

Линейна алгебра и аналитична геометрия

за специалност "Информатика", I курс

лектор: гл. ас. д-р Ива Докузова

Насочена отсечка

Точката, отсечката, правата и равнината са аксиоматични понятия. Всяка отсечка AB , на която точката A е избрана за начало, а точката B за край се нарича **насочена отсечка** и **означаваме** \overrightarrow{AB} .

Казваме, че **посоката** на \overrightarrow{AB} е от A към B .

Под **дължина** на насочената отсечка \overrightarrow{AB} разбираме дължината на отсечката AB и означаваме с $|\overrightarrow{AB}|$.

Отсечката \overrightarrow{AA} се нарича **нулева насочена отсечка**.

Отсечката \overrightarrow{BA} се нарича **противоположна на** \overrightarrow{AB} .

Отсечките \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} се наричат **колинеарни**, ако правите AB и CD са успоредни или съвпадат. Означаваме $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, когато са еднопосочно колинеарни и $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$, когато са разнопосочно колинеарни.

Точките A , B и C се наричат **колинеарни**, ако лежат на една права.

Отсечките \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{EF} се наричат **компланарни**, ако правите AB , CD и EF са успоредни на фиксирана равнина или лежат в тази равнина.

Точките A , B , C и D се наричат **компланарни**, ако лежат в една равнина.

Свободен вектор

Две ненулеви насочени отсечки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} се наричат **равни**, ако имат равни дължини и еднакви посоки. Тогава записваме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Свободен вектор наричаме множеството от всички насочени отсечки, които са равни помежду си. Означаваме свободните вектори с малки латински букви: \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , ...

Ако \vec{a} е свободен вектор, то насочените отсечки, от които се състои се наричат негови **представители**.

Ако \overrightarrow{AB} е представител на вектора \vec{a} , записваме $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Нека A е произволна точка, а \vec{a} е произволен вектор. Тогава съществува единствена точка B , така че $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Действието се нарича **пренасяне на \vec{a} в точката A** .

Нулевият вектор се означава с $\vec{0}$ и негов представител е насочената отсечка \overrightarrow{AA} .

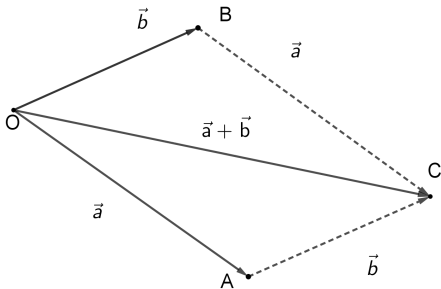
Противоположният вектор на вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ се означава с $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$. Вектор с дължина единица се нарича **единичен**.

Линейни действия със свободни вектори

Сума на векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ е вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Сума на свободните вектори \vec{a} и \vec{b} можем да получим и чрез следното правилото на успоредника.

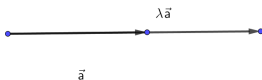
Избираме една точка O и построяваме насочени отсечки $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Допълваме до успоредник $OACB$. Тогава $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$.



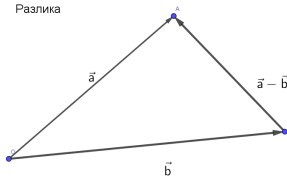
Произведение на реалното число λ с вектора \vec{a} е вектор $\lambda\vec{a}$. Ако $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$. В противен случай $\lambda\vec{a}$ е с дължина $|\lambda||\vec{a}|$ и е еднопосочно колинеарен или разнопосочно колинеарен на \vec{a} в зависимост от това дали $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$.

Разлика на векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ е вектор $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$.

Произведение



Разлика



Свойства на линейните действия

Събирането на вектори и умножението на вектор с число се наричат **линейни действия с вектори**.

Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са произволни свободни вектори, λ, μ са произволни реални числа. Тогава са в сила следните свойства:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
3. Съществува вектор \vec{o} , наречен нулев, такъв че за всеки вектор \vec{a} е изпълнено $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$;
4. За всеки вектор \vec{a} съществува вектор $-\vec{a}$, наречен противоположен на \vec{a} , такъв че $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$;
5. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
6. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
7. $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$;
8. $1\vec{a} = \vec{a}$.

Векторно пространство

Едно непразно множество V се нарича **реално векторно пространство**, ако е снабдено с две действия – събиране, което на всеки два елемента $a, b \in V$ съпоставя елемент $a + b \in V$, наречен **сума** на a и b , и умножение с реално число, което на всеки елемент $a \in V$ и всяко число $\lambda \in R$ съпоставя елемент $\lambda a \in V$, наречен тяхно **произведение**, като са изпълнени следните аксиоми:

1. $a + b = b + a$;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3. Съществува елемент o наречен нулев, такъв че за всеки елемент a е изпълнено $a + o = a$;
4. За всеки елемент a съществува елемент $-a$, наречен противоположен на a , така че $a + (-a) = o$;
5. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
6. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;
7. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;
8. $1a = a$.

Елементите на V се наричат вектори.

Някои следствия от аксиомите за векторно пространство

Нека V е реално векторно пространство.

1. Ако a и b са произволни вектори от V , то уравнението $a + x = b$ има единствено решение за x .

Това решение е $x = b - a$ и се нарича **разлика на векторите a и b** .

2. Нулевият вектор на V единствен.

3. Противоположният вектор на даден вектор от V е единствен.

4. Равенството $0a = o$ е изпълнено за всеки вектор a от V .

5. Равенството $(-1)a = -a$ е изпълнено за всеки вектор a от V .

6. Равенството $\lambda o = o$ е изпълнено за всяко число λ .

7. Ако $\lambda a = o$, то или $\lambda = 0$, или $a = o$.

Векторно подпространство

Непразното подмножество V_1 на векторното пространство V се нарича **векторно подпространство на V** (озн. $V_1 \leq V$), ако за всеки два елемента $a, b \in V_1$ и всяко $\lambda \in R$ е изпълнено:

- 1) $a + b \in V_1$;
- 2) $\lambda a \in V_1$.

Сечението на векторни подпространства V_1 и V_2 на V е векторно подпространство.

Сечението на векторните подпространства се означава $V_1 \cap V_2$.

Сума на векторни подпространства V_1 и V_2 на V се нарича множеството от векторите на V , които се представят като сума на вектор от V_1 и вектор от V_2 .

