

Estructuras de Datos.

Grado en Informática, Ingeniería del Software y Computación

ETSI Informática

Universidad de Málaga

Orden Topológico en Digrafos

@ José E. Gallardo, Francisco Gutiérrez, Pablo López

Dpto. Lenguajes y Ciencias de la Computación

Universidad de Málaga

Orden Topológico en DiGrafos

- Dado un digrafo acíclico (DAG, *Directed Acyclic Graph*), un **orden topológico** es una relación de orden parcial ($<$) entre vértices tal que:
 - Si existe un arco desde v a w , entonces w es mayor que v en el orden.

$$v \rightarrow w \Rightarrow v < w$$

- Un digrafo puede tener **varios** órdenes topológicos
- Si el digrafo es **cíclico**, el orden topológico no existe 😞

Orden Topológico en DiGrafos

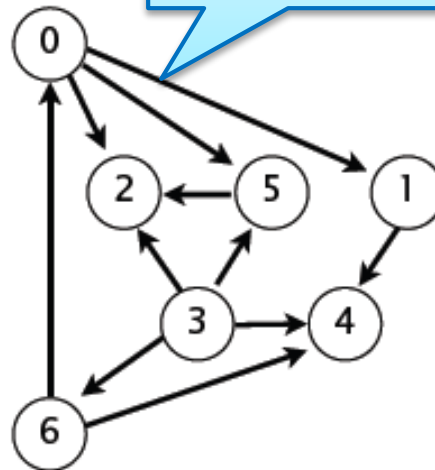
- **Objetivo:** dado un conjunto de tareas que deben terminar antes que otras comiencen (prerrequisitos),
¿En qué orden deben ser planificadas las tareas?

- Modelado por un digrafo

- vértice= tarea
- arco = prerrequisito

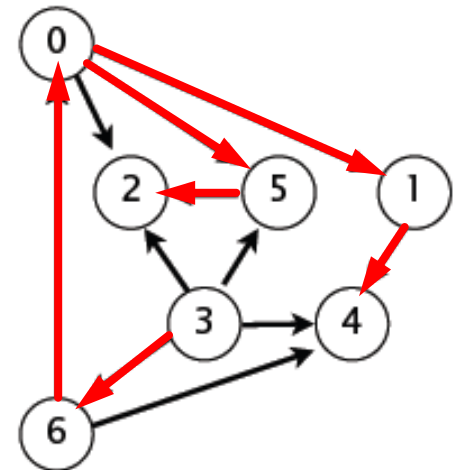
0. Algorithms
1. Complexity Theory
2. Artificial Intelligence
3. Intro to CS
4. Cryptography
5. Scientific Computing
6. Advanced Programming

Se debe estudiar
Algorithms antes
que *Complexity
Theory*



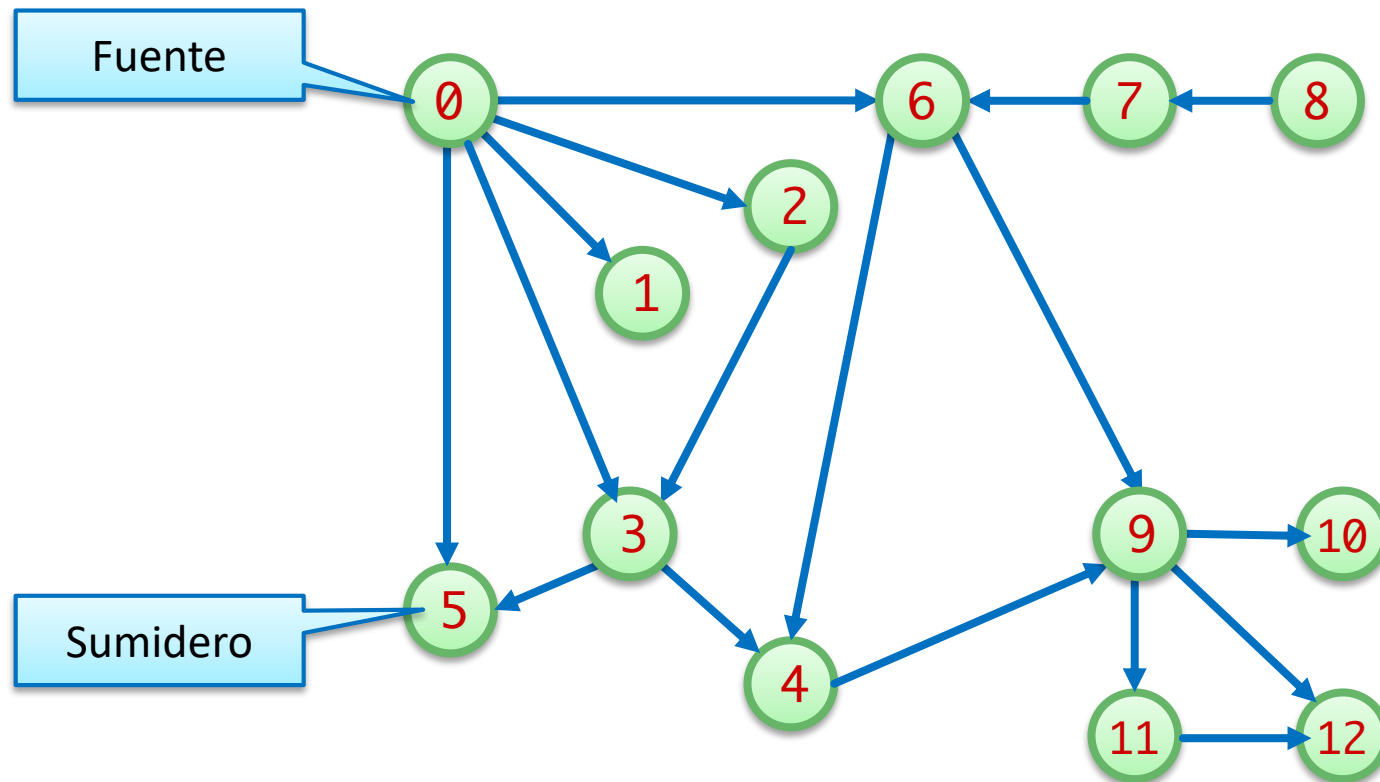
Dos órdenes
topológicos

3 < 6 < 0 < 5 < 2 < 1 < 4
3 < 6 < 0 < 1 < 4 < 5 < 2



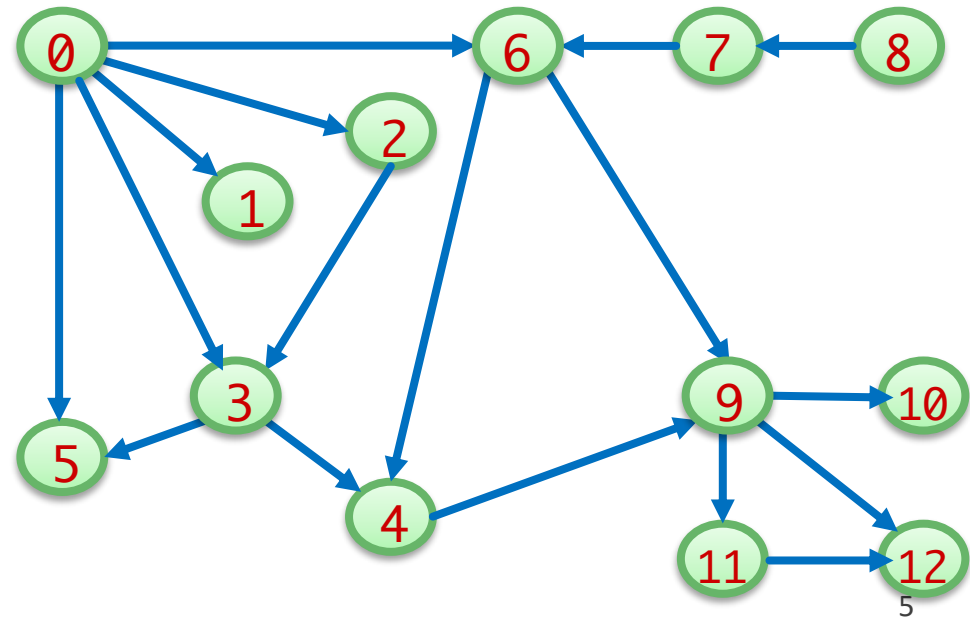
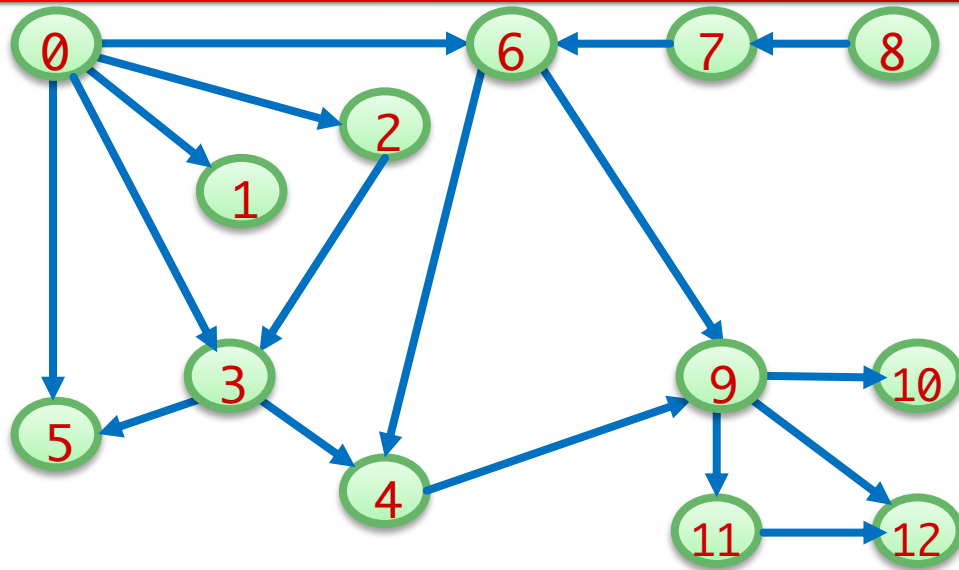
Orden Topológico en DiGrafos

- **Fuente:** vértice cuyo grado de entrada es 0
- **Sumidero:** vértice cuyo grado de salida es 0

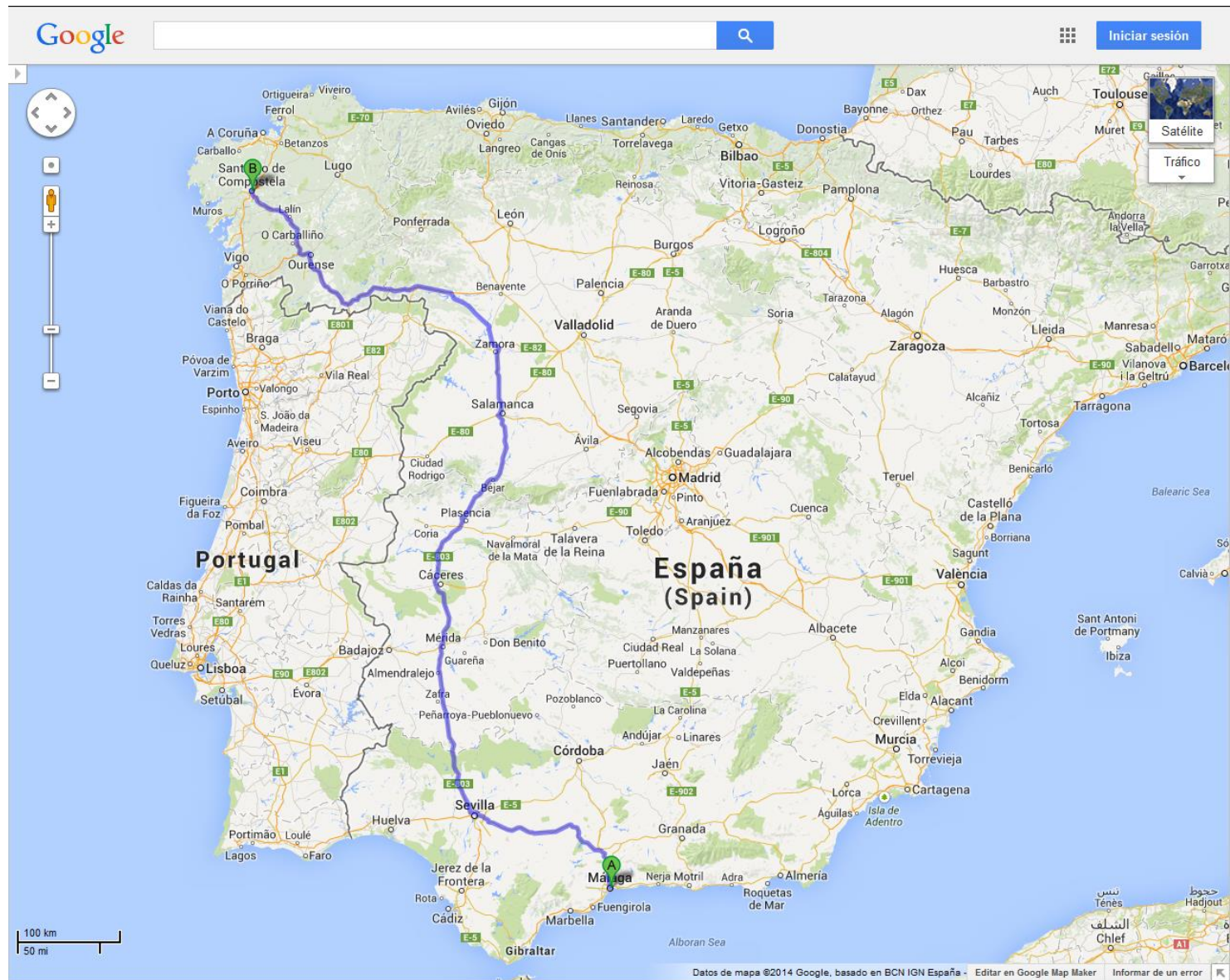


orden topológico: $8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11 < 12$

