Множества. Реални числа

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ “Паисий Хилендарски”

Множества

- Основното математическо понятие множество се приема за интуитивно ясно и не се определя с помощта на други понятия. Като синоними се използват думите съвкупност, семейство, клас и др.
- Записът „$x \in A$“ означава: „x е елемент на множеството A“, („x принадлежи на множеството A“), а записът „$x \notin A$“ означава: „x не е елемент на множеството A“, („x не принадлежи на множеството A“).
- Множеството B се нарича подмножество на множеството A и се пише $B \subset A$, ако всеки елемент на множеството B е елемент на множеството A.
- Множествата A и B се наричат равни и се пише $A = B$, ако $A \subset B$ и $B \subset A$.

- Ако едно множество не притежава нито един елемент, то се нарича празно (нулево) и се означава с $\varnothing$. Приема се, че $\varnothing \subset A$ за всяко множество A.
- Обединение (сума) на множествата A и B се нарича съвкупността от всички елементи на A и B и се означава с $A \cup B$.
- Сечение на множествата A и B се нарича съвкупността от общите елементи на A и B и се означава с $A \cap B$.
- Разлика на множествата A и B се нарича множеството на всички елементи на A, които не принадлежат на B, и се означава с $A \setminus B$.

Реални числа

Всяко задоволително разглеждане на основните понятия на математическия анализ (като например сходимост, непрекъснатост, диференцируемост и интегрируемост) трябва да се основава непременно на точно дефиниране на понятието реално число. Строгата теория на реалните числа включва взаимосвързаните операции събиране, умножение и наредба на реалните числа. Има различни начини на въвеждане на реалните числа. В този курс ще използваме аксиоматичния метод, който е общоприет при изграждането на една математическа теория.

Определение за реални числа

Множеството $\mathbb{R}$ се нарича **множество на реалните числа** (а неговите елементи се наричат **реални числа**), ако са изпълнени следните условия (аксиоми на реалните числа):

I. В $\mathbb{R}$ е определена операция **събиране**, чрез която на всяка двойка елементи a, $b \in \mathbb{R}$ се съпоставя еднозначно елемент $a + b \in \mathbb{R}$, наречен **сбор** или **сума** на a и b, като са изпълнени следните аксиоми (аксиоми на събирането):

A1. $a + b = b + a$ за всяка двойка реални числа a и b (комутативност на събирането);

A2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ за всеки три реални числа a, b и c (асоциативност на събирането);

A3. В $\mathbb{R}$ съществува елемент, който се нарича **нула** и се означава със символа 0, такъв че

$$a + 0 = a$$

за всяко реално число a (съществуване на неутрален елемент на събирането);

A4. За всяко реално число a съществува число $-a$, което се нарича **противоположно** на a и за което е изпълнено равенството

$$a + (-a) = 0.$$

II. В $\mathbb{R}$ е определена операция **умножение**, чрез която на всяка двойка елементи a, $b \in \mathbb{R}$ се съпоставя еднозначно елемент $ab \in \mathbb{R}$, наречен **произведение** на a и b, като са изпълнени следните аксиоми (аксиоми на умножението):

A5. $ab = ba$ за всяка двойка реални числа a и b, различни от нула (комутативност на умножението);

A6. $(ab)c = a(bc)$ за всеки три реални числа a, b и c, различни от нула (асоциативност на умножението);

A7. В $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ съществува елемент, който се нарича **единица** и се означава със символа 1, такъв че

$$a.1 = a$$

за всяко реално число $a \neq 0$ (съществуване на неутрален елемент на умножението);

A8. За всяко реално число $a \neq 0$ съществува число a^{-1}, което се нарича **реципрочно** на a и за което е изпълнено равенството

$$a.a^{-1} = 1.$$

Числото a^{-1} се означава още и със символа $\frac{1}{a}$.

III. Операцията умножение е дистрибутивна относно събирането, т.е.

A9. За всеки три реални числа a, b и c е изпълнено равенството

$$a(b + c) = ab + ac.$$

- Множество, за което са изпълнени аксиомите A1 – A9, се нарича **числово поле** или накратко **поле**.

