Глава II
ЧИСЛЕНО ИНТЕГРИРАНЕ НА ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

1. Постановка на началната задача на Коши

Начална задача:

$$\begin{aligned} & y'(x) = f(x, y), \qquad x \in [a, b] \\ & y(a) = y_0 \end{aligned} \tag{9}$$

Ще предполагаме, че са изпълнени условията за съществуване и единственост на решението.

При числено решаване на (9) интервалът $[a,b]$ се разделя на n подинтервала. При това се получават точките:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

които се наричат възли или точки на деление.

Много често се използва равномерна стъпка $h = \dfrac{b-a}{n}$ и получават възлите $x_i = a + ih,\ i = 0, 1, \dots, n$. По дадено начално значение y_0 се търсят приближено стойностите на функцията $y(x)$ в избраните точки $x_i,\ i = 0, 1, 2, \dots, n$, т.е. решението се намира във вид на таблица от стойности $y_1, y_2, \dots, y_n$.

2. Методи на Ойлер

В тази група методи са включени най-простите едностъпкови методи, при които по известно y_0 се намира приближено стойността y_1 в съседната точка x_1, от y_1 по същата процедура се намира y_2 и т.н. до y_n.

2.1. Явен метод на Ойлер

Ще разглеждаме началната задача (9).

По дадено начално значение y_0 се търсят приближено стойностите на функцията $y(x)$ в избраните точки $x_i,\ i = 0, 1, 2, \dots, n$, т.е. решението се търси във вид на таблица от стойности $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$.

За решаване на задача (9) приближените значения на търсената функция се изчисляват по следната

Обща формула на метода на Ойлер за всяка точка x_i:

$x_0 = a, y_0$ - зададени по условие,

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \qquad (10)$$

Ако грешката в дадена точка x_i се означи с $R(x_i) = y(x_i) - y_i$ може да се покаже, че

$$R(x_i) = \frac{h^2}{2!} y''(\xi_i), \quad x_i \le \xi_i \le x_{i+1}.$$

Оттук веднага се вижда, че за произволна точка $x \in [x_i, x_{i+1}]$ е валидна следната теоретична оценка за абсолютната локална грешка:

$$|R(x)| \le \frac{h^2}{2!} \max_{[x_i, x_{i+1}]} |y''(\xi)| \le \frac{h^2}{2!} M_2 h^2, \qquad (11)$$

където $\max\limits_{[x_i, x_{i+1}]} |y''(\xi)| \le M_2$. Т.е. при ограничена втора производна на решението:

$$r_i = |y(x_i) - y_i| \le C\, h^2 \text{ или } r_i = O(h^2), \qquad (12)$$

където C е константа, независеща от стъпката h. Кратко казано, локалната грешка от явния метод на Ойлер е пропорционална на h^2.

За глобалната теоретична грешка в интервала $[x_0, x_i]$ е валидна оценката:

$$r(x_i) = |y(x_i) - y_i| \le \bar{C}\, h \quad \text{или } r = O(h). \qquad (13)$$

Пример 1. По явния метод на Ойлер да се намери приближеното решение $y(x)$ на следната начална задача при зададени стъпка h и интервал за x. Получените резултати да се сравнят с точното решение $y^*(x)$.

$$y' = 0.2y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 0.5], \quad h = 0.1; \quad y^*(x) = \exp(0.2x).$$

Решение:

Тъй като $h = 0.1, a = 0, b = 0.5$, то $n = 5$ и възлите на интегриране са съответно $x_0 = 0,\ x_1 = 0.1,\ x_2 = 0.2,\ x_3 = 0.3,\ x_4 = 0.4,\ x_5 = 0.5$. Знаем $y_0 = 1$. По формула (10) изчисляваме $y_1 = y_0 + 0.2y_0 = 1 + 0.2 = 1.02$, след това аналогично y_2 и т.н. Получените резултати, както и точните стойности на решението са подредени в Табл.1. Независимо от точността на междинните изчисления, съгласно (12) методът осигурява малка точност. За разглежданата задача при $h = 0.1$ теоретичната оценка на грешката на всяка стъпка i е $r_i \approx 0.01$. Следователно при неголямото изменение на решението за краен резултат взимаме стойностите на y с два до три знака след десетичната точка, напр. $y(0.5) = 1.10$. Сравнете с точното решение в същата точка, което е $y^*(0.5) = 1.105171$. В случая локалната грешка е 0.01 и съответства на теоретичната.

Табл. 1. Решение на Пример 1: $y' = 0.2y,\ y(0) = 1$ по метода на Ойлер със стъпка $h = 0.1$.

i	x_i	$f(x_i, y_i)$	y_i	y_i^* точно решение
0	0.0	0.2	1	1.000000
1	0.1	0.204	1.02	1.020201
2	0.2	0.20808	1.0404	1.040811
3	0.3	0.212242	1.06121	1.061837
4	0.4	0.216486	1.08243	1.083287
5	0.5	-	1.10408	1.105171

Пример 2. По явния метод на Ойлер да се намери приближеното решение $y(x)$ на следната начална задача при дадените стойности на стъпката h. Получените резултати да се сравнят с точното решение $y^*(x)$. Да се анализира решението спрямо това от Пример 1.

$$y' = 10y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 0.5], \ \ h = 0.1, \quad h = 0.05; \ \ y^*(x) = \exp(10x) \ .$$

Решение:

Въпреки, че уравнението е подобно на случая от Пример 1, виждаме, че решението се отдалечава от точното с нарастването на аргумента x (Табл. 2а). Грешката на метода при малка стъпка е голяма, тъй като частните производни на $f(x, y)$ са големи и влияят на $y''(x)$. Това се вижда например за решенията в последната точка $x = 0.5$ както за $h = 0.1$, така и за $h = 0.05$.

Табл. 2а. Решения на Пример 2, изчислени по метода на Ойлер със стъпки $h = 0.1$ и $h = 0.05$, отпечатани в необходимите точки.

i	x_i	$f(x_i, y_i)$ при $h = 0.1$	y_i при $h = 0.1$	$f(x_i, y_i)$ при $h = 0.05$	y_i при $h = 0.05$	y_i^* точно реш.
0	0.0	10	1.000	10.0000	1.00000	1.000000
1	0.1	20	2.000	22.5000	2.25000	2.718282
2	0.2	40	4.000	50.6250	5.06250	7.389056
3	0.3	80	8.000	113.9060	11.39060	20.085540
4	0.4	1600	16.000	256.2890	25.62890	54.598150
5	0.5	-	32.000	-	57.66500	148.413200

Такъв тип задача се отнася към т.н. неустойчиви (твърди) диференциални задачи. Удовлетворителни резултати могат да се получат например, при достатъчно малка стъпка или по други методи, например неявни методи. На Табл.3 са дадени стойностите на решението, получени с помощта на компютър при междинна стъпка $h = 0.001$ и $h = 0.000001$.

Табл. 2б. Решения към Пример 2, изчислени по метода на Ойлер със стъпка $h = 0.001$ и $h = 0.000001$, отпечатани в необходимите точки.

x_i	y_i $h = 0.001$	y_i $h = 0.000001$	y_i^* - точно реш.
0.0	1.00000	1.00000	1.000000
0.1	2.70481	2.71823	2.718282
0.2	7.31602	7.38880	7.389056
0.3	19.78851	20.08440	20.085540
0.4	53.52412	54.59430	54.598150
0.5	144.77304	148.40000	148.413200

2.2. Метод на Ойлер за системи обикновени диференциални уравнения

В случая на системи обикновени уравнения, формула (10) се записва за всяка координата на векторите. Да разгледаме за определеност началната задача за система от две уравнения

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}, \qquad a = x_0 \le x \le b$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{14}$$

$$z(x_0) = z_0$$

Последователното изчисляване на y_{i+1}, z_{i+1} се извършва по следните

Формули на метода на Ойлер за система ОДУ от две уравнения:

x_0, y_0, z_0 - зададени по условие. При известни x_i, y_i, z_i изчисляваме решенията y_{i+1}, z_{i+1} в следващата точка x_{i+1} от

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} &= z_i + hg(x_i, y_i, z_i) \end{aligned} \tag{15}$$

