$

$t^2 = -\dfrac{160}{3}(y-30)$

$-\dfrac{3t^2}{160} = y - 30$

$$\therefore \quad \begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{3t^2}{160} + 30 \end{cases} \qquad t \in [-40,40]$$

Si $t = 25$

$y = -\dfrac{3\ 25^2}{160} + 30 \qquad \therefore \qquad B(25, 18.28)$

$\boxed{B(25, 18.28)}$

d) Usando la representación paramétrica obtenida en el inciso c), la longitud del arco parabólico viene dada por:

$$L=\int_{-40}^{40} \sqrt[2]{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt=\int_{-40}^{40} \sqrt[2]{1+\left(\frac{3t}{80}\right)^2}\, dt$$

Tomando u= 3t/80, se obtiene:

$$L=\frac{80}{3}\int_{-3/2}^{3/2} \sqrt[2]{1+u^2}\, du=\frac{80}{3}\left[\frac{1}{2}u\sqrt[2]{1+u^2}+\frac{1}{2}ln\left|\sqrt[2]{1+u^2}+u\right|\right]_{-3/2}^{3/2}\approx 104\ m.$$

---

2. Un *arco parabólico* tiene una altura máxima de 40 metros, desde la base del mismo.
a) Si la altura del arco medida a 20m de su eje de simetría es de 15m, seleccione un sistema de coordenadas apropiado, represente gráficamente el problema y determine la *ecuación general* correspondiente al arco dado.
b) ¿Cuál es la distancia a la que se encuentran los puntos extremos del arco sobre su base?
c) Indique *ecuaciones paramétricas* que permitan describir al arco dado.
d) Calcule la longitud del arco parabólico.

---

a)

Elegimos un sistema de coordenadas, tal como indica la Figura 1.
V(0,40); Q(20, 15)

Forma de la ecuación del arco: $(x-h)^2=-2p(y-k)$

Para los datos dados: $x^2=-2p(y-40)$

Reemplazando el punto Q en la ecuación obtenemos:

$20^2=2p(15-40)$; por lo tanto: p=-8

Luego: $x^2=-16(y-40)$

$$\boxed{x^2+16y-640=0}$$

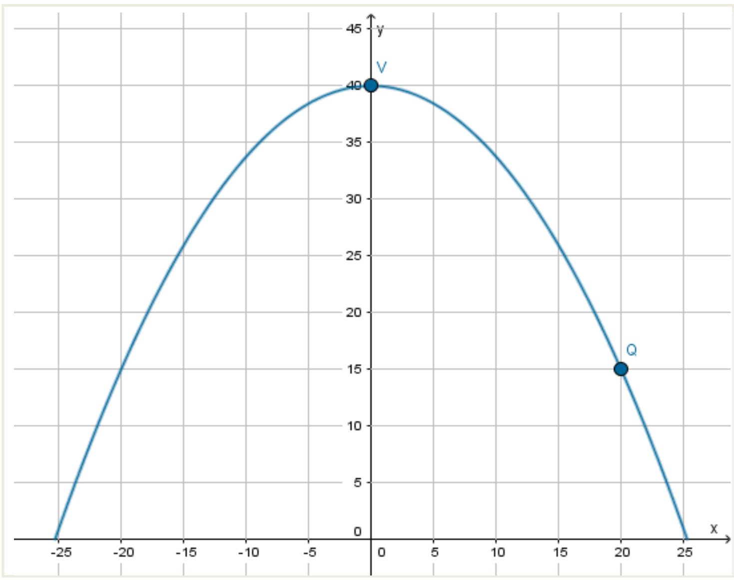


Figura 2.

b)

En los puntos solicitados: y=0
$x^2+0-640=0$
Luego
x_1=25.30m , x_2=-25.30m

La distancia entre ambos puntos será:

$$\boxed{d=50.60m}$$

c)

t=x

$t^2 = -16(y-40); \qquad y = 40 - \frac{t^2}{16}$

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 40 - \frac{t^2}{16} \end{cases} \quad t \in [-25.30, 25.30]}$$

d)) Usando la representación paramétrica obtenida en el inciso c), la longitud del arco parabólico viene dada por:

$$L=\int_{-25.3}^{25.3} \sqrt[2]{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{-25.3}^{25.3} \sqrt[2]{1 + \left(\frac{t}{8}\right)^2}\, dt$$

