Линейна алгебра и аналитична геометрия

за специалност "Информатика", I курс

лектор: гл. ас. д-р Ива Докузова

Матрици. Действия с матрици

1) Определение за матрица. Всяка таблица от реални числа

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

подредени в m реда и n стълба се нарича **реална матрица от тип** $(m \times n)$.

Числата a_{ij}, $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ се наричат **елементи на матрицата**.

Множеството на всички реални матрици от тип $(m \times n)$ се означава $M_{m \times n}(R)$.

В частност, ако $m = 1$, получаваме **матрица–ред**

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

а при $n = 1$, получаваме **матрица–стълб**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Матрица, с равен брой редове и стълбове, се нарича **квадратна матрица**.
Множеството на квадратните матрици от тип $(n \times n)$ се означава с $M_n(R)$.
Матрица, която се получава от A чрез смяна местата на редовете със съответните стълбове, се нарича **транспонирана** и се означава $A^t = (a_{ji})$ или $A' = (a_{ji})$.

Някои специални матрици

Главен диагонал на квадратната матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

се нарича съвкупността от елементи $a_{11},\ a_{22},\ \dots,\ a_{nn}$.
Квадратна матрица, на която всички елементи под и над главния диагонал са нули се нарича **диагонална матрица**.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратната матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

се нарича **единична матрица**.
Матрицата $O \in M_{m\times n}(R)$, на която всички елементи са нули се нарича **нулева матрица.** Тя има вида

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейни действия с матрици

Две матрици $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$ и $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$ се наричат **равни**, ако съответните им елементи са равни. Означаваме $A = B$.

а) **Сума** на $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$ и $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$ е матрицата

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m\times n}(R).$$

Действието се нарича събиране на матрици.

б) **Произведение на матрицата** $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$ с реално число λ е матрицата

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m\times n}(R).$$

Действието се нарича умножение на матрица с число.

Събирането на две матрици и умножението на матрица с число се наричат **линейни действия с матрици**.

Свойства на линейните действия

За произволни матрици $A, B, C \in M_{m\times n}(R)$ и произволни числа $\lambda, \mu \in R$ са в сила следните свойства:
1) $A + B = B + A$;
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) Съществува матрица O, наречена нулева, такава че за всяка матрица A е изпълнено $A + O = A$;
4) За всяка матрица A съществува матрица $-A = (-a_{ij})$, наречена противоположна на A, за която $A + (-A) = O$;
5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
7) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
8) $1A = A$.

Произведение на матрици

Произведение на матриците
$A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$ и $B = (b_{js}) \in M_{n\times k}(R)$
е матрицата

$$AB = (c_{is}) \in M_{m\times k}(R),$$

където

$$c_{is} = a_{i1}b_{1s} + a_{i2}b_{2s} + a_{i3}b_{3s} + \cdots + a_{in}b_{ns}.$$

Действието, което извършваме с A и B, за да получим $C = AB$ се нарича **умножение на матрици**.
Броят на стълбовете на матрицата A е равен на броя на редовете на матрицата B. Такива матрици се наричат **съгласувани**.
За да е възможно умножението на две матрици, то те трябва да са съгласувани.
Умножението на квадратни матрици от един и същи ред е винаги възможно.

Свойства на произведението

В общият случай за две матрици A и B **не е изпълнено** $AB = BA$.
За произволни съгласувани матрици A, B и C са в сила свойствата:
1) $A(B+C) = AB + AC$;
2) $(A+B)C = AC + BC$;
3) $A(BC) = (AB)C$;
4) $AO = O$, $OB = O$, където O е нулевата матрица;
5) $AE = A$, $EB = B$, където E е единичната матрица и двойките матрици A, E и E, B са съответно съгласувани.

Задачи. (5. Тема)

1. Дадени са матриците:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 0 & 15 & 3 \\ 9 & -12 & 15 \end{pmatrix}.$$

Намерете:

а) $A + B$; б) $A - B$; в) $3A - 2B$; г) $-2A$; $\frac{1}{3}B$

2. Дадени са матриците:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -2 \\ 10 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Намерете:

а) $B + A$; б) $B - A$; в) $2A - 3B$; г) $4A$; д) $-\frac{1}{2}B$.

