Trabajo Práctico N°4
Análisis Matemático 1-Facultad de Ingeniería

INTEGRACIÓN Y APLICACIONES

Prof. Iris Gómez
Dr. Pablo Ochoa

1-NOTACIÓN SIGMA. SUMAS DE RIEMANN. INTEGRAL DEFINIDA.

1. Escriba la suma sin la notación sigma. Luego evalúela: $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$

2. Exprese la suma en notación sigma: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}$

3. Exprese el límite como integral definida: $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(c_k)^2\Delta x_k$, donde P es una partición de $[0,2]$

4. Suponga que f y h son integrables y que

$$\int_1^9 f(x)\,dx=-1,\ \int_7^9 f(x)\,dx=5,\ \int_7^9 h(x)\,dx=4.$$

Utilice las propiedades para determinar:

a) $\displaystyle\int_1^9 -2f(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_7^9 [f(x)+h(x)]\,dx$

c) $\displaystyle\int_7^9 [2f(x)-3h(x)]\,dx$

d) $\displaystyle\int_9^1 f(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^7 f(x)\,dx$

f) $\displaystyle\int_7^7 f(x)\,dx$

g) $\displaystyle\int_9^7 [h(x)-f(x)]\,dx$

5. Grafique los integrandos y utilice las áreas para evaluar las integrales:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-|x|)\,dx$

b) $\displaystyle\int_a^b 2s\,ds$, $0<a<b$

2-TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

1. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\int_{-3}^{4} (5 - \frac{x}{2})\, dx$

   b) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t+1)(t^2+4)\, dt$

   c) $\int_{0}^{\pi/6} (\sec x + \tan x)^2\, dx$

2. Determine la derivada: $\frac{d}{dx} \int_{0}^{\sqrt{x}} \cos t\, dt$

   a) evaluando la integral y derivando el resultado.

   b) derivando directamente la integral.

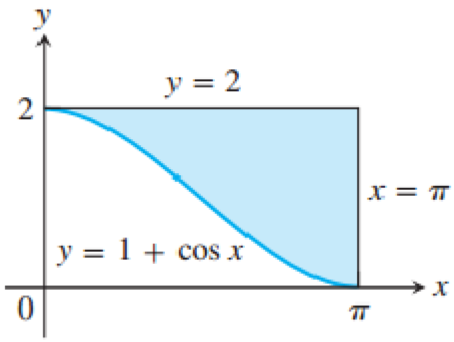
3. Determine dy/dx: $y = \int_{0}^{x} \sqrt{1+t^2}\, dt$

4. Determine el área total entre la función y el *eje* x:

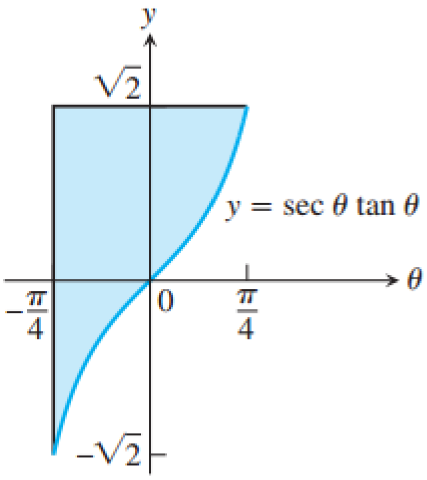
   a) $y = -x^2 - 2x$, $-3 \leq x \leq 2$

   b) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $0 \leq x \leq 2$

5. Determine las áreas de las regiones sombreadas:



a)



b)

6. La temperatura T(°F) de una habitación a los t minutos está dada por

$$T = 85 - 3\sqrt{25-t}\, para 0 \leq t \leq 25$$

a) Determine la temperatura de la habitación cuando t = *0*, t = *16* y t = *25*.

b) Determine la linealización de

$$f(x) = 2 - \int_{2}^{x+1} \frac{9}{1+t}\,dt;\ en x = 1.$$

3-INTEGRALES INDEFINIDAS Y EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

7. Evalúe las integrales indefinidas usando las sustituciones dadas para reducir las integrales a una forma estándar:

   a) $\int 2x(x^2+5)^{-4}\,dx$; $u = x^2+5$

   b) $\int (1-\cos\frac{t}{2})^2 \operatorname{sen}\frac{t}{2})^2\,dt$; $u = 1-\cos\frac{t}{2}$

   c) $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta\,d\theta$. Usando:

      1) $u = \cot 2\theta$

      2) $u = \csc 2\theta$

8. Evalúe las integrales:

   a) $\int \theta(1-\theta^2)^{1/4}\,d\theta$

   b) $\int x^{1/2}\operatorname{sen}(x^{3/2}+1)\,dx$

   c) $\int \dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}\operatorname{sen}^2\sqrt{t}}\,dt$

   d) $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

9. Si no sabe qué sustitución hacer, trate de reducir la integral poco a poco; para ello, use una sustitución de prueba para simplificar un poco la integral y luego otra para simplificarla un poco más. Verá lo que queremos decir con esto si prueba la sucesión de sustituciones que se indica.

$$\int \frac{18\tan^2 x\sec^2 x}{(2+\tan^3 x)^2}\,dx$$

   a) $u = \tan x$, seguida de $v = u^3$ y luego $w = 2+v$

   b) $u = \tan^3 x$, seguida de $v = 2+u$

   c) $u = 2+\tan^3 x$

10. La aceleración de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia adelante en una recta es $a = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \pi^2\cos(\pi t) m/seg^2$ para toda t. Si $s = 0$ y $v = 8m/seg$ cuando $t = 0$, determine s cuando $t = 1seg$.

4-SUSTITUCIÓN Y ÁREA ENTRE CURVAS.

1. Evalúe las siguientes integrales definidas:

   a) 1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\sec^2 x\,dx$

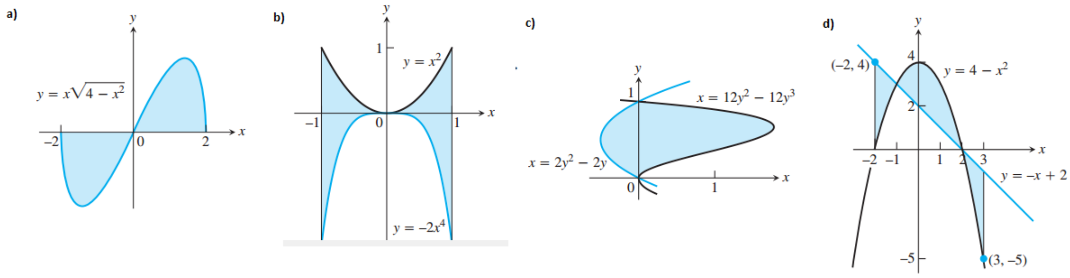
      2) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \tan x\sec^2 x\,dx$

   b) 1) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$

2) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} (4y - y^2 + 4y^3 + 1)^{-2/3}(12y^2 - 2y + 4)\,dy$

2. Determine las áreas totales de las regiones sombreadas.

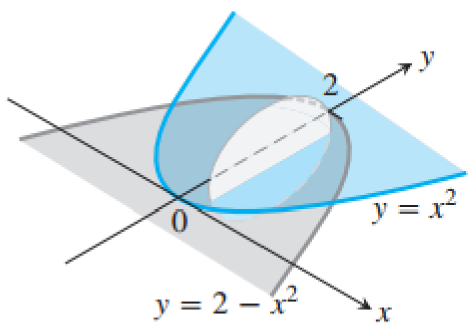


3. Determine el área de la región encerrada por:

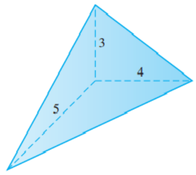
   a) $y = x^4 - 4x^2 + 4$ y $y = x^2$
   b) $y^2 - 4y = 4$ y $4x - y = 16$
   c) $y = 2\,\mathrm{sen}\,x$ y $y = \mathrm{sen}\,2x$ $0 \leq x \leq \pi$
   d) $y = \mathrm{sen}(\pi x/2)$ y $y = x$

5-CÁLCULO DE VOLÚMENES POR SECCIONES TRANSVERSALES.

1. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al *eje* x en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al *eje* x son discos circulares cuyos diámetros van desde la parábola $y = x^2$ hasta la parábola $y = 2 - x^2$. Vea la figura:

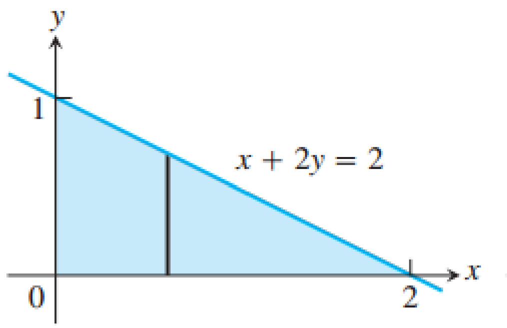


2. Determine el volumen del tetraedro dado. (*Sugerencia: considere rebanadas perpendiculares a uno de los lados marcados*)

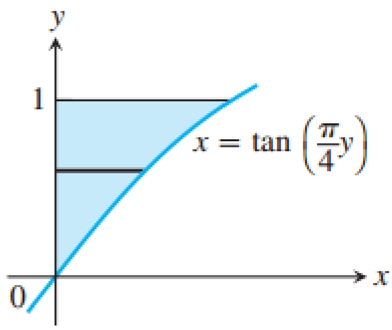


3. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada:

    a) Alrededor del eje x:



    b) Alrededor del eje y:



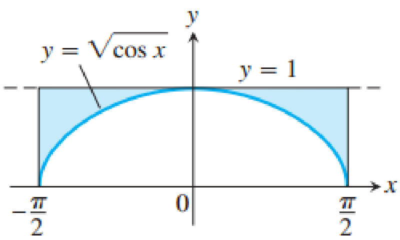
4. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$ alrededor del eje x.

5. Determine el volumen de cada uno de los sólidos generados al hacer girar las regiones sombreadas alrededor del eje indicado:

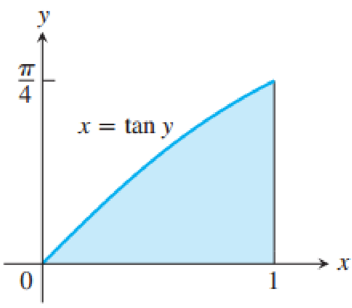
6. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$ alrededor del eje x.

7. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante, acotada por arriba por la parábola $y = x^2$, abajo por el eje x, y a la derecha por la recta $x = 2$ alrededor del eje y.

El eje x



El eje y



8. Un tazón tiene una forma que puede generarse al hacer girar la gráfica de $y = x^2/2$ entre $y = 0$ y $y = 5$ alrededor del eje y.

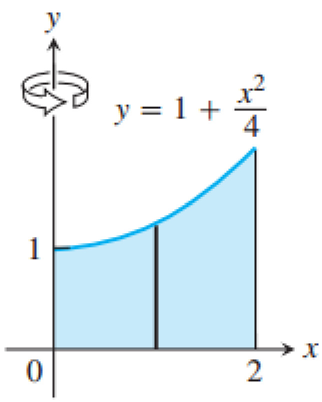
   a) Determine el volumen del tazón.

   b) Si llenamos el tazón con agua a una velocidad constante de 3 unidades cúbicas por segundo, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua en el tazón cuando el agua tiene una profundidad de 4 unidades?

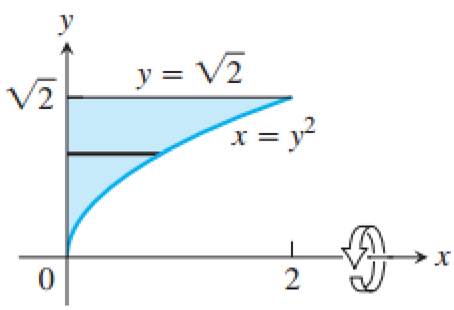
6-CÁLCULO DE VOLÚMENES POR MEDIO DE CASCARONES CILÍNDRICOS.

1. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen de los sólidos generados al hacer girar la región sombreada alrededor del eje indicado.

1.



2.



2. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar:

   a) alrededor del *eje y* la región acotada por $y = x^2$, $y = 2 - x$, $x = 0$, $para x \geq 0$

   b) alrededor del *eje x* la región acotada por $x = 2y - y^2$, $x = 0$

3. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región acotada por las curvas que se indican alrededor de las rectas dadas.

$$y = x^3,\ y = 8,\ x = 0$$

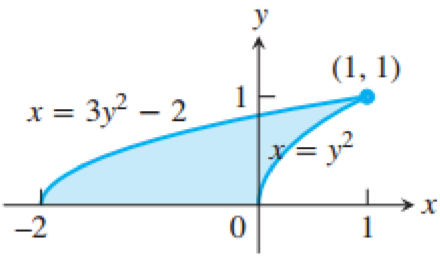
a) El eje y

b) La recta $x = -2$

c) El eje x

d) La recta $y = 8$

4. La región que se muestra a continuación se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. ¿Cuál de los métodos (discos, arandelas, cascarones) podría utilizar para determinar el volumen del sólido? En cada caso plantee las integrales necesarias. Justifique.



