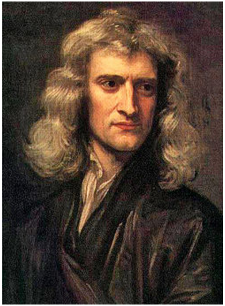
Производна на функция

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

- Понятието производна е било въведено преди около 300 г. от Нютон и Лайбниц – създателите на диференциалното и интегралното смятане.
- Те стигат до това понятие независимо един от друг и по различни пътища.
- Лайбниц го въвежда, като решава задачата за дефиниране на понятието допирателна към графиката на функция.
- Нютон го въвежда, когато решава задачата за дефиниране на понятието моментна скорост на движеща се материална точка.

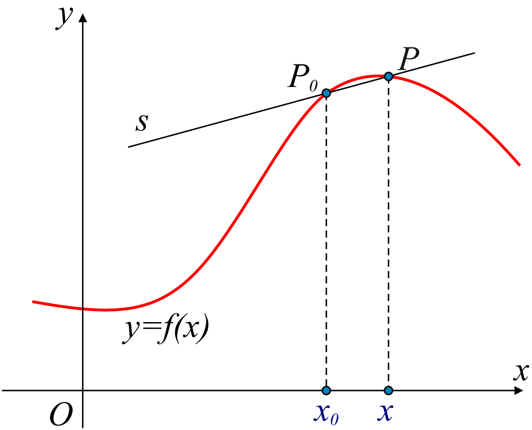


Исак Нютон (1643–1727)

Готфрид Лайбниц (1646–1716)

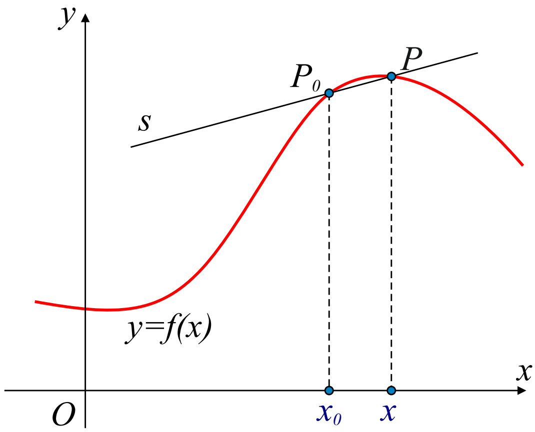
Геометричен смисъл на понятието производна

- Нека е дадена функцията $f(x)$, дефинирана в някоя околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на точката x_0.
- Да разгледаме графиката на $f(x)$ в равнината с координатна система Oxy (Фигура 1). На точката x_0 от оста Ox отговаря точката $P_0(x_0, f(x_0))$ от графиката на функцията. Да вземем някоя друга точка x от оста Ox, принадлежаща на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. На нея отговаря точката $P(x, f(x))$ от графиката.

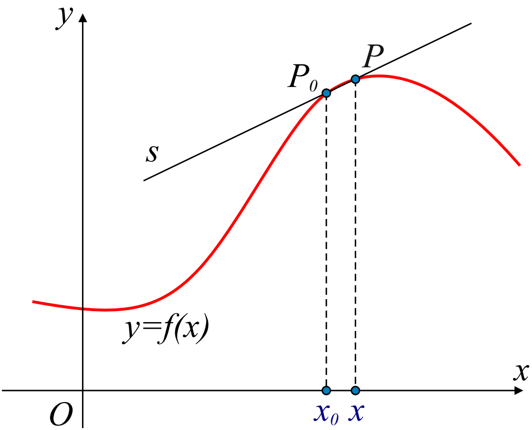


Фигура 1: Графика на функцията $y = f(x)$ и секущата s, определена от P_0 и P

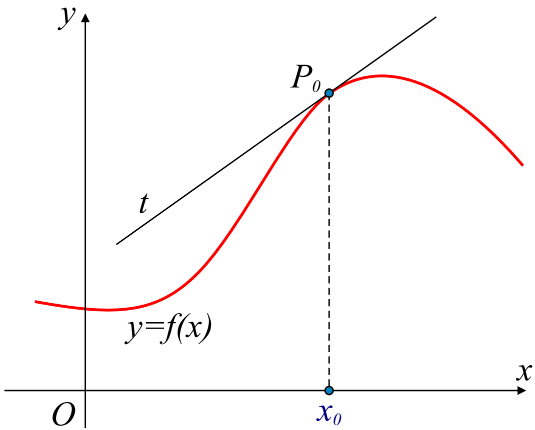
- Двете точки P_0 и P определят една права s, секуща на дадената графика. Ако разглеждаме точката x като променлива и оставим тя да се приближава към постоянната точка x_0, то точката P от графиката ще се движи, а заедно с нея ще променя положението си и секущата s.
- Дали тази секуща ще клони към някакво гранично положение, когато x клони към x_0? Ако това е така, то можем да считаме, че тя клони към една гранична права t, която ще наречем допирателна, прекарана в P_0, към графиката на функцията $f(x)$ (Фигура 2, Фигура 3, Фигура 4).



