Vectores aleatorios

Escriba aquí los nombres de los integrantes del grupo:

Nombre

Nombre

...

Consideramos la función de densidad conjunta f del vector (X, Y) dada por $f(x, y) = 3\,x\,I_{0<y\leq x\leq 1}$

In[∘]:=
```
f[x_, y_] := Piecewise[{{3 x, 0 < y ≤ x ≤ 1}}, 0]
f[x, y]
```

Out[∘]=
$$\begin{cases} 3\,x & 0 < y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Buscamos la distribución del vector transformado $(Z, W) = (X + Y, X - Y)$. Estamos entonces ante un cambio de variable $(Z, W) = g(X, Y)$ para la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) = (x + y, x - y)$

In[∘]:=
```
g[x_, y_] := {x + y, x - y}
g[x, y]
```

Out[∘]= $\{x + y, x - y\}$

El teorema de cambio de variable asegura que la densidad del vector (Z, W) viene dada por $f_{(Z,W)}(z, w) = f(g^{-1}(z, w)) \left| J_{g^{-1}}(z, w) \right|$. Debemos primero obtener la inversa g^{-1}

In[∘]:=
```
Solve[g[x, y] == {z, w}, {x, y}]
```

Out[∘]= $\left\{\left\{x \to \frac{w + z}{2},\ y \to \frac{1}{2}(-w + z)\right\}\right\}$

Podemos definir la función inversa usando el comando anterior, sustituyendo mediante /.

In[∘]:=
```
g-1[z_, w_] := {x, y} /. Solve[g[x, y] == {z, w}, {x, y}][[1]]
g-1[z, w]
```

Out[∘]= $\left\{\frac{w + z}{2},\ \frac{1}{2}(-w + z)\right\}$

Obtenemos la matriz jacobiana derivando cada componente respecto de ambas variables

In[∘]:=
```
M = D[g-1[z, w], {{z, w}}]
```

Out[∘]= $\left\{\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\},\ \left\{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\}\right\}$

Y su determinante ($J_{g^{-1}}$) es entonces

In[∘]:=
```
Jg-1 = Det[M]
```

Out[∘]= $-\frac{1}{2}$

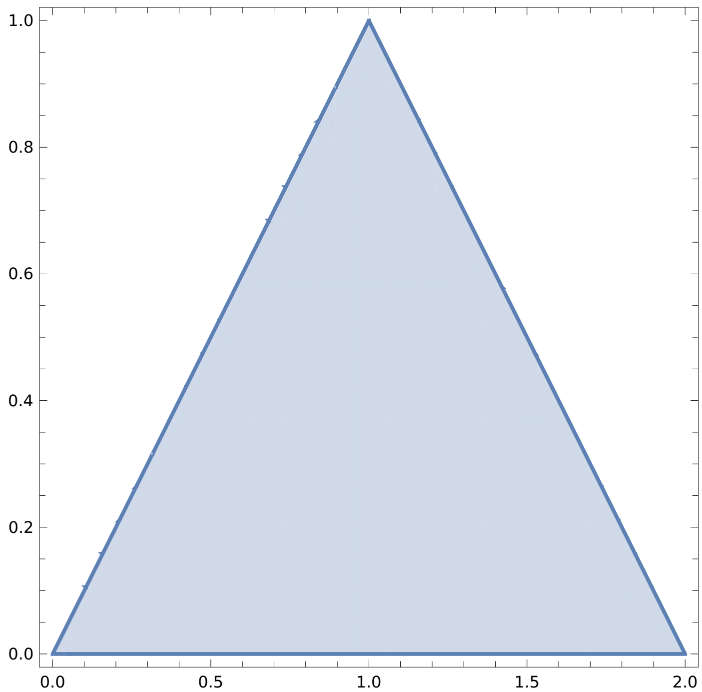
La densidad conjunta del vector (Z, W) se sigue pues del cambio de variable

In[∘]:=
```
fzw[z_, w_] := Apply[f, g-1[z, w]] Abs[Jg-1]
fzw[z, w] // Simplify
```

Out[∘]=
$$f_{zw}(z,w)=\begin{cases} \frac{3\,(w+z)}{4} & w < z \,\&\&\, w \geq 0 \,\&\&\, w + z \leq 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

De la definición anterior obtenemos el soporte del vector $(Z,\ W)$ puede escribirse