7-LONGITUD DE ARCO

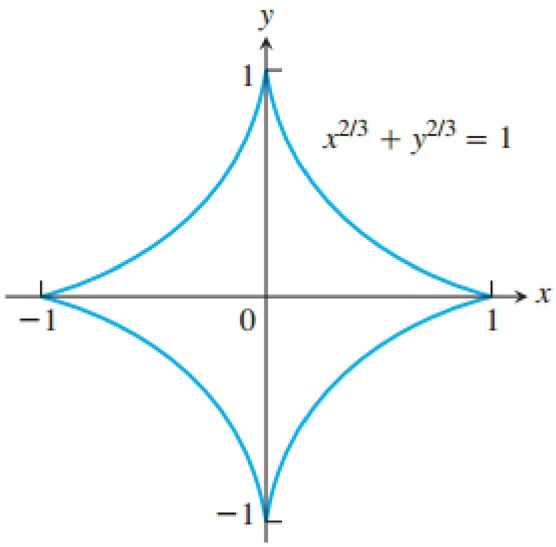
1. Determine la longitud de cada curva:

   a) $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}\, dex = 0ax = 3$

   b) $x = \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{1}{4y}\, dey = 1ay = 3$

   c) $x = \displaystyle\int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1}\, dt \; -\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

2. La gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ es una familia de curvas denominada *astroides*, en virtud de su apariencia de estrella. Determine la longitud de esta astroide particular, para ello, calcule la longitud de la mitad de la parte que está en el primer cuadrante, $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \leq x \leq 1$ y multiplique por 8.



8-ÁREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

1. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x/2$, $0 \leq x \leq 4$, alrededor del eje x. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica. (Área de la superficie lateral $= \dfrac{1}{2}$ x circunferencia de la base x altura inclinada)

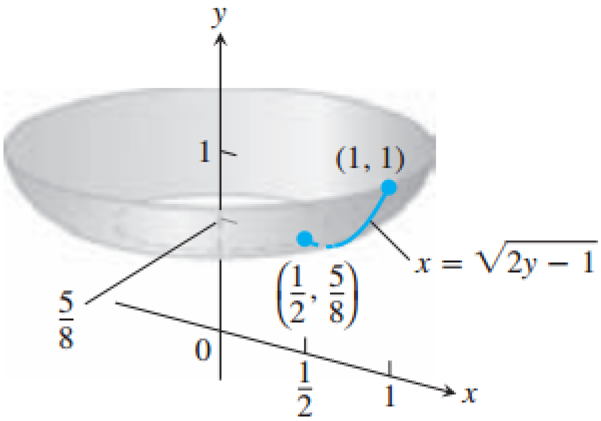
2. Determine el área de cada superficie generada al hacer girar la curva alrededor del eje indicado.

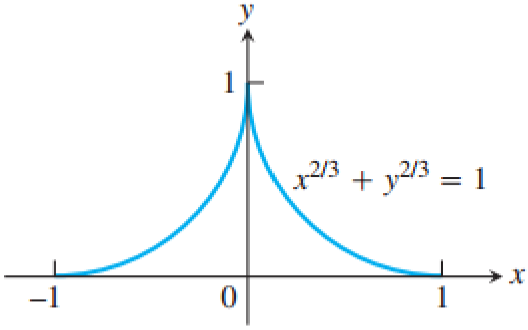
   a) $y = \sqrt{x}$, $3/4 \leq x \leq 15/4$; $ejex$

   b) $x = \sqrt{2y - 1}$, $5/8 \leq y \leq 1$; $ejey$

3. Escriba una integral para el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, alrededor del eje x. Más adelante aprenderá a evaluar estas integrales.

