

MODELACIÓN NUMÉRICA  
(CB051) CURSO CAVALIERE - BALZAROTTI

# Trabajo Práctico

## Métodos numéricos y montañas rusas

22 de junio de 2025

Emiliano Gomez  
110042

Gonzalo Guerrero  
100858

Juan Bautista Fonseca  
111456

Giuliana Pazos  
111268

## 1. Introducción

En el presente informe buscaremos profundizar en la mecánica clásica, aplicando métodos numéricos abordados a lo largo del cuatrimestre para la resolución de un modelo basado en un problema de montañas rusas. Buscaremos estudiar los fenómenos que ocurren en el transcurso de esta atracción modelando el sistema como una masa puntual. Este enfoque nos permitirá simplificar el análisis sin perder de vista los principios fundamentales que rigen el movimiento.

Este estudio no solo busca ilustrar conceptos clave de la dinámica clásica, sino también mostrar cómo los métodos numéricos pueden ser aplicados eficazmente en la resolución de problemas reales que no admiten soluciones analíticas sencillas. En conjunto, se espera obtener una comprensión más profunda del movimiento en sistemas físicos complejos y de su comportamiento en distintos escenarios. A su vez, proveemos un **link a Google Colab** donde se muestran los algoritmos utilizados y los gráficos presentados.

## 2. Confección de la trayectoria

El modelo de trayectoria está compuesto por varios tramos donde las uniones entre tramos deben ser suaves. Cada tramo se define por un conjunto de 100 puntos sucesivos según un parámetro  $r$  el cuál varía entre 0 y 0.99 con un paso de 0.01. A su vez, el esquema para la simulación es el siguiente:

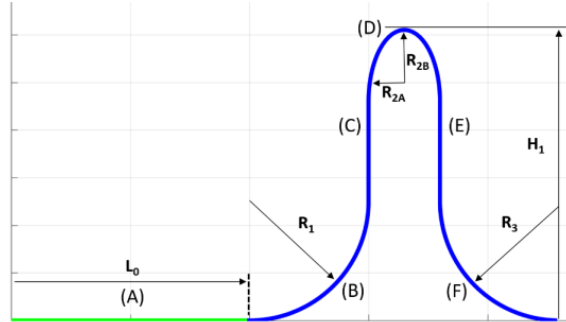


Figura 1: Esquema para la simulación

Donde los valores de los parámetros que se muestran en la figura son:

Parámetro	Valor	Tramo	Tipo de tramo
$L_0$	105 m	Tramo A	Horizontal recto + propulsión
$H_1$	115 m	Tramo B	Cuarto de circunferencia
$R_1$	50m	Tramo C	Vertical recto
$R_{2A}$ y $R_{2B}$	15m y 30m	Tramo D	Media Elipse
$R_3$	50m	Tramo E	Vertical recto
$V_{inicial}$	0m/s	Tramo F	Cuarto de circunferencia

Cuadro 1: Tabla de valores

Con estos datos en mente, definimos cada tramo de la trayectoria con respecto a  $r$  junto con 2 nuevas variables por comodidad.

$$C_{desp} = H_1 - R_1 - R_{2B}$$

A su vez, definiendo a  $E_{desp}$  para el tramo recto vertical  $E$ , por la simetría que presenta el esquema podemos decir que:

$$E_{desp} = C_{desp}$$

Finalmente la trayectoria definida es:

Tramo	$x_{tramo}$	$y_{tramo}$
A	$L_0 \cdot r$	0
B	$L_0 + R_1 \cdot \cos\left(r \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$	$R_1 + R_1 \cdot \sin\left(r \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$
C	$L_0 + R_1$	$R_1 + r \cdot C_{desp}$
D	$L_0 + R_1 + R_{2A} \cdot (1 + \cos(\pi - r \cdot \pi))$	$R_1 + C_{desp} + R_{2B} \cdot \sin(\pi - \pi \cdot r)$
E	$L_0 + R_1 + 2 \cdot R_{2A}$	$R_1 + C_{desp} - r \cdot E_{desp}$
F	$R_3 \cdot (1 + \cos(\pi + \frac{\pi}{2} \cdot r))$	$R_1 + R_3 \cdot \sin(\pi + \frac{\pi}{2} \cdot r)$

Los datos particulares fueron plasmados en la **Tabla Geométrica**. A continuación presentamos un gráfico mostrando las columnas  $x$  vs  $y$ .

