CB051 – MODELACION NUMERICA

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TRABAJO PRACTICO

1er Cuatrimestre 2025

Métodos numéricos y montañas rusas II

Preparado por Ing. Federico Balzarotti

Montaña rusa Red Force, Ferrari Land, Tarragona, España

OBJETIVOS

- Experimentar el uso de métodos numéricos en la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales
- Consolidar conocimientos de la mecánica clásica
- Adquirir conocimientos básicos en el diseño de montañas rusas

CONSIDERACIONES GENERALES DEL INFORME

- El trabajo debe realizarse en grupos de 4 o 5 personas. Trabajos entregados con menos de 4 personas o más de 5 no serán evaluados.

- El TP debe plasmarse en un informe escrito en formato de texto donde estén desarrollados todos los ítems pautados, gráficos, tablas, etc.

- Los cálculos podrán realizarse con Excel o cualquier otro software (Sugerencia: Python). Los archivos de software o planilla de cálculo **no son parte del informe**. Estos se deberán entregar en un archivo aparte y su única función es ayudar a verificar los cálculos obtenidos, que deberán estar explicitados en el informe. Si se entregara únicamente un archivo Excel o un código de programación, la nota será insuficiente e implicará tener que recursar la materia.

- La entrega del Trabajo Practico consiste en subir a una tarea del campus 2 archivos: (1) el pdf del informe y (2) el archivo del software con el que se realizaron los cálculos. **Solamente UN integrante del grupo deberá subirlos**. En la carátula del TP deberán están indicados todos los integrantes. Si hiciera falta, ambos archivos se pueden comprimir en uno solo en caso de que el campus no los acepte por límite de tamaño. En última instancia se podrá enviar el código por mail aparte (no así el informe). Los archivos deberán nombrarse como “informe_grupo_xx.pdf” y “software_grupo_xx”.

- Luego de la corrección existe una única instancia de re-entrega para los grupos que se les haya indicado corregir algún aspecto del trabajo. La fecha de re-entrega se pautará posteriormente a la corrección general.

INTRODUCCIÓN

Las montañas rusas fueron evolucionando desde 1880 hasta la fecha. Inicialmente se construían con madera, pero luego fueron migrando hacia el acero. Recién a partir de 1970 se volvieron relativamente confiables y aparecieron las que poseen inversiones en su recorrido.
Desde ese momento hasta hoy fueron incorporando elementos específicos que permiten clasificarlas de diversas maneras: vía invertida, a propulsión, recorrido en reversa, con asientos rotativos, etc.

Cyclone, Coney Island, NY, EEUU,
Opera desde 1927 hasta el presente

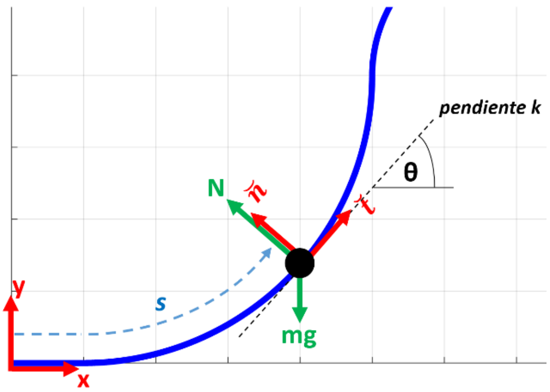
X2, Six Flags Magic Mountain, California, EEUU
Los asientos rotan sobre un eje propio.

Una de las cuestiones principales en el diseño de montañas rusas es la aceleración a la que están sometidos los pasajeros en cada punto de la trayectoria. Exceder ciertos valores puede ser potencialmente peligroso para el sistema circulatorio. A fin de estimar correctamente dicha aceleración y el resto de las variables cinemáticas en trayectorias complejas será necesario utilizar métodos numéricos.

En este trabajo práctico se simulará la evolución temporal de una masa puntual bajo la acción de la gravedad y sujeta a una trayectoria curvilínea que representa elementos típicos de una montaña rusa.

