

Курсова работа по Геометрия
За специалност „Информатика“
2 курс, задочно обучение

Изготвил:Емил Медаров

ФН:2001262013

**КУРСОВА РАБОТА 3 по ГЕОМЕТРИЯ за специалност
ИНФОРМАТИКА II курс задочно обучение**

1. Дадени са контролните точки $(0; -2)$, $(2; -2)$, $(2; 2)$, $(-2; 2)$, $(-2; -2)$ и $(0; -2)$ и възловата редица $u_0 = u_1 = u_2 = 0$; $u_3 = 0,25$; $u_4 = 0,5$; $u_5 = 0,75$; $u_6 = u_7 = u_8 = 1$. За дефинираната по този начин стегната Б-сплайн крива $C(u)$ от втора степен да се пресметне:

- а) $C(0,4)$ като се използват основните Б-сплайн функции $N_{i,2}(0,4)$.
- б) $C(0,4)$ като се използва алгоритъма на де Боор.
- в) $C(0,25)$ като се използва алгоритъма на де Боор.

Курсова работа 3 по
Геометрия за специалност
Информатика II курс задочно
обучение

Зад. 1

Контролните точки са

$$P_0(0; -2) \quad P_1(2; -2) \quad P_2(2; 2) \quad P_3(-2; 2) \\ P_4(-2; -2) \quad P_5(0; -2)$$

Възловата редица е:

$$u_0 = u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = 0,25; \quad u_4 = 0,5; \\ u_5 = 0,75; \quad u_6 = u_7 = u_8 = 1$$

$m = n + p + 1$, $m+1$ е броят на
възлите (u_0, u_1, \dots, u_m)

$$m+1=9, \quad m=8$$

$m+1$ - броят на контролните точки

$$n+1=6 \quad n=5$$

$$p=2$$

$$\Rightarrow m = n + p + 1$$

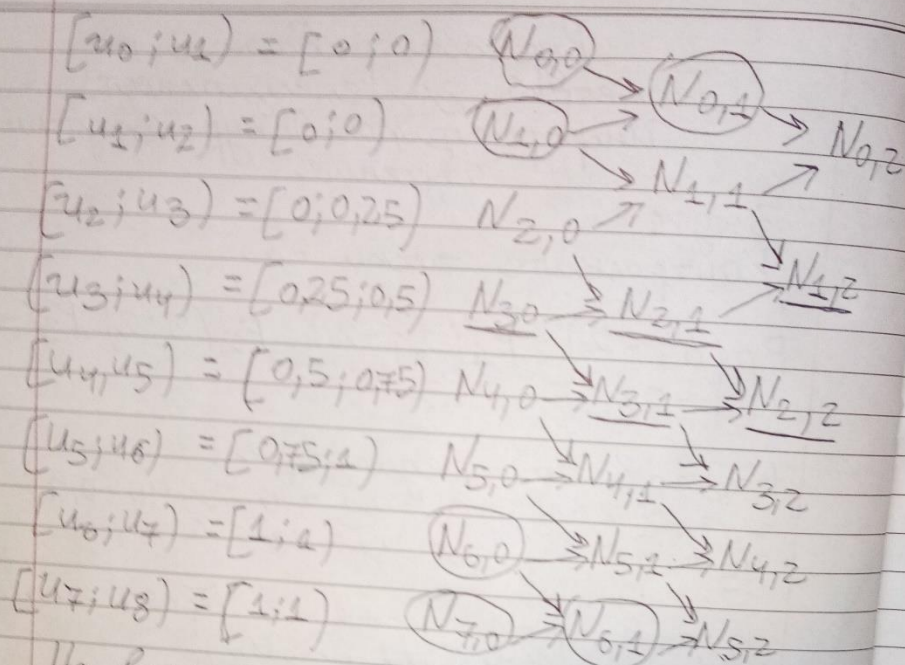
$$8 = 5 + 2 + 1 \Rightarrow \text{функцията}$$

е зададена коректно.

