Glosario de términos clave – Modelo M1974d (rugosidad multifractal)

- **Modulación multifractal (Multifractal Modulation):** Proceso donde la varianza local se modula jerárquicamente a distintas escalas de tiempo mediante una cascada multiplicativa. Es el núcleo del modelo M1974d.
- **Ruido base:** Proceso estocástico que se utiliza como base del modelo, típicamente ruido gaussiano o estable, sobre el cual se aplica la modulación multifractal.
- **Exponentes de Hölder $h(t)$:** Medida de la regularidad local de una función. En M1974d, controla el nivel de rugosidad de la serie en cada instante de tiempo.
- **Curva multifractal $\tau(q)$:** Función que describe cómo se escalan los momentos estadísticos de orden q en distintas escalas. Refleja la presencia de múltiples leyes de escala.
- **Exponente de singularidad $\alpha(q)$:** Valor que describe la intensidad de irregularidad en una zona específica de la serie. Cuanto menor $\alpha(q)$, mayor la intensidad de la singularidad.
- **Dimensión de Hausdorff $f(\alpha)$:** Función que relaciona cada exponente α con la "cantidad" de puntos en la serie que comparten ese nivel de irregularidad. Define la geometría multifractal de la serie.
- **MRW (Multifractal Random Walk):** Una generalización del M1974d que preserva propiedades multifractales bajo caminatas aleatorias.
- **MSM (Markov Switching Multifractal):** Versión discreta del modelo que facilita su calibración empírica. Emplea una cadena de Markov para modelar los distintos regímenes de varianza.
- **Cascada multiplicativa:** Proceso mediante el cual se aplican factores aleatorios de escalamiento a distintas escalas de tiempo, generando heterogeneidad.
- **Intermitencia:** Alternancia entre fases de baja y alta varianza. En el contexto financiero, representa periodos calmos y periodos de alta volatilidad.
- **Rugosidad:** Medida de cuán abruptamente cambia la serie en el tiempo. Es modulada por la función $h(t)$.
- **Multifractalidad:** Propiedad de una serie de tener múltiples exponentes de escala y comportamiento heterogéneo en distintas partes de la serie.

2.

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath, amssymb geometry graphicx float booktabs margin=1in

2. Introducción general: contexto histórico del modelo en la obra de Mandelbrot

El modelo **M1974d** forma parte de los últimos desarrollos conceptuales de Benoît Mandelbrot en su búsqueda por representar de manera más realista las series de tiempo financieras. Mientras que sus primeros modelos (como el *M1963J* y el *M1972b*) se enfocaban en la memoria larga y los saltos abruptos, respectivamente, el **M1974d** representa un paso hacia la incorporación de estructuras de **rugosidad variable y multifractalidad**, es decir, una forma de heterogeneidad que cambia a través del tiempo en múltiples escalas.

Este modelo fue introducido en el contexto de su colaboración con Wallis y sus desarrollos posteriores sobre *cascadas multiplicativas*, una idea inspirada en la física de turbulencia. Mandelbrot observó que los mercados financieros no solo presentan memoria o saltos, sino también una estructura jerárquica de volatilidad: periodos tranquilos y caóticos se alternan con patrones autoorganizados. Esta visión exigía una matemática que permitiera **modular localmente la varianza y la intensidad de las fluctuaciones**.

El **M1974d** anticipó la noción moderna de procesos multifractales en finanzas y se considera el antecedente directo de modelos como los *Multifractal Random Walks* (MRW) y los *Markov Switching Multifractals* (MSM). Su importancia histórica reside en haber dotado a la teoría financiera de una herramienta para representar no solo la memoria o las colas, sino también la **intermitencia de la volatilidad** y su **estructura jerárquica invisible**.

A diferencia de los modelos anteriores de Mandelbrot, que se construían directamente con ruido Lévy o procesos de salto, el **M1974d** se basa en la idea de *modular la regularidad local* del proceso usando una función multiplicativa que varía en el tiempo y en la escala. Esta función puede ser aleatoria o determinista, permitiendo una gran flexibilidad en la generación de trayectorias.

En resumen, el **M1974d** representa el momento en que la teoría fractal financiera se vuelve multifractal, y con ello, mucho más poderosa y difícil de calibrar. Su uso en la práctica ha sido limitado, pero como base teórica, ha influido en casi todos los desarrollos de simulación de series con volatilidad cambiante a múltiples escalas.

3.

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath, amssymb geometry booktabs margin=1in

3. Planteamiento del problema financiero: ¿por qué necesitamos rugosidad multifractal?

Los modelos financieros tradicionales, como el movimiento browniano o el GARCH clásico, suponen una estructura homogénea de la varianza en el tiempo. Sin embargo, las series de tiempo financieras reales presentan características que contradicen estos supuestos:

- **Volatilidad intermitente:** Los mercados alternan entre fases de calma y agitación sin una periodicidad clara.
- **Heterogeneidad local:** La regularidad de los retornos cambia en el tiempo; algunos fragmentos de la serie son suaves, otros extremadamente irregulares.

