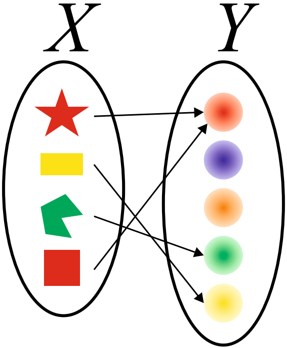
Функции

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

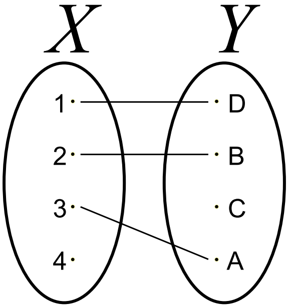
Определение

- Нека $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$. Ако на всяко $x \in X$ по някакъв закон (правило) f се съпоставя **единствено** число $y = f(x) \in Y$, казва се, че в множеството X е определена функция f, областта от стойностите на която е подмножество на множеството Y. Множеството X се нарича дефиниционна област на функцията f, а променливата x се нарича аргумент. Числото $y = f(x)$ се нарича стойност на функцията f при стойност на аргумента, равна на x.
- В зависимост от природата на елементите на X и Y, в различните области на математиката терминът „функция“ се заменя със синонимите му: изображение, преобразование, оператор, функционал и др.

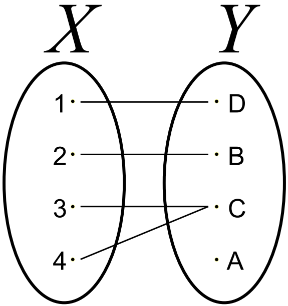


Фигура 1: Дадената функция е дефинирана в множеството X, състоящо се от елементи с различна форма и цвят и приемаща за стойност цвета на елемента.

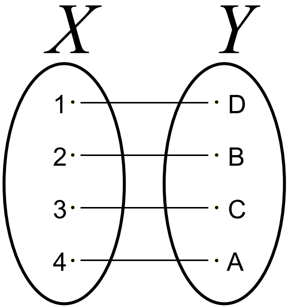
- Две функции f_1 и f_2 се наричат съвпадащи или равни, ако те имат една и съща дефиниционна област X и за всеки елемент $x \in X$ стойностите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на тези функции съвпадат. В този случай се пише $f_1 = f_2$.
- Изображението $f : X \to Y$ се нарича:
  а) инективно (или изображение на X в Y), ако различни елементи на X имат различни образи в Y;
  б) сюрективно (или изборажение на X върху Y), ако за всеки елемент $y \in Y$ съществува поне един елемент $x \in X$, така че $y = f(x)$;
  в) биективно (или взаимно еднозначно), ако то е сюрективно и инективно едновременно.



Фигура 2: Инективно изображение – различни елементи имат различни образи

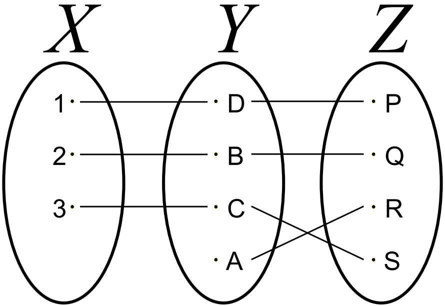


Фигура 3: Неинективно изображение – някои различни елементи имат еднакви образи



Фигура 4: Биективно изображение = инективно + сюрективно

- Ако изображенията $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ са такива, че едното от тях (в случая g) е дефинирано в множеството от стойностите на другото (в случая f), определено е ново изображение $g \circ f : X \to Z$, стойностите на което за елементите от X се определят по формулата $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Изображението $g \circ f$ се нарича композиция (суперпозиция) на f и g (в този ред).



Фигура 5: Композиция на две инективни изображения е инективно изображение

Монотонни функции

- Функцията $f : X \to Y$ се нарича монотонно растяща (намаляваща) в множеството X, когато за всеки две стойности x_1 и x_2 на аргумента, свързани с неравенството $x_1 < x_2$, съответните функционални стойности са свързани с неравенството $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).
- Функцията $f : X \to Y$ се нарича монотонна в множеството X, ако тя е монотонно растяща или монотонно намаляваща в X.
- Ако за всеки две стойности x_1 и x_2 на аргумента на $f : X \to Y$, свързани с неравенството $x_1 < x_2$, съответните функционални стойности са свързани с неравенството $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), функцията f се нарича строго растяща (намаляваща) в множеството X.

