

EJERCICIO 1. Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & 2 \leq x < 4 \\ \frac{2x-5}{8} & 4 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{5}{4x} & x \geq 5 \end{cases}$$

Estudiar con detalle la función de distribución anterior. Si existen, calcular la mediana y la media.

(Hay que dar la función de densidad en el caso de ser absolutamente continua, los puntos de discontinuidad y sus probabilidades y la pseudodensidad en el caso de ser mixta o los puntos de discontinuidad y sus probabilidades en el caso de ser discreta)

Definición y representación la función de distribución.

In[55]:=

```
F[x_] := Piecewise[{{0, x < 0}, {x^2 / 16, 0 ≤ x < 2},
  {1 / 4, 2 ≤ x < 4}, {(2 x - 5) / 8, 4 ≤ x < 5}, {1 - 5 / (4 x), x ≥ 5}}]
```

In[56]:=

```
Plot[F[x], {x, -1, 10}, PlotRange → {{-1, 10}, {0, 1}},
  AxesLabel → {"x", "F[x]"}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PlotLabel → {"función de distribución"}, Ticks → {{2, 4, 5}}]
```

Volvemos a representar la función F[x] indicanto algunas marcas en el eje Y

In[*]:=

```
F[4] // N
```

In[*]:=

```
Limit[F[t], t → 4, Direction → 1]
```

In[*]:=

```
F[5]
```

In[*]:=

```
Limit[F[t], t → 5, Direction → 1] // N
```

In[57]:=

```
A[x_] := 1
```

```
In[58]:= Plot[{F[x], A[x]}, {x, -1, 10}, PlotRange -> {{-1, 10}, {0, 1}},
  representación gráfica rango de representación
  AxesLabel -> {"x", "F[x]"}, PlotStyle -> {{Red, Thick}, {Dashed, Thick}},
  Etiqueta de ejes estilo de represe... rojo grueso rayado grueso
  PlotLabel -> {"función de distribución"},
  Etiqueta de representación
  Ticks -> {{2, 4, 5}, {0.25, 0.375, 0.625, 0.75, 1}}]
  marcas
```

Cálculo la probabilidad en los puntos de discontinuidad

```
In[5] := P[x_] := F[x] - Limit[F[t], t -> x, Direction -> 1]
  límite dirección
```

```
In[6] := F[4]
```

```
In[7] := Limit[F[t], t -> 4, Direction -> 1]
  límite dirección
```

```
In[8] := P[4] // N
  valor numérico
```

```
Out[8] = 0.125
```

```
In[9] := F[5]
```

```
In[10] := Limit[F[t], t -> 5, Direction -> 1]
  límite dirección
```

```
In[11] := P[5]
```

```
In[12] := P[4] + P[5]
```

Calculamos y representamos la pseudodensidad

```
In[13] := D[F[x], x]
  deriva
```

```
In[14] := Simplify[%]
  simplifica
```

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{4} & 4 < x < 5 \\ \frac{5}{4x^2} & x > 5 \end{cases}$$

```
In[15] := f[x_] :=
  Piecewise[{{x / 8, 0 < x < 2}, {0, 2 < x < 4}, {1 / 4, 4 < x < 5}, {5 / (4 x^2), x > 5}}]
  función a trozos
```

```
In[16] := Plot[f[x], {x, -2, 15}, PlotStyle -> {Red, Thick},
  representación gráfica estilo de represe... rojo grueso
  AxesLabel -> {"x", "f(x)"}, Ticks -> {{2, 4, 5}}, PlotRange -> All]
  Etiqueta de ejes marcas rango de rep... todo
```

```

In[8]:= Limit[f[t], t -> 5, Direction -> -1] // N
      |límite           |dirección           |valor numérico

In[9]:= Plot[f[x], {x, -2, 15}, PlotStyle -> {Red, Thick},
      |representación gráfica |estilo de represe... |rojo |grueso
      AxesLabel -> {"x", "f(x)"}, Ticks -> {{2, 4, 5}, {0.05, 0.25}}, PlotRange -> All]
      |etiqueta de ejes      |marcas              |rango de rep... |todo

In[10]:= Integrate[x / 8, {x, 0, 2}]
      |integra

In[11]:= Integrate[1 / 4, {x, 4, 5}]
      |integra

In[12]:= Integrate[5 / (4 x^2), {x, 5, ∞}]
      |integra

In[13]:= Integrate[f[x], {x, 0, ∞}]
      |integra

In[14]:= P[4] + P[5] + Integrate[f[x], {x, 0, ∞}]
      |integra