Сумата на векторните подпространства се означава $V_1 + V_2$.

Сумата $V_1 + V_2$ на векторните подпространства V_1 и V_2 на V се нарича **директна** и се означава $V_1 \oplus V_2$, ако $V_1 \cap V_2 = \{o\}$.

Примери на векторно пространство

Множеството, състоящо се от нулевия вектор е векторно пространство $V_0 = \{o\}$.

Множеството от свободните вектори $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots\}$ е реално векторно пространство относно двете линейни действия. Нарича се **геометрично векторно пространство**.

Множеството от свободните вектори $V(\alpha)$, компланарни с една равнина α е векторно подпространство на геометричното векторно пространство.

Множеството от свободните вектори $V(p)$, колинеарни с една права p е векторно подпространство на геометричното векторно пространство.

Множеството $M_{m \times n}(R)$ на матриците от тип $(m \times n)$ е реално векторно пространство относно операциите събиране на матрици и умножение на матрица с число.

Множеството $R_n[x]$ на полиномите на променливата x от степен $\leq n$;

В частност, матриците от тип (2×2) образуват векторно пространство. Всяка матрица A от $M_{2 \times 2}(R)$ има вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in R.$$

Сумата на две матрици A и B от $M_{2 \times 2}(R)$ е матрицата

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведението на реално число λ с матрица A от $M_{2 \times 2}(R)$ е матрицата

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Множеството R^n на наредените n -ки числа (x_1, x_2, \dots, x_n) е реално векторно пространство.

Задачи. (1. Тема)

1. Дадени са точките A , B и C , нележащи на една права. Ако O е произволна точка, да се докаже, че:

а) точката M е среда на отсечката AB , точно когато

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

б) точката G е медицентър на $\triangle ABC$, точно когато

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

2. Установете кое от следните множества е векторно пространство:

а) множеството $R_2[x]$ на полиномите от степен ≤ 2 ;

б) множеството $M = \{ax^2 + (a-b)x + b; \quad a, b \in R\}$;

в) множеството $N = \{(x, y, z) \in R^3; \quad x - y + z = 0, \quad 2x - y = 0\}$;

г) множеството на матриците от вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & 0 \end{pmatrix}, (a, b \in R)$;

д) множеството на матриците от вида $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -b \end{pmatrix}, (a, b \in R)$.

Линейна зависимост и независимост на вектори

Нека V е векторно пространство и $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е система от вектори на V . Нека

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \dots + \lambda_n a_n = o, \quad (1)$$

където λ_i са реални числа, а o е нулевият вектор.

Системата α е **линейно зависима**, ако в (1) поне едно от числата λ_i е различно от нула.

Системата α е **линейно независима**, ако (1) е изпълнено само при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ако един вектор $b \in V$ може да се представи във вида

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \dots + \lambda_n a_n,$$

то той се нарича **линейна комбинация на системата** α .

База и размерност на векторно пространство

Ако всеки вектор на V може да се представи като линейна комбинация на α , то тя се нарича **пораждаща система за V** .

Ако една система вектори $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е линейно независима и пораждаща за векторно пространство V , то тя е **база на V** .

Броят на базисните вектори определя **размерността на пространството**. Ако те са краен брой n , то V има размерност $\dim V = n$. В противен случай V е безкрайномерно.

Векторното пространство $V_0 = \{o\}$ не притежава база, тъй като единственият му вектор o е линейно зависим.

Векторното пространство $M_{m \times n}(R)$ на матриците от тип $m \times n$ има размерност $m.n$.

Векторното пространство R^n на наредените n -ки числа (x_1, x_2, \dots, x_n) има размерност n .

Линейна зависимост в геометричното векторно пространство

Един свободен вектор е линейно зависим, точно когато той е нулевият. Свободните вектори \vec{a}_1 и \vec{a}_2 са линейно зависими, точно когато те са колинеарни, т.е. $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$.

Векторното пространство на свободните вектори $V(p)$, колинеарни с една права p , има размерност 1.

Свободните вектори \vec{a}_1 , \vec{a}_2 и \vec{a}_3 са линейно зависими, точно когато те са компланарни, т.е. $\vec{a}_3 = \lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2$, ($\lambda, \mu \in R$).

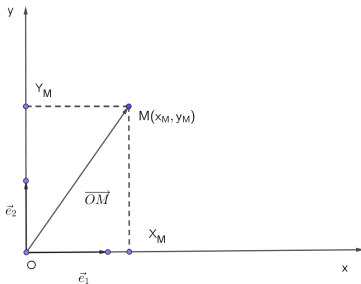
Векторното пространство на свободните вектори $V(\alpha)$, компланарни с една равнина α , има размерност 2.

Всеки четири свободни вектора са линейно зависими. Геометричното векторно пространство има размерност 3.

Координатна система в равнината

Две наредени взаимно перпендикулярни оси с общо начало образуват **декартова координатна система в равнината**. Мерната единица е една и съща по двете оси.

Ако означим началото с т. O , първата ос Ox – абсциса и втората ос Oy – ордината, то координатната система се означава Oxy . Тя разделя равнината на четири квадранта. Равнината на Oxy се нарича координатна равнина.



Координати на точка и вектор

Единичните вектори по абсцисата и ординатата се означават съответно \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Те се наричат базисни вектори (т.е. те са линейно независими и всеки вектор от равнината Oxy може да се представи, като линейна комбинация на \vec{e}_1 и \vec{e}_2 .)

Ако M е точка от координатната равнина, то \overrightarrow{OM} се нарича **радиус-вектор на т. M** . Абсцисата x ни дава първата координата на M , а ординатата y ни дава втората координата на M . Тогава записваме $M(x_M, y_M)$, а също и $\overrightarrow{OM}(x_M, y_M)$.

Векторът \overrightarrow{OM} се представя като линейна комбинация на базисните вектори \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , т.е. $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{e}_1 + y_M \vec{e}_2$.

Ако са дадени точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ относно координатната система Oxy , то

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Координатна система в пространството

Три наредени оси, които са две по две взаимно перпендикулярни помежду си и имат общо начало, образуват **декартова координатна система в пространството**.