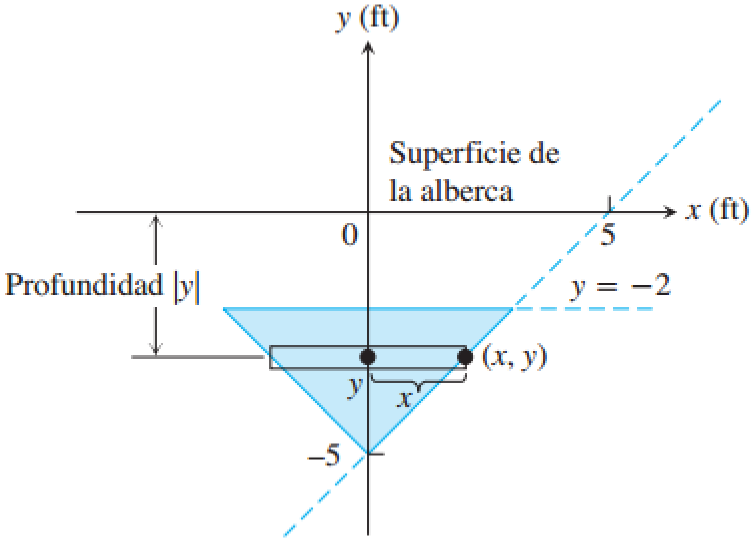
4. Determine el área de la superficie al hacer girar alrededor del eje x, la parte de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$que se muestra en la figura. (*Sugerencia*: haga girar alrededor del eje x la parte en el primer cuadrante $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$, y multiplique por 2 su resultado)


y
1
(1, 1)
$x = \sqrt{2y - 1}$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$
$\frac{5}{8}$
0
$\frac{1}{2}$
1
x

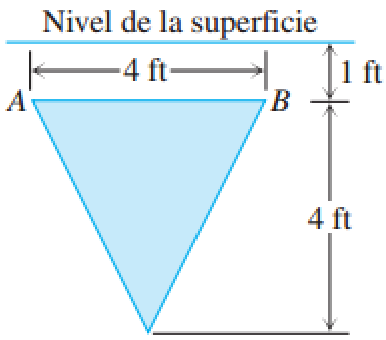

y
1
$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$
–1
0
1
x

9-TRABAJO Y FUERZAS DE FLUIDOS.

1. Calcule la fuerza del agua (w = 62,4) sobre un lado de una placa plana en forma de triángulo rectángulo isósceles con base de 6 ft y altura de 3 ft, que se sumerge verticalmente con la base hacia arriba, 2 ft por debajo de la superficie del recipiente.



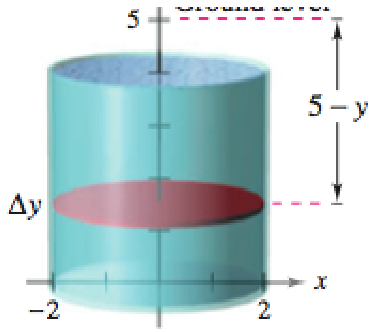
2. La placa en forma de triángulo isósceles que se muestra a continuación se sumerge verticalmente 1 ft debajo de la superficie de un lago de agua dulce.



   a) Determine la fuerza del fluido contra una cara de la placa.

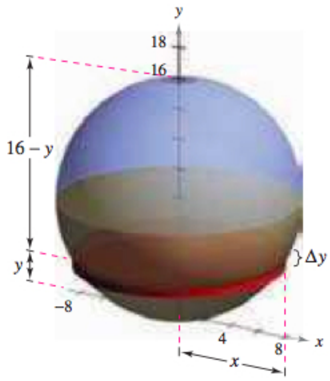
   b) ¿Cuál será la fuerza del fluido sobre un lado de la placa si el agua fuera de mar en vez de agua dulce?

3. Utilizando una bomba, se desea extraer el aceite contenido en un tanque cilíndrico de radio 2 m y altura 4. El tanque se encuentra un metro por debajo de la superficie. Observe la figura. Supongamos que el aceite pesa 100 N por metro cúbico ($100N/m^3$).



   Determine el trabajo total que debe realizar la bomba si el tanque está lleno de aceite hasta la mitad. Determine el trabajo total si ahora el tanque está lleno.

4. Un tanque esférico de radio 8 m está lleno de aceite hasta la mitad. El aceite pesa $100N/m^3$. Determine el trabajo necesario para extraer el aceite a través de un orificio en el extremo superior del tanque. (Ayuda: la ecuación de la circunferencia con centro en $(0, 8)$ y radio 8 es $x^2 + (y - 8)^2 = 64$. Observe el gráfico.)


y
18
16
16 − y
Δy
y
−8
4
8
x
x