»Лекционен курс

»Интелигентни системи

Изводи в съждителната логика

Virtual learning space

Доказване на теореми в СЛ

- Досега показвахме логически следствия посредством проверка на модели
  - Изброяване на моделите и показване, че съжденията важат за всеки модел
- Логическото следствие може да се реализира също посредством доказване на теореми
  - Директно върху съжденията в базата знание се прилагат правила за извод, с цел конструиране на доказателство на желаното твърдение
  - Не се консултират моделите
    - В определени случаи броят на моделите може да бъде много голям
- Освен логическо следствие се нуждаем още от някои допълнителни концепции

Предимства

- Ако броят на моделите е голям, тогава доказването на теоремите може да бъде по-ефективно от проверката на модела
- Преди да се запознаем с детайлите на доказване на теореми, освен логическо следствие, се нуждаем още от следните допълнителни концепции:
  - Логическа еквивалентност
  - Валидност
  - Удовлетвореност

Логическа еквивалентност

- Две съждения α и β са логически еквивалентни, когато са верни в едно и също множество на модели
  - Запис: $\alpha \equiv \beta$
- Алтернативна дефиниция:
  - $\alpha \equiv \beta$, тогава когато $\alpha \vDash \beta$ и $\beta \vDash \alpha$
- В логиката същата роля като аритметичната идентичност в класическата математика
- Пример:
  - $P \wedge Q$ и $Q \wedge P$ са логически еквивалентни

Логически еквивалентности

$(\alpha \land \beta)$	$\equiv$	$(\beta \land \alpha)$	commutativity of $\land$
$(\alpha \lor \beta)$	$\equiv$	$(\beta \lor \alpha)$	commutativity of $\lor$
$((\alpha \land \beta) \land \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \land (\beta \land \gamma))$	associativity of $\land$
$((\alpha \lor \beta) \lor \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \lor (\beta \lor \gamma))$	associativity of $\lor$
$\neg(\neg\alpha)$	$\equiv$	α	double-negation elimination
$(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\equiv$	$(\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$	contraposition
$(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\equiv$	$(\neg\alpha \lor \beta)$	implication elimination
$(\alpha \Leftrightarrow \beta)$	$\equiv$	$((\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha))$	biconditional elimination
$\neg(\alpha \land \beta)$	$\equiv$	$(\neg\alpha \lor \neg\beta)$	De Morgan
$\neg(\alpha \lor \beta)$	$\equiv$	$(\neg\alpha \land \neg\beta)$	De Morgan
$(\alpha \land (\beta \lor \gamma))$	$\equiv$	$((\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \gamma))$	distributivity of $\land$ over $\lor$
$(\alpha \lor (\beta \land \gamma))$	$\equiv$	$((\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma))$	distributivity of $\lor$ over $\land$

Валидност

- Едно съждение е валидно, когато е вярно във всички модели
  - Пример: $P \lor \neg P$
- Нарича се тавтология и е безусловно вярно
  - Всяко валидно съждение е еквивалентно на true – понеже true е вярно във всички модели
- Защо се нуждаем от валидни съждения?
  - От дефиницията можем да изведем теоремата за дедукция
  - Позната още на старите гърци

Теорема за дедукция

- За всички съждения α и β е в сила $\alpha \vDash \beta$ тогава, когато съждението $(\alpha \Longrightarrow \beta)$ е валидно
- Доказателство:
  - И двете страни са еквивалентни на твърдението, че не съществува модел, в който α е вярно и β е невярно, т.е. няма модел, при който $\alpha \Rightarrow \beta$ е грешно
- Следователно, можем да определим дали $\alpha \vDash \beta$ чрез проверка за това дали $(\alpha \Longrightarrow \beta)$ е вярна във всеки модел (TT-ENTAILS?) или чрез доказване, че $(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv \text{true}$

Удовлетвореност

- Едно съждение е удовлетворимо, когато е вярно в някой модел
- Валидността и удовлетвореността са свързани
  - α е валидно, когато $\neg\alpha$ не е удовлетворимо
- Практически извод: $\alpha \vDash \beta$ тогава, когато $(\alpha \land \neg\beta)$ не е удовлетворимо
  - Доказателството β от α посредством неудовлетворимост на $(\alpha \land \neg\beta)$ отговаря на познатия от математиката метод за доказателство чрез противоречие
  - Изхождайки от това, че съждението β е грешно и показвайки, че това води до противоречие с позната аксиома α
    - Това е точно, че $(\alpha \land \neg\beta)$ не е удовлетворимо

