

Линейни нехомогенни системи диференциални
уравнения.

Метод на Лагранж.

Метод на неопределените коефициенти

доц. д-р Теменужка Пенева

Информатика, 2021/2022

Линейни нехомогенни системи диференциални уравнения

► Система от вида

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + a_{13}(t)z + f_1(t) \\ \dot{y} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + a_{23}(t)z + f_2(t) \\ \dot{z} = a_{31}(t)x + a_{32}(t)y + a_{33}(t)z + f_3(t), \end{cases} \quad (1)$$

с неизвестни функциите $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, където $f_i(t)$, $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, 3$) са непрекъснати функции в интервала (α, β) , се нарича линейна нехомогенна система диференциални уравнения.

Ако въведем означенията

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

то системата (1) може да се запише във вида

$$\dot{X} = AX + F. \quad (2)$$

► За решаването на системата (2) следваме следния алгоритъм:

I. Разглеждаме съответната на (2) хомогенна система

$$\dot{X} = AX \quad (3)$$

и намираме общото ѝ решение

$$X_{\text{хом}} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3.$$

II. Намираме едно частно решение

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{pmatrix}$$

на нехомогенната система (2).

III. Общото решение на нехомогенната система (2) е равно на сумата от общото решение на хомогенната система (3) и намереното частно решение $\eta(t)$, т.е.

$$X_{\text{нехом}} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \eta(t).$$

Метод на Лагранж

Нека

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

където c_1 , c_2 , c_3 са произволни реални константи, е общото решение на хомогенното уравнение (3).

Частно решение на (2) по метода на Лагранж търсим във вида

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = c_1(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + c_3(t) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

където $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ са решения на системата

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 + \dot{c}_3 x_3 = f_1 \\ \dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2 + \dot{c}_3 y_3 = f_2 \\ \dot{c}_1 z_1 + \dot{c}_2 z_2 + \dot{c}_3 z_3 = f_3. \end{array} \right.$$

За всяко $t \in (\alpha, \beta)$ можем да намерим $\dot{c}_1(t)$, $\dot{c}_2(t)$ и $\dot{c}_3(t)$, а след това чрез интегриране от производните да получим и самите функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$. С това частното решение $\eta(t)$ е намерено.

Задача 1

Да се реши системата

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

Решение. Първо решаваме съответната хомогенна система

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

За тази система

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристичното уравнение

$$0 = |A - \lambda E| = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 + 1$$

има за корени числата $\lambda_{1,2} = \pm i$. Ще намерим собствен вектор $h_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, съответстващ на корена $\lambda_1 = i$. Имаме

$$\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$\begin{cases} (1-i)\alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + (-1-i)\beta = 0, \end{cases}$$

откъдето $\beta = (1-i)\alpha$. Така намираме, че $h_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ (1-i)\alpha \end{pmatrix}$ и избираме $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

Сега разглеждаме комплекснозначното решение на дадената система

$$\begin{aligned}
 X_1 &= h_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} e^{it} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t + i \sin t - i \cos t + \sin t \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тогава общото решение на хомогенната система е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{хом}} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Преминаме към търсене на частно решение на дадената нехомогенна система по метода на Лагранж от вида

$$\eta = c_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}, \quad (5)$$

където $c_1(t)$ и $c_2(t)$ са решения на

$$\begin{cases} \dot{c}_1 \cos t + \dot{c}_2 \sin t = \frac{1}{\cos t} \\ \dot{c}_1(\cos t + \sin t) + \dot{c}_2(\sin t - \cos t) = 0. \end{cases}$$

Имаме $\dot{c}_1 = 1 - \frac{\sin t}{\cos t}$, откъдето $c_1(t) = t + \ln |\cos t|$. Аналогично $\dot{c}_2 = \frac{\sin t}{\cos t} + 1$, откъдето $c_2(t) = t - \ln |\cos t|$. Сега заместваме получените изрази за $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в (5) и намираме $\eta(t)$.

