SALI/SNLI - Convoluția. Corelația

Cuprins

- Sisteme liniare și invariante – convoluția
- Exemplu
- Mecanismul convoluției
- Proprietățile convoluției
- Corelația
- Exemple

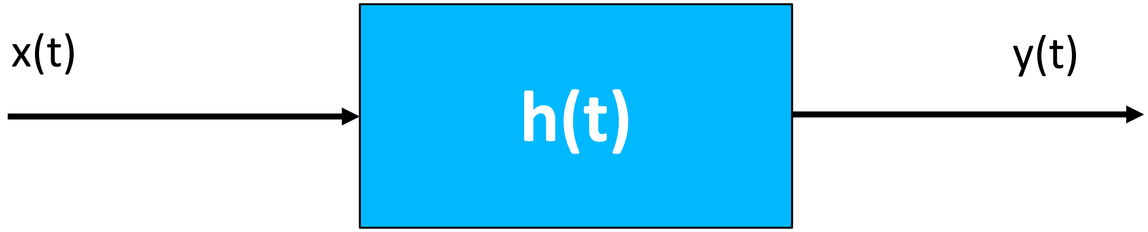
Răspunsul SNLI/SALI

Sisteme numerice liniare și invariante - SNLI

x – excitație/intrare/input
Y – răspuns/ieșire/output
h – funcție pondere

$$y[n] = \sum_{(k)} x[k]h[n-k] = \sum_{(k)} h[k]x[n-k]$$

Sisteme analogice liniare și invariante - SALI

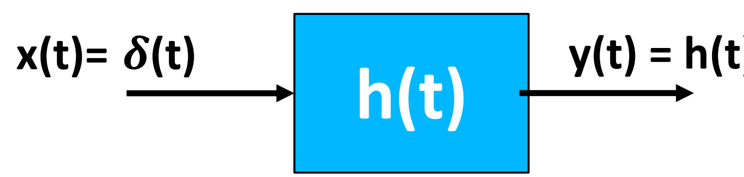


$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)d\tau$$

Răspunsul SNLI/SALI

- **Dacă sistemul este liniar și invariant și dacă se cunoaște funcția pondere, putem să determinăm răspunsul sistemului la orice intrare.**
- **Dacă sistemul este liniar și invariant și dacă se cunoaște intrarea și ieșirea pe care dorim să o obținem, putem să calculăm funcția pondere.**
- **Funcția pondere**

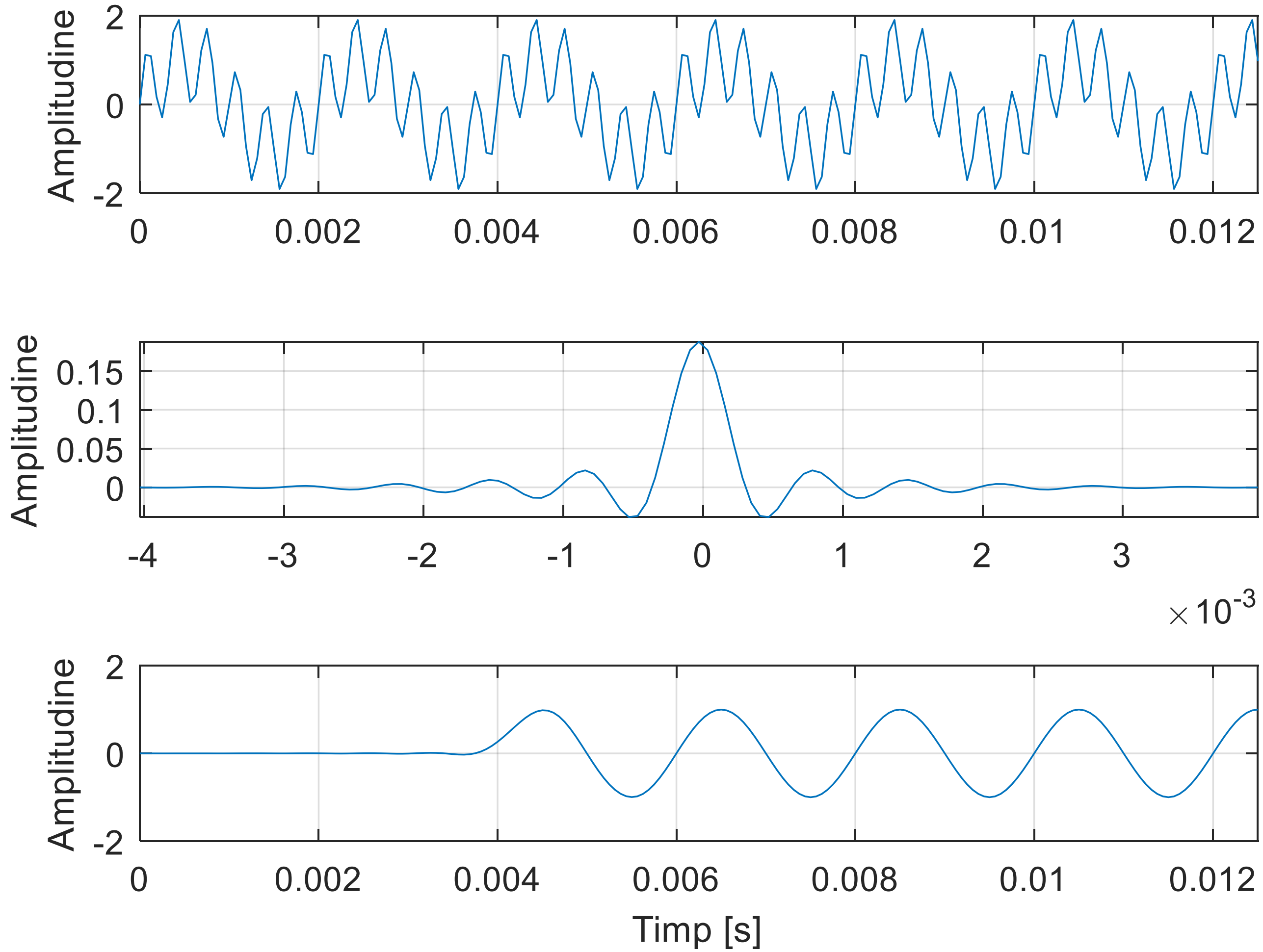
- **Funcția pondere este răspunsul sistemului la impulsul Dirac/impulsul unitate.**



$$y[n] = \sum_{(k)} h[k]\delta[n-k]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\delta(t-\tau)d\tau$$

Exemplu


Amplitudine
2
0
-2
0
0.002
0.004
0.006
0.008
0.01
0.012
Amplitudine
0.15
0.1
0.05
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
×10^-3
Amplitudine
2
0
-2
0
0.002
0.004
0.006
0.008
0.01
0.012
Timp [s]