- **Escalamiento anómalo:** Los momentos de los retornos no escalan linealmente con el horizonte temporal, como en el Browniano, sino de forma no lineal y dependiente del orden q.

Estos fenómenos exigen una representación más rica que los modelos unifractales o de memoria lineal. En este contexto, la noción de **multifractalidad** permite modelar:

- **Rugosidad variable:** Captura la variación continua de la regularidad temporal.
- **Cascadas jerárquicas:** Representa cómo las fluctuaciones pequeñas se amplifican o atenúan en distintas escalas temporales.
- **Volatilidad estructurada:** La varianza no sólo depende del pasado inmediato, sino de toda una jerarquía de escalas.

Importancia financiera: La rugosidad multifractal permite modelar mejor el comportamiento observado en datos de alta frecuencia, series intradía, e incluso ciclos de burbuja y pánico. A diferencia de la memoria o las colas pesadas por sí solas, este enfoque aborda la *estructura jerárquica del riesgo* en el tiempo.

4.

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath, amssymb geometry margin=1in

4. Modelo M1974d

¿Qué es?

El modelo **M1974d** fue introducido por Benoît Mandelbrot como una extensión multifractal de los modelos con ruido Lévy. Su objetivo es capturar la *rugosidad variable* en el tiempo de los retornos financieros, modulando su irregularidad mediante un proceso multiplicativo jerárquico.

A diferencia de los modelos unifractales (como M1963J), este modelo permite que la regularidad de la serie varíe localmente, reproduciendo la naturaleza multiescala de la volatilidad observada en los mercados.

Historia breve

En la década de 1970, Mandelbrot identificó que incluso los modelos con memoria o colas pesadas no eran suficientes para capturar los patrones de variabilidad local de los precios financieros. Basándose en trabajos sobre turbulencia y geometría fractal, propuso una construcción jerárquica conocida como **cascada multiplicativa multifractal**, adaptándola al contexto financiero con moduladores de amplitud.

Esta propuesta culminó en lo que hoy se conoce como modelo M1974d.

¿Qué resuelve?

- Introduce heterogeneidad temporal estructurada en múltiples escalas.
- Captura los cambios abruptos en la regularidad estadística de los retornos.
- Permite modelar la varianza local como un proceso estocástico dependiente del tiempo.

Intuición

El modelo imagina la construcción de una serie financiera como una cascada de decisiones: a cada paso temporal, la amplitud de las fluctuaciones es multiplicada por un factor aleatorio que depende de su ubicación en una jerarquía de escalas.

Este esquema genera trayectorias que, aunque parezcan similares en lo global, tienen diferentes niveles de rugosidad en lo local, lo cual es característico de las series financieras reales.

Diferencia con M1963J

- **M1963J:** Tiene memoria larga y colas pesadas, pero una rugosidad constante en toda la serie.
- **M1974d:** Introduce *rugosidad variable*, permitiendo zonas suaves y zonas turbulentas en la misma trayectoria.
- Mientras M1963J modela dependencia y colas, M1974d modela **estructura jerárquica** y **multiescala**.

5.
[12pt]article [utf8]inputenc amsmath, amssymb geometry margin=1in

5. Fundamento matemático del modelo M1974d

Decomposición formal con cascada multifractal

El modelo M1974d se basa en la siguiente formulación:

$$X(t) = \epsilon(t) \cdot W(t)$$

donde:

- $\epsilon(t)$ es un proceso de ruido base (puede ser Lévy, gaussiano, etc.)
- $W(t)$ es un **modulador multifractal**, generado como una cascada multiplicativa.

La cascada se define jerárquicamente. En su versión discreta:

$$W(t) = \prod_{j=1}^{J} M_j(t)$$

donde $M_j(t)$ son moduladores aleatorios independientes a cada escala j, generados a través de distribuciones positivas con media uno y soporte en $\mathbb{R}^+$.

Existencia de momentos

La existencia de momentos del proceso $X(t)$ está condicionada por la distribución de los multiplicadores:

- Si M_j tiene una distribución log-normal o log-estable, entonces los momentos de $X(t)$ cumplen una ley de potencias: $\mathbb{E}[|X(t)|^q] \sim \tau(q)$.
- El espectro de momentos $\tau(q)$ es no lineal, lo que implica **multifractalidad**.

Estabilidad débil vs. fuerte

- **Estabilidad fuerte:** no aplica directamente al M1974d, ya que su estructura jerárquica rompe la autosimilitud exacta.
- **Estabilidad débil:** el proceso exhibe escalamiento en momentos fraccionarios, pero con estructura variable en el tiempo.