El algoritmo visto en clase clona el grafo



Clonar no siempre es adecuado



Un algoritmo que no clona el grafo

- Utilizaremos un diccionario:
 vértice \rightarrow # predecesores pendientes
 (# significa *número de*)
- El diccionario se **inicializa** al comenzar
- El diccionario se **actualiza** en cada iteración, eliminando fuentes y restando predecesores pendientes
- El grafo **no se modifica**

Pseudocódigo

Inicializar diccionario

Mientras no hayamos acabado ni haya ciclo

 Seleccionar fuentes del diccionario

 Eliminar fuentes del diccionario

 Añadir fuentes al orden topológico

 Restar fuentes del diccionario

Orden Topológico en DiGrafos

Inicializamos diccionario con grados de entrada

vértice -> # predecesores pendientes

0 -> 0

1 -> 1

2 -> 1

3 -> 2

4 -> 2

5 -> 2

6 -> 2

7 -> 1

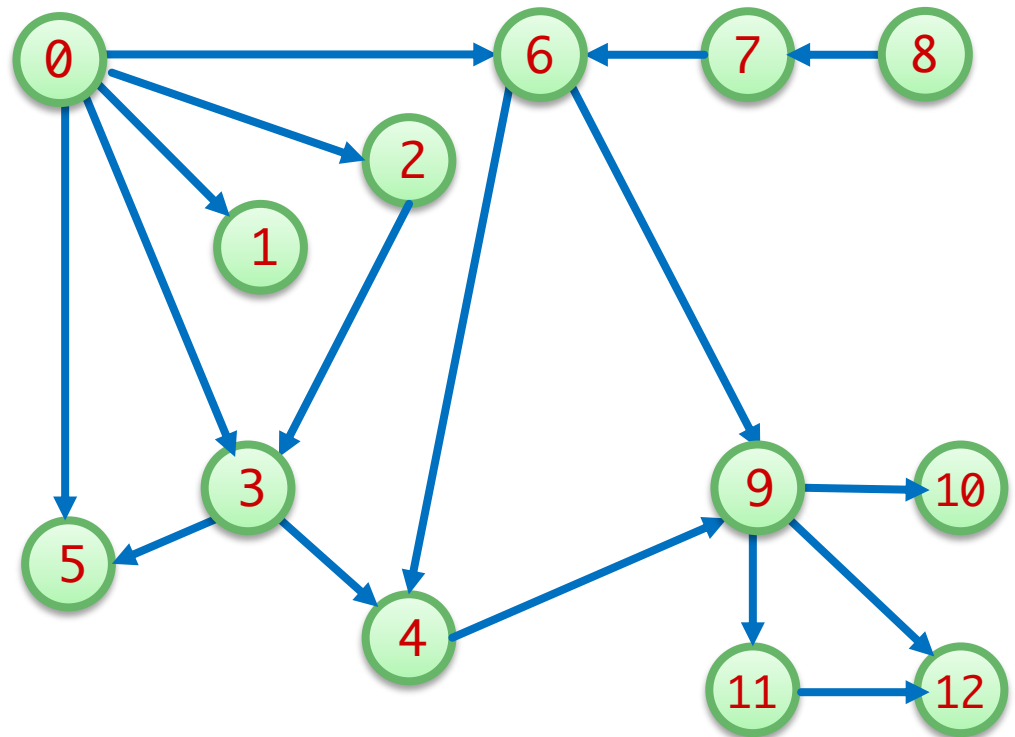
8 -> 0

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{0, 8\}$

vértice -> # predecesores pendientes

0 -> 0

1 -> 1

2 -> 1

3 -> 2

4 -> 2

5 -> 2

6 -> 2

7 -> 1

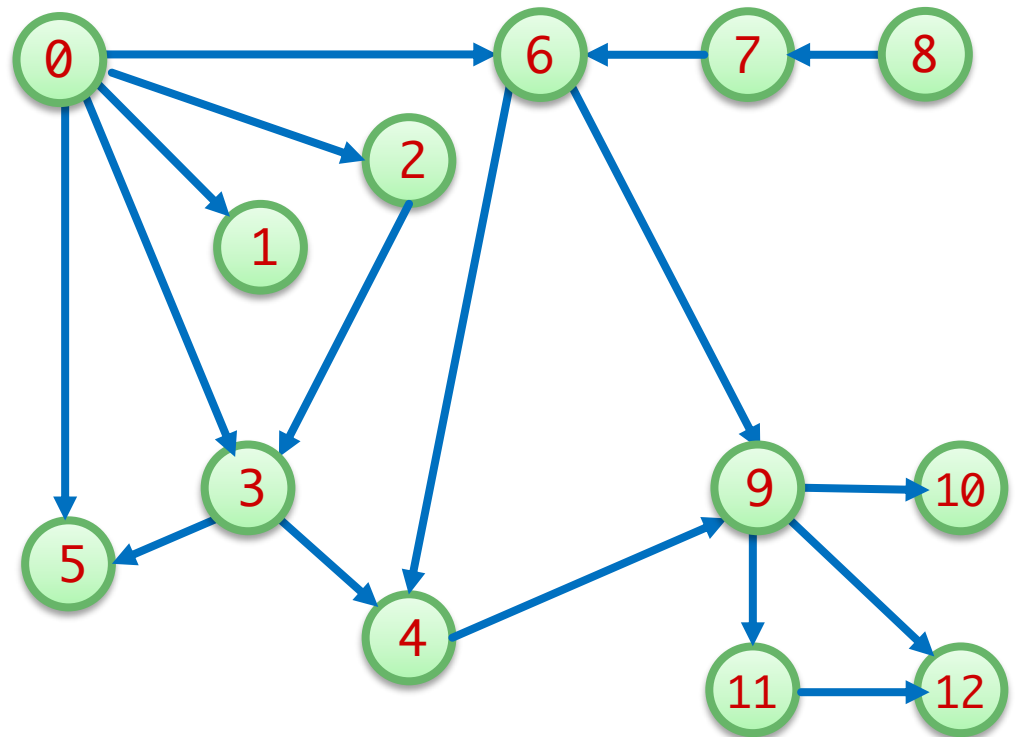
8 -> 0

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2

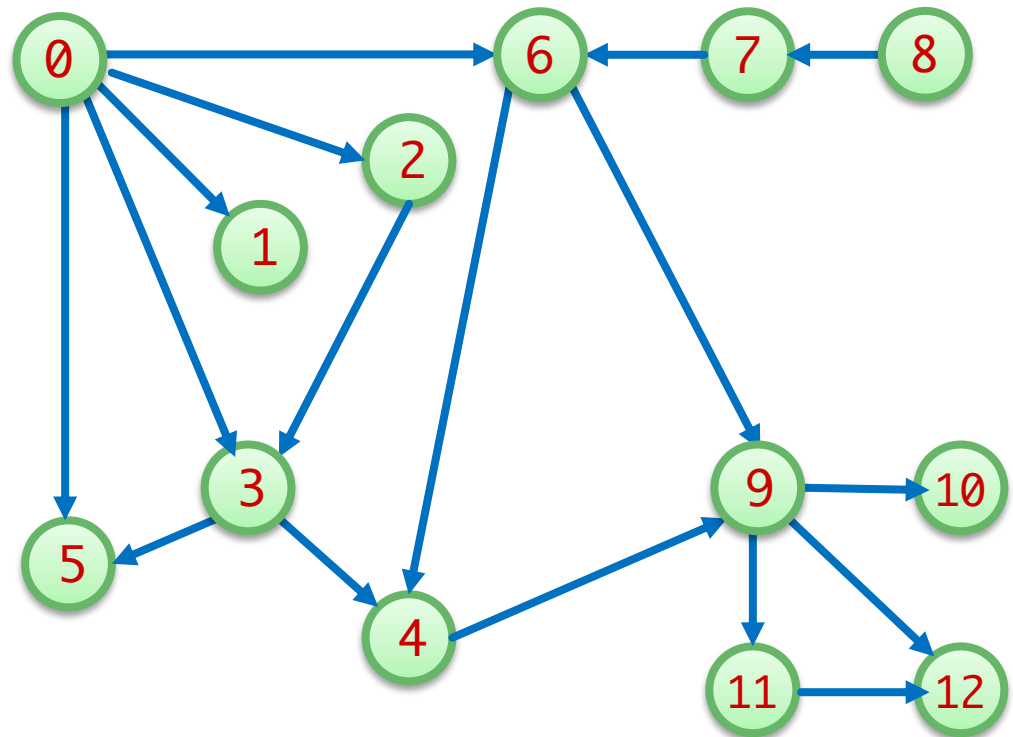


Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{0, 8\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 1
2 -> 1
3 -> 2
4 -> 2
5 -> 2
6 -> 2
7 -> 1
9 -> 2
10 -> 1
11 -> 1
12 -> 2



Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{0, 8\}$ al orden topológico

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

1 \rightarrow 1

2 \rightarrow 1

3 \rightarrow 2

4 \rightarrow 2

5 \rightarrow 2

6 \rightarrow 2

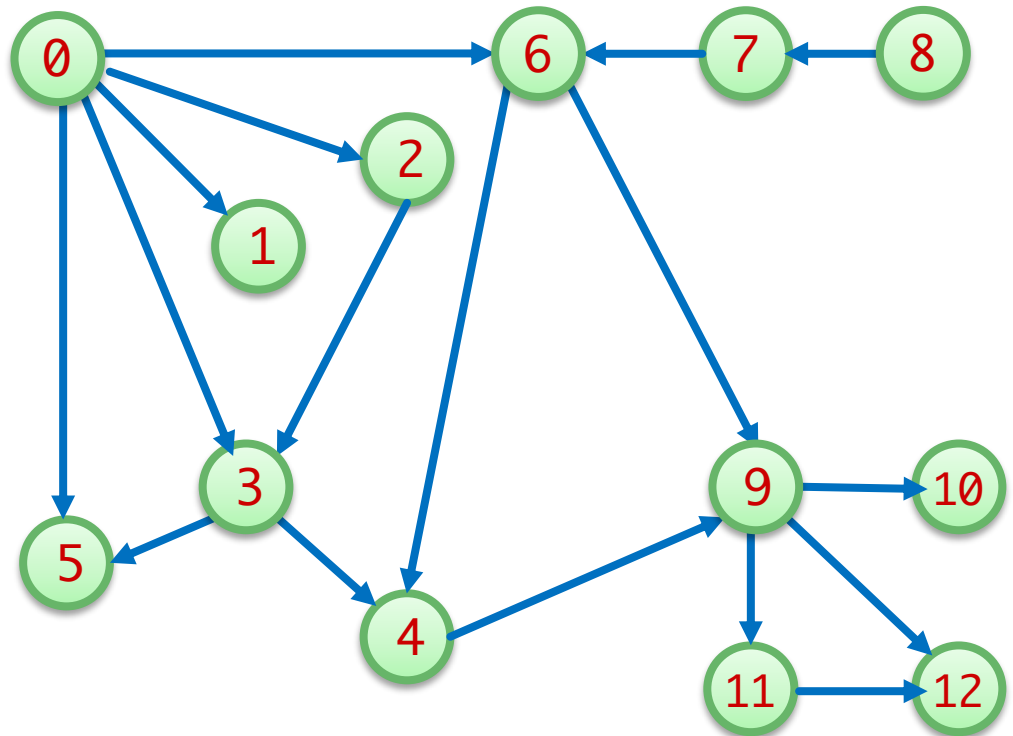
7 \rightarrow 1

9 \rightarrow 2

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



orden topológico: 8 < 0

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{0, 8\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 0