3. Пресметнете произведението на матриците, ако това е възможно:

а) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 10 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Да се намери матрица $M = A^2 - BA + 3B$, ако

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Да се намери матрицата $AB - BA$, ако:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Детерминанта от втори ред

На всяка реална квадратна матрица от втори ред A се съпоставя едно реално число $\det A$, наречено нейна **детерминанта**

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Стойността й се пресмята по формулата

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Заб. Стойността на детерминанта от първи ред е равна на числото, което е неин елемент, т.е. $\det A = a_{11}$.

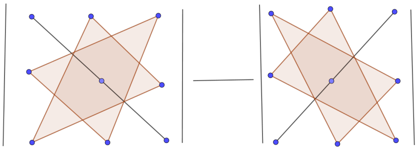
Детерминанти от трети ред

На всяка реална квадратна матрица от трети ред $A = (a_{ij})$ се съпоставя едно реално число $\det A$, наречено нейна детерминанта

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Стойността й се пресмята (**по правило на триъгълниците**).

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$



Адюнгирани количества

Адюнгиран минор Δ_{ij} на елемента a_{ij} на $\det A$ от втори ред се нарича числото, което се получава след премахване на i–ти ред и j–ти стълб от $\det A$.
Адюнгирано количество на елемента a_{ij} наричаме числото

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Например, адюнгиран минор на елемента a_{12} от детерминантата

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

е елементът $\Delta_{12} = a_{21}$.
А адюнгираното количество на елемента a_{12} е $A_{12} = (-1)^{1+2}a_{21}$, което е $A_{12} = (-1)a_{21}$.

Адюнгиран минор Δ_{ij} на елемента a_{ij} на $\det A$ от трети ред се нарича детерминантата от втори ред, която се получава след премахване на i–ти ред и j–ти стълб от $\det A$.
Адюнгирано количество на елемента a_{ij} наричаме числото

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Например, адюнгиран минор на елемента a_{13} от детерминантата

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

е детерминантата $\Delta_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.
А адюнгираното количество на елемента a_{13} е $A_{13} = (-1)^{1+3}\Delta_{13}$.

Задачи. (4. Тема)

1. Да се пресметнат детерминантите от II ред:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Да се решат уравненията:

а) $\begin{vmatrix} x & x-2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4$; б) $\begin{vmatrix} x & x-2 \\ 8 & 8-x \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & x^2-5x \end{vmatrix} = 0$.

3. Да се решат неравенствата:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2(x-3) \\ 2 & x \end{vmatrix} > 0$; б) $\begin{vmatrix} 2x & 4x \\ 3 & x \end{vmatrix} < -10$; в) $\begin{vmatrix} x^2 & 3x-10 \\ -x & x \end{vmatrix} > 0$.

4. Да се пресметнат детерминантите от III ред:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}$

5. Да се решат уравненията:

$$\begin{vmatrix} x & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & x+3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 2-x & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 3 & -2 & -x \\ x+2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Да се решат неравенствата:

а) $\begin{vmatrix} 1 & x & -2 \\ 3 & 2 & -x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} > 6$; б) $\begin{vmatrix} 3 & x-1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & x \end{vmatrix} > 1$.

7. Дадени са детерминантите:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 10 & 0 \\ -12 & 20 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 25 & 5 & -4 \\ 13 & 12 & -9 \\ 10 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Да се намерят поддетерминантите и адюнгираните количества на елементите: a_{13}, a_{21}, a_{32} и a_{12}.

Детерминанти от ред, по-висок от три

Ако $A = (a_{ij})$ е квадратна матрица от четвърти ред, то нейната детерминанта се записва

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

и се нарича детерминанта от IV ред.
Аналогично се записват детерминанти от пети и по-висок ред.
Правило на Лаплас. Всяка детерминанта е равна на сумата от произведенията на елементите от произволен ред със съответните им адюнгирани количества.
За детерминанта от IV ред по правилото на Лаплас имаме

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14},$$

което е развитие на детерминантата по елементите й от първи ред.