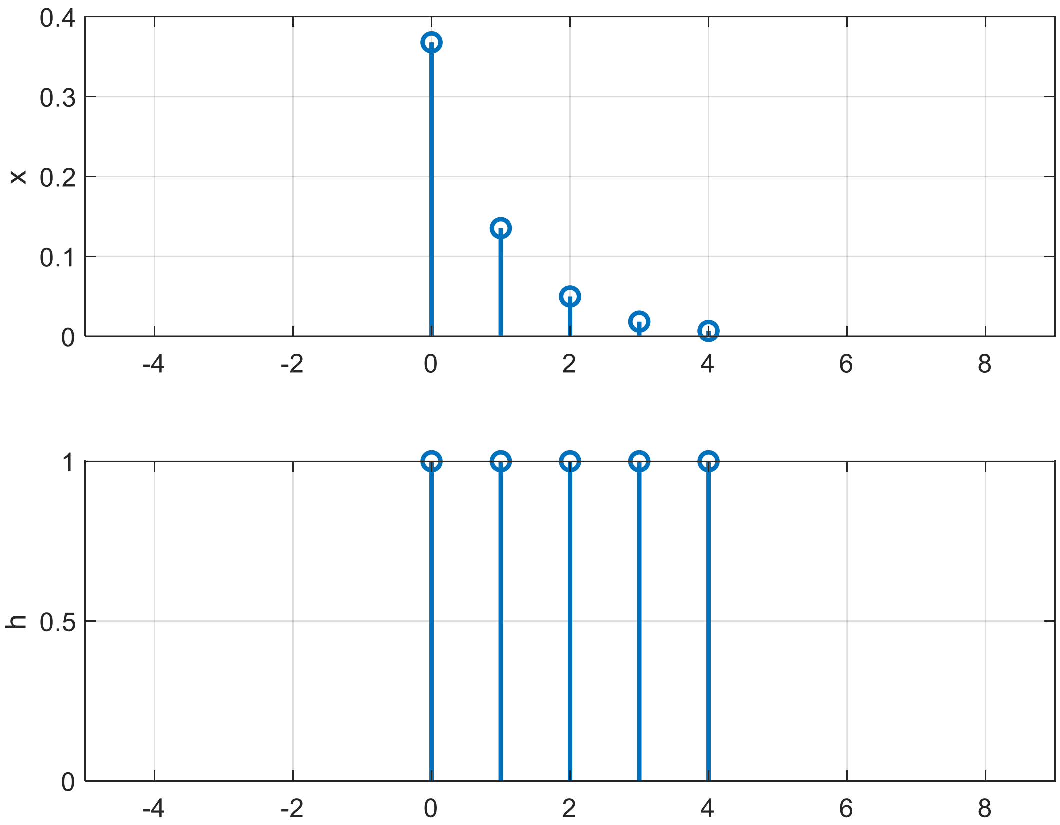
Exemplu

```
clearvars
clc
close all

Fe=16000;
t=0:1/Fe:32000/Fe;
s1=sin(2*pi*500*t);
s2=sin(2*pi*3000*t);
s=s1+s2;

h=fir1(128,1500/(Fe/2),'low');
y=conv(s,h);
```

Funcție Matlab

```
conv Convolution and polynomial multiplication.
    C = conv(A, B) convolves vectors A and B.  The resulting vector
is length MAX([LENGTH(A)+LENGTH(B)-1,LENGTH(A),LENGTH(B)]). If A and
B are vectors of polynomial coefficients, convolving them is
equivalent to multiplying the two polynomials.

    C = conv(A, B, SHAPE) returns a subsection of the convolution
with size specified by SHAPE:
      'full'  - (default) returns the full convolution,
      'same'  - returns the central part of the convolution
                that is the same size as A.
      'valid' - returns only those parts of the convolution
                that are computed without the zero-padded edges.
                LENGTH(C)is MAX(LENGTH(A)-MAX(0,LENGTH(B)-1),0).
```

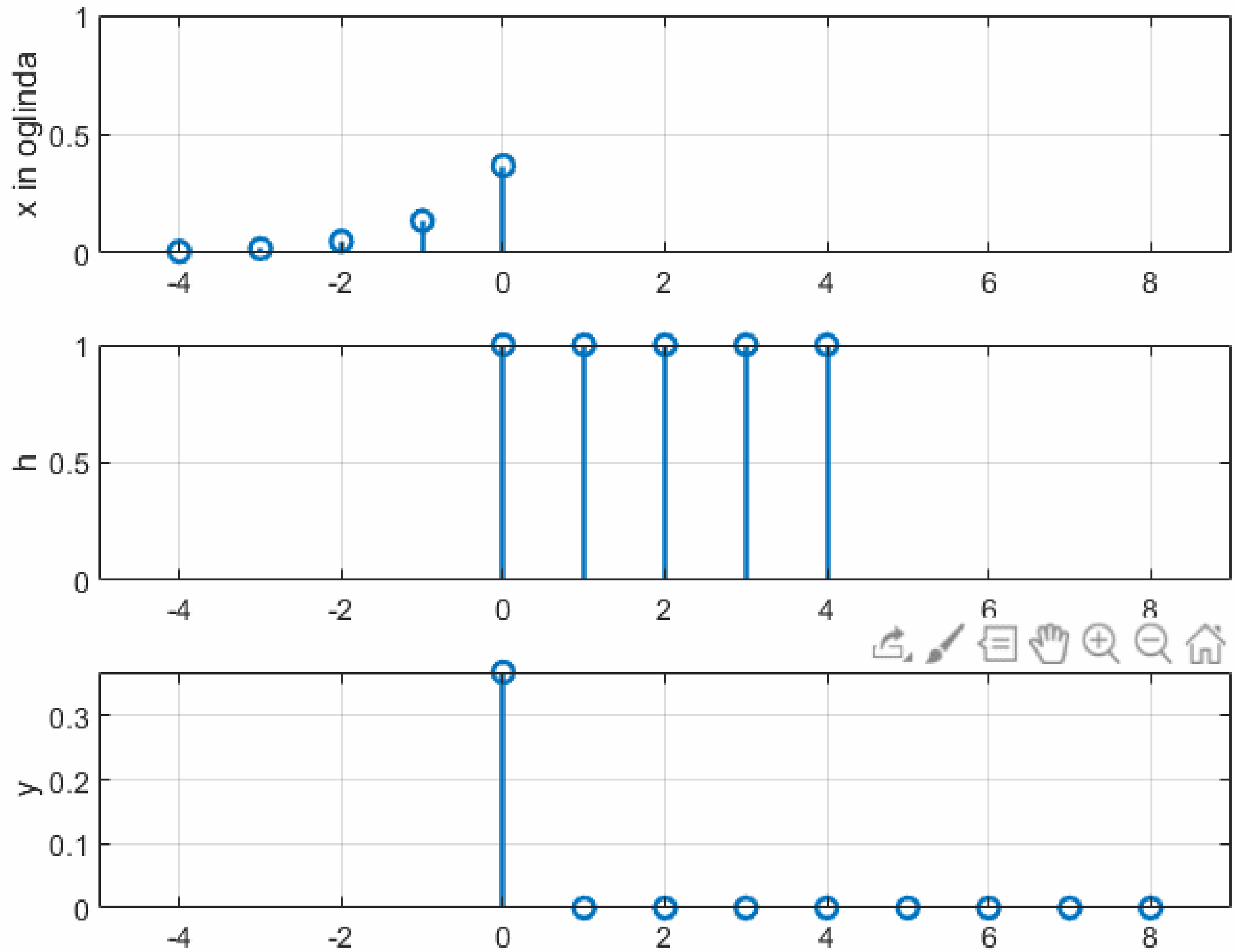
Mecanismul convoluției



$$y[n] = \sum_{(k)} x[k]h[n-k]$$

$$= \sum_{(k)} h[k]x[n-k]$$

Mecanismul convoluției



Lungimea convoluției

$$L_y = L_x + L_h - 1$$

L_y – lungimea lui y (numărul de eșantioane din y, durata)

L_x – lungimea lui x (numărul de eșantioane din x, durata)

