Редици. Сходимост на редици

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

Редици

- Ще казваме, че е дадена безкрайна редица (или по-кратко – една редица) от реални числа, когато по някакво правило на всяко естествено число е съпоставено някое реално число. Ако с a_1 означим онова число, което е съпоставено на числото 1, с a_2 – онова, което е съпоставено на числото 2, и т.н., то дадената редица се записва обикновено така:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

а понякога за по-кратко записваме $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто $\{a_n\}$. Числата a_1, a_2 и т.н. се наричат членове на редицата – a_1 е нейният първи член, a_2 – втори и т.н.; n-тият член a_n се нарича общ член на редицата. Числото n се нарича номер или индекс на a_n.

- Една редица считаме за дадена, когато ни е известно правилото за получаване на нейните членове. Това правило обикновено се дава с някаква формула за пресмятане на общия член на редицата. Ето няколко примера на безкрайни редици, записани по два начина – подробно и посредством формула за n-тия им член:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad \text{или } a_n = n;$$

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots \quad \text{или } a_n = 2n;$$

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots \quad \text{или } a_n = 1;$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad \text{или } a_n = \frac{1}{n}.$$

- Ето и някои други примери, в които общият член се записва по по-сложен начин:

$$1, 0, 1, 0, \dots \text{ или } a_n = \begin{cases} 1 & \text{при нечетно } n \\ 0 & \text{при четно } n; \end{cases}$$

$$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots \text{ или } a_n = \begin{cases} 0 & \text{при нечетно } n \\ \frac{2}{n} & \text{при четно } n. \end{cases}$$

- Една редица може да бъде зададена и рекурсивно. Например може да бъдат дадени нейният първи член a_1 и някаква формула за пресмятане на a_{n+1} посредством a_n. Например равенствата

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 1$$

дефинират редицата

$$2, 3, 8, 63, \ldots;$$

а въз основа на равенствата

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

получаваме редицата

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \ldots.$$

- Правилото за получаване на n-тия член на една редица може да не бъде записано с формула, а просто да бъде изказано с думи. Например да разгледаме редицата, n-тия член на която е n-тото просто число. Ето първите няколко члена на тази редица:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots .$$

Ограничени редици

- Една редица се нарича ограничена отгоре, когато множеството от нейните членове е ограничено отгоре, т.е. съществува такова число β, че $a_n \leq \beta$ за всяко n. Числото β се нарича тогава горна граница на редицата.
- Аналогично, една редица се нарича ограничена отдолу, когато множеството от нейните членове е ограничено отдолу, т.е. съществува такова число α, че $\alpha \leq a_n$ за всяко n. Числото α се нарича тогава долна граница на редицата.
- Една редица се нарича ограничена, когато е ограничена отдолу и отгоре, т.е. съществуват две числа α и β, такива че $\alpha \leq a_n \leq \beta$ за всяко n.
- Всяка редица, която не е ограничена, се нарича неограничена.

- Когато една редица е ограничена отгоре, тя притежава, разбира се, безбройно много горни граници, една от които е най-малка – тя се нарича точна горна граница. Също така всяка ограничена отдолу редица притежава безбройно много долни граници, една от които е най-голяма – точната ѝ долна граница.

Сходящи редици. Граници

- Да разгледаме отново редицата

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots. \tag{1}$$

Виждаме, че с нарастването на номера n нейните членове все повече и повече се приближават към числото 0. Това свойство на редицата (1), което изказахме засега не много ясно, ние изразяваме с думите, че редицата клони към числото 0. За да си служим с това понятие, трябва да дадем следната по-точна дефиниция.

Дефиниция 1

Казваме, че редицата

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{2}$$

е **сходяща** *и* **клони** *към числото a, ако за всяко положително число ε можем да намерим такова число N, че при $n > N$ да бъде изпълнено неравенството*

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{3}$$

Числото a се нарича **граница** *на редицата (2).*

Дадената дефиниция може да се изкаже още и така:

Дефиниция 2

Редицата (2) *е сходяща и клони към* a, *ако за всяка околност* $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ *на точката* a *съществува такова число* N, *че всички членове на редицата с номера, по-големи от* N, *се съдържат в тази околност.*

Твърдението, че редицата (2) клони към числото a, накратко записваме по следния начин:

$$\lim a_n = a \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{или} \quad a_n \to a.$$

Естествено възниква въпросът, възможно ли е една редица да притежава повече от една граница. Отрицателен отговор на този въпрос дава следната

Теорема 1

Всяка сходяща редица има единствена граница.