```

Por tanto $P(D_x) + \int_0^\infty f^*[x] dx = 1$

Cálculo de la mediana: La mediana Me es un valor entre 4 y 5

```

In[5]:= M[x_] := 0.5

In[9]:= Plot[{F[x], M[x]}, {x, -1, 10}, PlotRange -> {{-1, 10}, {0, 1}},
      |representación gráfica |rango de representación
      AxesLabel -> {"x", "F[x]"}, PlotStyle -> {{Red, Thick}, {Dashed, Thick}},
      |etiqueta de ejes      |estilo de represe... |rojo |grueso |rayado |grueso
      PlotLabel -> {"función de distribución"},
      |etiqueta de representación
      Ticks -> {{2, 4, 5}, {0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 1}},
      |marcas
      Epilog -> {Text[Style["y=1/2", 12, Blue], {7, 0.55}]}]
      |texto |estilo |azul

In[10]:= Solve[(2 x - 5) / 8 == 1 / 2, x] // N
      |resuelve |v.

```

Me= 4.5

Cálculo de la esperanza E(X)

```

In[10]:= 4 * P[4] + 5 * P[5] + Integrate[x^2 / 8, {x, 0, 2}] +
      |integra
      Integrate[x / 4, {x, 4, 5}] + Integrate[5 / (4 x), {x, 5, ∞}]
      |integra |integra

```

La esperanza no existe

b) Consideremos la v.a. X con función de distribución dada en el ejercicio anterior y sea

$$Y = \begin{cases} |X - 1| & X < 2 \\ 1/2 & 2 \leq X \leq 4 \\ X/(X - 1) & X > 4 \end{cases}$$

Calcular la función de distribución de Y. Calcule los cuartiles de Y.

Definimos y dibujamos la transformación

```
Y[x_] := Piecewise[{ {Abs[x - 1], x < 2}, {1 / 2, 2 ≤ x ≤ 4}, {x / (x - 1), x > 4} }]
```

función a trozos valor absoluto

```
In[11]:= Limit[Y[t], t → 4, Direction → -1]
```

límite dirección

```
In[60]:= Plot[Y[x], {x, 0, 10}, PlotRange → {{0, 10}, {0, 1.5}},
representación gráfica                      rango de representación
  AxesLabel → {"x", "y"}, PlotStyle → {{Orange, Thick}, {Dashed, Thick}},
etiqueta de ejes                      estilo de represe...    naranja    grueso    rayado    grueso
  PlotLabel → {"función de distribución"}, Ticks → {{2, 4, 5}, {0.5, 1, 4 / 3}}]
```

marcas

```
In[6]:= Limit[x / (x - 1), x → ∞]
```

límite

Dibujamos la asíntota en y = 1

```
In[20]:= A[x_] := 1
```

```
In[64]:= Plot[{Y[x], A[x]}, {x, -1, 10}, PlotRange → {{-1, 10}, {0, 1.5}},
representación gráfica                      rango de representación
  PlotStyle → {{Thick, Orange}, {Thick, Purple, Dashed}},
estilo de represe...    grueso    naranja    grueso    púrpura    rayado
  Ticks → {{0, 1, 2, 4, 5}, {0.5, 4 / 3, 1}},
marcas
  Epilog → {Text[Style["y=1-x", 12, Blue], {0.3, 0.3}],
    Text[Style["y=x-1", 12, Blue], {2, 0.8}], Text[Style["y=1/2", 12, Blue],
      {3, 0.6}], Text[Style["y=x/(x-1)", 12, Blue], {6, 1.3}],
    Text[Style["y=1", 12, Purple], {9, 1.05}]}]
```