Други развития например са:
$\det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}$ – по елементите от втори стълб и
$\det A = a_{41}A_{41}+a_{42}A_{42}+a_{43}A_{43}+a_{44}A_{44}$ – по елементите от четвърти ред.
Друг метод за пресмятане на детерминанти от по-висок ред е чрез опростяване на вида им — привеждане на **детерминантата в триъгълен вид** (детерминанта, в която всички елементи под или над главния диагонал са нули):

$$|\Lambda_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad |\Lambda_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Стойностите на двете детерминанти са $|\Lambda_1| = |\Lambda_2| = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$.

Свойства на детерминантите

Тъй като $\det A = \det A^t$, то следните свойства са в сила както за редовете така и за стълбовете на детерминантата.
1. Ако разменим местата на два реда в една детерминанта, получаваме детерминанта с противоположна стойност.
2. Детерминанта с два равни реда е равна на нула.
3. Ако умножим всички елементи от даден ред на една детерминанта с някакво число, то цялата детерминанта се умножава с това число.
4. Детерминанта с ред, съставен само от нули, е равна на нула.
5. Стойността на детерминантата не се променя, ако към един неин ред прибавим друг неин ред, умножен с някакво число.
6. Детерминанта с два пропорционални реда е равна на нула.
7. Ако редовете на една детерминанта са линейно зависими, то тя е равна на нула.
8. Сумата от произведенията на елементите от даден ред на една детерминанта със съответните адюнгирани количества на елементите от друг неин ред е равна на нула.

Например за детерминанта от IV ред имаме

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + a_{14}A_{24} = 0.$$

Задачи. (4. Тема)

8. Да се пресметнат детерминантите от трети ред, като се приложат свойствата:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 4 & -6 & -15 \\ -2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 4 & 10 & 4 \\ -12 & 0 & -12 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix}$;

9. Да се пресметнат детерминантите от четвърти ред:

а) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ -8 & -1 & 7 & 6 \\ 7 & 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & -1 & 2 \\ 10 & -12 & 4 & 15 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$.

Обратни матрици

Нека A е квадратна матрица.
Матрицата A се нарича **особена (изродена)**, ако $\det A = 0$. Матрицата A се нарича неособена, ако $\det A \neq 0$.
Матрицата A^{-1} се нарича **обратна на** A, а A се нарича **обратима**, ако е изпълнено $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.
Особените матрици не притежават обратна матрица.
Всяка неособена матрица притежава точно една обратна матрица.
1) Произволна неособена квадратна матрица от II ред

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

има обратна матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

2) Произволна неособена квадратна матрица от III ред
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ има обратна матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Тук A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij}, където $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$.
3) Обратната матрица на неособена квадратна матрица от n–ти ред $A = (a_{ij})$ се получава от

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ij})^t.$$

Означили сме с $(A_{ij})^t$ транспонираната матрица (съответните редове и стълбове са разменили местата си) на матрицата (A_{ij}).

Метод на Гаус-Жордан за намиране на обратна матрица

Елементарни преобразувания върху редовете на матрицата се наричат:
1) смяната местата на два реда;
2) прибавяне на даден ред от матрицата, умножен с число към друг неин ред;
3) умножение на ред с число, различно от нула.

Заб. В сила е аналогично определение за елементарни преобразувания върху стълбове на матрица.
Ако матрицата B е получена от матрицата A чрез елементарни преобразувания върху редовете и стълбовете ѝ, то A се нарича **еквивалентна на** B и означаваме $A \sim B$.

Нека е дадена неособена квадратна матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots n$. Образуваме матрицата (A/E), където E е единичната матрица от същия тип.
Чрез елементарни преобразувания само върху редовете я привеждаме във вида (E/A^{-1}).
Тогава обратната матрица на A е

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \ldots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \ldots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Методът, който използваме за да я намерим се нарича **метод на Гаус-Жордан** за намиране на обратна матрица.