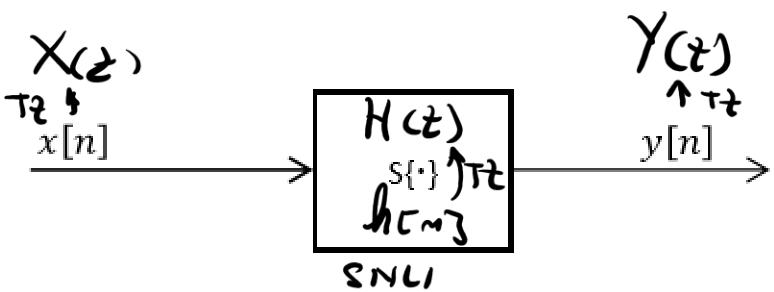
L_h – lungimea lui h (numărul de eșantioane din h, durata)

Convoluția ca produs de polinoame

Deconvoluția

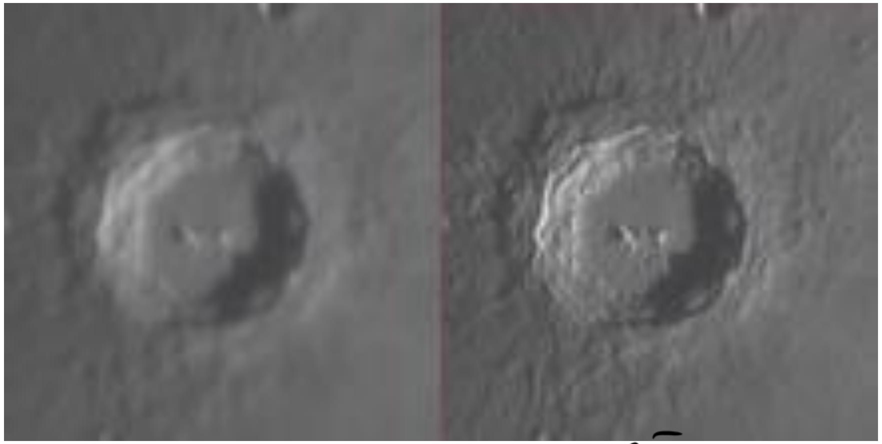
- **Operația inversă a convoluție**
- **Exemplu: dacă știu ieșirea unui sistem și funcția pondere, pot să aflu semnalul de intrare.**
- **Convoluția – înmulțire polinomială**
- **Deconvoluția – împărțire polinomială**

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ - fct. de transfer



$y[n] = x[n] * h[n]$

$Y(z) = X(z) \cdot H(z) \rightarrow X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)}$



ORIGINAL

DUPĂ DECONV

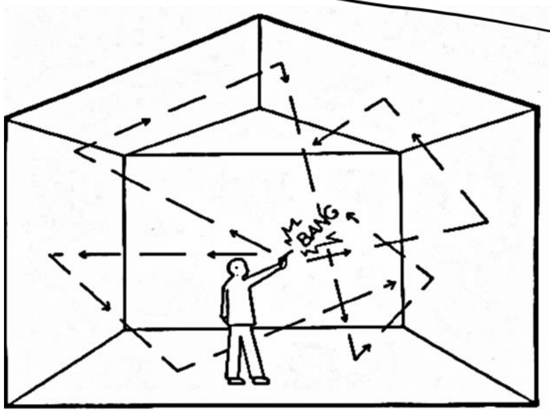
Deconvoluția - Matlab

```
deconv Deconvolution and polynomial division.
    [Q,R] = deconv(B,A) deconvolves vector A out of vector B.
The result is returned in vector Q and the remainder in vector
R.
    The outputs satisfy B = conv(A,Q) + R when length(A) <=
length(B); otherwise, Q = 0 and R = B. With K =
min(length(A),length(B)), these two cases can be written as B
= conv(A(1:K),Q) + R.
     If A and B are vectors of polynomial coefficients,
deconvolution is equivalent to polynomial division. The result
of dividing B by A is quotient Q and remainder R.

    Class support for inputs B,A:
       float: double, single
```

Deconvoluția - Matlab

- **Exemplu – dereverberație semnal audio**

(BLIND DECONVOLUTION)



$$y[n] = x[n] + a\,y[n-M]$$

- măsor $h[n]$
- elimin reverberația → DECONVOLUȚIE

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1\cdot z^{0}}{1 - a z^{-M}}$$

$$x[n] \xrightarrow{TZ} X(z) \qquad Y(z) = X(z) + a\,Y(z)\cdot z^{-M}$$

$$y[n] \xrightarrow{TZ} Y(z) \qquad 1 - a z^{-M} = 1 + 0\cdot z^{-1} + 0\cdot z^{-2} + 0\cdot z^{-3} + \dots - a\cdot z^{-M}$$

num = [1];

den = [1 0 0 .... -a];

Deconvoluția - Matlab

```
clearvars
clc
close all

[s,fs]=audioread('salut.wav');
s=[s' zeros(1,10000)];

num=1;
den=[1 zeros(1,1000) -0.5];
ic=zeros(1,1001);
% y semnal inregistrat intr-o sala cu reverberatii
y=filter(num,den,s,ic);
%masor raspunsul la impuls al salii
%generez un impuls unitar si inregistrez raspunsul salii (adica ce se aude)
%in practica se folosesc alte semnale decat impuls Dirac
delta=[1 zeros(1,15000)];
h=filter(num,den,delta,ic);
%h este functia pondere masurata
%se face deconvolutia dintre semnalul cu reverberatii si functia pondere a camerei
yy=deconv(y,h);

sound(s,fs)
pause(1)
sound(y,fs)
pause(1)
sound(yy,fs)
```

Corelația – definiție

- cross-corelație
- autocorelație

$$r[k] = \sum_{(n)} x^*[n] \cdot y[n+k] \quad (1)$$

* complex conjugat

$x = a + jb$

$x^* = a - jb$

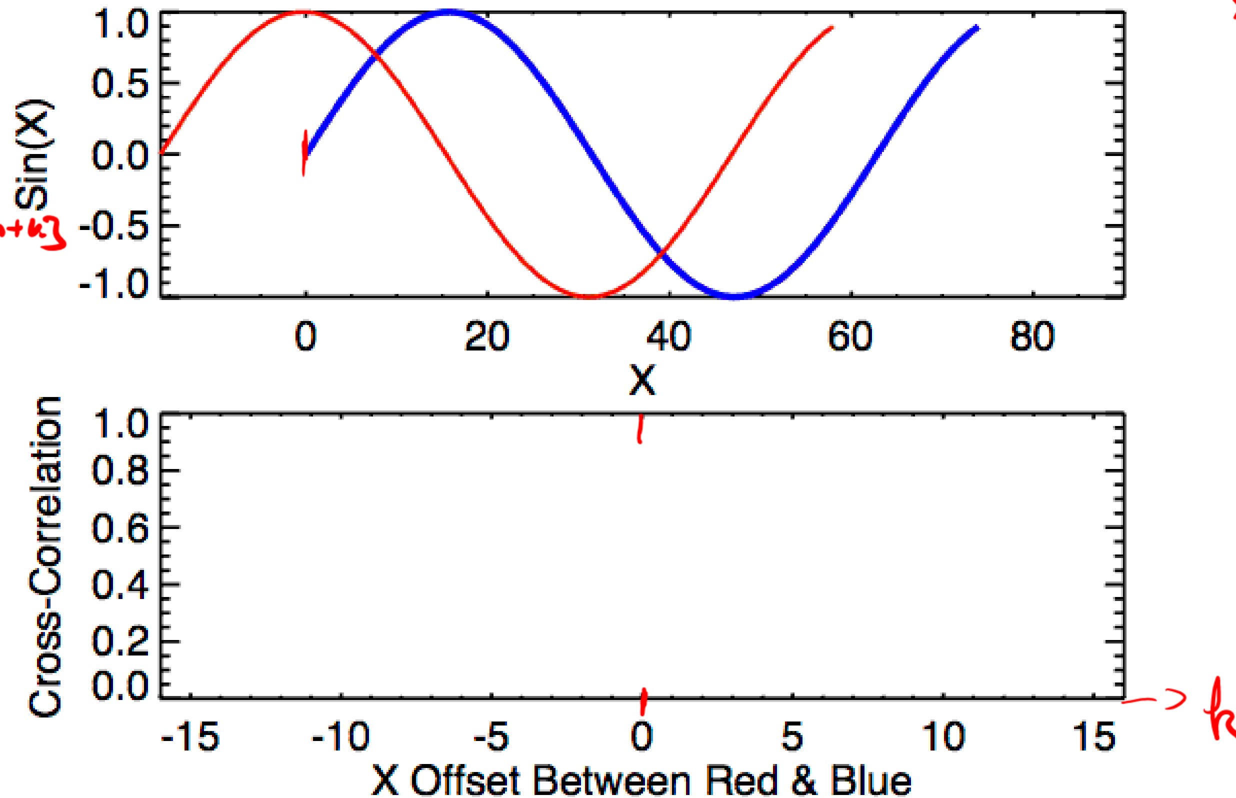
$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) \cdot y(t+\tau)\, dt \quad (2)$$

