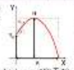
Dado un tiro oblicuo con velocidad V_0 y ángulo α desde una altura inicial Y_0, las expresiones que relacionan estos 3 parámetros con la altura máxima H y el alcance horizontal A son:



$$H = Y_0 + \frac{V_0^2}{2g}\sin^2\alpha \qquad A = \frac{V_0^2}{2g}\sin 2\alpha\left|1 + \sqrt{1 + \frac{Y_0}{\frac{V_0^2}{2g}\sin^2\alpha}}\right|$$

Problema 1: 1a) Para valores $Y_0 = 10m$ (sin incertidumbre), $V_0 = 15m/s$ (sin incertidumbre), $\alpha = 45° \mp 1°$ y $g = 9.81\ m/s^2$ (correctamente redondeado). Hallar H y su cota de error absoluto ΔH en base a la teoría lineal de errores. *Aclaración: deberá asignar una incertidumbre Δg acorde al valor indicado.*

Ayuda: $\sin 45° = \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$

a) Calculo H según los valores otorgados:

$$H = \tilde{H} \pm \Delta H$$

Desarrollo la expresión de ΔH según la teoría lineal de errores:

Cada derivada parcial será evaluada en los valores otorgados por el enunciado.

$$\Delta H = \left|\frac{\partial H}{\partial Y}\right| \cdot \Delta Y + \left|\frac{\partial H}{\partial V}\right| \cdot \Delta V + \left|\frac{\partial H}{\partial g}\right| \Delta g + \left|\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right| \cdot \Delta\alpha$$

- Como los valores Y_0 y V_0 no tienen incertidumbre tomo que su cota de error es 0, obteniendo así la siguiente expresión:

$$\Delta H = \left|\frac{\partial H}{\partial g}\right| \Delta g + \left|\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right| \Delta\alpha$$

$$\Delta H = \left|\frac{V_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}{2g^2}\right| \underbrace{\Delta g}_{0{,}005} + \left|\frac{V_0^2}{\cancel{2}g} \cdot \cancel{2}\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)\right| \Delta\alpha$$

1   0,005 por enunciado (correctamente redondeado)   2

Chequeo unidades

1

$$\left|\frac{\left(\frac{m}{s}\right)^2}{\left(\frac{m}{s^2}\right)^2}\right| \cdot \frac{m}{s^2} = \frac{\cancel{\frac{m^2}{s^2}}}{\cancel{\frac{m^2}{s^4}}} \cdot \frac{m}{\cancel{s^2}} = m \checkmark$$

2

$$\frac{\left(\frac{m}{s}\right)^2}{\frac{m}{s^2}} = \frac{\cancel{\frac{m^2}{s^2}}}{\cancel{\frac{m}{s^2}}} = m \checkmark$$

$$\Delta H = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}(\alpha)\left[\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{2g}\Delta g + \cos(\alpha)\,\Delta\alpha\right]$$

Paso 1° a radianes

$$\Delta H = \frac{15^2}{9{,}81} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2 \cdot 9{,}81} \cdot 0{,}005 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{180}\right]$$

$$\Delta H = 0{,}4814\,m \longrightarrow \boxed{\Delta H = 0{,}5\,m}$$

Mayoro la cota de error

$$\tilde{H} = 10 + \frac{15^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 15{,}7339$$

Finalmente:

$$\boxed{H = 15{,}7m \pm 0{,}5m}$$ Rta

a) Propongo resolver el siguiente SENL utilizando NR:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} f_1(x,y)= y+\frac{x}{2}-10 \\ f_2(x,y)= x+\sqrt{x^2+2xy}-20 \end{cases}$$

NR

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \cdot J^{-1}\Big|_{\substack{x_k \\ y_k}} \begin{pmatrix} f_1(x_k,y_k) \\ f_2(x_k,y_k) \end{pmatrix}$$

Calculo J

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}=1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1+\frac{2x+2y}{2\sqrt{x^2+2xy}} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2xy}}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+2xy}} \end{pmatrix}$$

Entonces la expresión es:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1+\frac{x_k+y_k}{\sqrt{x_k^2+2x_ky_k}} & \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2+2x_ky_k}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_k+\frac{x_k}{2}-10 \\ x_k+\sqrt{x_k^2+2x_ky_k}-20 \end{pmatrix}$$

