Примитивна функция. Неопределен интеграл. Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

Примитивна функция и неопределен интеграл

Дефиниция 1

Нека е дадена функцията $f(x)$, дефинирана в даден интервал Δ. Ще казваме, че функцията $F(x)$, дефинирана в същия интервал, е ***примитивна функция*** *или* ***неопределен интеграл*** *на функцията $f(x)$, ако $F(x)$ е диференцируема в Δ и $F'(x) = f(x)$.*

Пример 1: Функцията $F(x) = \frac{x^3}{3}$ е примитивна на функцията $f(x) = x^2$ в интервала $(-\infty, +\infty)$.
Пример 2: Функцията $F(x) = \sin x$ е примитивна на функцията $f(x) = \cos x$ в интервала $(-\infty, +\infty)$.

- Когато една функция $f(x)$ притежава поне една примитивна $F(x)$ в някой интервал, то тя притежава тогава и безбройно много примитивни в същия интервал, тъй като всяка функция от вида $F(x)+C$, където C е константа, също ще бъде примитивна на $f(x)$. Това е така, защото ако $F'(x)=f(x)$, то $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$. Лесно е да се провери, че други примитивни няма, т.е. в сила е следната

Теорема 1

Ако $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x)$ в един интервал, то всяка друга примитивна на $f(x)$ има вида $F(x)+C$, където C е някаква константа.

- За да отбележим, че функцията $F(x)$ е примитивна на дадена функция $f(x)$, пишем

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

  При това записване $f(x)$ се нарича **подинтегрална функция**.

- Всяка функция, непрекъсната в един интервал, има примитивна в този интервал и следователно символът $\int f(x)\,dx$ има смисъл винаги когато $f(x)$ е непрекъсната.
- Намирането на примитивните функции на дадена функция $f(x)$ се нарича **интегриране** на $f(x)$. В основата на интегрирането (пресмятането на неопределените интеграли) лежи следната таблица:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \tag{1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \tag{2}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{3}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \tag{4}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \tag{5}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \tag{6}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \tag{7}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \tag{13}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C. \tag{14}$$

Формула (1) ни дава възможност веднага да пресметнем редица интеграли.

Примери:

1) $\int x^4\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C.$

2) $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C.$

3) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C.$

5) $\int dx = x + C.$

Основни свойства на неопределените интеграли

В сила са следните основни формули за работа с неопределени интеграли:

1) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

2) $\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$, където k е някаква константа.

Примери:

$$1)\ \int (2x+1)^2\,dx = \int (4x^2+4x+1)dx = 4\int x^2dx + 4\int xdx + \int dx = 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$$

$$2)\ \int \frac{x+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx + \int x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C.$$

$$3)\ \int (2\sin x + \cos x)\,dx = 2\int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx$$
$$= -2\cos x + \sin x + C.$$

Внасяне под знака на диференциала

- С оглед на по-голямо удобство, ще пишем следното:

  $$\int f(x)\phi'(x)\,dx = \int f(x)\,d\phi(x).$$

  Когато прилагаме това равенство, казваме, че **внасяме функцията** $\phi'(x)$ **под знака на диференциала** или че извършваме действието внасяне под знака на диференциала.
- То се състои в това, че вместо функцията $\phi'(x)$, която е пред диференциала, написваме под диференциала една нейна примитивна функция. С други думи интегрираме $\phi'(x)$. Ето защо можем също да напишем

  $$\int f(x)\phi'(x)\,dx = \int f(x)\,d[\phi(x) + C],$$

  където C е произволна константа.

- Също така имаме

$$k\int f(x)\,d\,\phi(x) = \int kf(x)\,d\,\phi(x) = \int f(x)\,d\,[k\phi(x)]$$
$$= \int f(x)\,d\,[k\phi(x)+C],$$

където k и C са константи, а $\phi(x)$ е диференцируема функция.

Примери:

$$1)\int x\ln x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\,dx = \int \ln x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \ln x\,dx^2.$$

$$2)\int (2x+3)^5\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^5\,d\,(2x) = \frac{1}{2}\int (2x+3)^5\,d\,(2x+3).$$

Ползата от действието внасяне под знака на диференциала се вижда ясно от следната

Теорема 2

Нека за някакъв интервал Δ *имаме*

$$\int f(x)\,dx = F(x). \tag{15}$$

Ако $\phi(t)$ *е диференцируема функция, дефинирана в някой интервал* Δ_1 *и приемаща стойности в* Δ, *то в интервала* Δ_1 *имаме*

$$\int f[\phi(t)]\,d\,[\phi(t)] = F[\phi(t)].$$

- Тази теорема ни позволява във всяко равенство от вида (15) да заместим променливата x с произволна диференцируема функция $\phi(t)$ (стига стойностите на тази функция да принадлежат на интервала, за който е валидно (15)). Така всички формули (1)–(14) от таблицата продължават да са в сила, ако заменим навсякъде в тях x с някоя диференцируема функция $\phi(t)$. Това ни позволява да пресмятаме много неопределени интеграли.

Примери:

$$
\begin{aligned}
1)\ \int e^{x^2} x\,dx &= \int e^{x^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)' dx = \int e^{x^2} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int e^{x^2}\, d(x^2) = [\text{заместваме } u = x^2] \\
&= \frac{1}{2}\int e^{u}\, du = \frac{1}{2}e^{u} + C \\
&= [\text{връщаме се отново към буквата } x] \\
&= \frac{1}{2}e^{x^2} + C.
\end{aligned}
$$

Забележете, че формалното преминаване към буквата u не е задължително, ако можете да извършите действието на ум.

$$2) \int \sin x \, \cos x \, dx = \int \sin x (\sin x)' \, dx = \int \sin x \, d \, \sin x$$
$$= [u = \sin x] = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C$$
$$= \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

$$3) \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$
$$= [u = 1 + x^2] = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$4) \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{(\ln x)' dx}{\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = [u = \ln x] = \int \frac{du}{u}$$
$$= \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$$

$$5) \int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, d(2x) = \frac{1}{2}(-\cos 2x) + C.$$

$$6)\ \int (2x+3)^3\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^3\,d(2x) = \frac{1}{2}\int (2x+3)^3\,d(2x+3)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(2x+3)^4}{4} + C = \frac{1}{8}(2x+3)^4 + C.$$

$$7)\ \int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^{1/2}\,d(2x)$$
$$= \frac{1}{2}\int (2x+1)^{1/2}\,d(2x+1)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.$$

$$8)\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)}=\frac{a}{a^2}\int\frac{d(\frac{x}{a})}{(\frac{x}{a})^2+1}$$
$$=\left[u=\frac{x}{a}\right]=\frac{1}{a}\int\frac{du}{u^2+1}$$
$$=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}u+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

$$9)\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$
$$=\int\frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}=\left[u=\frac{x}{a}\right]$$
$$=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+C=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

$$10)\ \int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x.(-\cos x)'\,dx = -\int \sin^2 x\,d\cos x$$
$$= -\int (1-\cos^2 x)\,d\cos x$$
$$= -\int d\cos x + \int \cos^2 x\,d\cos x$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

$$11)\ \int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

$$12)\ \int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$