$x = \rho e^{j\theta}$

$x^* = \rho e^{-j\theta}$

$R_{xx}[k] = \sum_{(n)} x^*[n]\, x[n+k]$

$R_{xy}[k] = \sum_{(n)} x^*[n]\, y[n+k]$



Corelația – definiție

- **Autocorelație – corelația unui semnal cu el însuși**
- **Cross-corelație sau corelație încrucișată – corelația dintre două semnale diferite**

- **Lungimea corelației**

$\rightarrow L_r = L_x + L_y - 1$

x, y

xcorr (Matlab)

xcorr Cross-correlation function estimates.

C = xcorr(A,B), where A and B are length M vectors (M>1), returns the length 2*M-1 cross-correlation sequence C. If A and B are of
different length, the shortest one is zero-padded. C will be a row vector if A is a row vector, and a column vector if A is a column vector.

xcorr produces an estimate of the correlation between two random (jointly stationary) sequences:

C(m) = E[A(n+m)*conj(B(n))] = E[A(n)*conj(B(n-m))]

It is also the deterministic correlation between two deterministic signals.

C = xcorr(A), where A is a length M vector, returns the length 2*M-1 auto-correlation sequence C. The zeroth lag of the output correlation is in the middle of the sequence, at element M.

C = xcorr(A), where A is an M-by-N matrix (M>1), returns a large matrix with 2*M-1 rows and N^2 columns containing the cross-correlation sequences for all combinations of the columns of A; the first N columns of C contain the delays and cross correlations using the first column of A as the reference, the next N columns of C contain the delays and cross correlations using the second column of A as the reference, and so on.

C = xcorr(...,MAXLAG) computes the (auto/cross) correlation over the
range of lags: -MAXLAG to MAXLAG, i.e., 2*MAXLAG+1 lags.
If missing, default is MAXLAG = M-1.

$L_c = 2L_{max} - 1$

[C,LAGS] = xcorr(...) returns a vector of lag indices (LAGS).

$L_{max} = max(L_x, L_y)$

Semnal sinus cardinal (sinc)

- **Apare ca rezultat al mai multor operații specifice prelucrării semnalelor.**

$\omega\,[\mathrm{rad/s}]$

$$s(t) = \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega \cdot t} \quad \text{(analogic)}$$

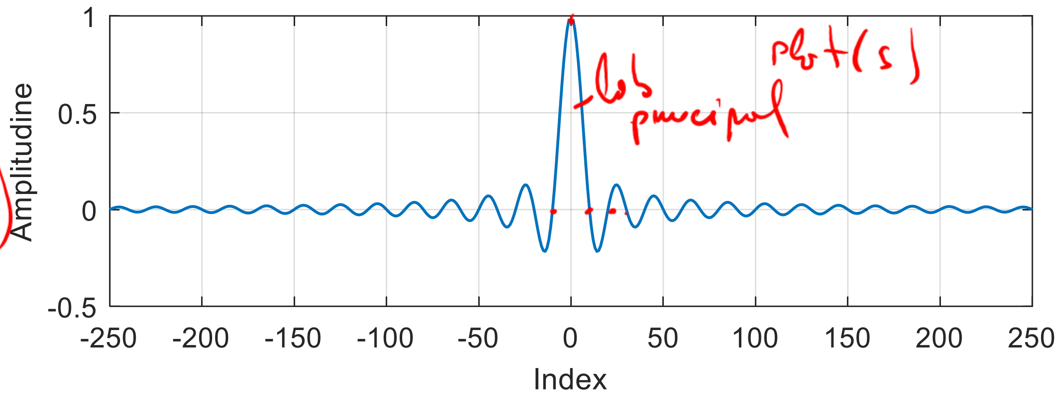
$$s[n] = \frac{\sin(\Omega \cdot n)}{\Omega \cdot n} \quad \text{(numeric)}$$

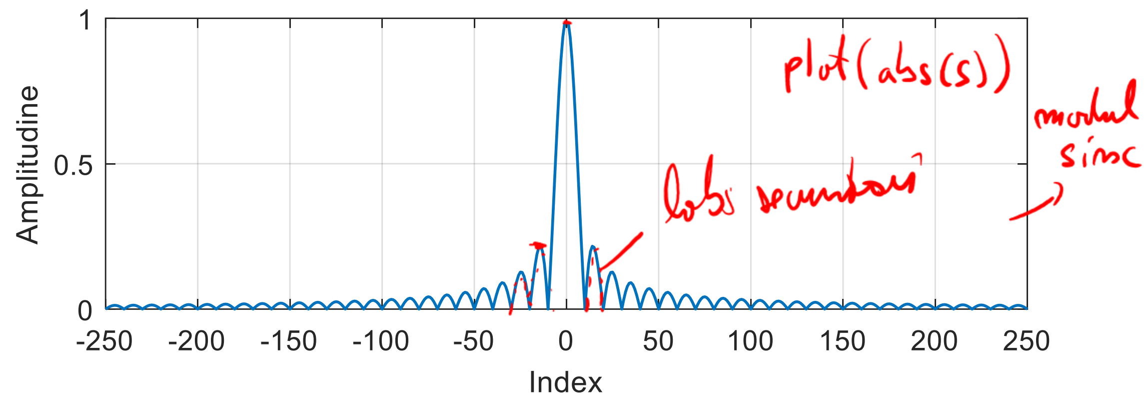
$\Omega\,[\mathrm{rad}]$

x_{ref}

y

$$y[\mathrm{dB}] = 20 \lg \frac{y}{x_{ref}}$$





Autocorelația unor semnale

- **Sinus**

$$s(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \quad s[n] = \sin(\Omega \cdot n)$$

- **Impuls dreptunghiular**

$$s(t) = \begin{cases} 1, 0 < t < T \\ 0, in\ rest \end{cases} \qquad s[n] = \begin{cases} 1, 0 < n < N \\ 0, in\ rest \end{cases}$$

- **Chirp**

$$s(t) = \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + 2 \cdot \pi \cdot \frac{k \cdot t^2}{2}\right)$$

