# Sisteme liniare și invariante

$$s(t) = \sin(2\pi f \cdot t) \cong \sin(2\pi f \cdot n \cdot T_e)$$

$$t \to n \cdot T_e \qquad \underline{f_n} = \frac{f}{f_e} = f \cdot T_e$$

$$s[n] = \sin(2\pi f \cdot T_e \cdot n) = \sin(2\pi f_n \cdot n)$$

$$s[0] = \sin(2\pi f_n \cdot 0)$$

$$s[1] = \sin(2\pi f_n \cdot 1)$$

$$s[2] = \sin(2\pi f_n \cdot 2)$$

$\to$ acc-faza$_n$ = acc-faza$_{n-1}$ + $\underline{f_n}$

# Cuprins

- Ce este un sistem?
- Conectarea sistemelor
- Proprietățile sistemelor
- Sisteme liniare și invariante
- Răspunsul sistemelor liniare și invariante
- Proprietăți ale sistemelor liniare și invariante
- Exemple

# Ce este un sistem?

- **Orice prelucrează (modifică) semnale**
- **Căutăm modele matematice pentru caracterizarea sistemelor reale (ex. circuit RC – filtru etc.)**

- **Model – reprezentare esenţializată**
- **Model matematic – simplific realitatea complexă**
- **Uşor de manipulat**

# Ce este un sistem?

x[n]

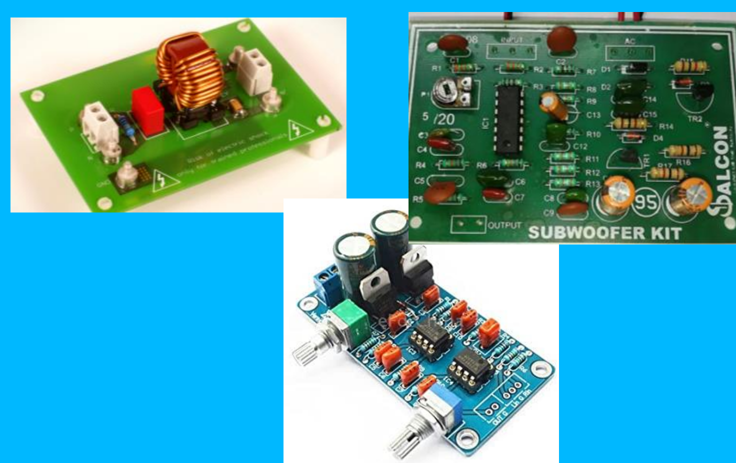
```
void Process_Data(void)
{
        static fract16 d[COEFF_SIZE]={0};
        static fir_state_fr16 state1;    // declaratie pentru starea filtrului
        static fract16 coeff[COEFF_SIZE] = {
                #include "coeff.dat"
        };
        if (semafor==0) {
                fir_init(state1, coeff, d, COEFF_SIZE,0);
                semafor=1;
        }
        temp_in = iChannel0LeftIn>>8;
        fir_fr16(&temp_in, &temp_out, 1, &state1);
        iChannel0LeftOut = (temp_out<<8)<<1;
        iChannel0RightOut= 0;//iChannel0RightIn;
}
```

y[n]

intrare
excitație

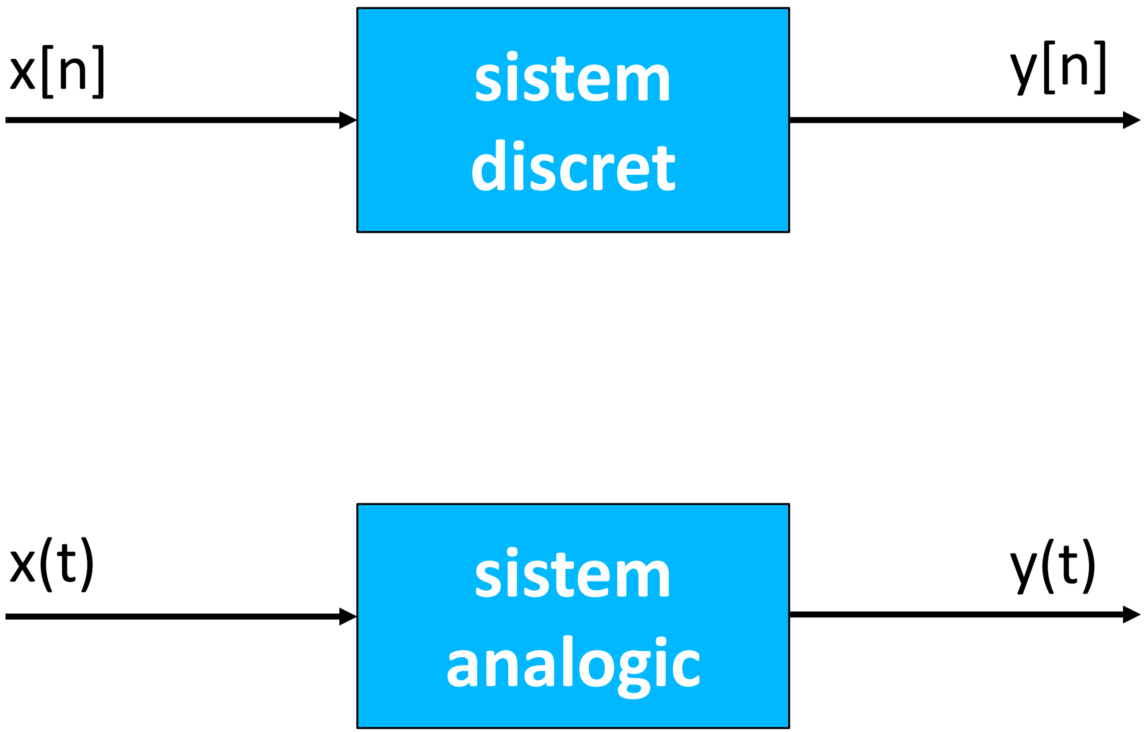
ieșire
răspuns

x(t)

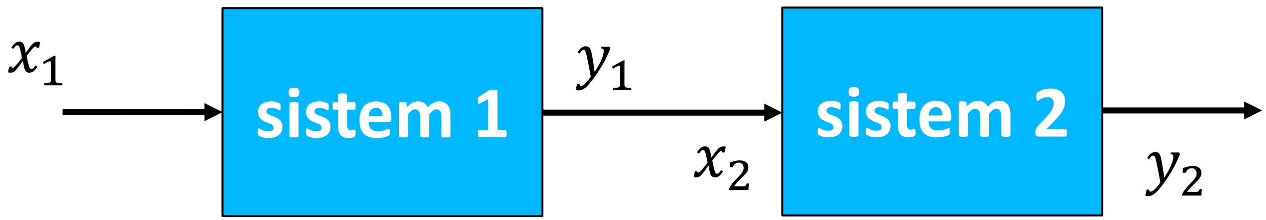



y(t)

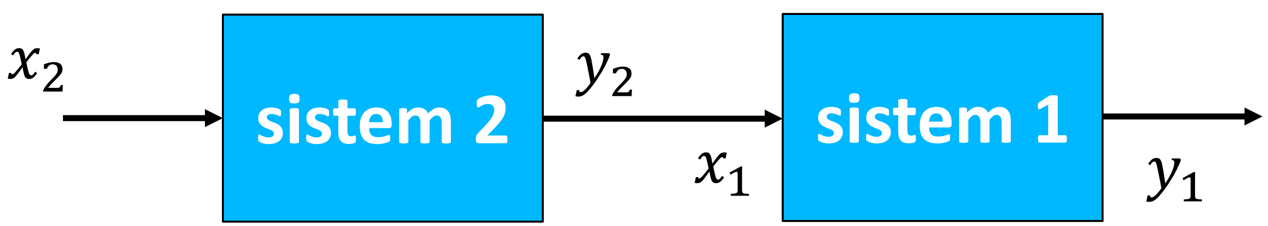
# Ce este un sistem?



# Conectarea sistemelor – cascadă



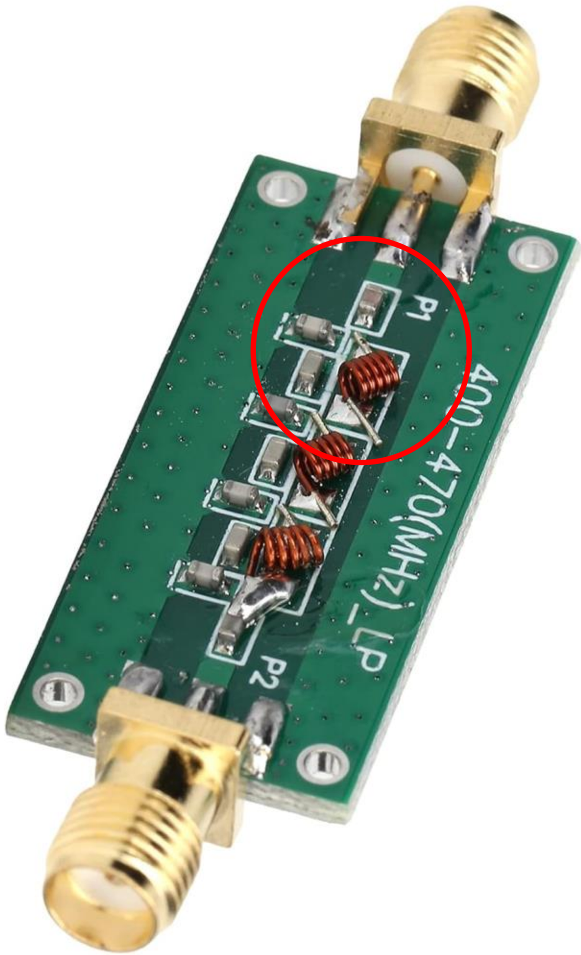

$$x_2 = y_1$$




$$x_1 = y_2$$

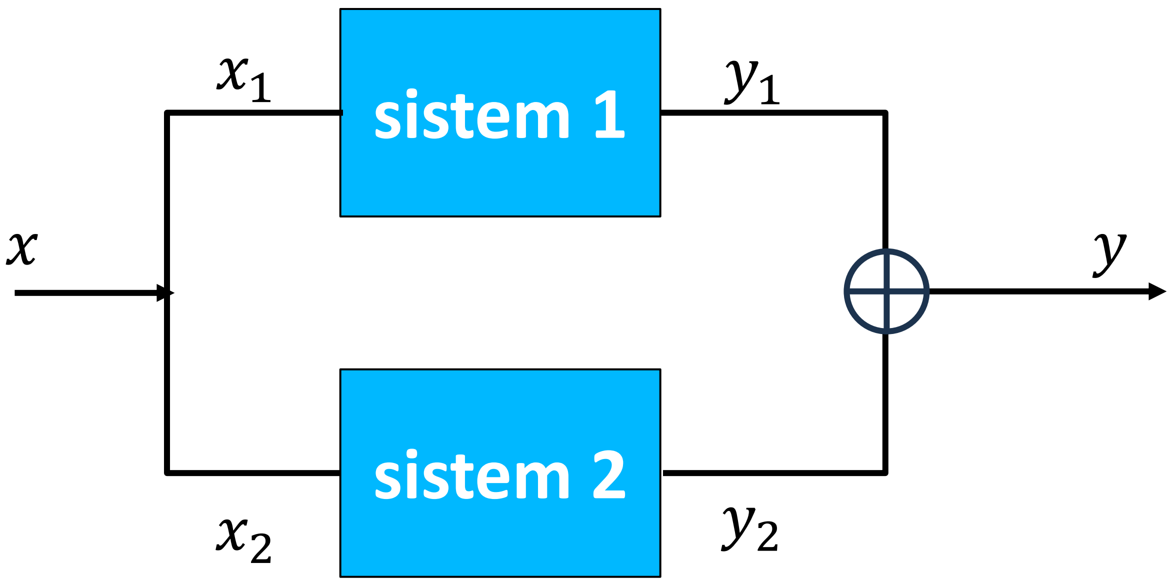
# Conectarea sistemelor – cascadă

https://global.discourse-cdn.com/flex019/uploads/flightaware/original/3X/3/7/375847d4c338d97bee443f908b016c341cc9a956.jpeg