Обратни функции

- Ако изображението $f : X \to Y$ е биективно, то съществува функция, определена в множеството Y и съпоставяща на всеки елемент $y \in Y$ онази стойност $x \in X$, за която $f(x) = y$. Тази функция се означава с f^{-1} (бележи се още $x = f^{-1}(y),\ y \in Y$) и се нарича функция, обратна на функцията f.
- Очевидно

$$\begin{aligned} f[f^{-1}(y)] &= y \quad \text{за всяко } y \in Y, \\ f^{-1}[f(x)] &= x \quad \text{за всяко } x \in X. \end{aligned}$$

Затова f и f^{-1} се наричат взаимно обратни функции.

Теорема 1 (За съществуване на обратна функция)

Ако функцията $f : X \to Y$ *е строго растяща (намаляваща) в множеството* X *и* Y *е множеството от функционалните й стойности, то съществува обратната функция* $f^{-1} : Y \to X$ *на функцията* f*, която е строго растяща (намаляваща) в* Y*.*

Примери.

1) От училищния курс е известно, че функцията

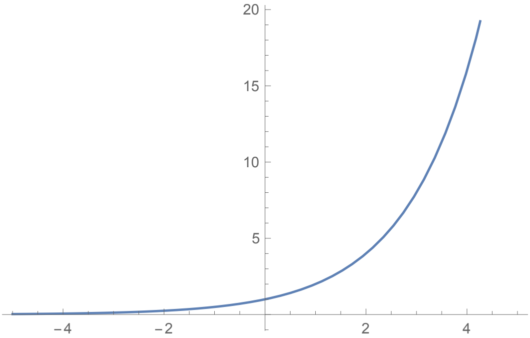
$$f(x) = a^x$$

е строго растяща при $a > 1$ и строго намаляваща при $0 < a < 1$. Следователно винаги когато $a > 0$ и $a \neq 1$, функцията $f(x) = a^x$ е обратима. Нейната обратна функция е функцията $\varphi(x) = \log_a x$. Тя очевидно е дефинирана само в интервала $(0, +\infty)$, тъй като функцията $f(x) = a^x$ има, както знаем, само положителни стойности. От свойствата на обратните функции получаваме равенствата

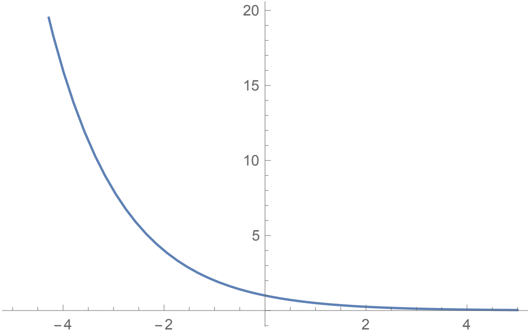
$$a^{\log_a x} = x \ \text{ при } \ x > 0,$$

$$\log_a a^x = x \ \text{ за всяко } x.$$

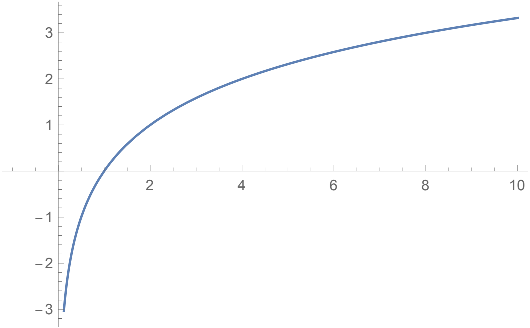
Освен това непосредствено получаваме и заключението, че функцията $\varphi(x) = \log_a x$ е строго растяща, когато $a > 1$, и строго намаляваща, когато $0 < a < 1$.