Крайната на интервала $u \in [0; 1]$ трябва да са с кратност $p+1$. Това е изпълнено $2+1=3$

$$u_0 = u_1 = u_2 = 0 \quad u_6 = u_7 = u_8 = 1$$

За пресмятането на базовите
Б-сплайни функции използваме системата



На всеки интервал съответства
 Б-сплайн функция от нулев ред.
 Заградените $N_{0,0}, N_{1,0}, N_{6,0}, N_{7,0}$
 съответстват на формалния (празен)
 интервали, затова те са равни на
 0. За другите $N_{2,0}, N_{3,0}, N_{4,0},$
 $N_{5,0}$ базови Б-сплайн функции
 от нулев ред имаме:

$$\begin{aligned}
 N_{2,0} &= \begin{cases} 1, & \text{ако } u \in [0; 0,25) \\ 0, & \text{ако } u \notin [0; 0,25) \end{cases} \\
 N_{3,0} &= \begin{cases} 1, & \text{ако } u \in [0,25; 0,5) \\ 0, & \text{ако } u \notin [0,25; 0,5) \end{cases} \\
 N_{4,0} &= \begin{cases} 1, & \text{ако } u \in [0,5; 0,75) \\ 0, & \text{ако } u \notin [0,5; 0,75) \end{cases} \\
 N_{5,0} &= \begin{cases} 1, & \text{ако } u \in [0,75; 1) \\ 0, & \text{ако } u \notin [0,75; 1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

т.е. всяка ф-я $N_{i,0}^0 (i=2,3,4,5)$ е
равна на 1 в нейния интервал
и на 0 вън от него.

Да пресметнем базовите Б-сплайн
ф-ии $N_{i,1}^0(u)$.

Всяка от тях зависи от тези
функции от нулев ред. $N_{0,1}$ зависи
от $N_{0,0}$ и $N_{1,0}$, които са 0.

\Rightarrow и тя е 0. Аналогично $N_{0,1}$ и
така, че ще пресметаме $N_{1,1}, N_{2,1},$
 $N_{3,1}, N_{4,1}$ и $N_{5,1}$.

Използваме ф-лата

$$N_{i,p}^0(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}^0(u) + \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_{i+p-1}} N_{i+1,p-1}^0(u)$$

$$N_{0+1,p-1}^0(u)$$

$$N_{1,1} = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} N_{1,0} + \frac{u_3 - u}{u_3 + u_2} N_{2,0}$$

И-и
 $N_{1,0} = 0, N_{2,0} \neq 0$ за $u \in [0; 0,25]$

$$N_{1,1} = \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} \cdot 1 = \frac{0,25 - u}{0,25 - 0} \cdot 1 = 1 - u \text{ за } u \in [0; 0,25]$$

$$N_{2,1} = \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} N_{3,0}$$

$$\text{Тої кат } N_{2,0} = \begin{cases} 1 & \text{за } u \in [0; 0,25) \\ 0 & \text{за } u \in [0,25; 0,5) \end{cases}$$

$$N_{3,0} = \begin{cases} 0 & \text{за } u \in [0; 0,25) \\ 1 & \text{за } u \in [0,25; 0,5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_{2,1} = \frac{u-0}{0,25-0} \cdot 1 + \frac{0,5-u}{0,5-0,25} \cdot 0 =$$

$$\text{за } (0; 0,25)$$

$$= \frac{u}{\frac{1}{4}} = 4u$$

$$N_{2,1} = \frac{u-0}{0,25-0} \cdot 0 + \frac{0,5-u}{0,5-0,25} \cdot 1 =$$

$$\text{за } u \in [0,25; 0,5)$$

$$= \frac{1-u}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{1-2u}{\frac{1}{4}} = \frac{(1-2u) \cdot \frac{2}{1}}{\frac{1}{4}} =$$

$$= 2-4u$$

$$N_{2,1}(u) = \begin{cases} 4u & u \in [0; 0,25) \\ 2-4u & u \in [0,25; 0,5) \end{cases}$$

$$N_{3,1}(u) = \frac{u-u_3}{u_4-u_3} N_{3,0}(u) + \frac{u_5-u}{u_5-u_4} N_{4,0}(u)$$

$$N_{4,0} = \begin{cases} 0 & u \in [0,25; 0,5) \\ 1 & u \in [0,5; 0,75) \end{cases}$$

$$N_{3,1}(u) = \frac{u-0,25}{0,5-0,25} \cdot 1 + \frac{0,75-u}{0,75-0,5} \cdot 0 =$$

$$\text{за } u \in [0,25; 0,5)$$

$$= \frac{u-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{4u-1}{\frac{1}{4}} = 4u-1$$

$$N_3(u) = \frac{0 - 0,25}{0,5 - 0,25} \cdot 0 + \frac{0,75 - u}{0,75 - 0,5} \cdot 1 =$$

$$u \in [0,5; 0,75)$$

$$= \frac{3 - u}{4} = \frac{3 - 4u}{4} = 3 - 4u$$

$$N_{3,1}(u) = \begin{cases} 4u - 1 & u \in [0,25; 0,5) \\ 3 - 4u & u \in [0,5; 0,75) \end{cases}$$

