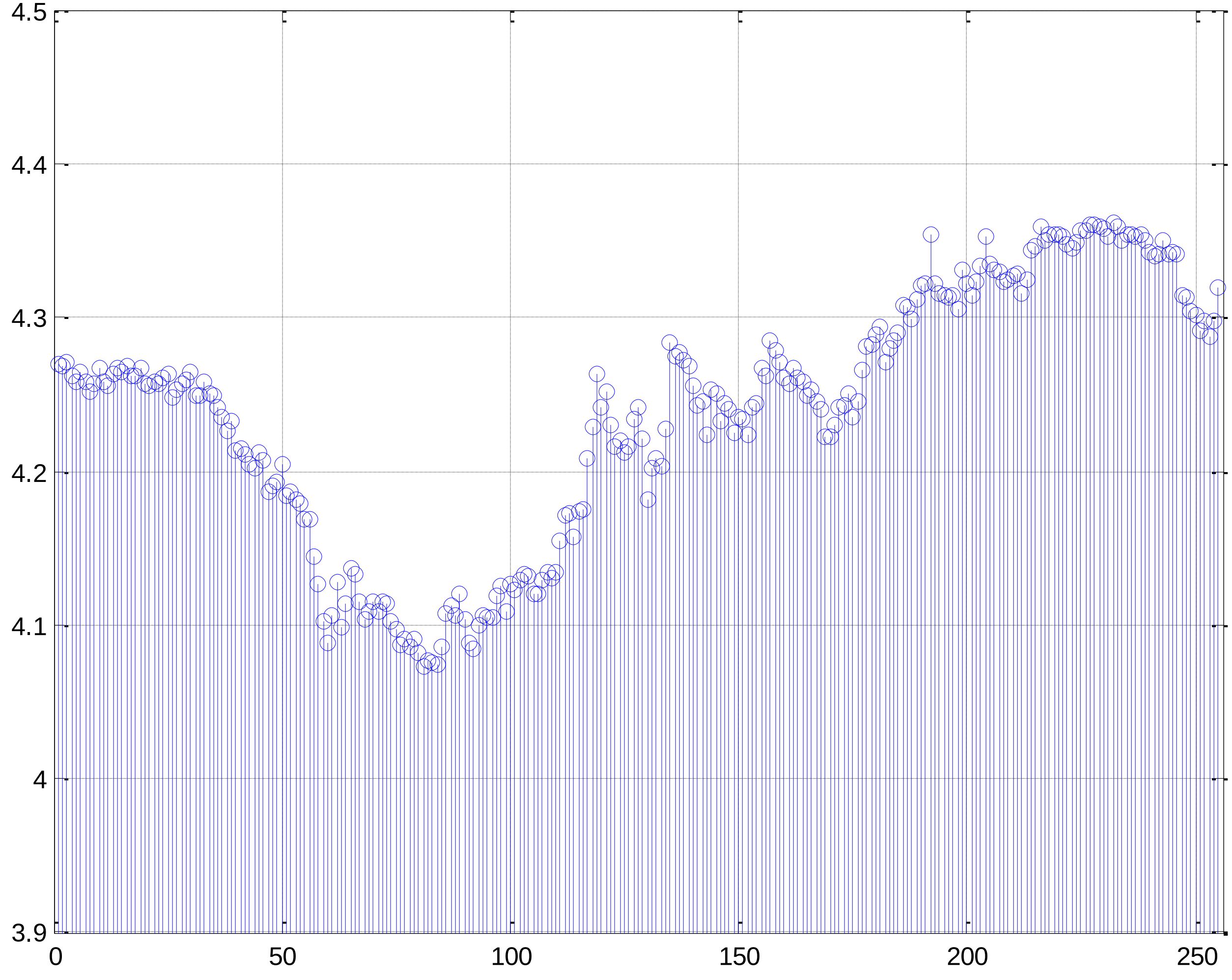
Transformări elementare.
Energia și puterea unui semnal

Cuprins

- Semnal continuu vs semnal discret
- Reprezentarea semnalelor
- Transformări elementare în raport cu (t) sau n
- Paritate-imparitate
- Periodicitate
- Asocierea unui semnal periodic unuia neperiodic
- Energia şi puterea unui semnal

Exemplu de semnal discret



Exemplu de semnal discret

Fiecărui moment de timp la care facem măsurătoarea i se asociază o valoare.

ziua lucrătoare – cursul de schimb

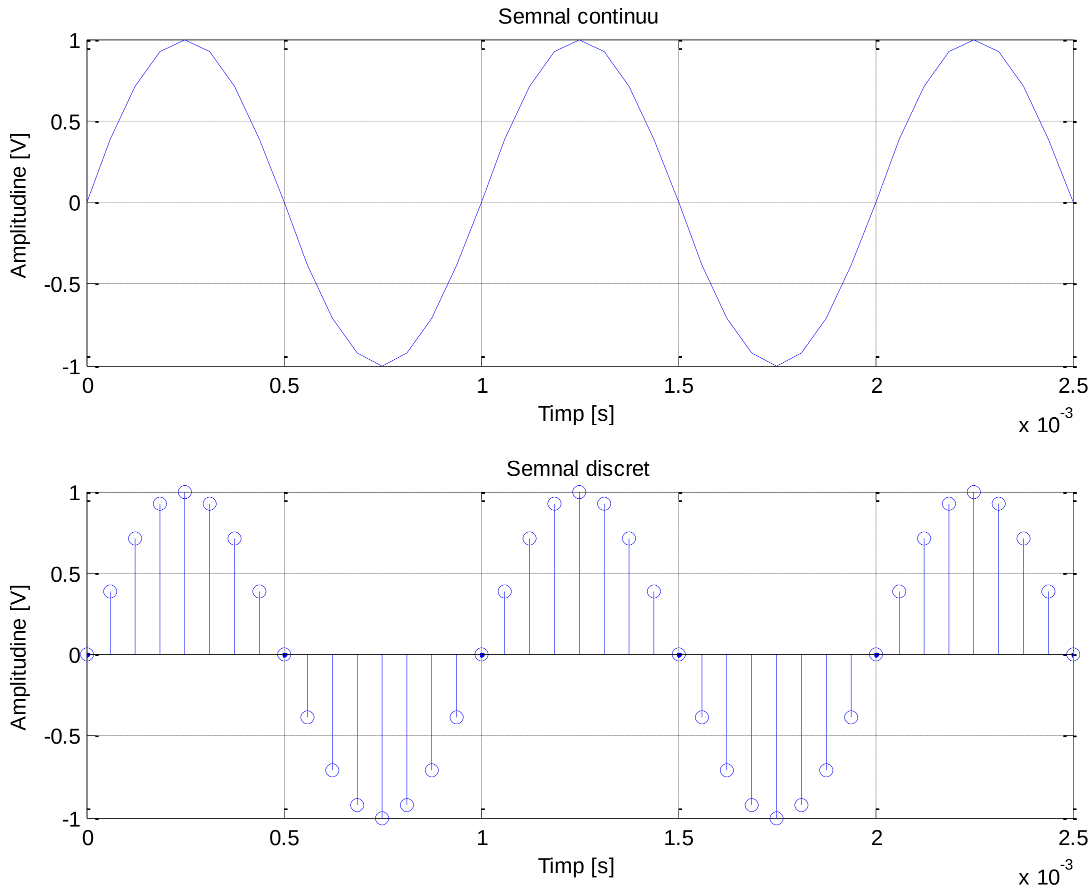
Două elemente cheie
- timp discret
- valori discrete (lei/bani – euro/centi)

AVANTAJE
-pot sa prelucrez datele (măsurătorile) pe calculator
-pot să folosesc același algoritm pentru date diferite
-pot sa stochez datele foarte ușor
-pot sa transmit datele foarte ușor

Semnal continuu vs semnal digital

Modelul anterior (timp discret-valori discrete) poate fi utilizat pentru reprezentarea unui fenomen real, continuu (infinit)?

