Случайни величини

Определение

Нека S е множеството от всички елементарни събития.

Случайна величина е **числова функция**, дефинирана върху множеството S,

т.е. тя съпоствя на всеки елементарен изход реално число

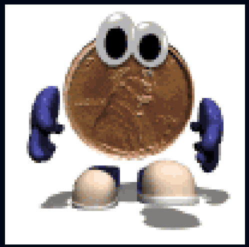
Примери:

Опит: Хвърляне на монета един път

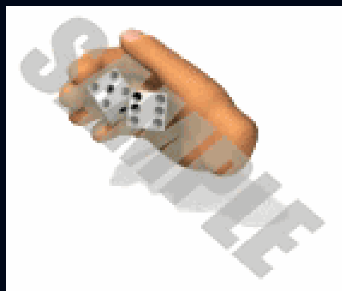
S= {Л, Г}

X={брой лица} 0 1

Y={брой гербове} 1 0



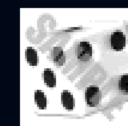
Опит: хвърляне на зарче един път



S= {1, 2, 3, 4, 5, 6}

1, 2, 3, 4, 5, 6

X={брой на точките на лицевата страна на зара}



S= {1, 2, 3, 4, 5, 6}

1 0

Y={брой паднали се лицеви страни с точно една точка върху тях}

Опит: Случайно избрано топче от кутия с 5 червени и 2 сини

X={брой сини топчета измежду избраните}

Стойности : 1, 0

Опит: Време на събуждане точно определена сутрин

Стойности :безброй много

Пример: Определете случайна величина

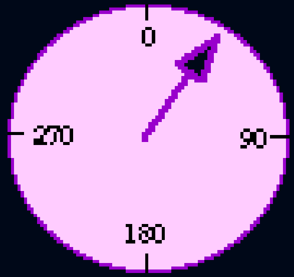
1. монета се подхвърля два пъти

X={ брой паднали се лица}

2. Монета се подхвърля, при което тя се завърта.

X={време от момента на подхвърляне до момента на покой }

3. Кръг, разделен на 4 части е завъртян по посока на часовниковата стрелка



X={квадранта, в който показва стрелката, след като кръгът спира}

4. Студент се явява на изпит.

X={оценката}

5. Студент отива на среща с приятелка.

X={времето, когато приятелката пристига}

Теорема . *Линейна комбинация, произведение, минимум, максимум и функция на сл.в. е сл.в.*

Видове случайни величини

Дискретни

Случайна величина, която приема само краен брой или изброимо стойности

Дискретната случайна величина обикновено е случайна величина, чийто стойности са резултат от броене.

