– Práctica 1 bis –
Métodos unipaso para problemas de valor inicial

1. Para comprobar que las implementaciones de los métodos de Heun, punto medio y RK4 son correctas, ejecutad los códigos para resolver el problema

$$\begin{cases} y' = -y + 2\,\mathrm{sen}(t), \quad t \in [0, 10], \\ y(0) = \pi, \end{cases}$$

cuya solución exacta es la función $y(t) = (\pi + 1)e^{-t} + \mathrm{sen}(t) - \cos(t)$, con $N = 50$ particiones. Los errores que deberían obtenerse son los siguientes:

- Euler: 0.193460359895
- Heun: 0.0120152817472
- Punto medio: 0.0146795451937
- RK4: $2.4240784029 \times 10^{-5}$

Indicación: El error se calcula como $\max\limits_{0 \leqslant k \leqslant N} |y(t_k) - y_k|$.

2. Para hacer lo propio con las implementaciones para sistemas, considerad el problema

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) - 2z(t), \\ z'(t) = -y(t) + 3z(t), \end{cases}$$

en el intervalo $[0, 1]$ con condiciones iniciales

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = -1,$$

y resolvedlo tomando $N = 50$ particiones. La solución exacta es

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{4}e^{5t} + \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{t}, \\ y(t) = \frac{1}{4}e^{5t} - \frac{1}{4}e^{t}, \\ z(t) = -\frac{1}{8}e^{5t} - \frac{3}{4}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{t}. \end{cases}$$

Los errores en (x, y, z) que deberían obtenerse son los siguientes:

- Euler:
  - Error x: 5.26417603327,
  - Error y: 7.74890310587,
  - Error: z: 5.13016198893.
- Heun:
  - Error x: 0.234062642044,
  - Error y: 0.28577784976,
  - Error: z: 0.168835786932.

- Punto medio:
  - Error x: 0.234062642044,
  - Error y: 0.28577784976,
  - Error: z: 0.168835786932.
- RK4:
  - Error x: 0.000132965132994,
  - Error y: 0.000142249175603,
  - Error: z: $7.57683913406 \times 10^{-5}$.

  Indicación: El error se calcula como en el apartado anterior, componente a componente.
