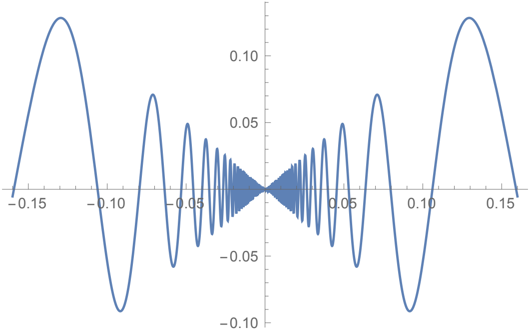
Граници на функции

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

Определение за граница на функция



Фигура: Графика на функцията $y = x \sin \frac{1}{x}$, $x \in [-0.15, 0.15]$

- Нека разгледаме функцията $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Тя не е дефинирана в т. $x_0 = 0$. От графиката на функцията се вижда, че когато даваме на x стойности, все по-близки и по-близки до числото 0, съответните функционални стойности „се стремят“ към числото 0. Ние ще дадем на тези разсъждения по-строга форма, като въведем понятието граница на функция.
- Обърнете внимание, че макар точката $x_0 = 0$ да не принадлежи на дефиниционната област D на $f(x)$, която се състои от двата отворени интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, ние можем да оставим x да се приближава към тази точка. Това е така, тъй като точката $x_0 = 0$ се явява точка на сгъстяване за точките от дефиниционната област D.

Дефиниция 1 (Точка на сгъстяване)

Едно число x_0 се нарича точка на сгъстяване за дадено числово множество M, когато във всяка негова околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се съдържат точки от M, различни от x_0.

- Точката x_0 може да принадлежи, а може и да не принадлежи на M. Така например, ако множеството M е отвореният интервал (a, b), то точката a, също както и точката b, ще бъде точка на сгъстяване за това множество, въпреки че тя не се съдържа в него.

Дефиниция 2 (Дефиниция на Коши за граница на функция)

Нека $f(x)$ *е функция с дефиниционна област* D *и нека* x_0 *е точка на сгъстяване за* D*. Казваме, че числото* l *е граница на функцията* $f(x)$ *при* x*, клонящо към* x_0 *(или че* $f(x)$ *клони към* l*, когато* x *клони към* x_0*) и ще записваме това така:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

ако при всеки избор на положителното число ε *може да се намери такова число* $\delta > 0$*, че от условията* $x \in D$ *и* $0 < |x - x_0| < \delta$ *да следва неравенството*

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

- Тъй като числото ε е произволно, дадената дефиниция изисква, грубо казано, разликата между стойностите на функцията $f(x)$ и числото l да може да стане колкото искаме малка (по абсолютна стойност), стига да вземаме такива стойности на x от M, които се намират достатъчно близко до x_0 – колко близко, това именно се определя от числото δ. Разбира се, δ зависи от ε.

Дефиниция 3 (Дефиниция на Хайне за граница на функция)

Нека $f(x)$ *е дефинирана в множеството* D *и нека* x_0 *е точка на сгъстяване за* D*. Казваме, че функцията* $f(x)$ *има граница, равна на* l*, при* $x \to x_0$*, когато при всеки избор на редицата*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

състояща се от точки, принадлежащи на D *и различни от* x_0*, която клони към* x_0*, съответната редица*

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

е сходяща и клони към l*.*

Основни теореми за граници на функции

Теорема 1 (Единственост на границата)

Нека $f(x)$ е дефинирана в областта D и x_0 е точка на сгъстяване за D. Ако съществува $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то тази граница е единствена.

Теорема 2 (Аритметични действия с граници)

Нека $f(x)$ *и* $g(x)$ *имат една и съща дефиниционна област* D *и* x_0 *е точка на сгъстяване за* D. *Ако съществуват границите* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m$, *то функциите* $f(x) \pm g(x)$ *и* $f(x)g(x)$ *също притежават граница при* $x \to x_0$. *При това са валидни равенствата*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m,$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = lm.$$

Освен това, ако $g(x) \neq 0$ *при* $x \neq x_0$ *и* $m \neq 0$, *то функцията* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *също притежава граница при* $x \to x_0$ *и*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}.$$

Теорема 3 (Граничен преход в неравенствата)

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в D и x_0 е точка на сгъстяване за D. Ако

$$f(x) \le g(x) \quad \text{за всяко } x \in D$$

и ако границите $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ съществуват, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Теорема 4 (Теорема за междинната функция)

Нека $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ са дефинирани в D и x_0 е точка на сгъстяване за D. Ако

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{за всяко } x \in D$$

и ако границите $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ съществуват, като при това

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l,$$

то

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l.$$

Разширение на понятието граница на функция

- С оглед на по-лесни пресмятания се оказва удобно да разширим понятието граница на функция, като в някои случаи говорим за граница и когато тя не съществува в смисъл на дадената в предишния параграф дефиниция.

