Локални и глобални екстремуми на функция. Построяване на графика на функция

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

Локални екстремуми

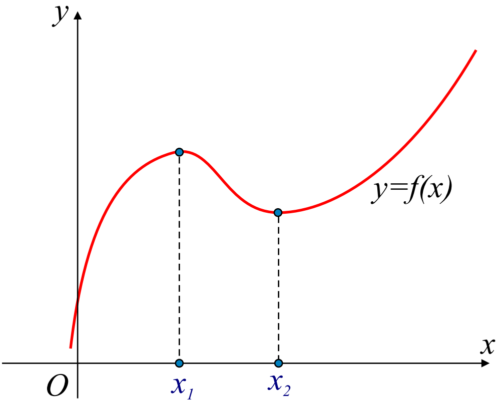
Понятията локален минимум и локален максимум се срещат при много въпроси от анализа и неговите приложения.

Дефиниция 1

*Функцията $f(x)$ с дефиниционна област D има **локален максимум** в някоя вътрешна точка $x_0 \in D$, ако съществува такава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$, че за всяко x от тази околност да е изпълнено неравенството $f(x) \leq f(x_0)$.*

*Аналогично $f(x)$ има **локален минимум** в $x_0 \in D$, когато x_0 е вътрешна точка за D и когато за всяко x от някоя околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на x_0 е изпълнено $f(x) \geq f(x_0)$.*

*Локалните максимуми и локалните минимуми наричаме с общото име **локални екстремуми**.*



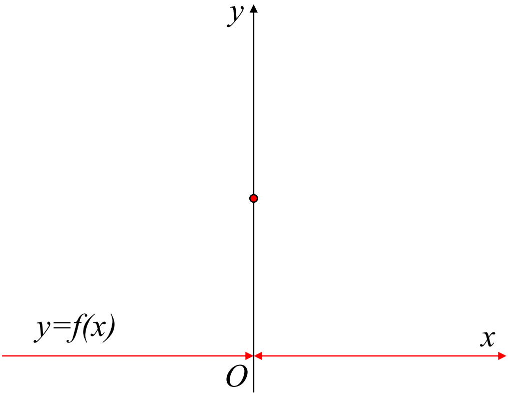
Фигура 1: Функцията $y = f(x)$ има локален максимум при $x = x_1$ и локален минимум при $x = x_2$.

- Ще отбележим, че една функция може да притежава локален екстремум в дадена точка x_0, без да бъде непрекъсната в тази точка. Така например функцията

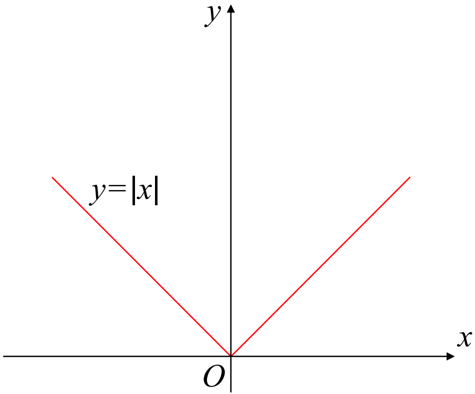
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

има локален максимум в $x_0 = 0$, като същевременно е прекъсната в тази точка (Фигура 2).

- Също така една функция, която е непрекъсната в дадена точка x_0, може да има локален екстремум, без да е диференцируема в нея. Например функцията $f(x) = |x|$, която има локален минимум в $x_0 = 0$, е непрекъсната, но не е диференцируема в тази точка (Фигура 3).



Фигура 2: Функцията е прекъсната в $x = 0$, но има локален максимум в тази точка.



Фигура 3: Функцията $y = |x|$ е непрекъсната в точката $x = 0$, има локален минимум в нея, но не е диференцируема в тази точка.

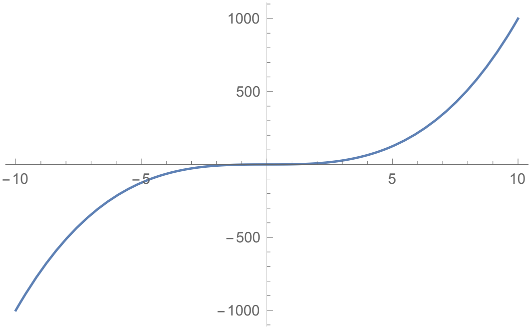
- Когато обаче една функция, имаща локален екстремум в някоя точка x_0, е диференцируема в тази точка, нейната производна $f'(x_0)$ не може да бъде произволна. В сила е следната важна

Теорема 1 (Ферма)

Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0, то за да притежава тя локален екстремум в тази точка, е необходимо производната й $f'(x_0)$ да бъде равна на 0.

- Ето защо, когато искаме да намерим локалните екстремуми на някоя диференцируема функция, ние обикновено най-напред намираме нейната производна и търсимония точки, в които тази производна е 0. Това са единствените точки, в които е възможно да имаме екстремуми.