Търсеното решение на нехомогенната система получаваме след събиране на изразите в (4) и (5):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{нехом}} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} \\ + (t + \ln |\cos t|) \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} \\ + (t - \ln |\cos t|) \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Метод на неопределените коефициенти

► Ако е дадена линейна нехомогенна система (1) с постоянни коефициенти (т.е. всички $a_{ij} = \text{const}$) и функциите f_1 , f_2 и f_3 са от някой от видовете по-долу, то за търсене на частното решение на (1) може да се приложи методът на неопределените коефициенти.

► Нека е дадена линейна нехомогенна система (1), в която

$$\begin{aligned}f_1 &= q_1(t) e^{\alpha t}, \\f_2 &= q_2(t) e^{\alpha t}, \\f_3 &= q_3(t) e^{\alpha t},\end{aligned}\tag{6}$$

където $q_i(t)$ са полиноми, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава тази система допуска частно решение от вида

$$\begin{aligned}\eta_1 &= Q_1(t) e^{\alpha t}, \\\eta_2 &= Q_2(t) e^{\alpha t}, \\\eta_3 &= Q_3(t) e^{\alpha t},\end{aligned}\tag{7}$$

където $Q_i(t)$ са полиноми от степен $k + m$; k е кратността на α като характеристичен корен ($k = 0$, ако α не е характеристичен корен); m е най-високата степен на дадените полиноми $q_i(t)$.

► Нека е дадена линейна нехомогенна система (1), в която

$$\begin{aligned}f_1 &= (p_1(t) \cos \beta t + q_1(t) \sin \beta t) e^{\alpha t}, \\f_2 &= (p_2(t) \cos \beta t + q_2(t) \sin \beta t) e^{\alpha t}, \\f_3 &= (p_3(t) \cos \beta t + q_3(t) \sin \beta t) e^{\alpha t},\end{aligned}\tag{8}$$

където $p_i(t)$, $q_i(t)$ са полиноми, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогава тази система допуска частно решение от вида

$$\begin{aligned}\eta_1 &= (P_1(t) \cos \beta t + Q_1(t) \sin \beta t) e^{\alpha t}, \\ \eta_2 &= (P_2(t) \cos \beta t + Q_2(t) \sin \beta t) e^{\alpha t}, \\ \eta_3 &= (P_3(t) \cos \beta t + Q_3(t) \sin \beta t) e^{\alpha t},\end{aligned}\tag{9}$$

където $P_i(t)$, $Q_i(t)$ са полиноми от степен $k + m$; k е кратността на $\alpha + i\beta$ като характеристичен корен ($k = 0$, ако $\alpha + i\beta$ не е характеристичен корен); m е най-високата степен на дадените полиноми $p_i(t)$, $q_i(t)$.

Задача 2

Да се решат системите:

$$1) \begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = -2x + y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - 5 \sin t; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

Решение. 1) Характеристичните корени на системата са $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Ще покажем само как се намира частното решение. В дадената система

$$f_1 = (-1) \cdot e^{2t},$$

$$f_2 = 0 \cdot e^{2t},$$

следователно имаме случая (6) с $\alpha = 2$, $q_1(t) = -1$, $q_2(t) = 0$ и търсим частното решение във вида (7). Числото $\alpha = 2$ е еднократен характеристичен корен, откъдето следва, че $k = 1$. Полиномите q_1 и q_2 са от нулева степен, следователно $m = 0$. Тогава $k + m = 1$, $Q_1 = at + b$, $Q_2 = ct + d$,

$$\begin{aligned}\eta_1 &= (at + b)e^{2t}, \\ \eta_2 &= (ct + d)e^{2t}.\end{aligned}$$