2 -> 0

3 -> 1

4 -> 2

5 -> 1

6 -> 1

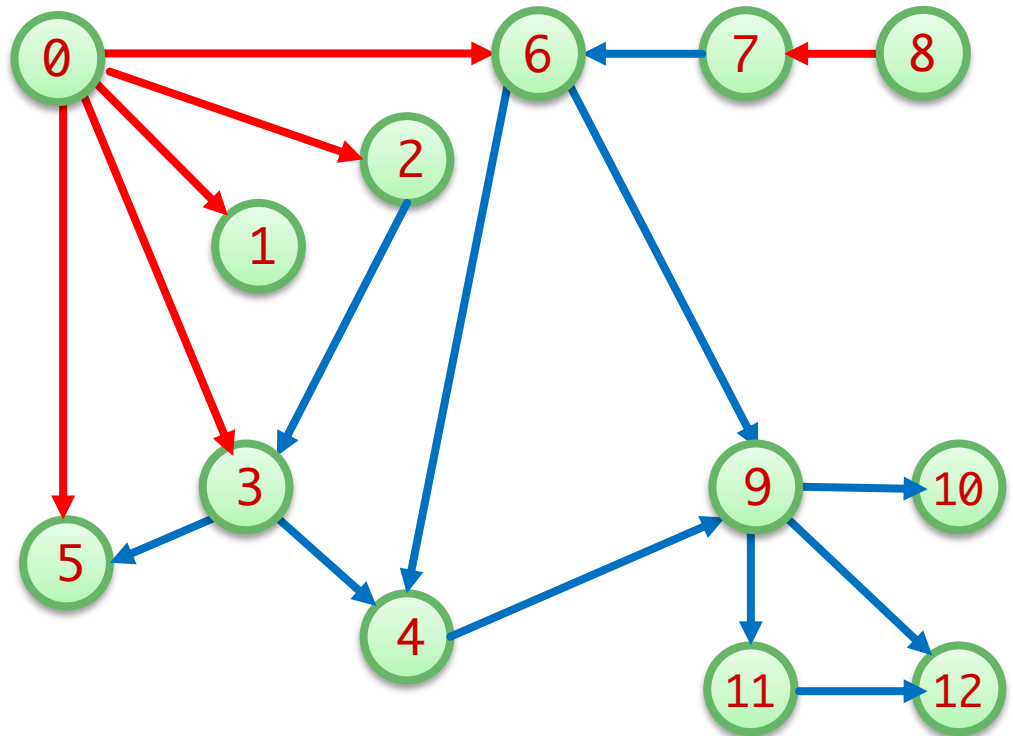
7 -> 0

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



orden topológico: 8 < 0

Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{1, 2, 7\}$

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

1 \rightarrow 0

2 \rightarrow 0

3 \rightarrow 1

4 \rightarrow 2

5 \rightarrow 1

6 \rightarrow 1

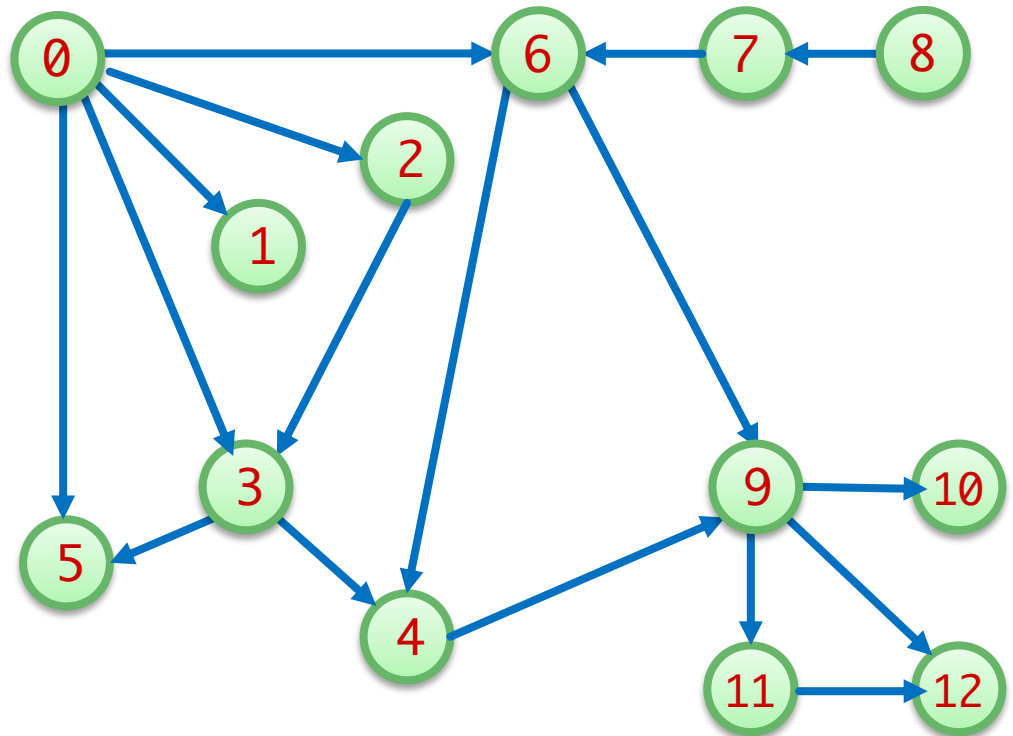
7 \rightarrow 0

9 \rightarrow 2

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



orden topológico: 8 \prec 0

Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{1, 2, 7\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

3 -> 1

4 -> 2

5 -> 1

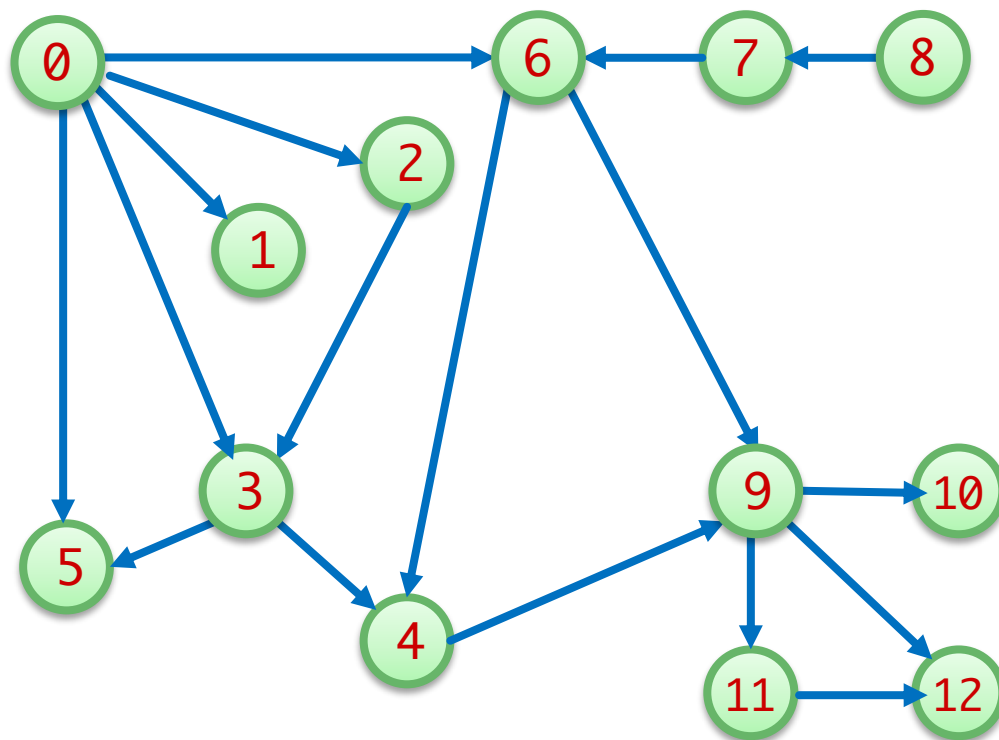
6 -> 1

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



orden topológico: $8 < 0$

Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{1, 2, 7\}$ al orden topológico

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

3 \rightarrow 1

4 \rightarrow 2

5 \rightarrow 1

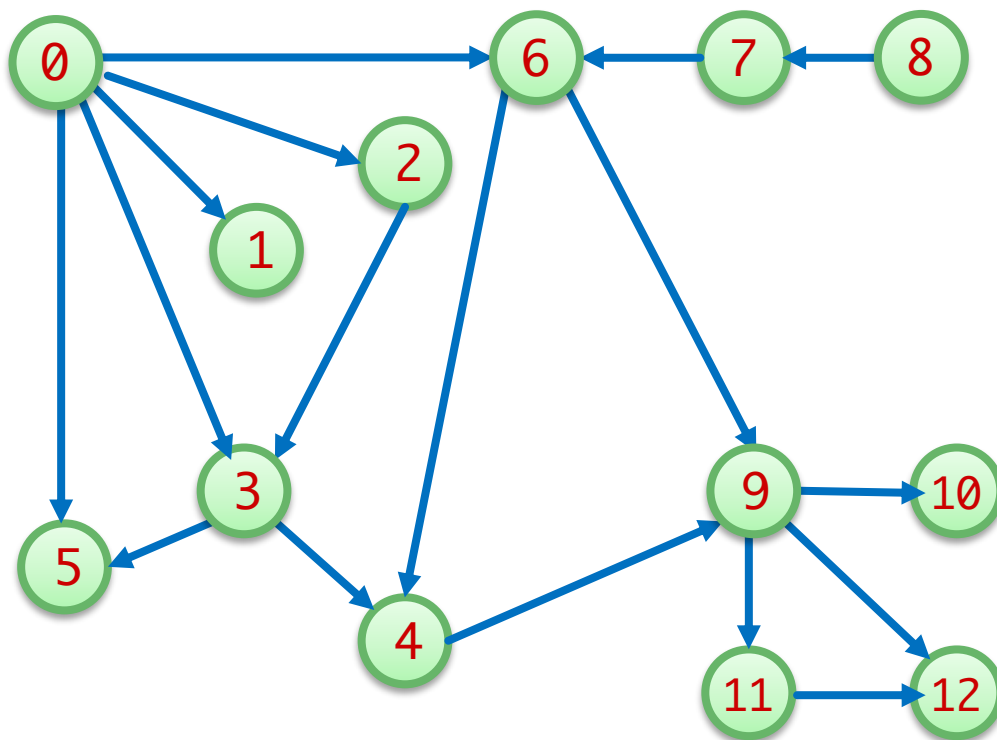
6 \rightarrow 1

9 \rightarrow 2

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{1, 2, 7\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

3 -> 0

4 -> 2

5 -> 1

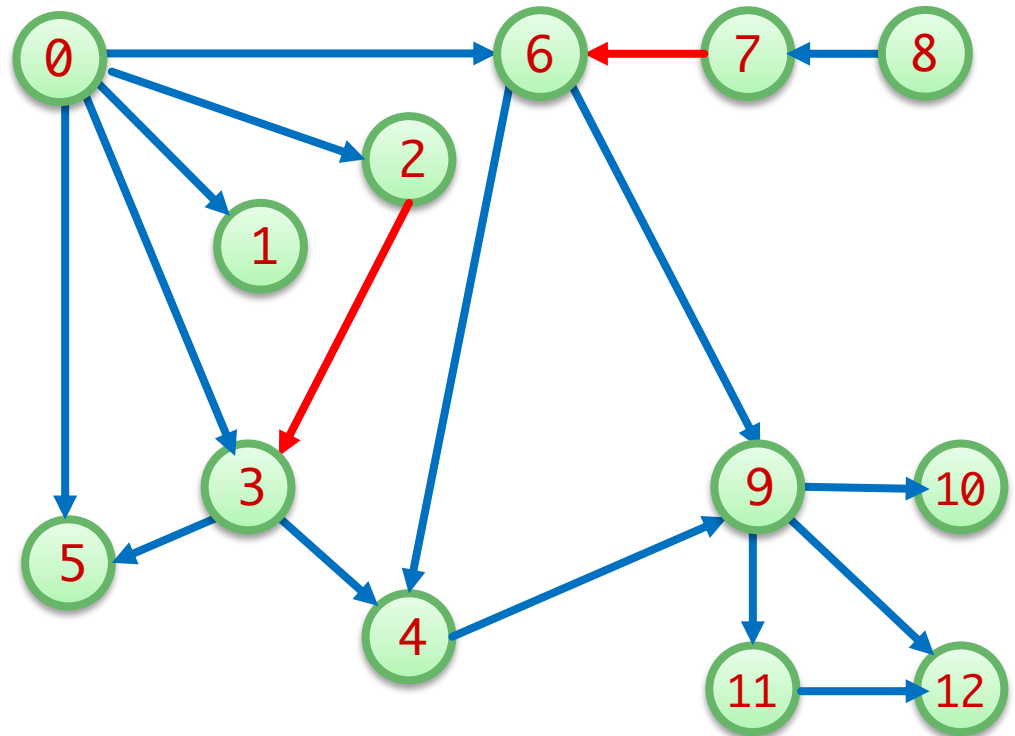
6 -> 0

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1

Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{3, 6\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

