Теореми за средните стойности

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

Теорема на Рол

Първата основна теорема на диференциалното смятане, с която ще се запознаем, е следната

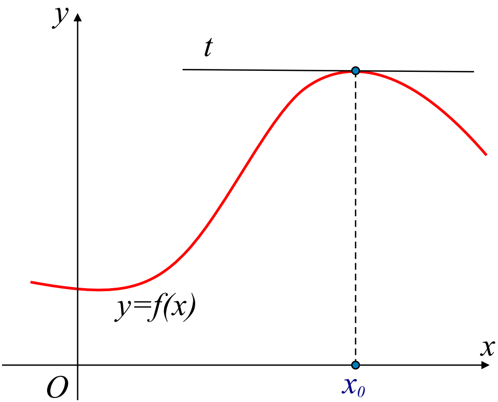
Теорема 1 (Теорема на Рол)

Ако функцията $f(x)$ удовлетворява следните условия:

1) $f(x)$ *е непрекъсната в крайния и затворен интервал* $[a, b]$;
2) $f(x)$ *е диференцируема в отворения интервал* (a, b);
3) $f(a) = f(b)$,

то съществува поне една точка $\xi \in (a, b)$, *за която* $f'(\xi) = 0$.

- Теоремата на Рол може да бъде изтълкувана геометрично: при направените в условието на теоремата предположения съществува такава точка от графиката на дадената функция, допирателната в която е успоредна на оста Ox (Фигура 1).



Фигура 1: Геометрично тълкуване на теоремата на Рол

Теорема на Лагранж

Теорема 2 (Теорема на Лагранж за крайните нараствания)

Ако функцията $f(x)$ удовлетворява следните условия:

1) $f(x)$ *е непрекъсната в крайния и затворен интервал* $[a, b]$;
2) $f(x)$ *е диференцируема в отворения интервал* (a, b),

то съществува поне една точка $\xi \in (a, b)$, *за която*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Забележете, че теоремата на Лагранж представлява обобщение на теоремата на Рол, която се получава веднага в случая, когато $f(a) = f(b)$.
- Теоремата на Лагранж също може да бъде изтълкувана геометрично. Правата, свързваща двете крайни точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ от графиката на функцията $y = f(x)$ (Фигура 2), има уравнение

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

където x и y са текущите координати.

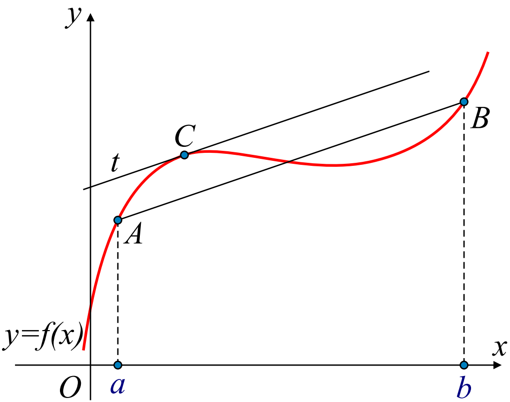
От друга страна, допирателната към графиката на $f(x)$, прекарана в точката $C(\xi, f(\xi))$, има уравнение

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi).$$

- Тъй като от теоремата на Лагранж

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

то излиза, че двете прави – секущата AB и допирателната през точката C – са успоредни. И така теоремата за крайните нараствания твърди, че съществува поне една точка от графиката на функцията $f(x)$, в която допирателната е успоредна на правата, съединяваща двете крайни точки на графиката.



Фигура 2: Геометрично тълкуване на теоремата на Лагранж

Две важни следствия

Следствие 1

Ако функцията $f(x)$ има производна, равна на нула във всички точки на един интервал Δ, то тя е константа в този интервал.

Пример: Докажете, че за всяко $x \in [-1, 1]$ е изпълнено

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Да означим $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Тогава

$$f'(x) = (\arcsin x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Като приложим Следствие 1 получаваме, че

$$f(x) = C \quad \text{за всяко } x \in [-1, 1]. \tag{2}$$

За да намерим константата C е достатъчно да изчислим $f(x)$ в една удобна за нас точка – например точката $x = 1$. Имаме

$$C = f(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

От (2) и (3) следва и тъждеството (1), което искахме да докажем.

Следствие 2

Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в един интервал Δ и ако $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in \Delta$, то $f(x)$ е растяща в този интервал. Ако $f(x) > 0$ за всяка вътрешна точка $x \in \Delta$, то $f(x)$ даже е строго растяща.

Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в един интервал Δ и ако $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in \Delta$, то $f(x)$ е намаляваща в този интервал. Ако $f(x) < 0$ за всяка вътрешна точка $x \in \Delta$, то $f(x)$ даже е строго намаляваща.

Пример: Докажете, че

$$\operatorname{tg} x > x \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Означаваме $f(x) = \operatorname{tg} x - x$. Ще изследваме тази функция за монотонност. Имаме

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Тъй като за всяко $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ е изпълнено $0 < \cos^2 x < 1$, то

$$f'(x) > 0.$$

От Следствие 2 тогава получаваме, че $f(x)$ е строго растяща функция и за всяко $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ е в сила неравенството

$$f(x) > f(0) = \operatorname{tg} 0 - 0 = 0.$$

Като заместим $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ с в горното неравенство, получаваме (4), което искахме да докажем.