Ако O е началото на координатната система, то Ox , Oy , Oz са съответно абсциса, ордината и апликата, а базисните вектори по осите са съответно \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 . Тогава получаваме координатите на произволна точка $M(x_M, y_M, z_M)$, а също и на нейния радиус-вектор $\overrightarrow{OM}(x_M, y_M, z_M)$.

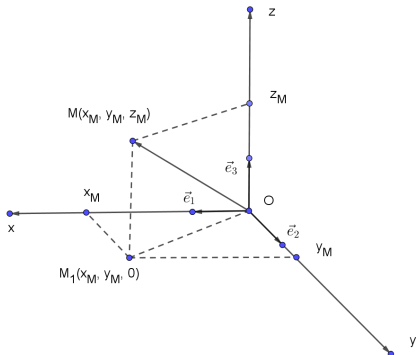
Векторът се представя, като линейна комбинация на базисните вектори \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 , т.е. $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{e}_1 + y_M \vec{e}_2 + z_M \vec{e}_3$.

Ако са дадени точките $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ относно координатната система $Oxyz$, то

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Декартова (ортонормирана) координатна система $Oxyz$.

Ако $M(x_M, y_M, z_M)$ е произволна точка, точка $M_1(x_M, y_M, 0)$ е ортогоналната проекция на M върху координатната равнина Oxy .



Задачи. (2. Тема)

1. Установете за всяка от следните системи вектори дали е линейно зависима или независима:

а) $a_1 = (1, 1, -1)$, $a_2 = (1, -1, 1)$, $a_3 = (-1, 1, 1)$;

б) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (3, -2, 1)$, $a_3 = (4, 0, 4)$;

в) $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (-1, 2, 1)$, $a_3 = (3, 0, -2)$.

г) $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$, ако $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ са успоредници в пространството.

2. Определете размерността на векторните пространства от Задача 2. (1. Тема).

3. Да се намерят координатите на средата на отсечка с краища

а) $A(-1, 0)$, $B(3, -2)$;

б) $A(2, 6)$, $B(-4, 8)$;

в) $A(3, -3, 5)$, $B(-1, 1, 3)$.

4. Дадени са точките $A(4, -2)$ и $M(1, 0)$. Да се намери точка B така, че M да бъде среда на отсечката AB .

5. Да се намерят координатите на медицентъра G на триъгълник, чиито върхове са $A(0, 1)$, $B(-2, 4)$ и $C(-4, 1)$.
6. Да се провери дали точките $A(1, 8)$, $B(2, 5)$, $C(3, 2)$ лежат на една права.
7. Съществува ли триъгълник с върхове
- а) $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 5)$, $C(0, 3, -7)$;
б) $A(1, -4, 1)$, $B(0, 2, 8)$, $C(-2, 14, 22)$?
8. Да се намери четвъртият връх C на успоредника $ABCD$, ако $A(-3, 0)$, $B(2, 1)$, $D(-3, 6)$.
9. Да се намери точка D така, че правите AB и CD да са успоредни, ако $A(2, 11)$, $B(7, 6)$, $C(12, -3)$.

Скалярно произведение на свободни вектори

Нека \vec{a} и \vec{b} са ненулеви свободни вектори и $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Ъгълът между лъчите AB^{\rightarrow} и AC^{\rightarrow} се нарича **ъгъл между векторите \vec{a} и \vec{b}** и го означаваме $\varphi = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Скалярно произведение на ненулевите вектори \vec{a} и \vec{b} е числото

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi. \quad (2)$$

Действието се нарича скалярно умножение на вектори.

Скалярно произведение на векторите \vec{a} и \vec{b} , ако $\vec{a} = \vec{o}$ или $\vec{b} = \vec{o}$, е числото $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Числото \vec{a}^2 се нарича **скаларен квадрат на вектора \vec{a}** . Тъй като ъгълът φ между \vec{a} и \vec{a} е 0, то от (2) получаваме $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, откъдето намираме за **дължината на \vec{a}** : $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Ненулевите вектори \vec{a} и \vec{b} се наричат **ортогонални** (перпендикулярни), ако $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Ненулевите вектори \vec{a} и \vec{b} са ортогонални, точно когато $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Скалярното произведение притежава свойствата:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;
2. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$;
3. $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;
4. $\vec{a}^2 > 0$, за всеки вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Нека относно декартова координатна система Oxy са дадени векторите $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$. Скалярното им произведение е

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

За дължината на вектор \vec{a} получаваме $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Нека относно декартова координатна $Oxyz$ са дадени векторите $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$. Скалярното им произведение е

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

За дължината на вектор \vec{a} получаваме $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Задачи. (3. Тема)

1. Ако $\vec{a}(1, -2)$, $\vec{b}(1, 1)$, да се пресметнат $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|$, \vec{b}^2 , $(\vec{a} - \vec{b})^2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.
2. Да се пресметне $(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$, ако $\vec{a}(1, 2)$, $\vec{b}(-2, 3)$. Да се намери косинусът на ъгъла между векторите $\vec{p} = (2\vec{a} + \vec{b})$ и $\vec{q} = (\vec{a} - 2\vec{b})$.
3. Ако $\vec{a}(3, 2, -3)$, $\vec{b}(2, -3, 0)$, да се пресметнат $\vec{a}\vec{b}$, \vec{a}^2 , \vec{b}^2 , $(\vec{a} - \vec{b})^2$, $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b})$.
4. Да се определи y , така че $\vec{a}(2, y)$ да бъде ортогонален на $\vec{b}(2, -1)$.
5. Даден е триъгълник ABC с върхове $A(3, 5)$, $B(3, 0)$, $C(-3, 0)$.
 - а) Да се изобрази триъгълникът спрямо декартова координатна система.
 - б) Да се намерят дължините на страните на триъгълника.
 - в) Да се намерят ъглите на триъгълника.

Евклидово векторно пространство

Скалярното произведение на свободни вектори може да се обобщи за векторите на произволно векторно пространство.

Реалното векторно пространство V се нарича **реално евклидово пространство**, ако е зададено действие наречено **скалярно умножение**, по силата на което на всеки два вектора a и b от V се съпоставя реално число ab , така че за произволни $a, b, c \in V$, $\lambda \in R$ са изпълнени свойствата:

1. $ab = ba$ (комутативност),
2. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивност),
3. $(\lambda a)b = \lambda(ab)$ (хомогенност),
4. $a^2 > 0$, за всеки вектор $a \neq o$ (позитивност).