Матрични уравнения

Матричното уравнение

$$AX = B, \quad \det A \neq 0, \tag{1}$$

има единствено решение $X = A^{-1}B$.
То се получава, като умножим отляво двете страни на (1) с обратната матрица A^{-1} на A.
Матричното уравнение $XA = B$, където A е неособена квадратна матрица, има единствено решение $X = BA^{-1}$.
За уравнението

$$AX = B, \quad \det A = 0, \tag{2}$$

имаме следните случаи:

1) Ако B не е квадратна или B е особена, то (2) има безброй решения или няма решение.
За да се реши докрай уравнението (2), трябва да се умножат матриците A и X и да се разпише системата уравнения.
2) Ако B е неособена, то (2) няма решение.
Аналогично, за уравнението

$$XA = B, \quad \det A = 0, \tag{3}$$

имаме следните случаи:
1) Ако B не е квадратна или B е особена, то (3) има безброй решения или няма решение.
2) Ако B е неособена, то (3) няма решение.

Задачи. (5. Тема)

6. Да се намери обратната матрица A^{-1}.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

7. Да се намери обратната матрица A^{-1} чрез метода на Гаус-Жордан, ако:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Да се докаже, че следните матрици нямат обратни:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

9. Да се решат матричните уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Линейно преобразуване на векторни пространства

Нека V и W са две реални векторни пространства.
Изображението $f: V \to W$ се нарича **линейно преобразуване** на V в W, ако f удовлетворява свойствата:
1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$,
за всеки два вектора x и y от V и всяко реално число λ.
Множеството на всички линейни преобразувания на V в W се означава с $\mathfrak{L}(V, W)$.
За произволно линейно преобразуване $f \in \mathfrak{L}(V, W)$ са в сила:

$$f(o_v) = o_w, \qquad f(-x) = -f(x).$$

Тук o_v и o_w са съответно нулевите вектори на V и W, а x е произволен вектор от V.
Ако $V = W$, то $f: V \to V$ се нарича линейно преобразуване на V и множеството им се означава с $\mathfrak{L}(V)$.

Ако линейното преобразуване f е взаимно еднозначно, то се нарича **изоморфизъм**.
Множеството от векторите на W, които са образи на вектори от V чрез f се нарича **област от стойности на** f и се означава $\mathrm{im} f$.

$$\mathrm{im} f = \{y \in W \mid \exists\, x \in V, f(x) = y\}.$$

Множеството от векторите на V, които са първообрази на нулевия вектор чрез f се нарича **ядро на** f и се означава $\ker f$.

$$\ker f = \{x \in V \mid f(x) = o\}.$$

Множеството $\ker f$ е векторно подпространство на V, а множеството $\mathrm{im} f$ е векторно подпространство на W.
Числата $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{im} f)$ и $\mathrm{def}(f) = \dim(\ker f)$ се наричат съответно **ранг и дефект на линейното преобразуване** f.
Ако $f \in \mathfrak{L}(V)$, то

$$\mathrm{def}(f) + \mathrm{rg}(f) = \dim V.$$

Матрица на линейно преобразуване. Образ на вектор при линейно преобразуване

Нека е дадено линейно преобразуване на n-мерно в m-мерно векторно пространство $f : V^n \to W^m$. Нека $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ са бази съответно на векторните пространства V^n и W^m. Тогава $f(v_i)$ са вектори на W и се изразяват линейно чрез базата $\{w_j\}$ на W, както следва:

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m,\\
f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m,\\
f(v_3) &= a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + \cdots + a_{m3}w_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m.
\end{aligned}
$$

Тук коефициентите a_{ij} са реални числа и образуват матрицата:

$$M_{v,w}(f) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Тя е от тип $(m \times n)$. Матрицата $M_{v,w}(f) = (a_{ij})$ нарича **матрица на линейното преобразуване f относно базите $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$**.

