Логика

I. *Съждително смятане*

- ***Съждение*** е всяка мисъл, която е вярна или невярна.
- ***Съждителна константа: -*** вярно съждение (истина) или невярно съждение (лъжа)

Операции върху съждения: Нека P и Q са съждения.

- **Конюнкция** на две съждения $P \wedge Q$ се нарича съждението *„P и Q“*, което е вярно тогава и само когато са верни едновременно и двете съждения.
- **Дизюнкция** на две съждения $P \vee Q$ се нарича съждението *„P или Q“*, което е вярно, тогава и само тогава когато поне едно от двете дадени съждения е вярно.
- **Импликация** на две съждения $P \to Q$ се нарича съждението *„Ако P то Q“*, което е невярно съждение тогава и само тогава, когато съждението P е вярно и съждението Q е невярно. Ще наричаме P-хипотеза, а Q- заключение.
- **Логическо отрицание** на съждението P се нарича съждението, което се получава по правилото *„Не е вярно, че P“* и ще означаваме с $\rceil P$ и ще казваме, че $\rceil P$ е вярно, когато P е невярно и обратно.
- **Двойна импликация на съжденията (Еквиваленция)** $P \leftrightarrow Q$ се нарича съждението *„P тогава и само тогава, когато Q“* и е вярна тогава и само тогава, когато двете съждения имат еднакви верностни стойности.

Таблица от верностни стойности

P	**Q**	**$P \vee Q$**	**$P \wedge Q$**	**$P \to Q$**	**$P \leftrightarrow Q$**	**$\rceil P$**	**$\rceil Q$**
T	T	T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T	T	T

Задачи:

Задача 1. Нека P = ”4<7”, Q=”13 е просто число”, R=” Париж е столицата на Франция”.

Образувайте съжденията:

1. $\rceil R$ 2. $P \vee Q$ 3. $P \to (Q \wedge R)$
4. $\rceil P \vee \rceil Q$ 5. $\rceil (P \wedge Q)$ 6. $(P \to Q) \vee (Q \to R)$

Задача 2. Конструирайте верностна таблица за всяко от следните твърдения:

1. $(P \wedge Q) \rightarrow R$
2. $((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)) \wedge \rceil R$

Тавтология и еквивалентност. Логическо следствие

- ***Тавтология***: Всяко съждение, което е винаги вярно, независимо от верностните стойности на съставляващите го съждения.
- ***Противоречие:*** Съждение, което е винаги невярно.

  Можем лесно да ги разпознаем, ако във верностната таблица получим само T(тавтология) или само F(противоречие).
- ***Еквивалентност***: Нека S_1 и S_2 са две съждения. Казваме, че те са ***еквивалентни***, когато двете колони във верностната таблица, в които те получават стойностите си са еднакви.
- ***Логически следствия:*** Нека S1 и S2 са съставни съждения. Казваме, че S2 следва от S1, т.е. S1 $\Rightarrow$ S2, ако за всяко разпределение на верностните стойности на съждителните променливи в S1 и S2, от верността на S1 следва верността на S2.

Задача 3. Проверете дали следните твърдения са тавтологии:

1. $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$
2. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \vee \rceil P)$
3. $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \rceil R)$
4. $P \vee \rceil P$
5. $\rceil P \rightarrow (P \rightarrow Q)$

Задача 4. Проверете дали следните съждения са еквиваленции:

1. $\rceil(P \vee Q) \Leftrightarrow \rceil P \wedge \rceil Q$ – закон на Де Морган
2. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$- дистрибутивен закон
3. $\rceil(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \rceil P \wedge Q$ – закон за отрицание на импликацията

Задача 5 Проверете дали логическите следствия са верни:

1. $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$
2. $(P \wedge Q) \rightarrow R \Rightarrow (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$

II. *Предикатна логика*

- ***Квантор за съществуване:*** Нека P е твърдение и нека съществуването на *x* означим с $\exists x$. Тогава $\exists x{:}P$ е твърдението: "Съществува *x*, такова че *P*". Променливата *x* е квантова променлива.

- ***Универсален квантор:*** Нека P е твърдение със свободна променлива *x*. Тогава "$\forall x$:P е твърдение, което се чете: "За всяко *x* –P"

Задачи:

Задача 1. Какво означават следните математически записи?

1. $\forall x: \forall y: \forall z: (x(y+z)=xy+xz)$
2. $\exists z:((\forall x: x+z=x) \wedge (\forall x: \exists y: x+y=z)$

Задача 2. Определете верността на твърденията:

а) $\forall x: x^2+x+2>0;$ ***б)*** $\exists x: x^2+x+2=0;$

в) $\forall x: x^2+x+2=0;$ ***г) не*** $\exists x: x^2+x+2=0$

Задача 3. Верни ли са твърденията:

1. Всички прости числа са нечетни
2. Всяко число, което се дели на 6 се дели и на 2.
3. Съществува правоъгълник, на който диагоналите не са равни.

Изкажете отрицанията им.

Допълнителни задачи:

Задача 1. Проверете дали следните твърдения са тавтологии:

1. $P \rightarrow (P \vee Q)$
2. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$

Задача 2. Конструирайте верностна таблица за всяко от следните твърдения:

1. $(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$
2. $\neg P \wedge (Q \rightarrow P)$. Какво можете да заключите за P и Q, ако твърдението е истина?

Задача 3. Проверете дали следните твърдения са логически еквиваленции, „*Няма да вали дъжд или сняг*" и „*Няма да вали дъжд и няма да вали сняг*":

Задача 4. Проверете дали следните твърдения са логически еквиваленции

$(P \vee Q) \rightarrow R$ и $(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow P)$

$\neg(P \rightarrow Q)$ и $P \wedge \neg Q$