texto estilo azul estilo azul estilo azul estilo púrpura

Como la función de distribución de la X para valores menores que 0 vale 0, dibujo la transformación para valores mayores que 0.

```
In[5]:= Y[5] // N
```

valor numérico

```

In[30]:= Plot[{Y[x], A[x]}, {x, 0, 10}, PlotRange -> {{0, 10}, {0, 1.5}},
representación gráfica rango de representación
PlotStyle -> {{Thick, Orange}, {Thick, Purple, Dashed}},
estilo de represe... grueso naranja grueso púrpura rayado
Ticks -> {{0, 1, 2, 4, 5}, {0.5, 1.25, 1.3333, 1}},
marcas
Epilog -> {Text[Style["y=1-x", 12, Blue], {0.3, 0.3}],
texto estilo azul
Text[Style["y=x-1", 12, Blue], {2, 0.8}], Text[Style["y=1/2", 12, Blue],
estilo azul texto estilo azul
{3, 0.6}], Text[Style["y=x/(x-1)", 12, Blue], {6, 1.3}],
texto estilo azul
Text[Style["y=1", 12, Purple], {9, 1.05}]}]
estilo púrpura

```

Calculamos las inversas

```

In[*]:= Solve[x - 1 == y, x]
resuelve

```

```

In[*]:= Solve[1 - x == y, x]
resuelve

```

```

In[*]:= Solve[x / (x - 1) == y, x]
resuelve

```

Cálculo de la función de distribución de Y

si $y < 0$ entonces $G(y) = P(Y \leq y) = 0$

si $0 \leq y < 1/2$

```

Plot[{Y[x], A[x]}, {x, 0, 10}, PlotRange -> {{0, 10}, {-0.2, 1.5}},
representación gráfica rango de representación
PlotStyle -> {{Thick, Orange}, {Thick, Purple, Dashed}},
grueso naranja grueso púrpura rayado
Ticks -> {{0, 1, 2, 4, 5}, {0.5, 1.25, 1, 1.33}},
marcas
Epilog -> {Text[Style["y", 15], {-0.4, 0.3}],
texto estilo
{Dashed, Line[{{0, 0.3}, {0.7, 0.3}}]}, {Dashed, Line[{{0.7, 0.3}, {0.7, 0}}]},
rayado línea rayado línea
Text[Style["1-y", 15], {0.5, -0.1}],
estilo
{Dashed, Line[{{0, 0.3}, {1.3, 0.3}}]}, {Dashed, Line[{{1.3, 0.3}, {1.3, 0}}]},
rayado línea rayado línea
Text[Style["1+y", 15], {1.5, -0.1}],
estilo
{Green, Thick, Line[{{0.7, 0}, {1.3, 0}}]}, c]
verde grueso línea

```

si $0 \leq y < 1/2$ entonces $G(y) = P(Y \leq y) = P(1-y \leq X \leq 1+y) = F(1+y) - F(1-y) = y/4$