Правила за извод

- Правила (за извод), които могат да бъдат приложени за да се направи извод - верига от заключения
  - Modus ponens $$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$$
  - И-Елиминиране $$\frac{\alpha \land \beta}{\alpha}$$
  - Всички логически еквивалентности от предишната таблица могат да се използват за правене на логически изводи

Примери

$(WumpusAhead \land WumpusAlive) \Rightarrow Shoot$

$(WumpusAhead \land WumpusAlive)$

$\boxed{Shoot}$

$(WumpusAhead \land WumpusAlive)$

$\boxed{WumpusAlive}$

Обобщение

- Като се вземат предвид възможните стойности на истинността на α и β, може лесно да се покаже, че Modus Ponens и And-Elimination са винаги коректни
- Тези правила могат да се използват във всеки конкретен случай, в който са приложими, за правене на коректни изводи
  - Без да е необходимо да се използва методът “проверка на модели”

Обобщение

» Всички логически еквивалентности могат да се използват също като правила за извод

» Напр., еквивалентността на елиминирането на бикондиционала доставя две правила за извод

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha)} \qquad \frac{(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha)}{\alpha \Leftrightarrow \beta}$$

Обобщение

» Не всички правила за извод работят и в двете посоки

» Напр., не можем да изпълним Modus Ponens в обратна посока, за да получим $\alpha \Rightarrow \beta$ и α от β

Пример

R_1: $\neg P_{1,1}$

R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_4: $\neg B_{1,1}$

R_5: $B_{2,1}$

Искаме да разберем липсата на дупка в [1,2], т.е. да докажем $\neg P_{1,2}$

Първа стъпка:

Прилагаме biconditional elimination върху R_2

R_6: $(B_{1,1} \Longrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Longrightarrow B_{1,1})$

Пример

R_1: $\neg P_{1,1}$

R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})$

R_4: $\neg B_{1,1}$

R_5: $B_{2,1}$

R_6: $(B_{1,1} \Longrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})) \land ((P_{1,2} \lor P_{2,1}) \Longrightarrow B_{1,1})$

Искаме да разберем дали има дупка в [1,2], т.е. да докажем $\neg P_{1,2}$

Втора стъпка:

Прилагаме И-Елиминиране върху R_6

R_7: $((P_{1,2} \lor P_{2,1})) \Longrightarrow B_{1,1})$

Пример

$R_1: \neg P_{1,1}$

$R_2: B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})$

$R_3: B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})$

$R_4: \neg B_{1,1}$

$R_5: B_{2,1}$

$R_6: (B_{1,1} \Longrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})) \land ((P_{1,2} \lor P_{2,1}) \Longrightarrow B_{1,1})$

$R_7: ((P_{1,2} \lor P_{2,1})) \Longrightarrow B_{1,1})$

Искаме да разберем дали има дупка в [1,2], т.е. да докажем $\neg P_{1,2}$

Трета стъпка:

Прилагаме контрапозиция върху R_7

$$R_8: (\neg B_{1,1} \Longrightarrow \neg(P_{1,2} \lor P_{2,1}))$$

Пример

$R_1: \neg P_{1,1}$

$R_2: B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

$R_3: B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

$R_4: \neg B_{1,1}$

$R_5: B_{2,1}$

$R_6: (B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$

$R_7: ((P_{1,2} \vee P_{2,1})) \Rightarrow B_{1,1})$

$R_8: (\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}))$

Искаме да разберем дали има дупка в [1,2], т.е. да докажем $\neg P_{1,2}$

Четвърта стъпка:

Прилагаме модус поненс върху R_8 и възприятието R_4 $(\neg B_{1,1})$

$R_9: \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}))$

Пример

$R_1: \neg P_{1,1}$

$R_2: B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

$R_3: B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

$R_4: \neg B_{1,1}$

$R_5: B_{2,1}$

$R_6: (B_{1,1} \Longrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Longrightarrow B_{1,1})$

$R_7: ((P_{1,2} \vee P_{2,1})) \Longrightarrow B_{1,1})$

$R_8: (\neg B_{1,1} \Longrightarrow \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}))$