Сега замествахме в дадената система x с η_1 и y – с η_2 . Имаме

$$\left| \begin{aligned} ((at + b)e^{2t})' &= 4(at + b)e^{2t} + (ct + d)e^{2t} - e^{2t} \\ ((ct + d)e^{2t})' &= -2(at + b)e^{2t} + (ct + d)e^{2t}, \end{aligned} \right.$$

диференцираме, съкращаваме на e^{2t} и тогава получаваме

$$\begin{cases} 2at + a + 2b = (4a + c)t + 4b + d - 1 \\ 2ct + c + 2d = (-2a + c)t - 2b + d. \end{cases}$$

Приравняваме коефициентите пред съответните степени на t :

$$\begin{cases} 2a = 4a + c \\ a + 2b = 4b + d - 1 \\ 2c = -2a + c \\ c + 2d = -2b + d. \end{cases}$$

За решения на тази неопределена система намираме, например, $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 0$. Следователно

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (t + 1) e^{2t}, \\ \eta_2 &= -2t e^{2t}. \end{aligned}$$

Решението на нехомогенната система е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} t+1 \\ -2t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

2) Характеристичните корени на системата са $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

В дадената система

$$f_1 = (0 \cdot \cos t + 0 \cdot \sin t)e^{0 \cdot t},$$

$$f_2 = (0 \cdot \cos t - 5 \sin t)e^{0 \cdot t},$$

следователно имаме случая (8) с $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $p_1(t) = 0$, $q_1(t) = 0$, $p_2(t) = 0$, $q_2(t) = -5$ и търсим частното решение във вида (9). Числото $\alpha + i\beta = i$ не е характеристичен корен, откъдето следва, че $k = 0$. Полиномите p_i и q_i са от нулева степен, следователно $m = 0$. Тогава $k + m = 0$, $P_1(t) = a$, $Q_1(t) = b$, $P_2(t) = c$, $Q_2(t) = d$,

$$\eta_1 = a \cos t + b \sin t,$$

$$\eta_2 = c \cos t + d \sin t.$$

Сега заместваме в дадената система x с η_1 и y с η_2 . Имаме

$$\begin{cases} (a \cos t + b \sin t)' = (a \cos t + b \sin t) + 2(c \cos t + d \sin t) \\ (c \cos t + d \sin t)' = (a \cos t + b \sin t) - 5 \sin t, \end{cases}$$

откъдето

$$\begin{cases} -a \sin t + b \cos t = (a + 2c) \cos t + (b + d) \sin t \\ -c \sin t + d \cos t = a \cos t + (b - 5) \sin t. \end{cases}$$

Във всяко от уравненията приравняваме съответните коефициенти пред $\cos t$ и $\sin t$:

$$\begin{cases} b = a + 2c \\ -a = b + d \\ d = a \\ -c = b - 5. \end{cases}$$

За решение на тази система намираме $a = -1$, $b = 3$, $c = 2$,
 $d = -1$. Следователно

$$\eta_1 = -\cos t + 3 \sin t,$$

$$\eta_2 = 2 \cos t - \sin t.$$

Решението на нехомогенната система е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -\cos t + 3 \sin t \\ 2 \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

3) В тази система

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^{4t} \end{pmatrix}$$

и тъй като числото пред t в степенния показател е различно за f_1 и f_2 , то F не е от вида (6). Ще използваме следната

Лема. Ако $\eta^{(1)}$ е частно решение на линейната нехомогенна система $\dot{X} = AX + F_1$, а $\eta^{(2)}$ е частно решение на $\dot{X} = AX + F_2$, то $\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)}$ е частно решение на $\dot{X} = AX + F_1 + F_2$.

Представяме вектор-функцията F в нашата задача по следния начин:

$$F = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3e^{4t} \end{pmatrix} = F_1 + F_2.$$

Тогава съгласно горната лема, трябва да намерим две частни решения $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$, съответно на системите

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = x + 2y + 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 0 \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

Сумата $\eta^{(1)} + \eta^{(2)}$ ще бъде решение на дадената система.