Ако вектор $x(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ и образът му $f(x) = y(y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_m)$ са зададени съответно относно базите $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$, то връзката между техните координати се дава с матричното равенство:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При фиксирани бази v и w, на всяко $f \in \mathfrak{L}(V, W)$ съответства еднозначно определена матрица $M_{v,w}(f) = (a_{ij})$, т.е. с (4) се определя изображение

$$M_{v,w} : \mathfrak{L}(V, W) \to M_{m\times n}(R).$$

Това изображение е взаимно еднозначно.
Примери на линейни преобразувания.
1) Нулево преобразуване на $\mathfrak{L}(V, W)$ се нарича изображението $o : V \to W$, при което $o(x) = o$ за всеки вектор $x \in V$.
На него съответства нулевата матрица $M_{v,w}(o) = O$ от тип $m \times n$.
2) Тъждественото преобразуване (идентитет) на $\mathfrak{L}(V)$ се нарича изображението $\mathrm{id} : V \to V$, при което $\mathrm{id}(x) = x$ за всеки вектор $x \in V$.
На него съответства единичната матрица $M_v(\mathrm{id}) = E$ от n-ти ред.
3) Транспонирането на матриците в $M_{m\times n}(R)$ е линейно преобразуване.

Задачи (5. Тема)

10. Нека е дадено изображението $f : R^3 \to R^2$. Да се провери дали f е линейно, ако образът на произволен вектор $x(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ е:

а) $f(x) = (x_1 + x_2 - x_3, 3x_3)$,

б) $f(x) = (x_1 + x_3, 1 - x_2)$.

Да се намери матрицата на линейното преобразуване относно каноничните бази на R^3 и R^2.

11. Нека f е линейно преобразуване на V. Ако $\{e_1, e_2, e_3\}$ е база на V и $f(e_1) = e_1 + e_2 - e_3$, $f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3$, $f(e_3) = e_2 - 2e_3$, то да се намери

а) матрицата на линейното преобразуване $M_e(f)$;

б) аналитичното представяне на f;

в) образът на вектор $x_0(1, 0, -3)$ чрез f.

Смяна на база

Нека V е n-мерно векторно пространство и $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $e' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ са две негови бази. Тогава векторите от e' са линейни комбинации на векторите от e и обратно.
Нека връзката между двете бази е следната

$$
\begin{aligned}
e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + t_{31}e_3 + \dots + t_{n1}e_n \\
e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + t_{32}e_3 + \dots + t_{n2}e_n \\
e'_3 &= t_{13}e_1 + t_{23}e_2 + t_{33}e_3 + \dots + t_{n3}e_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + t_{3n}e_3 + \dots + t_{nn}e_n .
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Матрицата

$$
T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}
$$

се нарича **матрица на прехода от базата e към базата e'**.
В матричен вид (5) се записва:

$$e' = eT. \tag{6}$$

Всяка матрица на прехода T е неособена. Следователно съществува T^{-1}. Нещо повече, T^{-1} е матрица на прехода от базата e' към базата e.
Нека вектор $a \in V$ има следните представяния съответно относно e и e':

$$\begin{aligned} a &= x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + \cdots + x_ne_n, \\ a &= x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + x'_3e'_3 + \cdots + x'_ne'_n. \end{aligned} \tag{7}$$

Ще означим с x и x' матриците-стълбове от координатите на вектор a относно $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$. Тогава равенствата (7) матрично се записват

$$a = ex, \qquad a = e'x'.$$

От горните равенства, като използваме (6), намираме

$$ex = e'x' = (eT)x' = e(Tx'),$$

откъдето следва

$$x = Tx'. \tag{8}$$

Равенство (8) ни дава **връзка между координатите на произволен вектор спрямо две различни бази**.

Тъй като T е обратима, то получаваме обратната връзка с формулата

$$x' = T^{-1}x.$$

Задачи (5. Тема)

12. Нека $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ е база на тримерно векторно пространство V. Ако $e_1' = e_3$, $e_2' = e_2 + e_3$, $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$ са вектори от V, то

а) Докажете, че образуват база на V;

б) Намерете матрицата на прехода от e' към e;

в) Намерете координатите на вектор $a = e_1 - e_2 + 2e_3$ относно e'.

