Числови редове. Степенни редове

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

1 Безкрайни числови редове

2 Редове с неотрицателни членове
- Признаци за сходимост и разходимост на редове с положителни членове

3 Редове с алтернативно сменящи се знаци

4 Абсолютно сходящи редове

5 Редици от функции. Редове от функции
- Степенни редове

Безкрайни числови редове

- Нека е дадена една редица от реални числа

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots . \tag{1}$$

Ако започнем да събираме последователно членовете на тази редица, ще получим следните суми:

$$\begin{array}{ccl} S_1 & = & a_1, \\ S_2 & = & a_1 + a_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n & = & a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{array}$$

и т.н.

- Да разгледаме редицата

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots.$$

Ако тази редица е сходяща и ако S е нейната граница, то ние сме склонни да разглеждаме числото S като число, което се е получило като че ли в резултат на последователно събиране на всички членове на редицата (1) – една операция, сама по себе си невъзможна. Такъв подход прави естествена следната

Дефиниция 1

Израз от вида

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots , \tag{2}$$

където $a_1, a_2, \ldots$ *са реални числа, се нарича безкраен ред от реални числа или по-кратко ред. Числата* $a_1, a_2, \ldots$ *се наричат членове на този ред. Сумата*

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

се нарича n*-та частична сума на реда. Ако редицата от частичните суми*

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots \tag{3}$$

е сходяща и клони към S*, то редът се нарича сходящ, а числото* S *– негова сума. Ако редицата* (3) *е разходяща, то самият ред се нарича разходящ.*

- Фактът, че числото S е сума на реда (2), се записва с помощта на равенството

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots . \tag{4}$$

- Нека подчертаем, че понятието сума на ред се въвежда само за сходящите редове. Разходящите редове не притежават сума.
- Изразът (2) се записва накратко още и по следния начин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5}$$

Примери: 1) Редът

$$1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots ,$$

всички членове на който са равни на 1, е разходящ, тъй като редицата от неговите частични суми е

$$1, 2, \ldots, n, \ldots ,$$

която, както знаем, е разходяща.

2) Редът

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots \tag{6}$$

се нарича безкрайна геометрична прогресия. Ще покажем, че когато числото q удовлетворява неравенствата $-1 < q < 1$, то редът (6) е сходящ. За целта образуваме неговата частична сума:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Както знаем от Лекция 2, $\lim q^n = 0$, когато $-1 < q < 1$. Следователно за такива q ще имаме

$$\lim S_n = \lim \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} \lim q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

И така виждаме, че при $-1 < q < 1$, т.е. при $|q| < 1$, редът (6) е сходящ и можем да напишем равенството

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots .$$

Ще отбележим някои най-прости свойства на сходящите редове в следната

Теорема 1

1) Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *е сходящ, а* α *е произволно число, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2) Ако са дадени два сходящи реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Следната теорема дава едно важно свойство на сходящите редове.

Теорема 2 (Необходимо условие за сходимост на ред)

Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то редицата $\{a_n\}$ от неговите членове клони към 0.

Ще отбележим, че обратното твърдение не е вярно, т.е. възможно е редицата от членовете на един безкраен ред да клони към 0, но въпреки това редът да не е сходящ. Например редът

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots ,$$

известен като хармоничен ред, е разходящ, въпреки че $\lim \frac{1}{n} = 0$.

От Теорема 2 веднага получаваме следното

Следствие 1 (Достатъчно условие за разходимост на ред)

Ако редицата от членовете на един безкраен ред не клони към 0*, то той е разходящ.*

Редове с неотрицателни членове

- Ако всички членове a_n на един безкраен ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ са неотрицателни числа, то редицата $\{S_n\}$ от неговите частични суми е растяща. Както знаем, за да докажем, че една растяща редица е сходяща, достатъчно е да докажем, че тя е ограничена. Тази забележка ни помага в доказателството на следната важна

Теорема 3 (Принцип за сравняване на редове с неотрицателни членове)

Нека са дадени два реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *с неотрицателни членове и нека за всяко* n *е изпълнено неравенството* $a_n \leq b_n$*.*
Тогава:
1) Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *е сходящ, то редът* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *също е сходящ;*
2) Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *е разходящ, то редът* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *също е разходящ.*

Примери: 1) Нека е даден редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \cdots . \qquad (7)$$

Тъй като имаме неравенството

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} \le \frac{1}{2^{n-1}},$$

а редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

е сходящ като безкрайна геометрична прогресия с частно $q = \frac{1}{2}$, то от Теорема 3 следва, че и редът (7) също е сходящ.

