Приближено решаване на системи линейни алгебрични уравнения
Метод на простата итерация

Това е итерационен метод. Точното решение може да се получи като граница на редица от последователни приближения.

Дадена е системата линейни алгебрични уравнения (СЛАУ) $A.x = b$, където **A** е матрица с реални коефициенти с размерност $n \times n$, **x** – вектор на неизвестните (търсеното решение; корен), **b** – дясна част.

$$A = \left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \neq 0 \; .$$

В разгърнат вид системата е: $$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. .$$

Тя се модифицира във вида $x = Cx + d$.

$$C=\left\{c_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n},\ c_{ii}=0,\ c_{ij}=-\frac{a_{ij}}{a_{ii}},\ d_i=\frac{b_i}{a_{ii}},\ a_{ii}\neq 0 \text{ за } \forall i=\overline{1,n}.$$

Привеждането в такъв вид става като първото уравнение се дели на a_{11} и всички останали членове се прехвърлят отдясно, второто уравнение се дели на a_{22} и т.н. Така от всяко уравнение се изразява неизвестното x_i от i-тия ред на системата.

Итерационният процес е $x^{(k+1)}=Cx^{(k)}+d$, $k=0,1,\dots$, където $x^{(0)}$ е произволно начално приближение. В разгърнат вид имаме:

$$\left|\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad c_{12}x_2^{(k)}+\dots+c_{1n}x_n^{(k)}+d_1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_2^{(k)}+ \qquad\qquad +\dots+c_{2n}x_n^{(k)}+d_2 \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_2^{(k)}+c_{n2}x_2^{(k)}+\dots \qquad\qquad +d_n \end{array}\right.,\ k=0,1,\dots$$

От тук последователно изчисляваме редицата от приближения:

$x^{(0)},x^{(1)},\dots,x^{(k)},\dots$

Заместваме известната стойност $x^{(k)}$ в дясната част и изчисляваме следващото приближение $x^{(k+1)}$.

Сходимост на метода на простата итерация за СЛАУ

Достатъчно условие за сходимост на итерационнния процес при произволно начално приближение $x^{(0)}$ е поне една норма на матрицата C да е по-малка от 1, т.е. да е изпълнено поне едно от следните неравенства:

$$\|C\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1, \quad \|C\|_2 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1, \quad \|C\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} < 1 .$$

За близостта на приближеното решение $x^{(k)}$ към точното решение x^* е валидна оценката $\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \|C\|^{(k)} \left(\left\|x^{(0)}\right\| + \frac{\|d\|}{1 - \|C\|} \right)$.

За намиране на минималния брой итерации k, необходими за да се постигне желаната от нас точност ε, е достатъчно да се реши следното неравенство относно k: $\|C\|^{(k)}\left(\|x^{(0)}\|+\dfrac{\|d\|}{1-\|C\|}\right)<\varepsilon$ или $k>\dfrac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon}{\|x^{(0)}\|+\dfrac{\|d\|}{1-\|C\|}}\right)}{\ln\|C\|}$.

Задача 1

Да се реши по метода на простата итерация системата:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{array}\right.$$

Работете с междинна точност от три знака след десетичната запетая ($\varepsilon = 10^{-3}$), като за начално приближение изберете нулевия вектор $x^{(0)} = (0,0,0)$.

Решение: С директна проверка се вижда, че точното решение е $x = (-1,212;\ 1,162;\ 0,586)$

① Построяваме матрицата C.

Делим първото уравнение на 2, второто на 5 и третото на 10.

Изразяваме неизвестните от главния диагонал:

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 = & 0,5x_2 & -0,5x_3 & -1,5 \\ x_2 = -0,6x_1 & & +0,4x_3 & +0,2 \\ x_3 = -0,1x_1 & +0,4x_2 & & +0 \end{array} \right.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & -0,5 \\ -0,6 & 0 & 0,4 \\ -0,1 & 0,4 & 0 \end{pmatrix},\quad d = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

② Проверка за сходимост.

$$\|C\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} \left| c_{ij} \right| = \max\{1, 1, 0.5\} = 1$$

$$\boxed{|-0.1| + |0.4| + |0|}$$

$$\boxed{|-0.6| + |0| + |0.4|}$$

$$\boxed{|0| + |0.5| + |-0.5|}$$

$$\|C\|_2 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} \left| c_{ij} \right| = \max\{0.7, 0.9, 0.9\} = 0.9 < 1$$

$$\|C\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} = \sqrt{0.25 + 0.25 + 0.36 + 0.16 + 0.01 + 0.16} = \sqrt{1.19} = 1.09087$$

Втората норма е по-малка от 1 и следователно методът на простата итерация е сходящ.