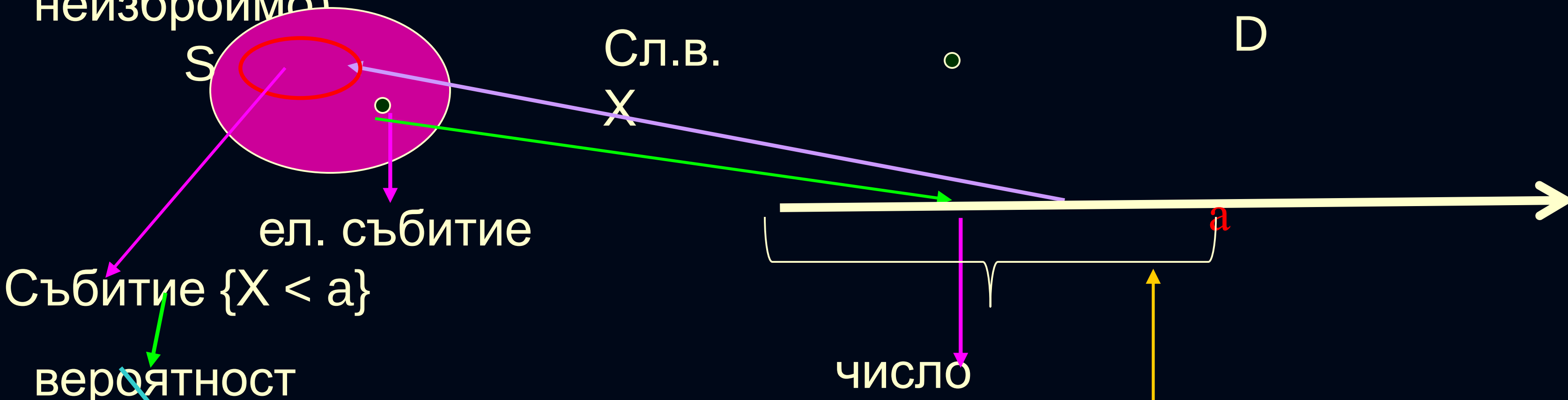
Непрекъснати

Случайна величина, чийто стойности са всички числа от даден интервал (или интервали), които могат да са крайни или безкрайни

Непрекъсната случайна величина обикновено е случайна величина, чийто стойности са резултат от измервания.

Функция на разпределение

Нека X е сл.в., дефинирана в пространството от ел.изходи S и със стойности в множеството от числа D (крайно, изброимо или неизброимо)



Нека *a* е произволно число => M={всички числа от реалната права, които са ≤ a}

$F(a)=P(X \le a)$

- **дефиниционно множество:** всяко реално a
- **множество от стойности:** [0.1]

F(a)=P(X≤a) => вероятност

Дефиниция: Ф.р. на една сл. в. X е **F(x)= P({ω : X(ω) ≤ x) = P(X ≤ x)** за всяко реално x

Пример:

Опит: Хвърляне на монета един път

Изходи Л,Г — X={брой лица} → **Стойности 0,1**

0 1

F(-1)=P(X ≤ -1)= P(невъзможното)=0 F(-3)=P(X ≤ -3)= P(невъзможното)=0

Няма изход на който да се съпоставя число ≤ -1

Ако x<0 , то F(x)=P(X ≤ x)= P(невъзможното)=0

F(0,3)=P(X ≤ 0,3)= P(Г)=0,5 F(0,8)=P(X ≤ 0,8)= P(Г)=0,5

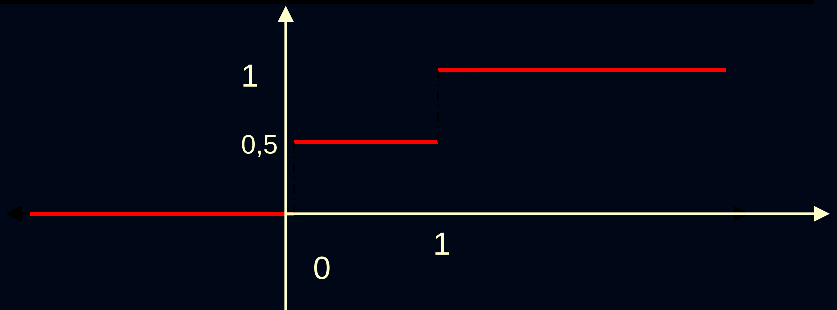
На Г се съпоставя числото 0, което е < 0,3

Ако 0<x<1 , то F(x)=P(X ≤ x)= P(Г)=0,5

F(2)=P(X ≤ 2)= P(Г,Л)=1 F(7)=P(X ≤ 7)= P(Г,Л)=1

На Г се съпоставя числото 0, на Л се съпоставя числото 1, и двете

Ако x>1 , то F(x)=P(X ≤ x)= P(Л, Г)=1



$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{Ако } x<0 \\ 0{,}5 & \text{Ако } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{Ако } x \ge 1 \end{cases}$$

Пример:

Опит: хвърляне на зарче един път

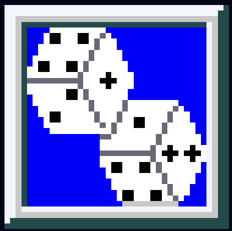
X={брой на точките на лицевата страна на зара}

S= {1; 2; 3; 4; 5; 6} → 1; 2; 3; 4; 5; 6

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{Ако } x < 1 \\ 1/6 & \text{Ако } 1 \le x < 2 \\ 2/6 & \text{Ако } 2 \le x < 3 \\ 3/6 & \text{Ако } 3 \le x < 4 \\ 4/6 & \text{Ако } 4 \le x < 5 \\ 5/6 & \text{Ако } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{Ако } x \ge 6 \end{cases}$$

$F(2,78)=P(X<2,78)= P(\mathbf{1,2})=2/6$

На 1 се съпоставя числото 1, на 2 се съпоставя числото 2, и двете са $< 2,78$



Свойства на ф.р.