за $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример 3. По явния метод на Ойлер и равномерна стъпка $h = 0.1$ да се намери приближеното решение $\{y(x), z(x)\}$ на следната начална задача за система ОДУ:

$$\begin{cases} y' = x - 2z \\ z' = z + \dfrac{3y}{x+z} \end{cases}, \qquad 1 \le x \le 1.5$$

$$y(1) = -1$$
$$z(1) = 2$$

Решение:

Тъй като $h = 0.1,\ x_0 = a = 1,\ b = 1.5$, то $n = 5$ и възлите на интегриране са съответно $x_0 = 1,\ x_1 = 1.1,\ x_2 = 1.2,\ x_3 = 1.3,\ x_4 = 1.4,\ x_5 = 1.5$. Знаем $y_0 = y(1) = -1$ и $z_0 = z(1) = 2$. По формула (15) изчисляваме последователно:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0, z_0) = y_0 + h\left(x_0 - 2z_0\right) = -1 + 0.1\left(1 - 4\right) = -1.3,$$

$$z_1 = z_0 + hg(x_0, y_0, z_0) = z_0 + h\left(z_0 + \frac{3y_0}{x_0 + z_0}\right) = 2 + 0.1\left(2 + \frac{3(-1)}{1+2}\right) = 2.1$$

След това аналогично по (15) от точката $x_1 = 1.1$ като използваме намерените $y_1 = -1.3$ и $z_1 = 2.1$ изчисляваме y_2 и z_2 и т.н. Получените резултати на решението са подредени в Табл. 4. След закръгляне според теоретичната точност 0.01 ще имаме стойностите на решението от последните две колони.

Табл. 3. Решение на началната задача за системата ОДУ от Пример 3 по метода на Ойлер със стъпка $h = 0.1$.

i	x_i	$f(x_i, y_i, z_i)$	$g(x_i, y_i, z_i)$	y_i	z_i	$\tilde{y}_i$	$\tilde{z}_i$
0	1.0	-3.	1.	-1.	2.	-1.00	2.00
1	1.1	-3.1	0.88125	-1.3	2.1	-1.30	2.10
2	1.2	-3.17625	0.762558	-1.61	2.18813	-1.61	2.19

3	1.3	-3.22876	0.641974	-1.92763	2.26438	-1.933	2.26
4	1.4	-3.25716	0.517833	-2.2505	2.32858	-2.25	2.33
5	1.5	-	-	-2.57622	2.38036	-2.58	2.38

Задачи за самостоятелна работа

1) По метода на Ойлер да се намери приближеното решение $y(x)$ на следната начална задача при дадените стойности на стъпката h. Сравнете резултатите с точното решение $y^*(x)$.

$$y' = y - 2\sin(x), \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 0.5], \quad y^*(x) = \cos(x) + \sin(x)$$

а) при $h = 0.1$

б) при $h = 0.05$

2) По метода на Ойлер да се решат следните задачи и получените резултати да се сравнят със съответните точни решения $y^*(x)$:

а) $y' = \dfrac{y}{x} + 1$, $y(1) = 0$, $x \in [1, 2]$, $n = 10$; $y^*(x) = x\ln(x)$

б) $y' = \dfrac{y - \alpha}{x} + 1$, $y(1) = \alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$; $x \in [1, 2]$, $n = 5$; $y^*(x) = x\ln(x) + \alpha$

3) По метода на Ойлер да се решат следните задачи:

а) $y' = \dfrac{x + y}{x + y^2}$, $y(1) = 1$, $x \in [1, 2]$, $n = 5$

б) $y' = \alpha\dfrac{x - y}{x + y}$, $y(0) = \alpha$, $x \in [0, 1]$, $n = 10$, $\alpha = 2$

в) $y' = x + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(0) = 0.1$, $x \in [0, 0.5]$, $n = 5$

г) $y' = x\ln(y)$, $y(1) = 2$, $x \in [1, 2]$, $n = 10$

4) Приложете метода на Ойлер за интегриране на задачите:

а) $y'' = y' + 5xy + \alpha$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, $x \in [0, 0.3]$, $h = 0.1$

б) $y'' = xy' + y^2$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $x \in [1, 1.3]$, $h = 0.1$

в) $\begin{cases} y' = x - yz \\ z' = 5x - z \end{cases}$, $y(0)=1$, $z(0)=0$, $0 \le x \le 0.4$, $n=4$

г) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2} + z \\ z' = y - \dfrac{z}{2} \end{cases}$, $y(0)=1$, $z(0)=0$, $0 \le x \le 1$, $n=5$.

Отговори:

1а) Във вид на списък на елементи $\{x_i, y_i, y^*(x_i)\}$: {{0., 1., 1}, {0.1, 1.1, 1.095}, {0.2, 1.190, 1.179}, {0.3, 1.269, 1.251}, {0.4, 1.337, 1.310}, {0.5, 1.393, 1.357}};

1б) {{0.,1.,1.}, {0.05,1.05,1.049}, {0.1,1.098,1.095}, {0.15,1.142,1.138}, {0.2,1.185,1.179}, {0.25,1.224,1.216}, {0.3,1.260,1.251}, {0.35,1.29385,1.28227}, {0.4,1.324,1.310}, {0.45,1.351,1.335}, {0.5,1.376,1.357}}.

2а) {{1.,0,0.}, {1.1,0.1,0.105}, {1.2,0.209,0.219}, {1.3,0.3275,0.341}, {1.4,0.452,0.471}, {1.5,0.584,0.608}, {1.6,0.723,0.752}, {1.7,0.868,0.902}, {1.8,1.019,1.058}, {1.9,1.176,1.220}, {2.,1.338,1.386}};

2б) при $\alpha=1$: {{1.,1.,1.}, {1.2,1.2,1.219}, {1.4,1.433,1.471}, {1.6,1.695,1.752}, {1.8,1.982,2.058}, {2.,2.291,2.386}}; при $\alpha=2$: {{1.,2.,2.}, {1.2,2.2,2.219}, {1.4,2.433,2.471}, {1.6,2.695,2.752}, {1.8,2.982,3.058}, {2.,3.291,3.386}}; при $\alpha=3$: {{1.,3.,3.}, {1.2,3.2,3.219}, {1.4,3.433,3.471}, {1.6,3.695,3.752}, {1.8,3.982,4.058}, {2.,4.291,4.386}}.

3а) {{1.,1.}, {1.2,1.2}, {1.4,1.382}, {1.6,1.550}, {1.8,1.707}, {2.,1.856}};

3б) {{0.,2.}, {0.1,1.8}, {0.2,1.621}, {0.3,1.465}, {0.4,1.333}, {0.5,1.225}, {0.6,1.141}, {0.7,1.079}, {0.8,1.036}, {0.9,1.011}, {1.,0.999}}.

3в) {{0.,0.1}, {0.1,0.11}, {0.2,0.135}, {0.3,0.179}, {0.4,0.244}, {0.5,0.331}};

3г) {{1.,2}, {1.1,2.069}, {1.2,2.149}, {1.3,2.241}, {1.4,2.346}, {1.5,2.465}, {1.6,2.601}, {1.7,2.754}, {1.8,2.926}, {1.9,3.119}, {2.,3.335}}.

{{0.,1.,-1.}, {0.1,0.9,-1.1}, {0.2,0.79,-1.165}, {0.3,0.674,-1.202}}; при $\alpha=1$: {{0.,1.,-1.}, {0.1,0.9,-1.}, {0.2,0.8,-0.955}, {0.3,0.704,-0.8705}; при $\alpha=2$: {{0.,1.,-1.}, {0.1,0.9,-0.9}, {0.2,0.81,-0.745}, {0.3,0.736,-0.538}}; при $\alpha = 3$: {{0.,1.,-1.}, {0.1,0.9,-0.8}, {0.2,0.82,-0.535}, {0.3,0.766,-0.206}}.

4а) {{0.,1.,-1.}, {0.1,0.9,-0.8}, {0.2,0.82,-0.535}, {0.3,0.766,-0.206}}

4б) {{1.,0.,1.}, {1.1,0.1,1.1}, {1.2,0.21,1.222}, {1.3,0.332,1.373}};

4в) {{0.,1.,0.}, {0.1,1.,0.}, {0.2,1.01,0.05}, {0.3,1.025,0.145}, {0.4,1.040,0.280}};

4г) {{0.,1.,0.}, {0.2,1.1,0.2}, {0.4,1.25,0.4}, {0.6,1.455,0.61}, {0.8,1.722,0.84}, {1.,2.063,1.100}}.

