Modelo 1972b

Glosario de términos clave – Modelo M1972b (saltos discontinuos en series financieras)

- X_t – **Proceso subordinado:** Valor del proceso simulado en el tiempo t, definido por la suma de los tamaños de salto ocurridos hasta ese momento.
- J_t – **Proceso de saltos:** Componente que introduce discontinuidades abruptas en el modelo, responsable de los cambios repentinos.
- N_t – **Proceso de Poisson:** Proceso estocástico que modela la cantidad de eventos de salto hasta el tiempo t. Su intensidad λ controla la frecuencia de saltos.
- Y_k – **Tamaño del salto:** Valor de magnitud del k-ésimo salto, generado según una distribución estable generalizada $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$.
- T_k – **Tiempo del salto:** Instante en el que ocurre el k-ésimo salto. Corresponde a los tiempos de llegada del proceso de Poisson.
- λ – **Intensidad:** Parámetro del proceso de Poisson que indica el número esperado de eventos por unidad de tiempo.
- α – **Estabilidad:** Controla el grosor de las colas del ruido subordinado. A menor α, mayor probabilidad de saltos extremos.
- β – **Simetría:** Indica si los saltos son simétricos ($\beta = 0$), sesgados hacia arriba ($\beta > 0$), o hacia abajo ($\beta < 0$).
- σ – **Escala:** Controla la dispersión de los tamaños de salto.
- μ – **Centro:** Desplazamiento de la distribución estable del ruido subordinado.
- $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ – **Distribución estable:** Familia de distribuciones con colas pesadas que generaliza la distribución normal.
- L_t – **Ruido de Lévy:** Proceso con incrementos estables que gobierna los tamaños de salto Y_k.
- $X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ – **Suma subordinada:** Definición formal del proceso: suma de todos los saltos ocurridos hasta t.

- **Subordinación:** Técnica mediante la cual un proceso aleatorio controla el tiempo operativo de otro. En este caso, el proceso de saltos controla cuándo ocurren los cambios en el valor del proceso.

2.

Introducción general: contexto histórico del modelo M1972b

El modelo M1972b fue propuesto por Benoît Mandelbrot como una evolución de su marco conceptual iniciado en los años 60, cuando criticó abiertamente el uso exclusivo de procesos gaussianos para modelar precios financieros. En sus primeros trabajos, introdujo el uso de distribuciones estables con colas pesadas para describir los retornos financieros (M1963i y M1963J).

Sin embargo, durante la década de 1970, Mandelbrot reconoció que los modelos de ruido Lévy con memoria eran insuficientes para explicar ciertos fenómenos más abruptos observados en los mercados, como caídas repentinas de precios, discontinuidades y eventos extremos no justificados únicamente por colas pesadas. Esto lo llevó a proponer una formulación basada en procesos de saltos: el modelo M1972b.

Este modelo representa una de las primeras aproximaciones formales al uso de procesos de Poisson subordinados para generar shocks discontinuos en las series temporales. En lugar de asumir continuidad en los movimientos del mercado, Mandelbrot incorporó explícitamente saltos aleatorios con distribuciones de tamaño controladas por procesos no gaussianos.

El M1972b marca así una transición en su obra desde la modelación de memoria e inestabilidad hacia una arquitectura más amplia de complejidad financiera, en la cual los saltos, la multifractalidad y la dependencia de largo plazo se integran como fenómenos complementarios.

3.

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath geometry margin=1in

Planteamiento del problema financiero: ¿por qué necesitamos saltos y subordinación?

Los modelos clásicos de precios de activos, como el movimiento Browniano de Bachelier o el modelo de Black-Scholes, suponen una evolución continua y suave del mercado. Estos modelos ignoran dos elementos cruciales que se presentan persistentemente en las series financieras reales:

- **Eventos discontinuos:** Los mercados financieros sufren caídas abruptas, suspensiones, quiebras y crashes que no pueden modelarse adecuadamente con trayectorias continuas. Estos eventos generan rupturas estructurales y gaps que los modelos gaussianos no predicen.

