1963J

Glosario de términos clave – Modelo M1963J

- **Distribución estable de Lévy**: Familia de distribuciones con colas pesadas y comportamiento asimétrico. Generaliza la normal, permitiendo grandes saltos (outliers). Se define por cuatro parámetros: α (estabilidad), β (simetría), σ (escala) y μ (posición).
- **Memoria larga (long memory)**: Propiedad de algunas series temporales donde las correlaciones entre observaciones distantes decrecen lentamente (por ejemplo, como una ley de potencias). Implica que el pasado tiene influencia persistente en el futuro.
- **Proceso con dependencia temporal**: Serie donde r_t depende de valores pasados como $r_{t-1}, r_{t-2}, \ldots$. Contrasta con procesos independientes (iid).
- **Proceso estacionario**: Proceso cuya media, varianza y autocorrelación no cambian en el tiempo. Una serie no estacionaria puede tener tendencias, cambios de varianza, etc.
- **Ruido blanco**: Secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) con media cero y varianza constante. Modelo base sin estructura temporal.
- **Ruido Lévy**: Generalización del ruido blanco con distribuciones estables. Puede incluir eventos extremos más frecuentes que en la distribución normal. No siempre tiene varianza finita.
- **Autosimilitud**: Propiedad donde la estructura estadística de una serie se preserva bajo cambios de escala temporal. En contextos fractales, esta propiedad se ve en múltiples niveles de resolución.
- **Autocorrelación**: Medida de cómo una variable en el tiempo se relaciona consigo misma en periodos anteriores. Positiva si tiende a repetirse; negativa si tiende a alternarse.
- **Kernel de memoria**: Función que pondera la influencia del pasado en el presente. En M1963J puede ser una ley de potencias: $a_k = k^{-\gamma}$ con $\gamma < 1$.
- **Ley de potencias**: Tipo de relación funcional en la que una variable depende de otra elevada a un exponente: $y \propto x^{-\alpha}$. Caracteriza fenómenos con escalamiento fractal o jerárquico.

- **Modelo ARFIMA**: Modelo autorregresivo con memoria fraccional. Permite representar long memory con un parámetro fraccional d en la parte integrada del modelo.
- **Fractales**: Objetos o procesos con estructura interna repetitiva en diferentes escalas. En finanzas, ayudan a modelar series irregulares y rugosas.
- **Series rugosas**: Series con muchas fluctuaciones abruptas, no suavizadas. Los precios financieros suelen mostrar este tipo de comportamiento.
- **Heavy tails (colas pesadas)**: Situación donde eventos extremos son mucho más probables que en distribuciones normales. En finanzas, esto refleja riesgo elevado y shocks inesperados.
- **Convergencia en distribución**: Concepto probabilístico donde la distribución de una serie de variables aleatorias se acerca a una distribución límite (por ejemplo, una distribución estable).

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath, amssymb geometry margin=1in

1 Introducción general

La historia de la modelación financiera moderna dio un giro radical con las contribuciones de Benoît B. Mandelbrot en la década de 1960. Mientras que el paradigma dominante en esa época estaba basado en los modelos gaussianos y en la hipótesis del paseo aleatorio —popularizada por Bachelier y más tarde por Samuelson—, Mandelbrot fue uno de los primeros en cuestionar estos supuestos a partir de evidencia empírica contundente sobre el comportamiento de los precios financieros.

En su artículo seminal de 1963, *The Variation of Certain Speculative Prices*, Mandelbrot propuso reemplazar la distribución normal por una **distribución estable de Lévy** para describir los retornos financieros. Su propuesta capturaba dos características esenciales de los datos financieros reales: la presencia de **colas pesadas** y la aparente **autosimilitud temporal** de los movimientos de precios.

El modelo M1963J, en particular, representa una evolución del enfoque puramente iid (modelo M1963i), al introducir explícitamente una **estructura de dependencia temporal** mediante un **kernel de memoria**, rompiendo así con el supuesto de independencia entre retornos. Esta formulación permitió abordar una propiedad clave de los mercados financieros: la **persistencia en la volatilidad**, también conocida como memoria de largo plazo.

