

# Уравнения от първи ред, нерешени относно производната. Уравнения на Клеро и Лагранж

доц. д-р Теменужка Пенева

*Информатика, 2021/2022*

## Уравнения от първи ред, нерешени относно производната

Да разгледаме произволно диференциално уравнение от първи ред

$$F(x, y, y') = 0.$$

Не винаги е възможно това уравнение да се реши относно производната, т.е. да се представи във вида

$$y' = f(x, y),$$

или пък ако това е възможно, то понякога дясната му страна  $f(x, y)$  е много сложна функция. В такъв случай за решаването на изходното уравнение може да се приложи т.н. метод на въвеждане на параметър, известен още като метод на интегриране чрез предварително диференциране.

► Уравнения от вида

$$y = \varphi(y'). \quad (1)$$

Полагаме

$$y' = p, \quad p = p(x),$$

където  $p$  ще служи за параметър при намиране на решенията на (1). Уравнението (1) приема вида

$$y = \varphi(p). \quad (2)$$

Диференцираме това уравнение по отношение на  $x$  и получаваме

$$y' = \varphi'(p) p',$$

но тъй като сме положили  $y' = p$ , то

$$p = \varphi'(p) p'.$$

Като заместим  $p'$  с  $\frac{dp}{dx}$  и разделим променливите, намираме

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{p} dp.$$

Оттук

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C.$$

Тази връзка заедно с (2) задава параметричното решение на изходното уравнение (1):

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

► Уравнения от вида

$$x = \psi(y'). \quad (3)$$

Полагаме

$$y' = p, \quad p = p(y),$$

където  $p$  ще служи за параметър при намиране на решенията на (3). Уравнението (3) приема вида

$$x = \psi(p). \quad (4)$$

Диференцираме това уравнение по отношение на  $x$  и получаваме

$$1 = \psi'(p) \frac{dp}{dx}.$$

От  $p = p(y)$ ,  $y = y(x)$  и  $y' = p$  следва, че

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p, \quad (5)$$

откъдето

$$1 = \psi'(p) \frac{dp}{dy} p.$$

Тогава

$$dy = \psi'(p)p dp$$

и следователно

$$y = \int \psi'(p)p dp + C.$$

Тази връзка заедно с (4) задава параметричното решение на изходното уравнение (3):

$$\begin{cases} x = \psi(p) \\ y = \int \psi'(p)p dp + C. \end{cases}$$

► Уравнения от вида

$$y = \Phi(x, y'). \quad (6)$$

Полагаме

$$y' = p, \quad p = p(x),$$

където  $p$  ще служи за параметър при намиране на решенията на (6). Уравнението (6) приема вида

$$y = \Phi(x, p),$$

след което диференцираме по  $x$ .

► Уравнения от вида

$$x = \Psi(y, y'). \quad (7)$$

Полагаме

$$y' = p, \quad p = p(y),$$

където  $p$  ще служи за параметър при намиране на решенията на (7). Уравнението (7) приема вида

$$x = \Psi(y, p),$$

след което диференцираме по  $x$ , като не забравяме връзката (5).



## Задача 1

Да се решат уравненията:

$$1) y = \ln(1 + y'^2);$$

$$2) y'^3 = x - y';$$

$$3) y = x + y' - \ln y';$$

$$4) y = 2xy' + y^2 y'^3.$$

**Решение.** 1) Даденото уравнение е от вида (1). Затова полагаме  $y' = p$ ,  $p = p(x)$ , и получаваме

$$y = \ln(1 + p^2). \quad (8)$$

Диференцираме двете страни на това уравнение по отношение на  $x$  и намираме

$$y' = \frac{2p}{1 + p^2} \frac{dp}{dx}.$$

Тогава

$$p = \frac{2p}{1+p^2} \frac{dp}{dx}.$$

Делим двете страни на това уравнение с  $p \neq 0$ . Имаме

$$1 = \frac{2}{1+p^2} \frac{dp}{dx},$$

откъдето

$$dx = \frac{2}{1+p^2} dp$$

и следователно

$$x = \int \frac{2}{1+p^2} dp + C = 2 \operatorname{arctg} p + C.$$

Като вземем предвид (8), получаваме параметричното решение на даденото уравнение

$$\begin{cases} x = 2 \operatorname{arctg} p + C \\ y = \ln(1 + p^2), \end{cases}$$

където  $p \neq 0$ ,  $C$  е произволно реално число. Остана да проверим дали не сме изпуснали някое решение при делението с  $p$ . Заместваме с  $p = 0$  в (8) и намираме  $y = 0$ , което също е решение.

2) В това уравнение изразяваме  $x$ , за да получим уравнение от вида (3). Имаме

$$x = y'^3 + y'.$$

Полагаме  $y' = p$ ,  $p = p(y)$  и получаваме

$$x = p^3 + p. \quad (9)$$

Диференцираме двете страни на това уравнение по  $x$

$$1 = (3p^2 + 1) \frac{dp}{dx}.$$

Тъй като  $p = p(y)$ , имаме равенствата (5). Тогава

$$1 = (3p^2 + 1) \frac{dp}{dy} p,$$

откъдето

$$dy = (3p^3 + p) dp.$$

Интегрираме и получаваме

$$y = \int (3p^3 + p) dp = \frac{3p^4}{4} + \frac{p^2}{2} + C.$$

От последното равенство и (9) намираме параметричното решение на даденото уравнение

$$\begin{cases} x = p^3 + p \\ y = \frac{3p^4}{4} + \frac{p^2}{2} + C. \end{cases}$$