Изменение на матрицата на линейно преобразуване на векторно пространство при смяна на базата

Нека f е линейно преобразуване на n-мерно векторно пространство V, а A е матрицата му в дадена база e. Матричен запис на това условие е

$$f(e) = eA.$$

Ако e' е друга база на V и B матрицата на f в базата e', то имаме

$$f(e') = e'B.$$

Матрицата на прехода от e към e' е T, т.е. $e' = eT$.
И така, получаваме $f(e') = (eT)B = e(TB)$, както и $f(e') = f(eT) = f(e)T = (eA)T = e(AT)$.
Следователно $TB = AT$, откъдето намираме връзка между матриците на едно линейно преобразуване спрямо различни бази:

$$B = T^{-1}AT.$$

Матрицата B се нарича **подобна на A чрез неособената матрица** T.

Смяна на координатна система

Нека $K = Oe_1e_2e_3 = Ox_1x_2x_3$ и $K' = O'e'_1e'_2e'_3 = O'x'_1x'_2x'_3$ са две координатни системи в пространството. Нека T е матрицата на прехода от базата e към базата e'. Ако $\det T > 0$, то двете координатни системи K и K' са еднакво ориентирани. Ако $\det T < 0$, то K и K' са противоположно ориентирани.

Нека координатите на O' са $O'(a_1, a_2, a_3)$ относно K.

Ако M е произволна точка с координати $M(x_1, x_2, x_3)$ относно K и $M(x'_1, x'_2, x'_3)$ относно K', то

$$\overrightarrow{OM} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \quad \overrightarrow{O'M} = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + x'_3e'_3.$$

Ако означим матриците-стълбове от координатите на M, M' и O с

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

то имаме матричните равенства

$$\overrightarrow{OM} = ex, \quad \overrightarrow{O'M} = e'x', \quad \overrightarrow{OO'} = ea.$$

Тогава от равенствата $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ и (6) намираме

$$x = Tx' + a.$$

Последното равенство ни дава **връзка между координатите на произволна точка относно две различни координатни системи**.
Транслация на координатната система K до K' имаме, точно когато $T = E$, т.е. $e = e'$. Тогава

$$x = x' + a. \tag{9}$$

Заб. Транслацията не е линейно преобразуване.
Ортогонална трансформация на координатната система K до K' имаме, точно когато координатните системи K и K' са ортонормирани и за координатните начала е изпълнено $O' = O$. Тогава

$$x = Tx'. \tag{10}$$

По-нанатък, получаваме координатен запис на (9) и (10).
В пространството **транслацията на координатната система** K до K' се задава с равенствата

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + a_1, \\ x_2 &= x_2' + a_2, \\ x_3 &= x_3' + a_3. \end{aligned}$$

Ортогонална смяна на ортонормирана координатна система K до ортонормирана координатна система K' се задава с

$$\begin{aligned} x_1 &= t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + t_{13}x_3', \\ x_2 &= t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + t_{23}x_3', \\ x_2 &= t_{31}x_1' + t_{32}x_2' + t_{33}x_3', \end{aligned}$$

където $T = (t_{ij})$ е **ортогонална матрица**, т.е. транспонираната и обратната на T са равни: $T^{'} = T^{-1}$.

Транслация и ротация в равнината

В равнината **транслацията на координатната система** K до K' се задава с равенствата

$$x_1 = x'_1 + a_1,$$
$$x_2 = x'_2 + a_2.$$

Ортогонална смяна на ортонормирана координатна система K до ортонормирана координатна система K' се задава с

$$\begin{aligned} x_1 &= t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2, \\ x_2 &= t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2, \end{aligned} \tag{11}$$

където $T = (t_{ij})$ е ортогонална матрица ($T^{'} = T^{-1}$).
В случай, че K и K' са еднакво ориентирани, то смяната (11) е **ротация на координатната система** K до K'.
Ъгълът на ротация $\alpha = \measuredangle(Ox_1, O'x'_1)$ е определен с функциите $\cos\alpha = t_{11}$, $\sin\alpha = t_{21}$.

