– Práctica 2 –

Métodos multipaso lineales

1. **Métodos de Adams-Bashforth de dos pasos**. El problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y + e^{-t}\cos(t), \quad t \in [0,5], \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

tiene como solución exacta la función $y(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(t)$. En este apartado vamos a resolverlo numéricamente con el método Adams-Bashforth de dos pasos

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(3f_k - f_{k-1}).$$

```
from pylab import *
from time import perf_counter

def fun(t,y):
    return -y+exp(-t)*cos(t);


def exacta(t):
    return exp(-t)*sin(t);



def AB2(a,b,fun, N,y0):

    y = zeros(N+1)
    t = zeros(N+1)
    f = zeros(N+1)
    t[0] = a
    h = (b-a)/float(N)
    y[0] = y0
    f[0] = fun(a,y[0])
    y[1] = y[0] + h*f[0]
    t[1] = a+h
    f[1] = fun(t[1], y[1])
    for k in range(1,N):
        y[k+1] = y[k]+0.5*h*(3.0*f[k] - f[k-1])
        t[k+1] = t[k] + h
        f[k+1] = fun(t[k+1], y[k+1])

    return (t,y)


y0 = 0.0
a = 0.0
b = 5.0
N = 30
tini = perf_counter()
(t,y) = AB2(a,b,fun, N,y0)
tfin = perf_counter()
ye = exacta(t)
```

```
clf()
plot(t,y, '*')
plot(t,ye)
h = (b - a)/float(N)
error = max(abs(y-ye))
tcpu = tfin-tini
print('---------------')
print('h = '+ str(h))
print('Error= '+str(error))
print('Tiempo CPU= '+str(tcpu))
print('---------------')
```

Obsérvese que se usa el método de Euler para calcular y_1 ya que, aunque el método de Euler es de orden 1, su primer paso es de orden 2, que es el orden del método AB2.

a) Compruebe el orden del método para el problema (1). Para ello, ejecute el programa con $N = 10, 20, 40, 80, 160$. Obtenga en cada caso el error e_N que se comete y estudie el orden aproximado. Dibuje en una gráfica las aproximaciones obtenidas con los distintos valores de N junto con la solución exacta.

b) Implemente el método AB de tres pasos

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2})$$

eligiendo un método unipaso de orden 2 para calcular y_1 e y_2. Repita el apartado anterior.

c) En este apartado comparamos el coste computacional de los métodos unipaso y multipaso. Para ello, resuelva el problema (1) usando el método unipaso seleccionado en el apartado anterior con $N = 3000$. A continuación, resuelva el problema con AB3 y $N = 3000$ también. Compare los errores y el tiempo de ejecución, qué parece deducirse?

2. **Métodos de Adams-Moulton**. Consideramos ahora el método AM de 3 pasos, que se define como

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}).$$

Obsérvese que, en cada iteración, es necesario resolver la siguiente ecuación para calcular y_{k+1}:

$$y_{k+1} = h\frac{9}{24}f(t_{k+1}, y_{k+1}) + C_k, \tag{2}$$

siendo

$$C_k = y_k + \frac{h}{24}(19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}).$$

a) En el caso del problema (1), al ser f una función lineal en la variable y, es posible despejar y_{k+1} en (2). Implemente el método usando la expresión que se obtiene para y_{k+1}. Observe que se trata de un programa *específico* para el problema (1): no resuelve ninguna otra ecuación diferencial.

b) Escriba una implementación *general* del método (es decir, que sirva para una ecuación diferencial cualquiera) en la que, en cada paso, se aproxime la solución de (2) mediante el siguiente algoritmo de punto fijo:

$$z_{l+1} = h\frac{9}{24}f(t_{k+1}, z_l) + C_k, \quad l = 0, 1, 2 \ldots \tag{3}$$

tomando como semilla $z_0 = y_k$. Detenga el algoritmo cuando se cumpla

$$|z_{l+1} - z_l| < 10^{-12}$$

o si $l = 200$. En este último caso, el programa debe avisar al usuario de que el algoritmo de punto fijo no ha convergido, para que sepa que el método no está funcionando correctamente. Repita el apartado (a) del Ejercicio 1. El programa ha de calcular y poner en pantalla el máximo de los números de iteraciones del método de punto fijo realizados en los distintos pasos: es decir, si para calcular y_{k+1} han sido necesarias L_{k+1} iteraciones de (3) (sin contar la iteración inicial z_0), hay que calcular y poner en pantalla

$$maxiter = \max_{k=0,\dots,N-1} L_{k+1}.$$

c) Repita el apartado anterior usando ahora el método de Newton en cada paso para aproximar la solución de (2). Para ello, incluya la función $\partial_y f$ entre los parámetros de entrada del programa y use el mismo test de parada y la misma semilla que en el apartado anterior. Debería obtenerse $maxiter = 2$, por qué?

d) La solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2, & t \in [0,1], \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

es $y(t) = \tan(t)$. Aplique los programas realizados en los apartados (b) y (c) a su resolución con $N = 320$. Compare los números máximos de iteraciones *maxiter* y los tiempos de cálculo.

e) Modifique los programas de los apartados (b) y (c) tomando ahora como semilla del método de punto fijo y del método de Newton la aproximación que daría en el tiempo t_{k+1} el método Adams-Bahsforth de tres pasos, es decir

$$z_0 = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}).$$

Repita el ejercicio anterior y observe cómo varían los números máximos de iteraciones *maxiter* y los tiempos de cálculo.

3. **Métodos Predictor-Corrector**. Resuelva el problema (1) mediante el método ABM de tipo PECE que usa como predictor el método de Adams-Bashforth de 3 pasos y como corrector el de Adams-Moulton de 3 pasos. Repita el ejercicio (a) del apartado 1 para este método.

4. Implemente los métodos AB de 3 pasos, AM de 3 pasos (con iteración de punto fijo) y el método ABM del ejercicio anterior para sistemas. Aplique los métodos a la resolución de los problemas 4, 5, 6(a) y 7 de la Práctica 1. Compare el coste computacional de los distintos métodos entre sí, así como con los métodos RK implementados en la Práctica 1.