

– Práctica 4 –  
Integración numérica

El objetivo de esta práctica es la implementación de algunas fórmulas de cuadratura, simples y compuestas, para aproximar la integral definida de una función dada,

$$\int_a^b f(x) dx.$$

En el caso de las fórmulas simples, los argumentos de entrada serán la función a integrar  $f$  y los extremos de integración  $a$  y  $b$ . En el caso de las fórmulas compuestas, a los anteriores argumentos de entrada se añadirá  $N$ , el número de subintervalos de  $[a, b]$  considerados.

Las fórmulas implementadas se utilizarán para aproximar la integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad (1)$$

para cuyo integrando no es posible calcular una primitiva usando funciones elementales.

La aproximación obtenida en cada caso se comparará con la obtenida con la función `quad` de Python, que se utilizará como solución de referencia.

1. **Fórmula del punto medio.** Programar una función que implemente la regla del punto medio,

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

aplicarla a (1) y comparar el valor obtenido con el que ofrece la función predefinida `quad` de Python.

2. **Fórmula del trapecio.** Repetir el ejercicio anterior para la regla del trapecio,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

3. **Fórmula de Simpson.** Volver a repetirlo para la regla de Simpson,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

4. **Fórmula del punto medio compuesta.** Programar una función que implemente la regla del punto medio compuesta para una partición uniforme del intervalo  $[a, b]$  definida por

$$x_j = a + \frac{b-a}{N}j, \quad j = 0, \dots, N.$$

Aproximar con esta fórmula la integral en (1) con  $N = 10, 20, 40, 80$ , comparando los valores obtenidos con el dado por `quad`. Comentar los resultados obtenidos.

5. **Fórmula del trapecio compuesta.** Repetir el ejercicio anterior para la regla del punto medio compuesta.
6. **Fórmula de Simpson compuesta.** Volver a repetirlo para la regla de Simpson compuesta.
7. **Fórmula de Gauss de 3 puntos.** Programar una función que implemente la fórmula de Gauss de 3 puntos, de nuevo con argumentos de entrada  $f$ ,  $a$  y  $b$ , y de modo que, a partir de los nodos y los pesos correspondientes a dicha fórmula en el intervalo  $[-1, 1]$ , calcule los nodos y pesos correspondientes al intervalo  $[a, b]$ , para posteriormente evaluar la expresión de la fórmula de cuadratura en ese intervalo. Utilizarla para aproximar la integral en (1) y comparar el valor obtenido con el ofrecido por `quad`.