

# Линейни уравнения от първи ред. Уравнения на Бернули

доц. д-р Теменужка Пенева

*Информатика, 2021/2022*

## Линейни уравнения от първи ред

- По какво си приличат следните диференциални уравнения?

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{ctg} x$$

$$y' = (2 \sin x) y + x^3$$

$$y' = 2x^2 y + \ln x$$

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = a(x) y + b(x), \tag{1}$$

където  $a(x)$  и  $b(x)$  са непрекъснати функции в даден интервал  $\Delta$ , се наричат линейни уравнения от първи ред.

► Първо разглеждаме случая  $b(x) \equiv 0$  за всяко  $x \in \Delta$ . Тогава уравнението (1) става с разделящи се променливи

$$y' = a(x) y. \quad (2)$$

Последователно получаваме

$$\frac{dy}{dx} = a(x) y,$$

$$\frac{dy}{y} = a(x) dx, \quad y \neq 0,$$

$$\ln |y| = \int a(x) dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

$$y = C e^{\int a(x) dx}, \quad C \neq 0.$$

Очевидно  $y = 0$  също е решение на (2), което може да се получи от последната формула за  $y$ , ако разрешим на  $C$  да приема и стойност 0. Тогава общото решение на (2) е

$$y = C e^{\int a(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

► Сега ще потърсим и решението на уравнението (1) във вида

$$y = C(x) e^{\int a(x) dx}.$$

Функцията  $C(x)$  определяме така, че за всяко  $x \in \Delta$  да е изпълнено тъждеството

$$\left( C(x) e^{\int a(x) dx} \right)' \equiv a(x) \left( C(x) e^{\int a(x) dx} \right) + b(x),$$

т.е.

$$C'(x) e^{\int a(x) dx} + C(x) e^{\int a(x) dx} a(x) \equiv a(x) C(x) e^{\int a(x) dx} + b(x),$$

откъдето

$$C'(x) = b(x) e^{-\int a(x) dx}.$$

Сега интегрираме двете страни и получаваме

$$C(x) = C + \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Следователно решението на линейното уравнение (1) е

$$y = e^{\int a(x) dx} \left( C + \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx \right), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

### Задача 1

Да се решат уравненията:

1)  $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$ ;

2)  $y = x(y' - x \cos x)$ ;

3)  $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$ .

**Решение.** 1) Изразяваме  $y'$  и намираме

$$y' = -\frac{x+1}{x}y + 3xe^{-x},$$

което е уравнение от вида (1) с  $a(x) = -\frac{x+1}{x}$  и  $b(x) = 3xe^{-x}$ .  
Тогава по формулата (3) получаваме

$$\begin{aligned}y &= e^{\int(-\frac{x+1}{x})dx} \left( C + \int 3xe^{-x} e^{\int \frac{x+1}{x} dx} dx \right) \\&= e^{-x-\ln|x|} \left( C + \int 3xe^{-x} e^{x+\ln|x|} dx \right) \\&= \frac{e^{-x}}{|x|} \left( C + \int 3x|x| dx \right) = \frac{e^{-x}}{x} \left( C + \int 3x^2 dx \right) \\&= \frac{e^{-x}}{x} (C + x^3) .\end{aligned}$$

2) Отг.  $y = x(C + \sin x)$ .

## 3) Уравнението

$$y' = \frac{1}{\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y},$$

записано по този начин, очевидно не е линейно уравнение, но то е еквивалентно на

$$\frac{dx}{dy} = (\operatorname{ctg} y)x + \sin^2 y,$$

което е линейно по отношение на  $x$ . Тогава използваме формулата (3), като разменяме местата на  $x$  и  $y$ . Получаваме

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \operatorname{ctg} y \, dy} \left( C + \int (\sin^2 y) e^{-\int \operatorname{ctg} y \, dy} \, dy \right) \\ &= e^{\ln |\sin y|} \left( C + \int (\sin^2 y) e^{-\ln |\sin y|} \, dy \right) \\ &= \sin y \left( C + \int \sin y \, dy \right) = \sin y (C - \cos y). \end{aligned}$$

## Уравнения на Бернули

- По какво си приличат следните диференциални уравнения?

$$y' = \frac{y}{x} + (\operatorname{ctg} x) y^2$$

$$y' = (2 \sin x) y + \frac{x^3}{y^4}$$

$$y' = 2x^2 y + (\ln x) \sqrt{y}$$

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = a(x) y + b(x) y^m, \quad m \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

където  $a(x)$  и  $b(x)$  са непрекъснати функции в даден интервал  $\Delta$ , се наричат уравнения на Бернули.