3 \rightarrow 0

4 \rightarrow 2

5 \rightarrow 1

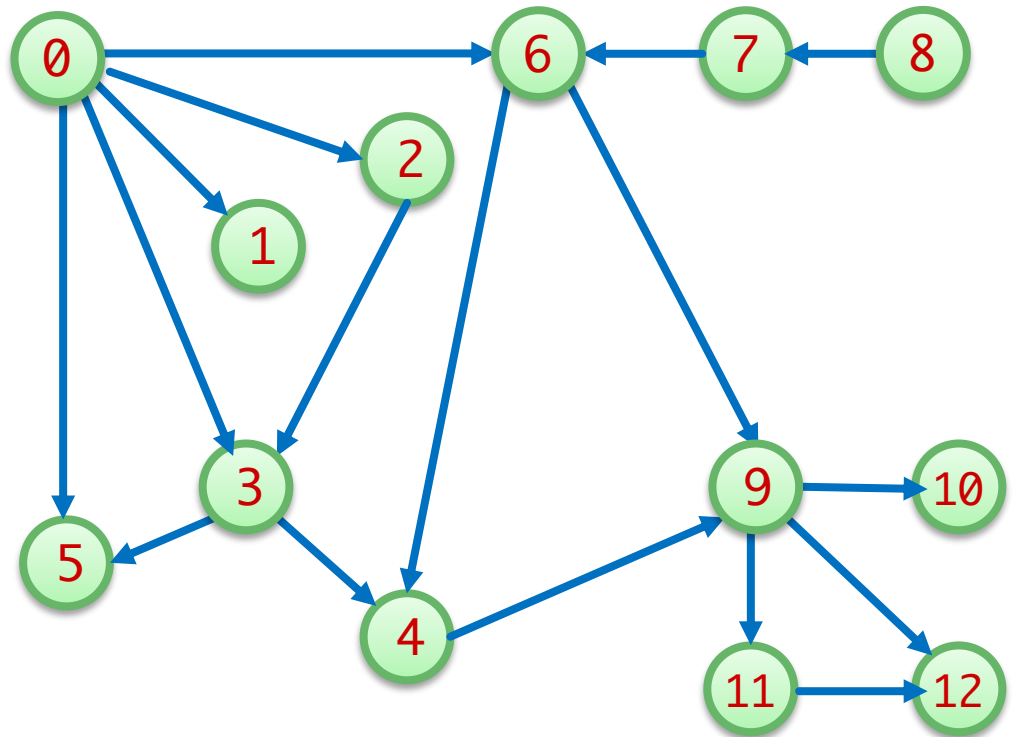
6 \rightarrow 0

9 \rightarrow 2

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



orden topológico: **8** \prec **0** \prec **2** \prec **7** \prec **1**

Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{3, 6\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

4 -> 2

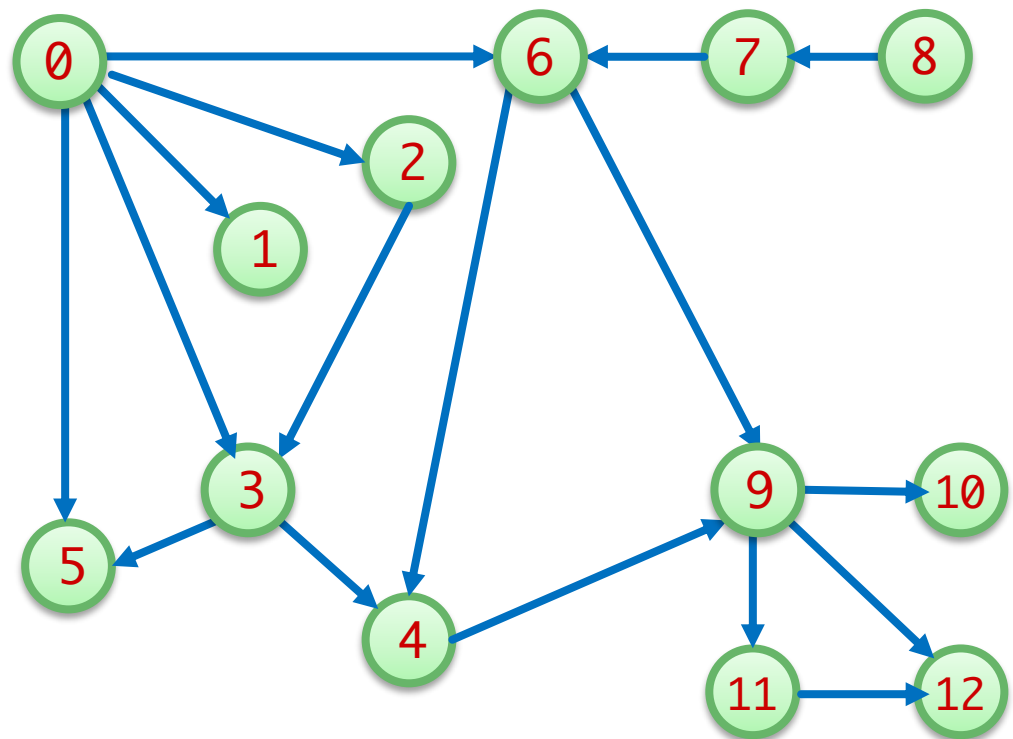
5 -> 1

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



orden topológico: $8 < 0 < 2 < 7 < 1$

Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{3, 6\}$ al orden topológico

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

4 \rightarrow 2

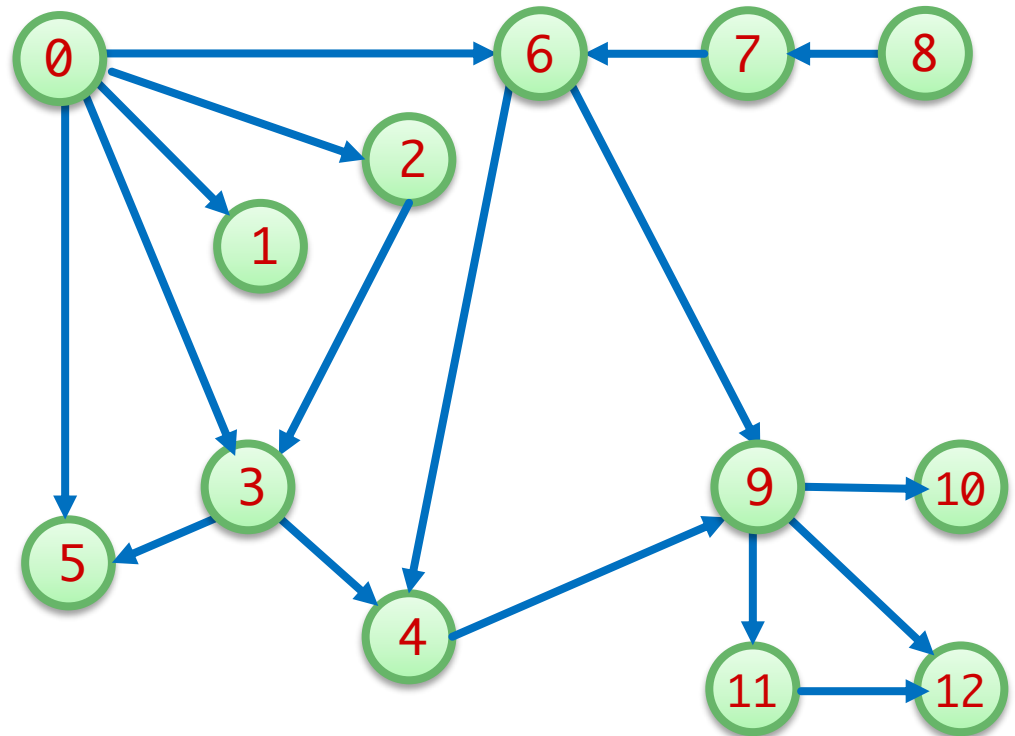
5 \rightarrow 1

9 \rightarrow 2

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{3, 6\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

4 \rightarrow 0

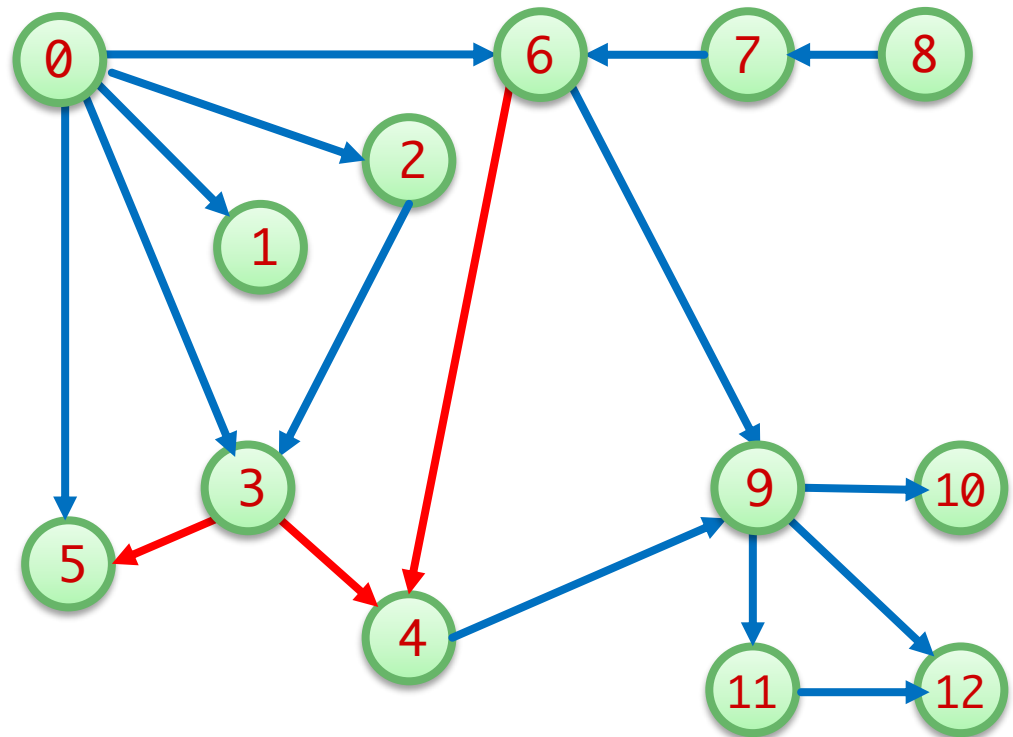
5 \rightarrow 0

9 \rightarrow 1

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6

Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{4, 5\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