PLANTEO DEL PROBLEMA

El problema esencial de una montaña rusa se basa en predecir la evolución temporal de una partícula bajo la acción de la gravedad, pero sujeta a una trayectoria previamente determinada. Deberá existir en todo momento una reacción de vínculo normal entre los rieles y el tren de tal manera que evite el desprendimiento.
Para simplificar la matemática (no así los conceptos), se restringirá el problema a trayectorias en dos dimensiones de masas puntuales y en principio se despreciará el rozamiento. El diagrama de cuerpo libre para esta situación es el siguiente:



x [m]: coordenada horizontal fijada a tierra
y [m]: coordenada vertical fijada a tierra

θ [°]: ángulo de la pendiente *k* en cada punto ($k = \tan\theta$)
s [m]: coordenada que mide la distancia sobre la trayectoria desde *(x,y)=(0,0)*

N [N]: fuerza que ejerce el riel sobre la partícula
mg [N]: peso de la partícula

$\breve{t}$: versor que marca la dirección tangencial a la trayectoria
$\breve{n}$: versor que marca la dirección normal a la trayectoria

Del balance de fuerzas en $\breve{t}$ surge: $-mg\ sin\ \theta = m\ a_t$ con $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ (1)

Del balance de fuerzas en $\breve{n}$ surge: $N - mg\cos\theta = m\ a_n$ con $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ (2)

Utilizando la identidad trigonométrica $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y dividiéndola por $\sin^2\theta$ se obtiene la relación:

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \qquad \text{con} \qquad \tan\theta = k = \frac{dy}{dx}$$

Es posible así relacionar el $\sin\theta$ con la pendiente *k* en cada punto *s* de la trayectoria:

$$\sin\theta = \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} \tag{3}$$

Reemplazando (3) en (1) y simplificando *m* se obtiene una ecuación diferencial expresada en términos de *s*:

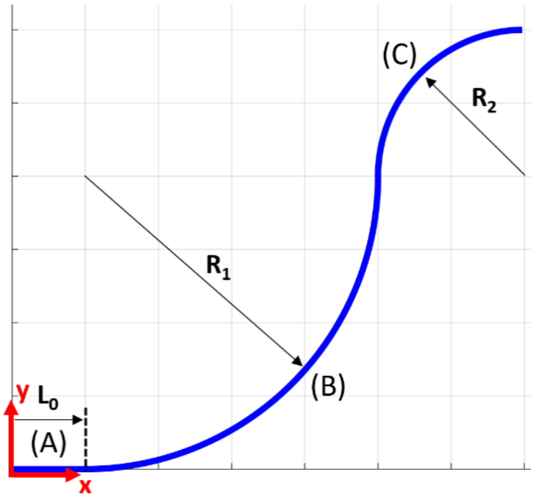
$$-g\ \frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{4}$$

Queda así definido un **problema de valores iniciales de segundo orden no lineal** con *s(t)* como incógnita. Para su resolución deberá definirse previamente la función *k(s)*. Dicha función viene dada implícitamente por la trayectoria. El orden 2 podrá desglosarse en dos ecuaciones de orden 1, poniendo en evidencia la derivada primera temporal de *s*, que por definición es la velocidad tangencial *v*.
La ecuación (4) no posee solución analítica, salvo excepciones donde la trayectoria sea muy simple. Por esta razón, la solución se obtendrá en forma numérica mediante la discretización de las variables *t* y *s*. Una vez estimada la función *s(t)* podrá calcularse el resto de las variables cinemáticas, siendo la *aceleración normal o G-Force* la más relevante. En síntesis, los pasos a seguir son:

- Confeccionar la trayectoria como un conjunto de pares ordenados *(x,y)*
- Estimar *s* y *k* para cada par *(x,y)*
- Resolver numéricamente el problema de valores iniciales
- Calcular la *G-Force* en cada punto e identificar situaciones críticas

DESARROLLO DEL PRÁCTICO

Item 1) Confección de la trayectoria: El modelo de trayectoria estará compuesto por varios tramos. Las uniones entre tramos consecutivos deberán ser medianamente suaves, teniendo que cumplir continuidad en la derivada primera. Cada tramo se define por un conjunto de 100 puntos sucesivos según un parámetro *r* que varía entre 0 y 0.99 con un paso de 0.01. A continuación se muestra ejemplo con 3 tramos A, B y C acordes al sistema de referencia xy, donde L_0, R_1 y R_2 son valores fijos.