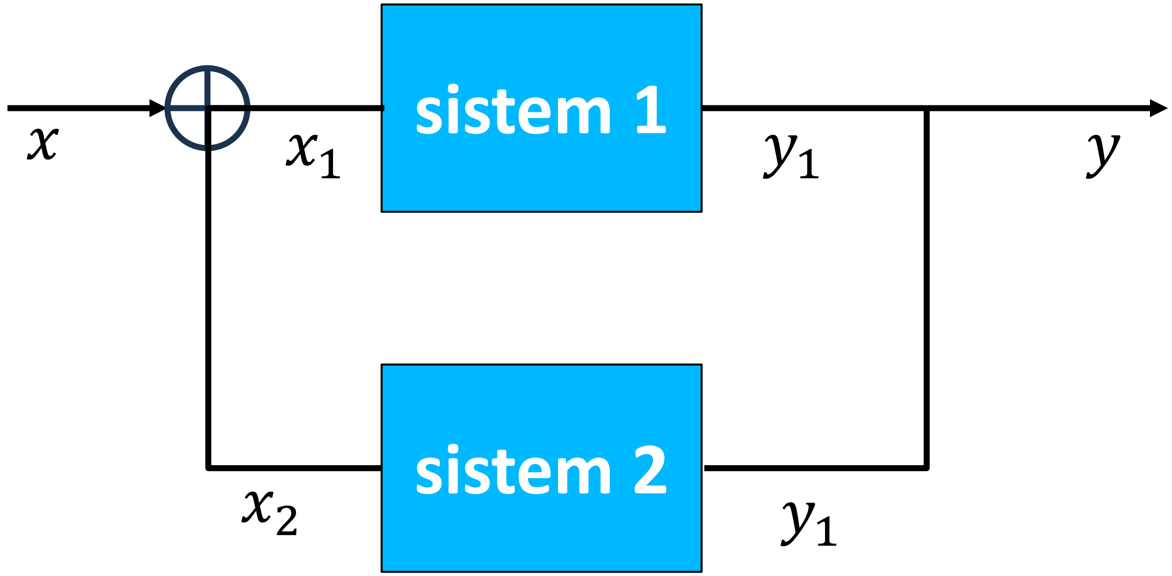



https://www.amazon.in/400-470MHZ-Excellent-Stability-Operating-RFAmplification/dp/B0CRWHCBXV

# Conectarea sistemelor - paralel



# Conectarea sistemelor – buclă de reacție




$$x_1 = x + x_2$$

$$y = y_1$$

$$x_2 = y_1$$

# Proprietățile sistemelor

1. Liniaritate
2. Invarianță
3. Cauzalitate
4. Stabilitate
5. Memoria
6. Inversabilitate

# Memoria

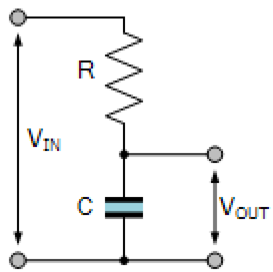
**Sisteme fără memorie**

Ieşirea sistemului la momentul de timp **t** depinde numai de intrarea la acel moment de timp **t**.

$$y(t) = [x(t)]^2 \qquad y[n] = (x[n])^2$$

**Sisteme cu memorie**

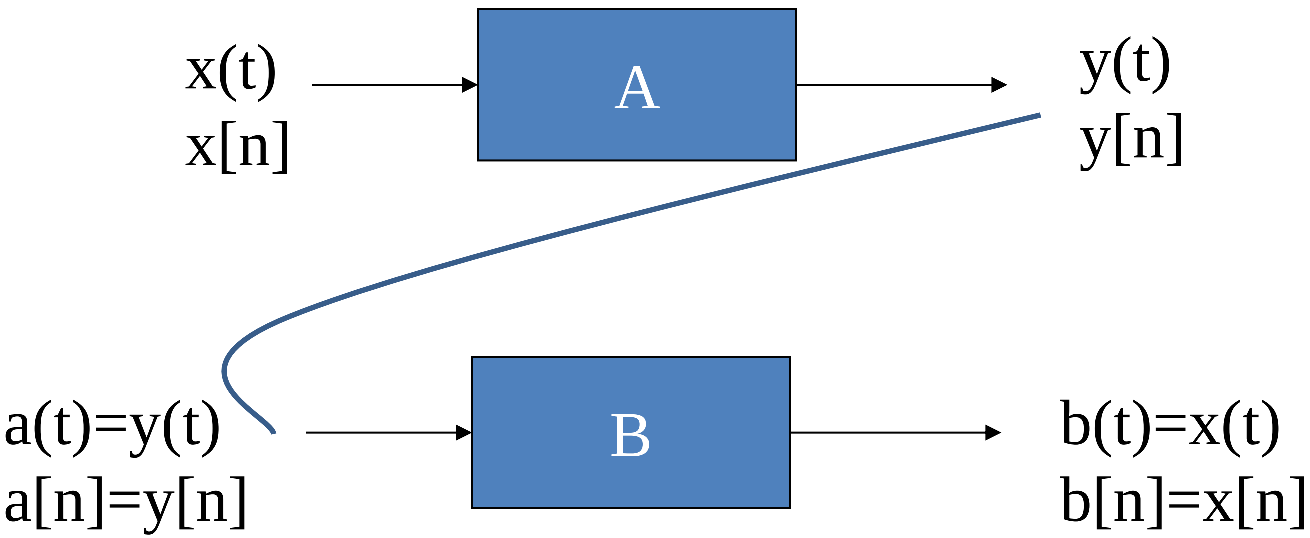
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)dt$$




$$V_{OUT} = V_C = \frac{Q}{C} = \frac{\int i dt}{C} = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$y[n] = x[n-1]$$

# Inversabilitatea




$$A = B^{-1}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)dt$$

$$b(t) = \frac{d(a(t))}{dt} = \frac{d(y(t))}{dt} = x(t)$$

# Inversabilitatea

$$y(t) = \frac{d(x(t))}{dt} \qquad b(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t)dt = \int_{-\infty}^{t} y(t)dt = x(t) \quad ?$$

$$y(t) = [x(t)]^2 \qquad y[n] = (x[n])^2 \quad ?$$

# Cauzalitatea

- **Ieşirea la orice moment de timp t depinde numai de intrările anterioare momentului t şi/sau de intrările la momentul de timp t.**
- **Sistemul nu poate anticipa valori viitoare.**
- **Nu iese fum fără foc.**
- **Mai întâi apare cauza, apoi efectul.**

# Cauzalitatea

$$x[n] \neq 0 \quad n > n_0$$

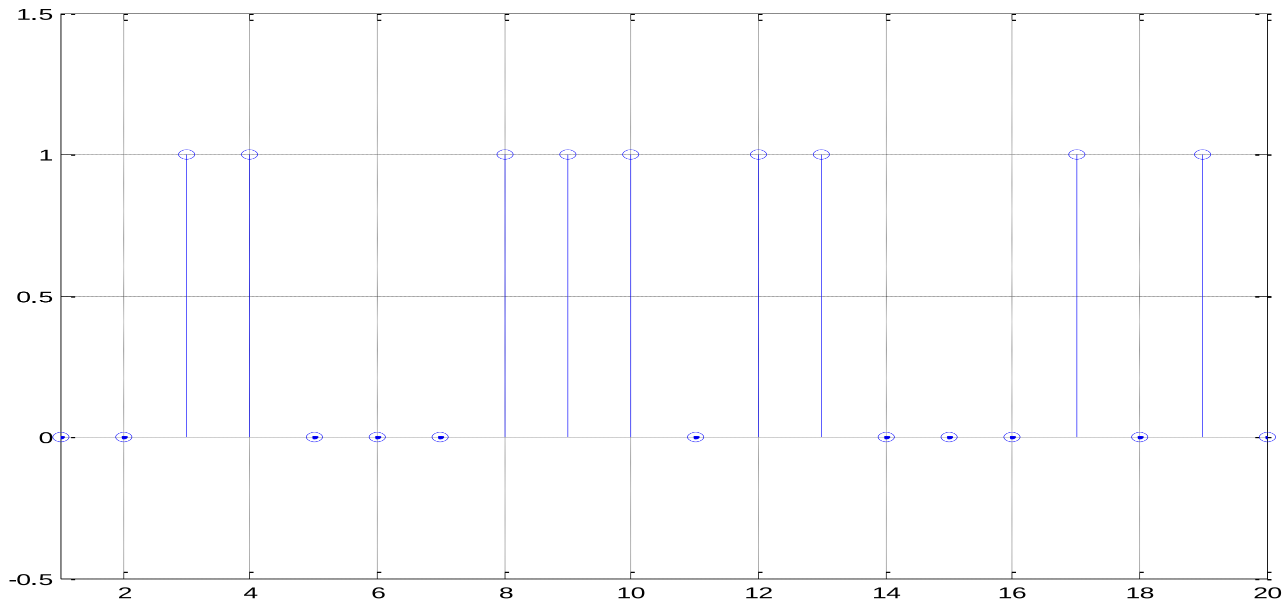
$$x[n] = 0 \quad n < n_0$$

$$atunci$$

$$y[n] \neq 0 \quad n > n_0$$

La fel pentru semnale continue.

# Cauzalitatea - exemplu




NON-CAUZAL

$$y[n]=\frac{x[n-1]+x[n]+x[n+1]}{3}$$

AVANS

CAUZAL

$$y[n]=\frac{x[n-2]+x[n-1]+x[n]}{3}$$

MOVING AVERAGE → MA

# Cauzalitatea

s

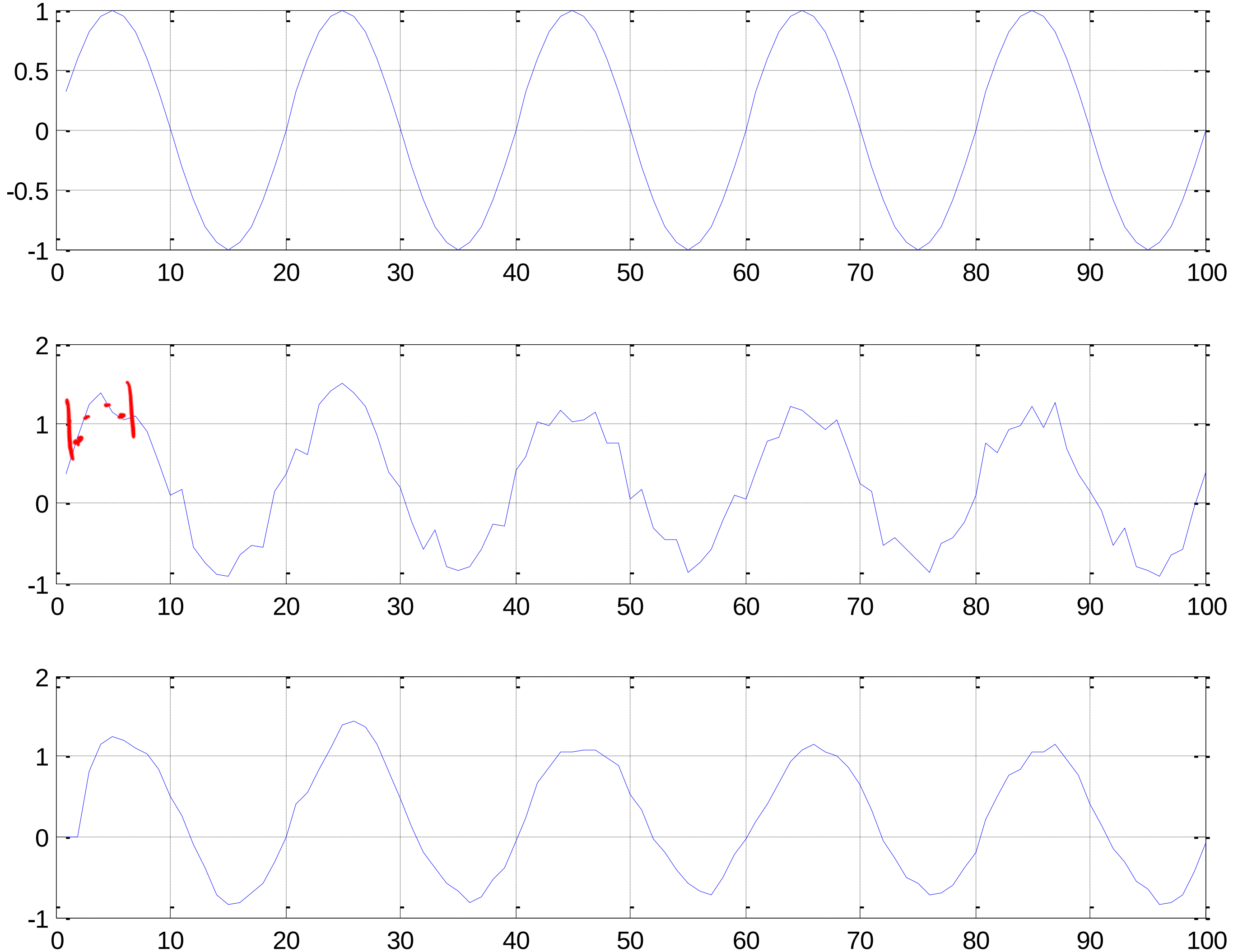
s + z

zgomot

$\mu = 0$

$y = \frac{s_{-1} + s_0 + s_1}{3}$

MA



# Cauzalitatea

```
clc
clear all
n=1:100;
x=sin(2*pi*0.05*n);
z=rand(1,length(n))/2;
s=x+z;
rez=zeros(1,length(n));
for (i=3:100)
    rez(i)=(s(i-2)+s(i-1)+s(i))/3;
end

figure
subplot(311),plot(n,x), grid on
subplot(312),plot(n,s), grid on
subplot(313),plot(n,rez), grid on
```

# Stabilitatea

Pentru orice semnal de intrare mărginit dpdv energetic, ieşirea este tot un semnal mărginit.