Някои елементарни следствия от A1 – A9 са дадени в следната

Теорема 1

а) *Ако* $x, a \in \mathbb{R}$ *и* $a + x = a$, *то* $x = 0$;

б) *Ако* $x, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *и* $ax = a$, *то* $x = 1$;

в) *Ако* $x, a \in \mathbb{R}$ *и* $a + x = 0$, *то* $x = -a$;

г) *Ако* $x, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *и* $ax = 1$, *то* $x = a^{-1}$;

д) *Ако* $a, b \in \mathbb{R}$, *то уравнението* $a + x = b$ *има единствено решение* $x = b + (-a)$;

е) *Ако* $a, b \in \mathbb{R}$ *и* $a \neq 0$, *то уравнението* $ax = b$ *има единствено решение* $x = ba^{-1}$.

- Твърденията а) и б) на Теорема 1 показват, че неутралните елементи на събирането и умножението 0 и 1, чието съществуване се предполага в аксиоми А3 и А7, са единствени. Твърденията в) и г) показват, че за дадено $a \in \mathbb{R}$, елементите $-a$ и a^{-1} (при $a \neq 0$), чието съществуване се предполага в А4 и А8, са единствени.
- Единственото решение $x = b + (-a)$ на уравнението $a + x = b$ се нарича **разлика** на числата b и a и се означава с $b - a$, т.е. по дефиниция $b + (-a) = b - a$;
- Единственото решение $x = ba^{-1}$ на уравнението $ax = b$ се нарича **частно** на числата b и a и се означава с $\frac{b}{a}$, т.е. по дефиниция $\frac{b}{a} = ba^{-a}$.

Разгледаните дотук свойства на реалните числа се отнасят до въведените операции събиране и умножение. Тези операции позволяват да се определят множествата на естествените, целите и рационалните числа като подмножества на $\mathbb{R}$ и да се определи понятието степен с цял показател.

- Всяко число, което е сума от единици, се нарича **естествено число**. Множеството на всички естествени числа означаваме с $\mathbb{N}$.
  - Сумата и произведението на две естествени числа са също естествени числа;
  - **[Принцип на пълната математическа индукция]** Нека $A \subset \mathbb{N}$ е такова, че $1 \in A$ и от $n \in A$ следва, че $n + 1 \in A$. Тогава $A \equiv \mathbb{N}$.

- Всяко число, което може да се представи като разлика на две естествени числа, се нарича **цяло число**. Множеството на целите числа се означава с $\mathbb{Z}$. Сумата, разликата и произведението на две цели числа са също цели числа.
- Всяко число, което се явява частно на две цели числа, се нарича **рационално число**. Множеството на рационалните числа се означава с $\mathbb{Q}$. Всяко цяло число е рационално, тъй като за всяко цяло число n имаме $n = \frac{n}{1}$. Сумата, разликата, произведението и частното на две рационални числа са също рационални числа.
- Онези реални числа, които не са рационални, се наричат **ирационални числа**.

IV. В множеството $\mathbb{R}$ е определена двучленна релация $>$, така че са изпълнени следните условия (аксиоми на наредбата):

A10. За всяко $a \in \mathbb{R}$ е в сила точно една от релациите $a > 0$ (a е по-голямо от нула), $a = 0$ (a е равно на нула) или $0 > a$ (нула е по-голяма от a);

A11. Ако $a > 0$ и $b > 0$, то $a + b > 0$ и $ab > 0$.

- Нека $a, b \in \mathbb{R}$. Казваме, че числото a е по-голямо от числото b (или b е по-малко от a), ако $a - b > 0$. В този случай пишем $a > b$ (или $b < a$).
- Реалните числа, които са по-големи от числото 0, се наричат положителни, а ония, които са по-малки от 0 – отрицателни. Числото 0 е единственото реално число, което не е нито положително, нито отрицателно.
- В случая когато $a > b$ или $a = b$, ще пишем $a \geq b$ (или $b \leq a$) и ще казваме, че a е по-голямо или равно на b (b е по-малко или равно на a).
- Числово поле, в което са изпълнени аксиомите A10 и A11 се нарича **наредено числово поле**.