  Анулирането на първата производна в една точка обаче не е още достатъчно условие за съществуването на локален екстремум. Така например функцията $f(x) = x^3$ има производна, равна на нула в $x_0 = 0$, но въпреки това тя не притежава нито минимум, нито максимум в тази точка (Фигура 4).



Фигура 4: Производната $y' = 3x^2$ на на функцията $y = x^3$ се анулира в $x = 0$, но въпреки това функцията няма локален екстремум в тази точка.

- За да определим кога дадена функция има локален максимум или локален минимум, е достатъчно да изследваме изменението на знака на нейната първа производна в този интервал, т.е. да определим онези подинтервали, в които тази производна е положителна, и онези, в които е отрицателна. След това остава да си спомним, че знакът на производната на една функция показва кога тази функция е растяща и кога намаляваща (Лекция 8).

Абсолютни екстремуми

Дефиниция 2

Нека $f : X \to \mathbb{R}$ *и нека с* $\{f(x)\}_{x\in X}$ *е означено множеството от функционалните стойности на* $f(x)$. *Ако множеството* $\{f(x)\}_{x\in X}$ *притежава максимален (минимален) елемент, той се нарича най-голяма стойност (най-малка стойност) на* $f(x)$ *в* X *и се означава с* $\max\limits_{x\in X} f(x)$ $\left(\min\limits_{x\in X} f(x)\right)$.

Най-голямата стойност се нарича още глобален или абсолютен максимум, а най-малката стойност се нарича глобален или абсолютен минимум.

Нека $f(x)$ е дефинирана в $[a, b]$ и е непрекъсната в този интервал. Тогава най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ се намират по следния начин:

1. Определят се точките, за които $f'(x) = 0$ и се пресмятат стойностите на $f(x)$ за тях.
2. Пресмятат се стойностите $f(a)$ и $f(b)$.
3. Сравняват се получените стойности и от тях се определят най-голямата и най-малката, които са съответно $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

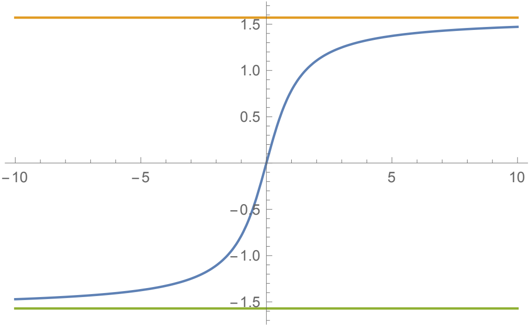
Хоризонтални и вертикални асимптоти

Дефиниция 3

Правата $y = a$ се нарича ***хоризонтална асимптота*** *на графиката на функцията $f(x)$ при $x \to +\infty$, ако $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.*

Дефиниция 4

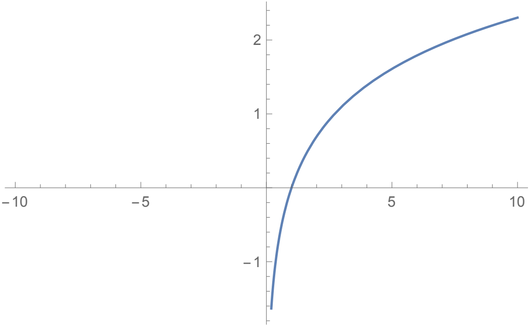
Правата $y = a$ се нарича ***хоризонтална асимптота*** *на графиката на функцията $f(x)$ при $x \to -\infty$, ако $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.*



Фигура 5: Правата $y = \frac{\pi}{2}$ (в оранжево) е хоризонтална асимптота за $f(x) = \operatorname{arctg} x$ при $x \to +\infty$, защото $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$. Аналогично, правата $y = -\frac{\pi}{2}$ (в зелено) е хоризонтална асимптота за $f(x) = \operatorname{arctg} x$ при $x \to -\infty$, защото $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

Дефиниция 5

Правата $x = b$ *се нарича* ***вертикална асимптота*** *на графиката на функцията* $f(x)$, *ако поне една от границите* $\lim_{x \to b-} f(x)$ *или* $\lim_{x \to b+} f(x)$ *е равна на* $+\infty$, *или* $-\infty$.



Фигура 6: Оста Oy с уравнение $x = 0$ се явява вертикална асимптота за $f(x) = \ln x$, защото $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$.

Построяване графика на функция

1. Определяне на дефиниционната област D на функцията $f(x)$.
2. Изследване за четност, нечетност и периодичност и определяне на областта $D_0 \subset D$, в която ще се изследва $f(x)$.
3. Поведение на $f(x)$ в краищата на D_0 и изследване за асимптоти.
4. Намиране на $f'(x)$ и изследване за растене, намаляване и екстремуми.
5. Определяне на пресечните точки с координатните оси (ако има такива точки).
6. Нанасяне на получените данни в таблица.
7. Построяване графиката на $f(x)$.