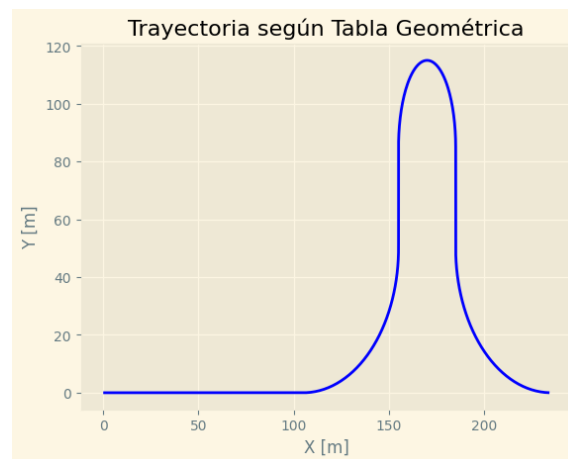


Figura 2: Esquema para la simulación

Podemos observar la similitud entre las figuras 1 y 2, además de la suavidad entre la unión de tramos de la figura 2. Es por esto que creemos que nuestro esquema es correcto.

## 2.1. Problemas encontrados y soluciones

A lo largo del desarrollo de la trayectoria encontramos un problema en los tramos rectos verticales. Dado que la **Tabla Geométrica** pide completar con la pendiente  $k$ , estos tramos tienen la particularidad de que no tienen pendiente definida (o mejor dicho su pendiente tiende a infinito). Este caso tiene sentido matemático, pero no tanto físico, ya que en esos tramos no podríamos saber cómo se comporta el carrito.

Para ello pensamos en 2 soluciones. Por un lado no utilizar un tramo totalmente recto (tomar por ejemplo un ángulo de  $\theta = 89,99^\circ$ ) lo cual no seguiría el esquema en su totalidad pero tendría pendiente definida. Por el otro, definir un valor arbitrario muy grande con respecto a los datos de entrada a la pendiente en estos tramos, manteniendo así definida la pendiente y la verticalidad del tramo.

En caso de utilizar la primera opción deberíamos tener en cuenta la propagación de errores para poder validar que el ángulo tomado es correcto. Es por ello que decidimos optar por la segunda alternativa, tomando un valor arbitrario de  $\pm 1,000,000$  en los tramos C y E respectivamente. Podemos ver en la **Figura 2** como este valor mantiene la suavidad de la curva y es muy grande con respecto a los parámetros de entrada.

### 3. Resolución Numérica

Dada la siguiente ecuación:

$$\boxed{-g \cdot \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} + a_p = \frac{d^2 s}{dt^2}} \quad (1)$$

Proponemos utilizar las siguientes variables:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -g \cdot \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} + a_p(s) \end{cases}$$

Luego, por el método de **Euler Explícito** podemos decir que:

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Delta t \cdot v_n \\ v_{n+1} = v_n + \Delta t \cdot \left(-g \cdot \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}}\right) + a_p(s) \end{cases}$$

Y teniendo como condiciones iniciales  $v_0 = 0$ ,  $s_0 = 0$  y  $\Delta t = 0,01$  completamos la **Tabla Temporal**.

Se puede observar como el carrito parte del reposo, es por ello que tuvimos en cuenta un término adicional en la ecuación 1. Este término lo denominamos  $a_p$  el cual representa la **aceleración de propulsión** y se mantiene constante solo dentro del tramo A.

A su vez, para que el carrito logre subir hasta el punto más alto propusimos utilizar la **conservación de la energía mecánica** entre el punto final del tramo A y el punto más alto de la trayectoria ya que el modelo no contempla el rozamiento que existe entre el carrito y la superficie. Teniendo en cuenta lo mencionado podemos decir que:

$$\begin{aligned} \Delta E_m &= 0 \\ \Delta E_m &= \Delta E_c + \Delta E_{pg} \end{aligned}$$

Como sabemos que el carrito parte del 0 potencial gravitatorio y que llega a la altura máxima con velocidad 0:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - m \cdot g \cdot H_1$$

Como la energía mecánica se conserva:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - m \cdot g \cdot H_1 = 0$$

Despejando la velocidad y cancelando las masas podemos ver que:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_1}$$

Luego, tomando  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  y  $H_1 = 115m$  sabemos que:

$$v_0 = 47,5 \frac{m}{s}$$

Luego, para finalmente calcular la aceleración utilizamos la siguiente relación:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