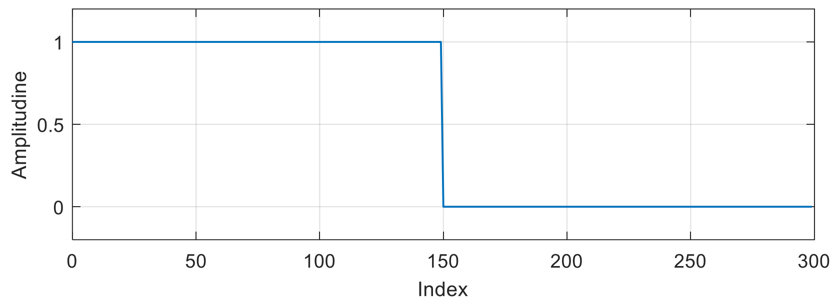
$$k = \frac{f_1 - f_0}{T}$$

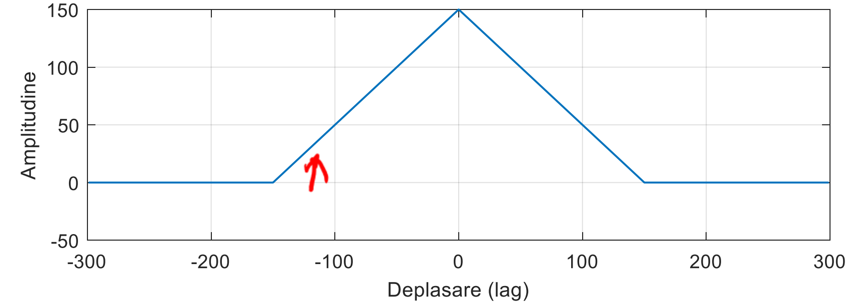
$$t_2 - t_1 = T$$

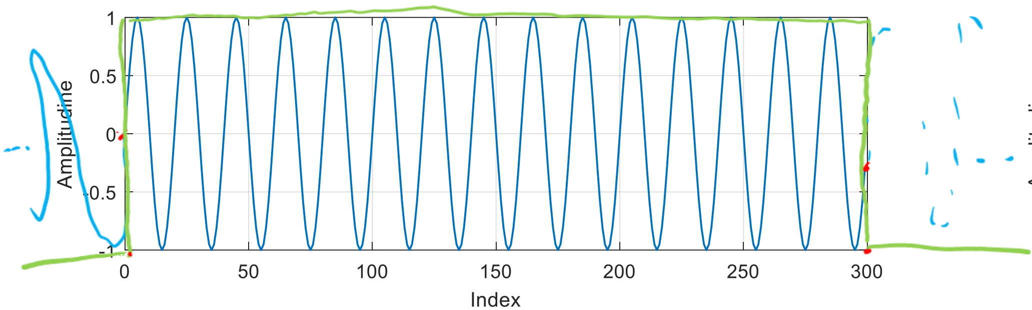
$$s[n] = \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f_{n0} \cdot n + 2 \cdot \pi \cdot \frac{k_n \cdot n^2}{2}\right)$$

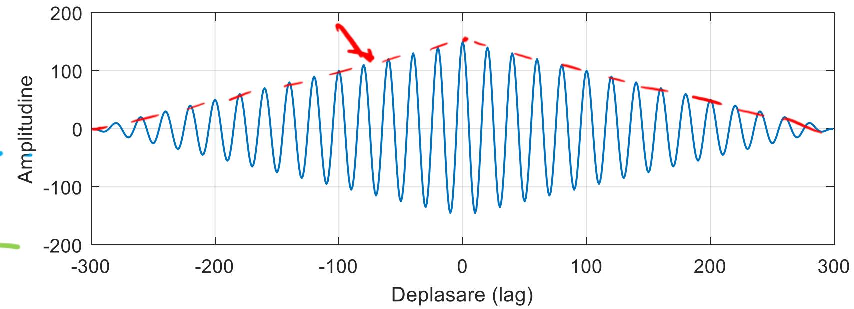
Autocorelația unor semnale

$\tilde{s}(t) = s(t) \cdot w(t)$

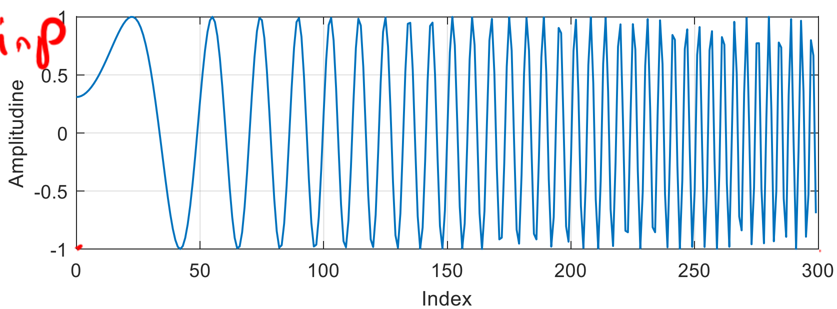


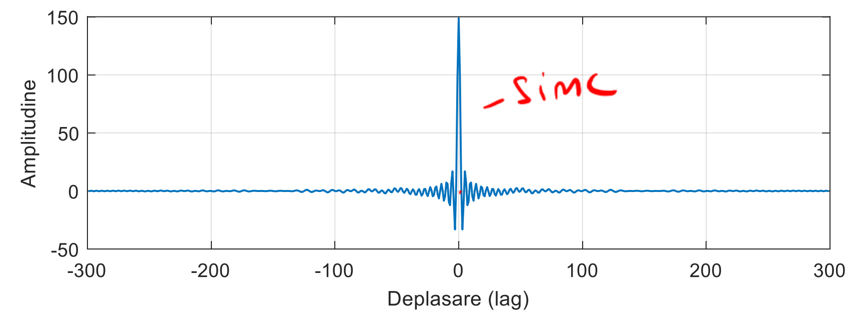






chirp



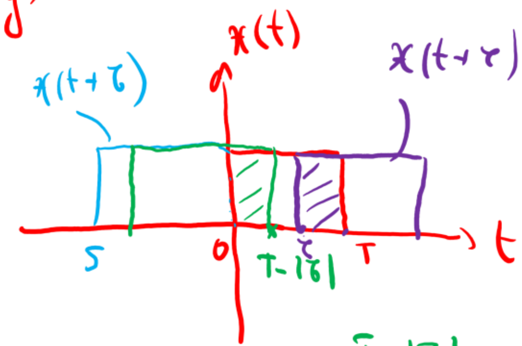


Autocorelația - exemple

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t+\tau)\, dt$$

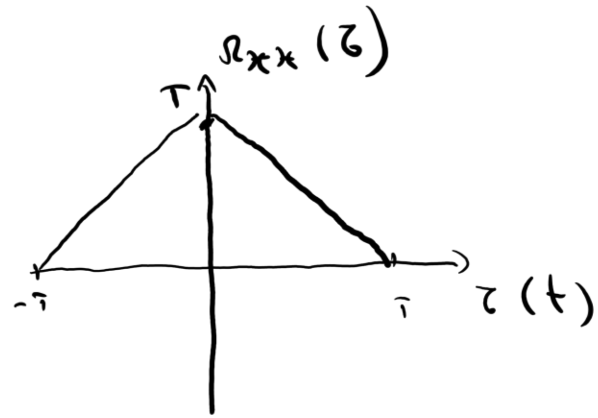
întârziere (lag)



$\tau \in [-T, 0]$ $\quad R_{xx}(\tau) = \int_{0}^{T-|\tau|} 1\, dt = T - |\tau|$