- при  $m = 0 \Rightarrow$  линейно уравнение;
- при  $m = 1 \Rightarrow$  уравнение с разделящи се променливи;



► при  $m \neq 0$ ; 1 първо разделяме двете страни на уравнението (4) с  $y^m \neq 0$ ,

$$\frac{y'}{y^m} = a(x)y^{1-m} + b(x) \quad (5)$$

и полагаме

$$y^{1-m} = z, \quad z = z(x).$$

Диференцираме това равенство спрямо  $x$ , като не забравяме, че  $y = y(x)$ ,

$$z' = (1-m)y^{1-m-1}y' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m}$$

и заместваме в (5). Получаваме

$$\frac{z'}{1-m} = a(x)z + b(x),$$

откъдето

$$z' = (1-m)a(x)z + (1-m)b(x).$$

Последното уравнение е линейно по отношение на  $z$  и решенията му можем да опишем с намерената формула. Накрая остава да отбележим, че  $y = 0$  също е решение на (4) при  $m > 0$ .

## Задача 2

Да се решат уравненията:

$$1) xy' + y = y^2 \ln x;$$

$$2) 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1};$$

$$3) xy' - 2x^3 \sqrt{y} = 4y;$$

$$4) y' x^3 \sin y = xy' - 2y.$$

Решение. 1) Имаме

$$y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{x}y^2.$$

Това е уравнение от вида (4) с  $m = 2$ ,  $a(x) = -\frac{1}{x}$  и  $b(x) = \frac{\ln x}{x}$ .  
Разделяме двете страни на уравнението с  $y^2 \neq 0$  и намираме

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} + \frac{\ln x}{x}.$$

Въвеждаме нова неизвестна функция  $z = z(x)$ ,

$$z = \frac{1}{y}, \quad z' = -\frac{1}{y^2}y'$$

и заместваме в последното уравнение. Получаваме

$$-z' = -\frac{1}{x}z + \frac{\ln x}{x},$$

откъдето

$$z' = \frac{1}{x}z - \frac{\ln x}{x}.$$

По формулата (3) намираме

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{dx}{x}} \left( C - \int \frac{\ln x}{x} e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right) \\ &= x \left( C - \int \frac{\ln x}{x^2} dx \right) \\ &= x \left( C + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right), \end{aligned}$$

след интегриране по части. Като заместим  $z$  с  $\frac{1}{y}$  получаваме

$$\frac{1}{y} = Cx + \ln x + 1.$$

Очевидно  $y = 0$  също е решение на даденото уравнение.

2) Отг.  $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$ .

3) Отг.  $y = x^4(C + x)^2$ ;  $y = 0$ .

4) Упътване. Имаме

$$y' = -\frac{2y}{x^3 \sin y - x},$$

откъдето

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y} x - \frac{\sin y}{2y} x^3.$$

Това е уравнение на Бернули спрямо  $x$ . Разделяме двете страни с  $x^3 \neq 0$  и получаваме

$$\frac{x'}{x^3} = \frac{1}{2y} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{\sin y}{2y}.$$

Въвеждаме нова неизвестна функция  $z = z(y)$ ,

$$z = \frac{1}{x^2}, \quad z' = -\frac{2}{x^3} x'.$$

Заместваме и стигаме до линейно уравнение спрямо  $x$ , което отново решаваме с помощта на формула (3).

Отг.  $x^2(C - \cos y) = y; \quad y = 0.$

## Пример от икономиката

Не малко модели в икономиката се описват с диференциални уравнения.

**Пример.** Един от първите опростени модели на цикъл на растеж, разглеждан от Haavelmo (1956) изглежда по следния начин. Нека производствената функция е

$$Y = KN^{\alpha},$$

където  $Y$  е продукцията,  $K > 0$  е капиталното вложение (фиксирано), а  $N$  е предлаганата работна сила.

Нарастването на заетостта се моделира като

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{Y}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Комбинирайки двете, получаваме нелинейно уравнение от първи ред

$$\dot{N} = \alpha N - \beta \frac{N^{2-\alpha}}{K},$$

което е уравнение на Бернули и се решава точно.