Ранг на матрица

Линейна обвивка на система от вектори $\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ се нарича множеството от всички техни линейни комбинации и се означава $L(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$.
Очевидно $L(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ е векторно пространство, породено от системата вектори α. Размерността му се нарича **ранг на системата вектори** α и се означава $\operatorname{rg}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = \dim L(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$.
И така, рангът на система вектори е броят на векторите във всяка максимална линейно независима нейна подсистема.
Рангът на системата вектори, която се състои само от нулевия вектор е числото нула.
Намирането на ранга на система вектори се свежда до намирането на ранга на матрицата образувана от техните координати.

Нека е дадена матрицата $A \in M_{m \times n}(R)$, както следва

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Редовете на A като наредени n-ки числа са m на брой вектори

$$u_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}).$$

Стълбовете на A като наредени m-ки числа са n на брой вектори

$$v_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \dots, a_{mj}).$$

Разместването на редовете на A не променя ранга на системата вектори $\{u_i\}$, както и раместването на стълбовете й не променя ранга на системата вектори $\{v_j\}$.

Нещо повече:

Разместването на редовете на A не променя ранга на системата от стълбовете й, както и раместването на стълбовете на A не променя ранга системата от редовете й.

Рангът на системата от редовете на една матрица е равен на ранга на системата от стълбовете й. Той се нарича **ранг на матрицата**. Означаваме $\mathrm{rg}A$.

Елементарни преобразувания върху редовете (стълбовете) на матрицата не променят нейния ранг.

Елементарни преобразувания върху редове:

1) смяната местата на два реда;

2) прибавяне на даден ред от матрицата, умножен с число, към друг неин ред;

3) умножение на ред с число, различно от нула.

Матрици с един и същи ранг се наричат еквивалентни, т.е. ако $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}B$, то $A \sim B$.

Всяка матрица от вида

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3r} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{rr} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

се нарича **трапецовидна**, ако $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.
Рангът на трапецовидната матрица е равен на r.
За да намерим ранга на произволна матрица A я привеждаме в трапецовиден вид (12). Прилагаме елементарни преобразувания върху редовете и върху стълбовете ѝ. В този случай двете матрици A и C са еквивалентни.

Задачи (6. Тема)

1. Намерете ранга на матриците:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Намерете ранга на системата вектори:

а) $a_1 = (1, -1, 0)$, $a_2 = (1, -3, 0)$, $a_3 = (2, -4, 0)$;

б) $a_1 = (3, -1, 3, 2, 5)$, $a_2 = (5, -3, 2, 3, 4)$, $a_3 = (1, -3, -5, 0, -7)$.

Системи линейни уравнения

Общият вид на **система линейни уравнения от** II ред е

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{array} \right. \qquad (13)$$

където a_{ij} са коефициенти на системата, а x_1, x_2 са неизвестни.
Решение на системата (13) е всяка двойка числа (x_1, x_2), която удовлетворява и двете уравнения тъждествено.
Системата (13) е еквивалентна на уравнението $AX = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

е матрицата от коефициентите, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ е матрицата-стълб от неизвестните, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ е матрицата от свободните коефициенти.

Ако $\det A \neq 0$, то матричното уравнение $AX = B$ има единствено решение $X = A^{-1}B$, т.е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Така получаваме, че единственото решение на системата (13) се задава с

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{14}$$

където

$$\Delta = \det A, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Формулите (14) се наричат **формули на Крамер**.

Общ вид на **система линейни уравнения от** III ред.

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{vmatrix} \tag{15}$$

където a_{ij} са коефициенти на системата, а x_1, x_2, x_3 са неизвестни.
Решение на системата (15) е всяка тройка числа (x_1, x_2, x_3), която удовлетворява и трите уравнения тъждествено.
Системата (15) е еквивалентна на уравнението $AX = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

е матрицата от коефициентите, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ е матрицата от неизвестните, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ е матрицата от свободните коефициенти.