Eligiendo u=t/8, se obtiene:

$$L= 8\int_{-25.3/8}^{25.3/8} \sqrt[2]{1+u^2}\, du = 8\left[\frac{1}{2}u\sqrt[2]{1+u^2} + \frac{1}{2}ln\left|\sqrt[2]{1+u^2}+u\right|\right]_{-25.3/8}^{25.3/8} \approx 98.86m.$$

3- Un barco envía una señal de auxilio en el momento en el que se encuentra a 140 km de la costa. Dos estaciones guardacostas Q y R, ubicadas a 320 km de distancia entre sí, reciben la señal. A partir de la diferencia entre los tiempos de recepción de la señal, se determina que la nave se encuentra 260 km más cerca de la estación R que de la estación Q.
a) Elija un sistema de referencia apropiado e indique las coordenadas correspondientes a la ubicación de la embarcación.
b)Represente gráficamente.
c) Suponga que la embarcación sigue una trayectoria en la cual siempre se encuentra 260 km más cerca de la estación R que de la estación Q. Si la ordenada de la posición del barco varía a una tasa instantánea de 10 km/h cuando envía la señal de auxilio, determine la razón de cambio de la abscisa del barco en ese momento.

---

a) En el sistema de navegación de Loran, dos estaciones de radio que se encuentran en una costa, emiten una señal simultáneamente. Un receptor del barco recibe las señales y puede determinar la diferencia de tiempo en que las recibe. Si el barco se mueve de modo que esta diferencia permanezca constante, sigue una trayectoria hiperbólica cuyos son focos son las estaciones de radio.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si la distancia entre las estaciones es de 320 km, esa es la distancia focal. Es decir:

2c=320 ; c= 160

Como el barco se encuentra 260 km más cerca de la estación R que de la estación Q, esa es la distancia 2a. Es decir:

2a=260 ; a= 130

Conocidos a y c podemos determinar b, a partir de:

$a^2 + b^2 = c^2$ De donde: $b^2 = 8700$

La ecuación de la hipérbola es: $\boxed{\frac{x^2}{16900} - \frac{y^2}{8700} = 1}$

Sabiendo que la ordenada correspondiente al punto de ubicación el barco es 140 km, podemos determinar su abscisa:

$\frac{x^2}{16900} - \frac{140^2}{8700} = 1$ $\boxed{x = 235.5 \text{ km}}$

c) En el instante en que el barco emite la señal, tenemos x=235.5 km, y= 140 km. Además sabemos que en ese instante:

$\frac{dy}{dt} = 10\ km/h,$

y que la trayectoria del barco en cualquier instante viene dada por la ecuación:

$$\frac{x^2}{16900} - \frac{y^2}{8700} = 1$$

Derivando ambos miembros con respecto a t obtenemos:

$$\frac{2xx'}{16900} - \frac{2yy'}{8700} = 0$$

Despejando x' obtenemos:

$$x' = \frac{16900}{235.5}\frac{1400}{8700} km/h = 11.55\ km/h$$

4- Se desea construir una cubierta de *generatriz parabólica* para un estadio deportivo que cubra un espacio circular de 120 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 36 m.
a) Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho estadio.
b) Determine la cantidad de material que necesita para construir la cubierta sabiendo que ésta debe tener un espesor promedio de 0.5 m.

---

a) Se trata de una superficie de revolución, con eje de revolución el eje z; y generatriz parabólica en el plano *yz*, cuya ecuación debemos determinar.

$y^2 = -2p(z-k)$ $\quad y^2 = -2p(z-36)$

Q(0,60,0) ; $60^2 = -2p(0-36)$ $\quad \therefore \quad$ $p = 50m$

Ecuación de la generatriz: $\begin{cases} y^2 = -100(z-36) \\ x = 0 \end{cases}$

Para z ≥0.

Siendo el eje de revolución el eje z, la ecuación de la superficie, a partir de la ecuación de la generatriz, resulta:

$$\boxed{\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{100} = -(z-36)}$$

b) Para determinar la cantidad de material, primero determinaremos el área de la superficie generada. Tomamos z como variable independiente. Entonces la curva generatriz viene dada por:

$$y = \sqrt{100(36-z)}, \qquad 0 \le z \le 36.$$

Como el eje z es el eje de revolución, obtenemos que el área de la superficie es:

$$A = \int_0^{36} 2\pi 10\sqrt{36-z}\sqrt{1+\frac{25}{36-z}}dz = 20\pi\int_0^{36}\sqrt{61-z}dz \approx 4685\pi\ m^2$$

Finalmente, la cantidad estimada de material es $(4685\pi).(0.5) = 2342\pi$.