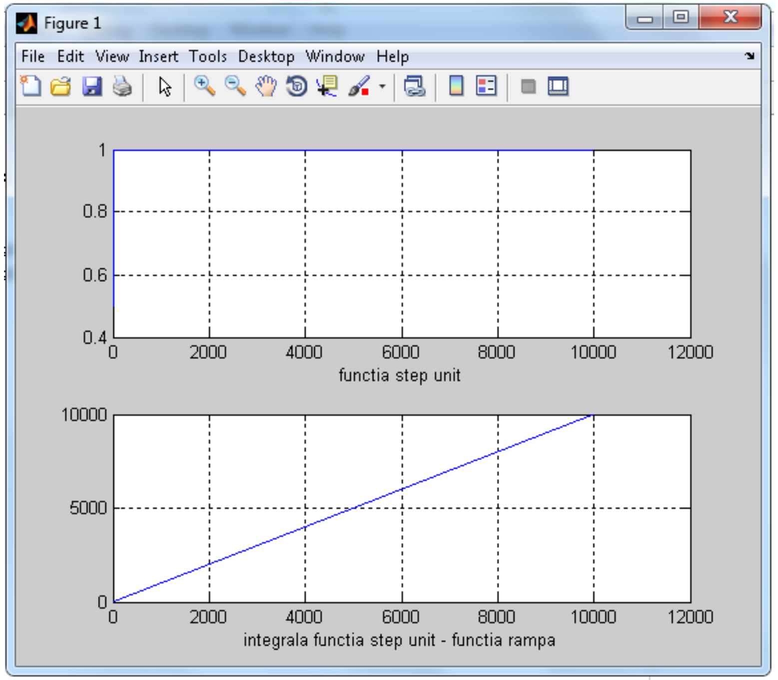
$$E = \sum_{(n)} |x[n]|^2 < \infty$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)dt$$

$$y[n] = a \cdot y[n-1] + x[n]$$

$$\underline{a > 1}$$



# Stabilitatea

# Invarianța

Dacă deplasez în timp intrarea, atunci şi ieșirea va fi deplasată (în timp) la fel.

$$x[n] \to y[n]$$

$$x[n-n_0] \to y[n-n_0]$$

$$x(t) \to y(t)$$

$$x(t-t_0) \to y(t-t_0)$$

# Invarianța

$$\cos\omega_0 t \cdot \cos\omega_1 t = \frac{\cos((\omega_1-\omega_0)t) - \cos((\omega_1+\omega_0)t)}{2}$$

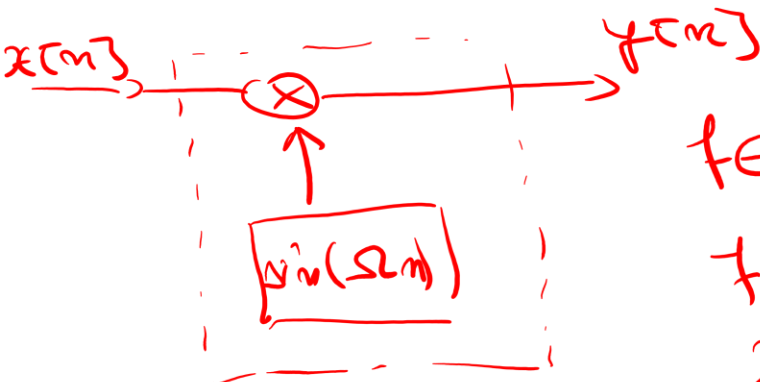
$\omega = 2\pi f$ $\quad f_1 >> f_0 \quad 100\cdot 10^6 - 10^4 \quad 100\cdot 10^6 + 10^4$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$$ **?** acumulator (~integrator in timp discret)

$$x[n] \rightarrow y[n]$$
$$y[n] = x[n]\cdot \sin[\Omega n]$$ **?**

$\tilde{y}[n] = x[n-n_0]\cdot \sin(\Omega n)$

$\tilde{y}[n] \neq y[n-n_0]$

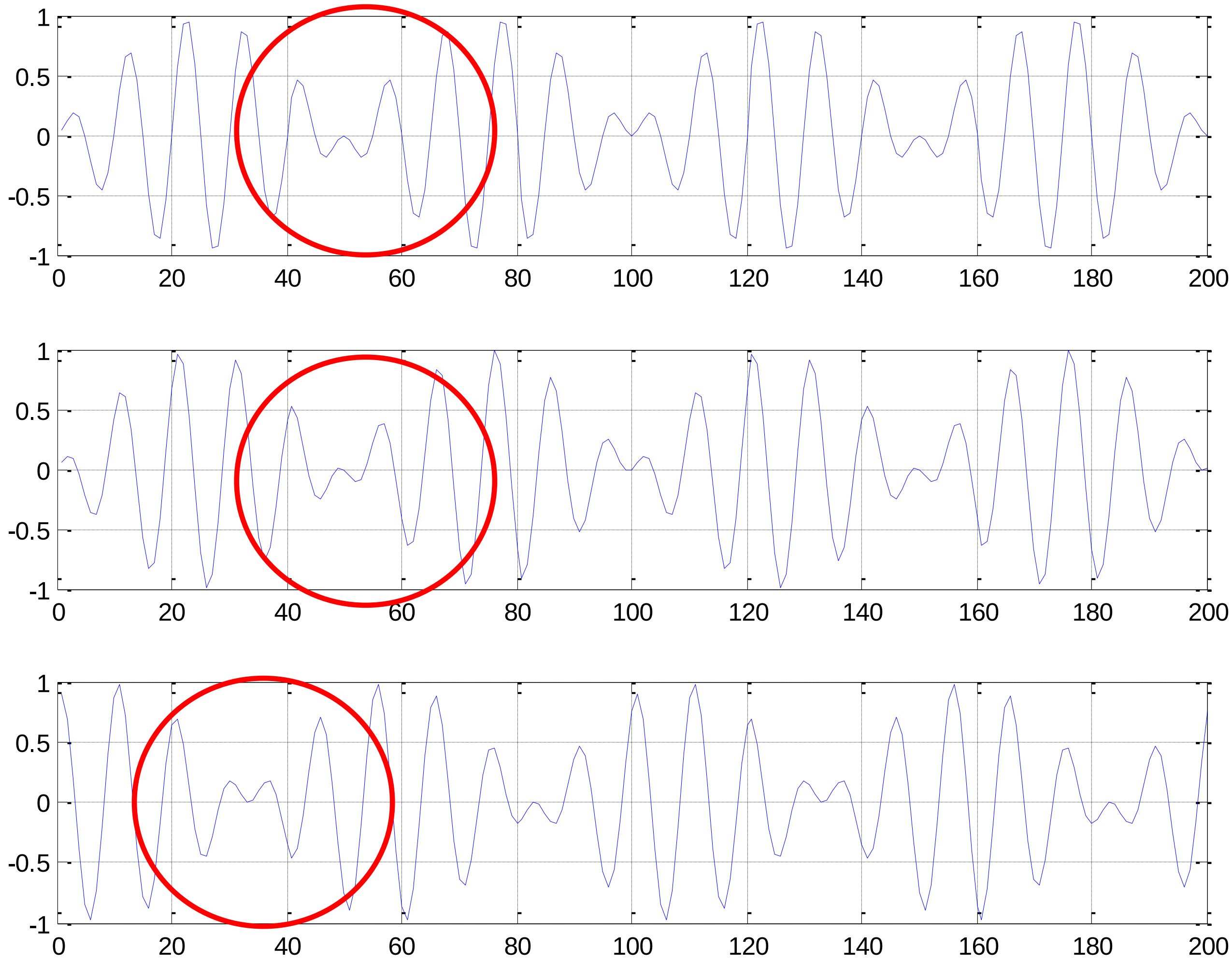



$f \in [0, 20\text{ kHz}]$

$f_0 = 10\text{ kHz}$, $c = 3\cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$\lambda = \frac{c}{f_0} = \frac{3\cdot 10^8}{10\cdot 10^3} \frac{m/s}{1/s} = 3\cdot 10^3\ m$

# Invarianța



# Liniaritatea

Dacă semnalul x1 generează ieșierea y1 iar semnalul y2 produce ieșirea y2, atunci o combinație liniară a acestora, va produce o combinație liniară a ieșirilor.

$$x_1[n] \to y_1[n]$$

$$x_2[n] \to y_2[n]$$

$$\Rightarrow \quad a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n] \to a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n]$$

$$x_1(t) \to y_1(t)$$

$$x_2(t) \to y_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \to a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

# Liniaritatea – exemple

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)dt$$ ? DA

$$y[n] = 2 \cdot x[n] + 3$$ ? DA

$$y[n] = (x[n])^2$$ ? НU

# Proprietățile sistemelor

1. Liniaritate
2. Invarianță
3. Cauzalitate
4. Stabilitate
5. Memoria
6. Inversabilitate

# Liniaritatea

$$x_1[n] \to y_1[n]$$

$$x_2[n] \to y_2[n]$$

$$\Rightarrow \quad a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n] \to a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n]$$

$$x_1(t) \to y_1(t)$$

$$x_2(t) \to y_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \to a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\ dt$$ **?**

$$y[n] = (x[n])^2$$ **?**

$$y[n] = 2 \cdot x[n] + 3$$ **?**

# Invarianța

Dacă deplasez în timp intrarea, atunci și ieșirea va fi deplasată (în timp) la fel.