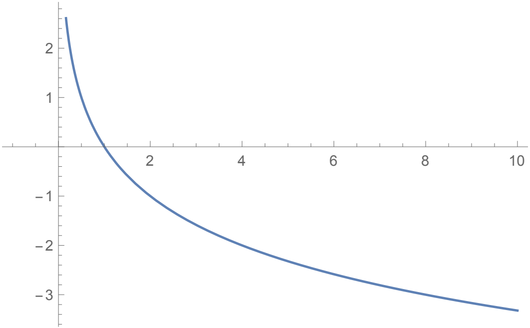
Фигура 6: Plot$[2^x, \{x, -5, 5\}]$



Фигура 7: Plot$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x, \{x, -5, 5\}\right]$



Фигура 8: $\mathrm{Plot}[\mathrm{Log}[2, x], \{x, -1, 10\}]$



Фигура 9: Plot[Log[$\frac{1}{2}, x$], {$x, -1, 10$}]

2) Функцията $f(x) = \sin x$, където ъгълът x е измерен в радиани, е строго растяща в интервала $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Следователно тя е обратима в този интервал. Нейната обратна функция се нарича „аркус синус от x" и се бележи така: $\arcsin x$. От дефиницията за обратна функция следва, че $\arcsin x$ е онзи ъгъл (той е единствен), който, измерен в радиани, се намира в интервала $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и който има синус, равен на x. (Както знаем от геометрията, такъв ъгъл сигурно съществува при $|x| \leq 1$.) Като вземем предвид свойствата на обратните функции, стигаме до заключения за функцията $\arcsin x$:

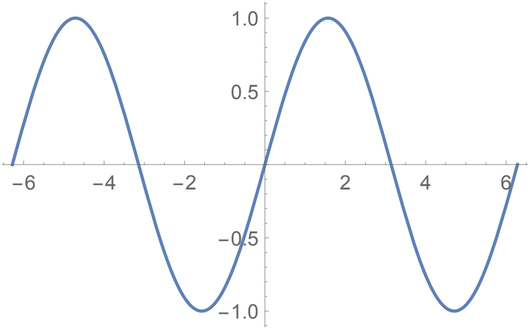
а) тя е дефинирана в интервала $[-1,\ 1]$;

б) нейните функционални стойности са в интервала $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

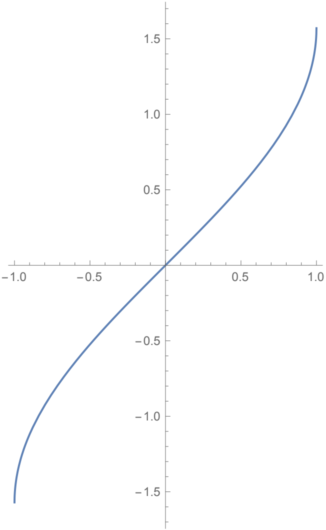
в) тя е строго растяща;

г) валидни са равенствата

$$\sin(\arcsin x) = x \text{ при } \quad -1 \leq x \leq 1,$$
$$\arcsin(\sin x) = x \text{ при } \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$



Фигура 10: Plot$[$Sin$[x], \{x, -2$Pi$, 2$Pi$\}]$



Фигура 11: Plot[ArcSin[x], {x, -1, 1}, AspectRatio -> Automatic]

3) Функцията $f(x) = \cos x$ е строго намаляваща и следователно обратима в интервала $[0, \pi]$. Нейната обратна функция се нарича „аркус косинус от x" и се бележи така: $\arccos x$. Следователно $\arccos x$ е онзи ъгъл, който, измерен в радиани, се намира в интервала $[0, \pi]$ и който има косинус, равен на x. (Такъв ъгъл сигурно съществува при $|x| \leq 1$ и той е единствен.) Ясно е, че:

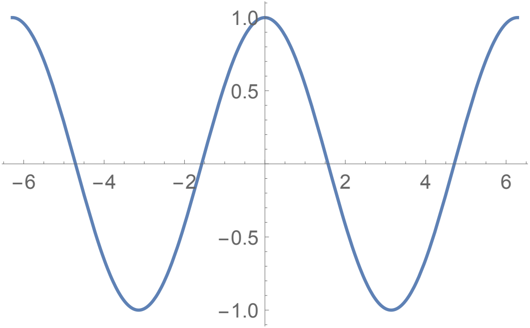
а) функцията $\arccos x$ е дефинирана в интервала $[-1,\ 1]$;

б) нейните функционални стойности са в интервала $[0, \pi]$;