$R_9: \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}))$

Искаме да разберем дали има дупка в [1,2], т.е. да докажем $\neg P_{1,2}$

Пета стъпка:

Прилагаме де Морган върху R_9

$R_{10}: \neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$ → Доказахме, че няма ма дупка в [1,2] (също в [2,1])

Доказателства

» Намерихме това доказателство на ръка, но можем да приложим който и да е от алгоритмите за търсене за да намерим поредица от стъпки, които представляват доказателство

» Трябва само да дефинираме проблем с доказателството, както следва:

  > Начално състояние: начална БЗ
  > Оператори: правила за извод, прилагани към съждения, които съответстват на горната половина на правилото
  > Резултат от оператора: добавяне съждение в долната половина на правилото за извод
  > Цел: състояние, което съдържа съждението, което се опитваме да докажем

Доказателства

- По този начин търсенето на доказателство е алтернатива на изброяване на модели
- В много практически случаи намирането на доказателство може да бъде по-ефективно, защото доказателството може да пренебрегне несъществените предложения, независимо колко са

Пример

- Разгледаното по-рано доказателство води до $\neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1}$ без да разглежда съжденията $B_{2,1}$, $P_{1,1}$, $P_{2,2}$ или $P_{3,1}$
- Те могат да бъдат пренебрегнати, защото целевото съждение $P_{1,2}$ се появява само в съждението R2 - другите съждения в R2 се появяват само в R_4 и R_2
- Така, R_1, R_3 и R_5 нямат отношение към доказателството
- Същото ще се случи, дори ако добавим още един милион съждения към БЗ
- От друга страна, простият алгоритъм за таблица на истинността ще бъде претоварен от експоненциалната експлозия на моделите

Монотонност

- Едно последно свойство на логическите системи е монотонността:
- Множеството е изведените съждения може да се увеличава само когато информацията се добавя информацията към БЗ
- За всеки две съждения α и β, ако $\text{БЗ} \vDash \alpha$, тогава $\text{БЗ} \wedge \beta \vDash \alpha$

Пример

- Да предположим напр., че БЗ съдържа допълнително съждение β, в което се посочва, че в света на W. има точно 8 ями
- Това знание може да помогне на агента да направи допълнителни заключения, но не може да обезсили извода, който вече е направен, като напр., че няма яма в [1,2].
- Монотонността означава, че правилата за изводи могат да се прилагат винаги, когато подходящите условия (премиси) се намират в БЗ
  - Заключението на правилото трябва да следва независимо от това какво друго е в БЗ

Пълнота

- Досега разгледаните правила са коректни
  - Още не се занимаваме с проблема за пълнота на алгоритмите за извод, които ги използват
  - Пълните алгоритми намират всички достъпни цели
- Алгоритмите за търсене, като напр. итеративно търсене в дълбочина, са пълни в смисъл, че ще намерят всяка достижима цел
  - Но ако наличните правила за извод са неадекватни, тогава целта не е достижима
- Напр., ако премахнем правилото за елиминиране на бикондиционала, доказателството в предходния пример няма да успее

Резолюция

- Резолюция
  - Правило за извод, което комбинирано с произволен пълен алгоритъм за търсене, доставя пълен алгоритъм за извод

Единична резолюция

Единична резолюция:

$$\frac{l_1 \vee \ldots \vee \mathbf{l_i} \vee \ldots \vee l_k \,,\, \mathbf{m}}{l_1 \vee \ldots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \ldots \vee l_k}$$

когато l литерал, а l_i и m комплиментни литерали

Единичната резолюция използва една клауза (дизюнкция от литерали) и един литерал, като от тях генерира нова клауза

Обобщена резолюция

Обобщена резолюция:

$$\frac{l_1 \lor \ldots \lor l_k,\quad m_1 \lor \ldots \lor m_n}{l_1 \lor \ldots \lor l_{i-1} \lor l_{i+1} \lor \ldots \lor l_k \lor m_1 \lor \ldots \lor m_{j-1} \lor m_{j+1} \lor \ldots \lor m_n}$$

когато l_i и m_j са комплиментни литерали

Обобщената резолюция използва две клаузи, като от тях генерира една нова клауза

$$\frac{P_{1,1} \lor P_{3,1}, \qquad \neg P_{1,1} \lor \neg P_{2,2}}{P_{3,1} \lor \neg P_{2,2}}$$