Въвежда се дължина на вектор $|a| = \sqrt{a^2}$.

В сила е **неравенството на Коши-Буняковски-Шварц**: $|ab| \leq |a||b|$.

Еднозначно е определен ъгъл $\varphi \in [0, \pi]$ между a и b с равенството

$$\cos \varphi = \frac{ab}{|a||b|}.$$

Векторно произведение

Нека векторите $\{e_1, e_2, e_3\}$ образуват дясна ортонормирана база на тримерно евклидово векторно пространство.

Нека a и b са вектори от това пространство и имат координати $a(a_1, a_2, a_3)$ и $b(b_1, b_2, b_3)$ относно $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Векторно произведение на a и b е вектор $c = a \times b$ определен, както следва:

$$c = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

За базата $\{e_1, e_2, e_3\}$ са в сила равенствата $e_1 = e_2 \times e_3$, $e_2 = e_3 \times e_1$, $e_3 = e_1 \times e_2$.

Ако $a(a_1, a_2)$ и $b(b_1, b_2)$ са вектори от двумерно евклидово пространство, то векторното им произведение се пресмята по формулата

$$a \times b = (0, 0, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Векторното произведение $c = a \times b$ на векторите a и b има следните свойства:

- Ако $a = o$ или $b = o$, или $a \parallel b$, то $c = a \times b = o$;
- Ако a и b са линейно независими, то
 - 1) c е ортогонален на a и на b ;
 - 2) $|a \times b| = |a||b| \sin \varphi$, където $\varphi = \angle(a, b)$;
 - 3) векторите (a, b, c) образуват дясна база.

Други свойства на векторното произведение:

- $a \times b = -b \times a$ (антикомутативност)
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (дистрибутивност)
- $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$, $\lambda \in R$.

Двойно векторно произведение пресмятаме с формулите

$$(a \times b) \times c = ac.b - bc.a, \quad a \times (b \times c) = ac.b - ab.c.$$

Геометричен смисъл на векторното произведение

Нека $ABCD$ е успоредник. Лицето му се пресмята с формулата

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle(BAD).$$

Тогава лицето на $ABCD$ може да се получи и с равенството

$$S_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|.$$

Лицето на триъгълника ABC е

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Смесено произведение

Числото $abc = (a \times b)c$ се нарича **смесено произведение** на векторите a , b и c .

Смесеното произведение на $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$ и $c(c_1, c_2, c_3)$, зададени относно декартова координатна система, се получава по формулата

$$abc = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Смесеното произведение на три вектора е равно на нула, точно когато те са компланарни.

Смесеното произведение притежава свойствата

- $abc = a(b \times c)$,
- $abc = bca = cab = -bac = -cba = -acb$,
- $(a_1 + a_2)bc = a_1bc + a_2bc$, $a(b_1 + b_2)c = ab_1c + ab_2c$,
 $ab(c_1 + c_2) = abc_1 + bca_2$,
- $(\lambda a)bc = a(\lambda b)c = ab(\lambda c) = \lambda(abc)$.

Геометричен смисъл на смесеното произведение

Нека $ABCD$ е тетраедър. Обемът му се пресмята с формулата

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} | \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} |.$$

Задачи. (7. Тема)

1. Дадени са векторите $\vec{a}(0, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 0, 4)$, $\vec{c}(2, -2, 2)$. Да се намерят двойните векторни произведения $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ и смесените произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $(4\vec{a})(3\vec{b})\vec{c}$.
2. Да се намери лицето на триъгълник ABC , където $A(1, -2)$, $B(0, 1)$, $C(-3, 1)$.
3. Да се докаже, че точките $A(1, -2, 0)$, $B(1, 1, -1)$, $C(2, 7, -3)$ образуват триъгълник. Да се намери дължината на височината към страната AB .
4. Даден е тетраедър с върхове $A(1, -5, 4)$, $B(0, -3, 1)$, $C(-2, -4, 3)$, $D(4, 4, -2)$. Да се намери дължината на височината през върха A .

Общо уравнение на права в равнината

Ако в равнината са дадени права и точка, то през точката минава единствена права перпендикулярна на дадената права.

Нека Oxy е декартова координатна система в равнината. Ако $\vec{n}(A, B)$ е ненулев вектор от дадена права n , а $M_0(x_0, y_0)$ е дадена точка от равнината, то търсим уравнението на правата p , която минава през точка $M_0(x_0, y_0)$ и е перпендикулярна на \vec{n} .

Нека $M(x, y)$ е произволна точка от правата p . Тогава $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M} \vec{n} = 0$, откъдето следва $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Полагаме $C = -Ax_0 - By_0$.

И получаваме уравнението на правата:

$$p: \quad Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| \neq 0. \quad (3)$$

Наричаме го **общо уравнение на права в равнината**.

Вектор $\vec{n}(A, B)$ се нарича **нормален вектор на правата p** .

Вектор $\vec{p}(-B, A)$ е **колинеарен с правата p** .

Уравнение на права през две точки

През две различни точки минава единствена права.

Нека $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ са две различни дадени точки от правата p , а $M(x, y)$ е произволна точка от p . Тогава векторите $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ са колинеарни.

Уравнението на правата е

$$p : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (4)$$

То се нарича **канонично уравнение на права, определена с две точки**.

Уравнението (4) може да се запише и във вида

$$p : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

В (4) векторът колинеарен с правата е $\vec{p}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Частни положения на права в равнината

Нека е дадена права $p : Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| \neq 0$.

а) $p \parallel Ox$, точно когато $A = 0$, т.е. p има уравнение

$$p : By + C = 0, \quad B \neq 0;$$

б) $p \parallel Oy$, точно когато $B = 0$, т.е. p има уравнение

$$p : Ax + C = 0, \quad A \neq 0;$$

в) правата p минава през центъра O на координатната система Oxy , точно когато $C = 0$. Тогава

$$p : Ax + By = 0, \quad |A| + |B| \neq 0;$$

г) абсцисната ос има уравнение $Ox : y = 0$;

д) ординатната ос има уравнение $Oy : x = 0$.