DA.



Semnal măsurabil

Marea majoritate a semnalelor importante în tehnică prezintă următoarele proprietăți:

- sunt de durată finită, adică $s(t)$ ($s[n]$) este definit pe suport mărginit
- sunt măsurabile, adică aparțin clasei de funcții $L^{(1)}$ sau $L^{(2)}$

$L^{(1)}$ – funcții de modul integrabile

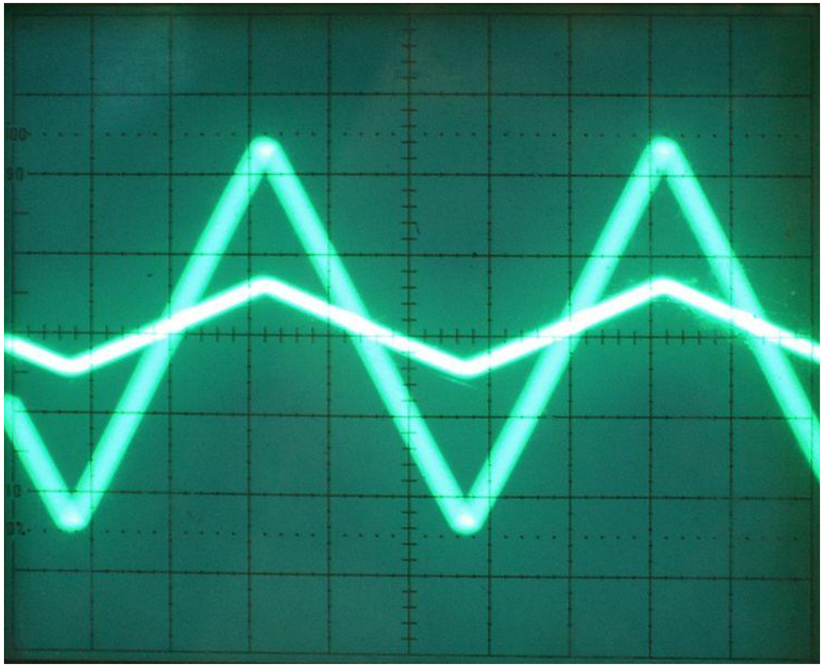
$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \varepsilon \qquad\qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |s[n]| < \varepsilon$$

$L^{(2)}$ – funcții de pătrat integrabil (de energie finită)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \varepsilon \qquad\qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |s[n]|^2 < \varepsilon$$

Semnal continuu (analogic)

Semnale analogice - semnale care variază *continuu* în timp
Reprezentare – funcții continue



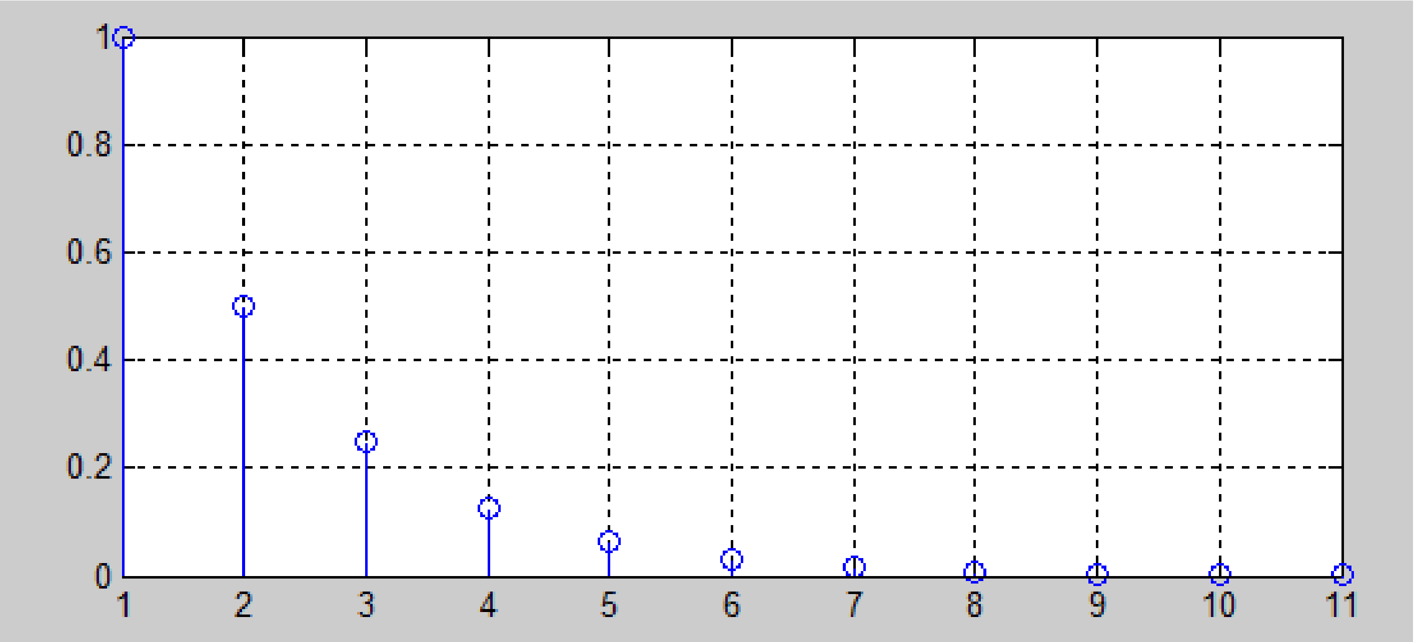
$s: \mathbb{R} \to [-1; 1] \subset \mathbb{R}$

$s(t) = \sin(t)$

Sursa:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oscilloscope_Triangle_Wave.jpg

Semnal numeric (discret)

Reprezentare – funcții discrete



x= {… , 1, 2,3,0.5,9, … . }

Semnal numeric (discret)

-timp discret
-valori discrete sau continue

$\mathrm{x}[n] = y$

$\mathrm{x}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$x[n]: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

$x[n]: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

- **n** este adimensional

$x[n]: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$x[n]: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