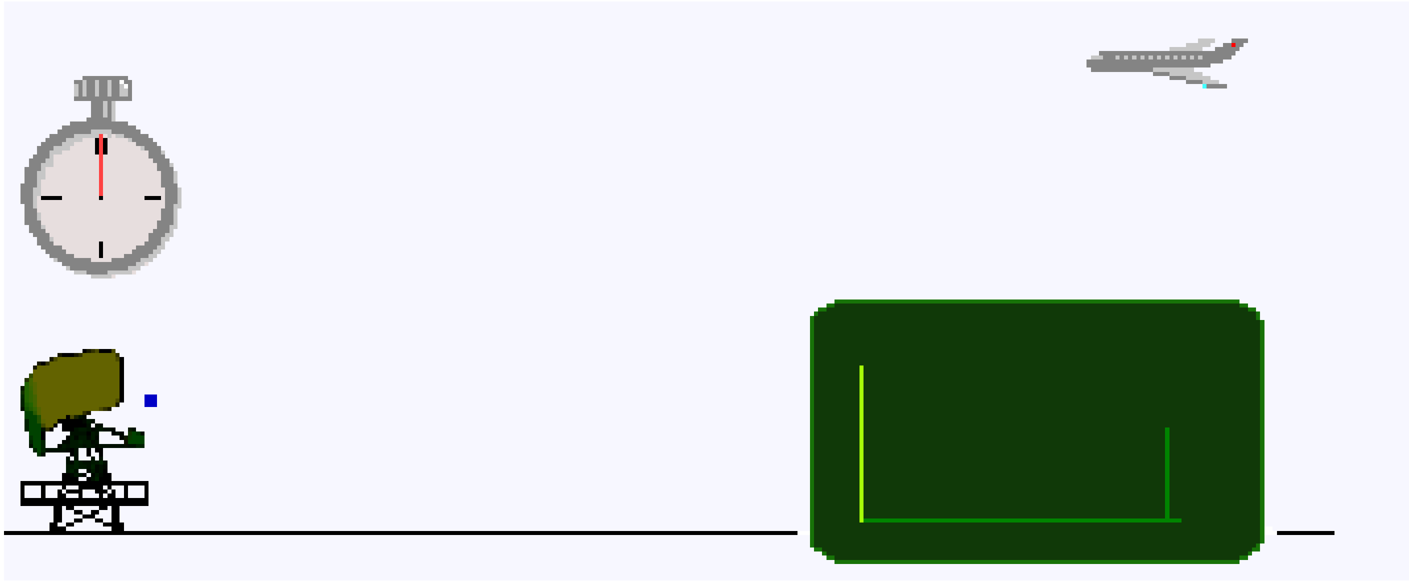
$\tau \in (0, T)$ $\quad R_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{T} 1\, dt = T - |\tau|$

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} T - |\tau|, & \tau \in [-T, T] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$



$$R_{xx}(t) = \begin{cases} T - |t|, & t \in [-T, T] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

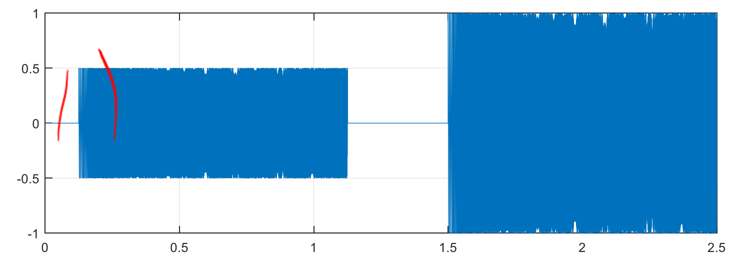
Radar - principiu

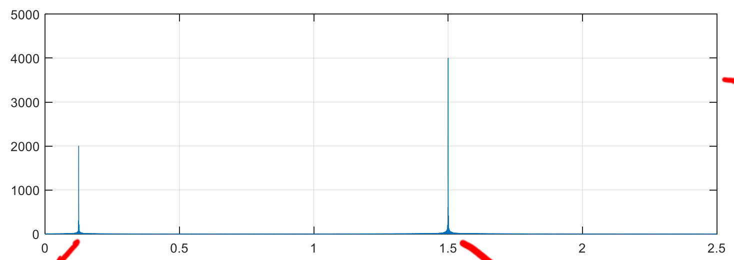


Exemplu - radar

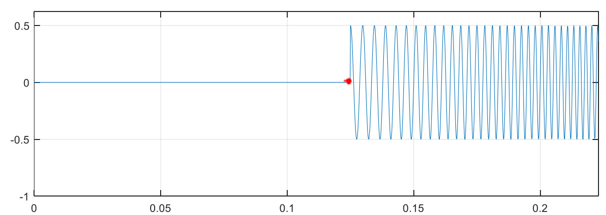
$s[n]$ - chirp

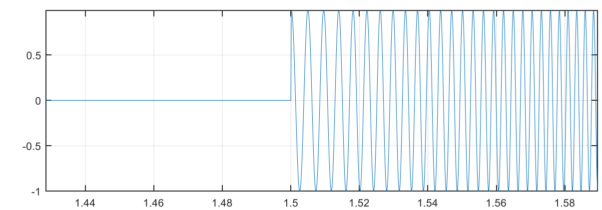
$$y[n] = \sum_{k=1}^{2} s[n-M_k]\cdot a_k$$