In[]:= $(1 + y)^2 / 16 - (1 - y)^2 / 16$

In[]:= **Simplify[%]**
 simplifica

si $1/2 \leq y < 1$

In[65]:=

```
Plot[{Y[x], A[x]}, {x, 0, 10}, PlotRange -> {{0, 10}, {-0.2, 1.5}},
representación gráfica rango de representación
PlotStyle -> {{Thick, Orange}, {Thick, Purple, Dashed}},
grueso naranja grueso púrpura rayado
Ticks -> {{0, 1, 2, 4, 5}, {0.5, 1.25, 1, 1.33}},
marcas
Epilog -> {Text[Style["y", 15], {-0.4, 0.7}],
texto estilo
{Dashed, Line[{{0, 0.7}, {0.3, 0.7}}]}, {Dashed, Line[{{0.3, 0.7}, {0.3, 0}}]},
rayado línea rayado línea
Text[Style["1-y", 15], {0.5, -0.1}],
estilo
{Dashed, Line[{{0, 0.7}, {1.7, 0.7}}]}, {Dashed, Line[{{1.7, 0.7}, {1.7, 0}}]},
rayado línea rayado línea
Text[Style["1+y", 15], {1.5, -0.1}], {Dashed, Line[{{0, 0.7}, {5, 0.7}}]},
texto estilo rayado línea
{Green, Thick, Line[{{0.3, 0}, {1.7, 0}}]}, {Green, Thick, Line[{{2, 0}, {4, 0}}]},
verde grueso línea verde grueso línea
Text[Style["y=1", 12, Purple], {9, 1.05}]
estilo púrpura
```

Simplify[(1 + y)^2 / 16 - (1 - y)^2 / 16]
 simplifica

F[4] - Limit[F[t], t -> 2, Direction -> 1]
 límite dirección

Si $1/2 \leq y \leq 1$ entonces $G(y) = P(Y \leq y) = P(1-y \leq X \leq 1+y) + P(2 \leq X \leq 4) = F(1+y) - F(1-y) + F(4) - F(2^-) = 1/8 + y/4$

In[]:= **Solve[y / (y - 1) == 5, y]**
 resuelve

si $1 < y < 5/4$

In[66]:=

```
Plot[{Y[x], A[x]}, {x, 0, 10}, PlotRange → {{0, 10}, {-0.2, 1.5}},
  representaci3n gr1fica rango de representaci3n
  PlotStyle → {{Thick, Orange}, {Thick, Purple, Dashed}},
    grueso naranja grueso p1rpura rayado
  Ticks → {{0, 1, 2, 4, 5}, {0.5, 1.25, 1, 1.33}},
    marcas
  Epilog → {Text[Style["y", 15], {-0.4, 1.15}],
    texto estilo
    {Dashed, Line[{{0, 1.15}, {7.7, 1.15}}]}, {Dashed, Line[{{7.7, 1.15}, {7.7, 0}}]},
      rayado l1nea rayado l1nea
    Text[Style["y/y-1", 15], {7.7, -0.1}],
      estilo
    {Green, Thick, Line[{{0, 0}, {4, 0}}]}, {Green, Thick, Line[{{7.7, 0}, {10, 0}}]},
      verde grueso l1nea verde grueso l1nea
    Text[Style["y=1", 12, Purple], {9, 1.05}]}]
```

In[6] := F[4]

```
In[6] := Simplify[1 - 5 / (4 (y / (y - 1)))]
simplifica
```

```
In[6] := Simplify[F[4] + 1 - 1 + 5 / (4 (y / (y - 1)))]
simplifica
```

Si $1 < y < 5/4$ entonces $G(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq 4) + P(X \geq y/(y-1)) = F(4) + 1 - P(X < y/(y-1)) = 13/8 - 5/(4y)$

Nota: Si $1 < y < G[5] = 5/4$ entonces $y/(y-1) \geq 5$ luego $F[y/(y-1)] = 1 - 5/(4(y/(y-1)))$