Transformări elementare & proprietăți

Transformări elementare

- Scalarea în amplitudine
- Scalarea în timp și reflexia
- Întârziere/avans

Proprietăți

- paritate/imparitate
- Periodicitate
- Semnal mărginit

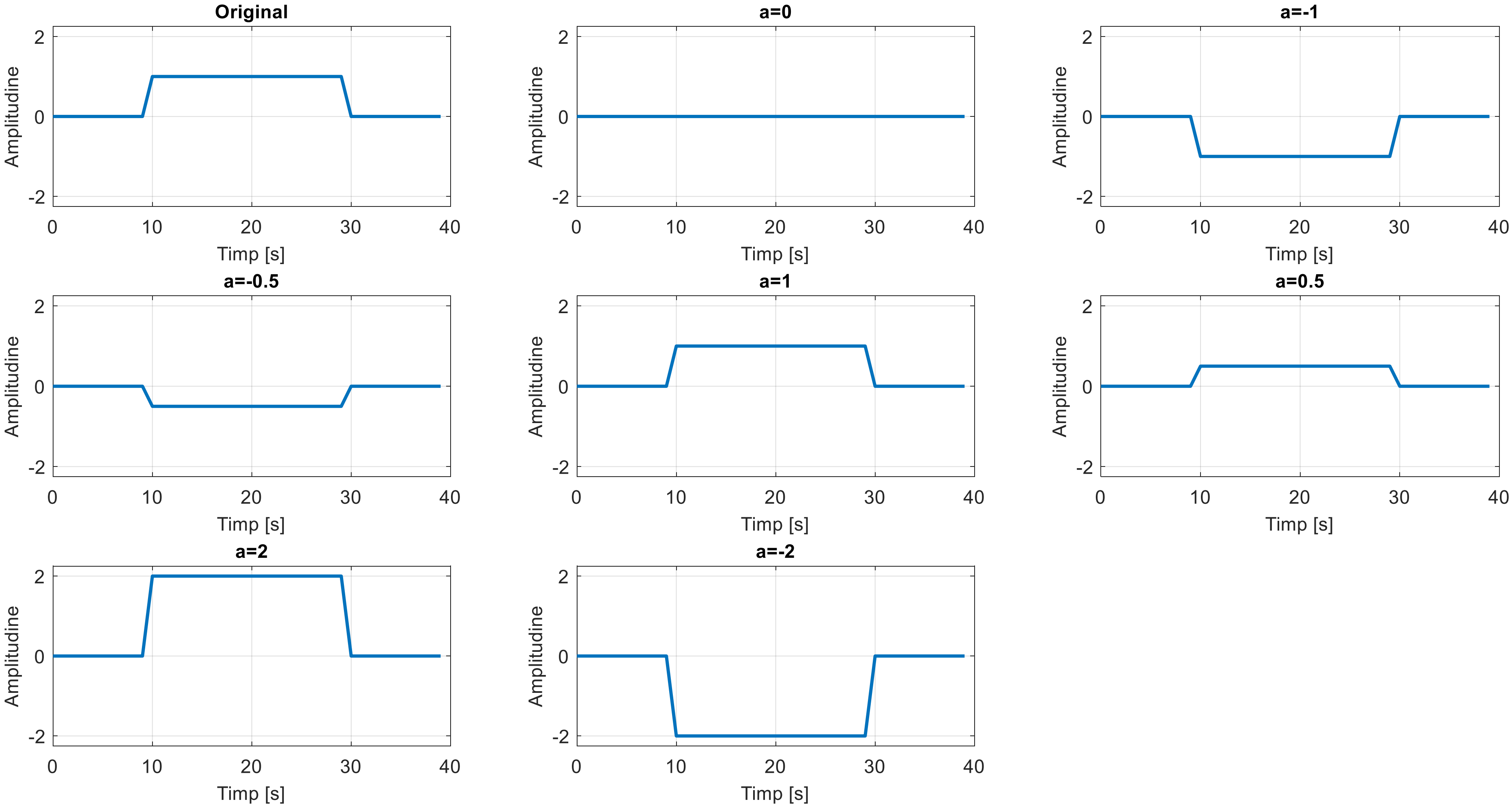
Scalarea în amplitudine

$$y[n] = a \cdot x[n]$$

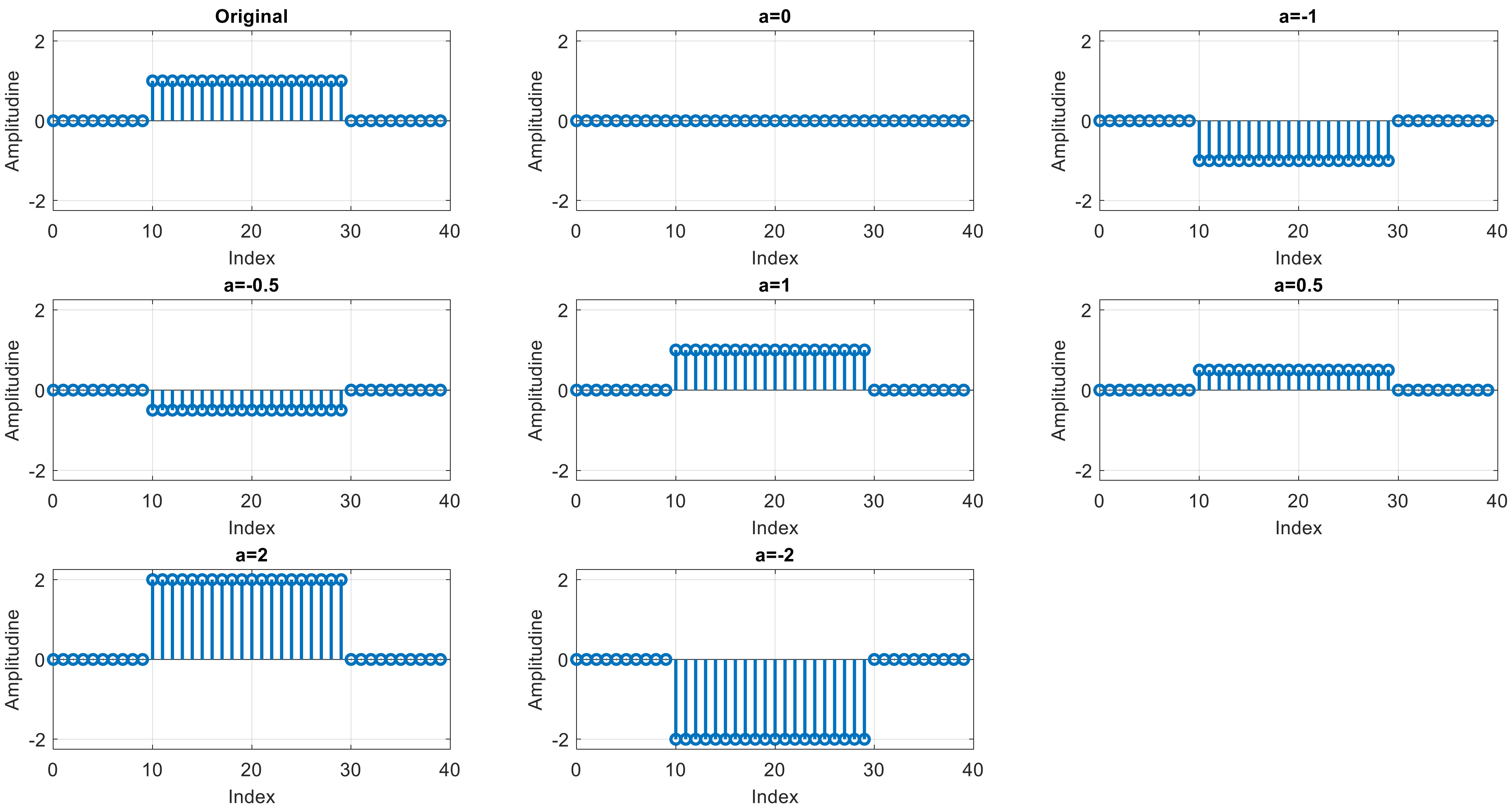
$$y(t) = a \cdot x(t)$$

- $a = 0$
- $a = 1$
- $a = -1$
- $a < -1$
- $a > +1$
- $0 < a < 1$
- $-1 > a > 0$