Rta

b) Busco reducir el sistema a una sola variable.

$$\begin{cases} y+\frac{x}{2}-10=0 & (1) \\ x+\sqrt{x^2+2xy}-20=0 & (2) \end{cases}$$

De (1) despejo y.

$$\boxed{y=10-\frac{x}{2}} \ (3)$$ Reemplazo este valor en (2)

$$x+\sqrt{x^2+2x\left(10-\frac{x}{2}\right)}-20=0$$

$$x+\sqrt{\cancel{x^2}+20x-\cancel{x^2}}-20=0$$

$$x+\sqrt{20x}-20=0 \Rightarrow f(x)=x+\sqrt{20x}-20$$

Busco $f(x)=0$ utilizando NR.

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \quad ; \quad f(x)=x+\sqrt{20x}-20$$

$$f'(x)=1+\frac{10}{\sqrt{20x}}$$

Entonces la expresión recursiva es:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Para poder aplicar el método en un intervalo (a,b) se debe cumplir que $f'(x)\neq 0$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1+\frac{10}{\sqrt{20x}}=0$$

$$\frac{10}{\sqrt{20x}}=-1$$

$$10=-\sqrt{20x}$$

$$(\sqrt{x})^2=\left(-\frac{10}{\sqrt{20}}\right)^2$$

$$|x|=\frac{100}{20}$$

$$x \begin{cases} x_1=50 \\ x_2=-50 \end{cases}$$ → Este valor no se puede alcanzar ya que $\sqrt{x}$ es siempre >0

Entonces $f'(x)\neq 0 \ \forall x\neq 50$.

Propongo utilizar la semilla $x_0=1$. → Positivo ya que $x=\frac{V_2}{25}$

k	x_k
0	1,000
1	5,49
2	7,53
3	7,64
4	7,64

Rta:
Como el método converge podemos decir que la raíz de $f(x)$ es $x=7,64$

c) $g(x)=x-\varphi(x)\cdot f(x)$, en este caso propongo $\varphi(x)=1$ por lo que

$$g(x)=x-f(x)=x-(x+\sqrt{20x}-20)=\cancel{x}-\cancel{x}-\sqrt{20x}+20$$

$$\Rightarrow g(x)=20-\sqrt{20x}$$ Podemos observar como la función es monótona decreciente

1ra condición del TPF $g(x)\subseteq[a,b] \ \forall x\in(a,b) \Rightarrow g$ tiene al menos un P.F

Analizo $g(x)$ en el intervalo $[5,10]$

$$g(5)=20-\sqrt{20.5}=10$$ → En el límite ya que el resultado es exactamente igual al borde del intervalo.

$$g(10)=20-\sqrt{20.10}\cong 5,86 \text{ cumple}$$ "Entra por izq. y sale por der."

2da condición de TPF: si $g'(x)\ \exists \in [a,b]$ y hay una cte. positiva $k<1$ tal que $|g'(x)|\leq k \ \forall x\in[a,b] \Rightarrow$ el P.F es único.

$$g(x)=20-\sqrt{20x}$$

$$g'(x)=-\frac{10}{\sqrt{20x}}=-\frac{10}{\sqrt{20}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\frac{5}{x}}$$

$$g'(x)=-\sqrt{\frac{5}{x}}$$

$g'(5)=-1$ Al límite para cumplir $|g'(x)|\leq k$

$g'(10)=-0,707$ ✓ Como se cumple la condición podemos asegurar que el P.F es único

Rta
Como se cumplen ambas condiciones podemos asegurar la convergencia de g en el intervalo $[5,10]$ hacia la raíz de $f(x)$.

d) Dado el sistema del ítem anterior utilizo el valor de "y" expresado en (3) y despejo "x" de (2)

De (1): $y=10-\frac{x}{2}$

De (2): $x+\sqrt{x^2+2xy}-20=0 \Rightarrow \boxed{x=20-\sqrt{x^2+2xy}}$ (4)

Utilizo las expresiones (3) y (4) para construir el esquema recursivo de G-S

$$\begin{cases} x_{k+1}=20-\sqrt{x_k^2+2x_ky_k} \\ y_{k+1}=10-\frac{x_{k+1}}{2} \end{cases}$$ Rta