Пример

1,4	2,4	3,4	4,4
1,3 W!	2,3	3,3	4,3
1,2 A S OK	2,2 OK	3,2	4,2
1,1 V OK	2,1 B V OK	3,1 P!	4,1

Агентът се връща обратно от [2,1] в [1,1] и след това продължава към [1,2], където възприема „миризма“, но не „полъх“

Пример

$R_1: \neg P_{1,1}$

$R_2: B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})$

$R_3: B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})$

$R_4: \neg B_{1,1}$

$R_5: B_{2,1}$

$R_6: (B_{1,1} \Longrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})) \land ((P_{1,2} \lor P_{2,1}) \Longrightarrow B_{1,1})$

$R_7: ((P_{1,2} \lor P_{2,1})) \Longrightarrow B_{1,1})$

$R_8: (\neg B_{1,1} \Longrightarrow \neg(P_{1,2} \lor P_{2,1}))$

$R_9: \neg(P_{1,2} \lor P_{2,1}))$

$R_{10}: \neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1}$

Добавяме към базата знания следните правила:

$R_{11}: \neg B_{1,2}$

$R_{12}: B_{1,2} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{1,3})$

Пример

$R_1: \neg P_{1,1}$

$R_2: B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

$R_3: B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

$R_4: \neg B_{1,1}$

$R_5: B_{2,1}$

$R_6: (B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$

$R_7: ((P_{1,2} \vee P_{2,1})) \Rightarrow B_{1,1})$

$R_8: (\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}))$

$R_9: \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}))$

$R_{10}: \neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$

$R_{11}: \neg B_{1,2}$

$R_{12}: B_{1,2} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{1,3})$

По същия начин както преди можем да изведем липсата на дупки в [2,2] и [1,3]:

$R_{13}: \neg P_{2,2}$

$R_{14}: \neg P_{1,3}$

Пример

R_1: $\neg P_{1,1}$

R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})$

R_4: $\neg B_{1,1}$

R_5: $B_{2,1}$

R_6: $(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})) \land ((P_{1,2} \lor P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$

R_7: $((P_{1,2} \lor P_{2,1})) \Rightarrow B_{1,1})$

R_8: $(\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg(P_{1,2} \lor P_{2,1}))$

R_9: $\neg(P_{1,2} \lor P_{2,1}))$

R_{10}: $\neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1}$

R_{11}: $\neg B_{1,2}$

R_{12}: $B_{1,2} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{1,3})$

R_{13}: $\neg P_{2,2}$

R_{14}: $\neg P_{1,3}$

Освен това при прилагане на biconditional elimination, последван от модус поненс за R_3 извеждаме, че има дупка в [1,1], [2,2] или [3,1]:

R_{15}: $P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1}$

Пример

R_1: $\neg P_{1,1}$

R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_4: $\neg B_{1,1}$

R_5: $B_{2,1}$

R_6: $(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$

R_7: $((P_{1,2} \vee P_{2,1})) \Rightarrow B_{1,1})$

R_8: $(\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}))$

R_9: $\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}))$

R_{10}: $\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$

R_{11}: $\neg B_{1,2}$

R_{12}: $B_{1,2} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{1,3})$

R_{13}: $\neg P_{2,2}$

R_{14}: $\neg P_{1,3}$

R_{15}: $P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}$

Сега идва първото прилагане на правилото на резолюцията: литералът $\neg P_{2,2}$ в R_{13} резюлира с литерала $P_{2,2}$ в R_{15} и се генерира резолвента:

R_{16}: $P_{1,1} \vee P_{3,1}$

Т.е, когато има дупка в едно от полетата [1,1], [2,2] или [3,1] и тя не е в [2,2], тогава тя се намира в [1,1] или [3,1]