Scalarea în amplitudine



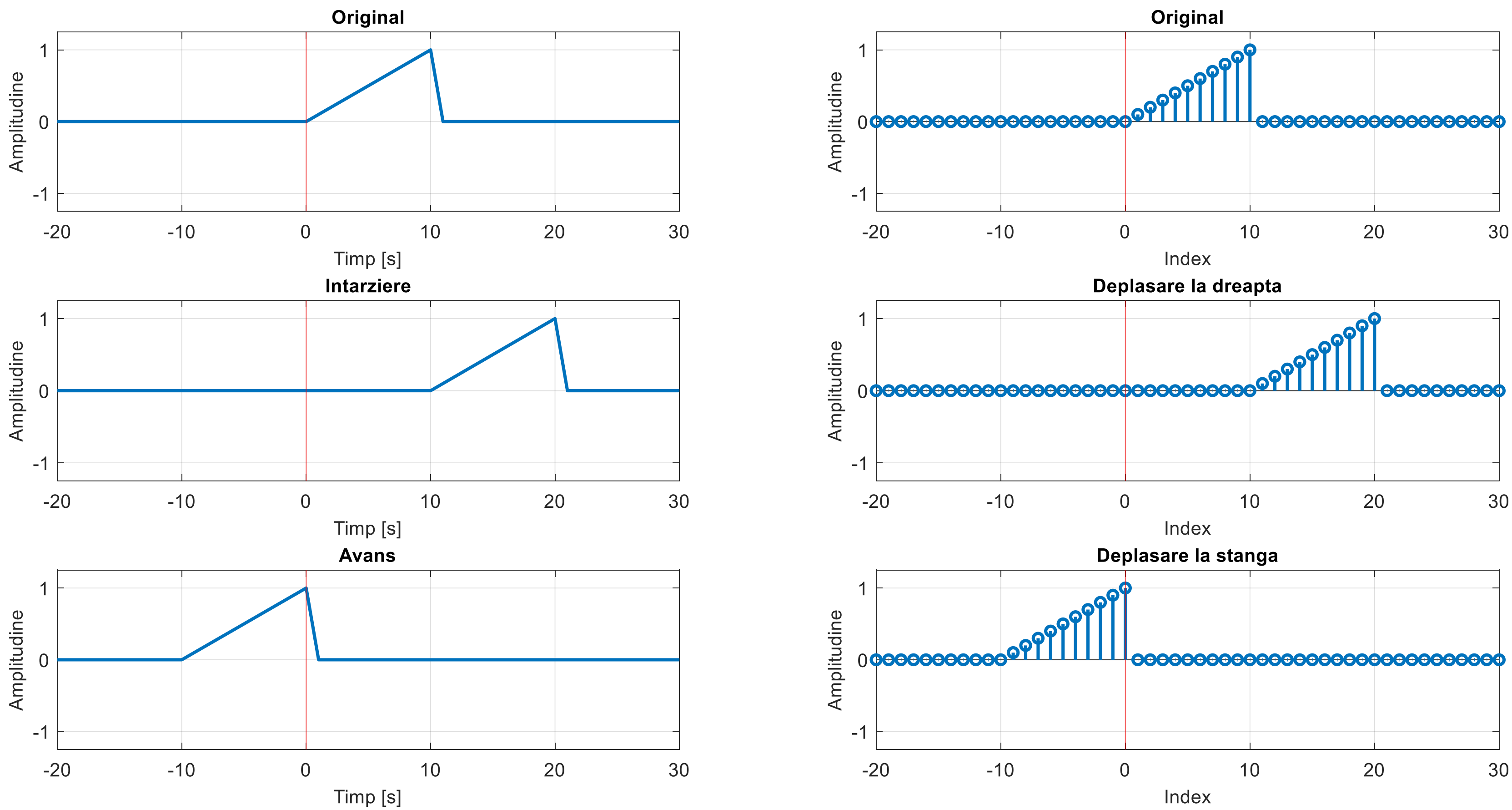
Scalarea în amplitudine



Avansul & Întârzierea

$$y_d(t) = x(t - T_0)$$
$$y_f(t) = x(t + T_0)$$

$$y_d[n] = x[n - N_0]$$
$$y_f[n] = x[n + N_0]$$



Scalarea în timp

$$y[n] = x[an]$$

$$y(t) = x(at)$$

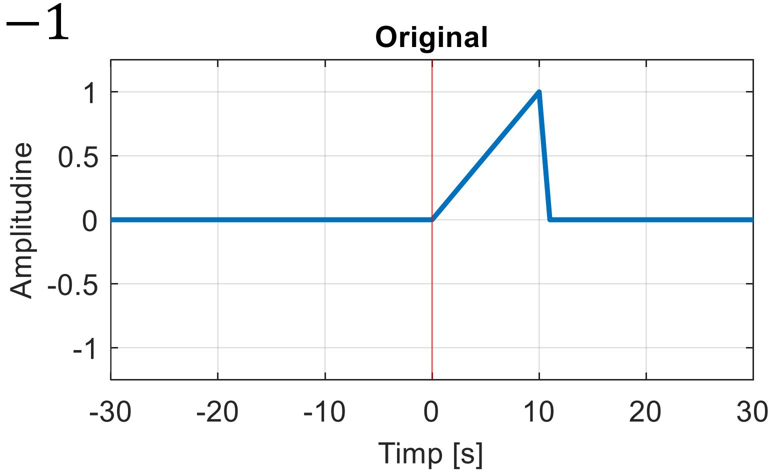
- $a = 0$ --???
- $a = 1$ -- nu se modifică
- $a = -1$ -- reflexie
- $a < -1$ – reflexie, compresie
- $a > +1$ -- compresie
- $0 < a < 1$ --dilatare
- $-1 > a > 0$ -- reflexie, dilatare