Дефиниция: Ф.р. на една сл. в. X е F(x)=**P(X ≤ x)** за всяко реално x

Свойство 1.

Дефиниционно множество : множеството на реалните числа

Свойство 2.

Множество от стойности : [0,1]

Свойство 3.

$F(-\infty) = 0$

$F(+\infty) = 1$

Свойство 4. $P(X > a) = 1 - F(a)$

От дефиницията $P(X>a)=1-P(X\leq a)=1-F(a)$

Свойство 5.

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Свойство 6.

Функцията на разпределение F(x) е НЕНАМАЛЯВАЩА

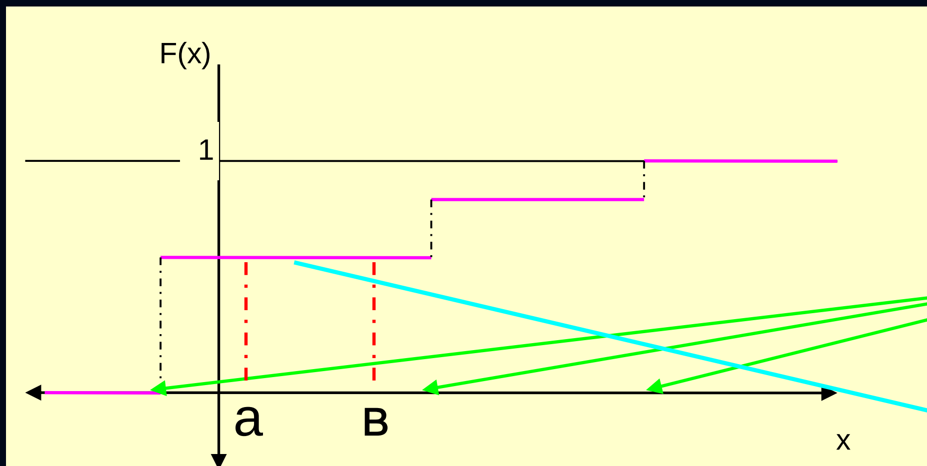
ВАЖНО!!!

Нека функцията на разпределение F(x) е константа в даден интервал (а,в)

$$P(a<X \leq b)=F(b) - F(a)=0$$

ИЗВОД: Случайната величина Х не приема стойности в интервала (а,в)

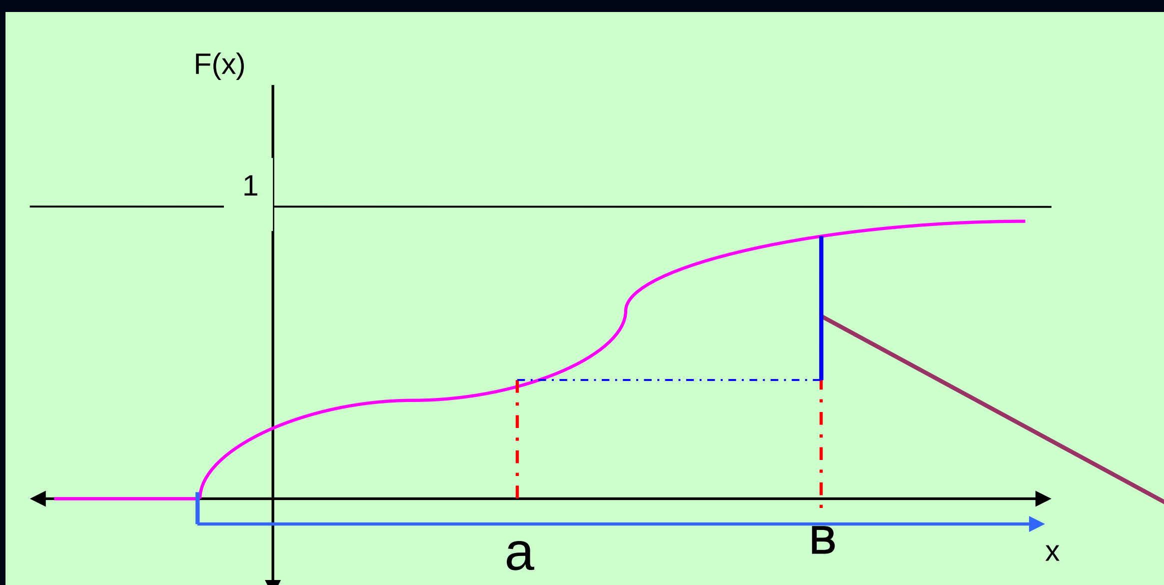
Графика на ф.р.



