

Случайни величини

ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ – ЗАКОН НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО, ЧИСЛОВИ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Задача 1. Дискретната случайна величина X е дадена с редът/законът на разпределение

ξ	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

а/ Да се пресметне стойността на a .

б/ Да се намерят вероятностите $P(-1 \leq X < 1)$, $P(-1 < X \leq 1)$, $P(0 < X < 10)$, $P(X < 20)$, $P(X > -2)$

в/ Да се намери функцията на разпределение $F(x)$. Намерете $F(2.5)$, $F(-1.2)$, $F(-1.4)$

г/ Да се намери математическото очакване на X

Решение: а/ $a = 1/12$.

б/ $P(-1 \leq X < 1) = 5/12$,

$P(-1 < X \leq 1) = 1/4$,

$P(0 < X < 10) = 1/3$

$P(X < 20) = 1$

$P(X > -2) = 3/4$

в/ $F(x) = 0$ при $x \leq -2$

$F(x) = 8/12$ при $0 < x \leq 1$

г/ $EX = -1/2$

$F(x) = 1/4$ при $-2 < x \leq -1$

$F(x) = 10/12$ при $1 < x \leq 2$

$F(x) = 7/12$ при $-1 < x \leq 0$

$F(x) = 1$ при $x > 2$

Задача 2(самостоятелно) Случайната величина X е зададена със следния ред на разпределение

стойност	-1	0	1	2
вероятност	0,2	0,1	a	0,3

- а) Да се намери стойността на константата a .
- б) Да се напише функцията на разпределение на сл. в. X .
- в) Да се намери $P(X < 0)$, $P(X = 0)$, $P(X > 0)$, $P(0 < X < 3)$.
- г) Да се намерят числовите характеристики на сл. в. X .

Задача 3. Случайната величина X има ф.р.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1 \\ 0,2 & \text{при } -1 < x \leq 1 \\ 0,3 & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 0,6 & \text{при } 2 < x \leq 5 \\ 1 & \text{при } x > 5 \end{cases}$$

- а) Колко стойности има сл.в. и кои са те? Какъв тип е случайната величина X .
 б) Намерете следните вероятности: $P(-1 < X < 2)$; $P(-1 < X \leq 2)$; $P(-1 \leq X < 2)$; $P(-1 \leq X \leq 2)$.
 в) Намерете $P(X=2)$.
 г/ Напишете редът на разпределение на сл. в. X
 д/ Намерете математическото очакване/средна стойност на сл.в X

Решение: а/ Стойности $-1, 1, 2, 5$; дискретна сл.в.

б/ $P(1 < X \leq 2) = 0.1$

$P(-1 < X < 2) = 0.1$

$P(-1 \leq X < 2)$; $P(-1 \leq X \leq 2)$

г/ Редът на разпределение е

X	-1	1	2	5
p	0.2	0.1	0.3	0.4

д/ средна стойност/математическо очакване=2.8

Задача 4. Да се намери редът/законът на разпределение на случайната величина $X =$ "Брой на падналите се лица при хвърляне на монета един път". Да се намери още функцията на разпределение на X .

Решение. законът (редът) на разпределение е

ξ	0	1
P	0,5	0,5

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x \leq 0 \\ 0,5, & \text{ako } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{ako } x > 1 \end{cases}$$

Задача 5. (самостоятелно) Да се намери редът/законът на разпределение на случайната величина $X =$ "Брой на падналите се единици при хвърляне на зар един път". Да се намери още функцията на разпределение на X .

Задача 6. Иван организира следната игра. Партньорът му изтегля три топки без връщане от кутия с 5 бели и 5 черни топки. Ако е изтеглил повече бели, отколкото черни, то Иван му дава 1 лев, в противен случай Иван получава 1 лев. Да се намери средната печалба на Иван от една игра.

Решение. X =печалба на Иван; сл. в със стойности $-1, +1$ и съответно вероятности

$$P(X=-1)=5/12$$

$$P(X=1)=7/12$$

$$\text{Очаквана „печалба“ на Иван} = EX = 2/12 = 0.17 \text{ лв}$$

Задача 7. (самостоятелно) В съд има 1 бяла, 4 зелени и 6 черни топки. Играч изважда от съда по случаен начин една топка. Ако топката е бяла играчът печели 5 лева, ако е зелена печели 1 лев, а ако е черна губи 3 лева. За случайната величина X =”Печалба на играча при едно разиграване” да се намерят закона на разпределение. Намерете очакваната печалба на играча.

Отговор:

ξ	-3	1	5
P	$\frac{6}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$

- Задача 11.** Баскетболист стреля в коша 3 последователни пъти. Предполагаме, че стрелбата в коша е опити по схемата на Бернули с вероятност за улучване при всяка отделна стрелба 0,7.
- а) Каква е вероятността да улучи само при втората стрелба.
 - б) Каква е вероятността да улучи точно два пъти.
 - в) Каква е вероятността да улучи поне два пъти.
 - г) От какъв тип е случайната величина $X = \{\text{брой попадения в коша}\}$?
 - д) Колко е очакваният брой попадения в коша?

Решение.

а/) $= 0.3 * 0.7 * 0.3$ (поради независимост)

б/ $(3 * 2 / 2) (0.7)^2 (0.3)$

в/ $(3 * 2 / 2) (0.7)^2 (0.3) + (3 * 2 * 1 / 6) (0.7)^3 (0.3)$

г/ X е бернулиево разпределение ; $n=3$, $p=0.7$

д/ $EX = 2.1$

Пример:

Нека X е нормално разпределение със средна стойност $\mu=50$ и стандартно отклонение $\sigma=4$

$$P(X < 45) = P\left(Z = \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{45 - 50}{4}\right) = P(Z < -1,25) = 1 - P(Z < 1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

$$P(X > 47) = P\left(Z = \frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{47 - 50}{4}\right) = P(Z > -0,75) = P(Z < 0,75) = 0,7734$$

$$\begin{aligned} P(45 < X < 51) &= P\left(\frac{45 - 50}{4} < Z = \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{51 - 50}{4}\right) \\ &= P(-1,25 < Z < 0,25) = P(Z < 0,25) - P(Z < -1,25) = P(Z < 0,25) - \\ &\quad 1 + P(Z < 1,25) = 0,5987 - 1 + 0,8944 = 0,4931 \end{aligned}$$

Задача . Ръстът в сантиметри на завършващи 7 клас ученици е нормално разпределена случайна величина със средна стойност 150 см и стандартно отклонение 10 см.

а/ Колко % от учениците са по-високи от 150 см?

50%

б/ Колко % от учениците са по-ниски от 140 см?

$P(X < 140) =$

$$P\left(Z = \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{140 - 150}{10}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1)$$

в/ Ръководството на баскетболен отбор е решило да потърси нови попълнения за отбора си измежду 30-те % най-високи ученици. Да се определи какъв е минималния ръст, който трябва да има ученик, за да участва в отбора.

$a = ?$ Че $P(X > a) = 0.3$

$$P\left(Z = \frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{a - 150}{10}\right) = 0.3$$

$$P\left(Z < \frac{a - 150}{10}\right) = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$\frac{a - 150}{10} = 0.53 \qquad a = 150 + 5.3 = 155.30$$