2.3. Модифициран метод на Ойлер

Както и в предишния явен метод на Ойлер, предполагаме, че се решава началната задача (9):

$$y'(x) = f(x, y), \qquad x \in [a, b]$$
$$y(a) = y_0$$

Използва се отново равномерна мрежа по оста x със стъпка $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, където $x_i = a + i\,h,\; i = 0, 1, \dots, n$.

По дадено начално значение y_0 се търсят приближено стойностите на функцията $y(x)$ в избраните точки x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, т.е. решението се намира във вид на таблица от стойности $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Този вариант на метода на Ойлер е също явен, но изчисляването на всяка следваща стойност на решението y_{i+1} се извършва с помощта на две междинни пресмятания по следната:

Формула на модифицирания метод на Ойлер за всяка точка x_i:

x_0, y_0 - зададени по условие,

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i), \qquad y_{i+1} = y_i + h\, f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right), \qquad (16)$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$

Локалната грешка на модифицирания метод на Ойлер е с един порядък по-малка от тази на обикновения метод на Ойлер, т.е. $r_i = O(h^3)$, при предположение за ограниченост на третата производна на решението.

Пример 4. По модифицирания метод на Ойлер решете числено задачата и сравнете получения резултат с точното решение $y^*(x)$.

$$y' = \frac{2y}{x} + x, \quad y(1) = 1, \quad x \in [1, 1.4], \quad n = 4, \quad y^*(x) = x^2\left(\ln(x) + 1\right) .$$

Решение:

Имаме $n = 4$, откъдето намираме стъпката $h = (b-a)/n = (1.4-1)/4 = 0.1$. Точките, в които търсим решението са $x_0 = 1,\ x_1 = 1.1,\ x_2 = 1.2,\ x_3 = 1.3,\ x_4 = 1.4$. Дадено е решението в началната точка $x_0 = 1$, което е $y_0 = y(x_0) = y(1) = 1$. По формули (16) за следващата точка x_1 изчисляваме последователно:

$$x_{\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{h}{2} = 1.05,$$

$$y_{\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) = y_0 + \frac{h}{2}\left(x_0 + \frac{2y_0}{x_0}\right) = 1 + 0.5\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 1.15$$

$$y_1 = y_0 + h\, f\left(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}\right) = 1 + 0.5\left(1.05 + \frac{2.(1.15)}{1.05}\right) = 1.32405$$

След това аналогично по (16) за точката $x_1 = 1.1$ по (16) намираме $x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}$ и след това y_2 и т.н. Получените резултати за търсеното решение са дадени в Табл. 4. След закръгляне според теоретичната точност 0.001 ще имаме стойностите на решението в предпоследната колона, което можем да сравним с известното в случая точно решение $y^*(x_i)$. Сравнението показва, че на практика е постигната точност 0.006.

Табл. 4. Резултати към Пример 4.

i	x_i	y_i	f_i	$x_{i+\frac{1}{2}}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	$f_{i+\frac{1}{2}}$	$\tilde{y}_i$	y_i^* точно решение
0	1.0	1.00000	3	1.05	1.15	3.24048	1.000	1.00000
1	1.1	1.32405	3.50736	1.15	1.49942	3.75768	1.324	1.32533
2	1.2	1.69982	4.03303	1.25	1.90147	4.29235	1.700	1.70254

3	1.3	2.12905	4.57546	1.35	2.35782	4.84307	2.129	2.13340
4	1.4	2.61336	-	-	-	-	2.613	2.61949

2.4. Модифициран метод на Ойлер за системи обикновени диференциални уравнения

Аналогично на случая на метода на Ойлер, системата (14) може да се реши приблизително и с модифицирания метод на Ойлер. Стойностите на $y_{i+1},\ z_{i+1}$ се изчисляват по следните:

Формули на модифицирания метод Ойлер за система ОДУ от две уравнения за всяка точка x_i:

x_0, y_0, z_0 - зададени по условие,

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2},\quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f\,(x_i, y_i, z_i),\quad z_{i+\frac{1}{2}} = z_i + \frac{h}{2} g\,(x_i, y_i, z_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + h\, f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}, z_{i+\frac{1}{2}}\right),\qquad z_{i+1} = z_i + h\, g\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}, z_{i+\frac{1}{2}}\right) \tag{17}$$

$i = 0, 1, \ldots,\ n-1$

Задачи за самостоятелна работа

1) Приложете модифицирания метод на Ойлер за приближено решаване на следните начални задачи:

а) $y' = y + \dfrac{x}{y},\quad y(-1) = 1,\quad x \in [-1, 0],\quad n = 5$

б) $y' = \dfrac{2y - x}{x + y},\quad y(2) = 0.5,\quad x \in [2, 3],\quad n = 5$

в) $y' = x\cos(y) - 2y\sin(x),\quad y(0) = -1,\quad x \in [0, \dfrac{\pi}{2}],\quad n = 3$

г) $y' = \exp(-\dfrac{x}{y})\,(\dfrac{x}{y} - 1),\quad y(0) = 1,\quad x \in [0, 1],\quad n = 5$

д) $y' = \sin\left(x^2 + y^2\right),\ \ y(0) = 0,\ \ x \in [0, 0.3],\ \ n = 3$

2) С помощта на модифицирания метод на Ойлер решете задачата:

$$y' = \frac{\alpha}{x^2 + y^2 + 1},\ \ y(0) = 0,\quad x \in [0, 0.4],\ \ n = 4,\ \ \alpha = 1,\ 1.1,\ 1.2$$

3) По модифицирания метод на Ойлер да се решат началните задачи:

а) $$\begin{cases} y' = y - z \\ z' = x^2 + \dfrac{y}{z} \end{cases} \quad y(0) = 1,\quad z(0) = 2,\quad 0 \le x \le 0.3,\quad n = 3$$

б) $$\begin{cases} y' = \alpha + y + z \\ z' = \dfrac{2z}{y + \beta} \end{cases} \quad y(1) = 1,\quad z(1) = -1,\ \ 1 \le x \le 1.4,\ \ n = 4$$

$\alpha = 0,\ 0.1,\qquad \beta = 1,\ 2,\ 3$

Отговори:

1а) {{-1.,1.}, {-0.8,1.02}, {-0.6,1.095}, {-0.4,1.237}, {-0.2,1.458}, {0.,1.763}};

1б) {{2.,0.5}, {2.2,0.4078}, {2.4,0.2880}, {2.6,0.1365}, {2.8,-0.0522},{3.,-0.2868}};

1в) {{0.,-1.}, {0.52360,-1.19697}, {1.0472,-1.8711}, {1.5708,-3.3906}};

1г) {{0.,1.}, {0.2,0.8409}, {0.4,0.7570}, {0.6,0.7254}, {0.8,0.7235}, {1.,0.7373}};

1д) {{0.,1.}, {0.2,0.8409}, {0.4,0.7570}, {0.6,0.7254}, {0.8,0.7235}, {1.,0.7373}}.

2) при $\alpha = 1$: {{0.,0.}, {0.1,0.0996}, {0.2,0.1952}, {0.3,0.2845}, {0.4,0.3658}}; при $\alpha = 1.1$: {{0.,0.}, {0.1,0.1094}, {0.2,0.2142}, {0.3,0.3113}, {0.4,0.3993}}; при $\alpha = 1.2$: {{0.,0.}, {0.1, 0.1193}, {0.2,0.2331}, {0.3,0.3379}, {0.4,0.4322}}.