si $5/4 < y < 4/3$

In[67]:=

```
Plot[{Y[x], A[x]}, {x, 0, 10}, PlotRange → {{0, 10}, {-0.2, 1.5}},
  representaci3n gr1fica rango de representaci3n
  PlotStyle → {{Thick, Orange}, {Thick, Purple, Dashed}},
    grueso naranja grueso p1rpura rayado
  Ticks → {{0, 1, 2, 4, 5}, {0.5, 1.25, 1, 1.33}},
    marcas
  Epilog → {Text[Style["y", 15], {-0.4, 1.15}],
    texto estilo
    Text[Style["1-y", 15], {0.5, -0.1}],
      estilo
    {Dashed, Line[{{0, 1.3}, {4.3, 1.3}}]}, {Dashed, Line[{{4.3, 1.3}, {4.3, 0}}]},
      rayado l1nea rayado l1nea
    Text[Style["y/y-1", 15], {4.3, -0.1}],
      estilo
    {Green, Thick, Line[{{0, 0}, {4, 0}}]}, {Green, Thick, Line[{{4.3, 0}, {10, 0}}]},
      verde grueso l1nea verde grueso l1nea
    Text[Style["y=1", 12, Purple], {9, 1.05}]}]
```

F[4]

Simplify[(3 / 8) + 1 - (2 * (y / (y - 1)) - 5) / 8]

[simplifica](#)

Si $5/4 < y < 4/3$ entonces $G(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq 4) + P(X \geq y/(y-1)) = F(4) + 1 - P(X < y/(y-1)) = (8-7y)/(4-4y)$

Nota: Si $5/4 < y < 4/3$ entonces $y/(y-1) \leq 5$ luego $F[y/(y-1)] = 2(y/(y-1))$

si $y \geq 4/3$, $G[y] = 1$

La función de distribución de la v.a. Y viene dada por la expresión

$$G[y] = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{y}{4} & 0 \leq y < 1/2 \\ \frac{2y+1}{8} & 1/2 \leq y < 1 \\ \frac{13}{8} - \frac{5}{4y} & 1 \leq y < 5/4 \\ \frac{8-7y}{4-4y} & 5/4 \leq y < 4/3 \\ 1 & y \geq 4/3 \end{cases}$$

```
In[48]:= G[y_] := Piecewise[
  función a trozos
  {{y / 4, 0 ≤ y < 1 / 2}, {(2 y + 1) / 8, 1 / 2 ≤ y < 1}, {(13 / 8) - (5 / (4 y)), 1 ≤ y < 5 / 4},
  {(8 - 7 y) / (4 - 4 y), 5 / 4 ≤ y < 4 / 3}, {1, y ≥ 4 / 3}}]
```

```
In[49]:= Plot[G[y], {y, -1, 2}, AxesOrigin → {0, 0},
  representación gráfica origen de ejes
  Ticks → {{1 / 2, 1, 5 / 4, 4 / 3}}, PlotRange → {All}, PlotStyle → {Blue, Thick}
  marcas rango de repre... todo estilo de repre... azul grueso
```

Cálculo de las probabilidades en los puntos donde la función cambia de forma

```
In[50]:= P[y_] := G[y] - Limit[G[t], t → y, Direction → 1]
  límite dirección
```

```
In[51]:= P[1 / 2]
```

```
In[52]:= P[1]
```

```
In[53]:= P[5 / 4]
```

```
In[54]:= P[4 / 3]
```

```
In[55]:= P[1 / 2] + P[5 / 4]
```

Cálculo de la pseudodensidad

D[(2 y + 1) / 8, y]

[deriva](#)

D[(13 / 8) - (5 / (4 y)), y]

[deriva](#)

D[(8 - 7 y) / (4 - 4 y), y]

[deriva](#)

Simplify $\left[\frac{4(8-7y)}{(4-4y)^2} - \frac{7}{4-4y}\right]$

[simplifica](#)

También se puede hacer la derivada de una vez :

In[50]:= **D**[G[y], y]

[deriva](#)

In[51]:= **Simplify**[%]

[simplifica](#)

g[y_] := **Piecewise** $\left[\left\{\left\{1/4, 0 < y < 1\right\}, \left\{\frac{5}{4y^2}, 1 < y < 5/4\right\}, \left\{\frac{1}{4(-1+y)^2}, 5/4 < y < 4/3\right\}\right\}\right]$

[función a trozos](#)

g[y]