4 \rightarrow 0

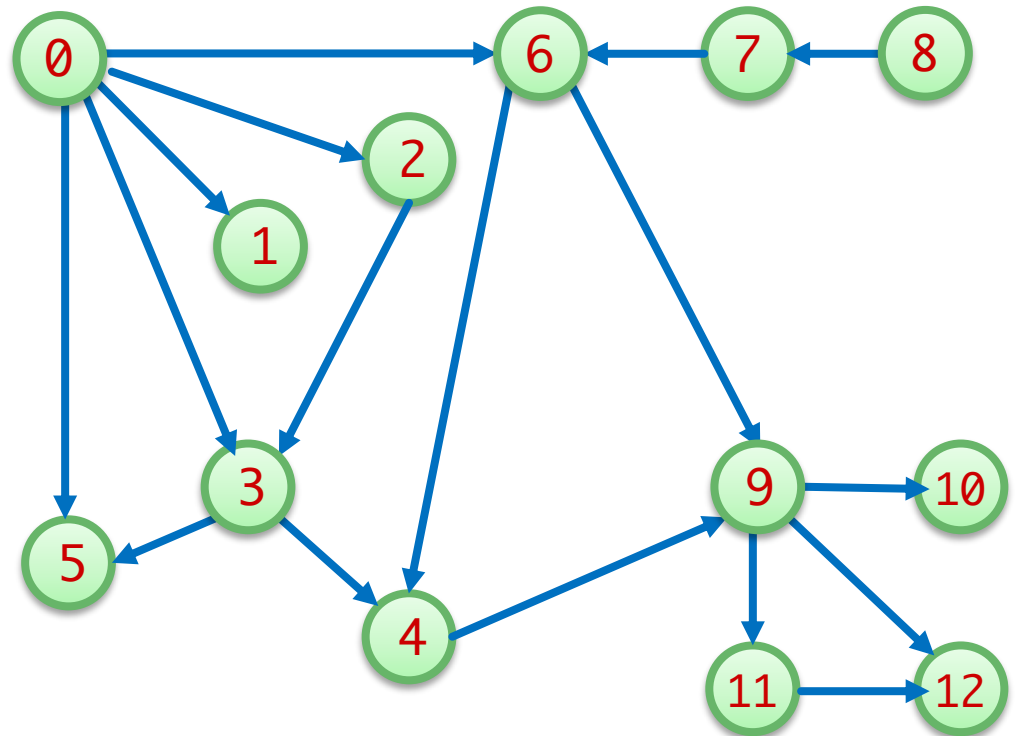
5 \rightarrow 0

9 \rightarrow 1

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



orden topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6

Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{4, 5\}$ del diccionario

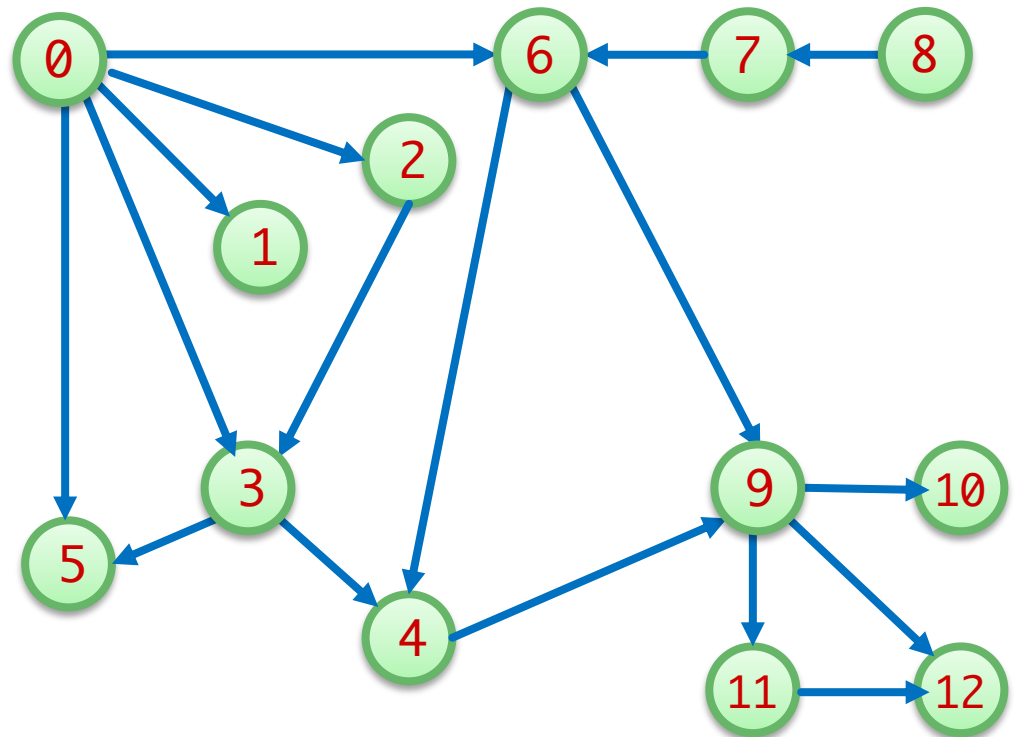
vértice -> # predecesores pendientes

9 -> 1

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



orden topológico: $8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6$

Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{4, 5\}$ al orden topológico

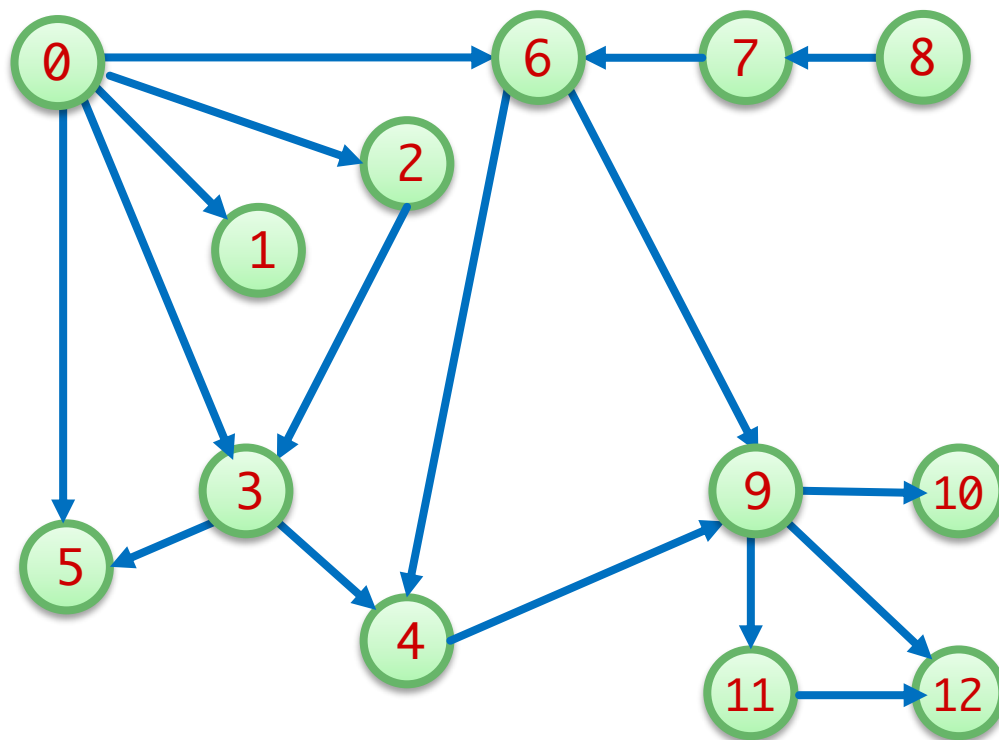
vértice -> # predecesores pendientes

9 -> 1

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



orden topológico: $8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5$

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{4, 5\}$ del diccionario

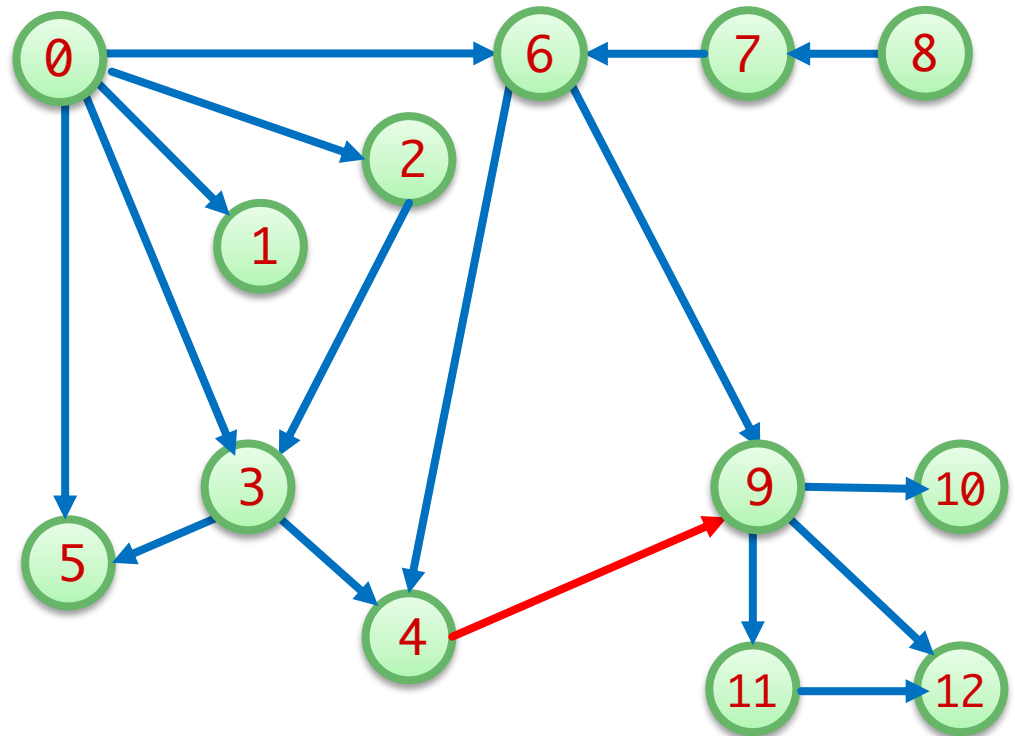
vértice -> # predecesores pendientes

9 -> 0

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



orden topológico: $8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5$

Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{9\}$ del diccionario

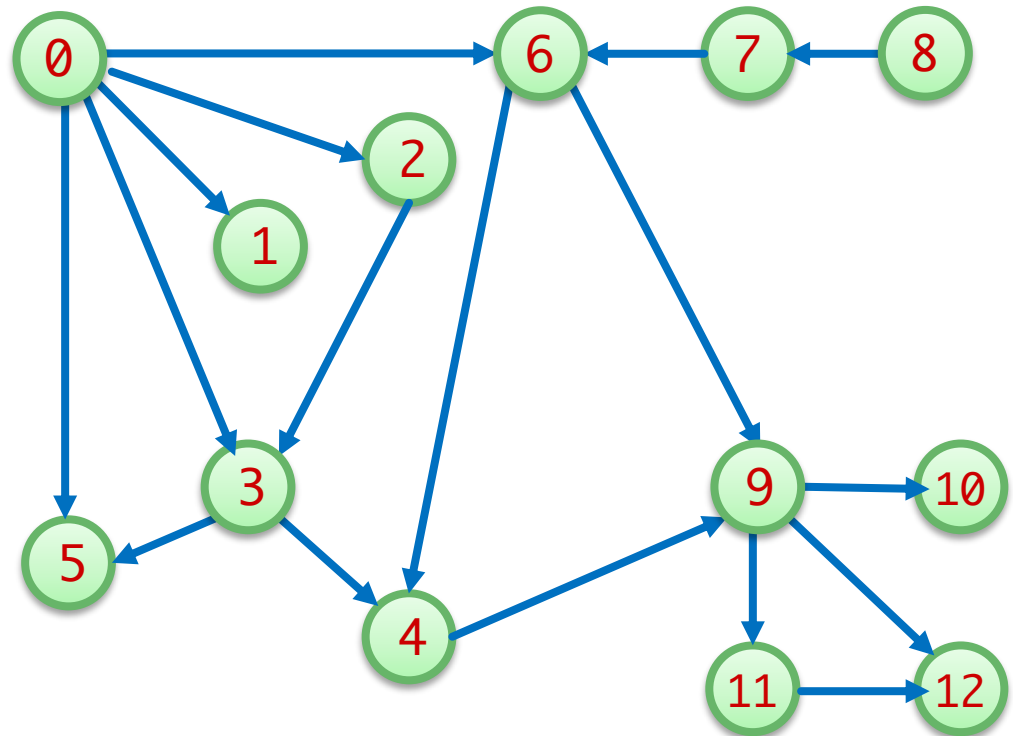
vértice \rightarrow # predecesores pendientes

9 \rightarrow 0

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



orden topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6 \prec 4 \prec 5

Orden Topológico en DiGrafos

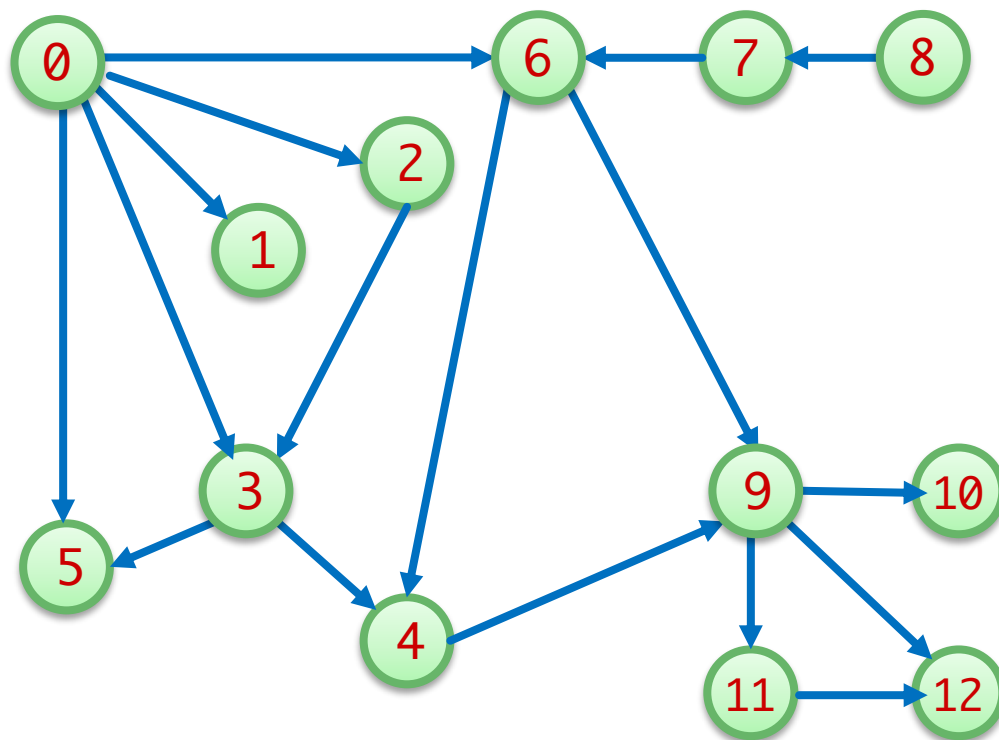
Eliminamos fuentes $F = \{9\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