- И така, всяка редица е или сходяща и тогава тя притежава единствена граница, или не е сходяща, т.е. не удовлетворява изискването на нашата дефиниция, и тогава тя не притежава никаква граница. Всяка редица, която не е сходяща, се нарича разходяща.

Свойства на сходящите редици

1. Ако в една сходяща редица променим стойностите на краен брой нейни членове, то сходимостта на редицата няма да се наруши и границата й няма да се промени.
2. Ако от една сходяща редица премахнем краен брой членове или пък прибавим краен брой нови членове към нея, то получената редица е също сходяща и има същата граница.
3. Ако една редица е сходяща и клони към числото a, то всяка нейна подредица е също сходяща и клони също към a.
4. Всяка сходяща редица е ограничена. (Следствие: Ако една редица е неограничена, тя е разходяща.)
5. Ако са дадени две сходящи редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, при което $\lim a_n = a$ и $\lim b_n = b$, и ако $a_n \leq b_n$ за всяко n, то $a \leq b$.

6. Ако редицата $\{a_n\}$ е сходяща и $\lim a_n = a$, и ако за всяко n имаме $a_n \leq l$, където l е някакво реално число, то $a \leq l$.
7. Нека са дадени трите редици $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$, и нека $a_n \leq c_n \leq b_n$ за всяко n. Ако редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи и имат обща граница l, то и редицата $\{c_n\}$ е сходяща и има граница l.
8. Ако редицата $\{a_n\}$ е сходяща и клони към a, то редицата $\{|a_n|\}$ е също сходяща и клони към $|a|$.
9. Ако една от двете редици $\{a_n\}$ или $\{|a_n|\}$ клони към 0, то и другата също клони към 0.

10 Ако редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи и $\lim a_n = a$ и $\lim b_n = b$, то редиците $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$ са също сходящи. В случая, когато $b_n \neq 0$ за всяко n и $b \neq 0$, сходяща е и редицата $\{\frac{a_n}{b_n}\}$. При това

$$\lim(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim(a_n - b_n) = a - b,$$

$$\lim a_n b_n = ab, \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Монотонни редици. Числото е

- Една редица
$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$
се нарича растяща, ако за всяко n е изпълнено неравенството $a_n \leq a_{n+1}$. Ако пък $a_n \geq a_{n+1}$ за всяко n, то тя се нарича намаляваща. Растящите и намаляващите редици образуват множеството на монотонните редици.
- Всяка растяща редица е сигурно ограничена отдолу, тъй като нейният първи член се явява същевременно и нейна долна граница. Една растяща редица обаче може да бъде неограничена отгоре. Аналогично една намаляваща редица е винаги ограничена отгоре, но не винаги отдолу.

- Видяхме, че една редица може да бъде ограничена без да е сходяща. При монотонните редици обаче това е невъзможно.

Теорема 2

Всяка ограничена монотонна редица е сходяща. При това, ако е растяща, тя клони към своята точна горна граница, а ако е намаляваща – към своята точна долна граница.

- Да разгледаме редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Може да се докаже, че тази редица е растяща и ограничена отгоре. Тя е ограничена и отдолу, защото е растяща. Тогава от последната теорема следва, че съществува границата

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{4}$$

Това число наричаме неперово число.

- Може да се покаже, че това число е ирационално. Първите му десетични знаци са:

$$e = 2.7182818284\ldots.$$

Числото e се взема за основа на т.н. естествена логаритмична система. Прието е естествените логаритми на числата вместо с $\log_e x$ да се означават с $\ln x$ или $\log x$.

- По-общо, може да се докаже, че

$$\lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k \quad \text{за всяко} \quad k \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Безкрайно малки и безкрайно големи редици

- Понякога думата клони се използва и за редици, които са разходящи. Удобно е да въведем следната

Дефиниция 3

Ще казваме, че редицата

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

клони към безкрайност и ще бележим това така:

$$\lim a_n = \infty \quad \textit{или} \quad a_n \to \infty,$$

когато при всеки избор на положителното число A може да се намери такова число N, че при $n > N$ да имаме $a_n > A$.

- Обърнете внимание, че числото A се взема произволно и следователно може да бъде избрано колкото искаме голямо. Така че в дефиницията всъщност се иска членовете на редицата да могат да станат по-големи от всяко положително число, колкото и голямо да е то, стига номерата на тези членове да станат достатъчно големи.
- Лесно се вижда, че например редиците

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots,$$

$$1, 4, 9, \dots, n^2, \dots,$$

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

клонят към ∞.

Дефиниция 4

Ще казваме, че редицата

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

клони към минус безкрайност и ще бележим това така:

$$\lim a_n = -\infty \quad \textit{или} \quad a_n \to -\infty,$$

когато при всеки избор на отрицателното число B може да се намери такова число N, че при $n > N$ да имаме $a_n < B$.

