Problema 2

Se desea resolver un sistema de ecuaciones lineales Ax=b de 3x3 por el método de Jacobi. Se conoce la siguiente información.

- A no es diagonal dominante.
- T no es diagonal dominante (T es la matriz de iteración del método)
- El polinomio característico que resuelve los 3 autovalores de A resulta en la ecuación:

$$343\lambda^3 + 49\lambda^2 - 49\lambda - 1/7 = 0$$

- El polinomio característico que resuelve los 3 autovalores de T resulta en la ecuación:

$$27\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda - 1/3 = 0$$

- Tanto para A como para T, se sabe que exactamente dos de sus autovalores son negativos y pertenecen al intervalo cerrado (-1,0).

En base a dicha información, concluir si el método de Jacobi aplicado al sistema AX=b converge. **Justificar** cada paso realizado. La justificación deberá documentar la aplicación de algún método iterativo de aproximaciones sucesivas donde fuera necesario (Sugerencia: Newton-Raphson). Establecer el punto de arranque y el criterio de parada acorde a las necesidades de la respuesta.

Aclaración: En este problema no es necesario realizar un análisis del Teorema de Punto Fijo.

- Para garantizar la convergencia del método de Jacobi: busco probar el radio espectral:

$$\text{Si } \max_i |\lambda_i| < 1 \iff \text{Jacobi converge}$$

- Por enunciado sé que existen 2 autovalores que cumplen con $|\lambda| < 1$ ya que se encuentran el intervalo $(-1;0)$. Entonces, busco el último autovalor de T utilizando NR para intentar probar la condición.

$$\underbrace{f(x) = 27x^3 + 3x^2 - 3x - \frac{1}{3}}_{\text{Polinomio caraterístico de } T} \quad \text{y busco } f(x) = 0 \text{ usando NR.}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad f'(x) = 81x^2 + 6x - 3$$

$$g(x) = x - \frac{27x^3 + 3x^2 - 3x - \frac{1}{3}}{81x^2 + 6x - 3}$$

- Propongo utilizar la semilla $x_0 = 1,1$ ya que es un valor que no se encuentra en el intervalo $(-1;0)$ y entonces el método no debería converger hacia ninguna de las raíces/autovalores conocidas/os.

k	x_k	x_{k+1}
0	1,10000	0,74636
1	0,74636	0,52480
2	0,52480	0,39918
3	0,39918	0,34516
4	0,34516	0,33382
5	0,33382	0,33333
6	0,33333	0,33333

Como criterio de paro propongo que la diferencia entre 2 iteraciones sucesivas sea 0.

Podemos observar que el método converge a $x = 0,33333$. Como x representa un autovalor de T podemos observar que se cumple que $\max |\lambda_i| < 1$ y es por esto que podemos garantizar la convergencia del método de Jacobi.

Problema 3

La siguiente tabla indica la implementación de un método de punto fijo para estimar la raíz positiva de la función $F(x)=e^{-2x}+x-1$. La semilla 0.7 corresponde a la iteración "0". El método se truncó en la 5° iteración, verificando anteriormente que cumple las hipótesis del Teorema de Punto Fijo.

En base a la información disponible, evaluar la función F en la raíz estimada según la tabla. Es decir, hallar F(raíz estimada). La respuesta deberá incluir un valor representativo y cota de error adecuada.

Aclaración: considerar válida como cota de error absoluto, la diferencia entre 2 iteraciones consecutivas.

0	0.7000
1	0.7534
2	0.7784
3	0.7892
4	0.7937
5	0.7955

- Se considera válida como cota del error absoluto la diferencia entre 2 iteraciones consecutivas

$$\Rightarrow \Delta x = \underbrace{0{,}7955}_{x_5} - \underbrace{0{,}7937}_{x_4}$$

$$\boxed{\Delta x = 0{,}0018}$$

- Busco el valor de la raiz estimada, para ello evalúo $F(x_5)$ y propago errores.

$$F = \tilde{F} \pm \Delta F$$

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x_5} \cdot \Delta x \qquad (1)$$

$$\tilde{F} = F(x_5) \qquad (2)$$

Cálculo (1)

$$\Delta F = \left(-2e^{-2x}+1\Big|_{x=x_5}\right) \cdot \Delta x$$

$$\Delta F = \left(-2\, e^{-2\cdot 0{,}7955} + 1\right) \cdot 0{,}0018$$

$$\boxed{\Delta F = 0{,}0011}$$

Cálculo (2)

$$\tilde{F} = e^{-2x} + x - 1 \Big|_{x=x_5}$$

$$\tilde{F} = e^{-2\cdot 0{,}7955} + 0{,}7955 - 1$$

$$\tilde{F} = -0{,}0008$$

$$F = -0{,}0008 \pm 0{,}0011$$

Mayoro el error a 1 cifra significativa

$$\boxed{\text{Rta: } F = -0{,}001 \pm 0{,}002}$$

Problema 2
Dada la siguiente función: $f(x) = x^3 - 8$
Se desea hallar su raíz con el esquema de punto fijo $g(x)=x-k.f(x)$ donde k es una constante positiva. Hallar el máximo valor de k, para que el método tenga garantizada la convergencia según el Teorema de Punto Fijo en el intervalo [1,3].

- Para garantizar la convergencia según el Teorema de Punto Fijo busco probar existencia y unicidad en [1, 3].

$$g(x) = x - k(x^3 - 8)$$

$$g'(x) = 1 - 3kx^2$$

Busco probar condiciones de existencia en g(a) y g(b) donde [a,b] = [1,3]

1)

$$a < a - k(a^3 - 8)$$

$$a < a - ka^3 + 8k$$

$$ka^3 - 8k < 0 \quad a = 1$$

$$k - 8k < 0$$

$$-7k < 0$$

$$\boxed{k > 0} \; *$$

$$a - k(a^3 - 8) < b$$

$$a - ka^3 + 8k < b$$

$$1 - k + 8k < 3$$

$$7k < 3 - 1$$

$$\boxed{k < \frac{2}{7}}$$

2)

$$a < b - k(b^3 - 8)$$

$$1 < 3 - k(\underbrace{3^3 - 8}_{19})$$

$$1 < 3 - 19k$$

$$19k < 2$$

$$\boxed{k < \frac{2}{19}}$$

$$b - k(b^3 - 8) < b$$

$$-k(b^3 - 8) < 0$$

$$-19k < 0$$

$$\boxed{k > 0}$$

* Misma condición.

Ahora busco probar las condiciones de unicidad (g' es monótona en [1, 3])

3)

$$-1 < 1 - 3ka^2 < 1$$

$$-1 < 1 - 3k < 1$$

$$-2 < -3k < 0$$

$$\frac{2}{3} > k > 0$$

$$\begin{cases} k > 0 \\ k < \frac{2}{3} \end{cases}$$

4)

$$-1 < 1 - 3kb^2 < 1$$

$$-1 < 1 - 3k3^2 < 1$$

$$-1 < 1 - 27k < 1$$

$$-2 < -27k < 0$$

$$\frac{2}{27} > k > 0$$

$$\begin{cases} k > 0 \\ k < \frac{2}{27} \end{cases}$$

Rta: Para garantizar la convergencia por el Teorema de punto fijo el valor que puede tomar k es $\frac{2}{27}$ ya que es el único que cumple las 4 condiciones.