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

$$x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$$

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

$$x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$$ **?** acumulator (~integrator in timp discret)

$$x[n] \rightarrow y[n]$$ **?**

$$y[n] = x[n] \cdot \sin[\Omega n]$$ **?**

# SALI & SNLI

**SALI** – sistem analogic liniar şi invariant în timp $x(t), t \in \mathbb{R}$, $[s]$
**SNLI** – sistem numeric liniar şi invariant $x[n], n \in \mathbb{Z}$
**LTI** – Linear time invariant
**LSI** – Linear shift invariant

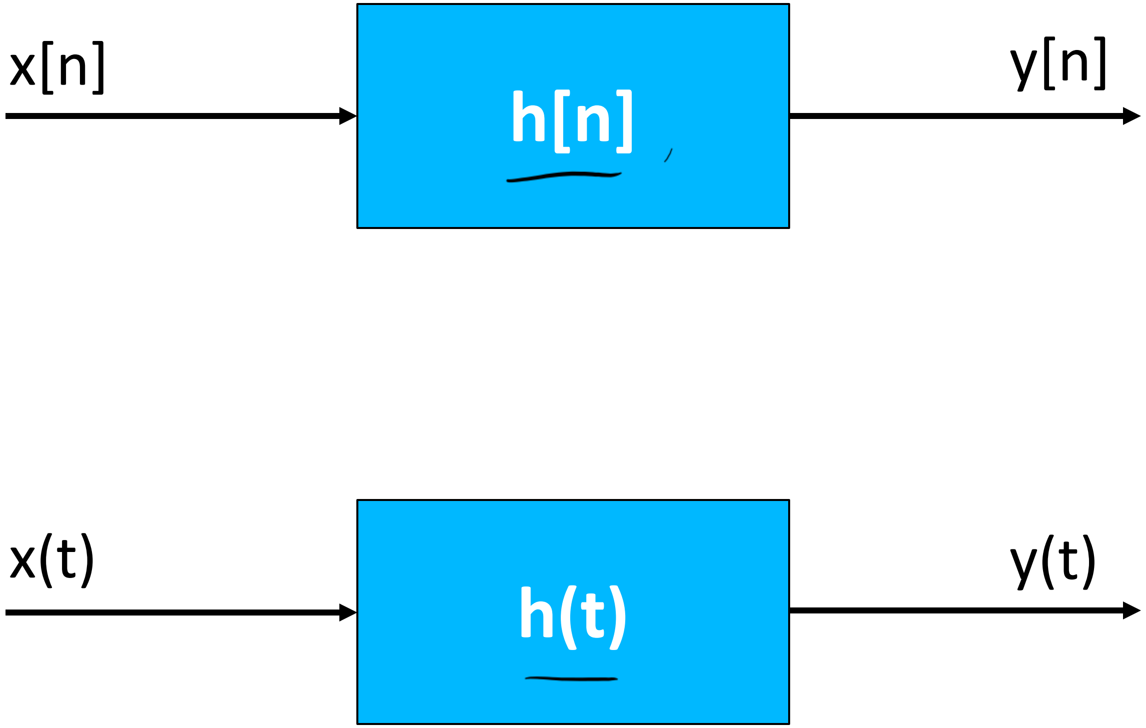
Analiza sistemelor numerice (& analogice) liniare invariante in timp

- Descompunerea semnalului de intrare intr-o suma de semnale elementare
- Calculam raspunsul sistemului la semnalele elementare si aplicam proprietatea de liniaritate
- Alegem semnalele elementare astfel incat raspunsul sistemului sa poate fi calculat usor. $\delta[n]$

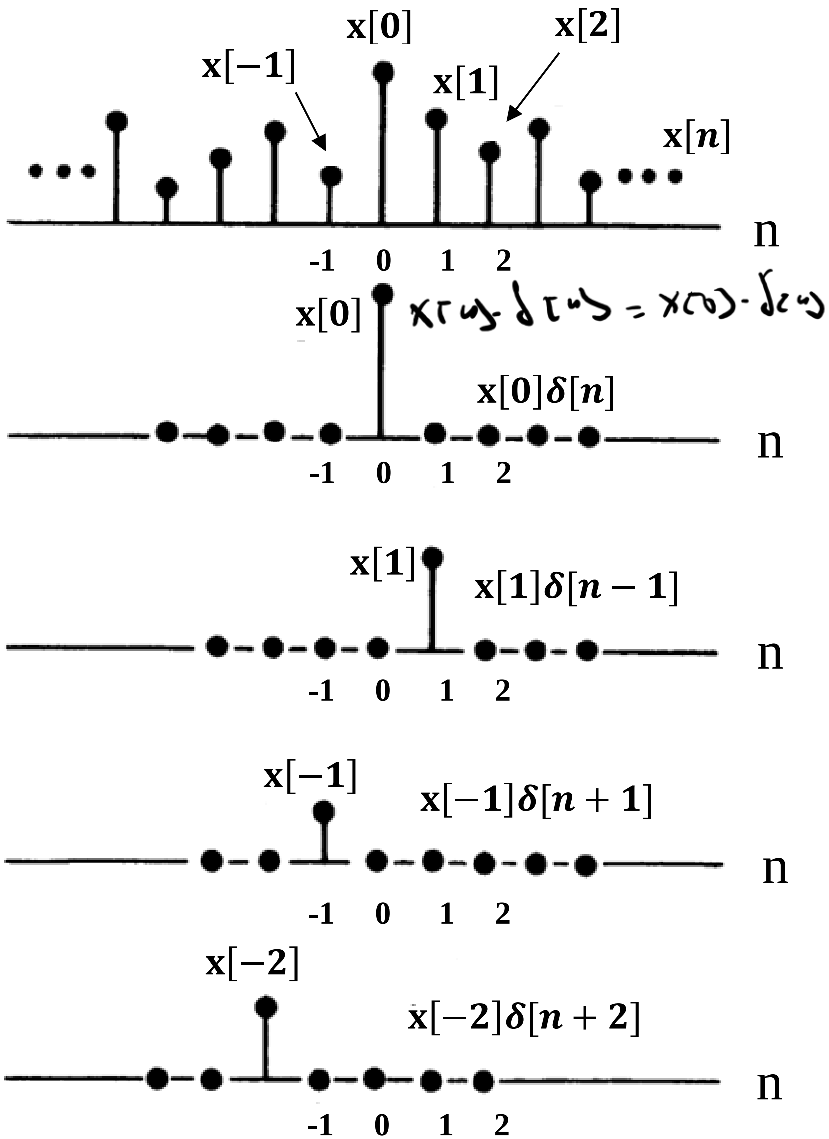
Metode pentru analiza sistemelor numerice (& analogice) liniare invariante în timp

- **Descompunere cu ajutorul unor impulsuri Dirac deplasate in timp; calculez răspunsul sistemului prin produsul de convoluție**
- **Descompunere cu ajutorul unor funcții exponențiale; analiza Fourier**

# Răspunsul sistemelor liniare și invariante



# Răspunsul SNLI

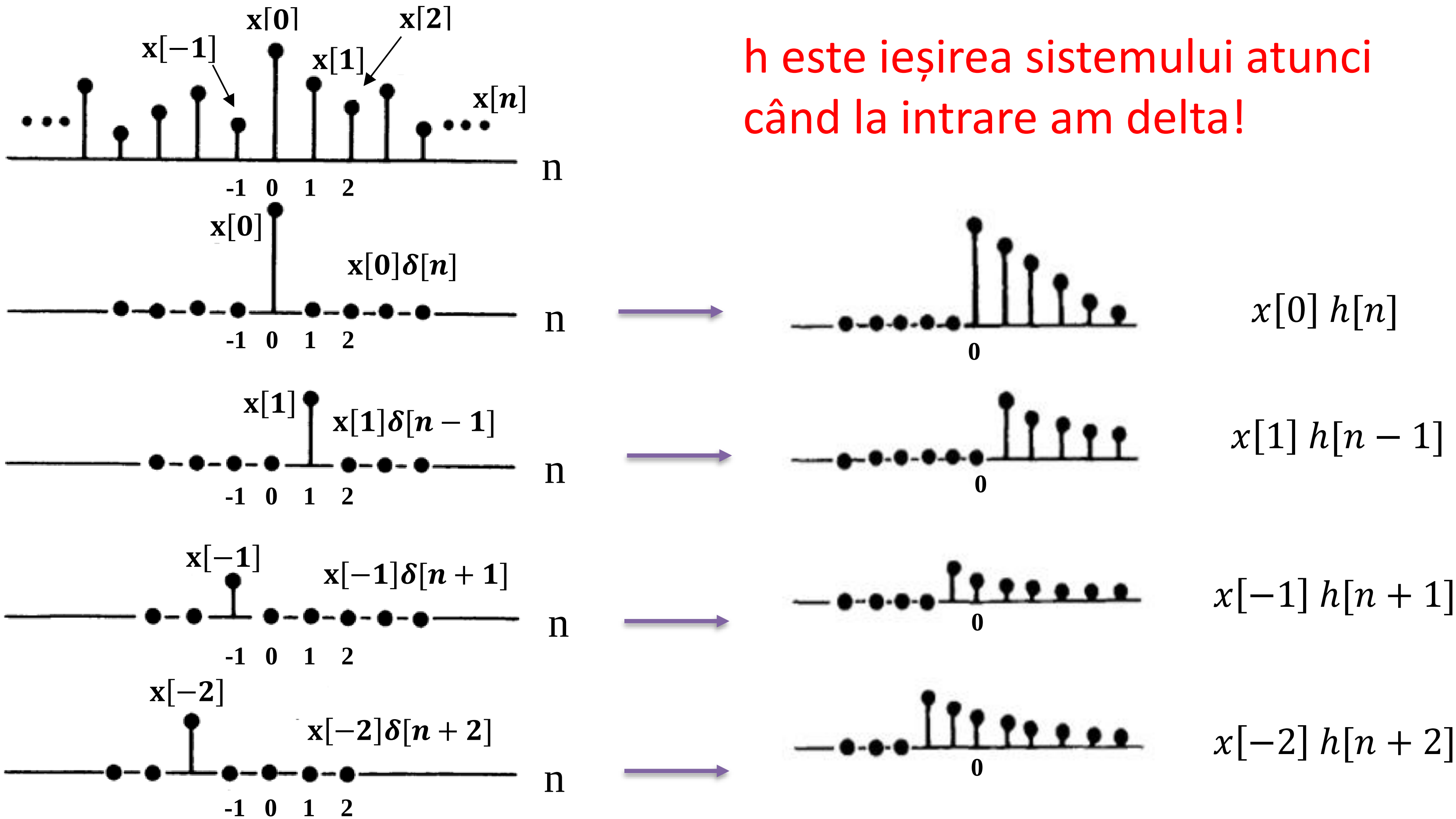



$$x[n] = x[0]\cdot\delta[n] + x[1]\cdot\delta[n-1] + \cdots + x[-1]\cdot\delta[n+1] + \cdots = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

Combinaţie liniară de semnale elementare!

# Răspunsul SNLI

h este ieșirea sistemului atunci când la intrare am delta!



# Răspunsul SNLI

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \xrightarrow{\text{sistem liniar}} y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h_k[n]$$