- **Tiempo operativo irregular:** La actividad del mercado no fluye de forma homogénea. Hay periodos de alta intensidad seguidos por calma. El tiempo de negociación efectivo no es lineal, sino subordinado a un reloj operativo aleatorio.

Necesidad de procesos con saltos:

Modelar estos fenómenos requiere el uso de procesos de salto, como los subordinadores de Lévy, que permiten incorporar interrupciones y acumulaciones súbitas. A través de la subordinación estocástica, se permite que la serie financiera evolucione en un tiempo interno que se distorsiona en función de la intensidad del mercado.

- En lugar de describir la trayectoria con $X(t)$, se modela como $X(T(t))$, donde $T(t)$ es un proceso creciente aleatorio que representa el tiempo de mercado.
- Esta técnica permite generar movimientos bruscos en intervalos temporales cortos, incluso cuando X es continuo en su propio tiempo.

Conclusión:

El modelo M1972b surge como respuesta a estas deficiencias. Permite una representación más fiel del comportamiento real del mercado, integrando una fuente de discontinuidad controlada y un mecanismo para romper la homogeneidad temporal, dos características fundamentales ausentes en la teoría clásica.

4.

[12pt]article [utf8]inputenc amsmath amssymb geometry margin=1in

Modelo M1972b

¿Qué es?

El modelo M1972b fue introducido por Benoît Mandelbrot en 1972 como una evolución de sus modelos anteriores con ruido Lévy, incorporando explícitamente la posibilidad de eventos de salto. En lugar de asumir un tiempo uniforme, propone que el proceso de precios se rige por un *reloj aleatorio* que acumula el tiempo de mercado de forma no lineal y con posibles discontinuidades.

Formalmente, el precio logarítmico se modela como:

$$X_t = L_{T(t)}$$

donde:

- L_t es un proceso Lévy (estacionario e independiente de incrementos, con colas pesadas).
- $T(t)$ es un proceso creciente estocástico (subordinador), que representa el tiempo operativo acumulado hasta el tiempo físico t.

¿Qué resuelve?

- Introduce **saltos abruptos** en la dinámica del precio, modelando crashes financieros repentinos.

- Rompe la suposición de **tiempo homogéneo**, permitiendo que la velocidad del mercado sea aleatoria y autocorrelacionada.
- Simula trayectorias **discontinuas** y asimétricas, coherentes con fenómenos empíricos como caídas repentinas, gaps de apertura o circuit breakers.

Intuición

Imagina que el precio no evoluciona en tiempo calendario, sino en un tiempo interno del mercado, el cual se acelera o detiene según la intensidad de la actividad financiera. En momentos de alta tensión, este reloj salta de forma abrupta (representando un crash), mientras que en periodos tranquilos apenas avanza. Esta idea se formaliza como la composición:

$$X_t = L_{T(t)}$$

donde $T(t)$ puede ser un subordinador gamma, una suma de procesos Poisson, o incluso un subordinador multifractal.

Diferencia con M1963J

- **M1963J:** Introduce memoria de largo plazo con dependencia temporal suave mediante un kernel. No permite discontinuidades explícitas en la trayectoria.
- **M1972b:** Introduce *discontinuidades* reales mediante subordinación estocástica. El tiempo de mercado es aleatorio y permite jumps.
- **Complementariedad:** Mientras M1963J modela la persistencia de varianza, M1972b modela la aparición repentina de eventos extremos.

5.
[12pt]article [utf8]inputenc amsmath, amssymb, amsfonts geometry margin=1in

Fundamento matemático completo del modelo M1972b

Decomposición formal del proceso con subordinador

El modelo M1972b consiste en un proceso compuesto donde el precio (o log-precio) sigue una trayectoria gobernada por un subordinador estocástico:

$$X_t = L_{T(t)}$$

Donde:

- L_t es un **proceso de Lévy** con colas pesadas (ej. movimiento Lévy estable).
- $T(t)$ es un **subordinador creciente**, es decir, un proceso de incrementos independientes, no decreciente, que representa el tiempo operativo.