Фигура 2: Графика на функцията $y = f(x)$ и секущата s, определена от P_0 и P



Фигура 3: Графика на функцията $y = f(x)$ и секущата s, определена от P_0 и P. Точката P „клони“ към P_0



Фигура 4: Графика на функцията $y = f(x)$ и допирателната t в точката P_0

- От аналитичната геометрия е известно, че уравнението на секущата s през точките с координати $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$ е

$$Y - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(X - x_0),$$

където X и Y са текущите координати.

- След преобразуване имаме

$$Y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}X + f(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}x_0.$$

- Означаваме

$$k(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad m(x) = f(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}x_0.$$

Тогава

$$Y = k(x)X + m(x).$$

- Вижда се, че ако съществува границата

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то ще съществуват и границите

$$\lim_{x \to x_0} k(x) = k_0, \qquad \lim_{x \to x_0} m(x) = m_0.$$

Правата $Y = k_0 X + m_0$ е търсената допирателна.

Механичен смисъл на понятието производна

- Нека точката P се движи върху една насочена права и нека нейното движение е еднопосочно. Положението на точката P върху правата се определя от разстоянието ѝ OP до една фиксирана точка O. Нека разстоянието OP е известно във всеки момент, т.е. нека то да бъде дадено като известна функция $f(t)$ на времето t.
- Ако разгледаме различни моменти t_0 и t, то частното

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

представлява отношението на изминатия от точката P път от момента t_0 до момента t към дължината на интервала от време, през който тя се е движела. Това частно се нарича, както знаем, средна скорост на движението за периода от време от момента t_0 то момента t.

- Естествено е да потърсим границата

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

и ако тя съществува, да я наречем скорост на движението на точката P в момента t_0.

Дефиниция 1

Казваме, че функцията $f(x)$ е диференцируема в дадена вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, когато съществува границата

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Тази граница се нарича производна на функцията $f(x)$ в точката x_0 и се бележи с $f'(x_0)$.

Прието е означението

$$x - x_0 = \Delta x.$$

Тогава $x = x_0 + \Delta x$. Ако $x \to x_0$, то $\Delta x \to 0$ и горната граница приема вида

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Последното равенство може да се запише и така:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Ако означим функцията в скобите с

$$\alpha(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0),$$

то имаме $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.
Тогава нарастването на функцията в точката x_0 се представя във вида

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

където $\alpha(\Delta x)$ е безкрайно малка функция при $\Delta x \to 0$.

Така стигаме до втората дефиниция за диференцируема функция в точката x_0.

Дефиниция 2

*Функцията f се нарича **диференцируема** в дадена вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, ако нарастването $f(x_0 + \Delta x)$ на тази функция в точката x_0, отговарящо на нарастването на аргумента Δx, може да се представи във вида*

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

където A е число, независещо от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ е функция на аргумента Δx, безкрайно малка при $\Delta x \to 0$. При това $A = f'(x_0)$.

*Линейната част $A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$ в дясната страна на горното равенство се нарича **диференциал** на функцията f в точката x_0 и се означава с $df(x_0)$.*

Дефиниция 3

Казваме, че функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала (a, b), ако тя е диференцируема във всяка точка от интервала.

- Ако $f(x)$ е диференцируема в един интервал, то нейната производна $f'(x)$, чиято стойност, разбира се, ще зависи от точката x, се явява също така функция на x, дефинирана в този интервал.
- Ще отбележим, че производната на една функция освен чрез $f'(x)$ може да се бележи още с

