Trabajo Práctico N°7
Análisis Matemático 1-Facultad de Ingeniería

SUCESIONES, SERIES Y SERIES DE POTENCIAS.

Prof. Iris Gómez
Dr. Pablo Ochoa

1-SUCESIONES

1. Halle una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión:

   a) $1, -1, 1, -1, ...$
   b) $1, -4, 9, -16, 25, ...$
   c) $2, 6, 10, 14, 18, ...$
   d) $-3, -2, -1, 1, 2, 3, ...$
   e) $\frac{5}{1}, \frac{8}{2}, \frac{11}{6}, \frac{14}{24}, \frac{17}{120}, ...$

2. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones convergen? Determine sus límites:

   a) $a_n = 2 + (0,1)^n$
   b) $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$
   c) $a_n = 1 + (-1)^n$
   d) $a_n = \frac{sen(n)}{n}$
   e) $a_n = (1 + \frac{7}{n})^n$
   f) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
   g) $a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$
   h) $a_n = \ln(n) - \ln(n+1)$
   i) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$
   j) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$, $p > 1$.

2-SERIES NUMÉRICAS

1. Encuentre la sucesión de sumas parciales y úsela para determinar si la serie converge:

   a) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + ... + \frac{2}{3^{n-1}} + ...$
   b) $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + ... + \frac{9}{100^n} + ...$

2. Encuentre los primeros términos de cada serie geométrica y luego encuentre la suma de la serie:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n})$

3. Determine si la serie geométrica converge, de ser así encuentre su suma:

a) $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3 + \left(\frac{-2}{3}\right)^4 + ...$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n$

4. Exprese el decimal periódico $0,0\bar{6}$ como razón de dos enteros.

5. Utilice el criterio del n-ésimo término con la finalidad de demostrar la divergencia de la serie:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+10}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)$

6. Escriba algunos términos de las siguientes series geométricas. Determine **a** y **r**. Calcule la suma de la serie y determine los valores de **x** para los cuales la serie converge:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$

7. Utilice el **criterio de la integral** para determinar si las siguientes series convergen. Asegúrese de verificar que se cumplen las condiciones del criterio mencionado.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

8. ¿Cuál serie converge y cuál diverge? Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{8^n}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

9. Utilice el **criterio de comparación** para determinar si cada serie converge o diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+30}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^2+3}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

10. Utilice el **criterio de comparación del límite** para determinar si cada serie converge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3-n^2+3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}$

11. ¿Cuál serie converge y cuál diverge? Justifique.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln(n)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{5^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

12. Utilice el **criterio de la razón** para determinar si cada serie converge o diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$

13. Utilice el **criterio de la raíz** para determinar si cada serie converge o diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(e^2+\frac{1}{n}))^{(n+1)}$

14. Utilice algún criterio para determinar si la serie converge o diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!e^{-n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

15. ¿Cuál de las siguientes **series alternantes** converge? ¿Y cuál diverge?

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{10^n}{(n+1)!}$

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

16. ¿Cuál de las siguientes series converge absolutamente? Justifique.

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{2^n}$

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

    c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

17. Ni el criterio de la razón ni el de la raíz ayudan con las series p. Intente aplicarlos a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

    y pruebe que ambos criterios no brindan información sobre la convergencia o divergencia de la serie.

18. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ también diverge.

19. Demuestre (dando un ejemplo) que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ puede ser divergente aún si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen ambas.

3- SERIES DE POTENCIAS

1. Determine los **polinomios de Taylor** de orden 0, 1, 2 y 3 generados por $f(x) = \ln(1+x)$ en *a=0*.

2. Determine la **serie de Taylor** en *x= 0* (serie de Mac Laurin), para las siguientes funciones:

    a) $y = e^{-x}$

    b) $y = \operatorname{sen}(3x)$

3. Determine la **serie de Taylor** generada por $f(x) = 2^x$ en *a=1*.

4. Determine la linealización (**polinomio de Taylor** de orden 1) y la aproximación cuadrática de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en *x=0*

5. Utilice alguna sustitución de series conocidas para determinar la **serie de Taylor** en *x=0*:

    a) $y = e^{-5x}$

    b) $y = 5\operatorname{sen}(-x)$

    c) $y = \arctan(3x^4)$

    d) $y = \dfrac{1}{2-x}$

6. Desarrolle en **serie de Taylor** centrada en 0 las siguientes funciones. Indique intervalo de convergencia y analice si la serie obtenida converge en los extremos de dicho intervalo.

    a) $y = \operatorname{sen}(x)$

b) $y = \cos(x)$

c) $y = \ln(1 + x)$

d) $y = \arctan(x)$

e) $y = \text{senh}(x)$

f) $y = \cosh$

g) $y = \dfrac{1}{1+x}$

h) $y = (1 + x)^k, k \in \mathbb{N}$

7. Utilice la fórmula de Taylo con $a = 0$ y $n = 3$ para determinar una aproximación cúbica de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en $x = 0$. Estime el error que se comete cuando se aproxima el valor de f en $x = 0{,}1$ con la aproximación cúbica.

8. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y suponga que la serie converge en $(-R, R)$. Pruebe que si f es par, entonces $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Es decir, la serie de taylor de f contiene sólo potencias pares de x. ¿Qué sucedería si f fuese impar?