Convergencia de la cascada

Sea J el número de niveles de la jerarquía. Entonces:

$$\lim_{J \to \infty} W(t) = \exp(\omega(t))$$

donde $\omega(t)$ es un campo estocástico con propiedades de dependencia logarítmica, como en los modelos de turbulencia de Kolmogorov-Obukhov.

La convergencia de $W(t)$ está garantizada si los multiplicadores tienen media uno y varianza finita en log-escala.

Comparación con convoluciones gaussianas

- La convolución con kernels gausianos produce regularidad homogénea.
- El modelo M1974d genera irregularidad localizada mediante una estructura de producto, no suma.
- Mientras las convoluciones suavizan, la cascada puede amplificar o atenuar la intensidad de forma impredecible.

6.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Par metros de la cascada
n = 2048                # N mero de puntos
J = 10                  # Niveles de la jerarqu a
base_noise = np.random.normal(0, 1, n)

# Inicializar el modulador multifractal W(t)
W = np.ones(n)

# Construir la cascada multiplicativa
for j in range(1, J + 1):
    scale = 2 ** j
    num_blocks = n // scale
    multipliers = np.random.lognormal(mean=0, sigma=0.2, size=num_blocks)
    for i in range(num_blocks):
        W[i*scale:(i+1)*scale] *= multipliers[i]

