ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЕ

спец. Информатика (задочно), I курс

I. Намерете следните граници на числови редици:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2+n-3}{8n^2-n+1}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-n^2-4n^4}{2+n+3n^2-2n^4}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+8n-2}{2n^2+3n-1}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-3}{n^3+2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{3n^2}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+4^{n+1}}{6^{n+2}+5^n}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+6^{n+1}}{6^n+5^{n+1}}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+1}+n}{\sqrt{n^3+7}-n}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}(7n-\sqrt{49n^2+3})$
10. $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{n^2+1}-n)$
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2+7a_n-1}{a_n^2-7a_n+10}$ при $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1,\quad a_n\neq 2,\ a_n\neq 5$
13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n^2-a_n-1}{2a_n^2-5a_n-3}$ при

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\dfrac{1}{2},\quad a_n\neq-\dfrac{1}{2},\ a_n\neq 3$
14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-7}{n+4}\right)^n$
15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+6}\right)^{3n}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2-n-6}\right)^n$

II. Намерете следните граници на функции:

17. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2+5x-24}$
18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-4}$
19. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$
20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$
22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x}$
23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x}$
24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2x+1)}{\sin 2x}$
25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{arctg}2x}$
27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$
28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+7^x}{7^{x+2}-5^x}$
29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^2-x+5}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2+x-4}{x^2+3x-7}$
31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-7x+x^2}{4-8x+x^2-x^3}$

III. Изследвайте за непрекъснатост следните функции:

32. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{2x} & \text{при}\quad x\neq 0\\[2mm]\dfrac{3}{2} & \text{при}\quad x=0;\end{cases}$
33. $f(x)=\begin{cases}x\ln(x^2) & \text{при}\quad x\neq 0\\ 1 & \text{при}\quad x=0;\end{cases}$

34. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{при}\quad x\neq 2\\[2mm]1 & \text{при}\quad x=2.\end{cases}$

IV. Намерете производните на функциите:

35. $y=4x^3+6x-\dfrac{1}{x^3}+2$
36. $y=2x^5-3\sqrt[5]{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2$
37. $y=\cos x+\arcsin x$

38. $y = (5x^2 - 9x + 12)\ln(x - 2)$ **39.** $y = e^x(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x)$ **40.** $y = \dfrac{3 + x^2}{\ln x}$

41. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \cos x}$ **42.** $y = \dfrac{\cos 2x}{3x^2 + 4}$ **43.** $y = \sin x^2 + \cos^2 x$ **44.** $y = \dfrac{\operatorname{arctg}(2x + 1)}{1 + 3x}$

45. $y = 5^{x^2} + e^{-x} + \ln(-x)$ **46.** $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ **47.** $y = \ln(\cos 2x + 1) + \operatorname{arcctg}(\ln 3x)$

V. С помощта на разгледаните следствия на теоремите за средните стойности, докажете, че:

48. $\operatorname{arccos} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, & \text{ако} \quad 0 < x \le 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, & \text{ако} \quad -1 \le x < 0; \end{cases}$

49. $\ln(1 + x^2) \le x^2$ за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$;

50. $x - \dfrac{x^3}{3} \le \operatorname{arctg} x \le x - \dfrac{x^3}{6}$ за всяко $x \in (0, 1)$.

VI. С помощта на теоремите на Лопитал, намерете следните граници:

51. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 5x - 6}$ **52.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + e^x)}{x + 1}$ **53.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2}$ **54.** $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$

55. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{e^x}$ **56.** $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg} x}$ **57.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x}$ **58.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2 \sin x - 1}{\cos 3x}$

59. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$ **60.** $\lim\limits_{x \to \infty} x \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)$

VII. Определете дефиниционната област, интервалите на монотонност и локалните екстремуми на следните функции:

61. $y = x^3 - 12x$ **62.** $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ **63.** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 2}$ **64.** $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ **65.** $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

66. $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$

VIII. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функциите:

67. $y = x^4 - 8x^2 + 3$ за $x \in [-1; 2]$ **68.** $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$ за $x \in [-2, 2]$

69. $y = \operatorname{arccos} x^2$ за $x \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right]$