3а) {{0.,1.,2.}, {0.1,0.8925,2.0472}, {0.2,0.7690,2.0898}, {0.3,0.6284,2.1293}};

3б) при $\alpha = 0, \beta = 1$: {{1.,1.,-1.}, {1.1,0.995,-1.105}, {1.2,0.9779,-1.2216}, {1.3,0.9461,-1.3522}, {1.4,0.8966,-1.4999}}; при $\alpha = 0, \beta = 2$: {{1.,1.,-1.}, {1.1,0.9967,-1.0689}, {1.2,0.9855,-1.1427}, {1.3,0.9652,-1.2220}, {1.4,0.9341,-1.3076}}; при $\alpha = 0, \beta = 3$: {{1.,1.,-1.}, {1.1,0.9975,-1.0512}, {1.2,0.9892,-1.1052}, {1.3,0.9743,-1.1621}, {1.4,0.9516,-1.2222}}; при $\alpha = 0.1, \beta = 1$: {{1.,1.,-1.}, {1.1,1.0055,-1.1047}, {1.2,1.0001,-1.2204}, {1.3,0.9813,-1.3489},{1.4,0.9464,-1.4929}}; при $\alpha = 0.1, \beta = 2$: {{1.,1.,-1.}, {1.1,1.0072,-1.0688}, {1.2,1.0076,-1.1422}, {1.3,1.0002,-1.2207}, {1.4,0.9835,-1.3049}}; при $\alpha = 0.1, \beta = 3$: {{1.,1.,-1.}, {1.1,1.008,-1.0512}, {1.2,1.01134,-1.1049}, {1.3,1.0092,-1.1614}, {1.4,1.0009,-1.2208}}.

2.5. Метод на Ойлер-Коши (подобрен метод на Ойлер, метод на Хойн)

Отново за задачата на Коши (9) се избират n равноотдалечени точки: $x_i = a + ih,\ \ i = 0, 1, \dots, n$ в интервала $[x_0, b]$ с равномерна стъпка $h = \dfrac{b - x_0}{n}$.

Пресмятанията за намиране на приближеното решение се извършват на два етапа по следния явно-неявен начин вдустъпков метод:

Формули на метода на Ойлер-Коши (метод на Хойн):

x_0, y_0 - зададени по условие, x_1, y_1 - намерени по друга формула.

Следващите $y_2, y_3, \dots, y_n$ намираме от:

1) $y_{i+1}{}^{(0)} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$ - формула предиктор

2) $y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}{}^{(0)}) \right)$ - формула коректор (18)

$i = 1, \dots,\ n-1$

С формули (18), ако се знаят решенията y_{i-1}, y_i в две точки x_{i-1}, x_i, най-напред по формула предиктор 1) се изчислява едно приближение $y_{i+1}{}^{(0)}$ на решението y_{i+1} в следващата точка x_{i+1}.

След това полученото приближение $y_{i+1}{}^{(0)}$ се уточнява по формула коректор 2) . Използваната формула коректор в метода на Ойлер-Коши е всъщност формулата на трапеца. Тази формула е неявна, защото неизвестното y_{i+1} участва отляво и отдясно във формулата (18) (като вече сме заместили тук $y_{i+1}{}^{(0)}$).

Коректорът може да се използва за уточняване на y_{i+1} един или повече пъти, като полученото се замести вдясно на 2) и се направи итерационен процес.

Забележка 1. Формулите са приложими, ако в началния момент освен зададено y_0 знаем и стойността y_1. За тази начална процедура обикновено се прилага еднократно модифициран метод на Ойлер.

Забележка 2. Съществуват и опростени варианти на метода, при които предикторът 1) е обиковен метод на Ойлер или модифициран метод на Ойлер за всяко $i \geq 1$.

За локалната грешка на предиктора 1) е валидна оценката

$$r_{prediktor} \leq \frac{h^3}{3!} \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} \left| \left(y'''(\eta_1) + y'''(\eta_2) \right) \right| = O(h^3)$$

За формулата коректор имаме оценката:

$$r_{korektor} \leq h^3 \max_{[x_i, x_{i+1}]} \left| \left(\frac{1}{3!} y'''(\zeta_1) + \frac{1}{4} y'''(\zeta_2) \right) \right| = O(h^3)$$

Общо за целия метод на Ойлер-Коши локалната грешка е $r_i = O(h^3)$.

Пример 5. По метода на Ойлер-Коши (18) решете числено началната задача:

$$y' = 2x^2 - \sqrt{x + 3y}, \quad y(1) = 0, \quad x \in [1, 1.1], \quad h = 0.02 \quad .$$

Решение:

При дадената стъпка, намираме брой точки $n = 5$. Точките, в които търсим решението са $x_0 = 1,\ x_1 = 1.02,\ x_2 = 1.04,\ x_3 = 1.06,\ x_4 = 1.08,\ x_5 = 1.1$. Дадено е решението в началната точка $x_0 = 1$, което е $y_0 = y(x_0) = y(1) = 0$. За първата точка x_1 изчисляваме y_1 и след това използваме формули (18).

При $n = 1$ - начална процедура по обикновен метод на Ойлер:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h\left(2x_0^{\ 2} - \sqrt{x_0 + 3y_0}\right) = 0 + 0.02\left(2 - \sqrt{1+0}\right) = 0.02$$

При $n = 2$ - предиктор по обикновен Ойлер:

$$y_2^{(0)} = y_0 + 2hf(x_1, y_1) = y_0 + 2h\left(2x_1^2 - \sqrt{x_1 + 3y_1}\right) =$$

$$0 + 0.04\left(2(1.02)^2 - \sqrt{1.02 + 3(0.02)}\right) = 0.04167$$

Коректор по (18) - формула 2): $y_2 = y_1 + \dfrac{h}{2}\left(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(0)})\right) = 0.04125$

Подробните резултати са дадени на Табл. 5.

Табл. 5. Резултати към Пример 5.

i	x_i	y_i	f_i	$y_{i+1}^{(0)}$	$f_{i+1}^{(0)}$	y_{i+1}
0	1.00	0	1	-	-	-
1	1.02	0.02	1.04157	0.04166	1.08385	0.04125
2	1.04	0.04125	1.08442	0.06338	1.12911	0.06339
3	1.06	0.06339	1.12909	0.08642	1.17554	0.08644
4	1.08	0.08644	1.17552	0.11041	1.22366	0.11043
5	1.10	0.11043	-	-	-	-

Задачи за самостоятелна работа

1) По метода на Ойлер-Коши (18) решете следните начални задачи, като началното приближение намерите по метода на Ойлер:

а) $y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy,\ y(0) = 0,\ x \in [0,1],\ n = 5$ (задача на Исак Нютон от 1671 г.)

б) $y' = 3x + \cos(x + y^2),\ y(0) = 1,\ x \in [0, \frac{\pi}{4}],\ n = 5$

в) $y' = y + \dfrac{5x}{y},\ y(-1) = -1,\ x \in [-1, 0],\ n = 5$

г) $y' = \dfrac{2y - 3x}{x^2 + y^2},\ y(1) = 0.1,\ x \in [1, 2],\ n = 5$

2) Запишете формулите на метода на Ойлер-Коши (18) за съответната система ОДУ и решете с тяхна помощ следните задачи:

а) $y'' = 3y' - 2y + x,\quad y(1) = 1,\quad y'(1) = 2,\quad 1 \le x \le 1.3,\quad n = 6$

б) $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = x^2 + \dfrac{y}{z} \end{cases}$ $y(0) = 1, \quad z(0) = 2, \quad 0 \le x \le 0.5, \quad n = 5$

Отговори:

1а) {{0.,0}, {0.2,0.2}, {0.4,0.3021}, {0.6,0.3529}, {0.8,0.3527}, {1.,0.3007}};

1б) {{0.,1}, {0.1571,1.0849}, {0.3142,1.1960}, {0.4712,1.3192}, {0.6283,1.4592}, {0.7854,1.6437}};

1в) {{-1.,-1}, {-0.8,-0.2}, {-0.6,2.4286}, {-0.4,1.8546}, {-0.2,2.1697}, {-0,2.5944}};

1г) {{1.,0.1}, {1.2,-0.4545}, {1.4,-0.9381}, {1.6,-1.3256}, {1.8,-1.6451}, {2.,-1.9196}}.

2а) {{1.,1.,2.}, {1.05,1.1,2.25}, {1.1,1.2202,2.5482}, {1.15,1.3560,2.8829}, {1.2,1.5095,3.2589}, {1.25,1.6829,3.6809}, {1.3,1.8787,4.1541}};

2б) {{0.,1.,2.}, {0.1,0.9,2.05}, {0.2,0.7765,2.0929}, {0.3,0.6360,2.1329}, {0.4,0.4764,2.1713}, {0.5,0.2961,2.2094}}.

3. Методи на Рунге-Кута

Методите на Рунге-Кута (РК) са обобщение на разгледаните по-горе методи на Ойлер. Те са едностъпкови, които могат да са явни или неявни. Ограничаваме се само със случая на явни методи на РК. Теоретично съществуват безброй методи на РК, от които тук са избрани най-често използваните.