Дискретна сл.в.

Стойности на сл.в.

$P(а < X \leq в) = F(в) - F(а) = 0$



непрекъсната сл.в.

Стойности на сл.в.

$P(а < X \leq в) = F(в) - F(а)$

Дискретни разпределения

Дискретна случайна величина = която приема **крайн брой** или **изброимо много** стойности

Ред на разпределение на дискретна сл.в.= съвкупност от стойности+вероятности ; може да бъде във формата на

- таблица

стойност (x)	x_1	x_2	…….	x_n
вероятност (p)	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	……	$P(X=x_n)$

- математическа формула

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Свойства на реда на разпределение

стойност (x)	x_1	x_2	....	x_n
вероятност (p)	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	......	$P(X=x_n)$

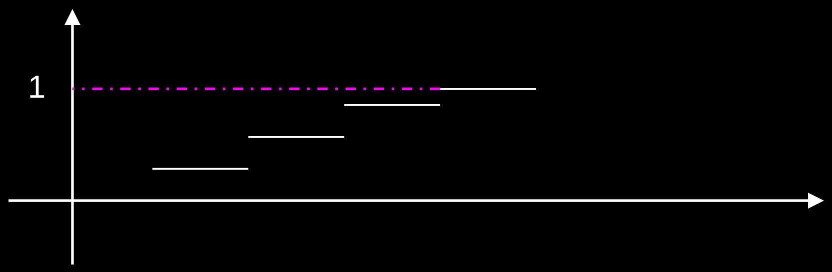
Свойство 1. $x_i \neq x_k$

Свойство 2. $\sum_i p_i = 1$ $\quad 0 \leq p_i = P(X = x_i) \leq 1$

Функция на разпределение

$$F(x) = \begin{cases} 0 & npu \quad x < x_1 \\ p_1 & npu \quad x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & npu \quad x_2 \leq x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & npu \quad x_3 \leq x < x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 1 & npu \quad x \geq x_n \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{j;\, x_j \leq x} p_j$$



Примери

Опит: Хвърляне на монета един път

X={брой лица}

стойност (x)	0	1
вероятност (p)	0.5	0.5

$$F(x)=\begin{cases}0 & при & x<0\\ 0,5 & при & 0\le x<1\\ 1 & при & x\ge 1\end{cases}$$

Y={брой гербове}

Опит: Хвърляне на зар един път

X={брой точки върху зара}

x	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Y={брой лицеви страни с точно една точка}

$$F(x)=\begin{cases}0 & при & x<0\\ 5/6 & при & 0\le x<1\\ 1 & при & x\ge 1\end{cases}$$

x	0	1
P	5/6	1/6

Примери

Опит: Случайно се избира топче от кутия с 5 червени и 2 сини топчета

X={брой червени топчета измежду избраните}

x	0	1
p	2/7	5/7

У={брой сини топчета измежду избраните}

x	0	1
p	5/7	2/7

Задача:

Сл. в. X има ф.р.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-1\\ 0{,}02 & \text{при} \quad -1\le x<0\\ 0{,}08 & \text{при} \quad 0\le x<3\\ 0{,}1 & \text{при} \quad 3\le x<7\\ 0{,}3 & \text{при} \quad 7\le x<10\\ 0{,}6 & \text{при} \quad 10\le x<16\\ 1 & \text{при} \quad x\ge 16\end{cases}$$

Какъв тип е сл.в.?