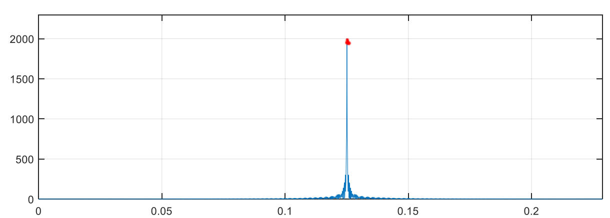


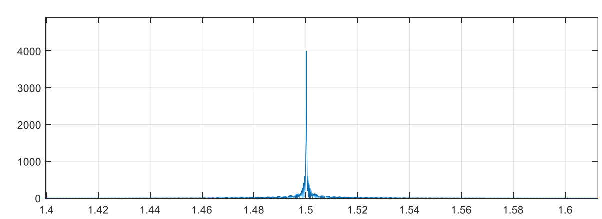


$\to R_{sy} =$

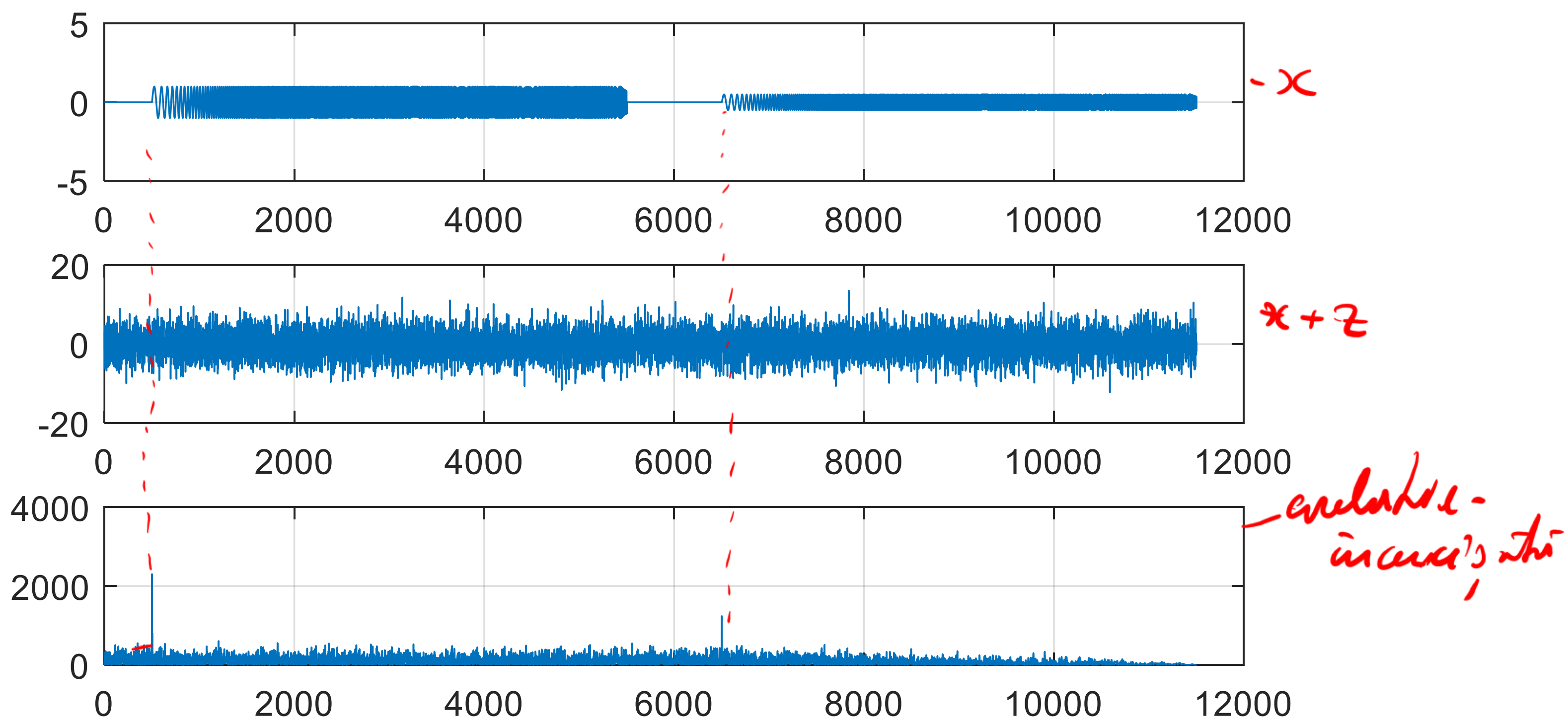




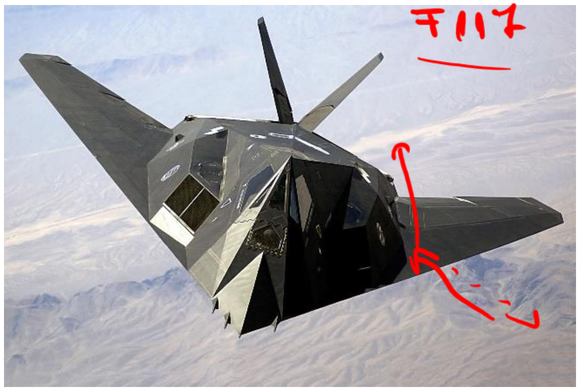




Exemplu - radar

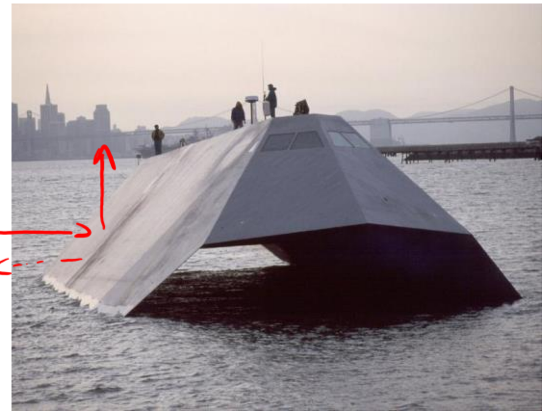


Tehnologii stealth



F117

RAM

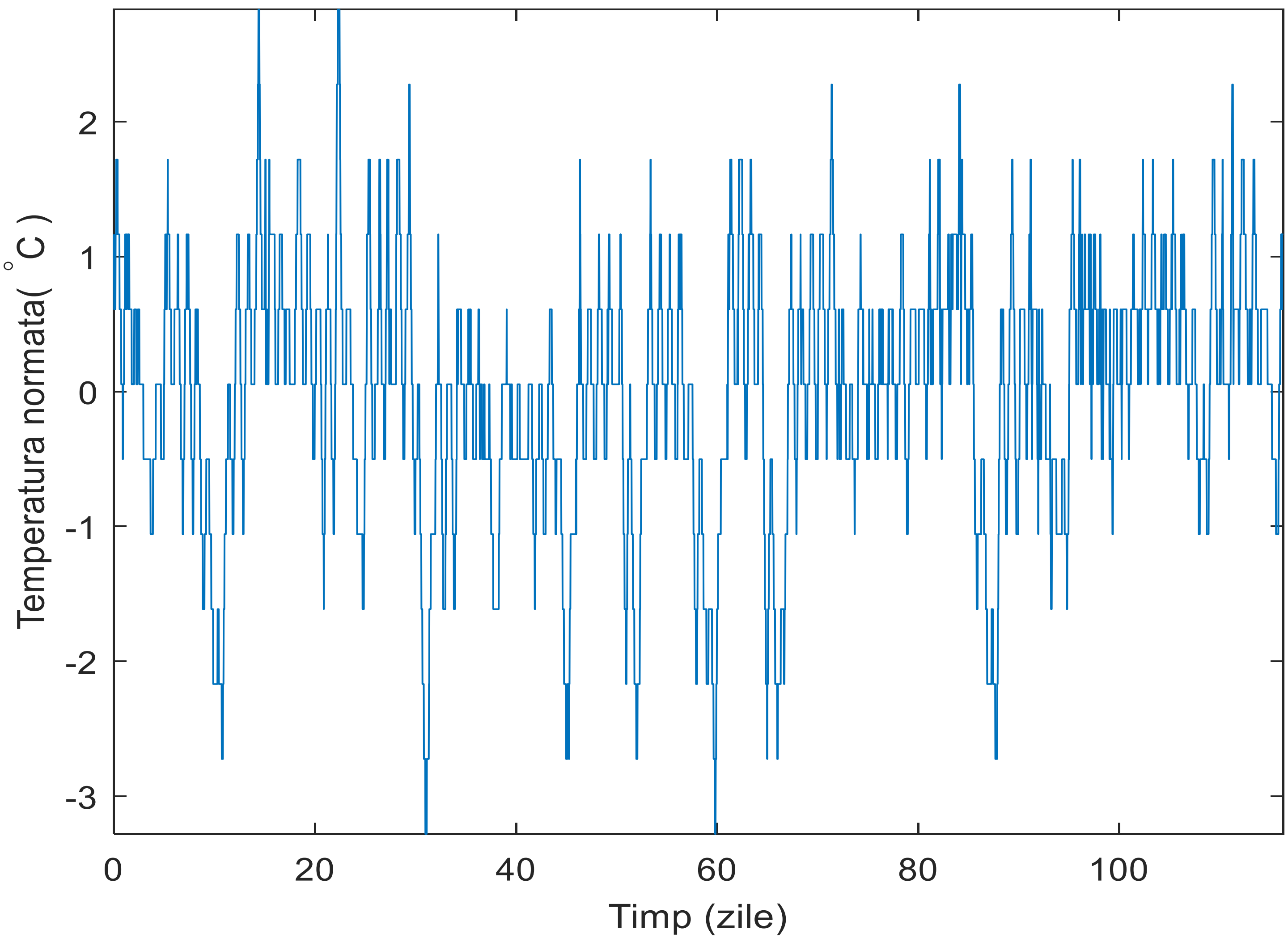


F22

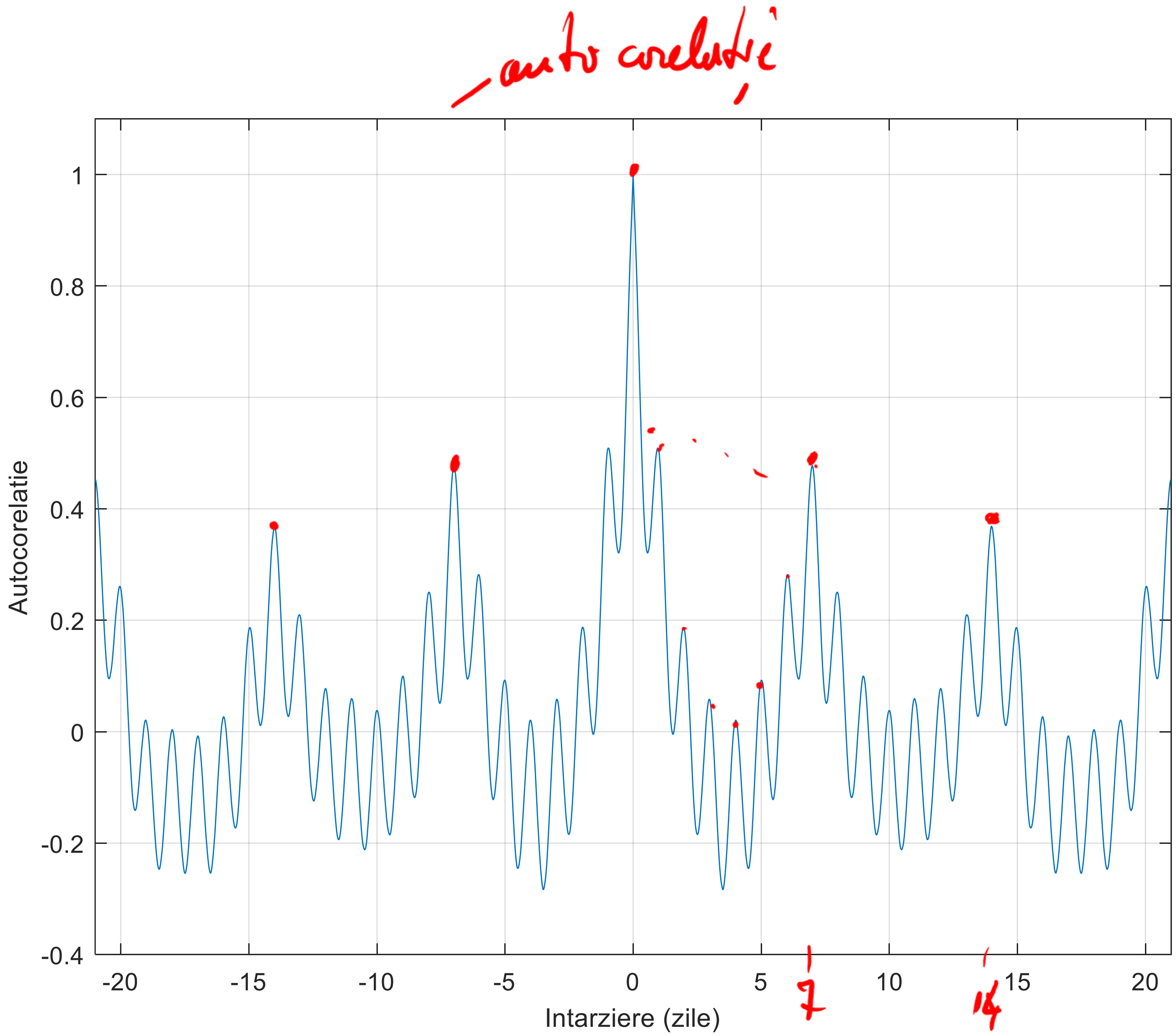
F35

B2