Декартово уравнение на права

Нека относно декартова координатна система Oxy е дадена права, която не е успоредна на ординатата Oy , т.е.

$$p: Ax + By + C = 0, \quad B \neq 0.$$

Ако p сключва ъгъл α с положителната посока на оста Ox и p пресича оста Oy в точка $M_0(0, b)$, то p има уравнение

$$p: y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg} \alpha. \quad (6)$$

Уравнението (6) се нарича **декартово уравнение на права**, а $k = \operatorname{tg} \alpha$ се нарича **ъглов коефициент на правата**.

Връзката между коефициентите на двете уравнения на правата p е:

$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Взаимни положения на две прави в равнината

Нека са дадени правите

$$p_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| \neq 0,$$

$$p_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| \neq 0.$$

Тогава

1. Правите **съвпадат** ($p_1 \equiv p_2$), точно когато $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;
2. Правите са **успоредни** ($p_1 \parallel p_2$), точно когато $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;
3. Правите се **пресичат** ($p_1 \cap p_2$), точно когато $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

Нека правите p_1 и p_2 са зададени с декартови си уравнения

$$p_1 : y = k_1x + b_1, \quad k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1,$$

$$p_2 : y = k_2x + b_2, \quad k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Острият ъгъл θ между p_1 и p_2 , намираме по формулата

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

За така зададените p_1 и p_2 са в сила условията:

- а) $p_1 \parallel p_2$, точно когато $k_1 = k_2$;
- б) $p_1 \perp p_2$, точно когато $1 + k_1 k_2 = 0$.

Сноп прави. Разстояние от точка до права

Множество от всички прави в равнината, минаващи през една дадена точка в същата равнина се нарича **сноп прави**. Точката се нарича **център на снопа**.

Нека са дадени пресичащите се прави p_1 и p_2 :

$$p_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| \neq 0,$$

$$p_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| \neq 0.$$

Те определят сноп с уравнение:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad |\lambda| + |\mu| \neq 0.$$

Разстояние от точка $M_1(x_1, y_1)$ до правата p , където

$$p : Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| \neq 0,$$

наричаме числото

$$d(M_1, p) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Задачи. (8. Тема)

1. Да се намери уравнението на права p :

а) през точка $P(-2, 2)$ с ъглов коефициент $k = -2$;

б) през точка $Q(0, 1)$, сключваща ъгъл 120° с Ox ;

в) през точка $L(-3, 1)$, успоредна на Oy ;

г) през точка $L(-3, 1)$, перпендикулярна на Ox .

2. Да се намери тангенсът на острия ъгъл θ между правите:

а) $p: y = -x + 1$, $q: y = 2x + 3$;

б) $p: x - 2y + 2 = 0$, $q: 3x + 2y - 1 = 0$.

3. Относно декартова координатна система са дадени точките $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ и $M(2, -1)$. Да се намерят:

а) правата p минаваща през точките A и B ;

б) ортогонално симетричната точка C на M спрямо правата p ;

в) ъглите и лицето на триъгълник ABC .

4. Дадени са точките $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$. Да се намерят уравненията на страните на триъгълника ABC и уравнението на височината през т. B .

5. Дадена е точката $A(1, 5)$ и правата $g : x - 3y - 6 = 0$. Да се намери разстоянието от точка A до правата g и ортогонално симетричната точка A_1 на точката A относно правата g .

6. Страните на триъгълника ABC са с уравнения $AB : 4x - y - 7 = 0$; $BC : x + 3y - 31 = 0$; $CA : x + 5y - 7 = 0$. Намерете координатите на върховете A , B и C и уравнението на медианата през върха B .

Уравнение на окръжност

Нека е дадена декартова координатна система Oxy .

Уравнение от вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (7)$$

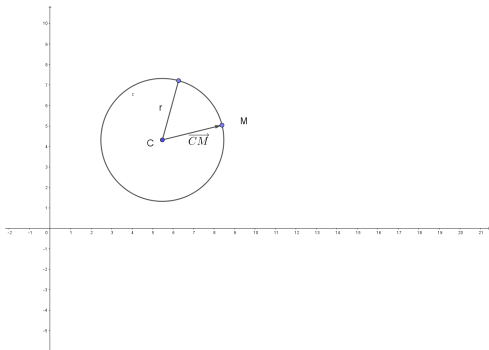
където поне един от коефициентите a_{11} , a_{12} , a_{22} е различен от нула, се нарича **уравнение от втора степен с две неизвестни x , y** .

Ако (7) има безброй много реални решения, но не се разпада на линейни уравнения, то е уравнение на крива линия от втора степен в равнината Oxy .

Множество от точки в равнината, които са равноотдалечени от една дадена точка в същата равнина се нарича **окръжност**.

Дадената точка се нарича **център** на окръжността, а разстоянието от центъра до произволна точка от окръжността се нарича **радиус**.

Нека Oxy е декартова координатна система и k е окръжност, лежаща в равнината Oxy , с център $C(x_0, y_0)$ и радиус r .



Ако $M(x, y)$ е произволна точка от k , то **уравнението на окръжността** е

$$k: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad (8)$$

което е уравнение от втора степен.

Уравнението от втора степен

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0, \quad (9)$$

където m , n , p са реални коефициенти и удовлетворяват

$$m^2 + n^2 - 4p > 0,$$

е уравнение на окръжност.

Центърът на окръжност с уравнение (9) е $C(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2})$, а радиусът ѝ е

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 4p}.$$

Окръжност с център т. O и радиус r има уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2$$

и се нарича **централна окръжност**.

Взаимно положение на точка и окръжност, на права и окръжност

Нека са дадени точка $M_1(x_1, y_1)$ и окръжност k с уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Точката M_1 лежи **вътре в** $k \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < r^2$,

Точката M_1 лежи **върху** $k \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2$,

Точката M_1 лежи **вън от** $k \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 > r^2$.

Правата p и окръжността k с център C и радиус r :

- а) се пресичат $\Leftrightarrow d(C, p) < r$;
- б) се допират $\Leftrightarrow d(C, p) = r$;
- в) нямат обща точка $\Leftrightarrow d(C, p) > r$.

По-горе с $d(C, p)$ е означено разстоянието от точка C до права p .

Задачи. (8. Тема)

7. Да се определи кои от следните линии са окръжности и на тези окръжности да се намерят центровете и радиусите:

а) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$; б) $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6 = 0$;

в) $x^2 - 2y^2 + x + 2y + 5 = 0$; г) $x^2 + y^2 + 5x + y + 7 = 0$.

