Формула на Тейлър

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ “Паисий Хилендарски”

- Нека разгледаме един полином от n-та степен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{1}$$

- Ако диференцираме равенството (1) последователно n пъти, ще получим

$$\begin{aligned}
p'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + 1.a_1 \\
p''(x) &= n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} \\
&\quad + \cdots + 2.1.a_2 \\
&\vdots \\
p^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\ldots 3.2.a_n x + (n-1)(n-2)\ldots 2.1.a_{n-1} \\
p^{(n)}(x) &= n(n-1)\ldots 3.2.1.a_n.
\end{aligned} \tag{2}$$

- Като заместим в (1) и (2) x с 0, ще получим

$$\begin{aligned}
p(0) &= a_0, \\
p'(0) &= 1!\, a_1, \\
p''(0) &= 2!\, a_2, \\
&\vdots \\
p^{(n-1)}(0) &= (n-1)!\, a_{n-1}, \\
p^{(n)}(0) &= n!\, a_n.
\end{aligned}$$

Виждаме, че коефициентите на полинома $p(x)$ се изразяват чрез стойностите на $p(x)$ и на неговите производни в точката 0.

- Тогава равенството (1) може да бъде записано във вида

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{3}$$

- Ние можем да обобщим тази формула като приемем произволна точка a да играе ролята на точката 0. След някои преобразования получаваме, че

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{4}$$

Това равенство се нарича формула на Тейлър за полинома $p(x)$ по степените на $x - a$.

- Формулата на Тейлър може да бъде видоизменена по такъв начин, че да запази своята сила не само за полиноми, но и за твърде широк клас от функции. По-точно, дясната страна на (4) може да бъде допълнена с още едно събираемо, наподобяващо по своя вид останалите, и то така, че новото равенство да бъде валидно за всяка функция, диференцируема $n+1$ пъти в някоя околност на дадена точка a.
- Ще казваме, че функцията $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, ако $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, т.е. $f(x) = \alpha(x)g(x)$, където $\alpha(x)$ е безкрайно малка функция при $x \to a$.

Теорема 1 (Теорема на Тейлър)

Нека функцията $f(x)$ *притежава първа, втора и т.н. до* $(n+1)$*-ва производна в околност* $(a-\delta, a+\delta)$ *на точката* a *(тази околност може в частност да съвпада с цялата реална права). Ако* x *е една точка от тази околност, то валидно е равенството*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \end{aligned} \tag{5}$$

където:

а) $R_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$ *– остатъчен член във форма на Пеано;*

б) $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, *като* ξ *е точка между* x *и* a *– остатъчен член във форма на Лагранж.*

- Равенството (5) се нарича обща формула на Тейлър. Последното събираемо $R_n(x)$ в дясната страна се нарича остатъчен член.
- Ясно е, че формулата на Тейлър за полиноми се явява частен случай от общата формула на Тейлър. Наистина, ако $f(x)$ е полином от n-та степен, то $f^{(n+1)}(x) = 0$ за всяко x, така че остатъчният член във форма на Лагранж ще бъде равен на 0.

- Формулата на Тейлър с остатъчен член във форма на Лагранж често се записва и по друг начин. Ако положим $x = a + h$ и $\theta = \frac{\xi - a}{x - a}$, ще имаме $\xi = a + \theta h$, като при това е ясно, че θ ще удовлетворява неравенствата $0 < \theta < 1$. Получаваме равенството

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \end{aligned} \qquad (6)$$

  която, разбира се, също носи името формула на Тейлър.
- В случая, когато $a = 0$, след заместване на h с x, формулата на Тейлър придобива вида

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

  и се нарича формула на Маклорен с остатъчен член във форма на Лагранж.

- Формулата на Маклорен с остатъчен член във форма на Пеано изглежда по следния начин:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

- Разложения по формулата на Маклорен на някои функции:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^n);\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^n);\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).
\end{aligned}$$

Първите три формули са в сила за всяко x, а последната – при $x \in (-1, 1]$.

Приложения

Формулата на Тейлър е сред най-важните формули в математическия анализ, като има многобройни приложения както в математиката, така и в близките й дисциплини. В математическия анализ формулата на Тейлър се използва за доказателството на някои важни теореми, а така също за:

- пресмятане на числото e;
- пресмятане стойностите на тригонометричните функции;
- пресмятане стойностите на обратните тригонометрични функции;
- пресмятане стойностите на логаритмичната функция;
- асимптотична оценка на елементарните функции и пресмятане на граници.

Освен това формулата на Тейлър служи за основа на понятието ред на Тейлър (вж. Лекция 3).