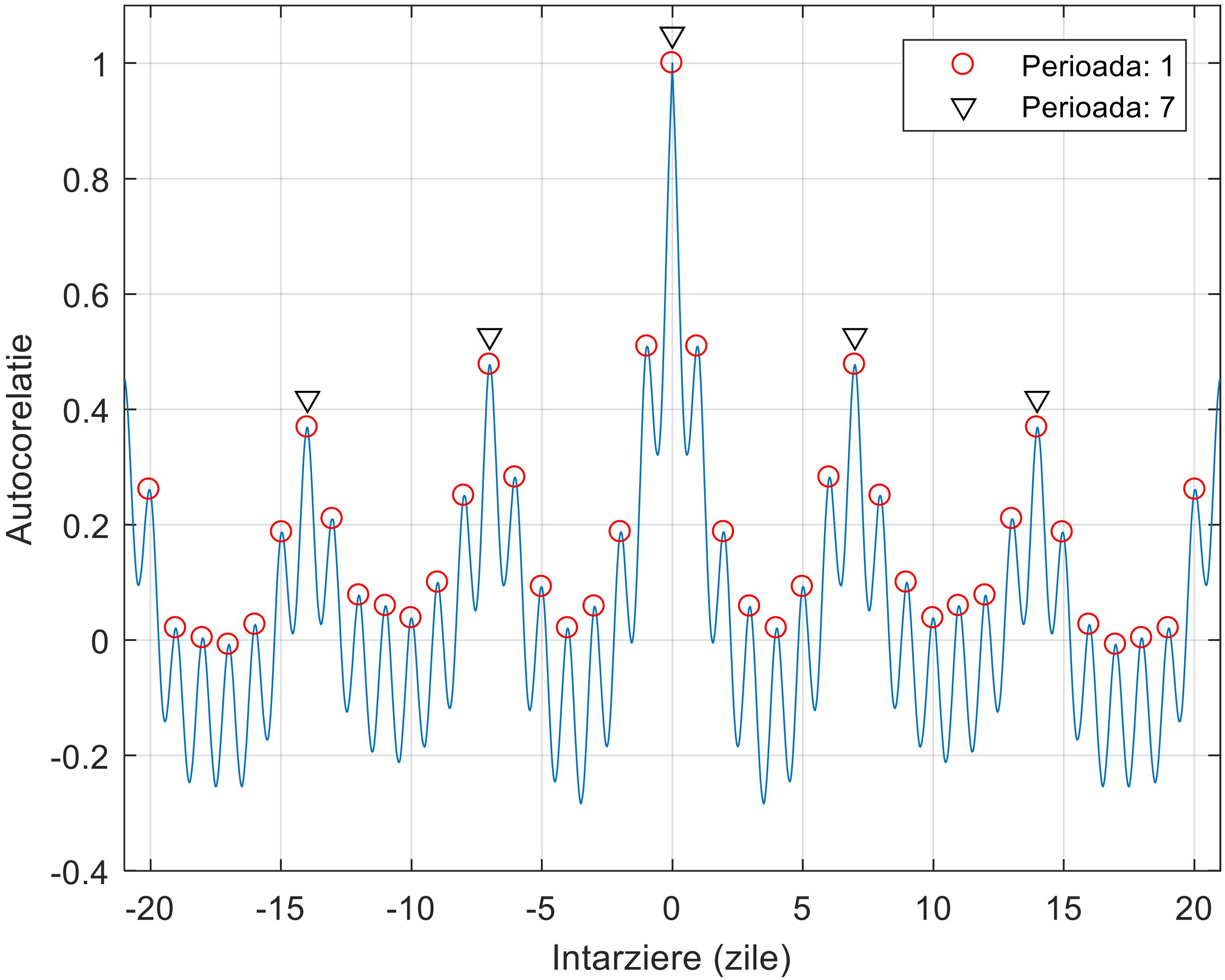
Analiza periodicitate semnal



Analiza periodicitate semnal



Analiza periodicitate semnal



Analiza periodicitate semnal

Autocorelația oscilează, indicând atât o variație zilnică, cât și o variație săptămânală. Acest lucru este de așteptat, întrucât temperatura în birou este mai mare când oamenii sunt la lucru și mai mică după program și în weekend.

Întrebări