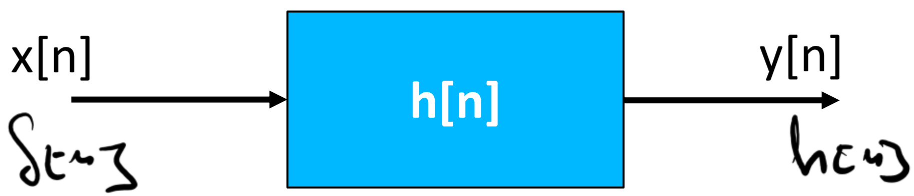
$$\delta[n-k] \longrightarrow h_k[n]$$

**Dacă este și invariant:** $h_k[n] = h_0[n-k]$

**SNLI:** $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n-k]$ → **suma de convoluție**

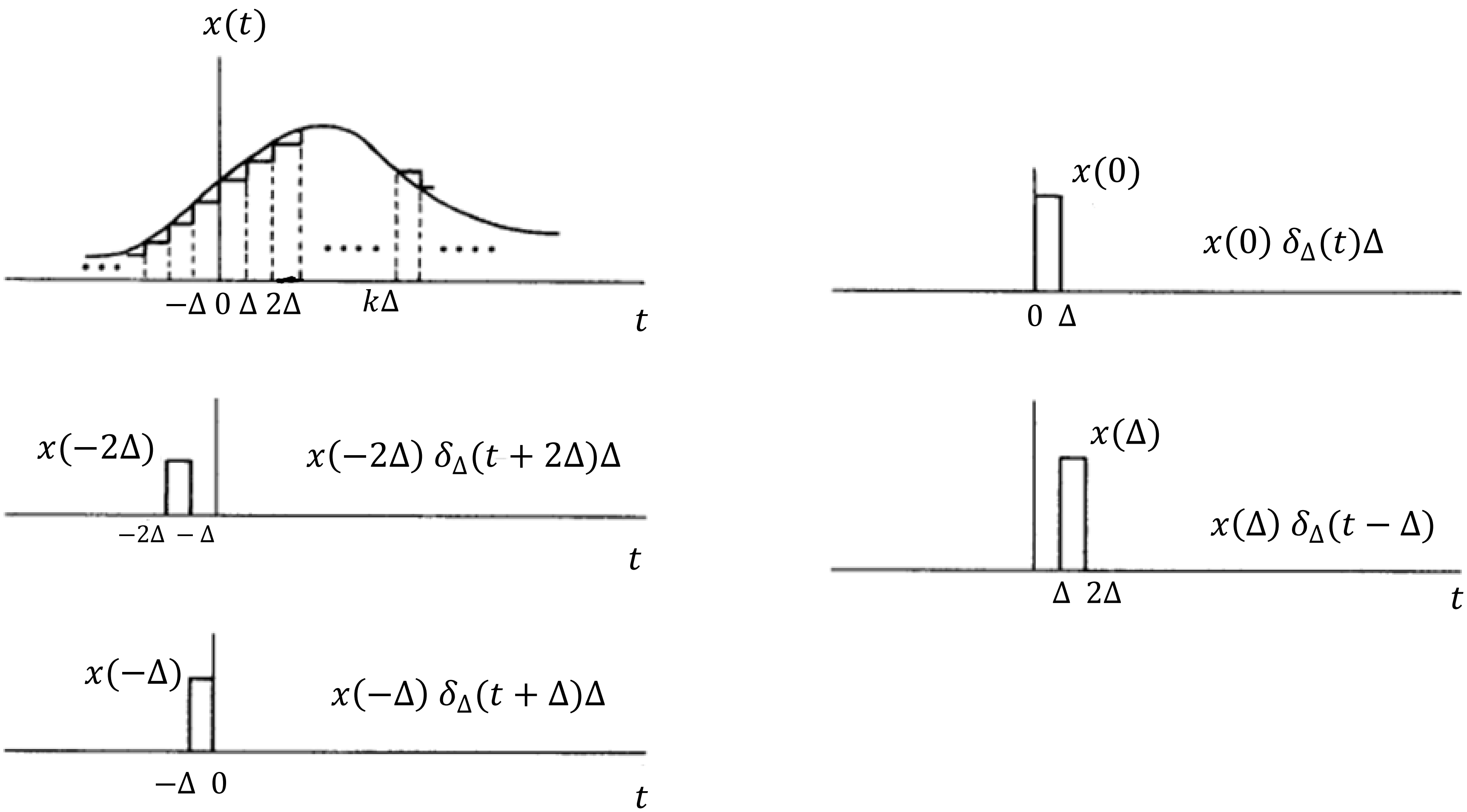
$h[n] \quad \rightarrow \textit{functie pondere}$

$y[n] = x[n] \otimes h[n] \quad \longrightarrow \textit{convolutie}$




$y[n] = \sum_{(k)} \delta[k] \cdot h[n-k] = h[n]$

# Răspunsul SALI




$$x(t) \cong x(o)\, \delta_\Delta(t)\, \Delta + x(\Delta)\, \delta_\Delta(t-\Delta)\, \Delta + x(-\Delta\,)\delta_\Delta(t+\Delta)\, \Delta + \ldots$$

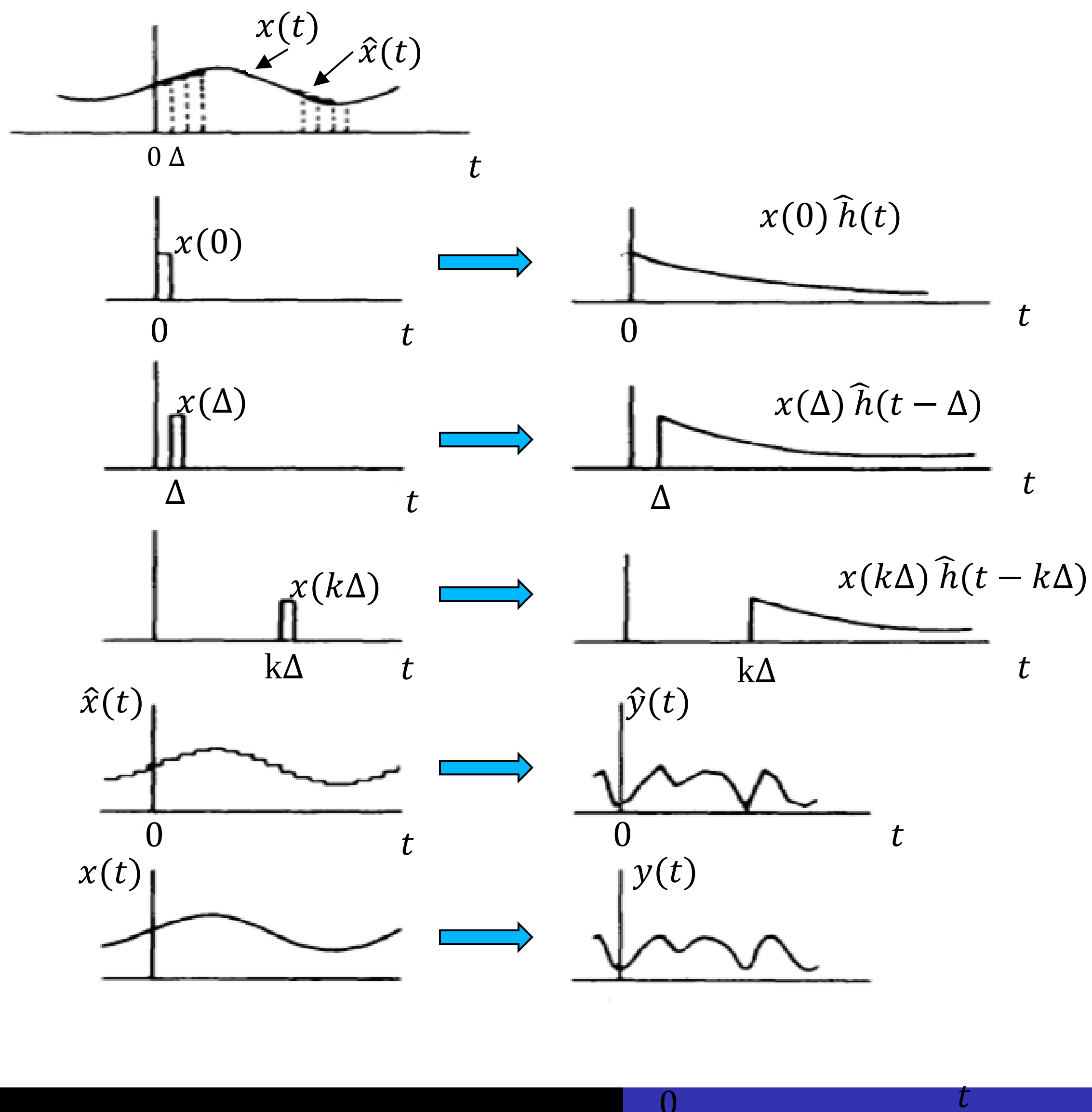
# Răspunsul SALI

$$x(t) \cong x(o)\, \delta_\Delta(t)\, \Delta + x(\Delta)\, \delta_\Delta(t-\Delta)\, \Delta + x(-\Delta\,)\delta_\Delta(t+\Delta)\, \Delta + \ldots$$

$$x(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta(t-k\Delta)\, \Delta$$

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta(t-k\Delta)\, \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$$

# Răspunsul SALI



# Răspunsul SALI

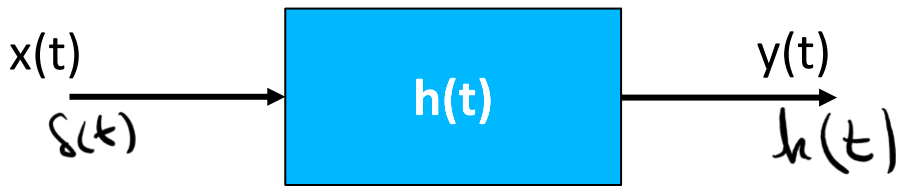
$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta(t - k\Delta)\, \Delta$$

**Sistem liniar:** $$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\, h_{k\Delta}(t)\, \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h_\tau(t)\, d\tau$$

**Sistem invariant în timp:** $$h_{k\Delta}(t) = h_o(t - k\Delta)$$
$$h_\tau(t) = h_o(t - \tau)$$

**SALI (LTI):** $$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau$$ $\rightarrow$ **integrala de convoluție**

$$h(t) \quad \rightarrow functie\ pondere$$
$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \quad \longrightarrow convolutie$$



# Răspunsul SNLI

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \xrightarrow{\textbf{sistem liniar}} y[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h_k[n]$$

$$\delta[n-k] \longrightarrow h_k[n]$$

**Dacă este și invariant:** $h_k[n] = h_0[n-k]$

**SNLI:** $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n-k]$ $\rightarrow$ **suma de convoluție**

$$h[n] \quad \rightarrow \textit{functie pondere}$$

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] \quad \longrightarrow \textit{produs de convolutie}$$

# Mecanismul convoluției (SNLI)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \cdot x[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

$x[0-k]$ $x[n]$

$n = 0$

$n = 1$

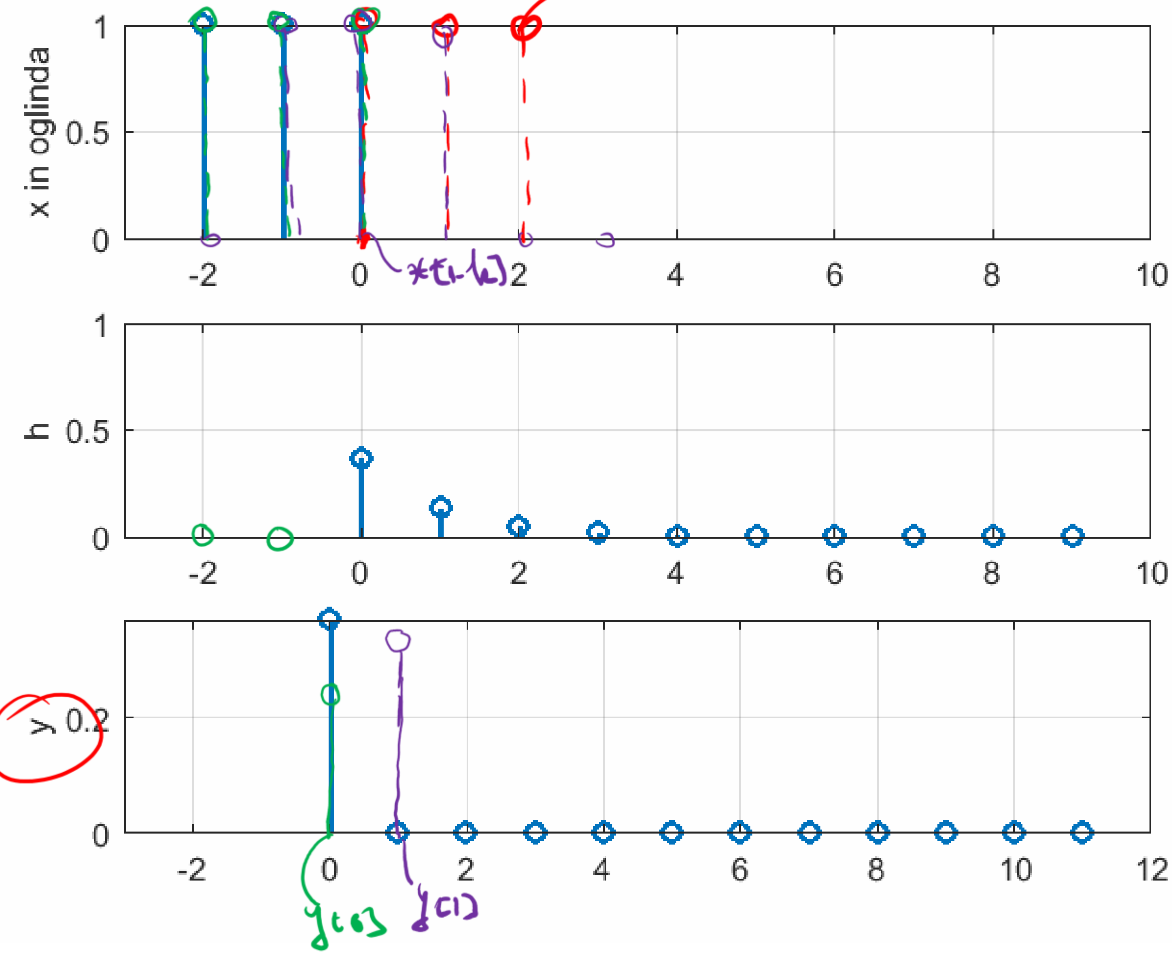
$$h[n] = \begin{cases} A \cdot e^{-an}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$h[n] \rightarrow L_h = 10$

