UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

– Práctica 3 –

Problemas *stiff* y estabilidad absoluta

1. **Región de estabilidad absoluta**. Use el programa Python `dibuja_frontera.py` disponible en la página web de la asignatura para dibujar las regiones de estabilidad absoluta de los métodos:
   - Runge-Kutta explícitos de q etapas y orden q para $q = 1, \ldots, 4$.
   - Adams-Bashforth, Adams-Moulton y diferenciación regresiva de número de pasos entre uno y cuatro.

2. **Problema 'stiff'.** Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -1200y + 2000 - 1500e^{-t}, \quad t \in [0,4], \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

cuya solución exacta es

$$y(t) = \frac{5}{3} - \frac{1495}{3597}e^{-1200t} - \frac{1500}{1199}e^{-t}.$$

Se trata de un problema stiff, en el que la solución contiene dos términos exponenciales que varían a escalas muy diferentes. Obsérvese que la ecuación es de la forma $y' = f(t,y)$ con

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1200.$$

   a) Estime el menor número de subintervalos N que es necesario tomar para que

$$h\frac{\partial f}{\partial y} \in D_A, \tag{1}$$

   siendo D_A el dominio de estabilidad absoluta del método de Euler. Aplique el método con valores de N mayores y menores que el estimado y observe qué ocurre.

   b) Como el método de Euler implícito es absolutamente estable la condición (1) se cumple para cualquier h siendo ahora D_A su dominio de estabilidad absoluta: aplíquelo al problema con cualquier valor de N y observe qué ocurre. Observe que es fácil despejar y_{k+1} en la expresión del método, por lo que no es necesario usar un algoritmo de punto fijo para programarlo.

   c) Con ayuda de las gráficas de las fronteras de los dominios de estabilidad de los métodos RK obtenidas en el Ejercicio 2, estime el valor mínimo de N para el que se cumple (1), siendo ahora D_A el dominio de estabilidad del método RK4. Aplique el método con valores de N mayores y menores que el estimado y observe qué ocurre.

   d) Repita el ejercicio anterior para los métodos AB3 y AM3, siendo en cada caso D_A el dominio de estabilidad del método de que se trate.

3. Se considera la ecuación

$$\begin{cases} x'' + 20x' + 101x = 0, \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = -10, \end{cases}$$

cuya solución es $x(t) = e^{-10t}\cos(t)$, en el intervalo $[0,7]$. Reescriba la ecuación como un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Calcule (a mano) los autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz. Repita el ejercicio anterior para este problema, sustituyendo en cada caso la condición (1) por

$$h\lambda_i \in D_A, i = 1,2. \tag{2}$$

4. Repita el apartado 2(c) y el correspondiente del Ejercicio 3 usando ahora el método de diferenciación regresiva de 3 pasos:

$$y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n = \frac{6}{11}hf_{n+3}.$$