Existencia de momentos

Dado que X_t es una subordinación de L_t por $T(t)$, la existencia de momentos depende de:

- La existencia de momentos de L_t (que dependen de su α, típicamente $\alpha < 2$ implica varianza infinita).
- La regularidad del subordinador $T(t)$: subordinadores como el Gamma o el Inverso Gaussiano pueden generar acumulación explosiva.

Estabilidad débil vs fuerte

- **Estabilidad fuerte:** el proceso subordinado mantiene la misma ley de probabilidad a escala temporal ampliada. Ej: $X_{ct} \stackrel{d}{=} c^H X_t$.
- **Estabilidad débil:** solo algunas propiedades (como colas o momentos parciales) conservan sus formas.
- El modelo M1972b posee **estabilidad débil**, ya que el reloj estocástico introduce asimetría en la escalabilidad temporal.

Convergencia y existencia del proceso

La subordinación de un proceso Lévy L_t por un subordinador $T(t)$ genera un nuevo proceso bien definido si:

- $T(t)$ es casi seguramente continuo y creciente.
- Los caminos de $T(t)$ son de variación acotada.
- Existe una **densidad de tiempo local** que permita definir cambios de escala controlados.

Comparación con convoluciones gaussianas

- Los procesos gaussianos usan tiempo lineal: $X_t = W_t$ (movimiento browniano).
- En el modelo M1972b, el tiempo es aleatorio: $X_t = L_{T(t)}$.
- Esto permite modelar **eventos explosivos** y caídas abruptas, imposibles con convoluciones suaves tipo AR o GARCH.

[12pt]article [utf8]inputenc [T1]fontenc geometry xcolor listings inconsolata margin=1in Simulación del modelo M1972b

Simulación del modelo M1972b

Código Python documentado

El siguiente código simula una serie de tiempo con eventos de saltos discontinuos modelados mediante un proceso de Poisson. A diferencia del modelo M1963J, aquí no hay convolución con kernel de memoria, sino que se generan shocks de gran magnitud en tiempos aleatorios.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Par metros
n = 2000                      # N mero de observaciones
jump_prob = 0.01              # Probabilidad de salto por unidad de tiempo
jump_magnitude = 15           # Tama o de salto
noise_scale = 1.0             # Escala del ruido normal

# Semilla para reproducibilidad
np.random.seed(42)

# Serie base: ruido blanco normal
returns = np.random.normal(loc=0, scale=noise_scale, size=n)

# Generar saltos tipo Poisson
jumps = np.random.binomial(1, jump_prob, size=n) * (
    np.random.choice([-1, 1], size=n) * jump_magnitude
)

# Incluir los saltos en la serie
returns_with_jumps = returns + jumps

# Gr fica
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(returns_with_jumps, label='Serie con saltos discontinuos', lw
    =0.8)
plt.title('Simulaci n del modelo M1972b')
plt.xlabel('Tiempo')
plt.ylabel('Retornos simulados')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Diferencias entre M1972b y M1963J

- **M1972b** introduce eventos discontinuos mediante un proceso puntual (saltos tipo Poisson). Es ideal para simular **crashes** financieros repentinos.
- **M1963J** modela memoria de largo plazo mediante un kernel que modula ruido Lévy. Es ideal para simular **persistencia y clusters** de volatilidad.

La figura muestra cómo el modelo genera una serie con retornos típicamente suaves, interrumpidos por cambios bruscos generados por los saltos, lo cual replica fenómenos como crashes, shocks geopolíticos o eventos de liquidez extrema.

7.

1 Análisis empírico del modelo M1972b

1.1 ¿Qué tipo de comportamiento reproduce?

El modelo M1972b está diseñado para capturar eventos financieros caracterizados por cambios abruptos y discontinuos en los precios. Reproduce trayectorias con las siguientes propiedades:

- **Saltos repentinos de gran magnitud**, que aparecen en tiempos aleatorios, imitando crisis, crashes o anuncios inesperados.
- **Segmentos de relativa calma**, separados por periodos de actividad extrema.
- **No estacionariedad en la varianza**: los momentos de segundo orden se ven distorsionados por la presencia de eventos extremos.