3) Имаме уравнение от вида (6). Полагаме  $y' = p$ ,  $p = p(x)$ ,  $p > 0$  и получаваме

$$y = x + p - \ln p, \quad (10)$$

откъдето след диференциране по  $x$

$$y' = 1 + \frac{dp}{dx} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dx}.$$

Заместваме  $y'$  с  $p$  и намираме

$$p - 1 = \frac{p - 1}{p} \frac{dp}{dx}.$$

Делим двете страни на това уравнение с  $p - 1 \neq 0$ .  
Следователно

$$1 = \frac{1}{p} \frac{dp}{dx}.$$

Имаме

$$dx = \frac{dp}{p},$$

$$x = \ln p + C.$$

От последното равенство и (10) намираме параметричното решение на даденото уравнение

$$\begin{cases} x = \ln p + C \\ y = p + C. \end{cases}$$

Остана да проверим дали не сме изпуснали решение при делението с израза  $p - 1$ , за който предположихме, че е различен от 0. Ако  $p - 1 = 0$ , то  $p = 1$  и като поставим  $p = 1$  в (10), намираме  $y = x + 1$ , което очевидно също е решение на даденото уравнение.

4) Отг.  $2p^2x = C - C^2p^2$ ,  $py = C$ ;  $32x^3 = -27y^4$ ;  $y = 0$ .

## Уравнения на Клеро

### ► Уравнения от вида

$$y = xy' + f(y'), \quad (11)$$

където  $f$  е два пъти непрекъснато диференцируема функция в интервала  $(\alpha, \beta)$ , а  $f''$  не си мени знака в този интервал, се наричат уравнения на Клеро.

► Уравненията на Клеро са от вида (6) и се решават с метода на въвеждане на параметър. Полагаме

$$y' = p, \quad p = p(x).$$

Уравнението (11) приема вида

$$y = xp + f(p). \quad (12)$$

Диференцираме това уравнение спрямо  $x$  и получаваме

$$y' = p + xp' + f'(p)p',$$

където  $p' = \frac{dp}{dx}$ . Тъй като сме положили  $y' = p$ , то

$$p = p + xp' + f'(p)p',$$

следователно

$$p'(x + f'(p)) = 0.$$

(а) Ако  $p' = 0$ , то  $p = C$ . Заместваме в (12) и получаваме общото решение на уравнението на Клеро (11):

$$y = Cx + f(C).$$

(б) Ако  $x + f'(p) = 0$ , то като вземем предвид и изрази (12), получаваме още едно решение на (11):

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -f'(p)p + f(p). \end{cases}$$

За това решение може да се докаже, че е особено.



## Уравнения на Лагранж

► Уравнения от вида

$$y = x \varphi(y') + \psi(y'), \quad (13)$$

където  $\varphi$  и  $\psi$  са непрекъснато диференцируеми функции в интервала  $(\alpha, \beta)$ , се наричат уравнения на Лагранж.

► Ако  $\varphi(y') \equiv y'$ , то уравнението (13) е уравнение от вида (11), т.е. уравнение на Клеро. Затова по-нататък ще смятаме, че  $\varphi(y') \not\equiv y'$ .

► Уравненията на Лагранж са от вида (6) и се решават с метода на въвеждане на параметър. Полагаме

$$y' = p, \quad p = p(x).$$

Уравнението (13) приема вида

$$y = x \varphi(p) + \psi(p). \quad (14)$$

Диференцираме това уравнение спрямо  $x$  и получаваме

$$y' = \varphi(p) + x \varphi'(p) p' + \psi'(p) p',$$

където  $p' = \frac{dp}{dx}$ . Тъй като сме положили  $y' = p$ , то имаме

$$p - \varphi(p) = \frac{dp}{dx} (x \varphi'(p) + \psi'(p)).$$

Тогава при  $p - \varphi(p) \neq 0$  получаваме

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} x + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)},$$

което е линейно уравнение спрямо  $x$ . По формулата за общото решение на линейно уравнение намираме

$$x = e^{\int a(p) dp} \left( C + \int b(p) e^{-\int a(p) dp} dp \right), \quad C \in \mathbb{R},$$

където

$$a(p) = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}, \quad b(p) = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Последният израз за  $x$  и (14) дават параметричното решение на уравнението на Лагранж (13). Ако уравнението  $p - \varphi(p) = 0$  има решения  $p = p_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), то като поставим тези стойности на  $p$  в (14), получаваме следните решения на уравнението на Лагранж

$$y = xp_i + \psi(p_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

## Задача 2

Да се решат уравненията:

1)  $y = xy' - y'^2$ ;

2)  $xy' - y = \ln y'$ ;

3)  $y + xy' = 4\sqrt{y'}$ ;

4)  $y = xy'^2 + y'^2$ .

**Отговори.** Уравненията в 1) и 2) са уравнения на Клеро, а тези в 3) и 4) – уравнения на Лагранж.

$$1) y = Cx - C^2; y = \frac{x^2}{4}.$$

$$2) y = Cx - \ln C, C > 0; y = 1 + \ln x.$$

$$3) x = \frac{1}{\sqrt{p}}(C + \ln p), y = -\sqrt{p}(C + \ln p) + 4\sqrt{p}; y = 0.$$

$$4) x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1, y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}, C \neq 0; y = 0; y = x + 1.$$