Ако $\det A \neq 0$, то системата (15) има единствено решение, което се получава по формулите на Крамер:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

където $\Delta = \det A$ и

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогично се записват и решават системи линейни уравнения от n–ти ред.

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right. \tag{16}$$

Системата (16) е еквивалентна на уравнението $AX = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

е матрицата от коефициентите на системата.

Формулите на Крамер са

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

където $\Delta = \det A$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Решаване на системи линейни уравнения чрез метода на Гаус

Общ вид на система от m линейни уравнения с n неизвестни е

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right. \tag{17}$$

където a_{ij} са коефициенти на системата, а $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ са неизвестни.
Решение на системата (17) е всяка n-торка числа $(x_1, x_2, x_3 \dots, x_n)$, която удовлетворява всички уравнения тъждествено.

Системата (17) се нарича **хомогенна** само, когато коефициентите b_i са равни на нула.
Системата (17) се нарича **несъвместима**, ако няма решение, и **съвместима**, ако има поне едно решение.
Съвместимите системи биват **определени**, когато имат точно едно решение и **неопределени**, когато имат повече от едно решение.
Всяка хомогенна система е съвместима. Нулевото решение $(0, 0, \ldots, 0)$ винаги я удовлетворява.
Матрицата от коефициентите на системата (17) е $A = (a_{ij})$ и се нарича **основна**. Матрицата

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

се нарича **разширена матрица на системата**.

Системата (17) е съвместима, точно когато $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}\bar{A}$.
Рангът на матрицата A се нарича ранг на системата (17).
Системата (17) е определена, точно когато $\mathrm{rg}A = n$.
Системата (17) е неопределена, точно когато $\mathrm{rg}A < n$.
За да решим (17), т.е. да определим вида ѝ и да намерим нейни решения, ако такива съществуват, универсален и най-удобен е методът на Гаус.

Метод на Гаус. Чрез елементарни преобразувания върху редовете на $\bar{A}$ я привеждаме в следния вид:

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3r} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{rr} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_m \end{pmatrix},$$

Системата (17) е несъвместима, ако има поне един коефициент d_s, $(s > r+1)$ различен от нула.
Ако $d_{r+1} = d_{r+2} = \cdots = d_m = 0$, то системата (17) е съвместима.
В този случай, ако $n > r$, то тя е неопределена. Ако $n = r$, то (17) е определена.
Забележка. При решаването на системи с метода на Гаус ще имаме предвид:
1. Ред, състоящ се само от нули се пропуска; единият от два пропорционални (или равни) реда се пропуска.
2. Самото намиране на решението $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ще бъде изяснено чрез примери.
Обикновено задачите от линейни системи, идващи от практиката са такива, че броят на уравненията им е по-малък от броя на неизвестните и системите са съвместими. Такива системи имат безброй много решения, зависещи от $n - r$ параметри, и точно те са интересни за линейното оптимиране.

Задачи (6. Тема)

3. Да се решат следните системи линейни уравнения, като се използват формулите на Крамер:

а) $\left|\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = -2 \end{array}\right.$) $\left|\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = -2 \end{array}\right.$ в) $\left|\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right.$

г) $\left|\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{array}\right.$ д) $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{array}\right.$

4. Като се приложи методът на Гаус, да се решат системите:

а) $\left| \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \end{array} \right.$ б) $\left| \begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ 7x_1 - 15x_2 + 11x_3 - 4x_4 = 4 \end{array} \right.$

в) $\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ -x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{array} \right.$ г) $\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{array} \right.$

Литература.

[1] Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, "Линейна алгебра и аналитична геометрия", Пловдивско университетско издателство, Пловдив, 2008.

[2] Д. Мекеров, М. Манев. "Учебно помагало за дисциплината Линейна алгебра и аналитична геометрия", IV изд., Макрос, Пловдив, 2010.

[3] Д. Мекеров, П. Рангелова, Б. Царева, Е. Павлов. "Ръководство за решаване на задачи по аналитична геометрия", IV изд., УИ "Паисий Хилендарски", Пловдив, 2008.