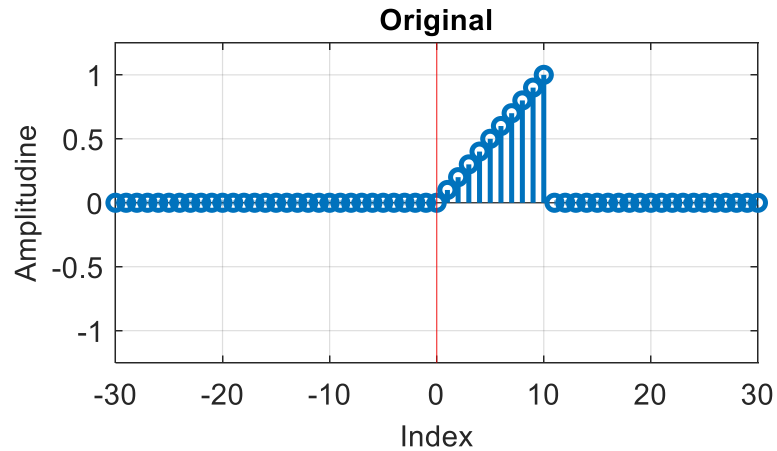
Scalarea în timp – reflexia

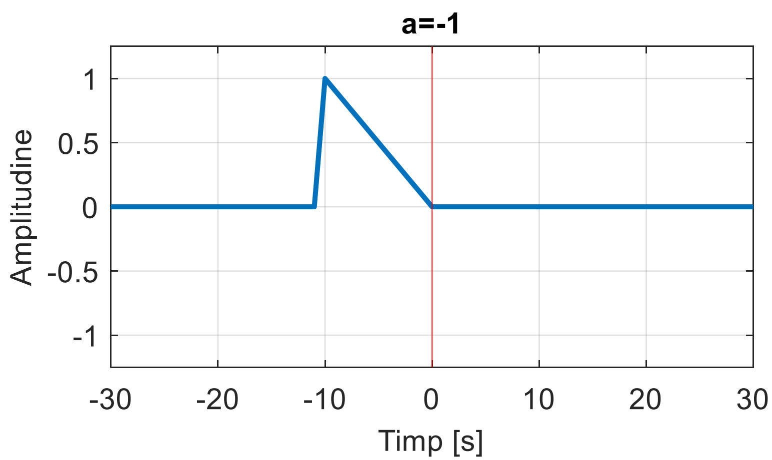
$$y(t) = x(-t)$$

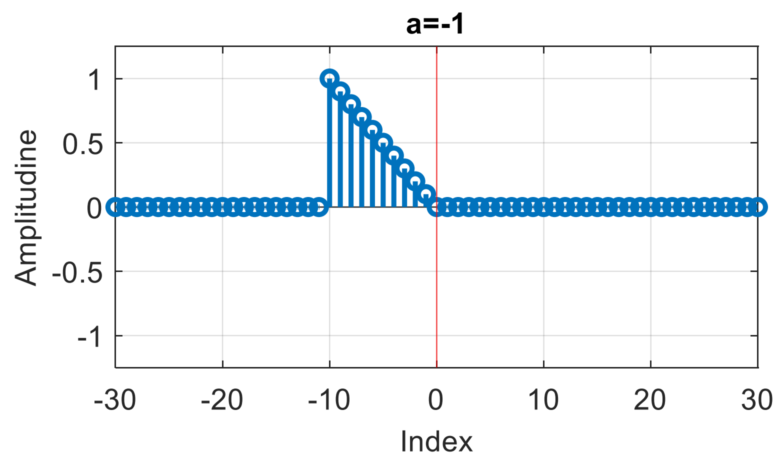
$$y[n] = x[-n]$$

$a = -1$

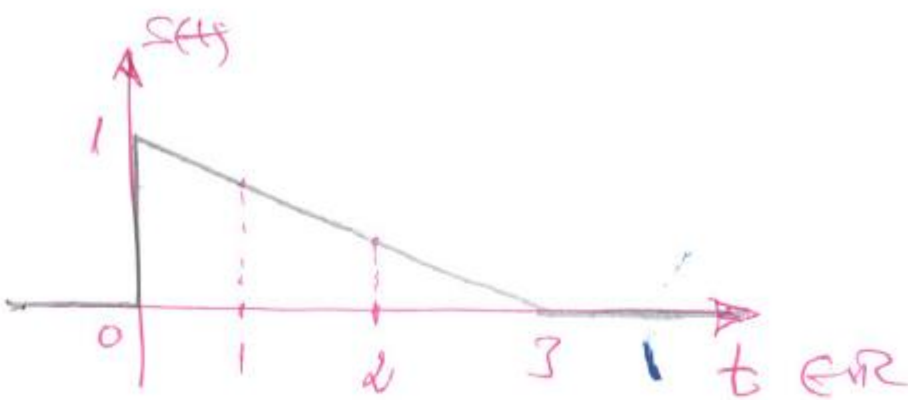


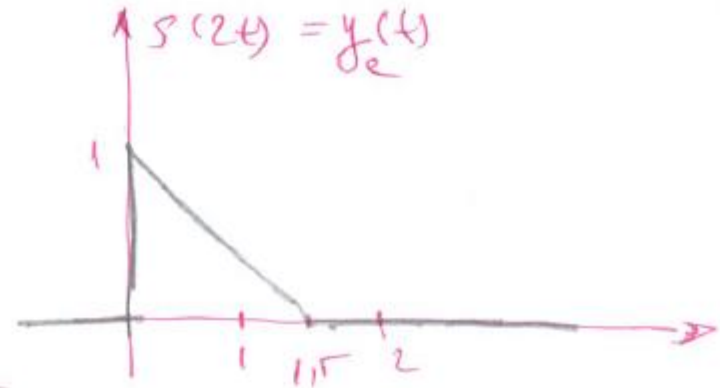






Transformări elementare – compresia





COMPRESIE

$s(a \cdot t)$

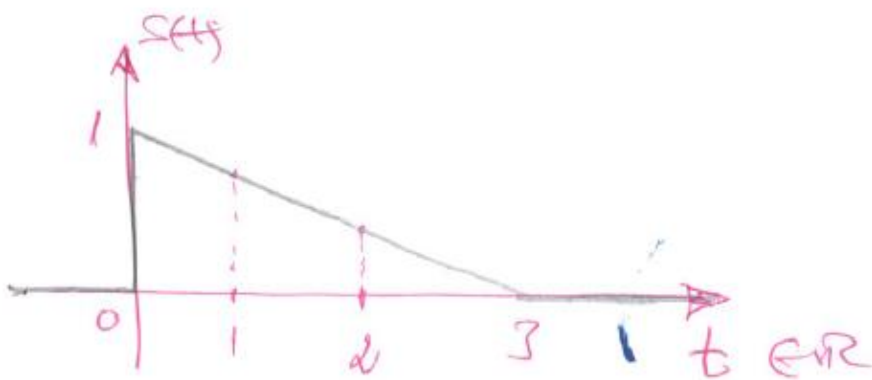
$a = 2 \rightarrow y(t) = s(2 \cdot t)$

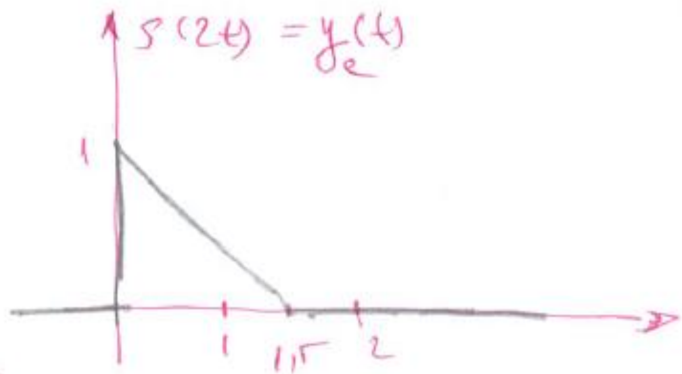
$t = 0 \rightarrow \cancel{y(t) = s(0)}\ y(0) = s(0)$

$t = 1 \rightarrow y(1) = s(2)$

$t = 1.5 \rightarrow y(1.5) = s(3)$

Transformări elementare – compresia





COMPRESIE

$s(a \cdot t)$

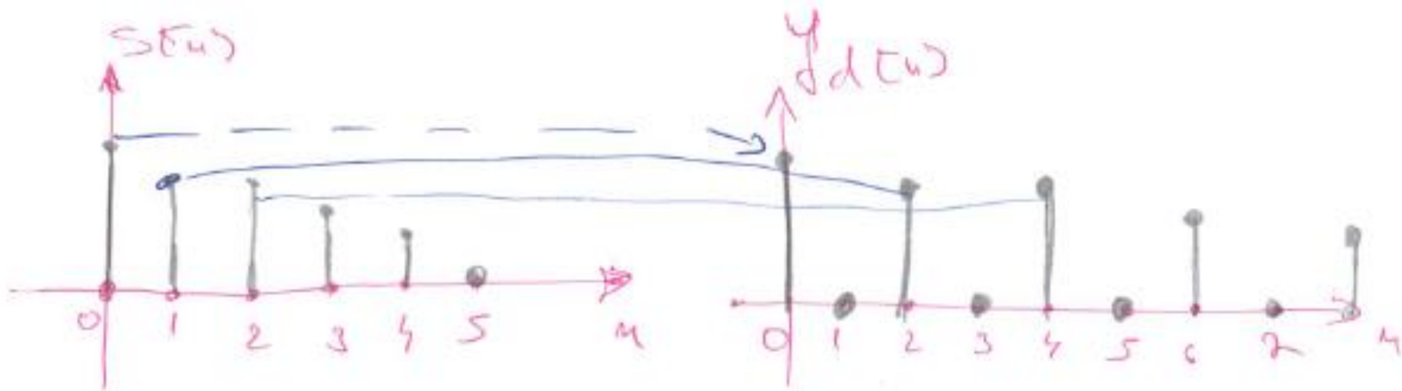
$a = 2 \rightarrow y(t) = s(2 \cdot t)$

$t = 0 \rightarrow \cancel{y(t) = s(0)}\ y(0) = s(0)$

$t = 1 \rightarrow y(1) = s(2)$

$t = 1.5 \rightarrow y(1.5) = s(3)$

Transformări elementare – dilatarea



DILATARE
(adăugăm eșantioane)