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{df}{dx},$$

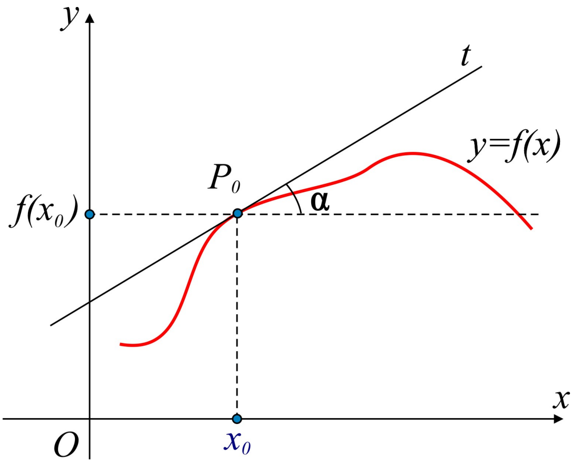
  а когато сме положили $y = f(x)$, също и чрез

$$y' \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}.$$

- След като дефинирахме понятията производна и диференцируема функция, се вижда, че графиката на една функция $f(x)$ притежава допирателна в някоя своя точка $P_0(x_0, f(x_0))$, когато $f(x)$ е диференцируема в x_0. При това уравнението на тази допирателна е

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0).$$

- Веднага можем да дадем известно геометрично тълкуване на $f'(x_0)$. Числото $f'(x_0)$ представлява т.нар. ъглов коефициент в горното уравнение и ще бъде равно, както знаем от аналитичната геометрия, на тангенса на ъгъла, който допирателната сключва с положителната посока на оста Ox (Фигура 5).



Фигура 5: $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$

Основни формули за диференциране

$$(Cf(x))' = Cf'(x) \tag{1}$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \tag{2}$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{3}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{4}$$

$$[F(u)]' = F'(u).u', \quad \text{където} \quad u = u(x) \tag{5}$$

Производни на елементарните функции

$$(C)' = 0 \tag{6}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{7}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{8}$$

$$(e^x)' = e^x \tag{9}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{10}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{11}$$

$$(\sin x)' = \cos x \tag{12}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{13}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{14}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{15}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{16}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{17}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{18}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{19}$$

Примери за пресмятане на производна

Да се пресметнат производните на следните функции:

1) $y = \frac{x}{2}$.

Решение: $y' = \left(\frac{x}{2}\right)' \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}(x)' \overset{(7)}{=} \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

2) $y = 2x^2 + 4x - 7$.

Решение: $y' = (2x^2 + 4x - 7)' \overset{(2)}{=} (2x^2)' + (4x)' - (7)'$

$$\overset{(1)}{=} 2(x^2)' + 4(x)' - (7)' \overset{(7)(6)}{=\!=} 2.2x + 4.1 - 0 = 4x + 4.$$

3) $y = \dfrac{1}{x}.$

Решение: $y' = (x^{-1})' \overset{(7)}{=} (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

4) $y = \dfrac{1}{1+x^2}.$

Решение: $y' = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' \overset{(4)}{=} \dfrac{(1)'(1+x^2) - 1.(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$

$$\overset{(6)(2)}{=\!=} \frac{0.(1+x^2) - [(1)' + (x^2)']}{(1+x^2)^2}$$

$$\overset{(6)(7)}{=\!=} \frac{0 - [0 + 2x]}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

5) $$y = \frac{x^2-1}{x^2+x+1}.$$

Решение: Имаме

$$y' = \left(\frac{x^2-1}{x^2+x+1}\right)'$$

$$\overset{(4)}{=} \frac{(x^2-1)'(x^2+x+1)-(x^2-1).(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{[(x^2)'-(1)'](x^2+x+1)-(x^2-1).[(x^2)'+(x)'+(1)']}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\overset{(6)(7)}{=\!=} \frac{[2x-0](x^2+x+1)-(x^2-1).[2x+1+0]}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3+2x^2+2x-(2x^3+x^2-2x-1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

6) $y = \sqrt{x}.$

Решение: $y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \overset{(7)}{=} \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

7) $y = \sqrt[3]{x}.$

Решение: $y' = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' \overset{(7)}{=} \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

8) $y = x \sin x.$

Решение: $y' = (x \sin x)' \overset{(3)}{=} (x)' \sin x + x(\sin x)'$

$$\overset{(7)(12)}{=\!=} 1.\sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x.$$

9) $y = \sqrt{2x+3}$.