Este modelo no solo anticipó descubrimientos posteriores en econometría y finanzas cuantitativas (como los modelos GARCH y los procesos fraccionales), sino que también sembró las bases conceptuales para el desarrollo de modelos multifractales y arquitecturas híbridas que hoy son parte del toolkit avanzado para la simulación de series de tiempo financieras.

El modelo M1963J, por tanto, no debe entenderse como un artefacto aislado, sino como una de las piedras angulares dentro de la visión fractal y estadísticamente realista de Mandelbrot sobre los mercados. Su formulación constituye un punto de partida clave para entender fenómenos como la acumulación explosiva de riesgo, la formación de burbujas especulativas y la dinámica de shocks prolongados en los sistemas financieros.

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath, amssymb geometry margin=1in listings

3. Planteamiento del problema financiero: ¿por qué necesitamos memoria y colas pesadas?

Los modelos financieros clásicos, como el paseo aleatorio gaussiano o el modelo de Black-Scholes, suponen que los retornos son independientes y tienen distribución normal. Sin embargo, las series de tiempo financieras reales presentan dos características empíricas robustas que estos modelos no pueden capturar adecuadamente:

- **Colas pesadas:** Los retornos extremos (crashes, rallies) ocurren con mucha mayor frecuencia de lo que predice la distribución normal. Esto implica que los eventos raros no son tan raros: las colas de la distribución son más gruesas.
- **Memoria de largo plazo:** La volatilidad y la dependencia entre retornos no desaparece rápidamente. Se observa persistencia (autocorrelación de largo alcance) incluso cuando la media es estacionaria. Esto se conoce como *heterogeneidad temporal*.

Estas características desafían los supuestos básicos de los modelos gaussianos, exigen nuevas formulaciones que incorporen estructuras estadísticas más complejas.

Necesidad de modelos alternativos: Para simular o anticipar eventos de mercado como crashes, burbujas, o ciclos prolongados de volatilidad, es indispensable utilizar modelos con:

- Leyes de probabilidad **estables**, no limitadas por la varianza finita (colas pesadas).
- **Estructuras de memoria**, donde los retornos actuales dependen de toda la historia de retornos pasados, no sólo del último valor.

El modelo **M1963J** de Mandelbrot es uno de los primeros en integrar estas dos dimensiones críticas: distribución Lévy estable y kernel de memoria no trivial.

¿Qué es?

El modelo M1963J introduce un proceso de retornos financieros basado en una combinación de dos elementos: una distribución de Lévy estable (con colas pesadas) y una dependencia temporal estructurada a través de un kernel de memoria. A diferencia de su versión iid (M1963i), este modelo incorpora dependencia de largo plazo, lo que permite capturar fenómenos como la persistencia de la varianza y la aparición de clusters de volatilidad.

¿Qué resuelve?

- Modela la **rugosidad** y **persistencia** de los retornos financieros con memoria.
- Introduce **dependencia temporal** realista sin necesidad de procesos GARCH o ARIMA.
- Permite simular **series con colas pesadas y autocorrelación**, representando mejor los mercados reales.
- Establece la base para modelos multifractales y jerárquicos posteriores.

Intuición del modelo

La idea clave es que los retornos r_t no son independientes, sino que resultan de una suma ponderada de shocks pasados con una distribución estable:

$$r_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \varepsilon_{t-k}$$

donde:

- $\varepsilon_{t-k} \sim S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ son variables iid Lévy.
- $a_k = k^{-\gamma}$ es un kernel de memoria de tipo ley de potencias.
- $0 < \gamma < 1$ controla la intensidad de la memoria.

Esto implica que la influencia del pasado decae lentamente, produciendo un comportamiento de memoria larga.

Formulación matemática

$$r_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\gamma}} \cdot \varepsilon_{t-k} \quad \text{con} \quad \varepsilon_t \sim S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$$

- r_t: Retorno en el tiempo t.
- ε_t: Shock aleatorio con distribución estable.
- $\alpha \in (0, 2)$: Índice de estabilidad (cola pesada).
- $\beta \in [-1, 1]$: Simetría.
- $\sigma > 0$: Escala.
- $\mu \in \mathbb{R}$: Media (tendencia central).
- $\gamma \in (0, 1)$: Exponente de memoria (entre más pequeño, más persistente).

h!