Търси се приближено функцията $y(x)$, която дава решение на задачата на Коши (9):

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right., \quad x \in [x_0, b].$$

Отново в интервала $[x_0, b]$ се взимат $n+1$ точки $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b$. Най-често точките са равномерно отдалечени, т.е. изчислява се стъпка $h = (b - x_0)/n$ и точките се намират по формулата: $x_i = x_0 + ih, \ i = 0,1,2,...,n$. Тогава $x_1 - x_0 = h, \ x_2 - x_1 = h, ...$ Получават се n равни подинтервала $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,...,n-1$.

Методите на Рунге-Кута обобщават модифицирания метод на Ойлер, като се избират няколко междинни точки във всеки подинтервал $[x_i, x_{i+1}]$. Тези точки не е задължително да са равноотдалечени, а се избират така, че при оценка на грешката с помощта на формулите на Тейлър да се получава възможно най-висока степен s по h, така че локалната грешка да е от вида $R(x_i) = |y(x_i) - y_i| = O(h^s)$, където $y(x_i)$ е точното решение в точката x_i, а y_i е приближеното решение от дадения метод в същата точка. Ще отбележим, че указаната грешка от типа $R(x_i) = O(h^s)$ е валидна, ако съществува ограничена по абсолютна стойност производна на $y^{(s)}(x)$ в интервала на решението (виж по-нататък и Теоремата в 4.).

Общият вид на методите на Рунге-Кута с j междинни точки във всеки подинтервал $[x_i, x_{i+1}]$от вида: $x_i + \alpha_1 h, \ x_i + \alpha_2 h, ..., \ x_i + \alpha_j h, \ 0 \le \alpha_u \le 1, \ u = 1,2,..., j$ се задава по следния начин [????Сендов, Попов]:

Методи на Рунге-Кута с j междинни точки във всеки подинтервал

x_0, y_0 - зададени по условие, а за всеки подинтервал $[x_i, x_{i+1}]$ следващото y_{i+1} се изчислява по формулите:

$$
\begin{aligned}
&k_1 = hf(x_i, y_i)\\
&k_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{2,1}k_1)\\
&\ldots\\
&k_j = hf(x_i + \alpha_j h, y_i + \beta_{j,1}k_1 + \beta_{j,2}k_2 + \ldots + \beta_{j,j-1}k_{j-1})\\
&y_{i+1} = y_i + p_1k_1 + p_2k_2 + \ldots + p_jk_j
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

при $i = 0,1,\ldots,n-1$. Тук $\alpha_u, \beta_{u,v}$ са теоретично намерени коефициенти на метода за даден ред s на грешката, известни от таблици.

Следват някои от методите на Рунге-Кута с глобална грешка за целия интервал на решението, пропорционална на избраната стъпка h. По точно ще разгледаме най-често използваните методи на РК от втори ред (при $s = 3$) и РК от четвърти ред ($s = 5$).

3.1. Методи на Рунге-Кута от втори ред

При $s = 3$ разглеждаме формулите на Рунге-Кута (19) от вида:

Общ вид на метод на Рунге-Кута от втори ред:

x_0, y_0 - зададени по условие,

$$
\begin{aligned}
&k_1 = hf(x_i, y_i)\\
&k_2 = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1)\\
&y_{i+1} = y_i + p_1k_1 + p_2k_2
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

при $i = 0,1,\ldots,n-1$.

А) Формула на Рунге-Кута (1,1)

Тази формули е от вида (20) при

$$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ p_1 = p_2 = \frac{1}{2}. \qquad (21)$$

Теоретичната локална грешка на метода във всеки подинтервал $[x_i, x_{i+1}]$ е $R(x_i) = O(h^3)$, а глобалната за целия интервал е $r = O(h^2)$.

Ако сме намерили приближената стойност y_i на неизвестната функция $y(x)$ в точката x_i, изчисляваме приближението y_{i+1} в следващата точка x_{i+1}. Първоначално се изчисляват т.н. коефициенти на Кута k_u, след което се изчислява y_{i+1} и се преминава към следващата точка от мрежата x_{i+1}.

Пример 6. По метода на РК (1,1) по формули (20)-(21) да се изчисли приближеното решение $y(x)$ на следната начална задача при зададена равномерна стъпка $h = 0.1$:

$$y' = x + \frac{2y}{x}, \quad y(1) = 1, \quad x \in [1, 1.5]$$

Решение: Тъй като $h = 0.1,\ x_0 = 1,\ b = 1.5$, то $n = 5$ и възлите на интегриране са съответно $x_0 = 1,\ x_1 = 1.1,\ x_2 = 1.2,\ x_3 = 1.3,\ x_4 = 1.4,\ x_5 = 1.5$. Знаем $y_0 = 1$. Приблизителната теоретична оценка за локалната грешка е $R(x_i) = O(h^3) = 0.001$. За избягване на грешката от закръгляне ще работим с междинна точност от 5 знака след десетичната точка.

При $i = 0,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$. По формули (20)-(21) изчисляваме k_1, k_2. Намираме:

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.1\left(x_0 + \frac{2y_0}{x_0}\right) = 0.1\left(1 + \frac{2.1}{1}\right) = 0.3$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0.1\left((x_0 + h) + \frac{2(y_0 + k_1)}{(x_0 + h)}\right) = 0.1\left(1.1 + \frac{2(1 + 0.3)}{1.1}\right) \approx 0.34636$$

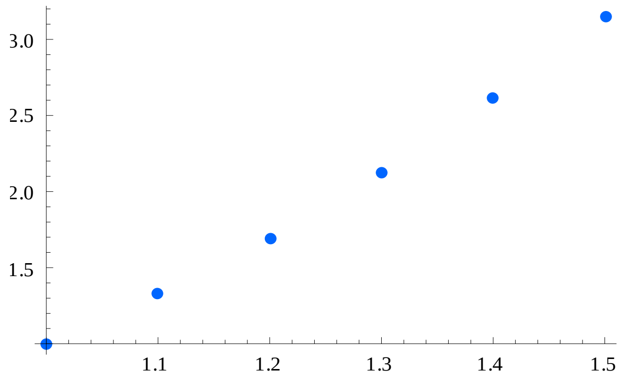
За y_1 получаваме:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \approx 1 + 0.5(0.3 + 0.34636) \approx 1.32318.$$

Аналогично при $i = 1,\ x_1 = 1.1,\ y_1 = 1.32318$ по същия начин изчисляваме новите k_1, k_2 и стойността на y_2 и т.н. Всички получени значения са дадени в Табл. 6. Графиката на полученото приближено решение е показана на Фиг. 1.

Табл. 6. Резултати към Пример 6 с междинна точност 0.00001. Крайните значения на решението $\tilde{y}_i$ са закръглени с теоретичната точност 0.001 (последна колона).

i	x_i	y_i	k_1	k_2	$\tilde{y}_i$
0	1.0	1	0.3	0.34636	1.000
1	1.1	1.32318	0.35058	0.39896	1.323
2	1.2	1.69795	0.40299	0.45322	1.698
3	1.3	2.12606	0.45709	0.50902	2.126
4	1.4	2.60911	0.51273	0.56625	2.609
5	1.5	3.14860	-	-	3.149



Фиг. 1. Точкова графика на решението по Табл. 6.

Б) Формула $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Тази формула е подобна на модифицирания метод на Ойлер. Тя се получава от (20) при

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{2},\ p_1=0,\ p_2=1. \tag{22}$$

Локалната грешка е $R(x_i)=O(h^3)$, глобалната е $r=O(h^2)$.

Пример 7. По метода на РК $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ да се изчисли приближеното решение $y(x)$ от Пример 6.

Решение: Аналогично на Пример 5 изчисляваме k_1, k_2, но тук с формули (22). Намерените стойности са дадени на Табл. 7.