Donde  $v_f$  fue calculado anteriormente (ya que sería la velocidad final del tramo A),  $v_0 = 0$  ya que partimos del reposo y  $\Delta x = L_0$  ya que esa es la longitud del tramo A. Despejando podemos decir que:

$$a_p = \frac{v_f^2}{2 \cdot L_0}$$

$$a_p = 10,744 \frac{m}{s^2}$$

A su vez, sumamos un 15 % a este valor para contemplar el rozamiento, obteniendo como valor final de la aceleración de propulsión:

$$a_p = 12,3556 \frac{m}{s^2}$$

A continuación se muestra un resumen de la tabla temporal teniendo en cuenta todo lo mencionado, mostrando en ella las partes que consideramos más importantes (como, por ejemplo, las uniones entre tramos), ya que es muy extensa.

Índice	tramos	t	S_temp	v	k_temp
0	A	0.00	0.000000	0.000000	0.000000
1	A	0.01	0.000000	0.123556	0.000000
2	A	0.02	0.001236	0.247112	0.000000
410	A	4.10	103.595528	50.657960	0.000000
411	A	4.11	104.102108	50.781516	0.000000
412	B	4.12	104.609923	50.781239	0.002824
413	B	4.13	105.117735	50.780749	0.004997
579	B	5.79	182.966352	40.154715	635440.876534
580	B	5.80	183.367899	40.056615	541049.758110
581	C	5.81	183.768465	39.958515	1000000.000000
582	C	5.82	184.168051	39.860415	1000000.000000
677	C	6.77	217.655280	30.540915	1000000.000000
678	C	6.78	217.960689	30.442815	1000000.000000
679	D	6.79	218.265117	30.344715	1000000.000000
680	D	6.80	218.568564	30.246615	706343.783282
993	D	9.93	290.782431	30.033148	-406570.775975
994	D	9.94	291.082762	30.131248	-638952.337848
995	E	9.95	291.384074	30.229348	-1000000.000000
996	E	9.96	291.686368	30.327448	-1000000.000000
1091	E	10.91	324.877608	39.646948	-1000000.000000
1092	E	10.92	325.274078	39.745048	-1000000.000000
1093	F	10.93	325.671528	39.843148	-1000000.000000
1094	F	10.94	326.069960	39.941248	-805750.346012
1258	F	12.58	402.585637	50.811547	-0.050966
1259	F	12.59	403.093753	50.815544	-0.040779
1260	F	12.60	403.601908	50.818544	-0.030595

Cuadro 2: Recorte de la tabla temporal en los cambios de tramo

Una vez calculados los datos de la tabla temporal, realizamos una interpolación lineal con las filas de la tabla geométrica para calcular los respectivos valores de  $x$  y  $y$  para cada punto de la trayectoria. Con estos datos realizamos los gráficos  $y(x)$  y  $v(x)$  los cuales son mostrados a continuación:

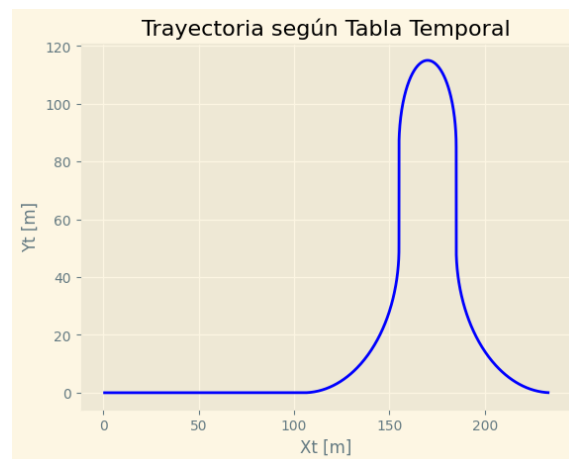


Figura 3: Y vs X

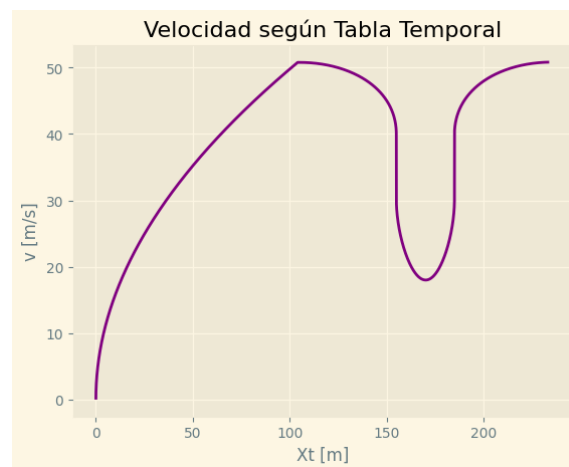


Figura 4: Velocidad vs X

Luego, juntando ambos gráficos obtenemos la siguiente figura:

