Теореми на Лопитал

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

Теорема 1 (Първа теорема на Лопитал)

Нека функциите $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяват условията:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани и диференцируеми в някоя околност на точката* a;
2) $f(a) = g(a) = 0$;
3) $g'(x) \neq 0$ *при* $x \neq a$;
4) *Съществува границата* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогава съществува и границата $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и е изпълнено равенството*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 2 (Втора теорема на Лопитал)

Нека функциите $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяват условията:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани и диференцируеми поне при* $x \neq a$ *в някоя околност на точката* a;
2) $g'(x) \neq 0$ *при* $x \neq a$;
3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$;
4) *Съществува границата* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогава съществува и границата $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и е изпълнено равенството*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 3 (Трета теорема на Лопитал)

Нека функциите $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяват условията:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани и диференцируеми в някой интервал от вида* (p, ∞);
2) $g(x) \neq 0$ *и* $g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (p, \infty)$;
3) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$;
4) *Съществува границата* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогава съществува и границата $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и е изпълнено равенството*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 4 (Четвърта теорема на Лопитал)

Нека функциите $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяват условията:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *са дефинирани и диференцируеми в някой интервал от вида* (p, ∞);
2) $g(x) \neq 0$ *и* $g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (p, \infty)$;
3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$;
4) *Съществува границата* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогава съществува и границата $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и е изпълнено равенството*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Третата и четвъртата теорема остават, разбира се, в сила, ако условията им са изпълнени в някой интервал от вида $(-\infty, p)$, и ако навсякъде в тях границите се вземат при $x \to -\infty$.

- Най-общо, теоремите на Лопитал се прилагат, когато имаме граници от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Те се наричат още неопределености. Към тях се свеждат още неопределеностите от вида $[0.\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[1^{\infty}]$, $\left[\infty^{0}\right]$ и $\left[0^{0}\right]$, след като предварително преобразуваме:
  - $\lim uv = [0.\infty] = \lim \dfrac{u}{\left(\frac{1}{v}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right]$
  - $\lim uv = [0.\infty] = \lim \dfrac{v}{\left(\frac{1}{u}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
  - $\lim(u-v) = [\infty-\infty] = \lim uv\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right) = [\infty.0]$
  - $\lim u^{v} = [1^{\infty}] = \lim e^{v\ln u} = e^{\lim v\ln u}$ и пресмятаме $\lim v\ln u = [\infty.0]$
  - $\lim u^{v} = \left[\infty^{0}\right] = \lim e^{v\ln u} = e^{\lim v\ln u}$ и пресмятаме $\lim v\ln u = [0.\infty]$
  - $\lim u^{v} = \left[0^{0}\right] = \lim e^{v\ln u} = e^{\lim v\ln u}$ и пресмятаме $\lim v\ln u = [0.\infty]$

Примери:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}$$

$$= -\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}.$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(e^{2x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^{2x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0,$$

защото $e^{2x}\to\infty$ при $x\to\infty$.

$$
\begin{aligned}
3)\ \lim_{x\to 1-} \ln x \cdot \ln(1-x) &= [0.\infty] = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{(\ln(1-x))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1-} x \cdot \frac{\ln^2 x}{1-x} = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln^2 x}{1-x} = \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{(\ln^2 x)'}{(1-x)'} = \lim_{x\to 1-} \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-1} = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) &= [\infty-\infty] = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{[(x-1)\ln x]'} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-0-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1).\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x.\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = [1^{\infty}] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{(\operatorname{tg} 2x)(\ln \operatorname{tg} x)} = e^{A},$ където

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} 2x)(\ln \operatorname{tg} x) = [\infty.0]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\ln \operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{ctg} 2x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\sin^2 2x} \cdot 2}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{(\operatorname{tg} x)(\cos^2 x)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4})(\cos^2 \frac{\pi}{4})} = -1.$$

Тогава за търсената граница ще имаме

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{A} = e^{-1}.$$

Сравняване скоростта на нарастване на някои функции

- Ако за двете функции $f(x)$ и $g(x)$ имаме $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, ще казваме, че $g(x)$ клони по-бързо към безкрайност от $f(x)$, ако за тяхното частно имаме

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Пример: Ако $a > 1$ и $\alpha > 0$, то имаме

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty.$$

С теоремите на Лопитал може да се докаже, че

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0.$$

Оттук следва, че най-бързо към безкрайност клони показателната функция a^x, след нея – степенната функция x^α, и най-накрая – логаритмичната функция $\log_a x$.