Табл. 7. Резултати с метода РК (½, ½) за Пример 7 с междинна точност 0.00001. Крайните значения на решението $\tilde{y}_i$ са закръглени с теоретичната точност 0.001 (последна колона).

i	x_i	y_i	k_1	k_2	$\tilde{y}_i$
0	1.0	1	0.3	0.32405	1.000
1	1.1	1.32405	0.35074	0.37577	1.324
2	1.2	1.69982	0.40330	0.42924	1.700
3	1.3	2.12905	0.45755	0.48431	2.129
4	1.4	2.61336	0.51334	0.54087	2.613
5	1.5	3.15422	-	-	3.154

В) Формула $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

Тази формула се получава от (20) при

$$\alpha=\frac{2}{3},\ \beta=\frac{2}{3},\ p_1=\frac{1}{4},\ p_2=\frac{3}{4}. \tag{23}$$

Локалната грешка е $R(x_i)=O(h^3)$, глобалната е $r=O(h^2)$.

3.2. Методи на Рунге-Кута от четвърти ред

Най-известен е следният „симетричен” метод на Рунге-Кута, в който участват четири междинни точки за всеки подинтервал $[x_i,x_{i+1}]$. Методът се получава от (20) при

$$\alpha_1=0,$$

$$\alpha_2=\frac{1}{2},\ \beta_{21}=\frac{1}{2};$$

$$\alpha_3=\frac{1}{2},\ \beta_{31}=0,\ \beta_{32}=\frac{1}{2};$$

$$\alpha_4=1,\ \beta_{41}=\beta_{42}=0,\ \beta_{43}=1;$$

$$p_1=\frac{1}{6},\ \ p_2=\frac{2}{6},\ \ p_3=\frac{2}{6},\ \ p_4=\frac{1}{6}$$

Записано по-подробно:

Общи формули на Рунге-Кута от 4-ти ред за всяка точка x_i:

x_0, y_0 - зададени по условие,

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2) \qquad (24)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

при $i = 0,1,\dots,n-1$

Локалната грешка е $R(x_i) = O(h^5)$, глобалната е $r = O(h^4)$.

Пример 8. Ще решим Пример 6 с помощта на формули (24).

Решение: Имаме същите възли, както в решението на Пример 7.

Приблизителната теоретична оценка за локалната грешка е

$R(x_i) = O(h^5) = 0.00001$. За избягване на грешката от закръгляне ще работим с междинна точност поне с 1-2 знака повече, т.е. с 5-6 знака след десетичната точка. Крайните резултати закръгляме до 5 знака. Получаваме следната Табл. 8.

Табл. 8. Резултати с метода РК, зададен с формули (24) за задачата от Пример 8 с междинна точност 0.000001. Крайните значения на решението $\tilde{y}_i$ са със същата теоретичната точност.

i	x_i	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4	$\tilde{y}_i$
0	1.0	1	0.3	0.324048	0.326338	0.351152	1
1	1.1	1.32532	0.350967	0.376009	0.378187	0.403918	1.32532
2	1.2	1.70253	0.403756	0.429706	0.486982	0.514338	1.70253
3	1.3	2.13338	0.458213	0.484998	0.486982	0.514338	2.13338
4	1.4	2.61947	0.51421	0.541768	0.543669	0.571751	2.61947
5	1.5	3.16227	-	-	-	-	3.16227

Задачи за самостоятелна работа

1) Следната задача решете по указаните методи:

$y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy,\ y(0) = 0,\ x \in [0,1],\ n = 5$ (задача на Исак Нютон от 1671 г.)

а) РК (1,1)

б) с метод на РК $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

в) с метод на РК $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

г) с метод на РК от 4-ти ред.

2) С указания метод на РК решете задачата и сравнете с точното решение $y^*(x) = e^x + \ln(x^2+1)$:

$$y' = y - \ln(x^2+1) + \frac{2x}{x^2+1}, \quad y(0)=1, \quad x \in [0,1], \quad n=5.$$

а) по метода на РК (1,1)

б) по метода на РК $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

в) по метод на РК от 4-ти ред.

3) Решете задачата със стъпка h =0.1:

$$y' = \frac{\sqrt{x^3+3}}{y^2+1}, \quad y(0)=1, \quad x \in [0,1], \quad n=5$$

а) по метода на РК $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

б) по метода на РК $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

в) метод на РК от 4-ти ред.

4) Да се докаже, че формулата (20) е еквивалентна на (16), а формулата (22) – на метода на Хойн (18).

Отговори:

1а) {{0.,0.}, {0.2,0.168}, {0.4,0.270}, {0.6,0.313}, {0.8,0.302}, {1.,0.232}};

1б) {{0.,0.}, {0.2,0.164}, {0.4,0.261}, {0.6,0.299}, {0.8,0.280}, {1.,0.199}};

1в) {{0.,0.}, {0.2,0.165}, {0.4,0.264}, {0.6,0.304}, {0.8,0.288}, {1.,0.210}};

1г) {{0.,0.}, {0.2,0.16242}, {0.4,0.25734}, {0.6,0.29199}, {0.8,0.26742}, {1.,0.17648}}.

2а) {{0.,1.,1.}, {0.2,1.254, 1.26062}, {0.4,1.626,1.64024}, {0.6,2.106,2.1296}, {0.8,2.687,2.72024}, {1.,3.366,3.41143}}, където сме означили $\{x_i, y_i, y^*(x_i)\}$;

2б) {{0.,1.,1.}, {0.2,1.257,1.26062}, {0.4,1.632,1.64024}, {0.6,2.115,2.1296}, {0.8,2.700,2.72024}, {1.,3.383,3.41143}};

2в) {{0.,1.,1.}, {0.2,1.26062, 1.26062}, {0.4,1.64024,1.64024}, {0.6,2.12959,2.1296}, {0.8,2.7202,2.72024}, {1.,3.41138,3.41143}}.

3а) {{0.,1.}, {0.2,1.098}, {0.4,1.191}, {0.6,1.283}, {0.8,1.377}, {1.,1.474}};

3б) {{0.,1.}, {0.2,1.098}, {0.4,1.191}, {0.6,1.283}, {0.8,1.377}, {1.,1.474}}.

3в) {{0.,1.},{0.2,1.0976},{0.4,1.1914},{0.6,1.28373},{0.8,1.37724},{1.,1.47414}}.

3.3. Метод на Рунге-Кута за системи ОДУ

Силата на числените методи е във възможността по един и същи алгоритъм да се намира приближеното решение на големи класове от задачи, например при произволен вид на десните части на уравненията или редът им.

Ще запишем как се трансформират формулите на РК за система начални задачи за ОДУ с 2 уравнения. Обобщението за произволен брой уравнения е аналогично.

Нека се решава началната задача за системата ОДУ (14):

$$\left|\begin{array}{l} y' = f(x,y,z), \\ z' = g(x,y,z), \qquad x \in (x_0, b) \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0 \end{array}\right. .$$

Като използваме (20) за методи от втори ред получаваме общата формула

Общи формули на Рунге-Кута от втори ред за системи ОДУ

x_0, y_0, z_0 - зададени по условие. При известни x_i, y_i, z_i изчисляваме решенията y_{i+1}, z_{i+1} в следващата точка x_{i+1} по формулите

$$k_1 = hf(x_i, y_i, z_i), \qquad l_1 = hg(x_i, y_i, z_i),$$
$$k_2 = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1, z_i + \beta l_1), \qquad l_2 = hg(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1, z_i + \beta l_1) \tag{25}$$
$$y_{i+1} = y_i + p_1 k_1 + p_2 k_2, \qquad z_{i+1} = z_i + p_1 l_1 + p_2 l_2)$$

за $i = 0,1,...,n-1$.

А) Метод на Рунге-Кута (1,1) за системи ОДУ

За случая на решаваната система от (25) и (21) записваме:

Метод на Рунге-Кута (1,1) за системи ОДУ:

x_0, y_0, z_0 - зададени по условие; при известни x_i, y_i, z_i изчисляваме решенията y_{i+1}, z_{i+1} в следващата точка x_{i+1} по формулите

$$k_1 = hf(x_i, y_i, z_i), \qquad l_1 = hg(x_i, y_i, z_i),$$
$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1, z_i + l_1), \qquad l_2 = hg(x_i + h, y_i + k_1, z_i + l_1) \tag{26}$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \qquad z_{i+1} = z_i + \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$$
$$i = 0,1,...,n-1$$

Изчисленията за всяко *i* се извършват в следната последователност: $k_1, l_1, k_2, l_2,\ y_{i+1}, z_{i+1}$.

За равномерна стъпка h локалната грешка на формула (26) е $R(x_i) = O(h^3)$, а глобалната за целия интервал е $r = O(h^2)$.

