Интегриране по части и смяна на променливите при неопределените интеграли

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

Интегриране по части

- Важно средство за пресмятане на неопределени интеграли е т.нар. формула за интегриране по части:

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x), \tag{1}$$

  където $u(x)$ и $v(x)$ са функции, диференцируеми в даден интервал Δ. Като използваме, че $du(x) = u'(x)dx$ и $dv(x) = v'(x)dx$, то формулата (1) може да се запише и така:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

- Формулата за интегриране по части се използва, когато желаем да пресметнем интеграла в лявата й страна, но интегралът, записан в дясната, е по-достъпен.

Примери:

$$1)\int \ln x\,dx = [u=\ln x,\ v=x] \overset{(1)}{=} x\ln x - \int x\,d\ln x$$
$$= x\ln x - \int x(\ln x)'\,dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}\,dx$$
$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

$$2)\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\int \ln x\,dx^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left[x^2\ln x - \int x^2\,d\ln x\right]$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2(\ln x)'\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

- При пресмятане на интеграли от вида

$$\int P_m(x)e^{\alpha x}\,dx$$

и

$$\int P_m(x)\sin\beta x\,dx, \quad \int P_m(x)\cos\beta x\,dx,$$

където $P_m(x)$ е полином от степен m, се налага m-кратно интегриране по части, като всеки път започваме с внасяне на функциите $e^{\alpha x}$, $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$ под знака на диференциала. Примери 3) и 4) са от този вид.

$$3)\ \int xe^x\,dx = \int x\,de^x \overset{(1)}{=} xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

$$
\begin{aligned}
4)\ \int x^2\cos x\,dx &= \int x^2\,d\sin x = [\textit{първо интегриране по части}]\\
&\overset{(1)}{=} x^2\sin x - \int \sin x\,dx^2\\
&= x^2\sin x - \int (x^2)'\sin x\,dx\\
&= x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx\\
&= x^2\sin x + 2\int x\,d(\cos x)\\
&= [\textit{второ интегриране по части}]\\
&\overset{(1)}{=} x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx\\
&= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.
\end{aligned}
$$

- Интеграли от вида

$$I_1 = \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx, \qquad I_2 = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$$

се пресмятат с двукратно прилагане на формулата за интегриране по части. Характерното тук е, че при намирането на единия интеграл, задължително се използва и другият интеграл. Следващият пример показва как точно става това.

$$5)\ \int e^x \sin x\,dx = \int \sin x\,de^x \overset{(1)}{=} e^x \sin x - \int e^x\,d\sin x$$
$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Така стигнахме до интеграл, който прилича на изходния, но вместо $\sin x$, в него участва $\cos x$. Нека

$$I_1 = \int e^x \sin x\,dx, \qquad I_2 = \int e^x \cos x\,dx.$$

Тогава получената от нас връзка за двата интеграла можем да запишем така:

$$I_1 = e^x \sin x - I_2. \tag{2}$$

Сега пресмятаме интеграла I_2 по същия начин, по който пресметнахме I_1. Имаме

$$\begin{aligned} I_2 = \int \cos x \, de^x &\overset{(1)}{=} e^x \cos x - \int e^x \, d\cos x \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x \cos x + I_1. \end{aligned}$$

Сега заместваме с последния израз за I_2 в равенство (2). Получаваме

$$I_1 = e^x \sin x - e^x \cos x - I_1,$$

откъдето намираме

$$I_1 = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

- Интегралите от вида

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

също се пресмятат с интегриране по части. Ще покажем това за един от тях, другите се пресмятат аналогично.

$$
\begin{aligned}
6)\ \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx &\overset{(1)}{=} x\sqrt{a^2+x^2} - \int x\,d\sqrt{a^2+x^2} \\
&= x\sqrt{a^2+x^2} - \int x(\sqrt{a^2+x^2})'\,dx \\
&= x\sqrt{a^2+x^2} - \int x\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}\cdot 2x\,dx \\
&= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

За последния получен интеграл имаме

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx &= \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx \\ &= \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ &= \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx - a^2 \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|. \qquad (4)\end{aligned}$$