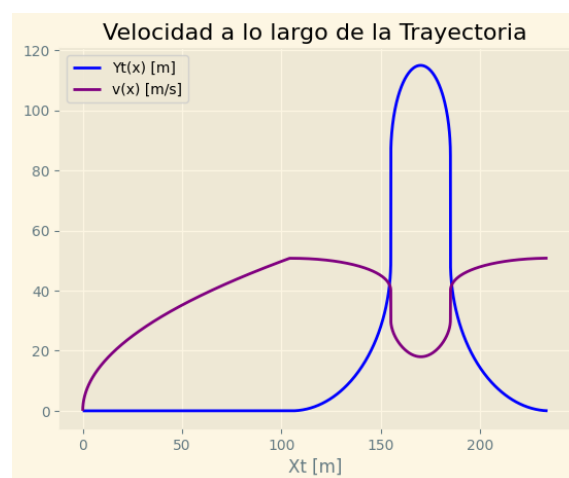


Figura 5: Velocidad y Trayectoria

Analizando el sentido físico, podemos ver cómo el carrito parte desde el reposo y empieza a ganar velocidad a lo largo del Tramo A, lo cual se corresponde con lo mencionado anteriormente. A continuación, se puede observar la pérdida de velocidad al entrar al tramo B, esto también es correcto ya que en este punto la aceleración de la gravedad empieza a intentar frenar el carrito. Esto mismo se repite para el tramo C y la primer mitad del tramo D, donde el carro llega al punto más alto con velocidad  $v \approx 18 \frac{m}{s}$ . Finalmente, luego del tramo más alto comienza a ganar más velocidad ya que la aceleración de la gravedad está a su favor y así se completa el recorrido.



## 4. Validación de la solución obtenida

Al no haber considerado rozamiento alguno, la Energía Mecánica se conservará en todo punto (una vez superada la etapa de propulsión). Esto implica que en cualquier punto se cumple:

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = cte$$

Despejando:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{m}(cte - mgy)$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{cte}{m} - gy$$

$$\frac{v^2}{2} + gy = cte$$

Graficando la cantidad  $\frac{v(t)^2}{2} + g \cdot y(t)$ :

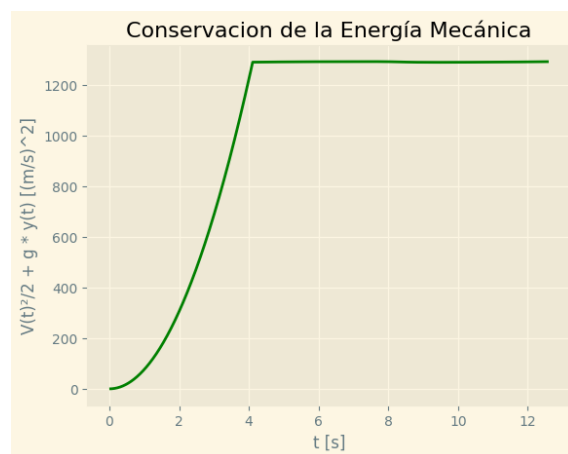


Figura 6: Validación de la Solución

Podemos observar como en un principio esta cantidad varía lo cual tiene sentido ya que el carrito esta acelerando y ganando velocidad. Como en un inicio no hay **Energía Potencial Gravitatoria**, la **Energía Mecánica** es puramente cinética, lo cual implica que existe una **fuerza no conservativa** que, a lo largo de ese tramo, esta realizando trabajo para acelerar el carrito.

Una vez se supera este tramo, se puede observar que la cantidad graficada se mantiene constante, lo cual valida que la solución obtenida es correcta en términos físicos.

## 5. Cálculo de G-Force

La usual referencia para medir la intensidad de una montaña rusa es la G-Force. La G-Force mide la relación entre la fuerza normal a la trayectoria y el peso de la partícula en movimiento.

