Непрекъснати функции

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

Определение за непрекъсната функция

- Въвеждайки понятието граница на функция и дефинирайки символа $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ние предполагахме, че x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционната област D на $f(x)$, но не изисквахме тази точка непременно да принадлежи на D. Нека сега разгледаме случая, когато $x_0 \in D$. В този случай съществува функционалната стойност $f(x_0)$ и възниква въпросът, дали тази стойност съвпада със стойността на $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ при условие, че тази граница съществува. Когато тези две стойности съвпадат, а това невинаги е така, казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в x_0.

Дефиниция 1

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в D и нека $x_0 \in D$. Ще казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, ако тя притежава граница при $x \to x_0$, и ако при това е изпълнено

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Дефиницията на Коши за граница на функция ни позволява да формулираме по следния начин дефиницията за понятието непрекъснатост:

Дефиниция 2

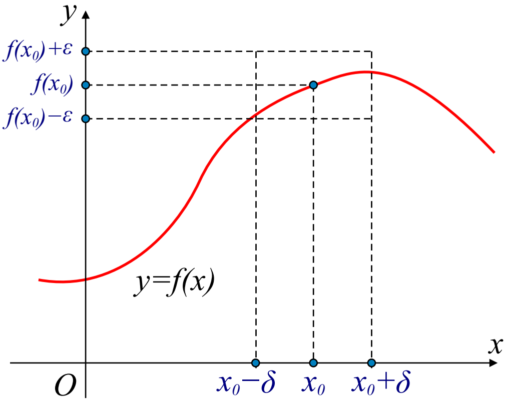
Функцията $f(x)$ *с дефиниционна област* D *е непрекъсната в точката* $x_0 \in D$*, ако за всяко положително число* ε *съществува такова положително число* δ*, че при* $x \in D$ *от неравенството* $|x - x_0| < \delta$ *да следва неравенството* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$*.*

- Неравенството $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ е еквивалентно на неравенствата

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Тогава можем да дадем следното геометрично тълкуване на понятието непрекъснатост:

Частта от графиката на функцията $f(x)$ за $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се намира в хоризонталната ивица, заключена между правите с уравнения $y = f(x_0) - \varepsilon$ и $y = f(x_0) + \varepsilon$ (Фигура 1). Тази ивица е толкова по-тясна, колкото по-малко е числото ε. Числото δ, определящо интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, зависи, разбира се, от ε – когато ε е твърде малко, δ също може да бъде много малко.



Фигура 1: Геометрично тълкуване на понятието непрекъсната функция в точка x_0

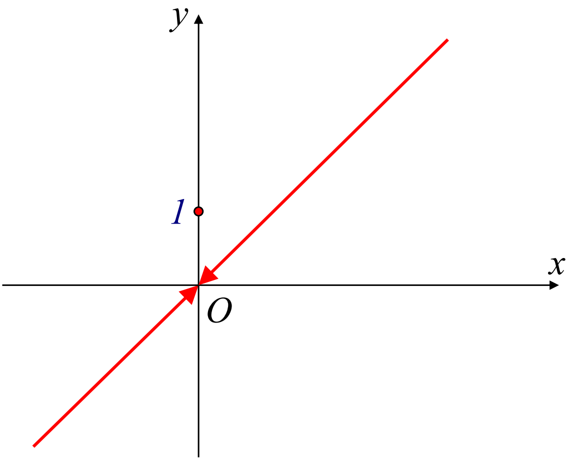
- Пример за прекъсната функция (Фигура 2):

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

- Пример за функция, която може да се дефинира допълнително, така че да стане непрекъсната:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

  Ако тази функция, дефинирана при $x \neq 0$, дефинираме допълнително в $x = 0$ с равенството $f(0) = 0$, ще получим функция, дефинирана вече за всяко x, която при това е непрекъсната в точката $x = 0$.



Фигура 2: Пример за прекъсната функция в точката $x = 0$

Основни свойства на непрекъснатите функции

Теорема 1

Ако $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и ако $f(x_0) \neq 0$, то съществува такава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на тази точка, в която функцията $f(x)$ си съхранява знака.

Теорема 2

Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в дадена точка x_0, то функциите $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, а в случая, когато $g(x_0) \neq 0$, и функцията $\frac{f(x)}{g(x)}$ са също непрекъснати в тази точка.

Теорема 3

Ако функцията $F(x)$ е непрекъсната в точка x_0, а функцията $f(t)$ е непрекъсната в точка t_0 и ако $x_0 = f(t_0)$, то съставната функция $\varphi(t) = F(f(t))$ е непрекъсната в точката t_0.

Когато една функция $f(x)$ е непрекъсната във всички точки на дадено множество D от реални числа, накратко казваме, че тя е непрекъсната в множеството D. От непрекъснатостта на една функция следват редица свойства. Особено важни заключения за свойствата на една функция могат да се направят, когато тя е непрекъсната в краен и затворен интервал. Така например, макар между непрекъснатите функции да се срещат както ограничени, така и неограничени функции, оказва се, че е в сила следната

Теорема 4 (Първа теорема на Болцано-Вайерщрас)

Всяка непрекъсната функция в затворен интервал е ограничена функция в този интервал.