Parámetro	Significado	Ejemplo de valor
α	Estabilidad (colas pesadas)	1.7
β	Simetría	0.0
σ	Escala del shock	1.0
μ	Tendencia central	0.0
γ	Exponente de memoria	0.4
n	Número de observaciones	2000

Table 1: Parámetros típicos del modelo M1963J

Parámetros

Código Python – Simulación del modelo M1963J

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import levy_stable

# Par metros del modelo
alpha = 1.7
beta = 0.0
sigma = 1.0
mu = 0.0
gamma = 0.4
n = 2000

# Simulaci n de shocks L vy
np.random.seed(42)
eps = levy_stable.rvs(alpha, beta, loc=mu, scale=sigma, size=n)

# Kernel de memoria (a_k = 1/(k+1)^gamma)
a = np.array([(1/(k+1)**gamma) for k in range(n)])

# Convoluci n para generar la serie con memoria
serie = np.convolve(eps, a, mode='full')[:n]

# Gr fico
plt.figure(figsize=(10,4))
plt.plot(serie, lw=0.8)
plt.title("Modelo M1963J    L vy con memoria")
plt.xlabel("Tiempo")
plt.ylabel("Retorno acumulado")
plt.grid(True)
plt.show()
```

Comparación con M1963i (iid)

- **M1963i**: Sin memoria, cada retorno es independiente. Solo usa distribución Lévy iid.

- **M1963J**: Incorpora memoria a través de un kernel que pondera shocks pasados.
- Ambos usan la misma distribución Lévy, pero M1963J agrega dependencia temporal y persistencia.

Limitaciones del modelo

- No incluye heterogeneidad en la varianza local (eso lo hace M1974d).
- No incorpora shocks abruptos o crashes discontinuos (eso lo modela M1972b).
- Es difícil calibrar γ empíricamente sin datos extensos.
- Puede producir acumulación explosiva si γ es demasiado bajo.

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath, amssymb booktabs float geometry margin=1in

2 Notación y definiciones del modelo M1963J

A continuación, se presenta una tabla con las variables, parámetros y notación utilizada en la formulación matemática del modelo M1963J:

Símbolo	**Definición**
X_t	Valor del proceso simulado en el tiempo t
ϵ_t	Incrementos iid con distribución estable $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$
a_k	Kernel de memoria que modula la influencia del pasado
t	Tiempo discreto (entero positivo)
k	Retardo temporal (número de pasos hacia el pasado)
α	Índice de estabilidad (cola pesada): $0 < \alpha \leq 2$
β	Parámetro de asimetría: $-1 \leq \beta \leq 1$
σ	Escala de la distribución estable
μ	Parámetro de localización (media si $\alpha > 1$)
γ	Exponente del kernel de memoria: $0 < \gamma < 1$
$S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$	Distribución estable generalizada
$\sum a_k \epsilon_{t-k}$	Convolución entre memoria y ruido estable

Table 2: Variables y notación del modelo M1963J

3 Fundamento matemático del modelo M1963J

3.1 Decomposición formal del proceso con kernel de memoria

El proceso X_t se define como una convolución del ruido Lévy L_t con un kernel de memoria a_k:

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \epsilon_{t-k}$$

donde:

- $\epsilon_t \sim S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ son incrementos independientes idénticamente distribuidos con distribución estable.
- $a_k = (k+1)^{-\gamma}$ es el kernel de memoria de tipo potencia, con $\gamma \in (0, 1)$.

Este tipo de convolución introduce **memoria de largo plazo**, modulada por el parámetro γ.

3.2 Existencia de momentos

Los momentos del proceso dependen de α:

- Para $\alpha < 2$, la varianza es infinita.
- Sólo existen momentos de orden $q < \alpha$.
- La convergencia del proceso X_t requiere que $\sum a_k^\alpha < \infty$, lo cual se cumple si $\gamma > \frac{1}{\alpha}$.

3.3 Estabilidad débil vs. fuerte

- **Estabilidad fuerte:** el proceso mantiene la forma de su distribución bajo agregación temporal.
