Problema 1:

Dado el siguiente SEL: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Se aplicaron los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel con la semilla $(x_0,y_0)=(6,1)$. Los resultados luego de la primera iteración fueron los siguientes: $(x_1, y_1)_{JAC} = (1.5, -1)$

$(x_1, y_1)_{G\text{-}S} = (1.5, 0.5)$

a) Hallar los valores de c y d.

b) ¿Es posible la convergencia a la solución exacta con cada método? No es necesario hallar la solución, solo justificar conceptualmente.

a) Para hallar los valores de c y d escribo las ecuaciones de Jacobi y G-S.

Jacobi

$$x_{k+1} = \frac{4 - y_k}{2} \rightarrow x_1 = \frac{4 - y_0}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \checkmark$$

$$y_{k+1} = \frac{3 - c x_k}{d} \rightarrow y_1 = \frac{3 - c x_0}{d} \Rightarrow \boxed{\frac{3 - 6c}{d} = -1} \quad (1)$$

Gauss-Seidel

$$x_{k+1} = \frac{4 - y_k}{2} \rightarrow x_1 = \frac{4 - y_0}{2} = 1{,}5 \checkmark$$ Igual que el item anterior

$$y_{k+1} = \frac{3 - c x_{k+1}}{d} \rightarrow y_1 = \frac{3 - c x_1}{d} \Rightarrow \boxed{\frac{3 - 1{,}5c}{d} = 0{,}5} \quad (2)$$

- Construyo un sistema de ec. con (1) y (2) para obtener los valores de c y d

$$\begin{cases} \dfrac{3 - 6c}{d} = -1 \\ \\ \dfrac{3 - 1{,}5c}{d} = 0{,}5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3 - 6c = -d & (3) \\ \\ 3 - 1{,}5c = 0{,}5d & (4) \end{cases}$$

(4)

$$\frac{3 - 1{,}5c}{0{,}5} = d \Rightarrow \boxed{d = 6 - 3c} \quad (5)$$ Reemplazo en (3)

(3)

$$3 - 6c = -(6 - 3c)$$

$$3 - 6c = -6 + 3c$$

$$-9c = -6 - 3$$

$$-9c = -9$$

$$\boxed{c = 1} \rightarrow \text{Reemplazo en } (5) \quad d = 6 - 3 \cdot 1$$

$$\boxed{d = 3}$$

Rta: Los valores de c y d son 1 y 3 respectivamente

b) Reemplazando los valores c y d en A obtenemos que: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Podemos observar que se trata de una matriz diagonal dominante y, por lo tanto, ambos métodos convergen.

Problema 2: Dado el siguiente SENL de 2x2: $x^3 - (y-1)^2 = 0$

$$y^3 - (x-2)^2 = 7$$

a) Aplicar el método de Newton Raphson utilizando la semilla (2,1). Realizar una sola iteración.
b) Explicar qué alternativa se podría implementar si se quiere evitar la inversión del Jacobiano en cada iteración (no resolv er).

a) $\begin{cases} x^3 - (y-1)^2 = 0 & f_1 \\ y^3 - (x-2)^2 - 7 = 0 & f_2 \end{cases}$ $\quad (x_0, y_0) = (2, 1)$

NR

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - J^{-1}\Big]_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

C.A

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2(y-1) \\ -2(x-2) & 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$J\Big]_{\substack{x_0 \\ y_0}} = \begin{bmatrix} 3.2^2 & -2\overbrace{(1-1)}^{0} \\ -2\underbrace{(2-2)}_{0} & 3.1^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}\Big]_{\substack{x_0 \\ y_0}} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$f_1(x_0, y_0) = 2^3 - \underbrace{(1-1)}_{0}^2 = 8$$

$$f_2(x_0, y_0) = 1^3 - \underbrace{(2-2)}_{0}^2 - 7 = -6$$

- Evalúo los datos en la expresión de NR.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/12 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8/12 \\ -6/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{3} \\ 1 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rta: Los valores de x_1 e y_1 son $\frac{4}{3}$ y 3 respectivamente.

b) De querer evitar invertir la matriz Jacobiana en cada iteración de NR ya que es una operación costosa lo que se puede hacer es mantenerla constante utilizando $\tilde{J} = \begin{pmatrix} 1/12 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Problema 3: Dado el SEL $\begin{pmatrix} 3.0 & 0.50 \\ 1.5 & 2.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0 \\ 5.0 \end{pmatrix}$
Se obtuvo la solución aproximada $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0.67\,, 2.0)$ utilizando aritmética de 2 dígitos. Se quiere mejorar la solución aplicando refinamiento iterativo.
a) Calcular el residuo.
b) Si se obtuvo $(\delta\tilde{x}, \delta\tilde{y}) = (-0.0043\,, 0.0057)$ re-aplicando la factorización LU. Justificar si sería conveniente refinar la primera solución.

a) Para calcular el residuo utilizo doble precisión

$$r = b - A\tilde{x}$$

$$r = \begin{pmatrix} 3{,}000 \\ 5{,}000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}000 & 0{,}500 \\ 1{,}500 & 2{,}000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}670 \\ 2{,}000 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 3{,}000 \\ 5{,}000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}000 \cdot 0{,}670 + 0{,}500 \cdot 2{,}000 \\ 1{,}500 \cdot 0{,}670 + 2{,}000 \cdot 2{,}000 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 3{,}000 \\ 5{,}000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}010 \\ 5{,}005 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} -0{,}010 \\ -0{,}005 \end{pmatrix}$$

<u>Rta</u>: El residuo es $r = \begin{pmatrix} -0{,}010 \\ -0{,}005 \end{pmatrix}$

b) Para saber si es conveniente refinar la solución calculo $K(A)$ (el número de condición de la matriz).

dígitos de precisión $\Rightarrow t = 2$

$$K(A) \cong \frac{\|\delta\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} \cdot 10^{t} \Rightarrow K(A) \cong \frac{7.1 \times 10^{-3}}{2.1} \cdot 10^{2}$$

$$K(A) \simeq 0{,}34$$

- Una vez obtenido $K(A)$ calculo q, donde q representa la cantidad máxima de dígitos que podrían ganarse refinando la solución.

$$p = \log_{10}(K(A)) \simeq 0{,}46$$

$q = t - p \simeq 2{,}46$ → Indica que podría ganar hasta 2 dígitos refinando (\# dígitos es un nro. entero)

<u>Rta</u>: Como podríamos ganar hasta 2 dígitos refinando la solución vale la pena refinar.