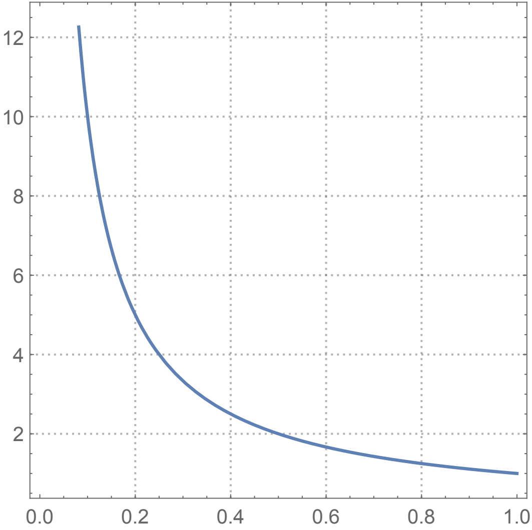
- За да си изясним по-добре смисъла на Теорема 4, нека посочим някои съвсем прости примери, от които се вижда, че заключението на теоремата може да не бъде вярно, ако са нарушени някои от нейните условия.

  Пример 1. Фунцията $f(x) = \frac{1}{x}$ е непрекъсната в $(0, 1]$, но е неограничена в него (Фигура 3). Тук е нарушено условието за затвореност на интервала.

  Пример 2. Функцията

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

  е дефинирана в затворения интервал $[0, 1]$, но е прекъсната в точката $x = 0$ и съответно не е ограничена в този интервал.



Фигура 3: $y = \frac{1}{x}$ при $x \in (0, 1]$

- Когато ни е дадена една функция $f(x)$, естествено възниква въпросът, притежава ли тя най-голяма (максимална), съответно най-малка (минимална) стойност. Разбира се, ако функцията не е ограничена отгоре, тя не може да има максимална стойност. Оказва се обаче, че тя може да не притежава най-голяма стойност даже и когато е ограничена.

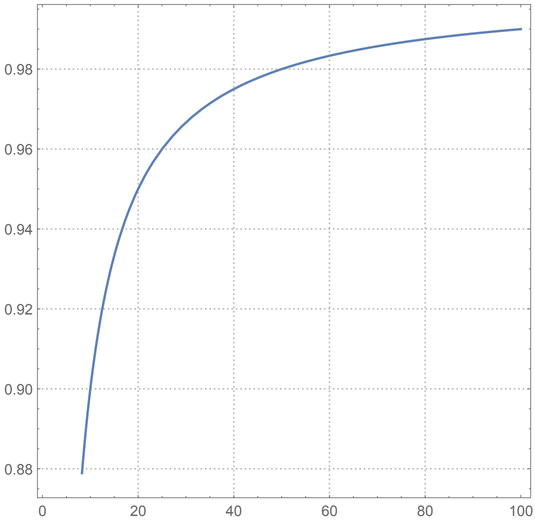
  Пример 3. Функцията $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ (Фигура 4) например е ограничена отгоре в безкрайния интервал $(1, \infty)$, тъй като всички нейни стойности са по-малки от 1. Тя обаче не притежава максимална стойност, тъй като е строго растяща в този интервал, което се проверява непосредствено.

  Пример 4. Да разгледаме $g(x) = x^2$ в интервала $[0, 2)$. Както се вижда, този интервал е краен, но е отворен отдясно. Очевидно $g(x)$ е ограничена в $[0, 2)$, защото всички нейни стойности са по-малки от 4. Но тя също не притежава максимална стойност, защото, както и да изберем точката x_1 от интервала $[0, 2)$, винаги можем да намерим друга точка x_2, такава че $0 \leq x_1 < x_2 < 2$, откъдето $x_1^2 < x_2^2$, или $g(x_1) < g(x_2)$.

Пример 5. По същия начин можем да се убедим, че функцията

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{при} \quad x = 2 \end{cases}$$

е дефинирана в затворения интервал $[0, 2]$, но е прекъсната в точката $x = 2$ и съответно не притежава най-голяма стойност в този интервал.



Фигура 4: $y = 1 - \frac{1}{x}$ при $x \in [1, \infty)$

След всичко казано, очевидна е важността на следната

Теорема 5 (Втора теорема на Болцано-Вайерщрас)

Всяка непрекъсната функция в затворен интервал притежава най-малка и най-голяма стойност в този интервал.

Друго важно свойство на непрекъснатите функции се дава със следната

Теорема 6 (Теорема на Коши-Вайерщрас за междинните стойности)

Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ и λ е число, което се намира между $f(a)$ и $f(b)$. Тогава съществува точка $x_0 \in [a, b]$, такава че $f(x_0) = \lambda$.

В случай, че $f(a)$ и $f(b)$ са числа с противни знаци, т.е. едното от тях е положително, а другото – отрицателно, функцията трябва да стане равна на 0 най-малко за една стойност на x между a и b.

Теорема 7

Основните елементарни функции са непрекъснати във всяка точка на своята дефиниционна област.

Като следствие от тази теорема, Теорема 2, Теорема 3 и дефиницията за елементарна функция (вж. Лекция 1) получаваме

Теорема 8

Всяка елементарна функция е непрекъсната в дефиниционната си област.

Задача. Да се изследва за непрекъснатост функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Тъй като функциите $\sin 2x$ и x са непрекъснати в множеството на реалните числа $\mathbb{R}$, то съгласно Теорема 2 $f(x)$ е непрекъсната за всяко x, което не анулира знаменателя, т.е. при $x \neq 0$. Остава да изследваме $f(x)$ за непрекъснатост в точката $x = 0$. Имаме

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

Но по дефиниция $f(0) = 1$. Оттук следва, че $f(0) \neq \lim_{x \to 0} f(x)$, т.е. $f(x)$ е прекъсната в точката $x = 0$.