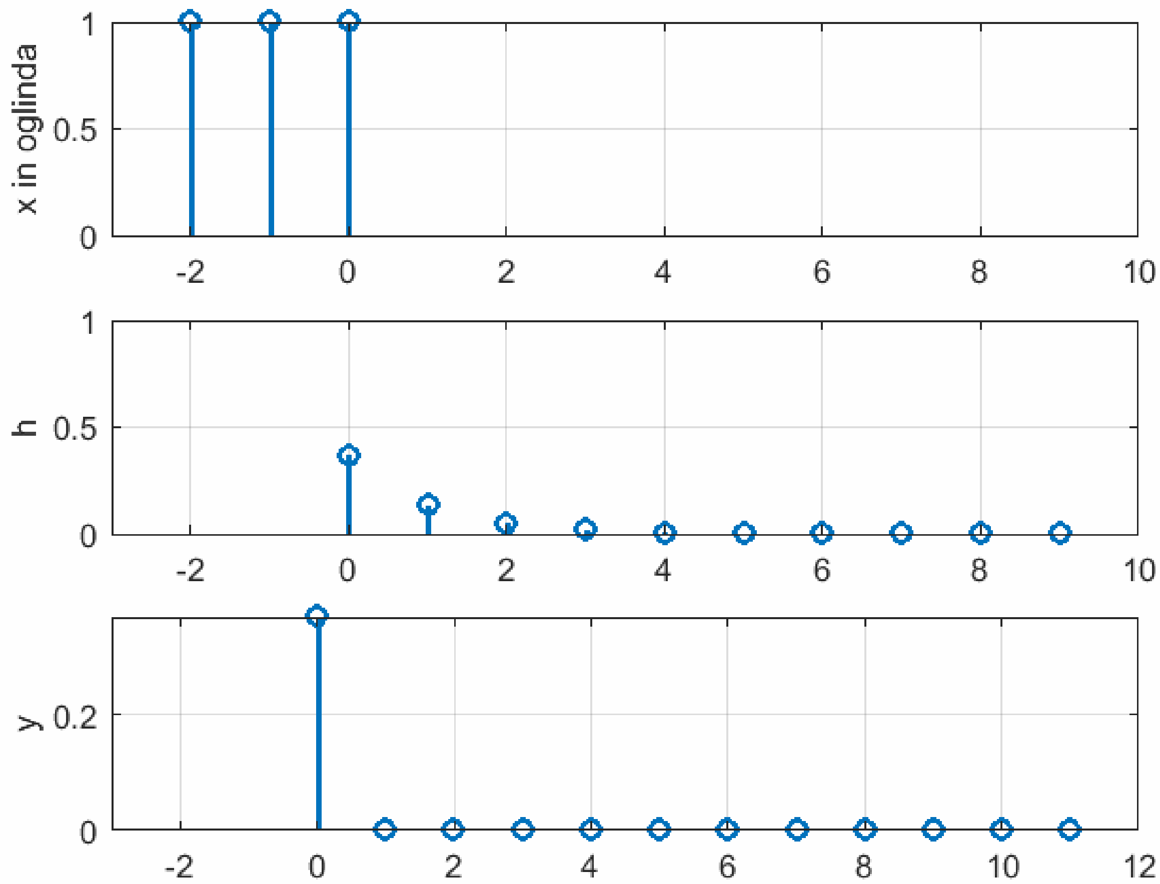
$x[n] \rightarrow L_x = 3$

$y[n] \rightarrow L_y = L_h + L_x - 1$



# Mecanismul convoluției (SNLI)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

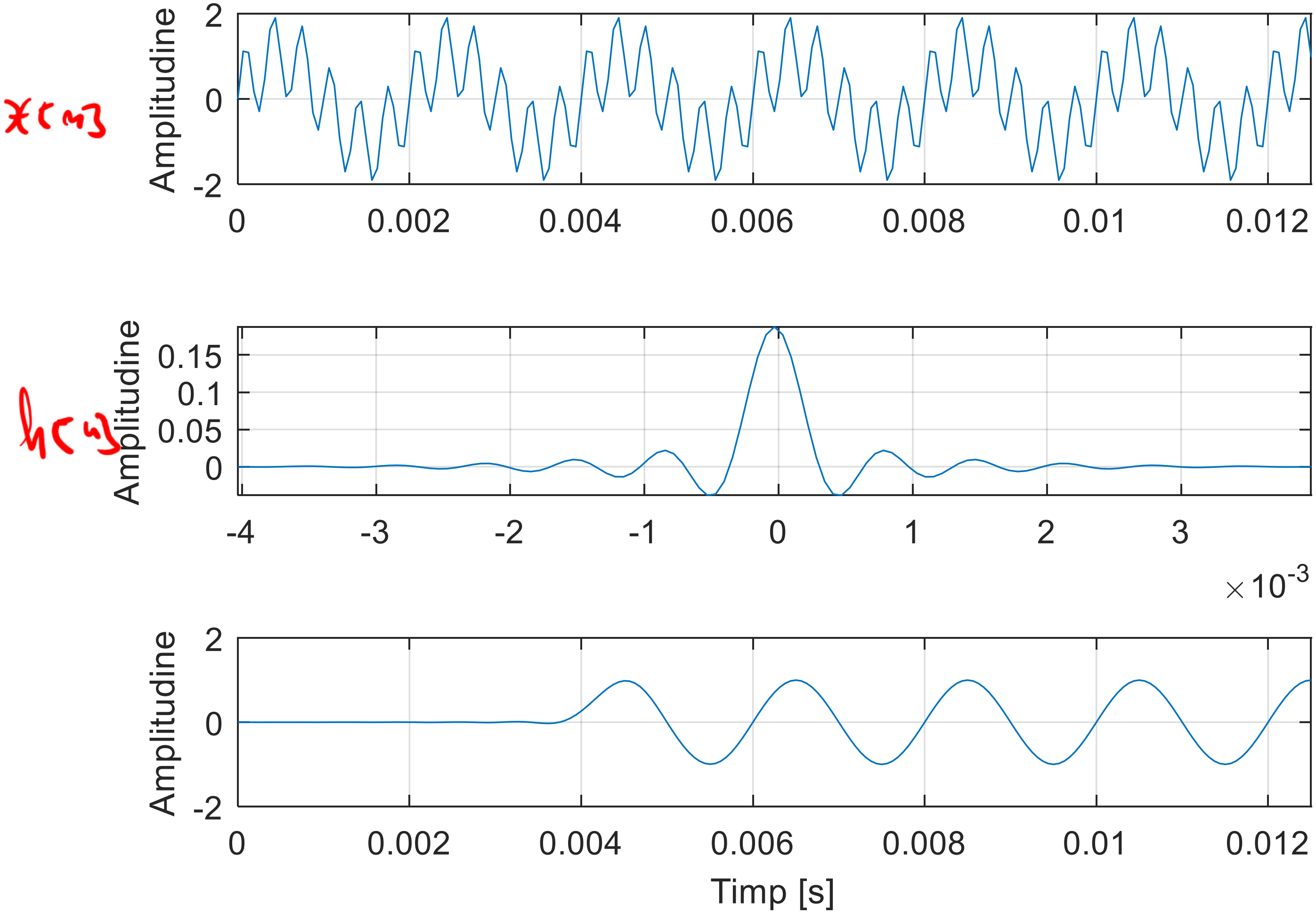


$$y(t) = x(t) * h(t) \quad , \; t \text{ - timp}$$

$$T_y = T_x + T_h - 1$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\, d\tau$$

# Răspunsul SNLI - exemplu



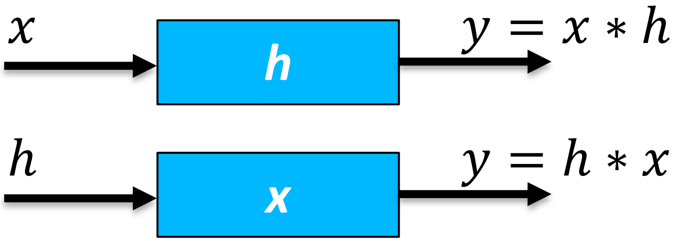
# Răspunsul SNLI - exemplu

```
clearvars
clc
close all

Fe=16000;
t=0:1/Fe:32000/Fe;
s1=sin(2*pi*500*t);
s2=sin(2*pi*3000*t);
s=s1+s2;

h=fir1(128,1500/(Fe/2),'low');
y=conv(s,h);
```

# Proprietățile convoluției

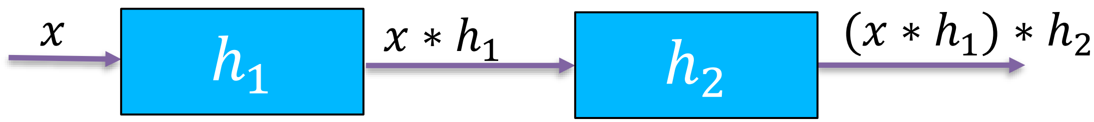
**Comutativitate**

$$x * h = h * x$$

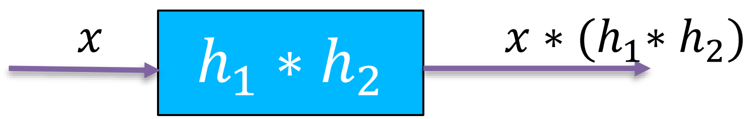



**Asociativitate**

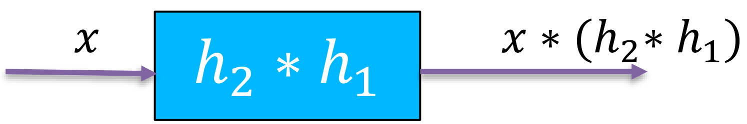
$$x * \{ h_1 * h_2 \} = \{ x * h_1 \} * h_2$$



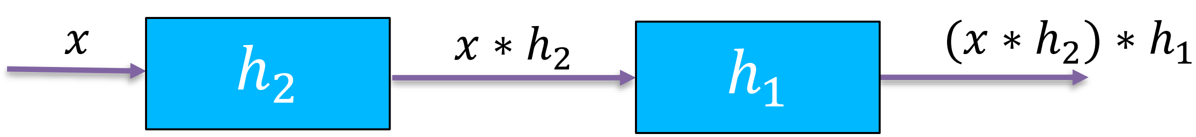

**Asociativitate:**




**Comutativitate:**



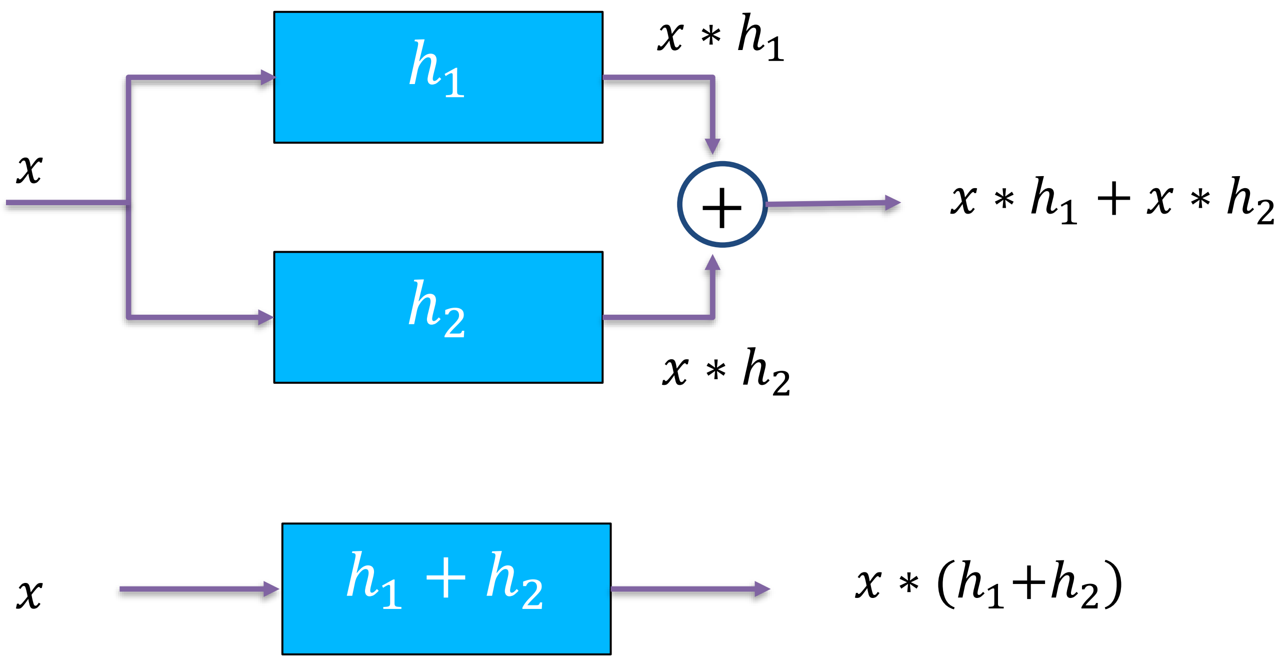

**Asociativitate:**



# Proprietățile convoluției

**Distributivitate**

$$x * \{ h_1 + h_2 \} = x * h_1 + x * h_2$$



# Proprietățile SALI/SNLI - cauzalitate

**Cauzalitatea SALI, SNLI**

- pentru a exista ieșire, sistemul trebuie să aibă intrare
- sistemul nu depinde de intrările viitoare