orden topológico: $8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5$

Orden Topológico en DiGrafos

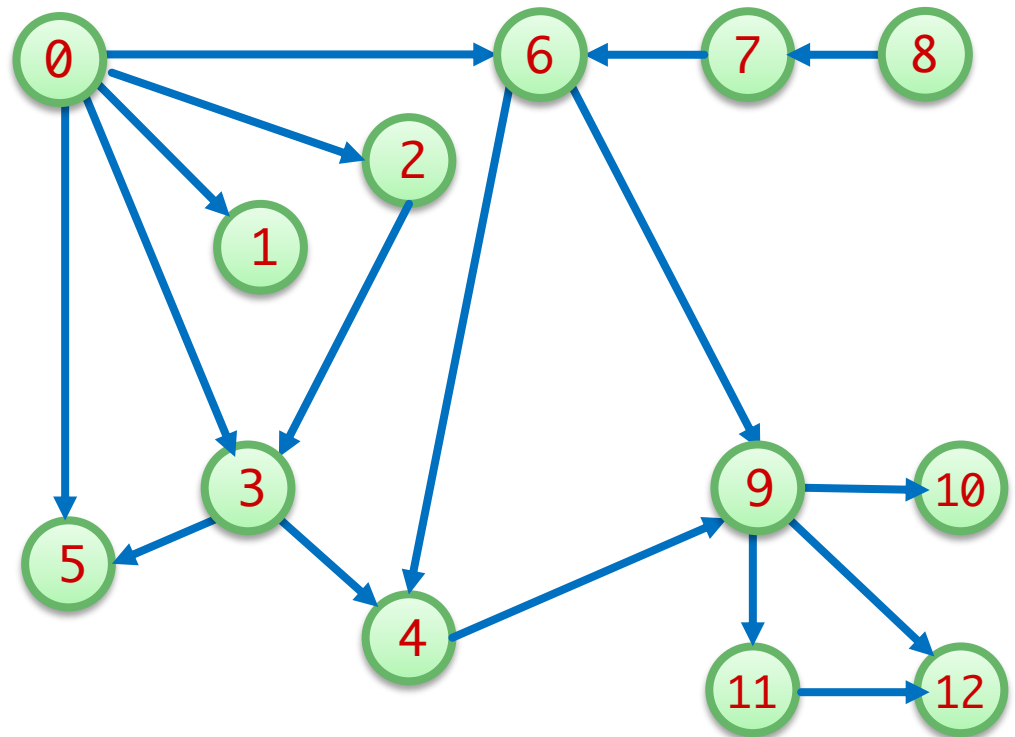
Añadimos fuentes $F = \{9\}$ al orden topológico

vértice -> # predecesores pendientes

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9

Orden Topológico en DiGrafos

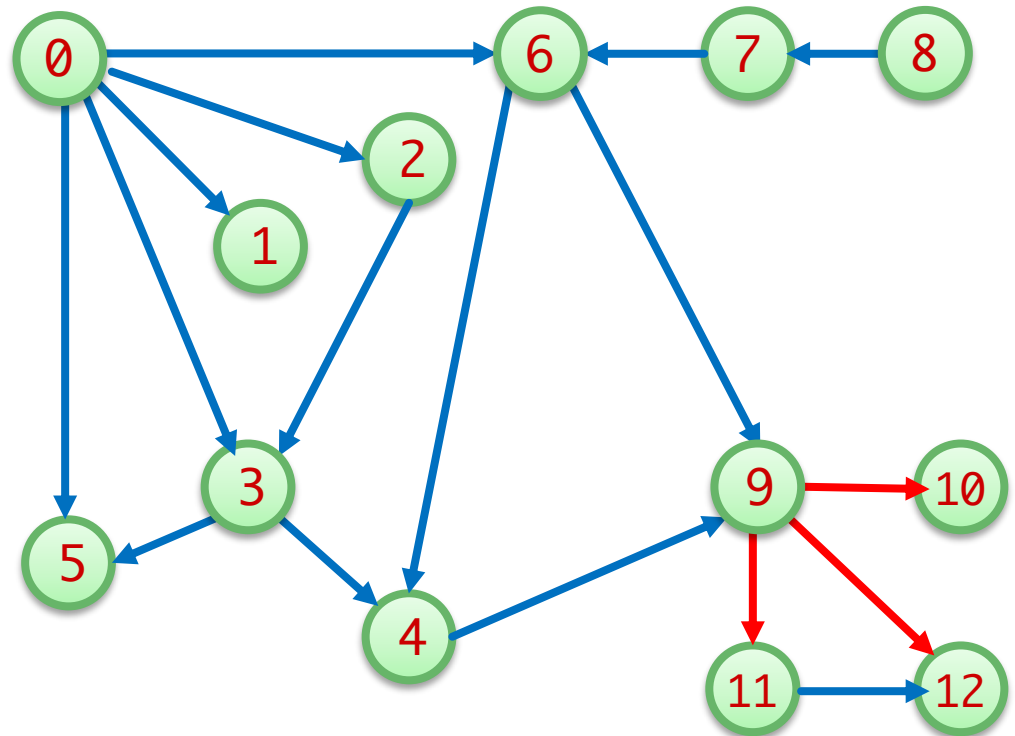
Restamos fuentes $F = \{9\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

10 \rightarrow 0

11 \rightarrow 0

12 \rightarrow 1



orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9

Orden Topológico en DiGrafos

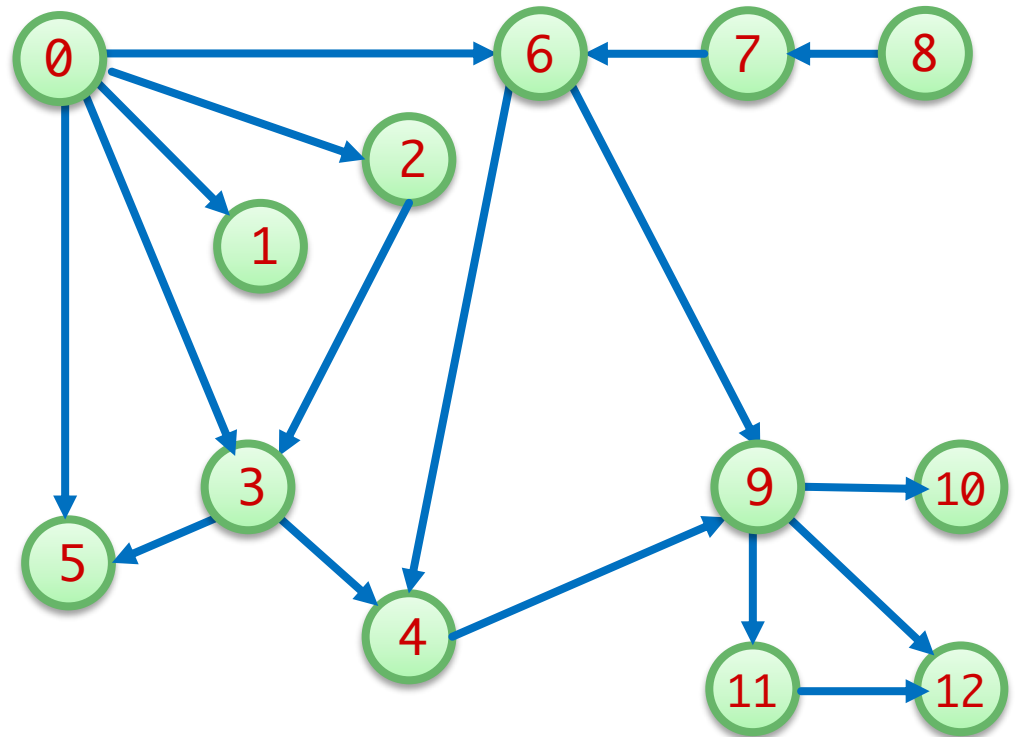
Seleccionamos fuentes $F = \{10, 11\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

10 \rightarrow 0

11 \rightarrow 0

12 \rightarrow 1



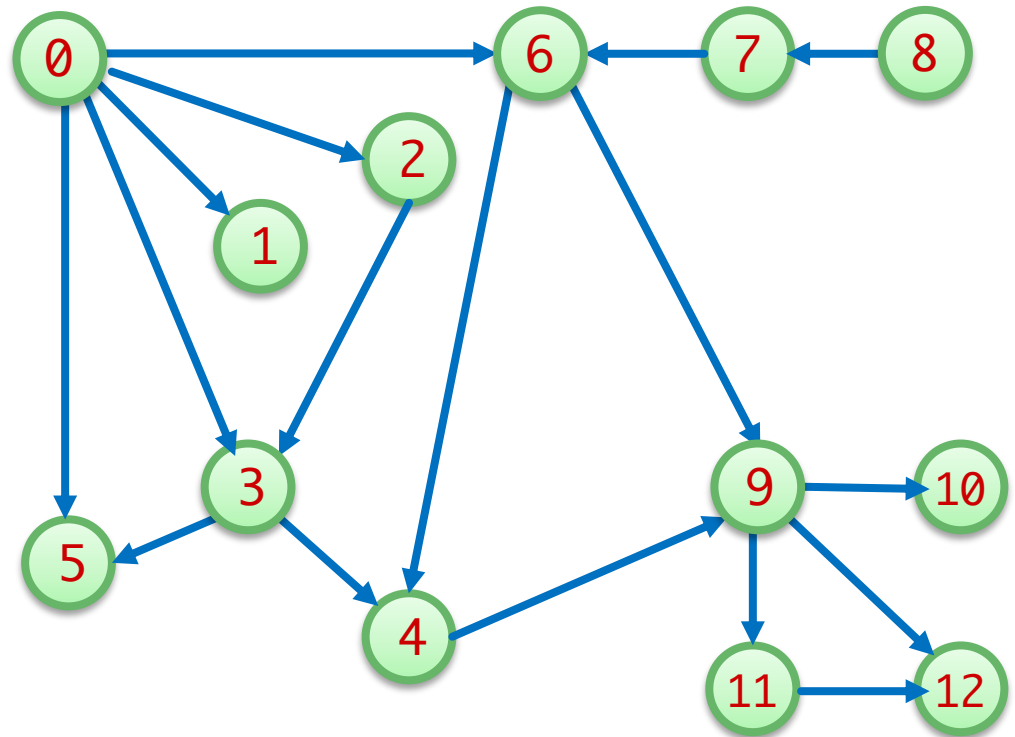
orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9

Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{10, 11\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

12 -> 1



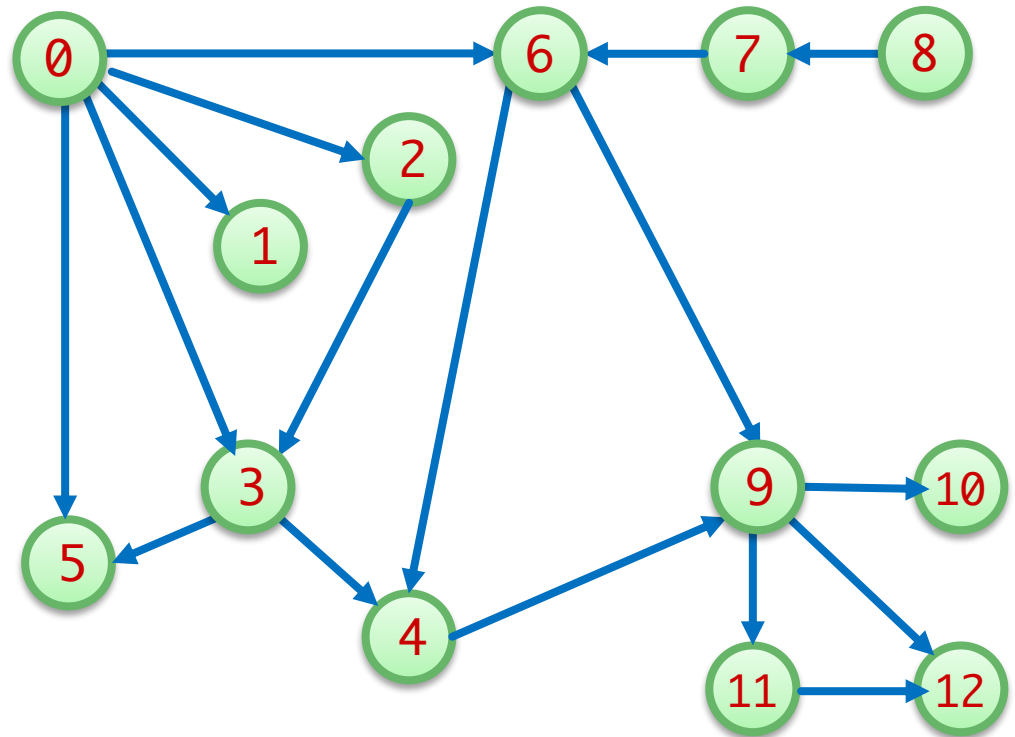
orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9

Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{10, 11\}$ al orden topológico

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

12 \rightarrow 1



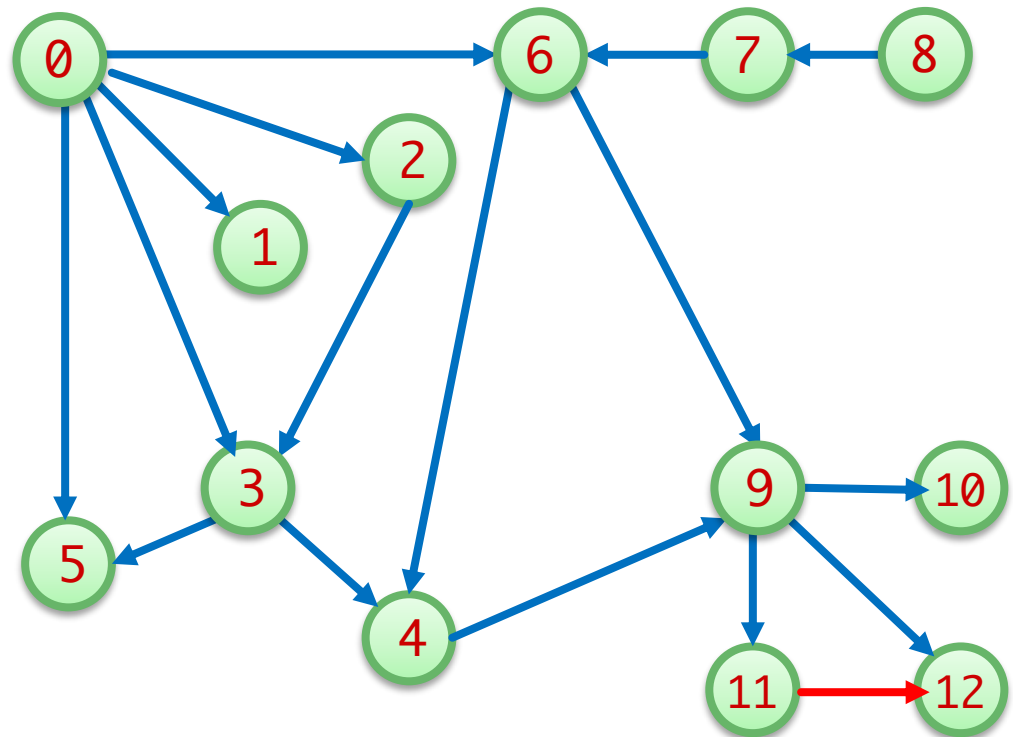
orden topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6 \prec 4 \prec 5 \prec 9 \prec 10 \prec 11

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{10, 11\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

12 \rightarrow 0



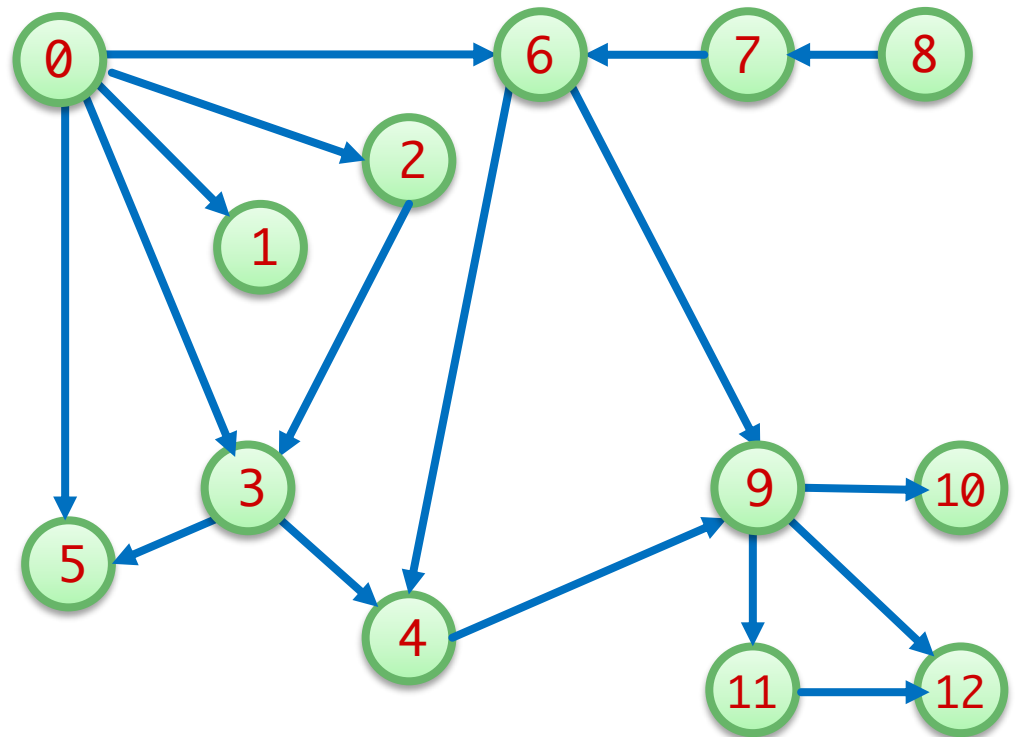
orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11

Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{12\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

12 \rightarrow 0

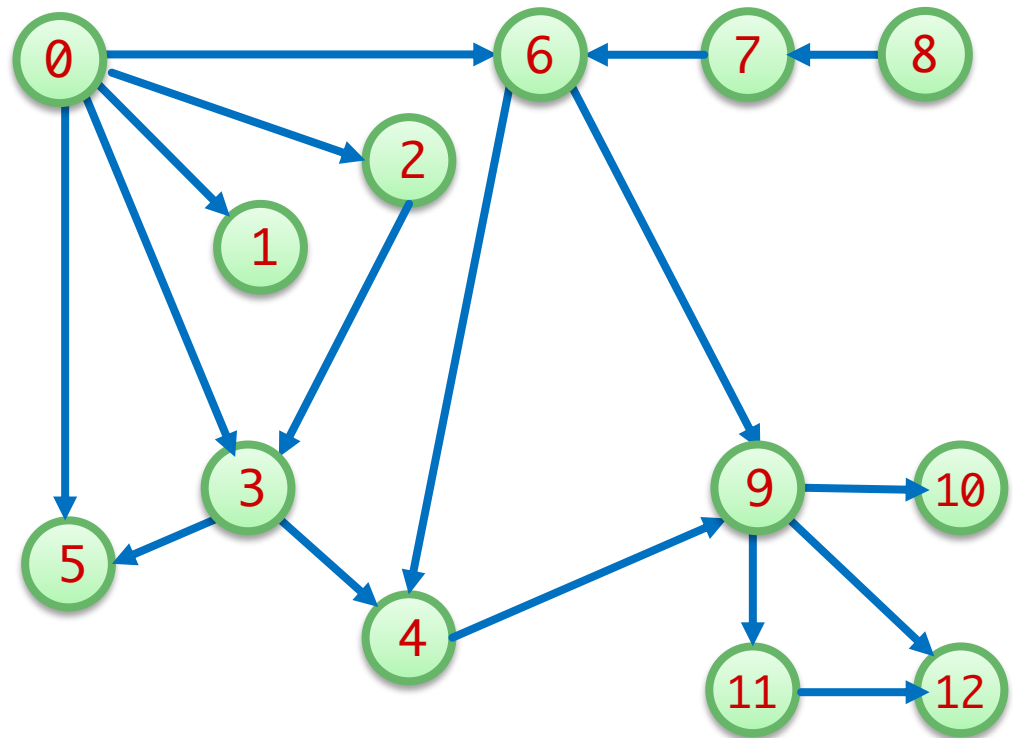


orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11 < 12

Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{12\}$ del diccionario

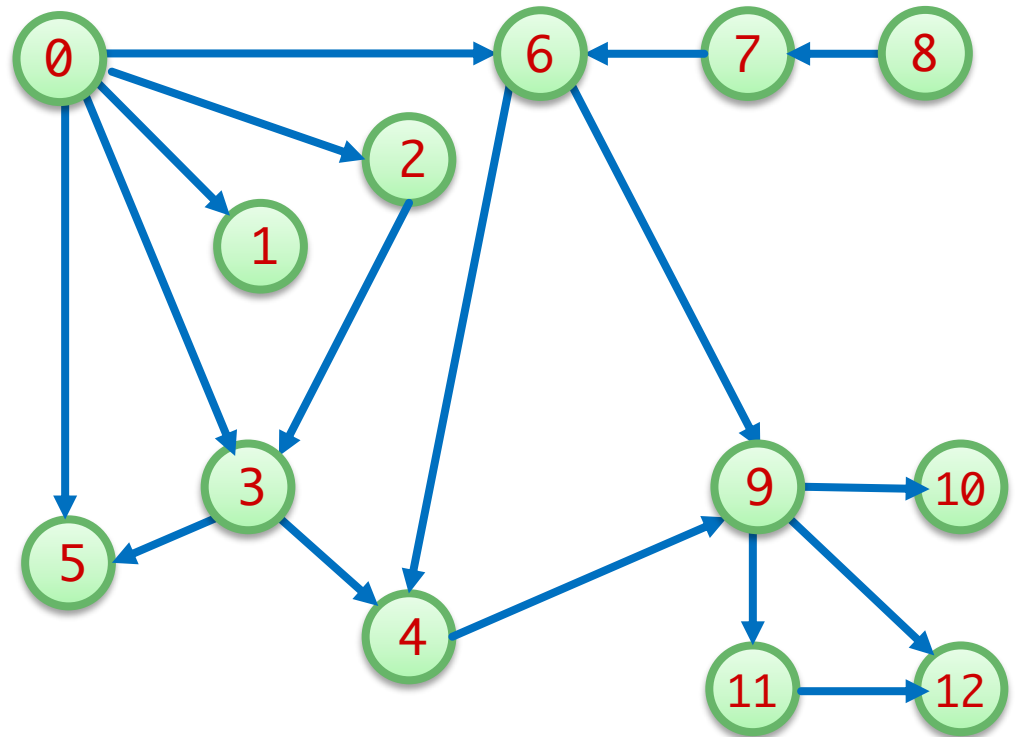
vértice \rightarrow # predecesores pendientes



orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11

Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{12\}$ al orden topológico
vértice \rightarrow # predecesores pendientes

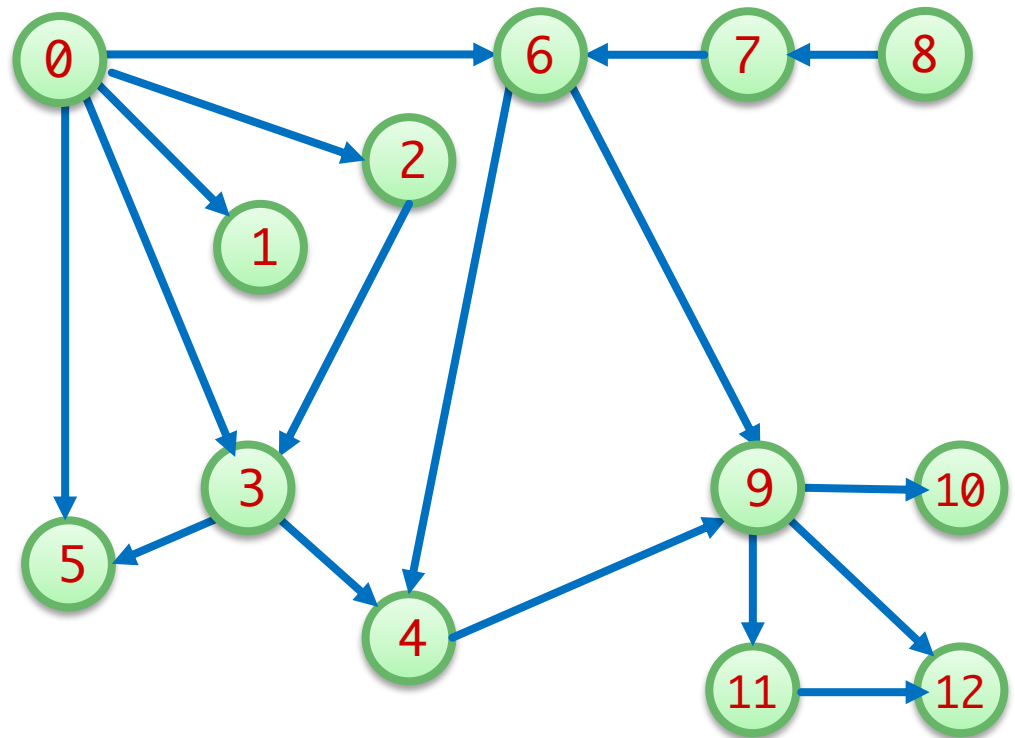


orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11 < 12

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{12\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