8. Да се намери окръжност през точките $A(1, 4)$ и $B(-1, 2)$, ако центърът ѝ лежи върху правата $l: y = 0$.

9. Да се намерят онези допирателни към окръжността $x^2 + y^2 = 9$, които са успоредни на правата $p: x - y + 2 = 0$.

10. Относно ортонормирана координатна система е даден триъгълник ABC с върхове $A(4, 0)$, $B(0, 3)$ и $C(0, 0)$. Да се намерят:

а) уравненията на страната AB и на височината h_c към нея;

б) уравнението на описаната около триъгълника окръжност.

Уравнение на равнина в пространството

Ако в пространството са дадени точка и права (ненулев вектор), то през точката минава единствена равнина, перпендикулярна на дадената права (дадения вектор).

Нека $Oxyz$ е декартова координатна система в пространството. Ако $\vec{N}(A, B, C)$ е даден ненулев вектор, а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е дадена точка от пространството, то уравнението на равнината α , която минава през M_0 и е перпендикулярна на \vec{N} се получава по следния начин.

За произволна точка $M(x, y, z)$ от α , от условието $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}$, следва $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$. Полагаме $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Тогава уравнението на равнината е:

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| \neq 0.$$

Нарича се **общо уравнение на равнина в пространството**.

Вектор \vec{N} се нарича **нормален вектор на равнината α** .

Уравнение на права през две точки

Нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са две различни дадени точки от правата p , а $M(x, y, z)$ е произволна точка от p . Тогава векторите $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z - z_1)$ са колинеарни. Уравнението на правата е

$$p: \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (10)$$

То се нарича **канонично уравнение на права в пространството, определена с две точки**.

В (10) векторът колинеарен с правата p е $\vec{p}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Ако означим координатите му с $p_1 = x_2 - x_1$, $p_2 = y_2 - y_1$, $p_3 = z_2 - z_1$, то уравнението (10) може да се запише и във вида

$$p: \quad x = x_1 - \lambda p_1, \quad y = y_1 - \lambda p_2, \quad z = z_1 - \lambda p_3, \quad \lambda \in R. \quad (11)$$

Наричат се **скалярни параметрични уравнения на права в пространството**.

Уравнение на равнина през три точки

Ако $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ са три дадени неколинеарни точки от равнината α , а $M(x, y, z)$ е произволна нейна точка, то уравнението на α е следствие от условието за компланарност на векторите $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$. То е

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Нарича се **уравнение на равнина през три точки**.

Всяка права p в пространството може да се представи като пресечница на две равнини $p = \alpha_1 \cap \alpha_2$:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

където $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ са ненулеви и неколинеарни вектори.

Взаимни положения на две равнини

Нека са дадени равнините

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| \neq 0,$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| \neq 0.$$

Тогава

1. Равнините съвпадат ($\alpha_1 \equiv \alpha_2$), точно когато

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

2. Равнините са успоредни ($\alpha_1 \parallel \alpha_2$), точно когато

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

3. Равнините се пресичат ($\alpha_1 \cap \alpha_2$), точно когато тройките (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) не са пропорционални.

Частни положения на равнина в пространството

Нека е дадена равнината $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| \neq 0$.

а) $\alpha \parallel Ox$, точно когато $A = 0$.

б) $\alpha \parallel Oy$, точно когато $B = 0$.

в) $\alpha \parallel Oz$, точно когато $C = 0$.

г) $\alpha \parallel Oxy$, точно когато $A = B = 0$.

д) $\alpha \parallel Oxz$, точно когато $A = C = 0$.

е) $\alpha \parallel Oyz$, точно когато $B = C = 0$.

ж) α минава през началото O , точно когато $D = 0$.

з) Координатните равнини имат следните уравнения:

$$Oxy : z = 0; \quad Oyz : x = 0; \quad Oxz : y = 0.$$

и) Координатните оси имат следните уравнения:

$$Ox : y = 0, z = 0; \quad Oy : x = 0, z = 0; \quad Oz : x = 0, y = 0.$$

Сноп равнини. Разстояние от точка до равнина

Множество от всички равнини в пространството, минаващи през една дадена права се нарича **сноп равнини**. Правата се нарича **носител на снопа**.

Нека са дадени пресичащите се равнини:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| \neq 0,$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| \neq 0.$$

Те определят сноп с уравнение:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad |\lambda| + |\mu| \neq 0.$$

Разстояние от точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до равнината α , където

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| \neq 0,$$

наричаме числото

$$d(M_1, \alpha) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Задачи. (9. Тема)

1. Относно декартова координатна система е дадена точка $A(2, 1, -1)$. Намерете уравненията на равнините през т. A и

- а) перпендикулярни съответно на Ox , Oy , Oz ;
- б) успоредни съответно на Oxy , Oyz , Oxz ;
- в) минаващи съответно през Ox , Oy , Oz .

2. Относно декартова координатна система са дадени точки $A(1, 2, -2)$, $B(2, -3, 1)$ и $C(0, 1, 3)$. Намерете:

- а) уравнението на равнината през т. A и перпендикулярна на правата BC .
- б) уравнението на равнината през точките A , B и C .

3. Относно декартова координатна система са дадени точки $A(1, 2, 0)$, $B(-3, 1, 2)$ и равнината $\alpha : 2x + y - 3z + 4 = 0$. Намерете:

- а) уравнението на равнината през т. A успоредна на α ;
- б) равнината през точките A и B , перпендикулярна на α .

4. Нека $Oxyz$ е декартова координатна система. Да се намери равнина през правата $p: 3x - 2y + 1 = 0, x - y + z - 3 = 0$, перпендикулярна на равнината $\alpha: x + 2y - z = 0$.

5. Относно декартова координатна система са дадени точки $A(1, 0, -2)$, $B(2, -3, 2)$. Да се намери третият връх C и равнината на равнобедрения триъгълник ABC , ако C лежи върху правата $p: x + 2y - 2z = 0, 2x + y + z + 2 = 0$.

6. Да се намери прободът на правата $p: x + y - 5z + 1 = 0, x - y - z + 2 = 0$ с равнината $\alpha: x + y - z + 9 = 0$.