IX. Изследвайте и постройте графиките на функциите:

70. $y = \dfrac{x+3}{x-2}$ **71.** $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ **72.** $y = \dfrac{x-4}{x^2}$ **73.** $y = \dfrac{x^2}{x^2-2x+2}$ **74.** $y = \dfrac{x}{\ln x}$

75. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ **76.** $y = \ln(x^2-4)$ **77.** $y = (x-1)\sqrt{x}$ **78.** $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

X. Решете неопределените интеграли:

79. $\displaystyle\int (5x^2 - 4x + 9)\,dx$ **80.** $\displaystyle\int \left(\cos x + 3\sqrt[4]{x} + \dfrac{1}{3x}\right) dx$ **81.** $\displaystyle\int \left(\dfrac{1}{\sin^2 2x} + \dfrac{5}{\sqrt{1-4x^2}}\right) dx$

82. $\displaystyle\int \cos(3x-1)\,dx$ **83.** $\displaystyle\int (2^x + 3^x)^2\,dx$ **84.** $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$ **85.** $\displaystyle\int (4x+7)^5\,dx$

86. $\displaystyle\int \dfrac{dx}{\cos^2(2x+7)}$ **87.** $\displaystyle\int \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$ **88.** $\displaystyle\int \dfrac{e^x}{2+e^x}\,dx$ **89.** $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$ **90.** $\displaystyle\int \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

91. $\displaystyle\int \dfrac{dx}{x^2 \operatorname{tg}\frac{1}{x}}$ **92.** $\displaystyle\int \dfrac{x - \operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$ **93.** $\displaystyle\int \dfrac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2}}{\cos^2 x}\,dx$

XI. Като интегрирате по части, решете неопределените интеграли:

94. $\displaystyle\int x e^{-x}\,dx$ **95.** $\displaystyle\int x^2 \ln^2 x\,dx$ **96.** $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\,dx$ **97.** $\displaystyle\int x^2 \sin 2x\,dx$

98. $\displaystyle\int x^2 e^{2x}\,dx$ **99.** $\displaystyle\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}\,dx$ **100.** $\displaystyle\int e^x \sin 2x\,dx$ **101.** $\displaystyle\int \sqrt{4+x^2}\,dx$

XII. Решете неопределените интеграли:

102. $\displaystyle\int \dfrac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$ **103.** $\displaystyle\int \dfrac{(x^3+1)\,dx}{x^3 - 5x^2 + 6x}$ **104.** $\displaystyle\int \dfrac{x^4\,dx}{x^2+x-2}$

105. $\displaystyle\int \dfrac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$ **106.** $\displaystyle\int \dfrac{x\,dx}{x^3-1}$ **107.** $\displaystyle\int \dfrac{dx}{x^2-x+2}$ **108.** $\displaystyle\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

109. $\displaystyle\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-x-5}}$

XIII. Решете определените интеграли:

110. $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$ **111.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{1+x^2}$ **112.** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2}\,dx$ **113.** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

114. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$ **115.** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (10x-1)\sin x\,dx$ **116.** $\displaystyle\int_{1}^{e} \dfrac{\ln^4 x}{x}\,dx$ **117.** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

118. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$ **119.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \, dx}{x^2 - 4x + 3}$

XIV. Решете несобствените интеграли:

120. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ **121.** $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$ **122.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **123.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

124. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ **125.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

XV. Намерете лицето на областта D, където:

126. $\quad D: \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le \sin x; \end{cases}$

127. $\quad D$ е областта, заградена от кривите $y = x^2 - x - 6$ и $y = 2x - 2$;

128. $\quad D$ е областта, заградена от кривите $y = x^2 - 3$ и $y = 2$;

129. $\quad D$ е областта, заградена от кривите $y = 2x - x^2$ и $y = -x$.

XVI. Намерете дължината на кривата с уравнение:

130. $\quad y = x^{\frac{3}{2}}$ в интервала $[0, 4]$; **131.** $\quad y = \frac{x^2}{2}$ в интервала $[0, 1]$; **132.** $\quad y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$

в интервала $[1, 2]$.