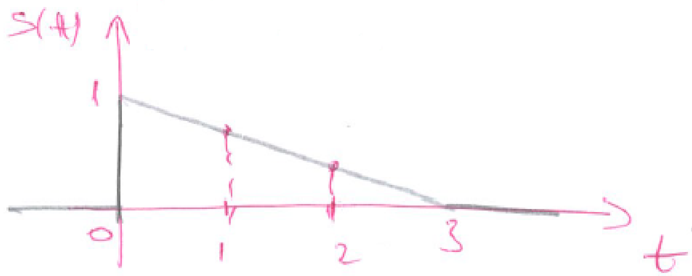
$n=0 \quad y_d[n] = s[\frac{n}{2}]$

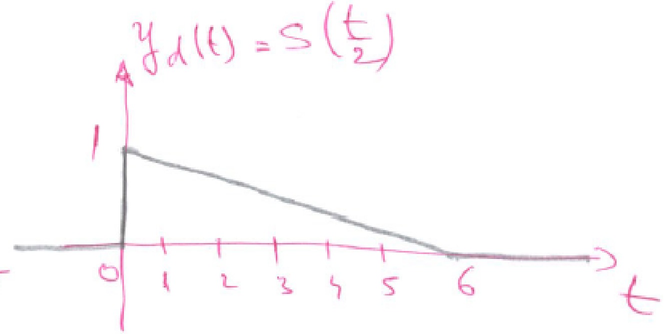
$y_d[0] = s[0]$

$n=1 \quad y_d[1] = s[\frac{1}{2}] = 0$

$n=2 \quad y_d[2] = s[\frac{2}{2}] = 1$

Transformări elementare – dilatarea





DILATARE

$y_d = s(at)$

$a = \frac{1}{2}$

$t=0 \qquad y_d(t) = s\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow y_d(0) = s(0)$

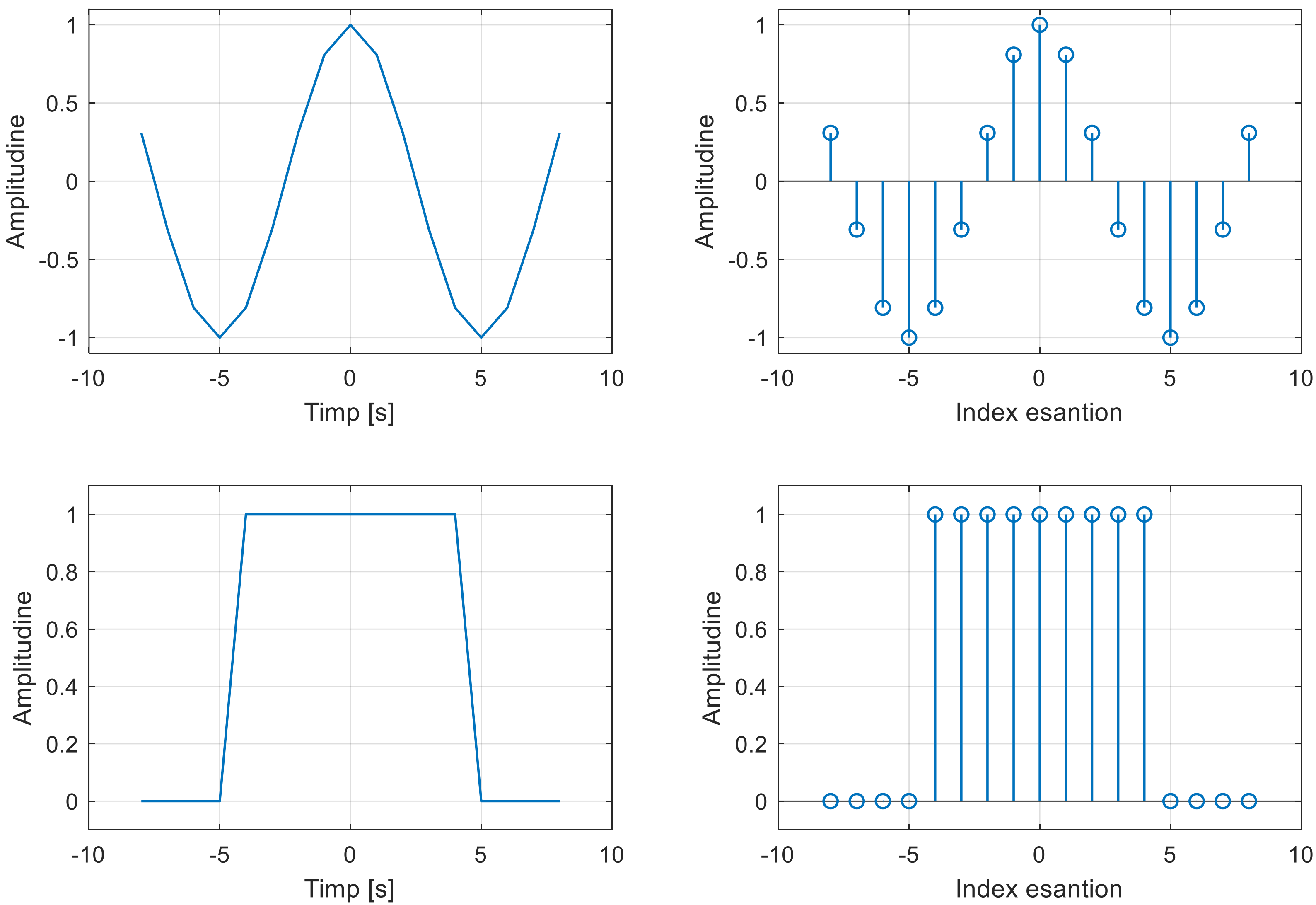
$t=1 \qquad y_d(1) = s\left(\frac{1}{2}\right)$