Пример 9. Да се реши по формула (26) следното уравнение със стъпка $h = 0.1$:

$$\left| \begin{array}{l} y'' = x.y' + \sin(x.y^2 + y'), \qquad x \in (0,1] \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right. .$$

Решение: Това уравнение се привежда към система с полагането (виж началото на тази глава): $\boxed{y'(x) = z(x)}$. Получаваме началната задача за система ОДУ:

$$\left| \begin{array}{ll} y' = z, & \\ z' = x.z + \sin(x.y^2 + z), & x \in (0,1] \\ y(x_0) = y_0 = 2, & x_0 = 0 \\ z(x_0) = z_0 = 1 & \end{array} \right. \tag{27}$$

За да приложим (26) е достатъчно тук да означим десните части така:

$$f(x, y, z) = z$$
$$g(x, y, z) = x.z + \sin(x.y^2 + z).$$

Тъй като $h = 0.1,\ x_0 = 0,\ b = 1$, то $n = 10$ и възлите на интегриране са съответно $x_0 = 0,\ x_1 = 0.1,\ x_2 = 0.2,\ x_3 = 0.3,\ ...,\ x_{10} = 1$. Знаем $y_0 = 2$. Приблизителната теоретична оценка за локалната грешка е $R(x_i) = O(h^3) = 0.001$. За избягване на грешката от закръгляне работим с междинна точност от 4-5 знака след десетичната точка. Подробните изчисления са дадени в Табл.9. Резултатите за всеки ред се получават в последователността: $k_1, l_1, k_2, l_2,\ \ y_{i+1}, z_{i+1}$.

Табл. 9. Резултати с метода РК (1,1) за системата (27) с междинна точност 0.00001. Крайните значения на решението $\tilde{y}_i, \tilde{z}_i$ са с теоретичната точност 0.001.

i	x_i	y_i	z_i	k_1	l_1	k_2	l_2	$\tilde{y}_i$	$\tilde{z}_i$
0	0.0	2	1	0.1	0.08415	0.10842	1.20737	2.000	1.000
1	0.1	2.10421	1.64576	0.16458	0.10335	0.17491	0.80491	2.104	1.646
2	0.2	2.27395	2.09989	0.20999	0.04275	0.21426	-0.00983	2.274	2.100
3	0.3	2.48608	2.11635	0.21164	-0.01023	0.21061	-0.01146	2.486	2.116
4	0.4	2.69720	2.10550	0.21055	-0.01122	0.20943	1.18574	2.697	2.106
5	0.5	2.90719	2.69276	0.26928	0.19399	0.28868	2.29743	2.907	2.693
6	0.6	3.18617	3.93847	0.39385	0.17946	0.41179	3.48213	3.186	3.938
7	0.7	3.58899	5.76926	0.57693	0.48354	0.62528	6.06227	3.589	5.769
8	0.8	4.19009	9.04217	0.90422	0.63441	0.96766	9.80784	4.190	9.042
9	0.9	5.12603	14.2633	1.42633	1.30481	1.55681	16.5960	5.126	14.263
10	1.0	6.6176	23.2137	-	-	-	-	6.618	23.214

Б) Метод на Рунге-Кута от четвърти ред за система ОДУ

Както видяхме, всяка явна едностъпкова формула от разгледаните типове може да се използва и за решаване на начални задачи за системи от две и повече обикновени диференциални уравнения. Например, за задачи от вида (14) формулата на РК от вида (24) се записва така:

Формули на метода на Рунге-Кута от четвърти ред за системи ОДУ

x_0, y_0, z_0 - зададени по условие,

$$k_1 = hf(x_i, y_i, z_i), \qquad l_1 = hg(x_i, y_i, z_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1, z_i + \frac{1}{2}l_1), \quad l_2 = hg(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1, z_i + \frac{1}{2}l_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2, z_i + \frac{1}{2}l_2), \quad l_3 = hg(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2, z_i + \frac{1}{2}l_2) \qquad (28)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3), \qquad l_4 = hg(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$i = 0,1,...,n-1$$

Изчисленията за всяко i се извършват в следната последователност: $k_1, l_1, k_2, l_2\ k_3, l_3, k_4, l_4$, y_{i+1}, z_{i+1}.

Пример 10. Да се реши по метода на РК от четвърти ред с формули (28) следната начална задача за система от две ОДУ със стъпка $h = 0.1$:

$$\left|\begin{array}{l} y' = y - z \\ z' = x^2 + \dfrac{y}{z}, \qquad x \in [1, 1.5] \\ y(1) = y_0 = 1 \\ z(1) = z_0 = 2 \end{array}\right. \qquad (29)$$

Решение: Тъй като $h = 0.1$, приблизителната теоретична оценка за локалната грешка е $R(x_i) = O(h^5) = 0.00001$. За всяка точка x_i се изчисляват 8-те съответни коефициенти на Кута $k_1, l_1, k_2, l_2\ k_3, l_3, k_4, l_4$. След това се намират y_{i+1}, z_{i+1}. Получените резултати са дадени в Табл. 10. Независимо от големия брой изчисления, при устойчиви задачи методът на РК от четвърти ред е предпочитан, заради голямата му точност.

Табл. 10. Резултати с метода РК (28) за системата (29) с точност 0.00001.

i	x_i	k_1	l_1	k_2	l_2	k_3	l_3	k_4	l_4
0	1.0	-0.1	0.15	-0.1125	0.15603	-0.11343	0.15567	-0.12691	0.16213
1	1.1	-0.12691	0.16214	-0.14136	0.16906	-0.14243	0.16868	-0.15802	0.17603
2	1.2	-0.15801	0.17604	-0.17471	0.18384	-0.17593	0.18345	-0.19395	0.19168
3	1.3	-0.19393	0.19169	-0.21321	0.20038	-0.21461	0.19998	-0.23539	0.20909
4	1.4	-0.23537	0.20911	-0.25760	0.21869	-0.25919	0.21828	-0.28312	0.22828
5	1.5	-	-	-	-	-	-	-	-

i	x_i	y_i	z_i
0	1	1.	2.
1	1.1	0.88687	2.15592
2	1.2	0.74479	2.32486
3	1.3	0.56925	2.50858
4	1.4	0.35509	2.70883
5	1.5	0.09641	2.92739

Задачи за самостоятелна работа

1) Решете задачата на Коши за системата ОДУ със стъпка $h = 0.02$ по метода на РК (1,1) и сравнете резултатите с Пример 10 в общите точки.

$$\left| \begin{aligned} & y' = y - z \\ & z' = x^2 + \frac{y}{z}, \qquad x \in [1, 1.5] \\ & y(1) = y_0 = 1 \\ & z(1) = z_0 = 2 \end{aligned} \right.$$

2) Запишете формулите на съответния метод на Рунге-Кута за решаване на следната задача:

$$y'' = 2y' + xy + x\sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad 0 \le x \le 1, \quad n = 5$$

а) с метод на РК (1,1):

б) с метод на РК $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

в) с метод на РК $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

г) с метод на РК от 4-ти ред.

3) Запишете формулите на съответния метод на Рунге-Кута за решаване на следната задача:

$$y''' = 2xy' + xy'' - x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \; y''(0) = 1, \quad 0 \le x \le 0.5, \quad n = 5$$

а) с метод на РК (1,1):

б) с метод на РК $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

в) с метод на РК $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

г) с метод на РК от 4-ти ред.

Отговори:

1) $h = 0.02, n = 25$, теоретична локална грешка 0.000008, решения: {{1.,1.,2.}, {1.02,0.9795,2.03023}, {1.04,0.95797, 2.06093}, {1.06,0.93538,2.0921}, {1.08,0.91170,2.12377}, {1.1,0.88690,2.15594}, {1.12,0.86094,2.18864}, {1.14,0.83379,2.22187}, {1.16,0.80542,2.25564}, {1.18,0.77578,2.28999}, {1.2,0.74485,2.32491}, {1.22,0.71258,2.36042}, {1.24,0.67894,2.39653}, {1.26,0.64388,2.43326}, {1.28,0.60736,2.47063}, {1.3,0.56934,2.50865}, {1.32,0.52979,2.54732}, {1.34,0.488643,2.58668}, {1.36,0.44586,2.62672}, {1.38,0.40141,2.66746}, {1.4,0.35522,2.70893}, {1.42,0.30726,2.75112}, {1.44,0.25747,2.79406}, {1.46,0.20580,2.83777}, 1.48,0.15219,2.88224}, {1.5,0.096594,2.92751}}, напр. за последната точка получаваме $\tilde{y}(1.5) \approx 0.96594, \tilde{z}(1.5) \approx 2.92751$ - абсолютни разлики до 0.0005.