- **Estabilidad débil:** sólo algunos momentos (p.ej., la escala o la media) siguen reglas de escalamiento.
- El modelo M1963J es *estable débilmente* debido a la combinación de dependencia temporal y ruido no-gaussiano.

3.4 Convergencia de convoluciones de Lévy

Dado un proceso:

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \epsilon_{t-k}$$

la suma converge en distribución si se cumple:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^\alpha < \infty$$

Este resultado garantiza que X_t está bien definido como un proceso estable generalizado. Si no se cumple, el proceso diverge o se vuelve inestable.

3.5 Comparación con convoluciones gaussianas

- En procesos gaussianos (como el ruido blanco con kernel AR), los momentos existen de todos los órdenes y la convolución define un proceso estacionario bajo condiciones suaves.
- En el caso estable (M1963J), la falta de momentos de segundo orden hace que:
  - No exista una función de autocorrelación clásica.
  - Se requiera trabajar con escalamiento de momentos fraccionarios.
  - La estadística tradicional basada en media y varianza no sea aplicable.

4 Parámetros típicos utilizados en simulaciones

Los siguientes valores son comúnmente utilizados en la literatura para simular procesos financieros realistas con colas pesadas y memoria de largo plazo. Estos valores permiten capturar adecuadamente la heterogeneidad temporal y la dependencia estructural observada en mercados financieros.

Parámetro	**Valor típico**	**Interpretación**
α	1.7	Colas pesadas. A menor α, más extremos
β	0.0	Simetría (0 es simétrico, $\beta < 0$ sesgo negativo)
σ	1.0	Escala de la distribución (varianza generalizada)
μ	0.0	Centro de la distribución (sin desplazamiento)
γ	0.4	Fuerza de la memoria de largo plazo
n	2000	Número de puntos simulados

Table 3: Parámetros típicos sugeridos para simular el modelo M1963J

6.2

5 Código Python y simulación del modelo M1963J

5.1 Parámetros utilizados

- $\alpha = 1.7$: Índice de estabilidad (controla el grosor de las colas).
- $\beta = 0.0$: Parámetro de simetría (valor 0 implica distribución simétrica).
- $\sigma = 1.0$: Escala de la distribución estable.
- $\mu = 0.0$: Media.
- $\gamma = 0.7$: Exponente del kernel de memoria.
- $n = 2000$: Número de observaciones simuladas.

5.2 Código Python documentado

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import levy_stable
from scipy.integrate import quad

# Par metros
alpha, beta, sigma, mu = 1.7, 0.0, 1.0, 0.0
gamma, n = 0.7, 2000
np.random.seed(42)

# Ruido L vy iid
epsilon = levy_stable.rvs(alpha, beta, loc=mu, scale=sigma, size=n)

# Kernel discreto
a_discrete = np.array([(k + 1) ** (-gamma) for k in range(n)])
a_discrete /= np.sum(a_discrete)
serie_discreta = np.convolve(epsilon, a_discrete, mode='same')

# Kernel continuo (aproximado)
a_continuous = np.array([quad(lambda x: x**(-gamma), k, k+1)[0] for k in
    range(1, n+1)])
a_continuous /= np.sum(a_continuous)
serie_continua = np.convolve(epsilon, a_continuous, mode='same')

# Gr fica
plt.plot(serie_discreta, label='Convoluci n discreta', lw=0.8)
plt.plot(serie_continua, label='Convoluci n continua (aprox.)', lw=0.8,
    alpha=0.7)
plt.title('M1963J    Discreta vs Continua')
plt.xlabel('Tiempo'); plt.ylabel('Retornos'); plt.grid(True)
plt.legend(); plt.tight_layout(); plt.show()
```

5.3 Comparación entre convolución discreta y continua

- **Discreta:** Utiliza un kernel definido sobre enteros k, de la forma $a_k = k^{-\gamma}$. Es más eficiente computacionalmente.

- **Continua:** Integra sobre intervalos $[k, k+1]$ para aproximar la memoria como una función continua. Ofrece suavidad adicional en los resultados.