Принцип за непрекъснатост

От курса по математика в средното училище е известно, че формулираните дотук свойства A1 – A11 на множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа са в сила и за множеството $\mathbb{Q}$ на рационалните числа. Следователно $\mathbb{Q}$ също е наредено числово поле. Множеството на реалните числа обаче притежава още едно свойство, което се нарича непрекъснатост или пълнота. За да го формулираме, ще въведем още някои понятия, свързани с подмножества на $\mathbb{R}$.

- Множеството M, съставено от реални числа, се нарича ограничено отгоре, ако съществува такова реално число b, че за всяко $x \in M$ да имаме $x \leq b$.
- Числото b се нарича в такъв случай горна граница на множеството M.
- Ще отбележим, че самото число b може да принадлежи, а може и да не принадлежи на множеството M. В случай че $b \in M$, то b се нарича още най-голям елемент на M.

- Например множеството S от всички отрицателни реални числа е ограничено отгоре, като една негова горна граница е числото 0. При това 0 е горна граница, която не принадлежи на S. Разбира се, тя не е единствена – всяко положително число също е горна граница на S.
- Изобщо, ако едно множество от реални числа е ограничено отгоре, то притежава винаги безбройно много горни граници. И наистина, ако b е една горна граница на множеството M, то всяко число, по-голямо от b, ще бъде също горна граница на това множество.

- Нека M е едно ограничено отгоре множество от реални числа. Да си зададем въпроса: има ли измежду неговите горни граници една най-малка, т.е. една такава, която да бъде по-малка от всяка друга. Отговорът на този въпрос (който не е очевиден) е утвърдителен. В това се състои следното свойство на реалните числа.

V. **Принцип за непрекъснатост**

A12. Ако едно непразно множество M от реални числа е ограничено отгоре, то измежду неговите горни граници винаги има една най-малка. (Тази най-малка горна граница ще наричаме точна горна граница или супремум.)

- Разбира се, за точната горна граница на едно ограничено отгоре множество M от реални числа също имаме две възможности – тя да принадлежи или да не принадлежи на M.
- Ако множеството M притежава най-голям елемент, то той се явява и точна горна граница на множеството M.
- Възможно е обаче дадено множество от реални числа да бъде ограничено отгоре, без то да притежава най-голям елемент (какъвто например е случаят с множеството на всички отрицателни реални числа). В такъв случай точната горна граница е число, непринадлежащо на даденото множество.

- Аналогично на понятието горна граница се въвежда понятието долна граница. А именно едно множество M от реални числа се нарича ограничено отдолу, ако съществува такова число a, че за всяко число x от M да имаме $a \leq x$.
- Тогава числото a се нарича долна граница на множеството M. В случай че $a \in M$, то a се нарича и най-малък елемент на M.
- Всяко ограничено отдолу множество от реални числа притежава безбройно много долни граници. Най-голямата от тях се нарича точна долна граница или инфимум. С помощта на принципа за непрекъснатост може да се установи, че тази най-голяма долна граница винаги съществува, т.е. в сила е твърдението:

Теорема 2

Всяко ограничено отдолу непразно множество от реални числа притежава точна долна граница.

- Точната долна граница на едно ограничено отдолу множество M от реални числа може, разбира се, да принадлежи или да не принадлежи на M. Ако множеството M съдържа едно най-малко число, то това число представлява същевременно и неговата точна долна граница.

- Когато едно множество от реални числа е ограничено както отгоре, така и отдолу, то се нарича накратко ограничено. Съгласно казаното това означава, че съществуват две реални числа a и b такива, че за всяко число x от M да имаме $a \leq x \leq b$.
- Всяко множество от реални числа, което не е ограничено, ще наричаме неограничено. Така например множеството на естествените числа, както и множеството на целите числа са неограничени (първото от тях не е ограничено отгоре, а второто – нито отгоре, нито отдолу).

Следствия от принципа за непрекъснатост

Теорема 3 (Принцип на Архимед)

Множеството на естествените числа е неограничено отгоре, т.е. няма реално число, което да е по-голямо от всички естествени числа.

