

# Задачи по линейна алгебра и аналитична геометрия

за специалност "Информатика", I курс

16 септември 2020 г.

## 1. Тема

1. Установете кое от следните множества е векторно пространство:

а) множеството  $P = \{(x, y, z) \in R^3, (x + y)^2 = 2x + y\}$ ,

б) множеството на матриците от вида  $\begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & 0 \end{pmatrix}$ ,  $(a, b, c \in R)$ , Определете размерността на векторните пространства.

## 2. Тема

1. Установете за всяка от следните системи вектори дали е линейно зависима или независима:

а)  $a_1 = (1, 0, 0)$ ,  $a_2 = (-1, 2, 1)$ ,  $a_3 = (3, 0, -2)$ .

б)  $a_1 = (1, 1, 0)$ ,  $a_2 = (2, -1, -2)$ ,  $a_3 = (3, 0, -2)$ .

2. Да се намерят координатите на средата на отсечка с краища  $A(5, 8)$ ,  $B(1, -2)$ ;

3. Да се намерят координатите на медицентъра  $G$  на триъгълник, чиито върхове са  $A(1, 1)$ ,  $B(-2, 4)$  и  $C(-4, -4)$ .

4. Да се провери дали точките  $A(3, 2)$ ,  $B(1, 5)$ ,  $C(-3, 0)$  лежат на една права.

5. Да се намери четвъртият връх  $C$  на успоредника  $ABCD$ , ако  $A(3, 0)$ ,  $B(3, 3)$ ,  $D(0, 3)$ .

## 3. Тема

1. Ако  $\vec{a}(3, 1)$ ,  $\vec{b}(-3, 0)$ , да се пресметнат  $\vec{a}\vec{b}$ ,  $\vec{a}^2$ ,  $\vec{b}^2$ ,  $(\vec{a}-\vec{b})^2$ ,  $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-3\vec{b})$ .

2. Да се пресметне  $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$ , ако  $\vec{a}(-1, 2, 0)$ ,  $\vec{b}(2, 0, 4)$ . Да се намери косинусът на ъгъла между векторите  $\vec{p} = (2\vec{a} - \vec{b})$  и  $\vec{q} = (\vec{a} + 2\vec{b})$ .

## 4. Тема

1. Да се пресметнат детерминантите:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \text{ г) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Да се решат уравненията и неравенствата:

а)  $\begin{vmatrix} x & x-2 \\ 8 & 8-x \end{vmatrix} = 0$ ; б)  $\begin{vmatrix} 2x & 4x \\ 3 & x \end{vmatrix} < -10$ ; в)  $\begin{vmatrix} 1 & x & -2 \\ 3 & 2 & -x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} > 6$ ;

г)  $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 2-x & 0 \end{vmatrix} = 0$ .

### 5. Тема

1. Ако са дадени са матриците:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 12 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -2 \\ 10 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Намерете: а)  $B + A$ ; б)  $B - A$ ; в)  $2A - 3B$ ; г)  $4A$ ; д)  $-\frac{1}{2}B$ .

2. Пресметнете произведението на матриците, ако това е възможно:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Да се намери матрица  $M = A^2 - BA + 3B$ , ако

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Да се намери обратната матрица  $A^{-1}$ , ако

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

5. Да се решат матричните уравнения:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ ;

### 6. Тема

1. Намерете ранга на матриците и на системата вектори:

а)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

б)  $a_1 = (3, -1, 3, 2)$ ,  $a_2 = (5, -3, 2, 3)$ ,  $a_3 = (-2, 2, 1, -1)$ .

2. Да се решат системите уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

### 7. Тема

1. Да се намери лицето на триъгълник  $ABC$ , където  $A(2, 2)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(0, -2)$ .

2. Да се докаже, че точките  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(-2, 2, -2)$ ,  $C(1, 1, 3)$  образуват триъгълник. Да се намери дължината на височината към страната  $AB$ .

### 8. Тема

1. Да се намери уравнението на права  $p$ :

а) през точка  $Q(0, 1)$ , сключваща ъгъл  $120^\circ$  с  $Ox$ ;

б) през точка  $L(-3, 1)$ , перпендикулярна на  $Ox$ ;

2. Дадени са точките  $A(2, 5)$ ,  $B(2, -5)$ ,  $C(0, 2)$ . Да се намерят уравненията на страните на триъгълника  $ABC$  и уравнението на височината през т.  $C$ .

3. Дадена е точката  $A(1, 5)$  и правата  $g: x - 3y - 6 = 0$ . Да се намери ортогонално симетричната точка  $A_1$  на точката  $A$  относно правата  $g$ .

4. Страните на триъгълника  $ABC$  са с уравнения  $AB: x + 4y - 2 = 0$ ;  $BC: 4x + 7y - 1 = 0$ ;  $CA: 4x - 7y + 15 = 0$ . Намерете координатите на върховете  $A$ ,  $B$  и  $C$  и уравнението на медианата през върха  $B$ .

5. Да се намери окръжност през точките  $A(1, 2)$  и  $B(-1, 2)$ , ако центърът ѝ лежи върху правата  $l: x = 5$ .

**Задачи.** (10. Тема)

1. Дадена е елипсата  $\varepsilon: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Да се намерят върховете, фокусите и директрисите ѝ.

2. Дадена е хиперболата  $\chi: \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$ . Да се намерят върховете, асимптотите, фокусите и директрисите ѝ.

3. Дадена е параболата  $\pi: x^2 = 8y$ . Да се намерят върхът, фокусът и директрисата ѝ.