- Редицата

$$-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$$

клони към $-\infty$.

- Когато $\lim |a_n| = \infty$, редицата $\{a_n\}$ се нарича безкрайно голяма.
- Ако редицата $\{a_n\}$ е сходяща и $\lim a_n = 0$, тя се нарича безкрайно малка редица.

Свойства на безкрайно малките редици и безкрайно големите редици

1. Сума, разлика и произведение на безкрайно малки редици, са също безкрайно малки редици.
2. Произведение на безкрайно малка редица и ограничена редица е също безкрайно малка редица.
3. Редицата $\{a_n\}$ е безкрайно малка тогава и само тогава, когато $\{|a_n|\}$ е безкрайно малка.
4. Нека е дадена редицата $\{a_n\}$ и нека $a_n > 0$ за всяко n. Тогава:
   - (i) Редицата $\{a_n\}$ е безкрайно малка тогава и само тогава, когато редицата от реципрочните стойности $\{\frac{1}{a_n}\}$ е безкрайно голяма.
   - (ii) Редицата $\{a_n\}$ е безкрайно голяма тогава и само тогава, когато редицата от реципрочните стойности $\{\frac{1}{a_n}\}$ е безкрайно малка.

5 Нека редицата $\{a_n\}$ е сходяща и $\lim a_n = a$, където a е някакво реално число. Ако за редицата $\{b_n\}$ имаме $\lim b_n = \infty$, то

$$\lim(a_n + b_n) = \infty.$$

Ако пък $\lim b_n = -\infty$, то

$$\lim(a_n + b_n) = -\infty.$$

6 Нека редицата $\{a_n\}$ е сходяща и $\lim a_n = a$, $a \neq 0$. Ако за редицата $\{b_n\}$ имаме $\lim b_n = \infty$, то при $a > 0$ имаме

$$\lim(a_n b_n) = \infty.$$

а при $a < 0$

$$\lim(a_n b_n) = -\infty.$$

7 Ако за редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имаме $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = \infty$, то

$$\lim(a_n + b_n) = \infty \quad \text{и} \quad \lim(a_n b_n) = \infty.$$

Ако пък $\lim a_n = -\infty$, $\lim b_n = -\infty$, то

$$\lim(a_n + b_n) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim(a_n b_n) = \infty.$$

Накрая, ако $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$, то

$$\lim(a_n b_n) = -\infty.$$

Изчисление с Mathematica

- $\text{Limit}[f, n \to \text{Infinity}]$ пресмята символично границата на f при $n \to \infty$;

Примери

1) Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{6}$$

За целта ще използваме Дефиниция 1 за $a_n = \frac{1}{n}$ и $a = 0$. Нека ε е произволно положително число. Имаме

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

стига да е изпълнено неравенството $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогава ако изберем $N = \frac{1}{\varepsilon}$, то можем да приложим Дефиниция 1 и съгласно нея ще имаме (6).

$$2)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$
$$=\frac{2+0+0}{1+0}=2.$$

По-горе няколко пъти използвахме границата (6).

$$3)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{2n^3-n^2+n-10}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}{n^3(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{10}{n^3})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}{n(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{10}{n^3})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{10}{n^3}}$$
$$=0\cdot\frac{1+0+0}{2-0+0-0}=0.$$

$$4)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n+1}{10n^2+8n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{n^2(10+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{(10+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{10+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

$$5)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0+0=0,$$

защото

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \text{при} \quad |q| < 1. \tag{7}$$

6) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = 0.$$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2 - 6a_n + 8}{a_n^2 - 5a_n + 4}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4, \quad a_n \neq 1;\ 4.$

В този случай, ако се опитаме веднага да извършим граничен преход при $n \to \infty$, ще получим неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Затова първо ще разложим числителя и знаменателя на прости множители. Имаме

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 6a_n + 8}{a_n^2 - 5a_n + 4} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - 2)(a_n - 4)}{(a_n - 1)(a_n - 4)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - 2}{a_n - 1} = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$$8)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3} = e^{3}.$$

Тук използвахме границата (4).

$$9)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{2(n+3)-6}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\right]^{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{-6}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{2}\cdot(1+0)^{-6}$$

$$= e^{2}.1 = e^{2}.$$

10) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4-1}{n+4}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+4}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+4}\right)^{n+4-4}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+4}\right)^{n+4} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+4}\right)^{-4}$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m} \cdot (1-0)^{-4}$$
$$= e^{-1}.1 = e^{-1}.$$

Тук използвахме, че

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m} = e^{-1}$$

(вижте по-общата граница (5)).