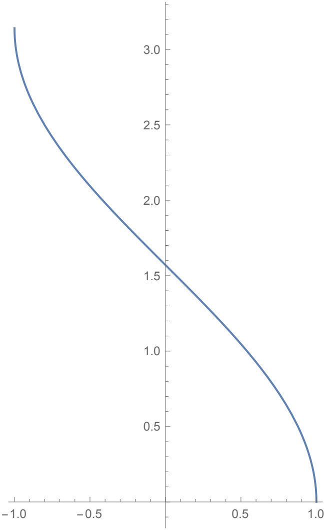
в) тя е строго намаляваща;

г) валидни са равенствата

$$\cos(\arccos x) = x \text{ при } \; -1 \leq x \leq 1,$$
$$\arccos(\cos x) = x \text{ при } \; 0 \leq x \leq \pi.$$



Фигура 12: Plot[Cos[x], {x, -2Pi, 2Pi}]



Фигура 13: Plot[ArcCos[x], {x, -1, 1}, AspectRatio -> Automatic]

4) Аналогично се въвежда функцията $\operatorname{arctg} x$, обратна на функцията $\operatorname{tg} x$ в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. При това се вижда, че:

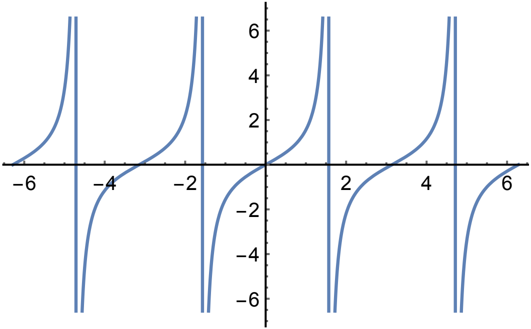
а) функцията $\operatorname{arctg} x$ е дефинирана в интервала $(-\infty, +\infty)$;

б) нейните функционални стойности са в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

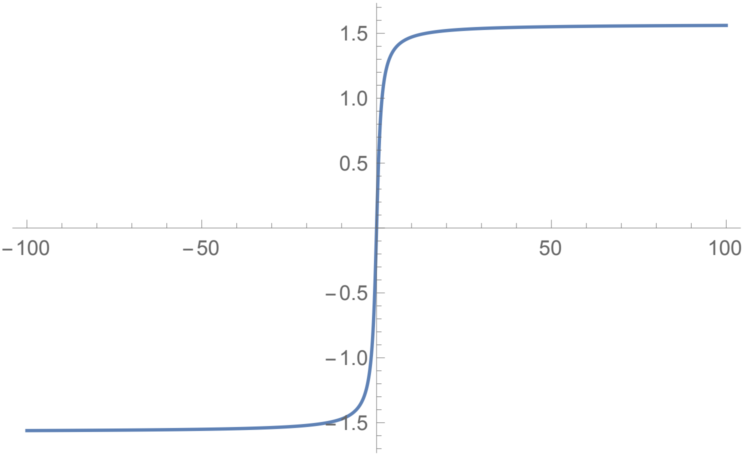
в) тя е строго растяща;

г) валидни са равенствата

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \text{ за всяко } x,$$
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$



Фигура 14: Plot[Tan[x], {x, −2Pi, 2Pi}]



Фигура 15: Plot[ArcTan[x], {x, -100, 100}]

5) Накрая въвеждаме е функцията $\operatorname{arcctg} x$, обратна на функцията $\operatorname{ctg} x$ в интервала $(0, \pi)$. За нея имаме:

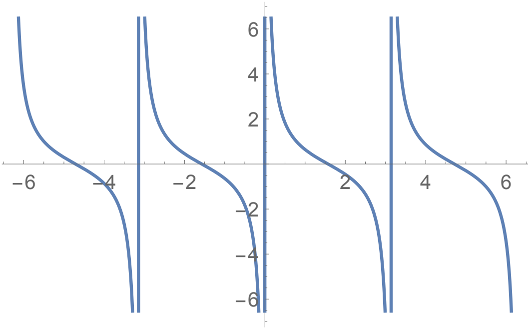
а) функцията $\operatorname{arcctg} x$ е дефинирана в интервала $(-\infty, +\infty)$;

б) нейните функционални стойности са в интервала $(0, \pi)$;

в) тя е строго намаляваща;