2) Да разгледаме реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots . \tag{8}$$

Имаме неравенството

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n-1}.$$

Тогава от факта, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ е разходящ, защото е разходящ хармоничният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, и от Теорема 3 следва, че е разходящ и даденият ред (8).

Признаци за сходимост и разходимост на редове с положителни членове

- Като се използва принципът за сравняване на редове с неотрицателни членове, могат да се докажат няколко достатъчни условия за сходимост и разходимост, известни под названието признаци за редове с положителни членове. Ние ще посочим три такива признака. Навсякъде при тяхната формулировка ще се предполага, че е даден един ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, всичките членове на който са положителни числа.

Теорема 4 (Признак на Даламбер)

Нека е даден редът (5) и $a_n > 0$ *за всяко* n. *Нека*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Тогава:

ако $L < 1$, *то редът (5) е сходящ;*

ако $L > 1$, *то редът (5) е разходящ.*

Теорема 5 (Признак на Коши)

Нека е даден редът (5) *и* $a_n > 0$ *за всяко* n. *Нека*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Тогава:

ако $L < 1$, *то редът* (5) *е сходящ;*

ако $L > 1$, *то редът* (5) *е разходящ.*

Теорема 6 (Признак на Раабе-Дюамел)

Нека е даден редът (5) *и* $a_n > 0$ *за всяко* n. *Нека*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L.$$

Тогава:

ако $L > 1$, *то редът* (5) *е сходящ;*
ако $L < 1$, *то редът* (5) *е разходящ.*

- Да отбележим, че ако при прилагането на който и да е от трите признака се установи, че границата L е равна на 1, то този признак не ни дава нищо и въпросът за сходимостта на реда (5) остава открит.
- Заслужава си да обърнем внимание и на факта, че при прилагането на признака на Раабе-Дюамел участва величината $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, която е реципрочна на разглежданата в признака на Даламбер. Ето защо към признака на Раабе-Дюамел обикновено прибягваме, когато признакът на Даламбер не може да ни помогне, например $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Примери: 1) Да се изследва за сходимост редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.
Ще използваме признака на Даламбер. Имаме

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \\
&= \frac{(n+1)!\, n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim \frac{1.2\dots n\,(n+1).n^n}{1.2\dots n.(n+1)^n\,(n+1)} \\
&= \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Тъй като $\frac{1}{e} < 1$, то от признака на Даламбер следва, че дадениият ред е сходящ.

2) Да се изследва за сходимост редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$.

Сега използваме признака на Коши. Тъй като

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim \frac{2}{n} = 0 < 1,$$

то редът е сходящ.

3) Да се изследва за сходимост редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Първо ще се опитаме да приложим признака на Даламбер. Имаме

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

така че в случая признакът на Даламбер не дава резултат. Прилагаме признака на Раабе-Дюамел. Имаме

$$\begin{aligned}
\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= \lim n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}-1\right)\\
&= \lim n\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}-1\right)\\
&= \lim n\cdot\frac{2n+1}{n^2} = 2 > 1,
\end{aligned}$$

откъдето следва, че редът е сходящ.

Редове с алтернативно сменящи се знаци

Признакът на Лайбниц се отнася за редове, чиито членове си сменят последователно знака. Той гласи:

Теорема 7 (Признак на Лайбниц)

Ако редицата от положителни числа $\{a_n\}$ е намаляваща и клони към 0, то редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

е сходящ.

Примери: 1) Да разгледаме реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Прилагаме признака на Лайбниц, като в случая $a_n = \frac{1}{n}$. Редицата $\{a_n\}$ е намаляваща, защото $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$. Освен това $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$. Тогава от признака на Лайбниц следва, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е сходящ.

Абсолютно сходящи редове

- Както знаем, сумата на краен брой числа не се променя, когато разместим по произволен начин събираемите – в това се състои т. нар. комутативен закон на събирането.
- Този закон обаче не е валиден при сходящите безкрайни редове и като разместваме членовете им, ние рискуваме да променим и сумите им.
- Нещо повече, може да се покаже, че даже има случаи, когато членовете на един сходящ ред могат да бъдат разместени по такъв начин, че новополученият ред да бъде разходящ.
- Има една важна категория сходящи редове обаче, при които можем да разместваме по произволен начин членовете им, без с това да променяме сумите им. Това са т. нар. абсолютно сходящи редове.

Дефиниция 2

Един безкраен ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича абсолютно сходящ, ако е сходящ редът $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, съставен от абсолютните стойности на неговите членове.

- Ще отбележим, че в тази дефиниция нищо не се казва за сходимостта на дадения ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ето защо ще установим следната

Теорема 8

Всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.