$$N_{4,1}(u) = \frac{u - u_4}{u_5 - u_4} N_{4,0}(u) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_5} N_{5,0}(u)$$

$$N_{5,0} = \begin{cases} 0, & u \in [0,5; 0,75) \\ 1, & u \in [0,75; 1) \end{cases}$$

$$N_{4,1}(u) = \frac{u - 0,5}{0,75 - 0,5} \cdot 1 + \frac{0 - u}{0 - 0,75} \cdot 0 =$$

$$= \frac{u - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{2u - 1}{\frac{1}{4}} = \frac{2u - 1}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{4}{1} = \underline{\underline{4u - 2}}$$

$$N_{4,1}(u) = \frac{u - 0,5}{0,75 - 0,5} \cdot 0 + \frac{0 - u}{0 - 0,75} \cdot 1 =$$

$$u \in [0,75; 1)$$

$$= \frac{-u}{-\frac{3}{4}} = \frac{4u}{3}$$

$$\Rightarrow N_{4,1}(u) = \begin{cases} 4u - 2, & u \in [0,5; 0,75) \\ \frac{4u}{3}, & u \in [0,75; 1) \end{cases}$$

$$N_{5,1}(u) = \frac{u - u_5}{u_6 - u_5} N_{5,0}(u) + \frac{u_7 - u}{u_7 - u_6} N_{6,0}(u)$$

$$N_{5,1}(u) = \frac{u - 0,75}{1 - 0,75} \cdot 1 + \frac{1 - u}{1 - 1} \cdot 0 =$$

$$= \frac{u - \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{4u - 3}{1} = 4u - 3$$

$$0,4 \in [0,25; 0,5]$$

$$N_{2,1}(u) = 2 - 4u, N_{2,1}(0,4) = 2 - 4 \cdot 0,4 = 2 - 1,6 = 0,4$$

$$N_{3,1}(u) = 4u - 1, N_{3,1}(0,4) = 4 \cdot 0,4 - 1 = 1,6 - 1 = 0,6$$

Рассчитаем $N_{1,2}(u)$, $N_{2,2}(u)$ и $N_{3,2}(u)$

$$N_{1,2} = \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u)$$

$$N_{1,2}(0,4) = \frac{0,5 - 0,4}{0,5 - 0} N_{1,1} + \frac{0,5 - 0,4}{0,5} N_{2,1} = \frac{0,1}{0,5} \cdot 0,4 = 0,08$$

$$N_{2,2}(u) = \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} N_{2,1} + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_3} N_{3,1}$$

$$N_{2,2}(0,4) = \frac{0,4 - 0}{0,5 - 0} \cdot 0,4 + \frac{0,75 - 0,4}{0,75 - 0,25} \cdot 0,6 = \frac{0,4}{0,5} \cdot 0,4 + \frac{0,35}{0,5} \cdot 0,6 = 0,32 + 0,42 = 0,74$$

$N_{3,0}$

$$N_{3,2}(u) = \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} N_{3,1} + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_4} N_{4,1}$$

$$N_{3,2}(0,4) = \frac{0,4 - 0,25}{0,75 - 0,25} \cdot 0,6 = \frac{0,15}{0,5} \cdot 0,6 = 0,18$$

$$N_{1,2}(0,4) + N_{2,2}(0,4) + N_{3,2}(0,4) = 1$$

$$C(0,4) = N_{1,2} P_1 + N_{2,2} P_2 + N_{3,2} P_3 =$$

$$= 0,08(2; -2) + 0,74(2; 2) + 0,18(-2; 2) =$$

$$= (0,16; -0,16) + (1,48; 1,48) + (0,36; 0,36) =$$

$$= (1,28; 1,68)$$

II етап

$N_{2,1}(u)$

$N_{3,0}(0,4) = 1$, защото $0,4 \in [0,25; 0,5]$
Пресмятаме $N_{2,1}(0,4)$ и $N_{3,1}(0,4)$:

$N_{2,1}(0,4)$

$$N_{2,1}(0,4) = \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} N_{2,0} + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} N_{3,0}$$

$$\text{Но } N_{2,0}(0,4) = 0 \Rightarrow N_{2,1}(0,4) = \frac{0,5 - 0,4}{0,5 - 0,25}$$

$$= \frac{0,10}{0,25} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$N_{3,1}(0,4)$