2а) $h = 0.2$, теоретична локална грешка=0.008, {{0.,1.,-1.}, {0.2,0.76,-1.460}, {0.4,0.413,-2.100}, {0.6,-0.084,-3.029}, {0.8,-0.805,-4.440}, {1.,-1.872,-6.667}};

2б) $h = 0.2$, теоретична локална грешка=0.008, {{0.,1.,-1.}, {0.2,0.76,-1.46}, {0.4,0.413,-2.099}, {0.6,-0.0838,-3.025}, {0.8,-0.804,-4.430}, {1.,-1.868,-6.641}};

2в) $h = 0.2$, теоретична локална грешка=0.008, {{0.,1.,-1.}, {0.2,0.76,-1.460}, {0.4,0.413,-2.099}, {0.6,-0.084,-3.026}, {0.8,-0.804,-4.433}, {1.,-1.870,-6.650}};

2г) $h = 0.2$, теоретична локална грешка=0.0003, {{0.,1.,-1.}, {0.2,0.7556,-1.4693}, {0.4,0.3998,-2.1283}, {0.6,-0.1161,-3.0976}, {0.8,-0.8735,-4.5901}, {1.,-2.0109,-6.9700}}.

3а) Уравнението се свежда до системата: $y' = z,\ z' = u,\ u' = 2xz + xu - x$;

$y_0 = 0,\ z_0 = -1,\ u_0 = 1$; {{0.,0.,-1.,1.}, {0.1,-0.095,-0.9,0.991}, {0.2,-0.180,-0.802,0.966}, {0.3,-0.255,-0.707,0.927}, {0.4,-0.321,-0.616,0.878}, {0.5,-0.379,-0.531,0.820}}, където сме означили $\{x_i, y_i, z_i, u_i\}$;

3б) {{0.,0.,-1.,1.}, {0.1,-0.095,-0.9,0.991}, {0.2,-0.180,-0.802,0.965}, {0.3,-0.255,-0.707,0.926}, {0.4,-0.321,-0.617,0.876}, {0.5,-0.379,-0.532,0.818}}

3в) {{0.,0.,-1.,1.}, {0.1,-0.095,-0.9,0.991}, {0.2,-0.180,-0.802,0.965}, {0.3,-0.255,-0.707,0.926}, {0.4,-0.321,-0.617,0.877}, {0.5,-0.379,-0.532,0.818}};

3г) {{0.,0.,-1.,1.}, {0.1,-0.09501,-0.90032,0.99064}, {0.2,-0.18012,-0.80242,0.96493}, {0.3,-0.2556,-0.70777,0.92598}, {0.4,-0.32183,-0.61758,0.8763}, {0.5,-0.37930,-0.53280,0.81782}}.

4. Теорема за глобалната грешка при едностъпковите явни методи за ОДУ

Разглеждаме началната задача за ОДУ (9):

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. , \quad x \in [x_0, b].$$

Нека тази задача се решава с някакъв едностъпков явен метод (Ойлер, модифициран метод на Ойлер, Ойлер-Коши, Рунге-Кута или друг). Да означим точното решение в точката x_i с $y(x_i)$, а приближеното, получено по избрания метод - с y_i. Локалната грешка на избрания метод в точката x_i означаваме с $r_i = |y(x_i) - y_i| = O(h^{p+1})$.

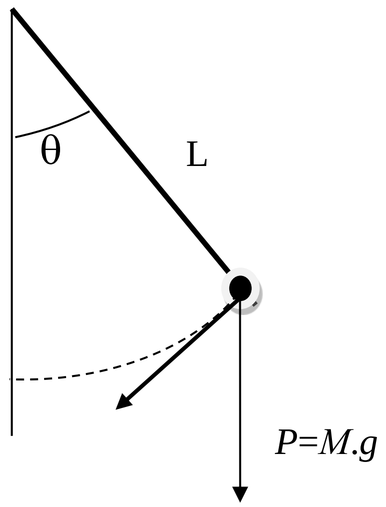
Тогава, може да се докаже, че при изчисленията на $y_1, y_2, ..., y_n$ локалната грешка се натрупва и глобалната (сумарна) грешка е [??? Цитат от литературата ни]:

$$r = \sum_{i=1}^{n} |r|_i \le Ch^p (x_n - x_0) = O(h^p).$$

Забележка: Ще отбележим, че грешка от типа $R(x_i) = O(h^s)$ (съответно за глобалната грешка) е валидна, ако съществува и е ограничена по абсолютна стойност производната $y^{(s)}(x)$ в интервала на решението $[x_0, b]$.

5. Едно приложение на едностъпковите явни методи за ОДУ

Пример 11. Да се пресметне свободното колебание на махало в съпротивителна среда.



Фиг. 2. Колебание на махало в съпротивителна среда.

Махалото се състои от материална точка с маса M, окачена на безмасова неразтеглива нишка с дължина L. Нека $\theta = \theta(t)$ е ъгълът на отклонението от вертикалното положение, t – времето в секунди, a, b – константи, зависещи от L и теглото P=mg, $g = 9.807\, m/s^2$ - стандартно земно ускорение.

Уравнението, описващо $\theta(t)$ в зависимост от времето има вида:

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta} + a\dot{\theta} + b\sin\theta = 0, \qquad t \in [t_0, t_0 + A] \\ &\theta(t_0) = \theta_0, \\ &\dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0 \end{aligned} \tag{30}$$

където θ_0 - начален ъгъл на отклонение, $\dot{\theta}_0$ - начална скорост.

Да се реши задачата при a=0.2, b=10, t_0=0, A=10 s, $\theta(0) = 0.5, \theta'(0) = 0$.

Забележка. В (30) производните са означени с точки, както е прието в Нютоновата механика.

Решение: Даденото уравнение (30) се привежда към система с полагането: $\boxed{u(t) = \dot{\theta}(t)}$. Получаваме система ОДУ от вида (14):

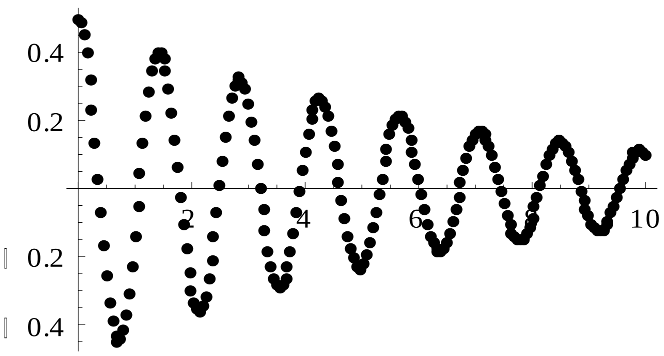
$$\begin{vmatrix} \dot{\theta} = u \\ \dot{u} = -0.2u - 10\sin\theta, \quad t \in [0,10] \end{vmatrix},$$

с начални условия $\theta(0) = 0.5,\ u(0) = 0$

Тази система може да се реши числено по метода на Рунге-Кута, напр. по формули (26) или (28). За равномерна мрежа със стъпка $h = 0.05$ първите 6 приближени стойности на решението $\theta(t)$ по метода от четвърти ред (28) са дадени на Табл. 11. Фиг. 3 показва графика на цялото получено решение, описващо колебанието на махалото в интервал от 10 секунди. Както очакваме вследствие на съпротивлението, колебанието е синусуидално и максималният ъгъл на отклонението намалява.

Табл. 11. Началните 6 приближения към решението на Пример 11 по метода на РК от четвърти ред (28).

i	t_i	θ_i
0	0.00	0.500
1	0.05	0.488
2	0.10	0.453
3	0.15	0.397
4	0.20	0.323
5	0.25	0.234
6	0.30	0.135



Фиг. 3. Графика на решението от Пример 11 за 200 точки в интервала [0,10] по метода на РК от четвърти ред, формула (28). По хоризонталата е времето *t*, а по вертикалата – ъгълът на отклонението на махалото спрямо вертикалната ос.