Примери: 1) Всички сходящи редове с неотрицателни членове са абсолютно сходящи. Такъв например е редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

както видяхме по-рано в примерите.

2) Редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

е с алтернативно сменящи се знаци и е абсолютно сходящ, защото е сходящ редът от абсолютните му стойности

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

3) Съществуват обаче сходящи редове, които не са абсолютно сходящи (те се наричат условно сходящи редове). Такъв например е редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

за който доказахме, че е сходящ с помощта на признака на Лайбниц. Въпреки че е сходящ, този ред не е абсолютно сходящ, защото редът от абсолютните му стойности

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

наречен хармоничен ред, е разходящ.

Редици от функции. Редове от функции

- Ако е дадено едно множество M от реални числа и ако на всяко естествено число n съпоставим по една функция $f_n(x)$, дефинирана в M, то ще получим редица от функции

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots. \tag{9}$$

При всяко фиксирано $x \in M$, редицата (9) представлява една редица от числа, която може да бъде сходяща или разходяща. Множеството N от онези точки x, за които (9) е сходяща, се нарича област на сходимост на редицата (9). Границата на редицата (9) зависи, разбира се, от x и представлява следователно една функция на x, дефинирана в множеството N.

- Ако е дадена редицата от функции (9), всяка от които е дефинирана в множеството M, можем да дефинираме понятието ред от функции (функционален ред) по следния начин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots . \qquad (10)$$

  При всяко фиксирано $x \in M$, редът (10) представлява един ред от числа, който може да бъде сходящ или разходящ. Множеството N от точките x, за които е сходящ даден ред от функции (10), се нарича негова област на сходимост. Сумата на реда (10) е очевидно функция на x, дефинирана в N.

Степенни редове

- Степенните редове са една специална категория редове от функции. Важната роля, която играят в математическия анализ и неговите приложения, се обяснява с обстоятелството, че техните частични суми са полиноми.
- Общият вид на един степенен ред е следният:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots , \quad (11)$$

  където $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ са реални числа, наричани коефициенти на степенния ред. Числото a също е реално. Казва се още, че степенният ред (11) е по степените на $x - a$.

- Множеството от точките x, за които е сходящ един степенен ред, се нарича негова област на сходимост. Очевидно е, че всеки степенен ред от вида (11) е сходящ поне за точката $x = a$. В сила е следната важна

Теорема 9

На всеки степенен ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ съответства едно число R, $0 \leq R \leq +\infty$, със свойствата:
1) Редът е абсолютно сходящ за всяко x, за което $|x-a| < R$;
2) Редът е разходящ за всяко x, за което $|x-a| > R$.

- Интервалът $|x - a| < R$ се нарича интервал на сходимост за реда, а числото R се нарича радиус на сходимост за реда.
- Вижда се, че ако $R = 0$, то редът е сходящ само за точката $x = a$;
- Ако $R = +\infty$, то редът е абсолютно сходящ за всяко реално число x;
- Най-накрая, ако $0 < R < +\infty$, то редът е абсолютно сходящ за $x \in (a - R, a + R)$ и разходящ за $x \in (-\infty, a - R) \cup (a + R, +\infty)$. В този случай теоремата не дава отговор на въпроса дали редът е сходящ в крайните точки $x = a - R$ и $x = a + R$. Сходимостта в тези точки трябва да се изследва с други методи.

- За намиране радиуса на сходимост най-често се използват признаците на Коши и Даламбер. Не е трудно да се покаже, че радиусът на сходимост може да се определи с формулата (по Коши):

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{12}$$

или с формулата (по Даламбер):

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| . \tag{13}$$

Примери: 1) Да определим радиуса на сходимост на реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

Ще отбележим, че в случая $a = 0$ и $a_n = 2^n$ за $n = 0, 1, 2, \dots$. За определяне радиуса на сходимост ще използваме формулата (12). Затова намираме

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{2^n} = \lim 2 = 2.$$

Тогава $R = \frac{1}{2}$ и следователно даденият ред е абсолютно сходящ при $|x| < \frac{1}{2}$.

2) Да определим радиуса на сходимост на реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(x-1)^n.$$

В тази задача $a = 1$ и $a_n = \frac{2^n}{n!}$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$. Заради наличието на $n!$ в a_n, за определяне радиуса на сходимост ще използваме формулата (13). Имаме

$$\begin{aligned} R &= \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{2^n}{n!} : \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\ &= \lim \left(\frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \lim \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= \frac{1}{2} \lim \frac{1.2 \ldots n(n+1)}{1.2 \ldots n} \\ &= \frac{1}{2} \lim (n+1) = +\infty. \end{aligned}$$

Следователно даденият ред е сходящ за всяко реално число x.