Решение: В този случай имаме сложна функция от вида $F(u(x))$.

$$y' = \left((2x+3)^{\frac{1}{2}}\right)' = [u = 2x+3] = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' \overset{(7)(5)}{=} \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}.u'$$

$$= \frac{1}{2}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}.(2x+3)' \overset{(2)}{=} \frac{1}{2\sqrt{2x+3}}[(2x)' + (3)']$$

$$\overset{(1)(6)(7)}{=\!=\!=} \frac{1}{2\sqrt{2x+3}}.2 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}.$$

10) $y = \sin^2 x.$

Решение: $y' = \left(\sin^2 x\right)' = [u = \sin x] = (u^2)' \overset{(7)(5)}{=\!=} 2u.u'$

$$= 2\sin x.(\sin x)' \overset{(12)}{=\!=} 2\sin x \cos x.$$

11) $y = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}^2 x.$

Решение: $y' = \left(\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}^2 x\right)' \overset{(2)}{=} (\operatorname{tg} 2x)' + (\operatorname{tg}^2 x)'.$

Имаме

$$(\operatorname{tg} 2x)' = [u = 2x] = (\operatorname{tg} u)' \overset{(14)(5)}{=\!=\!=} \frac{1}{\cos^2 u}.u'$$

$$= \frac{1}{\cos^2 2x}.(2x)' \overset{(1)(7)}{=\!=} \frac{2}{\cos^2 2x},$$

$$(\operatorname{tg}^2 x)' = [u = \operatorname{tg} x] = (u^2)' \overset{(7)(5)}{=\!=} 2u.u' = 2\operatorname{tg} x.(\operatorname{tg} x)'$$
$$\overset{(14)}{=\!=} 2\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Така получаваме

$$y' = \frac{2}{\cos^2 2x} + \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}.$$

12) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

Решение: $y' = \left(\operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left[u = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$$= (\operatorname{arctg} u)' \overset{(18)(5)}{=\!=} \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'$$

$$\overset{(4)}{=} (1-x^2) \cdot \frac{(x)'\sqrt{1-x^2} - x(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$\overset{(7)(5)}{=\!=} \sqrt{1-x^2} - x.\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)'$$

$$\overset{(2)(6)(7)}{=\!=\!=} \sqrt{1-x^2} - x.\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (0-2x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

13) $y = \ln(\ln(\ln x))$.

Решение: $y' = [\ln(\ln(\ln x))]' = [u = \ln(\ln x)]$

$$= (\ln u)' \overset{(11)(5)}{=\!=} \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot [(\ln(\ln x))]'$$

$$= [u = \ln x] = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot (\ln u)'$$

$$\overset{(11)(5)}{=\!=} \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)'$$

$$\overset{(11)}{=\!=} \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

14) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

Решение: Имаме

$$\begin{aligned}
y' &= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right]' \\
&= \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^x - e^{-x}.(-x)')(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}(-x)')}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.
\end{aligned}$$

Производни от по-висок ред

- Видяхме, че ако функцията $f(x)$ е диференцируема в един интервал (т.е. във всяка точка от него), то нейната производна $f'(x)$, чиято стойност, разбира се, ще зависи от точката x, се явява също така функция на x, дефинирана в този интервал. Тя от своя страна също може да бъде диференцируема. Нейната производна се нарича втора производна на функцията $f(x)$ и се бележи с $f''(x)$ или $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ (когато пишем $y = f(x)$, тя се бележи също с y'' или $\frac{d^2y}{dx^2}$).
- Производната пък на втората производна (ако съществува) се нарича трета производна на $f(x)$ и т.н.

- Изобщо n-тата производна на дадена функция $f(x)$ се дефинира като производна на нейната $(n-1)$-ва производна и се бележи с някой от знаците

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad y^{(n)} \quad \text{или} \quad \frac{d^n y}{dx^n}.$$

- Производната $f'(x)$ се нарича още първа производна на $f(x)$.
- Понякога се приема самата функция $f(x)$ да се разглежда като своя нулева производна, така че $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Примери

1. Ако $f(x) = e^x$, то $f^{(n)}(x) = e^x$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$.
2. Нека $f(x) = \ln(1 + x)$. Имаме $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ при $x > -1$. Като намерим няколко последователни производни лесно се досещаме, че

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1!)}{(1+x)^n} \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \ldots \quad (x > -1). \tag{20}$$

За да се убедим в правилността на тази формула, допускаме, че тя е вярна за някое n, и чрез диференциране получаваме

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!((1+x)^{-n})' \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1} \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Получихме същия резултат, който щяхме да получим, ако във формулата (20) бяхме заместили n с $n+1$. С това формулата е доказана.

Изчисление на производни с Mathematica

- D$[expr, var]$ изчислява производната на $expr$ по отношение на променливата var
- Пример:

In[13]:= $\mathbf{D}\left[\frac{x+7}{x}, x\right]$

Out[13]= $\frac{1}{x} - \frac{7+x}{x^2}$