За $N_{3,1}(0,4)$ ще използваме
свойството: за $\forall u \in [0,4]$ сумата
от всички $N_{i,p}$ е равна на 1

$$N_{2,1}(0,4) + N_{3,1}(0,4) = 1$$

$$\Rightarrow N_{3,1}(0,4) = 1 - 0,4 = \underline{\underline{0,6}}$$

Преземаме базовите Б-сигнали
 φ -ии от втори ред $N_{1,2}(0,4)$, $N_{2,2}(0,4)$
 и $N_{3,2}(0,4)$

$$N_{1,2}(0,4) = \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} N_{1,1}(0,4) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} N_{2,1}(0,4)$$

$$\text{но } N_{1,1}(0,4) = 0$$

$$\Rightarrow N_{1,2} = \frac{0,5 - 0,4}{0,5 - 0} \cdot 0,4 = \frac{0,1}{0,5} \cdot 0,4 =$$

$$= \frac{0,4}{5} = 0,08$$

$$N_{3,2}(0,4) = \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} N_{3,1}(0,4) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_4} N_{4,1}(0,4)$$

$$= \frac{0,4 - 0,25}{0,75 - 0,25} \cdot 0,6 = \frac{0,15}{0,5} \cdot 0,6 = 0,18$$

$$N_{2,2}(u) = \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} N_{2,1} + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_3} N_{3,1}$$

$$N_{2,2}(0,4) = \frac{0,4 - 0}{0,5 - 0} \cdot 0,4 + \frac{0,75 - 0,4}{0,75 - 0,25} \cdot 0,6$$

$$= \frac{0,4}{0,5} \cdot 0,4 + \frac{0,35}{0,5} \cdot 0,6 =$$

$$= 0,32 + 0,42 = \underline{\underline{0,74}}$$

$$C(0,4) = N_{1,2}(0,4)P_1 + N_{2,2}(0,4)P_2 +$$

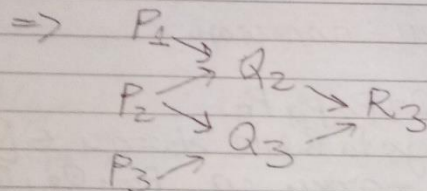
$$N_{3,2}(0,4)P_3 = 0,08 \cdot (2; 2) + 0,74 \cdot (2; 2) +$$

$$0,18 \cdot (-2; 2) = (0,16; -0,16) + (1,48; 1,48) +$$

$$+ (-0,36; 0,36) = (1,28; 1,68)$$

$u_0 = u_1 = u_2$	u_3	u_4	u_5	$u_6 = u_7 = u_8$
0	0,25	0,5	0,75	1

$t = 0,4 \in [0,25; 0,5) = [u_3; u_4)$, а $p=2$,
 то засегнатите контролни точки са
 P_3, P_2 и P_1
 Алгоритъмът на де Боор изисква $t=0,4$
 да бъде взет с такава кратност
 като $p=2$



$$Q_i = (1 - a_i) P_{i-1} + a_i P_i$$

$$a_i = \frac{t - u_i}{u_{i+p} - u_i}; \quad k - p + 1 \leq i \leq k$$

$$Q_3 = (1 - a_3) P_2 + a_3 P_3; \quad a_3 = \frac{t - u_3}{u_5 - u_3}$$

$$a_3 = \frac{0,4 - 0,25}{0,75 - 0,25} = \frac{0,15}{0,5} = 0,3$$

$$Q_3 = (1 - 0,3) \cdot (2; 2) + 0,3(-2; 2) =$$

$$= 0,7(2; 2) + 0,3(-2; 2) =$$

$$= (1,4; 1,4) + (-0,6; 0,6) = \underline{(0,8; 2)}$$

$$Q_2 = (1 - a_2) \cdot P_1 + a_2 P_2$$

$$a_2 = \frac{t - u_2}{u_4 - u_2} = \frac{0,4 - 0}{0,5 - 0} = \frac{0,4}{0,5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$Q_2 = (1 - 0,8)(2; -2) + 0,8(2; 2) =$$

$$= 0,2(2; -2) + 0,8(2; 2) =$$

$$= (0,4; -0,4) + (1,6; 1,6) = \underline{(2; 1,2)}$$

Така след първото добавяне на $t=0,4$ кривата C се определя от сл. възлов вектор

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} V_0 = V_1 = V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 = V_8 = V_9 \\ \hline 0 & 0,25 & 0,4 & 0,5 & 0,75 & 1 \end{array}$$

и контролен полигон

$P_0 P_1 Q_2 Q_3 P_3 P_4 P_5$
при второ добавяне $t=0,4 \in [V_4, V_5)$ засегнати точки са P_3, Q_3, Q_2