Пример

R_1: $\neg P_{1,1}$

R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_4: $\neg B_{1,1}$

R_5: $B_{2,1}$

R_6: $(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$

R_7: $((P_{1,2} \vee P_{2,1})) \Rightarrow B_{1,1})$

R_8: $(\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}))$

R_9: $\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}))$

R_{10}: $\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$

R_{11}: $\neg B_{1,2}$

R_{12}: $B_{1,2} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{1,3})$

R_{13}: $\neg P_{2,2}$

R_{14}: $\neg P_{1,3}$

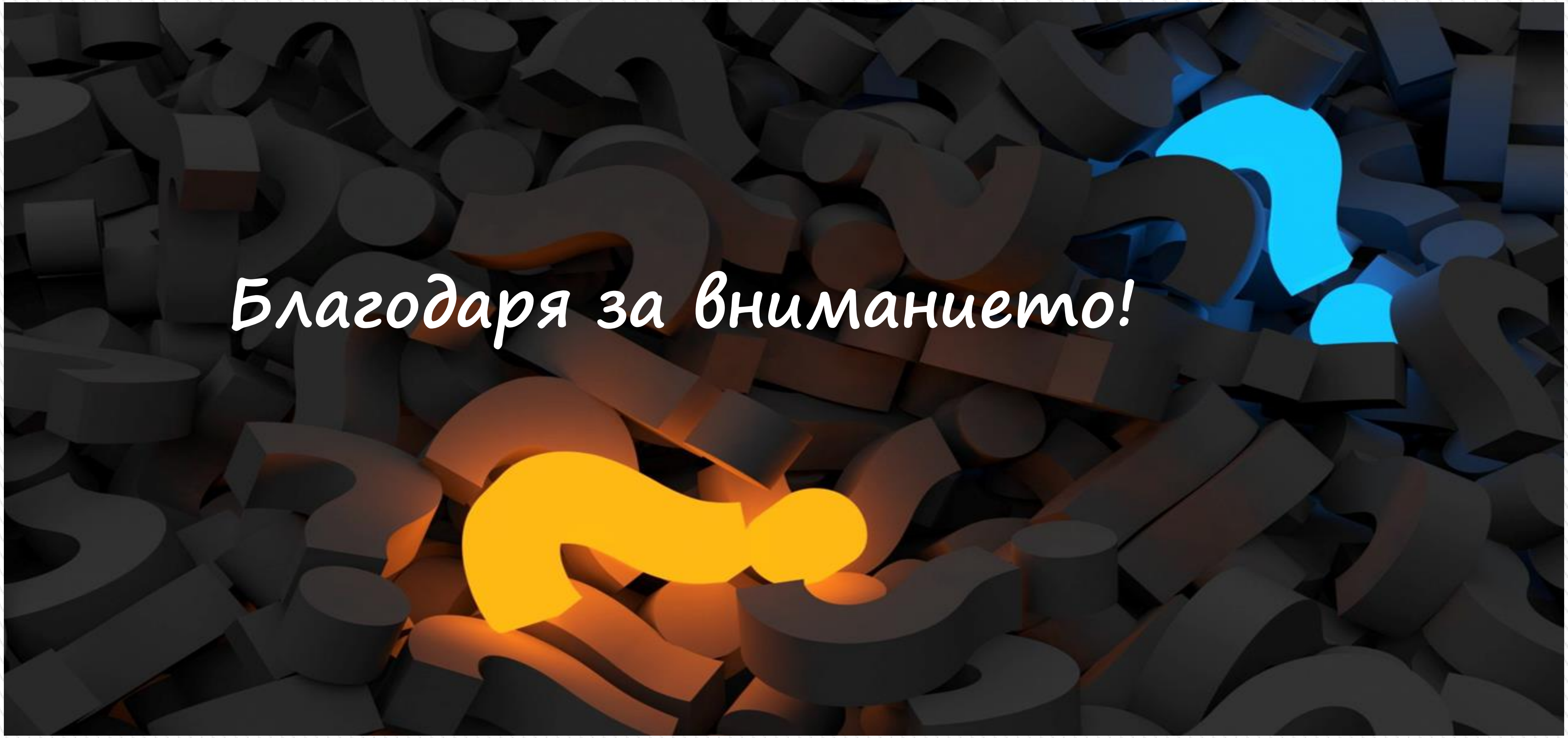
R_{15}: $P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_{16}: $P_{1,1} \vee P_{3,1}$

Освен това литералът $\neg P_{1,1}$ в R_1 резюлира с литерала $P_{1,1}$ в R_{16} и се генерира резолвента:

R_{17}: $P_{3,1}$

Т.е, когато има дупка в едно от полетата [1,1] или [3,1] и тя не е в [1,1], тогава тя се намира в [3,1]


Благодаря за вниманието!