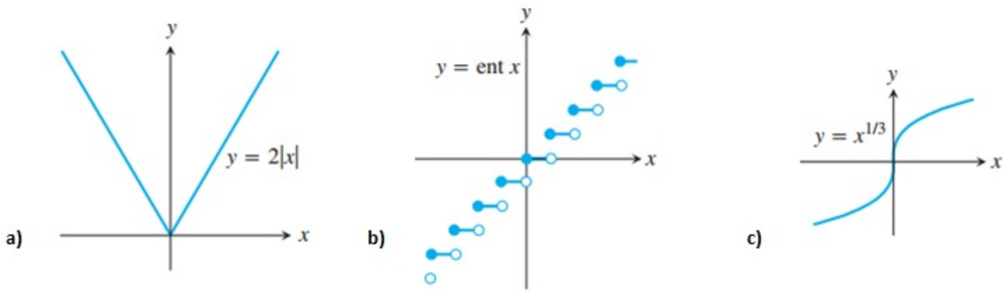
**Trabajo Práctico N°5**
**Análisis Matemático 1-Facultad de Ingeniería**

**FUNCIONES INVERSAS Y SUS DERIVADAS.**

Prof. Iris Gómez
Dr. Pablo Ochoa

## 1-FUNCIONES INVERSAS.

1. ¿Cuales de las funciones cuyas gráficas se muestran son inyectivas?




2. Determine si la función es inyectiva:

   a) $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+2} & x > 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$

3. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$, para $x \geq 1$, determine una fórmula para $f^{-1}$ y grafique ambas funciones.

4. Dada la función $y = f(x)$, determine $f^{-1}(x)$ e identifique el dominio y el rango de $f^{-1}$. Para comprobar demuestre que $fof^{-1} = f^{-1}of = x$:

   a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

   b) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \leq 1$ (*Sugerencia*: complete el cuadrado)

5. En los siguientes ejercicios, determine $f^{-1}(x)$. Trace juntas las gráficas de $f$ y de $f^{-1}$. Evalúe $\dfrac{df}{dx}$ en $x = a$ y $\dfrac{df^{-1}}{dx}$ en $x = f(a)$ y muestre la relación.

   a) $f(x) = 5 - 4x$, $a = \dfrac{1}{2}$

   b) $f(x) = 2x^2$, $x \geq 0$, $a = 5$

6. Sea $f(x) = x^2 - 4x - 5$, $x \geq 2$. Determine el valor de $\dfrac{df^{-1}}{dx}$ en el punto $x = 0 = f(5)$.

## 2-LOGARITMOS NATURALES

1. Determine la derivada de $y$ *con respecto a* $x$:

    *a*) $y = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$
    *b*) $y = \ln(\ln(\ln(x)))$
    *c*) $y = \ln \dfrac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}}$
    *d*) $y = \displaystyle\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \ln \sqrt{t}\, dt$

2. Evalúe las siguientes integrales:

    *a*) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t\, dt}{2 - \cos t}$
    *b*) $\displaystyle\int_2^{4} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$
    *c*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(\frac{x}{2})\, dx$

3. Utilice derivación logarítmica para determinar la derivada de $y$ con respecto a la variable independiente dada.

    *a*) $y = \sqrt{\theta + 3}\ , \operatorname{sen} \theta$
    *b*) $y = \left(\dfrac{x(x+2)}{x^2+1}\right)^{1/3}$

4. La región entre la curva $y = \sqrt{\cot x}$ y el eje x desde $x = \pi/6$ hasta $x = \pi/2$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

5. Determine la longitud de:

$$x = \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 2\ln\left(\frac{y}{4}\right),\ 4 \leq y \leq 12$$

### 3-FUNCIONES EXPONENCIALES

1. Determine la derivada de $y$ con respecto a la variable independiente que corresponda:

    *a*) $y = \ln(2e^{-x} \operatorname{sen} x)$
    *b*) $y = e^{\cos t + \ln t}$
    *c*) $\displaystyle\int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\, dt$

2. Evalúe las siguientes integrales:

    *a*) $\int_0^{\pi/4} (1 + e^{\tan \theta}) \sec^2 \theta\, d\theta$
    *b*) $\int \dfrac{e^y}{1+e^y}\, dy$

3. Determine la derivada de $y$ con respecto a la variable independiente dada.

    *a*) $y = (\ln 7) 7^{\sec t}$
    *b*) $y = \log_2(5\theta)$

c) $y = \log_3\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right]$

d) $y = \log_2(8t^{\ln 2})$

4. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_1^{\sqrt{2}} x2^{x^2}\, dx$

b) $\int_0^9 \frac{2\log_{10}(x+1)}{x+1}\, dx$

5. Utilice derivación logarítmica para determinar la derivada de $y$ con respecto a $x$.

a) $y = (\sqrt{x})^x$

b) $y = x^{\operatorname{sen} x}$

6. Determine los valores máximo y mínimo absolutos de:

$$f(x) = e^x - 2x\, en[0,1]$$

7. Determine los valores extremos absolutos y puntos de inflexión para: $f(x) = xe^{-x}$

8. Determine el área de la región ”triangular.$^{\text{en}}$ el primer cuadrante que está acotada arriba por la curva $y = e^{2x}$, abajo por la curva $y = e^x$ y a la derecha por la recta $x = \ln 3$