Уравнение на сфера

Нека е дадена декартова координатна система $Oxyz$. Уравнение от вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (12)$$

където поне един от коефициентите $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ е различен от нула, се нарича **уравнение от втора степен с три неизвестни x, y и z** .

Ако (12) има безброй много реални решения, но не се разпада на линейни уравнения, то е **уравнение на повърхнина от втора степен в пространството $Oxyz$** .

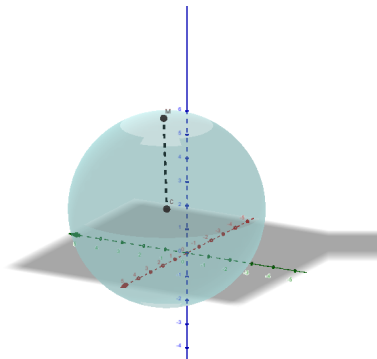
Множество от точки в пространството, които са равноотдалечени от една дадена точка се нарича **сфера**.

Дадената точка се нарича **център** на сферата, а разстоянието от центъра до произволна точка от сферата се нарича **радиус**.

Нека $Oxyz$ е декартова координатна система и S е сфера, с център $C(x_0, y_0, z_0)$ и радиус r . Ако $M(x, y, z)$ е произволна точка от S , то уравнението на сферата е

$$S : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2, \quad (13)$$

което е уравнение от втора степен.



Уравнението от втора степен

$$x^2 + y^2 + z^2 + lx + my + nz + p = 0, \quad (14)$$

където l, m, n, p са реални коефициенти и удовлетворяват

$$l^2 + m^2 + n^2 - 4p > 0,$$

е уравнение на сфера.

Центърът на сфера с уравнение (14) е $C(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2})$, а радиусът ѝ е

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 4p}.$$

Сфера с център т. O и радиус r има уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

и се нарича **централна сфера**.

Взаимно положение на точка и сфера, на равнина и сфера

Нека са дадени точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и сфера S с уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Точката M_1 лежи вътре в $S \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 < r^2$.

Точката M_1 лежи върху $S \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = r^2$.

Точката M_1 лежи вън от $S \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 > r^2$.

Равнината α и сферата S с център C и радиус r :

- а) се пресичат $\Leftrightarrow d(C, \alpha) < r$;
- б) се допират $\Leftrightarrow d(C, \alpha) = r$;
- в) нямат обща точка $\Leftrightarrow d(C, \alpha) > r$.

Пресечницата на сфера с равнина е окръжност, определена от уравненията на сферата и равнината.

Елипса

Множество от точки в равнината, за които сумата от разстоянията до две дадени точки F_1 и F_2 в същата равнина е константа, по-голяма от разстоянието между F_1 и F_2 , се нарича **елипса**.

Точките F_1 и F_2 се наричат **фокуси на елипсата**.

Нека Oxy е декартова координатна система в равнината, $M(x, y)$ е произволна точка от елипса с фокуси $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, и нека

$$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a, \quad (a > c > 0).$$

Ако означим $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, тогава елипсата има уравнение

$$\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (15)$$

Върховете на елипсата са $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$.

Правите A_1A_2 и B_1B_2 са **оси на елипсата**.

Изпълнено е $a > b$. Числото $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ се нарича **линеен ексцентритет**.

При $a = b$ уравнението (15) е на окръжност.

Ако (15) не е уравнение на окръжност, то правите

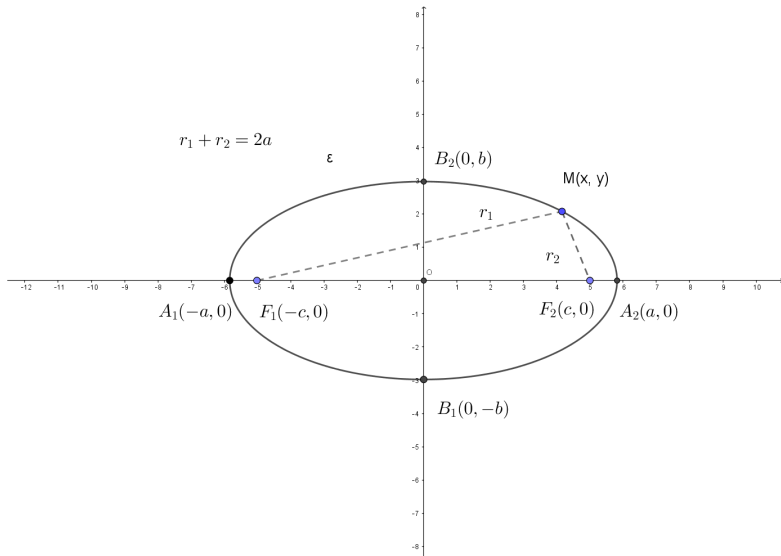
$$d_1 : x = -\frac{a^2}{c}, \quad d_2 : x = \frac{a^2}{c}$$

се наричат **директриси на елипсата**.

Ако елипсата има фокуси $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ относно Oxy , то уравнението ѝ отново е (15). Тогава $b > a$ и нейният линеен ексцентритет е $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Директрисите имат уравнения

$$d_1 : y = -\frac{b^2}{c}, \quad d_2 : y = \frac{b^2}{c}.$$

Графика на елипса



Хипербола

Множество от точки в равнината, за които абсолютната стойност на разликата от разстоянията до две дадени точки F_1 и F_2 в същата равнина е константа, по-малка от разстоянието между F_1 и F_2 , се нарича **хипербола**.

Точките F_1 и F_2 се наричат **фокуси на хиперболата**.

Нека Oxy е декартова координатна система, а $M(x, y)$ е произволна точка от хипербола с фокуси $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Нека

$$| |\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}| | = 2a, \quad (c > a > 0).$$

Ако означим $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, тогава хиперболата има уравнение

$$\chi: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (16)$$

Точките $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ се наричат **реални върхове** на хиперболата, а $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ се наричат **имагинерни върхове**.

Правата A_1A_2 е **реална ос** на хиперболата, а правата B_1B_2 е **имагинерна ос**.

Числото $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ се нарича **линеен ексцентритет**.

При $a = b$ хиперболата е равнораменна.

Правите

$$d_1 : x = -\frac{a^2}{c}, \quad d_2 : x = \frac{a^2}{c}$$

са **директриси на хиперболата**.