$t=2 \qquad y_d(2) = s(1)$

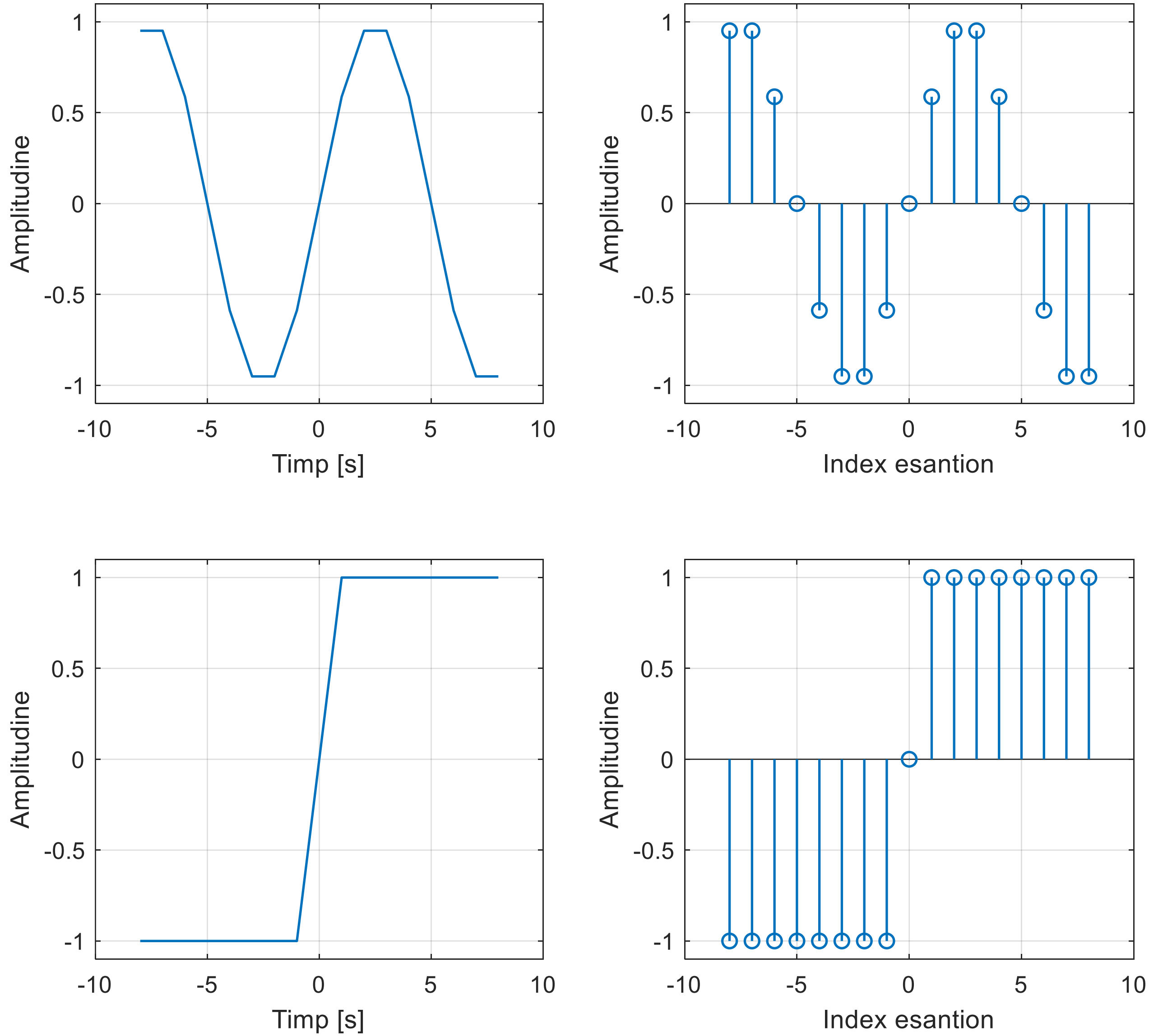
$\vdots$

$t=6 \qquad y_d(6) = s(3)$

Proprietăți – paritate/imparitate



Proprietăți – paritate/imparitate



Proprietăți – paritate/imparitate

- Semnal par x semnal impar -> semnal impar
- Semnal impar x semnal impar -> semnal par
- Semnal par x semnal par -> semnal par

- Există semnale care nu sunt nici pare și nici impare.
- Unele semnal pot fi scrise ca o sumă de semnale pare și impare.