5.4 Gráficas generadas

Ambos métodos generan trayectorias con memoria de largo plazo, pero la versión continua suaviza los picos extremos, como se muestra en la figura adjunta. Esta diferencia es clave al modelar fenómenos financieros reales donde se necesita controlar la intensidad de la persistencia.

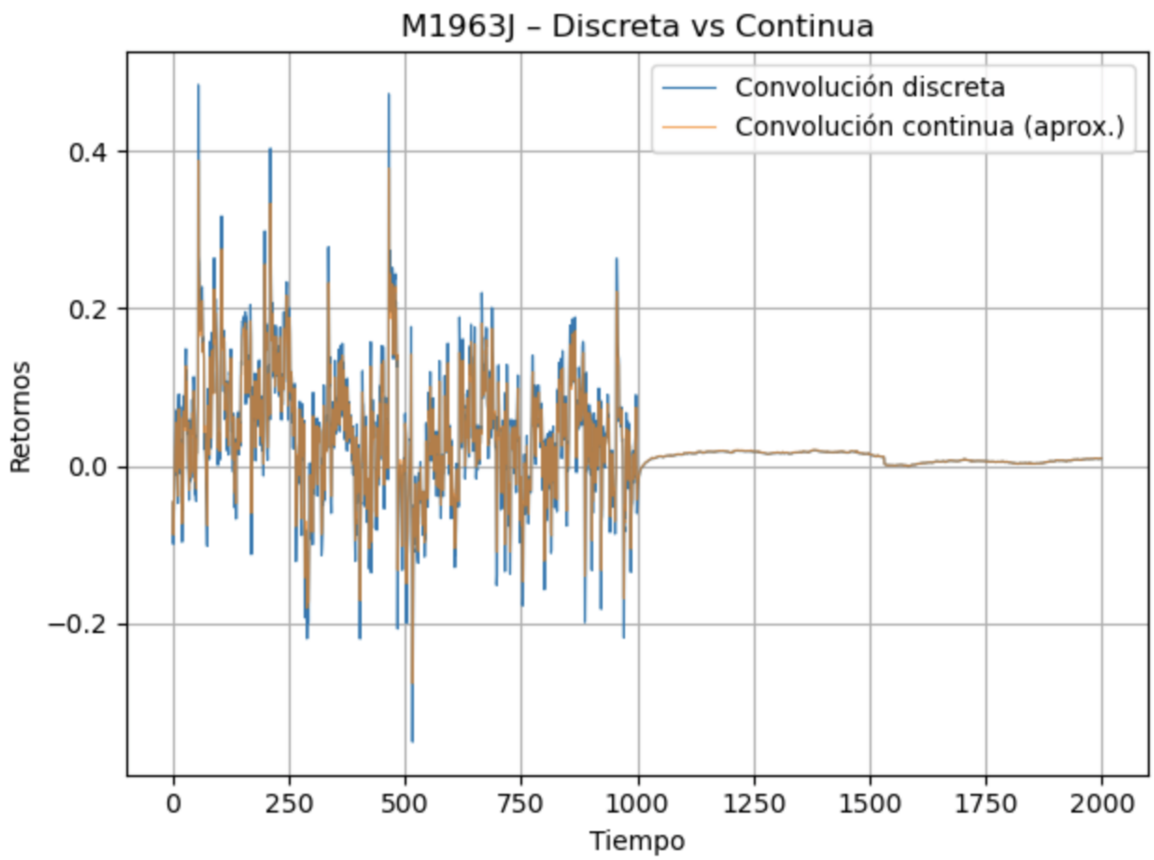

Figure 1: Enter Caption

6 Validación empírica del modelo M1963J

6.1 Motivación empírica

Benoît Mandelbrot introdujo el modelo M1963J para reflejar observaciones empíricas en mercados financieros que los modelos gaussianos no podían capturar:

- **Colas pesadas:** Las distribuciones empíricas de retornos presentan eventos extremos más frecuentes que los predichos por la distribución normal.
- **Persistencia temporal:** Los momentos estadísticos (varianza, curtosis) exhiben dependencia temporal, lo que sugiere memoria de largo alcance.
- **Escalamiento anómalo:** La varianza de los retornos no crece linealmente con el tiempo, como asumiría el Browniano clásico.