1.2 Stylized facts que cumple

Aunque no reproduce todos los stylized facts financieros, el modelo M1972b cumple varios patrones empíricos relevantes:

- **Colas pesadas**: las distribuciones muestrales presentan curtosis elevada.
- **Clustering de eventos extremos**: los saltos pueden provocar agrupamientos visuales de picos inusuales.
- **Asimetría potencial**: si se controla el signo de los saltos, puede inducirse sesgo hacia caídas.

1.3 Propiedades estadísticas emergentes

A partir de múltiples simulaciones y comparaciones con series históricas reales, se ha observado que:

- La función de autocorrelación de retornos es cercana a cero, pero la autocorrelación de potencias (volatilidad) puede elevarse si los saltos son frecuentes.
- La distribución de retornos tiene colas más gruesas que una normal, con un índice de tail exponent más bajo.
- La varianza empírica de la serie fluctúa significativamente en función de la frecuencia y magnitud de los saltos.

1.4 Comentario final

Este modelo, por sí solo, no explica la dependencia temporal suave o la estructura multifractal, pero sí aporta una capa crucial de realismo: la posibilidad de incorporar **rupturas estructurales** sin necesidad de redefinir el modelo base.

8.

2 Limitaciones teóricas y empíricas del modelo M1972b

A pesar de su capacidad para introducir saltos bruscos en series financieras, el modelo M1972b presenta varias limitaciones que deben ser reconocidas antes de su aplicación práctica o empírica. Estas limitaciones justifican su integración con otros modelos "M" de Mandelbrot.

2.1 Falta de heterogeneidad local

El modelo M1972b introduce discontinuidades mediante un proceso de saltos (p. ej., subordinación de Poisson o compuestos), pero:

- No modula la varianza o intensidad de los retornos entre un salto y otro.
- Asume una dinámica homogénea fuera de los eventos extremos.
- No explica los clusters de volatilidad ni la rugosidad típica en escalas micro.

2.2 Dificultad de calibración empírica

- La estimación del proceso subordinador (frecuencia e intensidad de saltos) requiere ventanas de tiempo extensas y limpias.
- No siempre es evidente qué constituye un "salto" frente a una fluctuación extrema natural.
- Las tasas de Poisson u otros subordinadores deben calibrarse fuera del dominio gaussiano, lo cual implica supuestos adicionales.

2.3 Explosiones de acumulación y comportamiento explosivo

- Si los parámetros del subordinador son mal calibrados (alta intensidad o amplitud de salto), el proceso puede divergir numéricamente en simulaciones.
- Esto produce trayectorias poco realistas o incompatibles con la microestructura de precios reales.

2.4 Resumen de limitaciones

- No explica rugosidad ni escalamiento multifractal.
- No introduce memoria estadística entre retornos.
- Es sensible a la parametrización del subordinador.

Estas limitaciones refuerzan el argumento de que el M1972b, aunque poderoso para modelar eventos abruptos, no puede ser usado de forma aislada para modelar series de tiempo financieras de manera robusta. Su fortaleza radica en su uso combinado con modelos que sí incorporan rugosidad (M1974d) y memoria (M1963J).

9.

3 Discusión crítica: ¿puede el modelo M1972b usarse de forma aislada?

El modelo M1972b representa una innovación clave al permitir la incorporación explícita de saltos en series de tiempo financieras, modelando discontinuidades que los procesos gaussianos y de memoria continua no pueden capturar. Sin embargo, su utilidad empírica y teórica como modelo independiente es limitada por varios factores estructurales.

3.1 ¿Por qué no puede usarse solo en la práctica?

- **Falta de dependencia temporal:** No incorpora autocorrelación o persistencia, lo que lo hace inadecuado para reproducir estructuras de memoria observadas en datos reales.
- **Ausencia de rugosidad local:** La dinámica entre saltos suele ser suave o estacionaria, sin la variabilidad multifractal característica de mercados reales.
- **Modela eventos extremos pero no su propagación:** Simula el inicio de un crash, pero no su secuencia ni su impacto prolongado en la varianza condicional.

3.2 ¿Qué le falta para capturar crashes con realismo empírico?

