Уравнения с разделящи се променливи

доц. д-р Теменужка Пенева

Информатика, 2021/2022

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = f(x)g(y),$$

където f и g са дадени непрекъснати функции, се наричат уравнения с разделящи се променливи.

- Към уравнения с разделящи се променливи се свеждат и уравненията от вида

$$X(x)\,dx + Y(y)\,dy = 0,$$

а така също

$$X_1(x)Y_1(y)\,dx + X_2(x)Y_2(y)\,dy = 0\,.$$

Теорема 1 (за съществуване и единственост)

Нека $D : a < x < b,\ c < y < d$ *и да разгледаме уравнението*

$$y' = f(x)g(y),$$

където $f \in C(a, b)$, $g \in C(c, d)$ *и* $g(y) \neq 0$ *за всяко* $y \in (c, d)$. *Тогава през всяка точка* $(x_0, y_0) \in D$ *минава единствено решение на даденото уравнение.*

Забележка. С $C(a, b)$ ще означаваме множеството от всички непрекъснати функции в интервала (a, b).

- Припомняме, че функцията $F(x)$ се нарича примитивна функция на функцията $f(x)$ в интервала (a, b), ако $F(x)$ е диференцируема в (a, b) и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in (a, b)$.

- Ако $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в интервала (a, b), то всички примитивни функции на $f(x)$ в този интервал имат вида $F(x) + C$.

- По дефиниция $\int f(x)\, dx$ е множеството от всички примитивни функции на $f(x)$, т.е.

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \ \text{където} \ F'(x) = f(x).$$

- Често за удобство с $\int f(x)\, dx$ ще означаваме една примитивна на $f(x)$ (при решаването на неопределения интеграл няма да добавяме константа C).

Теорема 2 (Формула за общото решение)

Нека е дадено уравнението с разделящи се променливи

$$y' = f(x)g(y),$$

където $f \in C(a,b)$, $g \in C(c,d)$ *и* $g(y) \neq 0$ *за всяко* $y \in (c,d)$. *Тогава, ако* $F(x)$ *е примитивна на* $f(x)$ *в интервала* (a,b) *и* $G(y)$ *е примитивна на* $\frac{1}{g(y)}$ *в интервала* (c,d), *то общото решение на уравнението е*

$$G(y) = F(x) + C,$$

т.е.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Задача 1

Да се решат уравненията:
1) $y' = -\dfrac{1}{x^2}$*;*
2) $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$*;*
3) $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = -1$*;*
4) $x^2y' - \cos 2y = 1$*;* $y(x) \to \frac{9\pi}{4}$ *при* $x \to \infty$*.*

Решение.

1) Тъй като дясната страна е функция само на x, можем да решим уравнението чрез непосредствено интегриране. Имаме

$$y = \int \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{x} + C,$$

където $C \in \mathbb{R}$ е произволна константа.

2) Имаме

$$(x+1)\,dy = -xy\,dx.$$

Разделяме двете страни с израза $(x+1)y \neq 0$ и получаваме

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{x+1}\,dx.$$

Интегрираме двете страни на уравнението

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(-\frac{x}{x+1}\right) dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

откъдето

$$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + C_1,$$

и след антилогаритмуване

$$|y| = e^{-x}|x+1|e^{C_1}\,.$$

Означаваме $C = \varepsilon e^{C_1}$, където $\varepsilon = \pm 1$. Получаваме общото решение

$$y = Ce^{-x}(x+1)\,.$$

Остана да проверим дали $x = -1$ и $y = 0$ са решения на изходното уравнение. Първо записваме даденото уравнение във вида

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x+1}{xy}.$$

От $x = -1$ имаме $\frac{dx}{dy} = 0$ и след заместване се вижда, че горното равенство е изпълнено за всяко y. Следователно $x = -1$ е решение на уравнението.
Сега записваме даденото уравнение във вида

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x+1}.$$

Поставяйки $y = 0$ в него, виждаме, че се получава тъждество и следователно $y = 0$ също е решение.

3) Първо ще намерим общото решение. В уравнението заместваме y' с $\frac{dy}{dx}$ и получаваме

$$(x^2 - 1)\,dy = -2xy^2\,dx,$$

откъдето, при $y^2(x^2-1) \neq 0$, следва

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2x}{x^2-1}\,dx.$$

Интегрираме двете страни и получаваме

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Следователно

$$\frac{1}{y} = \ln|x^2-1| + C_1,$$

$$\frac{1}{y} = \ln\left(e^{C_1}|x^2-1|\right).$$

Полагаме $\varepsilon e^{C_1} = C$, $C \neq 0$, и получаваме общото решение

$$y = \frac{1}{\ln C(x^2 - 1)}.$$

Сега ще намерим частното решение, за което $y(0) = -1$. В общото решение заместваме $x = 0$, $y = -1$ и намираме $C = -1/e$. Тогава търсеното частно решение е

$$y = \frac{1}{\ln\left(-\frac{1}{e}(x^2 - 1)\right)} = \frac{1}{\ln(1 - x^2) - 1}.$$

4) Отг. $\operatorname{tg} y = -\frac{2}{x} + 1$.

- Уравнения от вида $y' = f(ax + by + c)$, където f е дадена непрекъсната функция, можем да сведем до уравнения с разделящи се променливи като въведем нова неизвестна функция z на променливата x по следния начин:

$$z = ax + by + c.$$

Задача 2

Решете уравненията:
1) $y' - y = 2x - 3$*;*
2) $y' = \cos(y - x)$*.*

Решение. 1) Имаме

$$y' = 2x + y - 3.$$

Полагаме $z = 2x + y - 3,\ z = z(x)$. Оттук $y = z - 2x + 3$, $y' = z' - 2$. Заместваме в даденото уравнение и получаваме

$$z' - 2 = 2x + z - 2x + 3 - 3,$$
$$z' = z + 2,$$

което е уравнение с разделящи се променливи.

Последователно имаме

$$\frac{dz}{z+2} = dx, \quad z+2 \neq 0,$$

$$\int \frac{dz}{z+2} = \int dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

$$\ln|z+2| = x + C_1,$$

$$|z+2| = e^x e^{C_1},$$

$$z + 2 = Ce^x, \quad C \neq 0.$$

Като заместим $z = y + 2x - 3$ в последното равенство, получаваме, че общото решение на даденото уравнение е $y = 1 - 2x + Ce^x$, $C \neq 0$.

Накрая ще отбележим, че $z = -2$ очевидно е решение на уравнението $z' = z + 2$, откъдето следва, че $2x + y = 1$ е решение на даденото уравнение.

2) Отг. $\operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} = x + C; \quad y - x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.