Двоични функции

- ***Дефиниция:*** Функция $f(x_1,\dots,x_n)$ дефинирана в множеството $B^n=\{0,1\}^n$ и приемаща стойности в множеството $B=\{0,1\}$ се нарича ***двоична (булева) функция.***

x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	$\dots$	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	$\dots$	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
0	0	$\dots$	1	0	$f(0, 0, \dots, 1, 0)$
....	....	....	....	....	....
1	1	$\dots$	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

- ***Дефиниция:*** Множеството на всички двоични функции ще означаваме с P_2.

Броят на различните $n-$торки $(x_1,\dots,x_n)$ е 2^n. Тогава е в сила $|P_2|=2^{2^n}$.

Таблица на всички двоични функции на една променлива

x_1	**0**	x_1	$\overline{x_1}$	**1**
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	константа		**отрицание**	**константа**

Таблица на всички двоични функции на две променливи

x_1	x_2	**0**	**.**		x_1		x_2	+	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\overline{x_2}$		$\overline{x_1}$	$\rightarrow$	|	**1**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		константа 0	**конюнкция**					**сума по модул 2**	**дизюнкция**	**стрелка на Пирс**	**еквиваленция**	**отрицание**		**отрицание**	**импликация**	**черта на Шефер**	**константа 1**

Задачи:

Задача 1. Пресметнете следните изрази

$x_1.0 =$ $\qquad$ $x_1.x_1 =$

$x_1 \vee 0 =$ $\qquad$ $x_1 \vee x_1 =$

$x_1 + 0 =$ $\qquad$ $x_1 + x_1 =$

$x_1.1 =$ $\qquad$ $x_1.\overline{x_1} =$

$x_1 \vee 1 =$ $\qquad$ $x_1 \vee \overline{x_1} =$

$x_1 + 1 =$ $\qquad$ $x_1 + \overline{x_1} =$

Задача 2. Докажете законите на ДеМорган

1) $\overline{x_1.x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ $\qquad$ 2) $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1}.\overline{x_2}$

Някои свойства:

$x_1.x_2 = x_2.x_1$ $\qquad$ $x_1.(x_2.x_3) = (x_1.x_2).x_3$ $\qquad$ $x_1.(x_2 \vee x_3) = (x_1.x_2) \vee (x_1.x_3)$

$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$ $\qquad$ $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$

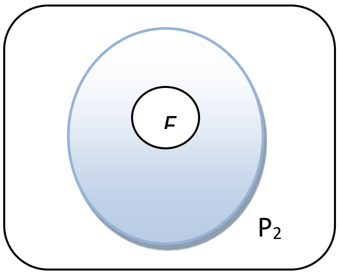
$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ $\qquad$ $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$ $\qquad$ $x_1.(x_2 + x_3) = (x_1.x_2) + (x_1.x_3)$

Приоритет при изчисляване на изрази с двоични функции

- Скоби
- Отрицание
- Конюнкция
- Дизюнкция и сума по модул 2
- Останалите двоични функции

➢ ***Дефиниция:*** На всяка формула по естествен начин се съпоставя една единствена двоична функция и казваме, че формулата реализира тази функция.

➢ ***Дефиниция:*** Нека F е множество от двоични функции. Множеството от всички функции, които можем да реализираме чрез формули над F се нарича ***затворена обвивка*** и бележим с $[F]$.



Пример: Определете затворената обвивка на множеството $F = \{.,-\}$.

Пълни множества от двоични функции

- ***Дефиниция:*** Множеството от двоични функции F е ***пълно*** тогава и само тогава, когато $[F] = P_2$, т.е. всяка двоична функция се реализира с формула над F.

Теорема на Бул: Множеството $F = \{\bullet, \vee, -\}$ е пълно.

Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е произволна двоична функция, различна от 0. Означаваме

$$x^\alpha = \begin{cases} \overline{x}, & \alpha = 0 \\ x, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Не е трудно да се види, че $x^\alpha = 1$ тогава и само тогава, когато $x = \alpha$. Следователно

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} ,$$

където дизюнкция се взема по всички $n-$торки $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ за които $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$.