In[∘]:=
```
RegionPlot[w < z && w ≥ 0 && w + z ≤ 2, {z, 0, 2}, {w, 0, 1}]
```

Out[∘]=


In[∘]:=
```
Integrate[fzw[z, w], {z, 0, 2}, {w, 0, 1}]
```

Out[∘]= 1

Calculamos las densidades marginales de Z y W integrando la densidad conjunta

In[∘]:=
```
fz[z_] := Integrate[fzw[z, w], {w, 0, 1}]
fz[z] // Simplify
```

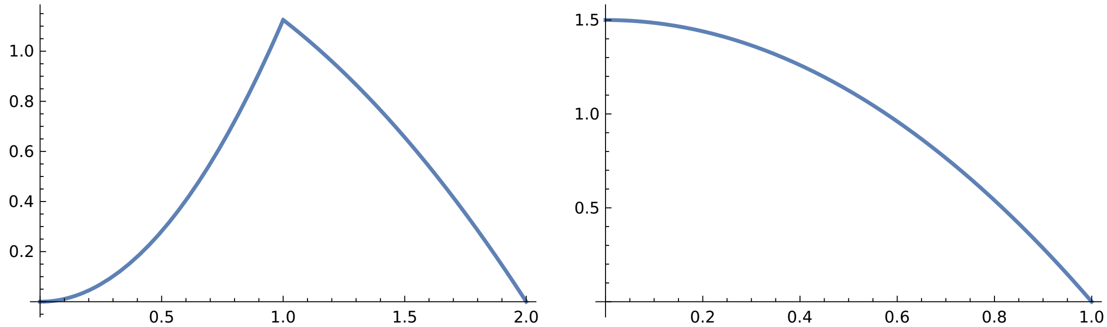
Out[∘]=
$$\begin{cases} \frac{9\,z^2}{8} & 0 < z \leq 1 \\ -\frac{3}{8}\left(-4 + z^2\right) & 1 < z < 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

In[∘]:=
```
fw[w_] := Integrate[fzw[z, w], {z, 0, 2}]
fw[w] // Simplify
```

Out[∘]=
$$\begin{cases} -\frac{3}{2}\left(-1 + w^2\right) & 0 \leq w < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Ambas funciones son densidades (el área bajo las respectivas curvas es 1). Podemos ver sus gráficas

In[∘]:=
```
GraphicsRow[{Plot[Evaluate@f_z[z], {z, 0, 2}], Plot[Evaluate@f_w[w], {w, 0, 1}]}]
```

Out[∘]=


Si queremos calcular, por ejemplo, la esperanza de la variable W, usaremos su densidad marginal sabiendo que $E[W] = \int_0^1 w\, f_w\, d\, w$

In[∘]:=
```
Integrate[w f_w[w], {w, 0, 1}]
```

Out[∘]= $\frac{3}{8}$

Obtenemos lo mismo usando la densidad para crear una *distribución de probabilidad* (objeto de Mathematica)

In[∘]:=
```
D_w = ProbabilityDistribution[f_w[w], {w, -∞, ∞}];
```

In[∘]:=
```
Expectation[W, W ≈ D_w]
```

Out[∘]= $\frac{3}{8}$

Podemos entonces realizar otros cálculos, como la probabilidad $P(0.3 \leq W < 1)$

In[∘]:=
```
Probability[0.3 ≤ W < 1, W ≈ D_w]
```

Out[∘]= 0.5635

También podemos obtener la función generatriz de momentos. Sabemos que su derivada en 0 debe ser la media

In[∘]:=
```
m_w[t_] := MomentGeneratingFunction[D_w, t]
```

In[∘]:=
```
Limit[D[m_w[t], t], t → 0]
```

Out[∘]= $\frac{3}{8}$

Con respecto al vector (Z, W), definimos su distribución a partir de su densidad conjunta y calculamos, por ejemplo, el momento de orden (1, 2)

In[∘]:=
```
D_zw = ProbabilityDistribution[f_zw[z, w], {z, -∞, ∞}, {w, -∞, ∞}];
```

In[•]:=
```
Moment[D_zw, {1, 2}]
```

Out[•]= $\frac{5}{24}$

Ejercicio: responda a los apartados 2, 3 y 4

Dado un vector aleatorio (X, Y) con función de densidad conjunta $f(x, y) = c\, x\,(1 - y)$ para $0 \le x \le y \le 1$, considere la variable $Z = Y - X$

1. Halle c

Solución: El soporte es el triángulo de vértices (0, 0), (0, 1) y (1, 1). Basta entonces

In[•]:=
```
Solve[Integrate[c x (1 - y), {x, y} ∈ Triangle[{{0, 0}, {1, 1}, {0, 1}}]] == 1, c]
```

Out[•]= {{c → 24}}

2. Use una variable auxiliar W para obtener la densidad de Z como marginal de la densidad conjunta de (Z, W)
3. Calcule la probabilidad $P(0.3 < Z < 0.7)$
4. Obtenga la esperanza de Z