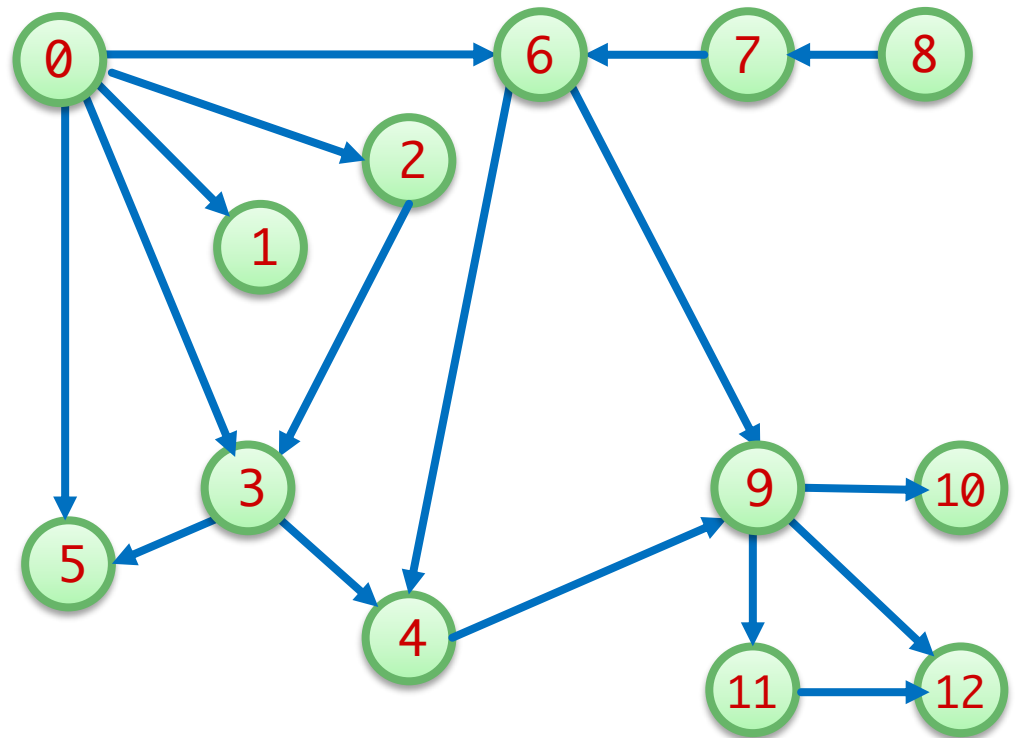


orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11 < 12

Orden Topológico en DiGrafos

El diccionario está **vacío**: hemos terminado

vértice -> # predecesores pendientes



orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11 < 12

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Inicializamos diccionario con grados de entrada

vértice -> # predecesores pendientes

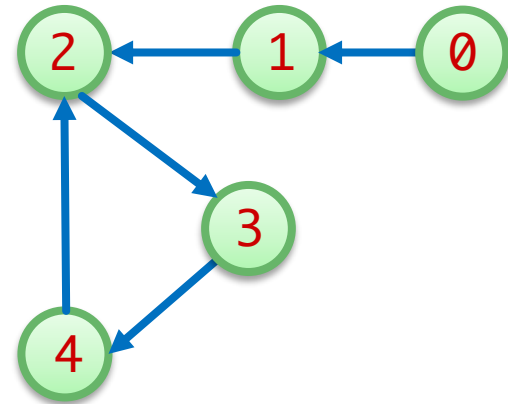
0 -> 0

1 -> 1

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Seleccionamos fuentes $F = \{0\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

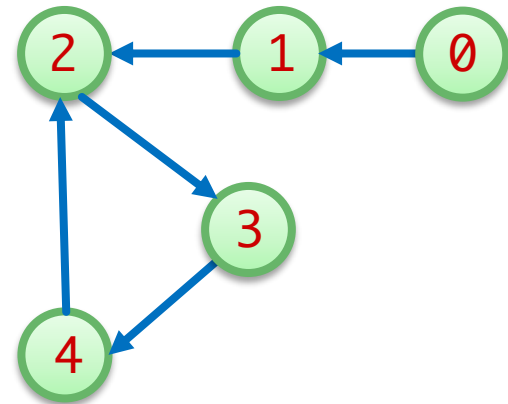
0 -> 0

1 -> 1

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Eliminamos fuentes $F = \{0\}$ del diccionario

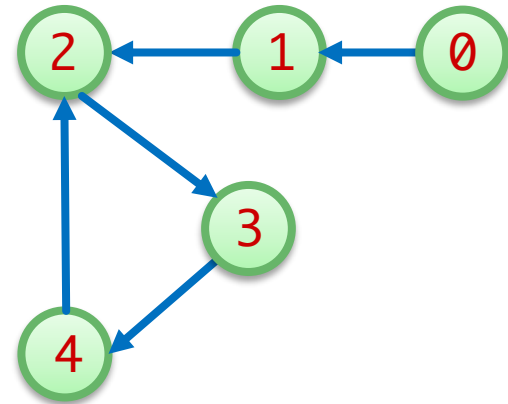
vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 1

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Añadimos fuentes $F = \{0\}$ al orden topológico

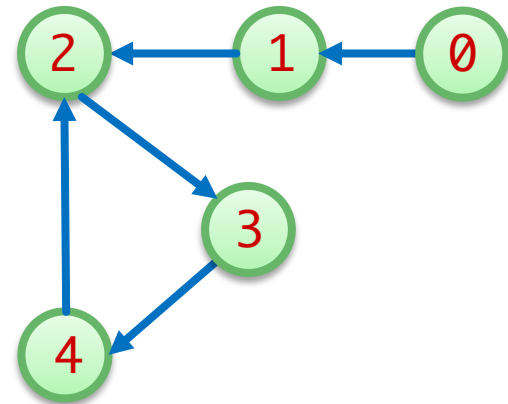
vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 1

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



orden topológico: 0

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Restamos fuentes $F = \{0\}$ del diccionario

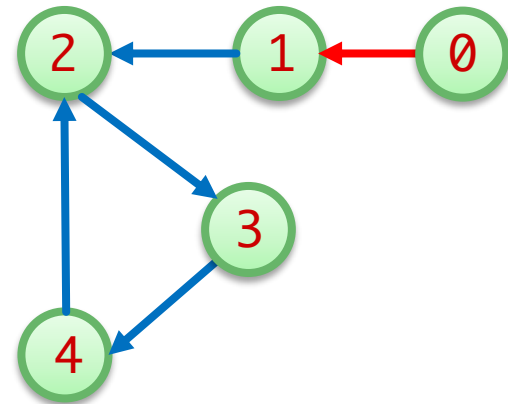
vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 0

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico: 0

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Seleccionamos fuentes $F = \{1\}$ del diccionario

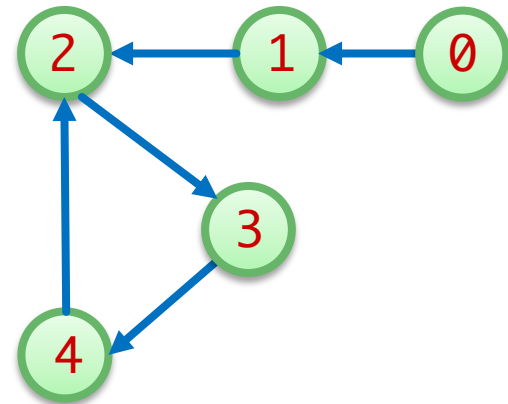
vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 0

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico: 0

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

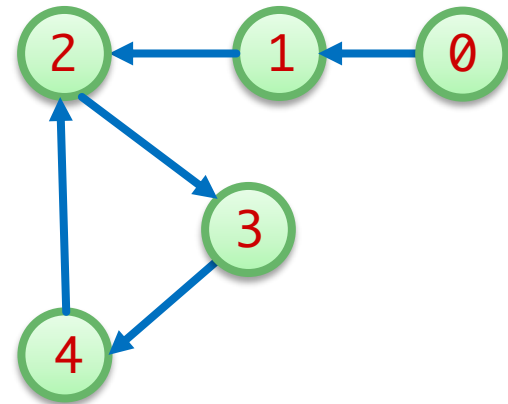
Eliminamos fuentes $F = \{1\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico: 0

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

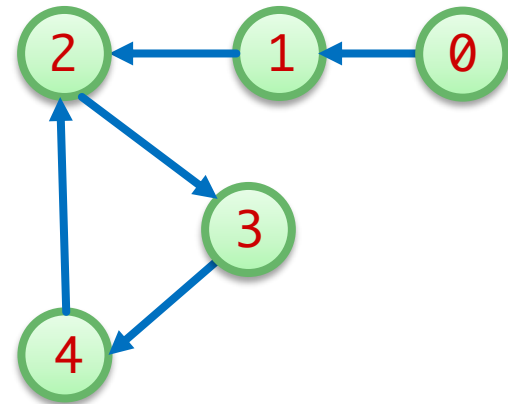
Añadimos fuentes $F = \{1\}$ al orden topológico

vértice -> # predecesores pendientes

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico: 0 < 1

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

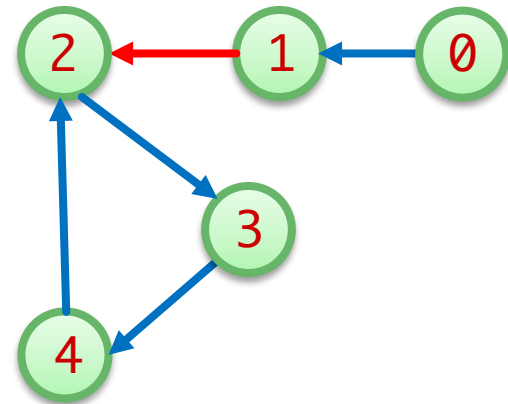
Restamos fuentes $F = \{1\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

2 -> 1

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico: 0 < 1

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Seleccionamos fuentes $F = \{\}$ del diccionario

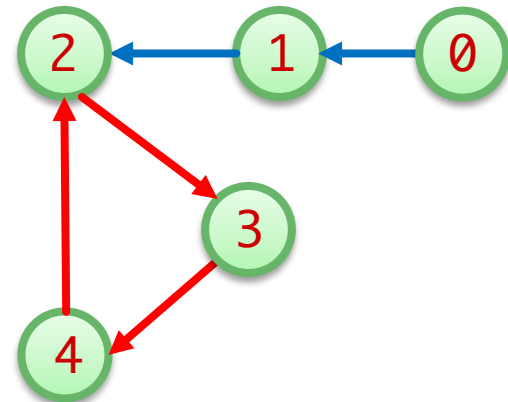
vértice \rightarrow # predecesores pendientes

2 \rightarrow 1

3 \rightarrow 1

4 \rightarrow 1

- No hay fuentes
- El digrafo tiene un **ciclo**
- **No** existe **orden topológico**



Orden Topológico: $0 < 1$

Orden Topológico y Paralelismo

- El orden topológico no guarda información sobre la posibilidad de realizar actividades en paralelo:

orden topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11 < 12

- Recuperamos esta información almacenando el orden topológico en una colección **anidada**:

orden topológico: {8, 0} < {2, 7, 1} < {3, 6} < {4, 5} < {9} < {10, 11} < {12}

Dos implementaciones alternativas

```
public class TopologicalSortingDic<V> {  
  
    private final List<V> topSort;  
    private final boolean hasCycle;  
  
    public TopologicalSortingDic(DiGraph<V> graph) {  
        // completar  
    }  
}  
  
public class TopologicalSortingDicPar<V> {  
  
    private final List<Set<V>> topSort; // colección anidada  
    private final boolean hasCycle;  
  
    public TopologicalSortingDicPar(DiGraph<V> graph) {  
        // completar  
    }  
}
```

Salidas de TopSortDemo.java

Para g1:

- ArrayList(3,7,5,8,11,2,9,10)
- ArrayList(HashSet(3,7),HashSet(5,8),HashSet(11),HashSet(2,9,10))

Para g2:

- ArrayList(0,8,1,2,7,3,6,4,5,9,10,11,12)
- ArrayList(HashSet(0,8),HashSet(1,2,7),HashSet(3,6),HashSet(4,5),HashSet(9),HashSet(10,11),HashSet(12))

Para g3:

- DiGraph is cyclic