$x[n] \neq 0,\ n \geq 0 \Rightarrow y[n] \neq 0,\ n \geq 0$

$y[n] = \sum_{(k)} h[k] \cdot x[n-k]$

$h[n] \neq 0,\ n \geq 0\ ;\ h[n] = 0,\ n < 0$

$$y[n] = \frac{x[n-2] + x[n-1] + x[n]}{3}$$ ? - cauzal

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n+1]}{2}$$ ? - noncauzal

# Proprietățile SALI/SNLI - stabilitate

**Stabilitatea SALI, SNLI**

- intrare mărginită – ieșire mărginită
- mărginită = energie finită
- BIBO – Bouded Input Bounded Output

$$\underbrace{|y[n]|}_{<\infty} = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \quad < \infty$$

$$|x[n]| \leq B_x$$

$$|y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

# Proprietățile SALI/SNLI - stabilitate

**Stabilitatea SALI, SNLI**

- intrare mărginită – ieșire mărginită
- mărginită = energie finită

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^2 \, dt \quad < \infty$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} (y(t))^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \, \underline{h(t-\tau)} \, d\tau \right)^2 dt < \infty$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} (h(t))^2 \, dt \quad < \infty$$

SALI

$$|h(t)| < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^2 \, d\tau < \infty$$

SNLI

$$|h[n]| < \infty$$

$$\sum_{(n)} |h[n]|^2 < \infty$$

# Ecuații cu diferențe finite

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

**Funcția pondere – vector de numere – rezultă următoarele operații**

- întârzieri - produs cu Tt
- adunări
- înmulțiri

$$Y(z)\left(1+\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k}\right) = X(z) \cdot \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k}}$$

**Formă generală**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$a_0 = 1$

- cale „directă"

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

— buclă de reacție (feed-back)

# Funcția de transfer

**Reprezentarea SALI, SNLI cu ajutorul funcției de transfer**

- Pentru sisteme (și semnale) numerice – transformata Z
- Pentru sisteme (și semnale) analogice – transformata Laplace

$$y[n] = x[n] \otimes \boxed{h[n]}$$ - funcție pondere

$$\Big\downarrow \text{TZ}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$ , $z \in \mathbb{C}$

, $n \in \mathbb{Z}$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

* Teorema convoluției

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$ - funcție de transfer

- pentru SNLI funcția de transfer este un raport de 2 polinoame în z

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$z \in \mathbb{C}$

$P(z) = 0$ - rădăcinile se numesc zerouri

$Q(z) = 0$ - rădăcinile se numesc poli

# Funcția de transfer

**Reprezentarea SALI, SNLI cu ajutorul funcției de transfer**

- Pentru sisteme (și semnale) numerice – transformata Z
- Pentru sisteme (și semnale) analogice – transformata Laplace

$$y(t) = x(t) \otimes \boxed{h(t)}$$ - funcție pondere

TL

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-st} dt$$ $, s \in \mathbb{C}$ $, t \in \mathbb{R}$

* Teorema convoluției

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}}$$ - funcție de transfer

- pentru SALI funcția de transfer este un raport de 2 polinoame în z

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

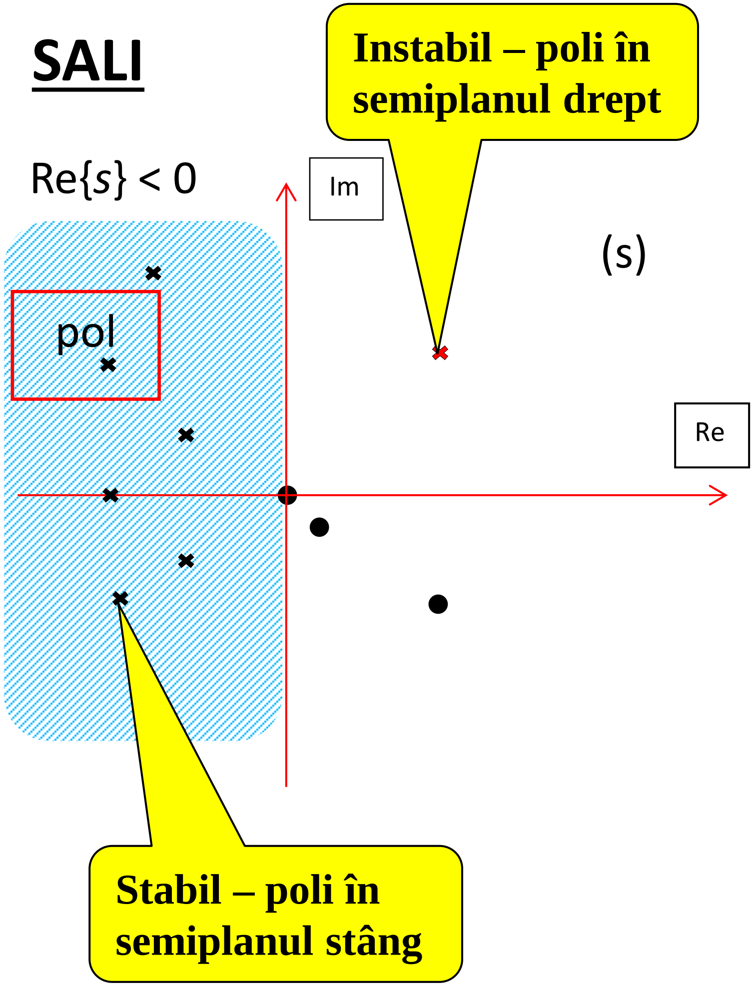
$P(s) = 0$ - rădăcinile se numesc zerouri

$Q(s) = 0$ - rădăcinile se numesc poli

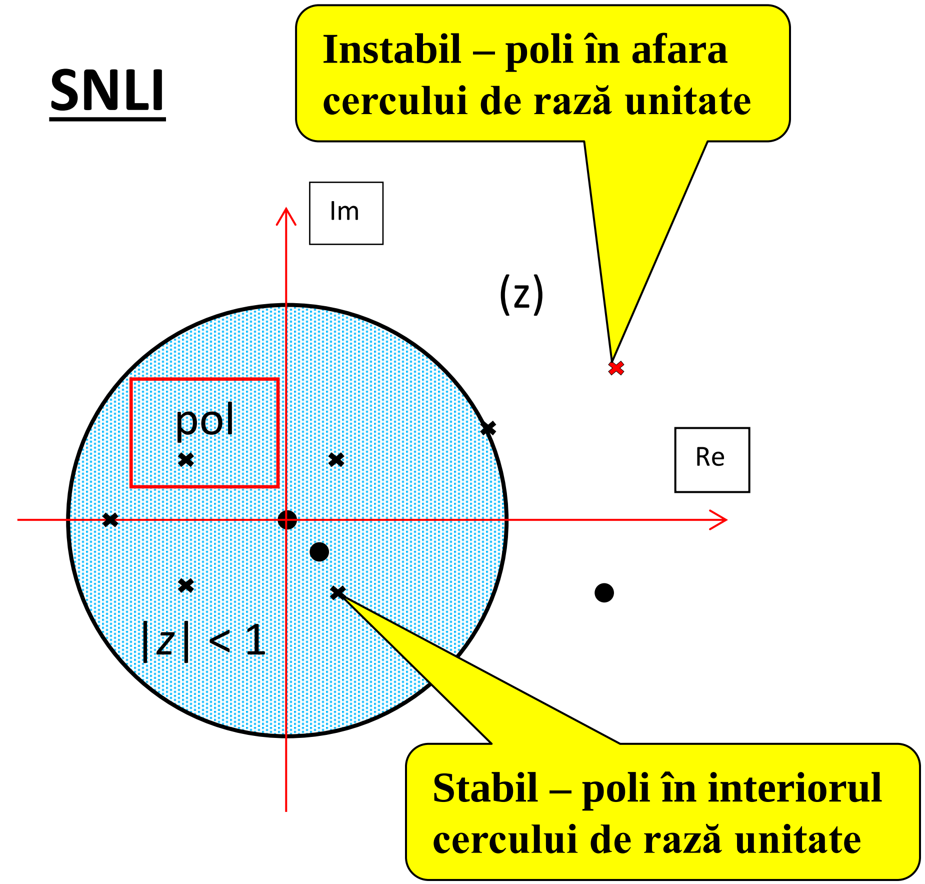
# Stabilitatea SALI/SNLI

## SALI

Re{$s$} < 0




## SNLI

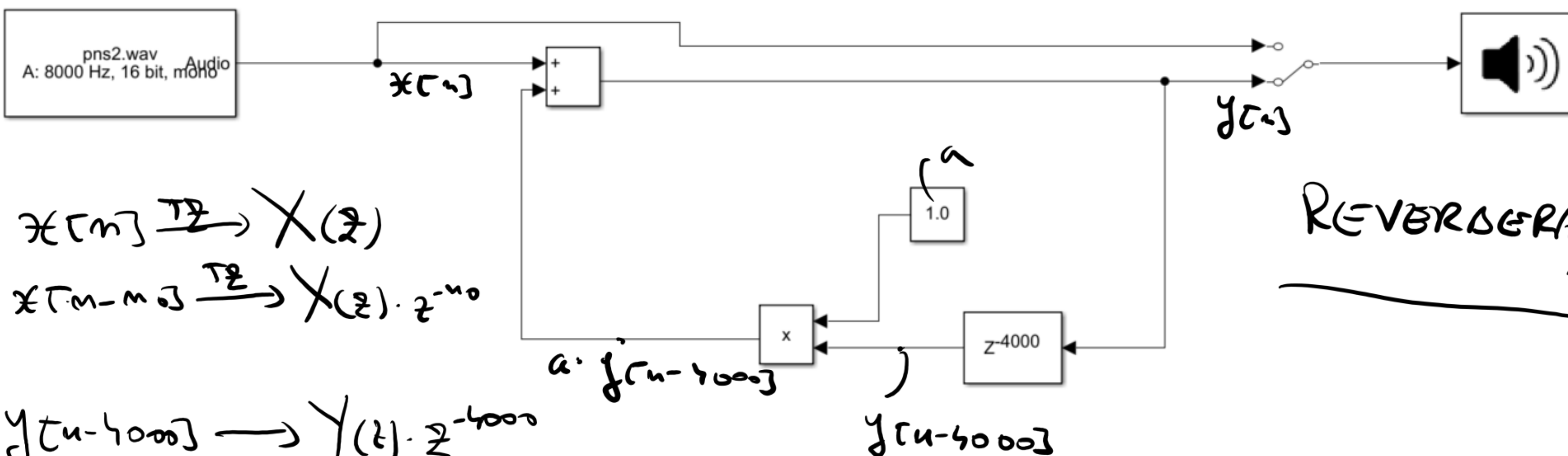



- Demonstrație:
  Ion Dragu, Ion Mihail-Iosif, *Prelucrarea Numerică a Semnalelor Discrete în Timp*, Editura Militară, 1985, pag. 26-28