Ако означим търсения интеграл $\int \sqrt{a^2+x^2}$ с I, то от (3) и (4) следва, че

$$I = x\sqrt{a^2+x^2} - I + a^2 \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|,$$

откъдето

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|\right) + C.$$

Интегриране чрез смяна на променливата

Един метод, който често се използва при пресмятането на неопределените интеграли, е т.нар. интегриране чрез смяна на променливата или интегриране чрез субституция. То се основава на следната

Теорема 1

Нека функцията $f(x)$ *е дефинирана в един интервал* Δ, *а функцията* $\varphi(t)$ *е дефинирана и диференцируема в интервал* Δ_1, *като при това производната й* $\varphi'(t)$ *е строго положителна (или пък строго отрицателна) в този интервал. Да предположим още, че множеството от стойностите на* $\varphi(t)$ *съвпада с* Δ. *Тогава, ако за интервала* Δ_1 *е изпълнено равенството*

$$\int f[\varphi(t)]\, d\varphi(t) = F(t), \tag{5}$$

то за интервала Δ *имаме*

$$\int f(x)\, dx = F[\psi(x)], \tag{6}$$

където $\psi(x)$ *е обратната функция на функцията* $\varphi(t)$.

- Ще покажем как с метода на смяна на променливата се решават интеграли от вида

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \tag{7}$$

където дискриминантата $D = b^2 - 4ac < 0$ (т.е. функцията в знаменателя няма реални нули), и интеграли от вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \tag{8}$$

(независимо от знака на дискриминантата). И при двата вида интеграли се въвежда нова променлива t с помощта на равенството

$$x = t - \frac{b}{2a}. \tag{9}$$

Тази субституция е известна като **субституция на Хорнер**.

Примери:

1) Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 4}.$$

В този интеграл $a = 1$, $b = -3$, $c = 4$ и $b^2 - 4ac = 9 - 16 < 0$. Следователно интегралът I е от вида (7). Извършваме смяна на променливата с помощта на равенството (9), т.е.

$$x = t + \frac{3}{2}.$$

Навсякъде в I заместваме променливата x с израза по-горе.

Получаваме

$$I = \int \frac{d\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(t+\frac{3}{2}\right) + 4} = \int \frac{\left(t+\frac{3}{2}\right)' dt}{t^2 + 3t + \frac{9}{4} - 3t - \frac{9}{2} + 4}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + \frac{7}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{7}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2(x-\frac{3}{2})}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{\sqrt{7}} + C.$$

2) Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}.$$

Очевидно това е интеграл от вида (8). Правим субституцията

$$x = t - 1.$$

Тогава

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2 + 2(t-1) - 3}} \\ &= \int \frac{(t-1)' dt}{\sqrt{t^2 - 2t + 1 + 2t - 2 - 3}} \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 4}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 - 4} \right| + C \\ &= \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \right| + C. \end{aligned}$$

Интегриране на рационални функции

- Общият вид на една рационална функция е

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{10}$$

където $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми.

- От алгебрата е известно, че ако степента на числителя $P(x)$ е по-висока или равна на степента на знаменателя $Q(x)$, то можем да извършим делението на полиномите и да получим представянето

$$f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

където $S(x)$ и $R(x)$ са също полиноми, при това степента на $R(x)$ е по-ниска от степента на $Q(x)$.

- Тъй като интегрирането на полинома $S(x)$ не представлява проблем, то можем от самото начало да допуснем, че в представянето (10) на функцията $f(x)$, степента на полинома в числителя е по-ниска от степента на полинома в знаменателя.
- Също от алгебрата е известно, че полиномът $Q(x)$ може да бъде разложен на прости множители от първа и втора степен, т.е. да се представи във вида

$$Q(x) = C(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x^2+px+q)^{\lambda}\dots. \qquad (11)$$

Тук $C, a, b, \dots, p, q, \dots$ са реални константи, а степенните показатели $\alpha, \beta, \dots, \gamma, \dots$ са цели и положителни. При това числата $a, b, \dots$ са реалните корени на уравнението $Q(x) = 0$.