Para velocidades muy altas o radios de curvatura pequeños, la G-Force puede escalar a valores fisiológicamente intolerables, lo cual puede hacer de esta atracción algo potencialmente peligroso. Es por ello que calculamos el valor de esta magnitud para cada punto de la Tabla Temporal y obtuvimos el siguiente gráfico:

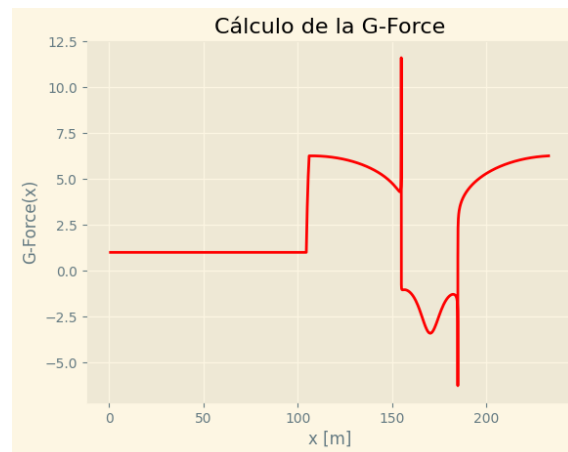


Figura 7: G-Force vs X

Podemos observar como pasando  $x = 100$  la G-Force se dispara a 5, un valor muy elevado. Esto indica que se está entrando a la curva del tramo B de una forma demasiado brusca, resultando peligroso. A su vez se pueden ver picos en  $x \approx 150$  y  $x \approx 200$ : estos valores corresponden a puntos donde se está tomando la curva D. Estos picos se pueden dar por una velocidad muy alta y un radio de curvatura pequeño.

Se puede observar este comportamiento de manera más clara en el siguiente gráfico:

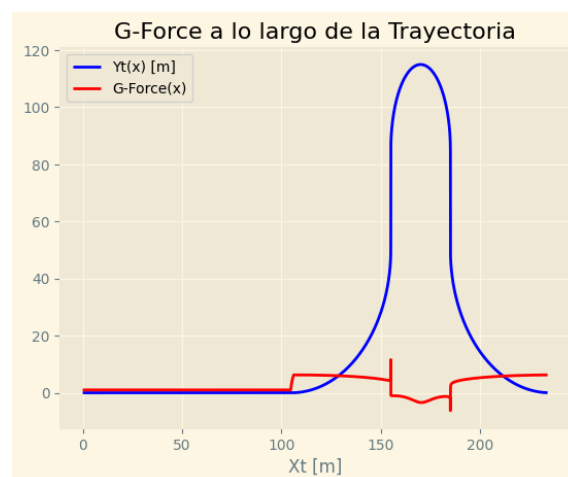


Figura 8: G-Force y Trayectoria

Para atenuar los valores de G-Force experimentados por los pasajeros, proponemos una serie de modificaciones tanto en el diseño geométrico como en la gestión de la velocidad a lo largo del recorrido.

En primer lugar, se recomienda suavizar aún más la trayectoria en las zonas de transición hacia tramos curvos, como en los puntos B y D, mediante el uso de radios de curvatura mayores. Esto permite reducir las aceleraciones laterales y verticales repentinas, generando una experiencia más segura.

Por otro lado, podría minimizarse la velocidad en los puntos críticos del trayecto, esto es aquellos donde se generan G-force elevadas. Esto puede lograrse calculando las velocidades mínimas necesarias para que el recorrido sea físicamente viable, sin comprometer la propuesta del diseño. En caso de ser necesario, se sugiere el uso de frenos magnéticos en los tramos más riesgosos para controlar de forma precisa la velocidad sin afectar la fluidez general del movimiento.

## 6. Rozamiento con el aire y Roll Back

Para modelar el efecto del aire, se suele incluir en la ecuación diferencial el siguiente término:

$$-g \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} + a_p - \frac{\eta}{M} \left[ \frac{ds}{dt} - v_{\text{VIENTO}} \cdot \cos \theta \right]^2 = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Donde:

- M: Masa total del tren con personas a bordo.
- $\eta$ : Coeficiente de arrastre asociado al aire.
- $v_{\text{VIENTO}} \cdot \cos \theta$ : Velocidad absoluta del viento proyectada en la dirección de la trayectoria

Para poder calcular la aceleración de propulsión de forma automática para cualquier velocidad  $v_{\text{objetivo}}$  proponemos transformar el problema en una búsqueda de raíces, utilizando un algoritmo iterativo donde utilizamos el método de la secante para aproximar la derivada de la función y en cada paso resolvemos una ecuación diferencial utilizando **Euler Explícito**.