Plot[g[y], {y, 0, 2}, **PlotRange** → All, **AxesOrigin** → {0, 0}, **Ticks** → {{1, 5 / 4, 4 / 3}}

[representación gráfica](#)

[rango de rep...](#)

[todo](#)

[origen de ejes](#)

[marcas](#)

Integrate[1 / 4, {y, 0, 1}] + **Integrate** $\left[\frac{5}{4y^2}, \{y, 1, 5/4\}\right]$ +

[integra](#)

[integra](#)

Integrate $\left[\frac{1}{4(-1+y)^2}, \{y, 5/4, 4/3\}\right]$

[integra](#)

P[1 / 2] + **P**[5 / 4] + **Integrate**[1 / 4, {y, 0, 1}] +

[integra](#)

Integrate $\left[\frac{5}{4y^2}, \{y, 1, 5/4\}\right]$ + **Integrate** $\left[\frac{1}{4(-1+y)^2}, \{y, 5/4, 4/3\}\right]$

[integra](#)

[integra](#)

Cálculo de la mediana: La mediana Me es un valor entre 1 y 5/4 porque $G[1]=3/8 \leq G[Me] \leq G[5/4^-]=5/8$

In[52]:= **M**[y_] : 1 / 2

```
In[52]:= Plot[{G[y], M[y]}, {y, -1, 2}, AxesOrigin -> {0, 0},
  representaci3n gr1fica      origen de ejes
  Ticks -> {{1/2, 1, 5/4, 4/3}, {0.5}}, PlotRange -> {All},
  marcas                      rango de repre... todo
  PlotStyle -> {{Blue, Thick}, {Orange, Thin, Dashed}}]
  azul      grueso      naranja      delg... rayado
```

G[1]

```
In[53]:= Limit[G[t], t -> 5/5, Direction -> 1]
  l3mite      direcci3n
```

```
In[54]:= Solve[(13/8) - (5/(4y)) == 0.5, y]
  resuelve
```

Me= 1.11111

Q1[x_] := 0.25

```
In[5] := Q3[x_] := 0.75
```

```
In[6] := Plot[{G[y], Q1[x], Q3[x]}, {y, -1, 2}, AxesOrigin -> {0, 0},
  representaci3n gr1fica      origen de ejes
  Ticks -> {{1/2, 1, 5/4, 4/3}, {0.25, 0.5, 0.75}}, PlotRange -> {All},
  marcas                      rango de repre... todo
  PlotStyle -> {{Blue, Thick}, {Orange, Thin, Dashed}, {Purple, Thin, Dashed}}]
  azul      grueso      naranja      delg... rayado      p3rpura      delg... rayado
```

C1culo del primer cuartil: $Q1 = 1/2$ porque $G[1/2] \leq \frac{1}{4} \leq G[1/2] + P[1/2]$

G[1/2]

G[1/2] + P[1/2]

C1culo del tercer cuartil: $Q3 = 5/4$ porque $G[5/4] \leq \frac{3}{4} \leq G[5/4] + P[5/4]$

G[5/4]

P[5/4]

G[5/4] + P[5/4]

C1culo de la esperanza

```
In[7] := media = 0.5 * P[1/2] + 1.25 * P[5/4] + Integrate[y/4, {y, 0, 1}] +
  integra
  Integrate[ $\frac{y}{4y^2}$ , {y, 1, 5/4}] + Integrate[ $\frac{y}{4(-1+y)^2}$ , {y, 5/4, 4/3}]
  integra      integra
```

C1culo de la varianza

In[6]:=

```
momento2 = 0.5^2 * P[1 / 2] + 1.25^2 * P[5 / 4] + Integrate[y^2 / 4, {y, 0, 1}] +
Integrate[y^2, {y, 1, 5 / 4}] + Integrate[y^2, {y, 5 / 4, 4 / 3}]
```

In[6]:= Varianza = momento2 - media^2