Дискретен

Стойности: -1; 0; 3; 7; 10; 16 (там където се прекъсва ф.р.)

Ред на разпределение

x	-1	0	3	7	10	16
p	0,02	0,06	0,02	0,2	0,3	0,4

Средна стойност (математическо очакване)

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Свойства

$$E(c) = c$$

E(cX)=c(EX)

$$E(X+Y) = EX + EY$$

$$E(X.Y) = EX.EY \ \text{ако} \ X \ \text{и} \ У \ \text{са независими}$$

Моделиране на хазартни игри

Том и Ники играят игра: Том хвърля зар един път. Ако се паднат 5 точки, Том плаща 1 лев на Ники, в противен случай Ники плаща 1 лев на Том.

Колко е очакваната печалба на Том ?

Нека X={печалба на Том от една игра}

Разпределение

стойност(x) (лв)	**- 1**	**1**
вероятност (p)	**1/6**	**5/6**

EX= (- 1) (1/6)+(1) (5/6)=4/6=.6666 очаквана печалба на Том при една игра

Интерпретация: Ако двете момчета играят тази игра много пъти, то в някои от тях Том ще плати 1 лв, в някои ще получи 1 лв, но в крайна сметка средната му печалба ще бъде 67 ст.

Дисперсия

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - EX)^2 p_i$$

Дисперсията измерва степента на разсейване на стойностите на разпределението.

Свойства

$$\sigma^2(c) = 0$$

$$\sigma^2(cX) = c^2 \quad \sigma^2(X)$$

$$\sigma^2(X + У) = \sigma^2(X) + \sigma^2(У) \quad ако \quad X \, и \, У \, са \, независими$$

Стандартно отклонение = квадратен корен от σ^2.

Самостоятелна работа- време за работа 5 мин
Изпратете на classroom

Кое от следните числа **може** да е стойност на случайна величина

I. - 1 II. 0.5 III. 2

А/ само I

Б/ само II

В/ само III

Г/ само I и III

Д/ I, II и III

Видове дискретни разпределения

Равномерно дискретно

стойност (x)	X_1	X_2	…….	X_n
вероятност (p)	1/n	1/n	……	1/n

математическо очакване

$$EX = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Средно аритметично

Пример: Хвърляне на зарче един път.

X={брой паднали се точки}

Бернулиево разпределение

Опит: Два възможни изхода : У (успех) и Н(неуспех)

P(У)=p   P(H)=1-p

X=брой успехи

случайна величина

стойност	0	1
вероятност	1-p	p

EX=p

Дисперсия = p(1-p)

Пример: Избор на карта от колода от 52 карти.

Брой дами измежду избраните

стойност	0	1
вероятност	48/52=12/13	4/52=1/13

EX=4/52

Дисперсия = 12/169

Биномно разпределение

Bi(n,p)

Разглеждаме *n* опити на Бернули:

1. Опитите са независими.

2. **Всеки опит има само два възможни изходи, У и Н.**

3. Вероятността за успех във всеки отделен опит е постоянна:

P(У)=p

X=брой успехи при тези опити

x	0	1	2	3	...	***n***
p	p_0	p_1	p_2	p_3	.....	p_n

$$P(S_n=k)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\,p^k(1-p)^{n-k}$$

EX=np

Дисперсия= np(1-p)

Пример: Зарче се подхвърля 5 пъти.

X=брой паднали се “2 точки” при тези опити

Биномно разпределение

x	0	1	2	3	4	**5**
p	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

$$p_0 = P(S_5 = 0) = \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$$

$$p_1 = P(S_5 = 1) = \frac{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{7776}$$

$$p_2 = P(S_5 = 2) = \frac{5(4)}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1250}{7776}$$

$$p_3 = P(S_5 = 3) = \frac{5(4)(3)}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{250}{7776}$$

$$p_4 = P(S_5 = 4) = \frac{5(4)(3)(2)}{4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{25}{7776}$$

$$p_5 = P(S_5 = 5) = \frac{5(4)(3)(2)(1)}{5!}\left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{7776}$$

EX=np=5(1/6)=5/6

Дисперсия= np(1-p)=

5(1/6(5/6)=25/36

Станд. Откл.= 5/6

КРАЙ