- Може да се покаже, че в случая, когато степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя, рационалната функция (10) се разлага в сума от следния вид:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} \\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

- Отделните събираеми в дясната страна на това равенство се наричат елементарни дроби, с чието интегриране вече можем да се справим. Ще покажем това в примерите.

Примери:

1) Да се пресметне

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 6}.$$

Най-напред записваме

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3),$$

откъдето имаме

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3}.$$

След освобождаване от знаменателя получаваме

$$1 = A(x + 3) + B(x - 2).$$

Като положим $x = 2$, намираме $A = \frac{1}{5}$, а при $x = -3$ получаваме $B = -\frac{1}{5}$.

Следователно

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Тогава

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+x-6} &= \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+3}\\ &= \frac{1}{5}\int\frac{d(x-2)}{x-2} - \frac{1}{5}\int\frac{d(x+3)}{x+3}\\ &= \frac{1}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{5}\ln|x+3| + C.\end{aligned}$$

2) Да се разложи на елементарни дроби функцията

$$f(x) = \frac{x^5 - 8x^2 + 1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x}.$$

Тъй като степента на полинома в числителя е по-висока от степента на полинома в знаменателя, най-напред ще извършим деление на двата полинома.

$$\begin{array}{l} x^5 - 8x^2 + 1 \quad | \underline{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x} = x - 3 = S(x) \\ \underline{x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2} \\ \quad - 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 1 \\ \quad \underline{-3x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 3x} \\ \qquad\qquad 6x^3 + 3x + 1 = R(x) \end{array}$$

Следователно

$$\frac{x^5 - 8x^2 + 1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x} = x - 3 + \frac{6x^3 + 3x + 1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x}.$$

След това разлагаме $\frac{6x^3+3x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}$ на елементарни дроби. Поради разлагането

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x = x(x+1)^3,$$

ще имаме

$$\frac{6x^3 + 3x + 1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3}.$$

Като се освободим от знаменателя, получаваме

$$6x^3 + 3x + 1 = A(x+1)^3 + B_1 x(x+1)^2 + B_2 x(x+1) + B_3 x.$$

След като разкрием скобите, прехвърляме всички събираеми от едната страна и подреждаме по степените на x. Така намираме

$$(A + B_1 - 6)x^3 + (3A + 2B_1 + B_2)x^2 + \\ + (3A + B_1 + B_2 + B_3 - 3)x + (A - 1) = 0.$$

Сега приравняваме на 0 коефициентите пред x^3, x^2, x и свободния коефициент. Получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} A + B_1 - 6 = 0 \\ 3A + 2B_1 + B_2 = 0 \\ 3A + B_1 + B_2 + B_3 - 3 = 0 \\ A - 1 = 0. \end{array} \right.$$

След решаване на системата намираме $A = 1$, $B_1 = 5$, $B_2 = -13$ и $B_3 = 8$.

Следователно ще имаме окончателно

$$\frac{x^5 - 8x^2 + 1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x} = x - 3 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x+1} - \frac{13}{(x+1)^2} + \frac{8}{(x+1)^3}.$$

3) Да се реши интегралът $\int f(x)\,dx$, където

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

Тъй като степента на полинома в числителя е по-малка от степента на полинома в знаменателя, можем веднага да преминем към разлагане на знаменателя на прости множители. Имаме $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$. Тогава

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx + N}{x^2+1},$$

откъдето

$$x^2 + 2x + 3 = A(x^2 + 1) + (Mx + N)(x - 1).$$

Отново разкриваме скобите, прехвърляме всички събираеми в дясната страна на равенството, групираме по степените на x и приравняваме на 0 коефициентите пред x^2, x и свободния коефициент. Получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} A + M - 1 = 0 \\ -M + N - 2 = 0 \\ A - N = 3. \end{array}\right.$$

Оттук $A = 3$, $M = -2$, $N = 0$. Следователно имаме

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{3}{x - 1} - \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Тогава

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{3}{x-1}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= 3\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= 3\ln|x-1| - \ln(x^2+1) + C.\end{aligned}$$