Tramo A: Segmento horizontal de longitud L_0

$$x_a = L_0.r$$
$$y_a = 0$$

Tramo B: Cuarto de circunferencia de radio R_1

$$x_b = L_0 + R_1\cos(r.\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})$$
$$y_b = R_1 + R_1\sin(r.\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})$$

Tramo C: Cuarto de circunferencia de radio R_2

$$x_c = L_0 + R_1 + R_2\cos(-r.\frac{\pi}{2} - \pi)$$
$$y_c = R_1 + R_2\cos(-r.\frac{\pi}{2} - \pi)$$

Los datos numéricos L_0, R_1 y R_2 servirán como parámetros fácilmente modificables en caso de que la aceleración de tren alcance valores fisiológicamente intolerables.
Para obtener la coordenada *s* y la pendiente *k* en cada punto se asumirán las siguientes aproximaciones geométricas:

$$s_{i+1} \cong s_i + \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad \text{con} \quad s_0 = 0$$

$$k_i = \frac{dy}{dx} \cong \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

La información de la trayectoria deberá plasmarse en la siguiente tabla que denominaremos *Tabla Geométrica*:

TRAMO	*r*	*x*	*y*	*s*	*k*
A	0				
A	0.01				
A	…				
A	0.99				
B	0				
B	0.01				
B	…				
B	0.99				
C	0				
C	0.01				
C	…				
C	0.99				

Notar que la cantidad de filas de la *Tabla Geométrica* será siempre *100×#Tramos* (en este ejemplo 300), independientemente de la longitud real de cada tramo. **En el informe mostrar solamente las ecuaciones obtenidas para cada tramo y graficar las columnas y vs x.**

Item 2) Resolución Numérica:

2a) Resolver numéricamente la ecuación (4) por el método de *Euler Explicito*. En todos los casos las condiciones iniciales son: $s(t=0)=0$ y $v(t=0)=0$. Considerar un paso temporal $h=0.01$ segundos. Los resultados deberán plasmarse en una *Tabla Temporal* que contenga las variables t, s y v. La duración total del recorrido deberá determinarse en base al último punto en la *Tabla Geométrica*. Dado que la *Tabla Temporal* será extensa, **presentar en el informe solamente las filas que encierran las uniones entre tramos, incluyendo también las de inicio y fin del recorrido**.

2b) Calcular las coordenadas (x_j, y_j), correspondientes con la coordenada tangencial s_j de la *Tabla Temporal* (deberá buscar esta información en la *Tabla Geométrica*). Dado que no encontrará valores idénticos de s en ambas tablas, se recomienda realizar una interpolación lineal con las filas involucradas. **Presentar en el informe:**

- Los gráficos $y(x)$ y $v(x)$ en metros. Uno debajo del otro, con la misma escala para x.
- La velocidad en el punto más alto de la trayectoria expresada en m/s.
- El tiempo total del recorrido medido en segundos

Analizar la coherencia de los resultados en términos físicos.

Ítem 3) Validación de la solución obtenida en el *ítem 2*: Al no haber considerado rozamiento alguno, la *Energía Mecánica* se conservará en todo punto (una vez superada la etapa de propulsión). Esto implica que en cualquier punto se cumpla:

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = cte$$

Despejando:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{m}(cte - \ mgy) = \frac{cte}{m} - gy$$

En el informe graficar en función del tiempo la cantidad $v(t)^2/2+g,y(t)$., Analizar si los resultados son acordes al principio físico mencionado. En caso de no serlo, explicar la razón.

Item 4) Cálculo de G-Force: La usual referencia para medir la intensidad de una montaña rusa es la *G-Force* o *Fuerza-G* (que no es una fuerza). *G-Force* mide la relación entre la fuerza normal a la trayectoria y el peso de la partícula en movimiento. Despejando N de la ecuación (3) y dividiendo por mg se obtiene:

$$G_{Force} = \frac{N}{mg} = \cos\theta + \frac{v^2}{\rho g} \tag{5}$$

Notar que para una situación en reposo o una trayectoria recta horizontal ($\rho \rightarrow \infty$), *G-Force=1*. Este valor indica estar sometido a "*una vez"* la gravedad, que es lo usual en la vida diaria. En el caso de una caída libre recta ($\rho \rightarrow \infty$) el ángulo pasa a ser 90° y *G-Force=0*, y es lo que se suele llamar *ingravidez*.

