Problema 1:

Se desea encontrar todos los puntos críticos de la siguiente función de 2 variables:

$$f(x,y) = ax^4 + by^4 - cx - dy \quad \text{donde a, b, c y d son números reales positivos.}$$

1a) Obtener el sistema de ecuaciones que resuelve los pares ordenados (x,y) que cumplen con $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Luego plantear la forma recursiva de método de Newton Raphson aplicado a SENL (sistemas de ecuaciones no lineales) para hallar las posibles solución/es. Es decir, dar una expresión matricial con sus subíndices para las iteraciones "k" y "k+1" donde corresponda.
1b) Explicar qué situaciones alternativas podrían darse si en lugar de aplicar Newton Raphson se aplicará una matriz jacobiana coeficientes constantes para todas las iteraciones.

a) Como se busca $\bar{\nabla} f(x,y) = (0,0)$ se debe resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Para el contexto de NR diremos que f'_x y f'_y son f_1 y f_2 respectivamente.

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 4ax^3 - c = 0 \\ f_2(x,y) = 4by^3 - d = 0 \end{cases}$$

<u>Expresión de NR</u>

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \bar{J}^{-1}\Big]_{\substack{x_k \\ y_k}} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

<u>Cálculos auxiliares</u>

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12ax^2 & 0 \\ 0 & 12by^3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{J}^{-1}\Big]_{\substack{x_k \\ y_k}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12ax^2_k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12by^2_k} \end{pmatrix}$$

<u>Finalmente la expresión de NR es:</u>

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{12ax^2_k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12by^2_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4ax^3_k - c \\ 4by^3_k - d \end{pmatrix}$$

b) Lo que podría ocurrir en caso de utilizar una matriz Jacobiana cte (por ejemplo evaluada en la semilla) es que:

- El método converge más lento ya que NR tiene convergencia cuadrática y proponiendo una matriz cte el método se volvería lineal o semi lineal porque pasaría a ser Punto Fijo (*).

- El método podría diverger

Sin embargo tiene ventajas significativas en cuanto al costo computacional ya que invertir la matriz Jacobiana en cada paso es muy costoso.

Por otro lado, existen métodos que buscan minimizar la cantidad de recalculos de la inversa del Jacobiano, esto da un mejor orden de convergencia y no es tan costoso como NR.

(*) NR es una variante de P.F, solo que tiene la particularidad de elegir la mejor $g(x) = x - \varphi(x) \cdot f(x)$ donde $\varphi(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

Problema 3: Dado el SEL $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

3a) Hallar las formas recursivas de Jacobi y Gauss-Seidel. Realizar una UNICA iteración desde la semilla $(x_{10}, x_{20})=(1,1)$.

3b) Elegir un criterio de convergencia aplicado a métodos iterativos y definir se converge a la solución al aplicar cada método.

$\underline{\text{Sel}}: A.\bar{x} = b \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(x_0, y_0) = (1,1)$

Busco las expresiones de Jacobi y G-S para luego hacer una iteración:

<u>Jacobi</u>

$$x_{k+1} = \frac{2 + y_k}{2}$$

$$y_{k+1} = \frac{4 - x_k}{3}$$

<u>Gauss-Seidel</u>

$$x_{k+1} = \frac{2 + y_k}{2}$$

$$y_{k+1} = \frac{4 - x_{k+1}}{3}$$

Realizo una iteración para ambos métodos partiendo de $(x_0, y_0) = (1,1)$

<u>Jacobi</u>

$$x_1 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}500$$

$$y_1 = \frac{4-1}{3} = 1{,}000$$

igual que Jacobi

<u>G - S</u>

$$x_1 = 1{,}500$$

$$y_1 = \frac{4 - 1{,}5}{3}$$

$$y_1 = 0{,}8333$$

<u>rta</u>: Los resultados de una iteración para los métodos de Jacobi y G-S son $\begin{pmatrix} 1{,}500 \\ 1{,}000 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1{,}500 \\ 0{,}833 \end{pmatrix}$ respectivamente.

b) Para analizar la convergencia de ambos métodos propongo utilizar la propiedad de matriz diagonal dominante.

Podemos observar como A es diagonal dominante ya que los elementos de su diagonal son mayores a los elementos de su respectiva fila. Entonces, al cumplirse esta propiedad, está garantizado que ambos métodos convergen.

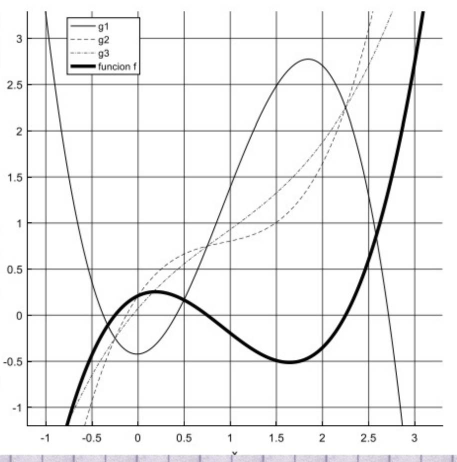
Problema 4: El gráfico indica una función f y tres funciones distintas g1 y g2 y g3, construidas a partir de f para obtener esquemas diferentes de punto fijo. Observar que las grillas horizontal y vertical tienen la misma escala. Deberá utilizar esto para realizar estimaciones pertinentes.

4a) Analizar y justificar <u>para cada raíz</u> de f visible en el gráfico si g1, g2 y/o g3 garantizan la convergencia según Teorema de Punto Fijo. Considerar intervalos de longitud 0.5 (es decir, los intervalos marcados según la grilla).

4b)

i) En los casos donde se garantiza la convergencia, indicar hasta que valores se podría alargar el intervalo sin alterar el cumplimiento del Teorema de Punto Fijo. Considerar siempre valores de la grilla para los extremos de los intervalos hallados.
Ejemplo de intervalo válido: [1 ; 1.5].
Ejemplo de intervalo **no** válido: [1.25 ; 1.75].

ii) Si en cierta raíz hubiera más de una g que garantiza la convergencia, indicar cual convendría usar en términos de mayor velocidad de convergencia hacia la raíz.



a) La función f tiene una raiz en el intervalo [-1, -0,5]. Analizando el gráfico podemos observar qué:

- No hay intervalo visible en la grafica en el que g_1 cumpla las condiciones del teorema de punto fijo por lo que no hay una semilla que garantice su convergencia a la raiz de f. Esto se deduce graficamente ya que no hay ningún intervalo en el que g_1 "entre por izquierda" y "salga por derecha".

- Para g_2 y g_3 existe un mismo intervalo en el que se cumplen las condiciones del Teorema de Punto Fijo. El intervalo es [0,5, 1] y en el se puede observar como ambas funciones "entran por izquierda" y "salen por derecha". A su vez, en ese intervalo se cumple que ambas funciones son menores que 1, por lo qué existe un único punto fijo.

b) Para el intervalo encontrado se puede agrandar hasta [0,5 ; 2] y seguirá cumpliendo la primer condición mencionada, sin embargo no la segunda, por lo qué el punto fijo podría no ser único.