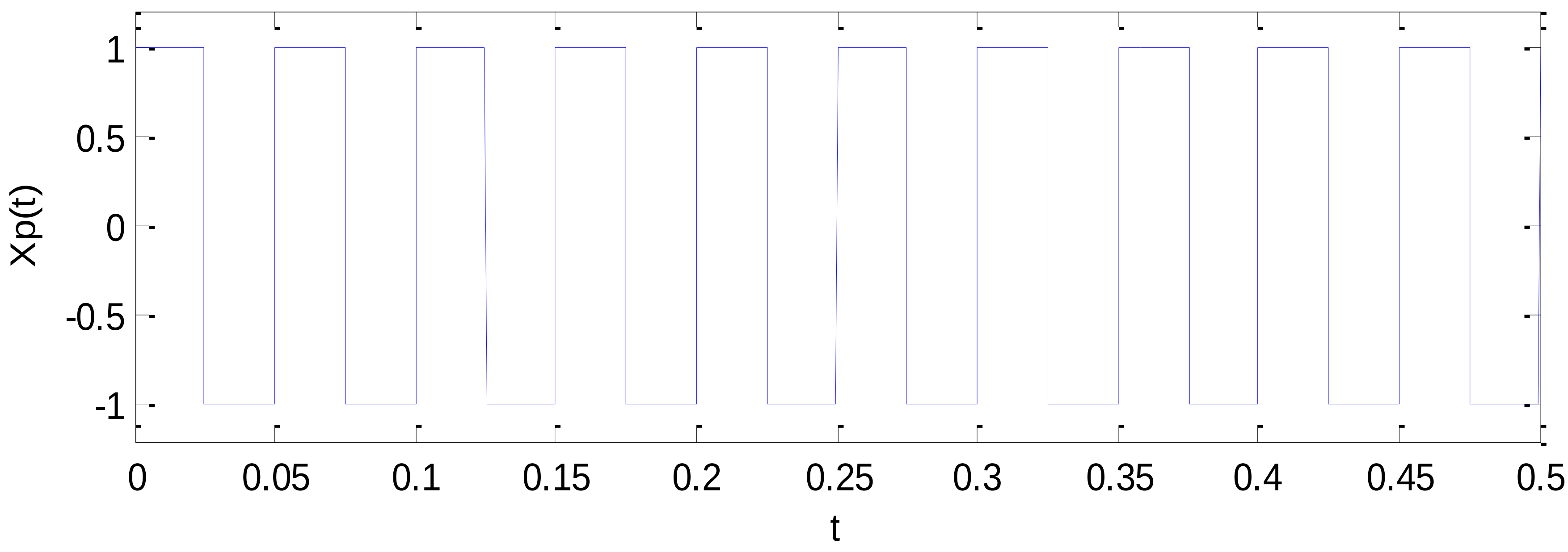
$$s(t) = s_{par}(t) + s_{impar}(t)$$

$$s_{par}(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2}$$

$$s_{impar}(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2}$$

Proprietăți - periodicitatea

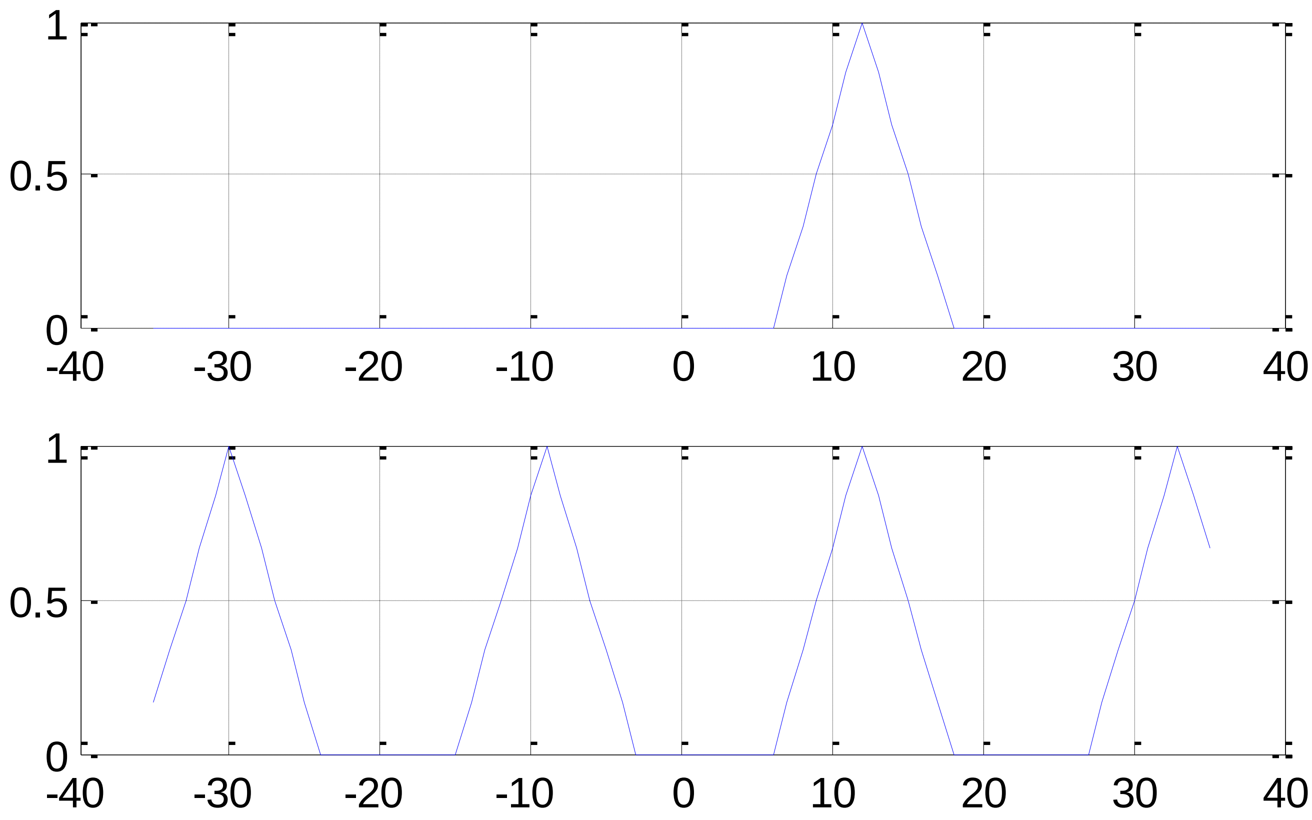
- Pentru semnale analogice, există *T*, astfel încât: $s(t) = s(t+T), T \in \mathbb{R}$
- Pentru semnale discrete, există *N*, astfel încât: $s[n] = s[n+N], N \in \mathbb{R}$



Proprietăți - periodicitatea

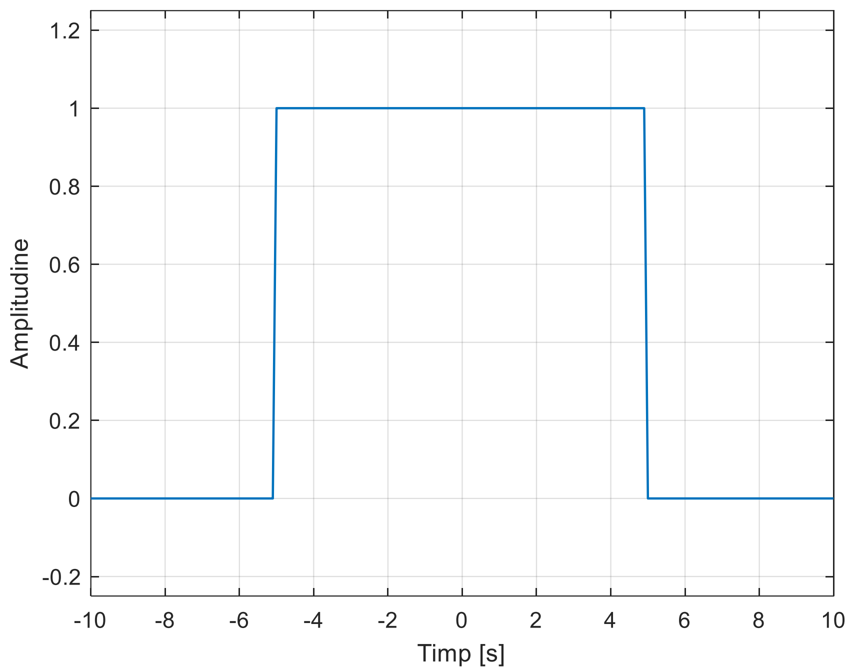
$x(t): [0, T_0] \to \mathbb{R}$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{(k)} x(t - k \cdot T)\,, k \in \mathbb{Z}$$

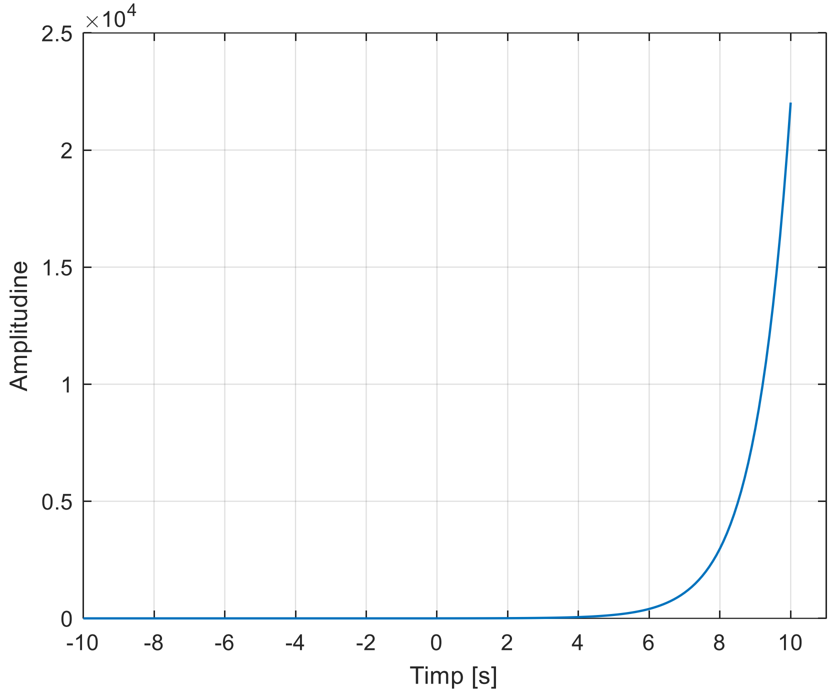


Semnal mărginit/nemărginit

- Semnal mărginit din punct de vedere al amplitudinii (bounded signal)



bounded signal
(semnal mărginit)



unbounded signal
(semnal nemărginit)

Energia și puterea unui semnal

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s[n]|^2 \qquad P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |s[n]|^2$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \qquad P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 dt$$

- Energia unui semnal – se măsoară pentru semnale cu suport finit
- Puterea unui semnal cu suport finit este 0

- Puterea unui semnal cu suport infinit este diferită de 0.
- Energia unui semnal cu suport infinit este infinită.

Exemplu

(1) $s(t) = e^{-2t} \cdot u(t)$

$$\sigma = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} |e^{-2t}| \cdot u(t) \, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} |e^{-2t}| \, dt =$$

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^{T} |e^{-2t}|^2 \, dt = \int$$

$$\int_0^{T} (e^{-4t}) \, dt = \frac{e^{-4t}}{-4} \Big|_0^{T} = \left(\frac{e^{-4T}}{-4} - \frac{e^{0}}{-4} \right) =$$

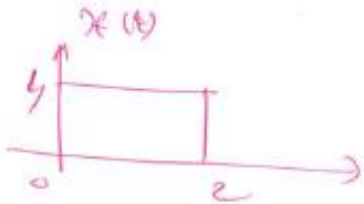
$$= \frac{1}{4} - \frac{e^{-4T}}{4}$$

$$E = \lim_{T \to \infty} \tilde{\sigma} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{\infty} \cdot (*) = 0$$

Exemplu

(2)



$x(t) \to E$

$x(2t) \to \frac{E}{2}$

$-2t \to \frac{E}{2}$

$at \to \frac{E}{|a|}$

$a \neq 0$

Energia este independentă de ~~am~~ polaritate, deplasare în timp

Întrebări