Para velocidades es muy altas o radios de curvatura pequeños, la *G-Force* puede escalar a valores fisiológicamente intolerables. Un detalle no menor es que la tolerancia del cuerpo humano no es la misma según la dirección y signo de la *G-Force*.

Una *G-Force* positiva, envía la sangre desde la cabeza hacia los pies, pudiendo producir visión borrosa y pérdida de conciencia. Un valor mayor a **5** es considerado peligroso si la exposición es por mucho tiempo.

Una *G-Force* negativa, envía la sangre desde los pies hacia la cabeza, pudiendo producir sangrado de nariz y hasta un ACV. Debido a este efecto mucho más crítico, se exigen valores por encima de **-1**.

En este ítem se deberá calcular la *G-Force* en cada instante de la *Tabla Temporal*. **En el informe graficar *G-Force(x)* e identificar las zonas donde queda fuera del rango [-1,+5]**. En dichos casos, proponer acciones que ayuden a atenuar los valores, ya sea sobre la trayectoria o las condiciones iniciales. No realizar nuevos cálculos. Solo describir las acciones y justificar al respecto. Indicar como mínimo 2 acciones.

A continuación se detallan los pasos para estimar la *G-Force*:
La ecuación (5) requiere calcular el $\cos\theta$ y el radio de curvatura ρ en cada punto. El primero se calcula fácilmente con la pendiente k(s):

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+k(s)^2}}$$

El radio de curvatura para una función y(x) está definido por la siguiente expresión:

$$\rho(x) = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}$$

En el numerador, y' coincide exactamente con la pendiente *k*. La derivada segunda en el denominador se aproxima mediante el siguiente cálculo:

$$y_i'' \cong 2\frac{y_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})} - 2\frac{y_i}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} + 2\frac{y_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}$$

En síntesis, se deberá agregar dos columnas a la *Tabla Geométrica* para así poder interpolar el ρ pedido en la *Tabla Temporal*:

TRAMO	*r*	*x*	*y*	*s*	*k*	***y''***	$\boldsymbol{\rho}$
A	0						
A	0.01						
A	0.02	x_{i-1}	y_{i-1}				
A	0.03	x_i	y_i		k_i	y_i''	ρ_i=...
A	0.04	x_{i+1}	y_{i+1}				
A	…						
A	0.99						
B	0						
B	0.01						

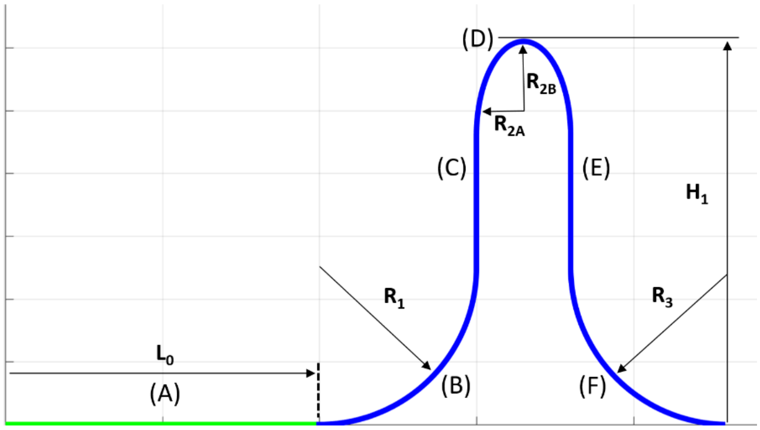
CASO DE APLICACIÓN

Red Force es una Montaña rusa situada en el parque temático *Ferrari Land* ubicado en *Tarragona, España*. Se caracteriza por su gran altura y su potente sistema de propulsión. En el arranque alcanza una velocidad de *180km/h* en solo 5 segundos.
Video oficial: Red Force at Ferrari Land

Altura máxima	112m
Velocidad máxima	180km/h
Inversiones	No tiene
Longitud total	880m
Duración	24 segundos

los datos de la tabla anterior son descriptivos y no se usan en el presente trabajo practico

El esquema para simulación es el siguiente:



L0	*Dato Particular*	*Tramo A*	*Horizontal recto + propulsión*
H1	*Dato Particular*	*Tramo B*	*Cuarto de circunferencia*
R1	*50m*	*Tramo C*	*Vertical recto*
R2A	*15m*	*Tramo D*	*Media Elipse*
R2B	*30m*		
R3	*50m*	*Tramo E*	*Vertical recto*
$V_{inicial}$	*0m/s*	*Tramo F*	*Cuarto de circunferencia*