г) валидни са равенствата

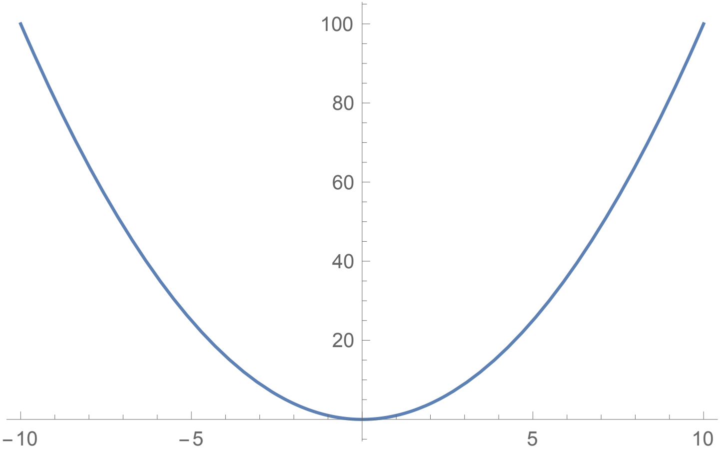
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \text{ за всяко } x,$$
$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x \text{ при } 0 < x < \pi.$$



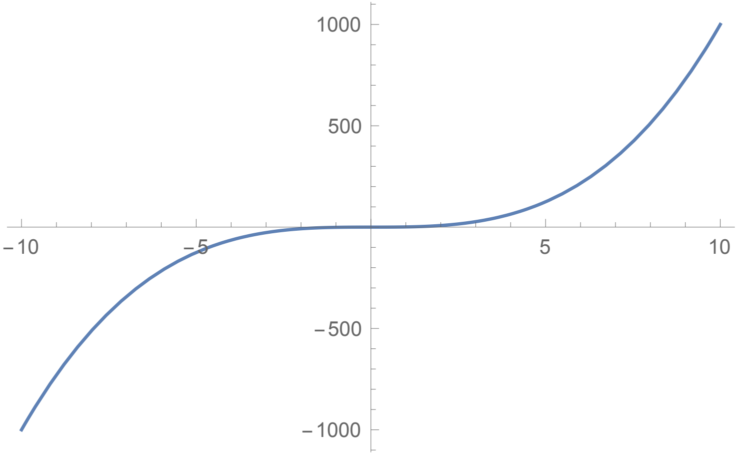
Фигура 16: Plot[Cot[x], {x, -2Pi, 2Pi}]

Четни и нечетни функции

- Функцията $f : X \to Y$ се нарича четна (нечетна), ако са изпълнени условията:
  (i) Ако $x \in X$, то и $(-x) \in X$;
  (ii) $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) за всяко $x \in X$.



Фигура 17: Функцията $y = x^2$ е четна и нейната графика е симетрична спрямо оста Oy. За построяване на графиката е използвана функцията Plot[x^2, $\{$x, -10, 10$\}$] на Wolfram Mathematica.



Фигура 18: Функцията $y = x^3$ е нечетна и нейната графика е симетрична спрямо точката O. За построяване на графиката е използвана функцията Plot[x^3, $\{$x, -10, 10$\}$] на Wolfram Mathematica.

Основни елементарни функции

Някои от функциите, които често срещаме, са добре изучени отдавна и поради това е прието да се отделят в категорията на т.нар. основни елементарни функции. Тук влизат:

1) Степенната функция $y = x^\alpha$ (α – реално число);
2) Показателната функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;
3) Логаритмичната функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;
4) Тригонометричните функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
5) Обратните тригонометрични функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Елементарна функция се нарича такава функция, която е получена от основните елементарни функции чрез краен брой суперпозиции и четирите аритметични действия (събиране, умножение, изваждане и деление). Примери за елементарни функции са:

- Полиномите

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

където n е цяло неотрицателно число, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са реални числа. Числата $a_0, a_1, \ldots, a_n$ се наричат коефициенти на дадения полином, a_n се нарича свободен член, n – степен на полинома. Константите се разглеждат като полиноми от нулева степен!

- Дробно-рационалните функции

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m},$$

  където $m \geq 1$. Дробно-рационалните функции и полиномите образуват множеството на рационалните функции.

- Ирационалните функции, например

$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ при } x \geq 1,$$

$$f(x) = 2x^2 + 1 + 5\sqrt[3]{x+1}.$$