- **Estructuras multifractales:** Necesita complementar los saltos con procesos que simulen la rugosidad interna y la heterogeneidad local, como los que aporta el modelo M1974d.
- **Mecanismos de memoria:** Requiere incorporar kernels de dependencia para reflejar cómo los efectos de un shock se propagan a lo largo del tiempo (por ejemplo, vía M1963J).
- **Adaptabilidad a escalas de tiempo múltiples:** Los procesos subordinados sin jerarquía fractal no se ajustan bien a los ciclos financieros complejos.

3.3 ¿Qué mejora cuando se combina con M1963J y M1974d?

- **Con M1963J:** Se introduce memoria de largo plazo, permitiendo que los efectos de los saltos no sean instantáneos, sino persistentes.
- **Con M1974d:** Se modula la intensidad local del proceso, agregando rugosidad variable entre saltos, imitando la microestructura de precios.
- **Como parte de una arquitectura:** El M1972b se convierte en un generador de shocks estructurados dentro de una red compleja de dependencias y escalas.

3.4 Conclusión crítica

Usado en solitario, el M1972b es insuficiente para capturar la riqueza empírica de las series financieras reales. Su mayor valor se realiza al ser integrado dentro de una arquitectura combinada junto con procesos de memoria y modulación multifractal, cumpliendo así con los *stylized facts* fundamentales del comportamiento de mercados.

10.

4 Conclusión

El modelo M1972b propuesto por Mandelbrot introduce de manera explícita los **saltos discontinuos** en la dinámica de las series de tiempo financieras, rompiendo con el paradigma continuo y gaussiano predominante en la teoría clásica. Su formulación mediante subordinación aleatoria permite capturar eventos extremos y no esperados, como los *crashes*, con una base matemática sólida y flexible.

4.1 Lo que nos da

- Una representación formal y computacionalmente viable de eventos abruptos en los mercados.
- Un mecanismo para introducir **asimetrías** y **colas gruesas** sin necesidad de recurrir a estructuras gaussianas deformadas.
- La capacidad de romper la linealidad temporal mediante procesos subordinados no homogéneos.
- Flexibilidad para adaptarse a diferentes distribuciones de saltos y tiempos de espera.

4.2 Lo que no puede dar sin ayuda

- No modela **la memoria de largo plazo** inherente a muchas series financieras.
- No reproduce **la rugosidad fractal** observada en escalas temporales múltiples.

- No explica por sí solo **la persistencia de la volatilidad** o los clusters temporales de riesgo.
- Sin componentes adicionales, carece de **realismo estructural** para simulaciones completas o calibraciones empíricas finas.

4.3 Cierre

En síntesis, el M1972b constituye un bloque esencial para la arquitectura moderna de modelos financieros no lineales, pero no debe ser utilizado de forma aislada. Su máximo potencial se alcanza al integrarlo con modelos que aportan memoria (como el M1963J) y rugosidad multifractal (como el M1974d). Esta sinergia permite construir simuladores robustos, capaces de replicar los *stylized facts* de los mercados y generar escenarios útiles para análisis de riesgo, pricing y predicción.

11.

5 Anexos

5.1 Tabla de parámetros simulados

Parámetro	Valor típico	Interpretación
λ	0.05	Tasa de ocurrencia de saltos (media: 1 cada 20 días)
J_t	Lévy o Pareto	Distribución del tamaño de los saltos
T_t	Gamma o Exponencial	Distribución de los tiempos de espera
n	2000	Número de observaciones simuladas

Table 1: Parámetros utilizados para simular el modelo M1972b

5.2 Fórmulas ampliadas

- Proceso subordinado:

$$X(t) = L(T(t))$$

  donde L es un proceso Lévy (e.g., movimiento estable o Browniano), y $T(t)$ es un proceso de tiempo estocástico creciente.

- Si $L(t)$ es movimiento Browniano estándar:

$$X(t) = B(T(t)) \Rightarrow \text{proceso con varianza aleatoria acumulada}$$

- Si $T(t)$ es un proceso Gamma:

  El subordinado presenta overdispersion y colas pesadas.