изчисляване

$$a_3 = \frac{t - V_3}{V_5 - V_3} = \frac{0,4 - 0,25}{0,5 - 0,25} = \frac{0,15}{0,25} = 0,6$$

$$a_4 = \frac{t - V_4}{V_5 - V_4} = \frac{0,4 - 0,4}{0,75 - 0,4} = 0$$

$$\begin{aligned} R_3 &= (1 - a_3) Q_2 + a_3 Q_3 = \\ &= (1 - 0,6) \cdot (2; 1,2) + 0,6(0,8; 2) = \\ &= 0,4(2; 1,2) + 0,6(0,8; 2) = \\ &= (0,8; 0,48) + (0,48; 0,12) = \\ &= (1,28; 0,6) = C(0,4) \end{aligned}$$

б) $C(0,25)$ ще пресметнем като направим схемата и подкрепяме всички ненулеви $N_{ip}(0,25)$ от ред 0,1 и 2

$$\begin{array}{lcl}
 u_0; u_1 = [0; 0] & N_{0,0} & \rightarrow N_{0,1} \rightarrow N_{0,2} \\
 u_1; u_2 = [0; 0] & N_{1,0} & \rightarrow N_{1,1} \rightarrow N_{1,2} \\
 u_2; u_3 = [0; 0,25] & N_{2,0} & \rightarrow N_{2,1} \rightarrow N_{2,2} \\
 u_3; u_4 = [0,25; 0,5] & N_{3,0} & \rightarrow N_{3,1} \rightarrow N_{3,2} \\
 u_4; u_5 = [0,5; 0,75] & N_{4,0} & \rightarrow N_{4,1} \rightarrow N_{4,2} \\
 u_5; u_6 = [0,75; 1] & N_{5,0} & \rightarrow N_{5,1} \rightarrow N_{5,2} \\
 u_6; u_7 = [-1; 1] & N_{6,0} & \rightarrow N_{6,1} \rightarrow N_{6,2} \\
 u_7; u_8 = [-1; 1] & N_{7,0} & \rightarrow N_{7,1} \rightarrow N_{7,2}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 N_{3,0}(0,25) &= 1, \text{ защото } 0,25 \in [0,25; 0,5] \\
 N_{2,1}(0,25) &= \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} N_{2,0}(0,25) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} N_{3,0}(0,25) \\
 N_{3,0}(0,25) &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{2,1}(0,25) &= 0 \\
 \Rightarrow N_{2,1}(0,25) &= \frac{0,5 - 0,25}{0,5 - 0,25} \cdot 1 = 1 \\
 \text{Тогава поради } N_{2,1}(0,25) + N_{3,2}(0,25) &= 1 \\
 \Rightarrow N_{3,1}(0,25) &= 0 \text{ (понеже се} \\
 \text{така, защото } u = 0,25 \text{ е взет)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{1,2}(0,25) &= \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} N_{4,1}(0,25) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} N_{2,1}(0,25) \\
 N_{1,2}(0,25) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{1,1}(0,25) &= 0 \Rightarrow N_{1,2}(0,25) = \frac{0,5 - 0,25}{0,5 - 0,25} \\
 &= \frac{0,25}{0,50} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$N_{2,2}(0,25) = \frac{u_1 - u_2}{u_4 - u_2} N_{2,1}(0,25) + \frac{u_5 - u_1}{u_5 - u_3}$$

$$N_{3,1}(0,25) = \frac{u_4 - u_2}{u_4 - u_2}$$

$$= \frac{0,25 - 0}{0,5 - 0} \cdot 1 + \frac{0,75 - 0,25}{0,75 - 0,25} \cdot 0 = \frac{0,25 - 0}{0,5} = \frac{1}{2}$$

$$N_{3,2}(0,25) = \frac{u_1 - u_3}{u_5 - u_3} N_{3,1}(0,25) + \frac{u_6 - u_1}{u_6 - u_4}$$

$$N_{4,1}(0,25) = \frac{0,25 - 0,25}{0,75 - 0,25} \cdot 0 + \frac{1 - 0,25}{1 - 0,5} = 0$$

$$C(0,25) = N_{1,2}(0,25)P_1 + N_{2,2}(0,25)P_2 + N_{3,2}(0,25)P_3 =$$

$$= \frac{1}{2}(2; -2) + \frac{1}{2}(2; 2) + 0 \cdot (-2; 2) =$$

$$= (1; -1) + (1; 1) = \underline{\underline{(2; 0)}}$$