# Generar la serie multifractal
X = base_noise * W

# Graficar
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(X, label='M1974d: Proceso multifractal', lw=0.8)
plt.title('Serie de tiempo simulada con modulaci n multifractal (M1974d)')
plt.xlabel('Tiempo'); plt.ylabel('Valor simulado'); plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.savefig('grafica_M1974d.png')
plt.show()
```

La estructura multiplicativa genera heterogeneidad local que no está presente en modelos aditivos (e.g., convoluciones).

No se requiere asumir colas pesadas ni memoria explícita: la rugosidad emerge de la construcción jerárquica.

Esta aproximación captura patrones empíricos observados en alta frecuencia como bursts de volatilidad o clustering.

7.

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath, amssymb graphicx geometry margin=1in

7. Análisis empírico del modelo M1974d

7.1 ¿Qué tipo de comportamiento reproduce?

El modelo M1974d genera trayectorias con una estructura altamente irregular, caracterizada por explosiones locales de variabilidad. Esta rugosidad extrema replica fenómenos observados en datos financieros de alta frecuencia como:

- Volatilidad intermitente.
- Fases de calma seguidas por explosiones repentinas.
- Heterogeneidad en escalas de tiempo cortas.

7.2 Stylized facts que cumple

El modelo reproduce varios *stylized facts* documentados en literatura financiera:

- **Volatilidad agrupada (volatility clustering):** Periodos de alta actividad seguidos de tranquilidad.
- **Rugosidad temporal:** La serie muestra autoafinidad, pero no autocorrelación lineal.
- **Multifractalidad:** La estructura estadística cambia con la escala temporal.

7.3 Propiedades estadísticas emergentes

- Distribución leptocúrtica de retornos, incluso cuando el ruido base es gaussiano.
- Escalamiento no lineal de momentos: $\mathbb{E}[|X(t)|^q] \propto t^{\zeta(q)}$ con $\zeta(q)$ no lineal.
- Pérdida de estacionaridad local: los estadísticos dependen del instante y no solo de la ventana temporal.

7.4 Validación empírica con datos reales

Cuando se aplica un análisis de multifractalidad empírica (e.g., MFDFA) sobre índices bursátiles o flujos de órdenes, se observan espectros similares a los generados por M1974d. Esta similitud sugiere que el modelo captura correctamente la heterogeneidad observada en contextos reales.

8.

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath geometry margin=1in

8. Limitaciones teóricas y empíricas del modelo M1974d

8.1 Complejidad en la calibración

El modelo M1974d requiere una selección cuidadosa de parámetros multifractales (como λ, H, σ), cuya estimación empírica es costosa y depende fuertemente de la ventana temporal y el método de análisis.

- No existe un consenso sobre la mejor manera de calibrar espectros multifractales empíricamente.
- La sensibilidad a pequeñas variaciones en los parámetros puede producir trayectorias radicalmente distintas.

8.2 Interpretabilidad limitada

A diferencia de modelos estructurales como GARCH o ARIMA, los parámetros del M1974d tienen interpretación matemática clara pero interpretación económica menos directa. Esto limita su adopción en entornos donde la explicabilidad es clave.

8.3 Dependencia de cascadas sintéticas

El modelo se apoya en una estructura de cascadas multiplicativas que es artificial y no siempre se encuentra directamente observable en los datos reales. Esto puede llevar a sobreajuste o falsos positivos en la detección de multifractalidad.

8.4 Ausencia de saltos y eventos discontinuos

M1974d captura rugosidad y heterogeneidad en la varianza, pero no incorpora de manera nativa eventos abruptos (jumps) como los simulados por subordinadores Poisson. Esta omisión puede limitar su aplicabilidad en contextos de crisis financieras o choques estructurales.

8.5 Costos computacionales

Debido al uso de procesos estocásticos multifractales y operaciones de convolución complejas, la implementación de M1974d en ventanas grandes puede ser costosa y requiere optimización numérica específica.

9.

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath geometry margin=1in

9. Discusión crítica

9.1 ¿Por qué no puede usarse solo en la práctica?

Aunque el modelo M1974d introduce una rugosidad multifractal que refleja la estructura jerárquica de la volatilidad financiera, por sí solo no es capaz de capturar otros fenómenos críticos:

- **No reproduce saltos abruptos**: carece de mecanismos para simular crashes repentinos o choques de mercado.
- **No modela colas pesadas**: si no se combina con distribuciones estables, tiende a producir retornos con colas más ligeras que las observadas empíricamente.
- **Limitada estructura de memoria**: aunque refleja heterogeneidad local, no incorpora explícitamente la dependencia de largo plazo como el M1963J.

9.2 ¿Qué le falta para capturar crashes?

Los crashes financieros son eventos discontinuos, no sólo manifestaciones extremas de varianza local. Para modelarlos, el M1974d necesita integrarse con:

- **Procesos de salto**: como los de M1972b, para incorporar eventos súbitos en la dinámica del precio.
- **Leyes de probabilidad de cola pesada**: como las distribuciones Lévy estables o las t-student.

9.3 ¿Qué mejora cuando se combina con M1963J y M1972b?

La integración estructurada con otros modelos permite capturar los *stylized facts* más importantes de los mercados financieros:

- M1963J aporta colas pesadas y memoria de largo plazo.
- M1972b permite simular eventos discontinuos como crisis financieras.
- M1974d introduce rugosidad multifractal y heterogeneidad local de varianza.

Juntos, estos tres modelos permiten generar trayectorias realistas que contienen:

- Persistencia y clusters de volatilidad.
- Eventos extremos y shocks.
- Escalamiento multifractal observado empíricamente.

10.
[12pt]article [utf8]inputenc amsmath geometry margin=1in

10. Conclusión

10.1 Lo que nos da

El modelo M1974d representa una aportación crucial en la modelación de series financieras no lineales al introducir una **estructura multifractal de la rugosidad**, modulando la varianza local de los retornos a través de cascadas multiplicativas. Sus principales virtudes incluyen:

- **Reproducción empírica de escalamiento multifractal**, clave para entender la dinámica de los mercados reales.
- **Captura de heterogeneidad temporal fina**, reflejando cómo la volatilidad cambia drásticamente entre distintas escalas.
- **Marco flexible para análisis multiescala**, útil en la calibración y simulación de escenarios financieros de corto y largo plazo.

10.2 Lo que no puede dar sin ayuda

A pesar de su potencia descriptiva, el M1974d presenta limitaciones si se usa de forma aislada:

- **No modela colas pesadas por sí mismo**, lo cual restringe su capacidad de capturar eventos extremos.
- **No incluye memoria estructural de largo plazo**, como sí lo hace el modelo M1963J.
- **Carece de mecanismos de salto**, lo cual impide simular shocks o discontinuidades como los del modelo M1972b.

Por estas razones, su mayor potencial se alcanza cuando se implementa en combinación con otros modelos "M" de Mandelbrot. En conjunto, forman una arquitectura robusta para simular series financieras que respetan los *stylized facts* del mercado.

11.

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath, amssymb graphicx booktabs geometry margin=1in

11. Anexos

11.1 Tabla de parámetros simulados

Parámetro	**Valor típico**	**Interpretación**
h_0	0.5	Valor base del exponente de Hurst
λ	1.5	Intensidad de la cascada multiplicativa
L	5	Número de niveles de la jerarquía
n	2000	Número de observaciones simuladas

Table 1: Parámetros típicos sugeridos para simular el modelo M1974d

11.2 Fórmulas ampliadas

- Exponente local de Hurst modulado:

$$H_t = h_0 + \lambda \cdot \omega_t$$

  donde ω_t es un proceso lognormal o ruido multifractal.

- Escala del proceso en función del tiempo:

$$X_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2), \quad \text{con } \sigma_t^2 = f(H_t)$$

  donde $f(\cdot)$ puede ser una función exponencial o basada en cascadas binomiales.

- Construcción jerárquica:

$$\sigma_t^2 = \prod_{j=1}^{L} W_j(t)$$

con $W_j(t)$ pesos aleatorios de multiplicación (e.g., lognormales).