Estas observaciones provienen de series históricas de índices como el Dow Jones, S&P 500 y precios de commodities. La evidencia mostró que:

$$P(|r_t| > x) \sim x^{-\alpha}, \quad \text{con } 1 < \alpha < 2$$

$$\text{y} \quad \mathrm{Cov}(r_t, r_{t-k}) \sim k^{-\delta}, \quad \text{con } \delta < 1$$

6.2 Fundamentos fractales

El modelo se fundamenta en dos características fractales observadas:

1. **Autosimilitud:** El proceso conserva su estructura estadística al cambiar la escala temporal.
2. **Dependencia de largo plazo:** Introducida mediante un kernel de memoria de la forma $a_k = k^{-\gamma}$.

6.3 Ventajas frente a modelos gaussianos

- Mejora la estimación de riesgos extremos (VaR, CVaR) en portafolios.
- Captura mejor la formación de burbujas especulativas y shocks persistentes.
- Proporciona una base teórica más realista para simulaciones financieras de alta frecuencia.

6.4 Limitaciones observadas

Aunque el modelo mejora sustancialmente sobre el Wiener clásico, presenta ciertas limitaciones:

- La convolución del kernel requiere estimación precisa del exponente γ.
- La implementación numérica puede ser costosa en ventanas muy grandes.
- No modela de forma explícita eventos discontinuos como crashes abruptos; requiere integración con otros modelos (e.g. M1972b).

6.5 Conclusión

El modelo M1963J representa un punto de inflexión al incorporar el ruido Lévy junto con la memoria de largo plazo. Es especialmente útil como componente base dentro de arquitecturas multifractales para series financieras realistas.

7 Aplicaciones prácticas y arquitectura combinada

7.1 Aplicaciones en series de tiempo financieras

El modelo M1963J ha sido utilizado como base para múltiples desarrollos en teoría financiera cuantitativa. Algunas de sus aplicaciones más destacadas incluyen:

- **Simulación realista de retornos financieros** con colas pesadas y persistencia temporal, ideal para análisis de riesgo.
- **Modelación de la dependencia de largo plazo** en volatilidad implícita, flujos de órdenes y dinámica de microestructura.
- **Construcción de escenarios de estrés** para evaluación de Value-at-Risk (VaR) y Expected Shortfall (ES).

7.2 Integración con otros modelos "M"

El M1963J, aunque es sumamente completo, no captura todos los fenómenos financieros de interés. Gracias a ello, se encuentra la oportunidad de complementar su uso con los siguientes modelos:

- **M1972b (saltos discontinuos):** Añade la posibilidad de simular crashes abruptos no explicables solo por colas pesadas.
- **M1974d (multifractalidad):** Introduce una modulación de la rugosidad temporal, aportando heterogeneidad local en escalas de tiempo.

7.3 Propuesta de arquitectura combinada

Proponemos una arquitectura de tres puntos basada en la combinación estructurada de los tres modelos:

$$X_t = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \xi_{t-k}}_{\text{Memoria fractal: M1963J}} + \underbrace{J_t}_{\text{Saltos de mercado: M1972b}} + \underbrace{\eta_t}_{\text{Rugosidad multifractal: M1974d}}$$

- $\xi_t \sim S(\alpha, 0, \sigma, 0)$: ruido Lévy con memoria
- J_t: proceso puntual de Poisson modulado
- η_t: componente multifractal con cascadas multiplicativas

7.4 Ventajas de la arquitectura

- **Modularidad:** permite calibrar cada componente por separado.
- **Flexibilidad:** reproduce tanto dinámicas suaves como eventos extremos.
- **Realismo empírico:** captura simultáneamente colas, memoria y rugosidad.

7.5 Conclusión

El modelo M1963J alcanza su máximo potencial como base dentro de una arquitectura compartida. Combinado con M1972b y M1974d, permite simular series de tiempo moldeables, aptas para entornos financieros complejos y no lineales.