③ Намиране на минималния брой итерации за постигане на зададена точност ε.

Пресмятаме k по формулата $k > \dfrac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon}{\left\|x^{(0)}\right\| + \dfrac{\|d\|}{1-\|C\|}}\right)}{\ln\|C\|}$.

$$x^{(0)} = (0,0,0)^T \rightarrow \left\|x^{(0)}\right\|_2 = 0$$

$$d = (-1.5, 0.2, 0)^T \rightarrow \|d\|_2 = 1,7$$

$$\|C\|_2 = 0,9$$

$$k > \frac{\ln\left(\dfrac{0,001}{0 + \dfrac{1,7}{1-0,9}}\right)}{\ln(0,9)} = \frac{-9,74097}{-0,105361} = 92,4537$$

④ Изпълнение на получения брой итерации.

Точките ③ и ④ могат да бъдат заменени с т.н. стоп-критерий:

ако $\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| < \varepsilon$, то $x^* = x^{(k)}$ с точност ε.

В координатен вид:

ако $\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon$ за $\forall i = \overline{1,n}$, то $x^* = x^{(k)}$ с точност ε.

Записваме формулите за пресмятане на проста итерация:

$$\left| \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad 0,5x_2^{(k)} - 0,5x_n^{(k)} - 1,5 \\ x_2^{(k+1)} = -0,6x_2^{(k)} + \qquad\qquad + 0,4x_n^{(k)} + 0,2 \\ x_3^{(k+1)} = -0,1x_2^{(k)} + 0,4x_2^{(k)} \qquad\qquad + 0 \end{array} \right.$$

За начално приближение имаме $x^{(0)} = (0,0,0)^T$.

Заместваме и получаваме първо приближение (първа итерация):

$$\left| \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \qquad\qquad 0,5*0 - 0,5*0 - 1,5 \\ x_2^{(1)} = -0,6*0 + \qquad\qquad + 0,4*0 + 0,2 \\ x_3^{(1)} = -0,1*0 + 0,4*0 \qquad\qquad + 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(1)} = -1,5 \\ x_2^{(1)} = 0,2 \\ x_3^{(1)} = 0 \end{array}$$

За второ приближение заместваме с полученото $x^{(1)}$:

$$\left|\begin{array}{llll} x_1^{(2)} = & 0,5*0,2-0,5*0-1,5 & & x_1^{(2)} = -1,4 \\ x_2^{(2)} = -0,6*(-1,5)+ & +0,4*0+0,2 & \rightarrow & x_2^{(2)} = 1,1 \\ x_3^{(2)} = -0,1*(-1,5)+0,4*0,2 & +0 & & x_3^{(2)} = 0,23 \end{array}\right.$$

На третата итерация имаме:

$$\left|\begin{array}{llll} x_1^{(3)} = & 0,5*1,1-0,5*0,23-1,5 & & x_1^{(3)} = -1,065 \\ x_2^{(3)} = -0,6*(-1,4)+ & +0,4*0,23+0,2 & \rightarrow & x_2^{(3)} = 1,132 \\ x_3^{(3)} = -0,1*(-1,4)+0,4*1,1 & +0 & & x_3^{(3)} = 0,58 \end{array}\right.$$

и т.н.

Резултатите нанасяме в таблица:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\lvert x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} \right\rvert$	$\left\lvert x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)} \right\rvert$	$\left\lvert x_3^{(k+1)} - x_3^{(k)} \right\rvert$
0	0	0	0			
1	-1.5	0,2	0	1,5	0,2	0
2	-1.4	1.1	0.23	0,1	0,9	0,23
3	-1.065	1.132	0.58	0,335	0,032	0,35
4	-1.224	1.071	0.5593	0,159	0,061	0,0207
5	-1.24415	1.15812	0.5508	0,02015	0,08712	0,0085
6	-1.19634	1.16681	0.587663	0,04781	0,00869	0,036863

7	-1.21043	1.15287	0.586358	0,0140865	0,0139408	0,001305
8	-1.21674	1.1608	0.58219	0,0063179	0,0079299	0,00416767
9	-1.2107	1.16292	0.585994	0,00604879	0,00212367	0,00380375
10	-1.21154	1.16082	0.586239	0,000840039	0,00210777	0,00024459
11	-1.21271	1.16142	0.58548	0,00117618	0,00060186	0,00075911
12	-1.21203	1.16182	0.585838	0,000680482	0,000402067	0,00035836

$\left|x_1^{(12)} - x_1^{(11)}\right| = 0.000495698 < 0.001$ $\left|x_2^{(12)} - x_2^{(11)}\right| = 0.000199793 < 0.001$

$\left|x_3^{(12)} - x_3^{(11)}\right| = 0.00040075 < 0.001$