Para ello, necesitamos una función tal que dada una aceleración  $a_p$  nos devuelva una velocidad  $v$ . Para ello definimos  $f(a_p)$ . Luego, despejando de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} -g \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} + a_p - \frac{\eta}{M} \left[ \frac{ds}{dt} - v_{\text{VIENTO}} \cdot \cos \theta \right]^2 &= \frac{d^2 s}{dt^2} \\ a_p - \frac{\eta}{M} \left[ \frac{ds}{dt} - v_{\text{VIENTO}} \cdot \cos \theta \right]^2 &= \frac{d^2 s}{dt^2} + g \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} \\ -\frac{\eta}{M} \left[ \frac{ds}{dt} - v_{\text{VIENTO}} \cdot \cos \theta \right]^2 &= \frac{d^2 s}{dt^2} + g \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} - a_p \\ \left[ \frac{ds}{dt} - v_{\text{VIENTO}} \cdot \cos \theta \right]^2 &= -\frac{M}{\eta} \cdot \left( \frac{d^2 s}{dt^2} + g \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} - a_p \right) \\ \frac{ds}{dt} - v_{\text{VIENTO}} \cdot \cos \theta &= \sqrt{\frac{M}{\eta} \cdot \left( a_p - \frac{d^2 s}{dt^2} - g \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} \right)} \\ \frac{ds}{dt} &= \sqrt{\frac{M}{\eta} \cdot \left( a_p - \frac{d^2 s}{dt^2} - g \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} \right)} + v_{\text{VIENTO}} \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Entonces podemos decir que:

$$f(a_p) = \sqrt{\frac{M}{\eta} \cdot \left( a_p - \frac{d^2 s}{dt^2} - g \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} \right)} + v_{\text{VIENTO}} \cdot \cos \theta$$

Luego, para poder construir el esquema recursivo alrededor de un problema de búsqueda de raíces:

$$g(a_p) = f(a_p) - v_{\text{objetivo}}$$

$$a_{p \ i+1} = a_{p \ i} - \frac{g(a_{p \ i})}{g'(a_{p \ i})}$$

Donde aproximamos  $g'(a_{p\ i})$  como:

$$g'(a_{p\ i}) \approx \frac{g(a_{p\ i}) - g(a_{p\ i-1})}{a_{p\ i} - a_{p\ i-1}}$$

Finalmente como condición de corte proponemos que  $|g(a_{pi})| \leq 0,01$

Luego, programando el algoritmo logramos los siguientes resultados:

$M[kg]$	$\eta[kg/s]$	$v_{VIENTO}[m/s]$	$v_{OB}[m/s]$	$a_p[m/s^2]$
10960	0.75	0	10	$11,48757 \pm 0,000005$
10960	0.75	-5	10	$11,51469 \pm 0,000005$
10960	0.75	-10	5	$11,20260 \pm 0,000005$

## 7. Resumen

A continuación se encuentra la **Tabla Resumen**, la cuál contiene los datos mas relevantes del trabajo desarrollado.

Magnitud	Valor
Velocidad máxima de la evolución [m/s]	50,82
Velocidad en el punto más alto [m/s] (calculado en ítem 2b)	18,00
Velocidad en el punto final del recorrido [m/s]	50,82
Tiempo total del recorrido [s] (calculado en ítem 2b)	12,60
G-Force al inicio del Tramo B []	1,000703
G-Force en el punto más alto []	-3,401501
G-Force al final del Tramo F []	6,264866

Cuadro 3: Tabla de magnitudes y valores

## 8. Conclusiones

El estudio de montañas rusas a través de métodos numéricos permite modelar y analizar con precisión su comportamiento físico, como la velocidad, aceleración y fuerzas involucradas en el recorrido. Herramientas como la integración numérica o el método de Euler son fundamentales para simular trayectorias, optimizar diseños y garantizar la seguridad de los pasajeros. Esta aplicación demuestra cómo la matemática y la física, a través de los métodos numéricos, son esenciales para convertir ideas creativas en experiencias reales y seguras en el mundo de la ingeniería del entretenimiento. Además, este trabajo fue esclarecedor para el grupo y permitió comprender en mayor detalle los contenidos abordados en la materia.