Задачи:

<u>Задача 1</u> Постройте формула над множеството $F = \{\bullet, \vee, -\}$, която да реализира функцията зададена чрез следната таблица.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

<u>Задача 2</u> Постройте формула над множеството $F = \{\bullet, \vee, -\}$, която да реализира функциите зададени чрез следната таблица.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Задача 3. Постройте формула над множеството $F = \{\bullet, \vee, -\}$, която да реализира функцията $f = (x_1 + x_2).\overline{x_3}$.

Теорема: Нека са дадени две множества от двоични функции $F = \{f_1, f_2, \ldots\}$ и $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$ при това F ***пълно множество.*** Множеството G е пълно тогава и само о тогава, когато $\forall f_i \in F \Rightarrow f_i \in [G]$, т.е. когато може да се представи като формула над *G*.

Задача 4. Докажете, че следните множества са пълни:

1) $G = \{\bullet, -\}$ 2) $G = \{\vee, -\}$

3) $G = \{\downarrow\}$ 4) $G = \{|\}$

5) $G = \{\bullet, +, 1\}$ 6) $G = \{\bullet, \vee\}$

Полином на Жегалкин

- ***Дефиниция:*** Израз от вида $x_1, \ldots, x_n$ без повтарящи се множители се нарича ***елементарна конюнкция.***

Забележка: *Понеже* $x_1.x_1 = x_1$, *то всяка конюнкция можем да я направим елементарна*

$$x_1x_2x_3x_2 = x_1x_2x_3$$

- ***Дефиниция:*** Сума от вида $E_1 + E_2 + \cdots + E_k$ без повтарящи се събираеми се нарича полином на Жегалкин и

$$E := \begin{cases} \text{елементарна конюнкция} \\ 1 \end{cases}$$

Забележка: *Понеже* $x_1 + x_1 = 0$, *то всяка сума от елементарни конюнкции и 1 става полином на Жегалкин чрез зачертаване на повтарящите се събираеми*

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_2 = E_1 + E_3$$

Задача 1. Намерете полинома на Жегалкин за следната функция

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Задача 2. Намерете полинома на Жегалкин за следните функции

а)

x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

б)

x_1	x_2	x_3	f_2
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Теорема на Жегалкин: Всяка двоична функция се представя точно с един полином на Жегалкин.

Затворени множества

- ***Дефиниция:*** Едно множество F се нарича ***затворено***, ако $[F] = F$.
- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1,\dots,x_n)$ **запазва нулата**, ако $f(0,\dots,0) = 0$.

  Множеството от всички функции, запазващи нулата означаваме с $\mathbf{T_0}$.
- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1,\dots,x_n)$ **запазва единицата**, ако $f(1,\dots,1) = 1$.

  Множеството от всички функции, запазващи единицата означаваме с $\mathbf{T_1}$.
- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f^*(x_1,\dots,x_n)$ е **двойнствена** на функцията $f(x_1,\dots,x_n)$, ако

$$f^*(x_1,\dots,x_n) = \overline{f}(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})$$

Задача 1. Намерете деойнствените на следните функции

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Теорема: $(f^*)^* = f$

Някои основни двойки функция и нейната двойнствена функция.

f	0	1	x	$\bar{x}$	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x + y$	$x \leftrightarrow y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
f^*	1	0	x	$\bar{x}$	$x \vee y$	$x \cdot y$	$x \leftrightarrow y$	$x + y$	$x \downarrow y$	$x \mid y$

- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1, \dots, x_n)$ е **самодвойнствена**, ако $f = f^*$. Множеството от всички самодвойнствени функции означаваме с **S**.

<u>Задача 2.</u> Проверете дали функцията е самодвойнствена

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Нека $\alpha = (a_1, \dots a_n)$ и $\beta = (b_1, \dots b_n)$ са две произволни n-торки от 0 и 1.