Теорема 4

Нека $a, b \in \mathbb{R}$. Тогава

а) *съществува число $r \in \mathbb{Q}$, такова че $a < r < b$;*

б) *съществува ирационално число z, такова че $a < z < b$.*

- Наредено числово поле, в което е в сила принципът за непрекъснатост (т.е. аксиомата за точна горна граница) се нарича **непрекъснато наредено поле**. Следователно $\mathbb{R}$ е непрекъснато наредено поле.
- Естествено възниква въпросът за съществуване на такова непрекъснато наредено поле (т.е. множество, удовлетворяващо A10 – A12). Оказва се, че съществуват различни начини за построяването му, чрез които се достига до различни „модели“ на множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа, но всички те са изоморфни помежду си, т.е. „еднакви“ от гледна точка на техните свойства.

Пример. Ще покажем, че множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$, което е наредено числово поле, не е непрекъснато, т.е. не удовлетворява принципа за непрекъснатост.

Да разгледаме множеството M от всички рационални числа, които са по-малки от $\sqrt{2}$, т.е.

$$M = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < \sqrt{2}\}.$$

Очевидно е, че M е непразно множество и $\sqrt{2}$ е негова горна граница. Ще докажем, че $\sqrt{2}$ е точна горна граница за M. Да допуснем, че съществува число $a < \sqrt{2}$, което е горна граница за M. Тогава от Теорема 4 а) следва, че съществува рационално число r, за което

$$a < r < \sqrt{2}.$$

Неравенството $r < \sqrt{2}$ показва, че $r \in M$. Тогава $a < r$ показва, че a не е горна граница за множеството M. Полученото противоречие показва, че $\sqrt{2}$ е точната горна граница за M. Но $\sqrt{2}$ не е рационално число, т.е. намерихме множество от рационални числа, чиято точна горна граница не е рационално число.

Някои множества от реални числа

- Особено често ще срещаме един специален вид множества от реални числа, наречени интервали:
  - крайните интервали (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ и $(a, b]$;
  - безкрайните интервали $[a, \infty)$, (a, ∞), $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, \infty)$.
- Като използваме понятието интервал, можем да изкажем дефиницията на понятието ограничено множество по следния начин:

  Едно множество M от реални числа се нарича ограничено, когато съществува някакъв краен интервал, който съдържа всички числа от M.

- Ако a е едно реално число, или все едно точка от реалната права, то всеки отворен интервал от вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, където ε е някакво положително реално число, ще наричаме ε-околност на точката a или просто околност. Поради произволния избор на числото ε е ясно, че всяка точка a притежава безбройно много околности.
- С оглед на нашата бъдеща работа ще отбележим, че условието $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ е равносилно с условието $|x-a| < \varepsilon$.

От курса по математика в средното училище сме запознати с представянето на реалните числа с помощта на точки от числовата (реалната) права. От принципа за непрекъснатост на множеството на реалните числа следва, че на всяко реално число a съответства единствена точка от числовата права и обратно – на всяка точка от числовата права съответства единствено реално число. Затова често използваме геометрична терминология, като наричаме реалните числа точки.

- Точката a се нарича **точка на сгъстяване** на множеството A, ако всяка околност на a съдържа поне една точка на A, различна от a (забележете, че самата точка a може да не принадлежи на множеството A). Това означава, че във всяка околност на a има безброй много точки на A;
- Ако $a \in A$ и a не е точка на сгъстяване за A, то a се нарича **изолирана точка** на множеството A;
- Множеството A се нарича **затворено множество**, ако всяка точка на сгъстяване на A принадлежи на A;
- Точката a се нарича **вътрешна точка** на A, ако съществува ε-околност на a, която се съдържа в A;
- Множеството A се нарича **отворено множество**, ако всяка точка на A е вътрешна точка на A.

- Точката a се нарича **външна** за множеството A, ако съществува ε-околност на a, която няма общи точки с A;
- Точката a се нарича **контурна точка** на множеството A, ако всяка ε-околност на a както точки, които принадлежат на A, така и точки, които не принадлежат на A.