Дефиниция 4

*Нека $f(x)$ е функция с дефиниционна област D и нека x_0 е точка на сгъстяване за D. Казваме, че **функцията $f(x)$ клони към безкрайност при x, клонящо към x_0**, и записваме това така:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

ако при всеки избор на положителното число A може да се намери такова число $\delta > 0$, че от условията $x \in D$ и $0 < |x - x_0| < \delta$ да следва неравенството

$$f(x) > A.$$

- Тъй като A може да се вземе произволно голямо, тази дефиниция изисква, накратко казано, стойностите на функцията $f(x)$ да могат да станат колкото големи пожелаем, стига да вземем такива стойности на x, които са достатъчно близки до точката x_0.

Дефиниция 5

Нека $f(x)$ е функция с дефиниционна област D и нека x_0 е точка на сгъстяване за D. Казваме, че функцията $f(x)$ клони към минус безкрайност при x, клонящо към x_0, и записваме това така:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

ако при всеки избор на отрицателното число B може да се намери такова число $\delta > 0$, че от условията $x \in D$ и $0 < |x - x_0| < \delta$ да следва неравенството

$$f(x) < B.$$

- Дотук дефинирахме

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= l,\\ \lim_{x\to x_0} f(x) &= \infty,\\ \lim_{x\to x_0} f(x) &= -\infty,\end{aligned}$$

  в случая, когато x_0 е реално число. Първата от тези граници наричаме крайна, а останалите – безкрайни.
- До други разширения на понятието граница на функция се стига, когато вземем
  $x \to \infty$,
  $x \to -\infty$,
  $x \to x_0-$ (x клони към x_0 отляво, т.е. чрез стойности, по-малки от x_0; в този случай говорим за **лява граница**),
  $x \to x_0+$ (x клони към x_0 отдясно, т.е. чрез стойности, по-големи от x_0; в този случай говорим за **дясна граница**).

Безкрайно малки и безкрайно големи функции

Дефиниция 6

Ако $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, *то* $f(x)$ *се нарича безкрайно малка функция при* $x \to x_0$.

Дефиниция 7

Ако $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$, *то* $f(x)$ *се нарича безкрайно голяма функция при* $x \to x_0$.

Безкрайно малките и безкрайно големите функции притежават свойства, аналогични на тези на безкрайно малките и безкрайно големите редици.

Изчисление с Mathematica

- Limit$[expr, n \to$ Infinity$]$ пресмята символично границата на $expr$ при $n \to \infty$;
- Limit$[expr, x \to x_0]$ пресмята границата на $expr$ при $x \to x_0$;
- Plot$[f, \{x, x_{min}, x_{max}\}]$ рисува графиката на функцията f, когато $x \in [x_{min}, x_{max}]$.

Някои забележителни граници. Асимптотични равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

- Казваме, че функцията $f(x)$ е асимптотично равна на функцията $g(x)$ при $x \to a$ и записваме това така:
$$f(x) \sim g(x) \quad \text{при} \quad x \to a,$$
ако
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- Последните забележителни граници може да се запишат като асимптотични равенства при $x \to 0$:
$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x$$
$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Ако $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, а $h(x)$ е произволна друга функция, то
$$\lim_{x\to a} f(x)h(x) = \lim_{x\to a} g(x)h(x).$$

Примери

$$1)\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{3^2-4}{3^2-3.3+2}=\frac{5}{2}.$$

$$2)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=\frac{2+2}{2-1}=4.$$

3) $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{1+3x}-4}{\sqrt{5x}-5}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{1+3x}-4}{\sqrt{5x}-5}\cdot\frac{\sqrt{1+3x}+4}{\sqrt{5x}+5}\cdot\frac{\sqrt{5x}+5}{\sqrt{1+3x}+4}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{1+3x})^2-4^2}{(\sqrt{5x})^2-5^2}\cdot\frac{\sqrt{5x}+5}{\sqrt{1+3x}+4}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{1+3x-16}{5x-25}\cdot\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{5x}+5}{\sqrt{1+3x}+4}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{5(x-5)}\cdot\frac{10}{8}$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{8}=\frac{3}{4}.$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=[y=3x]$$
$$=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3.1=3.$$

5) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=[y=x-1]=\lim_{y\to 0}\frac{\sin \pi(y+1)}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi y+\pi)}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin \pi y.\cos\pi+\cos\pi y.\sin\pi}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin \pi y.(-1)+\cos\pi y.0}{y}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin\pi y}{y}$$
$$=[\sin\pi y\sim\pi y \text{ при } y\to 0]=-\lim_{y\to 0}\frac{\pi y}{y}=-\pi.$$

$$6)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x} = [1^{\infty}] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+4}{x-2}\right)^{x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-2}+\frac{4}{x-2}\right)^{x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{x-2+2}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{x-2}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{2}$$
$$= [y=x-2] = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{2}$$
$$= e^{4}.1^{2} = e^{4}.$$