- ***Дефиниция:*** Казваме, че α **предхожда** β **и означаваме** $\alpha \prec \beta$, ако са изпълнени следните неравенства

$$a_1 \le b_1,\ a_2 \le b_2,\ \dots, a_n \le b_n\ .$$

- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1, \dots, x_n)$ е **монотонна,** ако от $\alpha \prec \beta$ следва, че функцията $f(\alpha) \le f(\beta)$. Множеството от всички монотонни функции означаваме с **M**.

<u>Задача 1.</u> Проверете дали е монотонна следната функция

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

<u>Задача 2.</u> Проверете кои от следните функции са монотонни и кои не:

$$x_1,\ \overline{x_1},\ x_1.x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \leftrightarrow x_2$$

- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1,\dots,x_n)$ е **линейна,** ако тя има линеен полином на Жегалкин, т.е. f може да се представи като

$$f(x_1,x_2,\dots x_n)=a_nx_n+a_{n-1}x_{n-1}+\dots+a_1x_1+a_0\,,$$

където от $a_i\in\{0,1\}$. Множеството от всички линейни функции означаваме с **L**.

Теорема: Множествата **T₀, T₁, S, M и L** са затворени множества.

Теорема на Пост-Яблонски

Теорема: Множеството ***F*** е пълно тогава и само тогава, когато

$$F \not\subseteq T_0, T_1, S, M, L.$$

Задача 1. Проверете кои от следните множества са пълни и кои не:

а) $F_1=\{f_1,f_2,f_3\}$

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0

б) $F_2=\{f_1,f_2,f_3\}$

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

в) $F_3=\{0,1,x_1x_2+1\}$

г) $F_4=\{0,1,x_1x_2\}$

д) $F_5 = \{\overline{x_1},\, x_1 + x_2 + x_3\}$

е) $F_6 = \{0,\, \overline{x_1}\}$

ж) $F_7 = \{0,\, \overline{x_1 x_2}\}$ - пълно

➢ ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1, \dots, x_n)$ е **шеферова,** ако множеството $\{f\}$ е пълно и $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$.

<u>Задача 2</u> За кои стойности на n функцията е шеферова

$$f = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1 + 1$$

Допълнителни задачи:

<u>Задача 1.</u> Постройте формула над множеството $F = \{\bullet, \vee, -\}$, която да реализира функциите:

1) $f = (\overline{x_1} x_2 + x_3).(x_1 x_3 \to x_2)$;
2) $f = (x_1 \vee x_2) \to x_3$

<u>Задача 2.</u> Намерете полинома на Жегалкин за следните функции

а) $f = x_1 \to x_2$

б) $f = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$

в) $f = x_1(x_1 \vee \overline{x_3})$

г) $f = (x_1 \downarrow x_2) \mid (x_2 \downarrow x_3)$

д)

x_1	x_2	x_3	f	g
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

<u>Задача 3.</u> Пълна ли е системата от двоични функции:

1) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x + y,\ xy \vee yz \vee zx\}$;
2) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x + y + z + 1\}$;
3) $A = \{1,\ \overline{x},\ x(y \leftrightarrow z) + \overline{x}(y + z), x \leftrightarrow y\}$;
4) $A = \{0,\ \overline{x},\ x(y + z) + yz\}$;

5) $A = \{\overline{x},\ x(x \leftrightarrow z) \leftrightarrow (y \vee z),\ x + y + z\}$;

6) $A = \{\overline{x},\ x(y \leftrightarrow z) \leftrightarrow yz,\ x + y + z\}$

<u>Задача 3.</u> За кои стойности на *n* функцията е шеферова

1) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus x_1x_2 \oplus \ldots \oplus x_ix_{i+1} \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n \oplus x_nx_1$;
2) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus x_1x_2 \oplus \ldots \oplus x_ix_{i+1} \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n$;

3) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \overline{x}_i\overline{x}_j$; 4*) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j$;

5) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{[n/2]} \leqslant n} \overline{x}_{i_1}\overline{x}_{i_2} \ldots \overline{x}_{i_{]n/2[}}$;