Правите

$$a_1 : y = -\frac{b}{a}x, \quad a_2 : y = \frac{b}{a}x$$

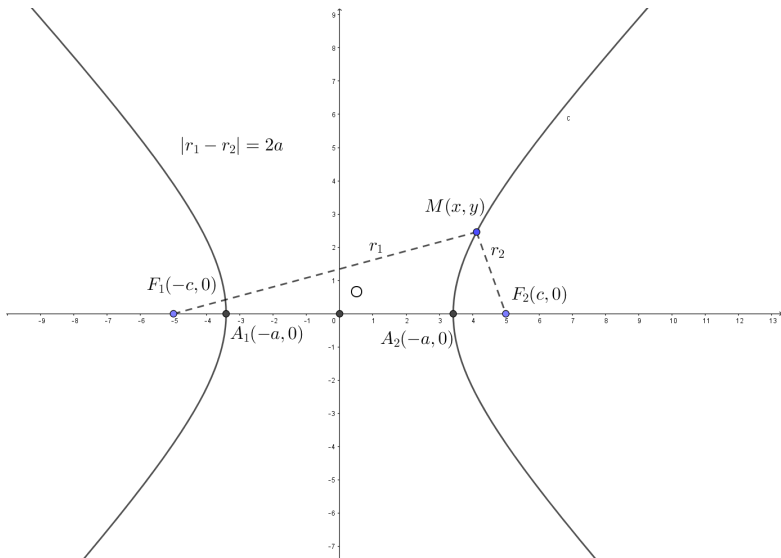
са **асимптоти на хиперболата**.

Хипербола с фокуси $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ има уравнение

$$\chi : \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Точките $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ са реалните върхове на хиперболата. Правата B_1B_2 е реалната ос.

Графика на хипербола



Парабола

Множество от точки в равнината, които са на равни разстояния до дадена точка F и дадена права d ($F \notin d$) в същата равнина, се нарича **парабола**.

Точката F се нарича **фокус на параболата**, а правата d е **директриса**. Разстоянието p от F до d се нарича **параметър на параболата**.

Нека Oxy е декартова координатна система в равнината. Избираме я така, че фокусът и директрисата на параболата π да са съответно с координати $F(\frac{p}{2}, 0)$ и $d: x = -\frac{p}{2}$.

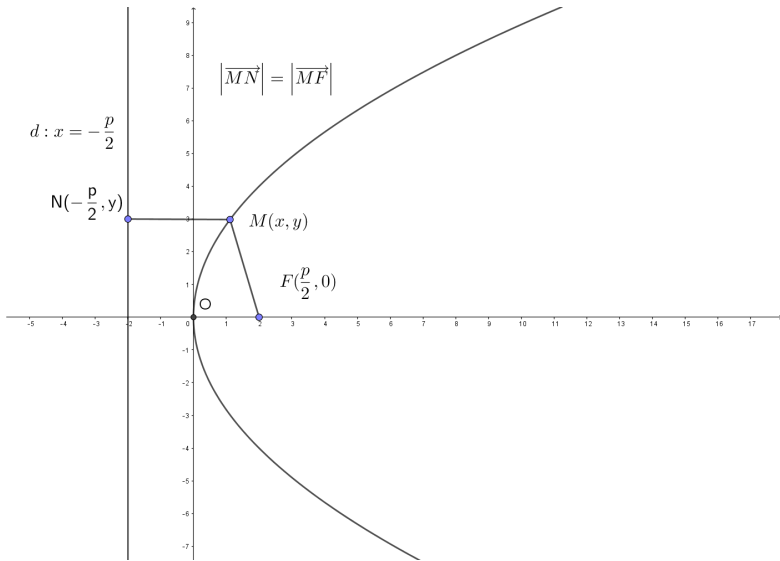
Ако $M(x, y)$ е произволна точка от параболата, то уравнението ѝ е:

$$\pi: y^2 = 2px, \quad p > 0. \quad (17)$$

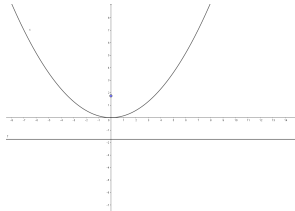
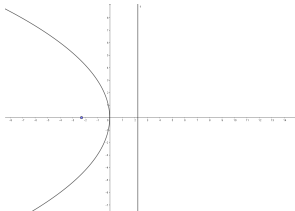
Нарича се **каноничното уравнение на параболата**.

Връх на параболата е точката O . **Ос на параболата** е права Ox .

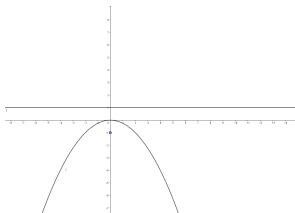
Графика на парабола



Уравненията $\pi_1 : y^2 = -2px, p > 0,$ $\pi_2 : x^2 = 2py, p > 0,$



$\pi_3 : x^2 = -2py, p > 0$ също са уравнения на параболи.



Ще отбележим, че елипсата, хиперболата и параболата са криви от втора степен.

Задачи. (10. Тема)

1. Дадена е елипсата $\varepsilon : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Да се намерят върховете, фокусите и директрисите ѝ.
2. Дадена е хиперболоата $\chi : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Да се намерят върховете, асимптотите, фокусите и директрисите ѝ.
3. Дадена е хиперболоата $\chi : \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$. Да се намерят върховете, асимптотите, фокусите и директрисите ѝ.
4. Дадена е параболата $\pi : x^2 = 8y$. Да се намерят фокусът и директрисата ѝ.
5. Да се построи окръжност с радиус $r = 3$ и център – пресечната точка на правата $g : y + 2 = 0$ с елипсата $\varepsilon : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
6. Да се намери уравнението на парабола с връх в точката O и директриса $d : x + 4 = 0$.

Литература

- [1] Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, "Линейна алгебра и аналитична геометрия", Пловдивско университетско издателство, Пловдив, 2008.
- [2] Д. Мекеров, М. Манев. "Учебно помагало за дисциплината Линейна алгебра и аналитична геометрия", IV изд., Макрос, Пловдив, 2010.
- [3] Д. Мекеров, П. Рангелова, Б. Царева, Е. Павлов. "Ръководство за решаване на задачи по аналитична геометрия", IV изд., УИ "Паисий Хилендарски", Пловдив, 2008.