# Stabilitatea sistemelor numerice

$$y[n] = a \cdot y[n-4000] + x[n]$$

$a = 0,7$ / $a > 1$ - INSTABIL, $|y[n]| \to \infty$




$x[n] \xrightarrow{TZ} X(z)$

$x[n-n_0] \xrightarrow{TZ} X(z) \cdot z^{-n_0}$

$y[n-4000] \longrightarrow Y(z) \cdot z^{-4000}$

REVERBERAȚIE

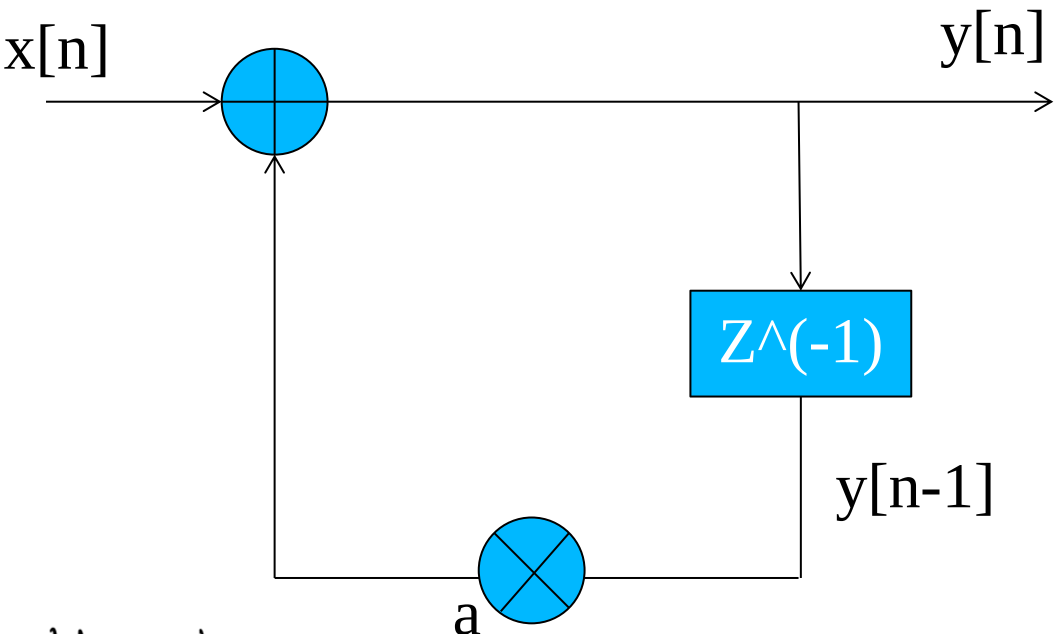
# Stabilitatea sistemelor numerice

$$y[n] = a \cdot y[n-1] + x[n]$$

$$\delta[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow h[n]$$

$$x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, \text{în rest} \end{cases}$$

$$y[n] = 0, n < 0 \ (CI)$$




$$y[0] = a \cdot y[-1] + x[0] = 1$$

$$y[1] = a \cdot y[0] + x[1] = a$$

$$y[2] = a \cdot y[1] + x[2] = a^2$$

$$y[3] = a \cdot y[2] + x[3] = a^3$$

$$y[k] = a^k$$

$|h[n]| < \infty$, $h[n] = 0, n < 0$

$h[n] = a^n$, $a \in [0, 1) \rightarrow |h[n]| < \infty$ STABIL | $a > 1$, $h[n] \rightarrow \infty$ INSTABIL

# Stabilitatea sistemelor numerice

$$y[n] = a \cdot y[n-1] + x[n]$$

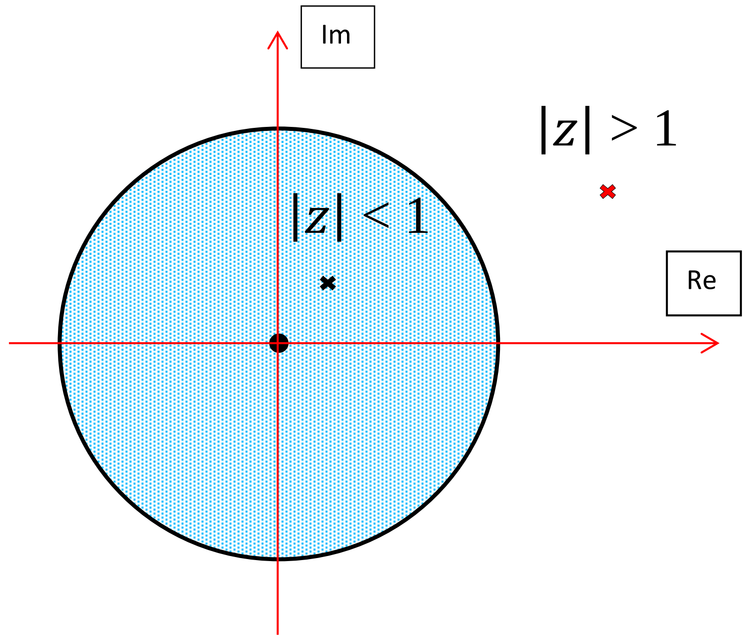
$$Y(z) = a \cdot Y(z) z^{-1} + X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = H(z)$$

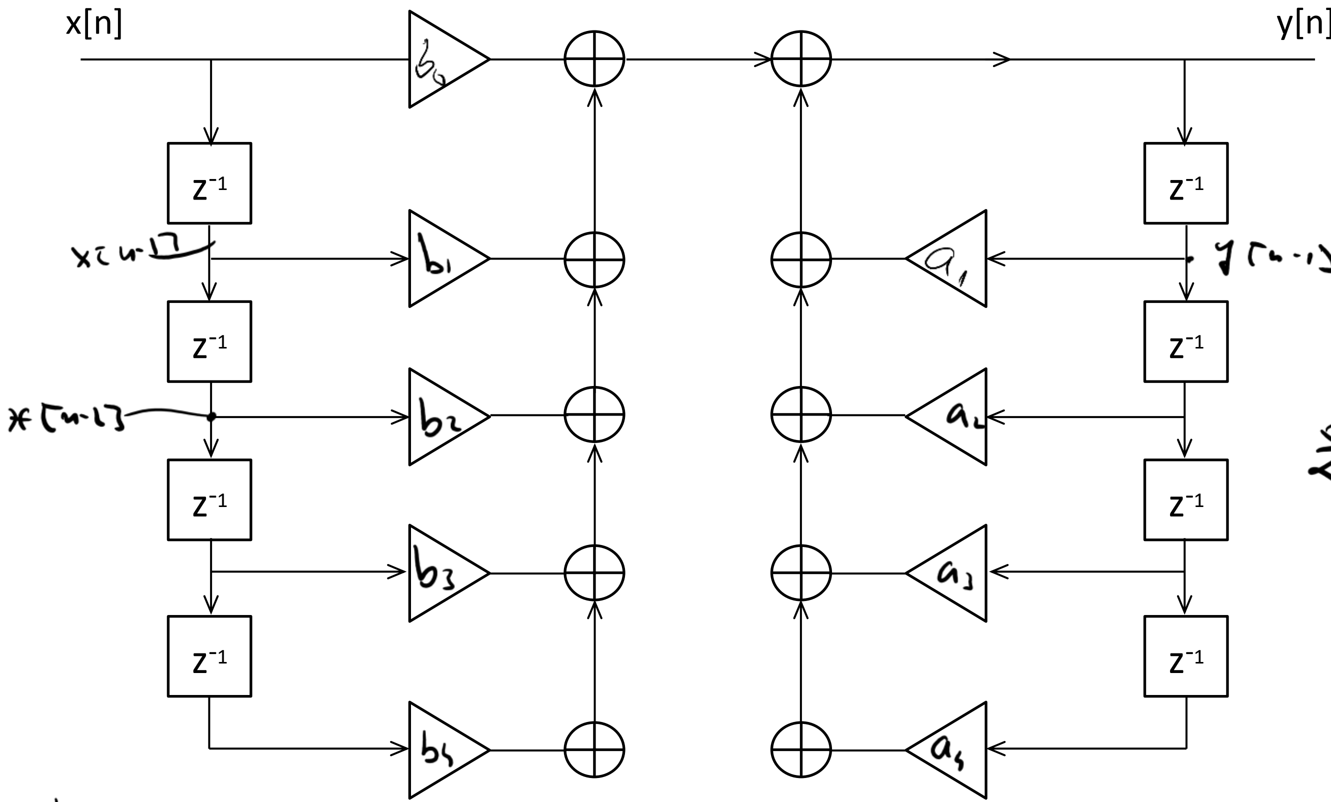
$\boxed{z = a \quad \text{pol}}$

$0 < a < 1$ - STABIL

$a > 1$ - INSTABIL ($|z| > 1$)



# Ecuații cu diferențe finite




zplane

$y[n] = x[n]\cdot b_0 + x[n-1]\cdot b_1 + x[n-2]\cdot b_2 + x[n-3]\cdot b_3 + x[n-4]\cdot b_4 + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] + a_4 y[n-4]$

| | b | a |
|---|---|---|
| 0 | 0.7571 | 1.0000 |
| 1 | 0.6024 | 0.6871 |
| 2 | 1.6340 | 1.5741 |
| 3 | 0.6024 | 0.5176 |
| 4 | 0.7571 | 0.5741 |

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{4} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{4} a_k \cdot z^{-k}}$$

# Ecuații cu diferențe finite

a. Care este funcția de transfer (H(z)) și care este relația de intrare-ieșire ce caracterizează sistemul? Este acest sistem stabil? (Justificați răspunsul.)
b. Care este funcția pondere a acestui sistem?
c. Verificați, folosind Matlab sau Simulink, dacă acest sistem este invariant. Explicați cum ați verificat și schițați grafic rezultatele relevante.
d. Ce tip de filtru este sistemul (FIR/IIR, FTJ/FTS/FTB/FOB)? Schițați caracteristica de amplitudine a sistemului. Marcați pe grafic valorile relevante.
e. Explicați de ce este sau de ce nu este un sistem cu memorie, sistemul din Figura 1.

# Ecuații cu diferențe finite

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2.2403 + 2.4908z^{-1} + 2.2403z^{-2}}{1 - 0.4z^{-1} + 0.75z^{-2}}$$

$$Y(z)(1 - 0.4z^{-1} + 0.75z^{-2}) = X(z)\ (2.2403 + 2.4908z^{-1} + 2.2403z^{-2})$$

$$y[n] - 0.4y[n-1] + 0.75y[n-2] = 2.2403x[n] + 2.4908x[n-1] + 2.2403x[n-2]$$

$$y[n] = +0.4y[n-1] - 0.75y[n-2] + 2.2403x[n] + 2.4908x[n-1] + 2.2403x[n-2]$$

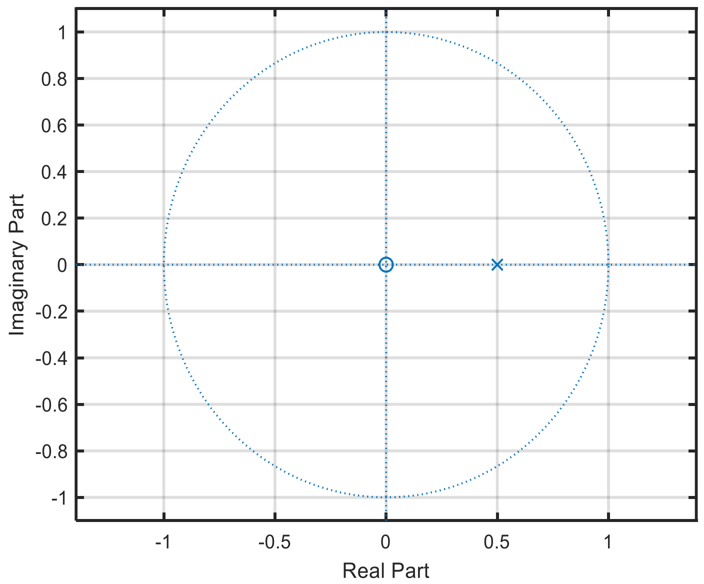
# Reprezentarea H(z) în Matlab

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + 0 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$$

$$num = [b_0, 0, b_2]$$

$$den = [1, -a_a, -a_2]$$

```
>> num=[1]

num =

     1

>> den=[1 -0.5]

den =

    1.0000   -0.5000

>> zplane(num,den)
```



# Filtru numeric cu medie glisantă

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4] + x[n-5]}{6}$$

$$= \frac{1 \cdot x[n] + 1 \cdot x[n-1] + 1 \cdot x[n-2] + 1 \cdot x[n-3] + 1 \cdot x[n-4] + 1 \cdot x[n-5]}{6}$$