5- Se desea construir una cubierta de *generatriz semielíptica* para un centro deportivo, que cubra un espacio circular de 140 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 40m.

a) Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho estadio.
b) Determine la cantidad de material que necesitará para construir la cubierta, sabiendo que ésta debe tener un espesor promedio de 0.6 m.

---

a) Se trata de una superficie de revolución, con eje de revolución el eje z; y generatriz semielíptica en el plano yz, cuya ecuación debemos determinar. Los semiejes de la elipse son a=70 y b=40. Es decir: $\frac{y^2}{70^2}+\frac{z^2}{40^2}=1$. Por lo tanto la ecuación de la generatriz es:

Ecuación de la generatriz: $\begin{cases} \frac{y^2}{70^2}+\frac{z^2}{40^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$

Para z ≥0

Siendo el eje de revolución el eje z, la ecuación de la superficie, a partir de la ecuación de la generatriz, resulta:

$$\boxed{\frac{x^2}{70^2}+\frac{y^2}{70^2}+\frac{z^2}{40^2}=1}$$

b) Tomamos z como variable independiente y escribimos la ecuación de la curva generatriz como sigue:

$$y=70\sqrt{1-\frac{z^2}{40^2}},\qquad 0\ \le z\ \le 40.$$

Luego el área de la superficie de revolución es:

$$A=\frac{7}{2}\pi\int_0^{40}\sqrt{40+33z^2}dz\approx 16103\pi$$

Luego la cantidad de material estimada es de $9685\pi\ m^3$.

6- La estructura reticulada de la figura está formada por dos arcos parabólicos y posee una longitud entre los apoyos A y B de 90m. La altura máxima de ambos arcos es de 50m y 65m respectivamente. Los montantes verticales se encuentran a una distancia horizontal de 15m entre sí.

a. Seleccione un sistema de coordenadas apropiado y determine las ecuaciones de los arcos.
b. Calcule la longitud del montante 3-4 y de la diagonal 4-5.
c. Si se desea cubrir con una membrana metálica la estructura entre los arcos, ¿cuánto material necesitaría para hacerlo? Desprecie el espesor de la membrana.

---

a) Las ecuaciones de ambos arcos son de la forma:

$x^2=-2p(y-k)$

Para el arco I: k= 50, en tanto que para el arco II, k=65. Por lo tanto, las ecuaciones quedan:

Arco I: $x^2=-2p(y-50)$

Pero para y=0, x=45, entonces: p=20.25.

Arco I: $\boxed{x^2=-40.5(y-50)}$

Arco II: $x^2=-2p(y-65)$

Pero para y=0, x=45, entonces: p=15.57.

Arco II: $\boxed{x^2 = -31.15(y-65)}$

b)

Para determinar las ordenadas de los puntos 3 y 4, evaluamos para x= -15 en la ecuación de cada arco. Es decir:

$(-15)^2 = -40.5(y_4 - 50)$ y_4= 44.44 m

$(-15)^2 = -31.15(y_3 - 65)$ y_3 = 57.77 m

La longitud del montante 34 está dada por la norma del vector que determinan ambos puntos.

$\boxed{L_{34}=13.33 \text{ m}}$

De igual modo, se determinan las coordenadas del punto 5, cuya abscisa es x=-30 y su ordenada se obtiene a partir de la ecuación del Arco II:

y_5 = 36.11 m

La longitud de la diagonal 45, está dada por la norma del vector que determinan ambos puntos:

$\boxed{L_{45}=17.15 \text{ m}}$

c) Para determinar la cantidad de material, necesitamos conocer el área de la región entre los arcos. Reescribimos las ecuaciones de los arcos en la forma:

$$y_1 = 50 - \frac{x^2}{31.5}$$
$$y_2 = 65 - \frac{x^2}{40.5}$$

para x entre -45 y 45. Entonces calculamos el área de dicha región mediante integrales:

$$A = \int_{-45}^{45} (y_2 - y_1)dx \approx 1779\ m^2$$