## 4-**FORMAS INDETERMINADAS Y REGLA DE L'HOPITAL**

1. Utilice la regla de L'Hôpital para evaluar el límite. Luego evalúe el límite usando algún otro método estudiado anteriormente.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

2. Utilice la regla de L'Hôpital para determinar los siguientes límites:

a) $\lim_{t\to -3} \frac{t^3-4t+15}{t^2-t-12}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-8x^2}{12x^2+5x}$

c) $\lim_{\theta\to\pi/2} \frac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x - \operatorname{sen} \pi x}$

e) $\lim_{\theta\to 0} \frac{3^{\operatorname{sen}\theta}-1}{\theta}$

f) $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (x-\frac{\pi}{2})\sec x$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$

h) $\lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln \operatorname{sen} x)$

*i*) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x})$

*j*) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

*k*) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-1/\ln x}$

*l*) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\tan(\dfrac{\pi}{2} - x)$

3. ¿Cuál es correcto y cuál incorrecto? Justifique sus respuestas.

   *a*) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{6}$

   *b*) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \dfrac{0}{6} = 0$

4. Sólo uno de los siguientes cálculos es correcto. ¿Cuál es? ¿Por qué los otros son incorrectos? Justifique.

   *a*) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0.(-\infty) = 0$

   *b*) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0.(-\infty) = -\infty$

   *c*) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x} = \dfrac{-\infty}{\infty} = -1$

   *d*) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$

## 5-**FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.**

1. Determine el valor de $\operatorname{sen}(\cos^{-1}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}))$

2. Determine el valor de la derivada de $y$ con respecto a la variable apropiada. Indique el dominio en donde $y$ sea derivable.

   *a*) $y = \cos^{-1}(1/x)$

   *b*) $y = \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{2}t)$

   *c*) $y = \sec^{-1}(1/t)$, $0 < t < 1$

   *d*) $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \csc^{-1} x$, $x > 1$

3. Evalúe las siguientes integrales:

   *a*) $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{ds}{\sqrt{9-4s^2}}$

   *b*) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dt}{4+3t^2}$

   *c*) $\displaystyle\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2-1}}$

   *d*) $\displaystyle\int \frac{t^3-2t^2+3t-4}{t^2+1}\,dt$

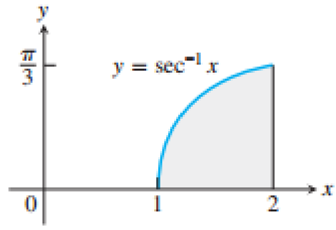
   *e*) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

   *f*) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sec^2(\sec^{-1} x)\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)(\tan^{-1}\sqrt{x})^2+9}\,dx$

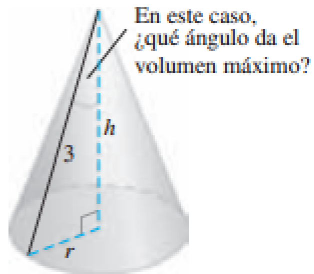
4. Determine el siguiente límite, aplicando la regla de L'Hôpital: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x.tan^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$

5. La región ilustrada en la figura, se hace girar alrededor del eje $y$ para generar un sólido.




Determine el volumen del sólido.

6. La altura inclinada del cono que aparece en la figura es de 3 m. ¿Cuál debe ser el ángulo




señalado para maximizar el volumen del cono?

## 6-FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

1. Determine la derivada de $y$ con respecto a la variable apropiada.

 a) $y = 2\sqrt{t}\tanh(\sqrt{t})$

 b) $y = \ln(\operatorname{senh} z)$

2. Evalúe las siguientes integrales:

 a) $\displaystyle\int 6\cosh(\frac{x}{2} - \ln 3)\,dx$

 b) $\displaystyle\int \tanh(\frac{x}{7})\,dx$

3. Una región del primer cuadrante está acotadarriba por la curva $y = \cosh x$, abajo por la curva $y = \operatorname{senh} x$, y por la izquierda y la derecha por el *eje* $y$ y la recta $x = 2$, respectivamente. Determine el volumen que esa región genera al girar sobre el *eje* $x$.

4. Determine la longitud del segmento de la curva $y = \dfrac{1}{2}\cosh 2x$ desde $x = 0$ hasta $x = \ln\sqrt{5}$.

5. Utilice las definiciones de las funciones hiperbólicas para determinar los siguientes límites:

 a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \tanh(x)$

 b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} sech(x)$

 c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} coth(x)$