Observar que durante el Tramo A se requiere una aceleración de propulsión ***ap***, que se asume constante en todo el tramo. El valor a calcular será el requerido para llegar exactamente al punto mas alto (según conservación de energía mecánica) más un 15% para cubrir cualquier efecto de rozamiento con el aire.
En la ecuación diferencial se deberá tener en cuenta esta aceleración únicamente cuando el carro atraviesa el *Tramo A*:

$$-g\,\frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} + \boldsymbol{ap} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Deberá encontrarse una manera fácil sobre cómo implementar este detalle en la resolución.

Item 5) Influencia del rozamiento con el aire y evento de "Roll-Back":
Para modelar el efecto del aire, se suele incluir en la ecuación diferencial una fuerza proporcional al cuadrado de la velocidad del tren relativa a la velocidad del viento en la dirección de la trayectoria. Esto es:

$$-g\,\frac{k(s)}{\sqrt{1+k(s)^2}} + \boldsymbol{ap} - \frac{\eta}{M}\left[\frac{ds}{dt} - v_{VIENTO}.\cos\theta\right]^2 = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Donde:

- M: masa total del tren con personas a bordo.
- η: Coeficiente de arrastre asociado al aire.
- $v_{VIENTO}.\cos\theta$: velocidad absoluta del viento proyectada en la dirección de la trayectoria.

En ciertos momentos donde la velocidad del viento es significativamente elevada podría producirse una situación comúnmente llamada "Roll-Back" (ver video).
Video Rollback: Rollback launch in Port Aventura Ferrari Land (Salou, Spain)

Para estos casos sería útil poder contar con un algoritmo que establezca la aceleración de propulsión $\boldsymbol{ap}$ necesaria para atravesar el punto mas alto con una velocidad objetivo $\boldsymbol{v_{OBJ}}$.
5a) Teniendo en cuenta todos los temas vistos en la asignatura, proponer un algoritmo que permita calcular de forma automática la aceleración de propulsión. Justificar la elección de dicho algoritmo y cada paso que realizaría.
5b) Optativo. Con el algoritmo desarrollado, calcular la aceleración de propulsión para las siguientes situaciones:

$M[kg]$	$\eta[kg/s]$	$v_{VIENTO}[m/s]$	$\boldsymbol{v_{OBJ}[m/s]}$	$\boldsymbol{ap}$
10960	0.75	0	10	?
10960	0.75	-5	10	?
10960	0.75	-10	5	?

Item 6) Tabla resumen:
Completar la siguiente tabla donde se explicitan algunos valores puntuales de la solución:

Magnitud	Valor
Velocidad máxima de la evolución [m/s]	
Velocidad en el punto más alto [m/s] (calculado en ítem 2b)	
Velocidad en el punto final del recorrido [m/s]	
Tiempo total del recorrido [s] (calculado en ítem 2b)	
G-Force al inicio del Tramo B []	
G-Force en el punto más alto []	
G-Force al final del Tramo F []	

CONCLUSIONES

Presente sus conclusiones del trabajo práctico (no más de media carilla).

METODOS DE DISCRETIZACION A USAR

Método de *Euler Explícito* para una variable discreta u: $u_{n+1} = u_n + h\, f(u_n, t_n)$

CRITERIOS ORIENTATIVOS PARA REDACTAR EL INFORME

Enfocarse en resolver lo que se pide y analizar los resultados obtenidos. Si hay algo que no es coherente en los resultados, mejor señalarlo.

No copiar el enunciado. Con redactar una breve síntesis es suficiente (media carilla).

Tiene que estar explicitada la discretización de la Ecuación diferencial. Si realizaron un código pueden extraer esa parte del código y pegarla prolijamente. La idea no es complicarse con el editor de ecuaciones.

Realizar los gráficos pedidos en base a la consigna. Es muy importante entender y acatar la consigna. Los gráficos deben tener una grilla equidistante con unidades en cada eje y colores que faciliten la rápida visualización y entendimiento.

Todos los resultados deberán estar analizados. Intente a la vez ser breve y conciso. Si se agregan tablas/gráficos y otros resultados, también deberán estar analizados.