Теория на множествата

- ***Множеството*** е първично понятие в математиката и не се дефинира.

Някои специални множества:

$\varnothing$ ***Празното множество*** е множество, което не съдържа елементи.

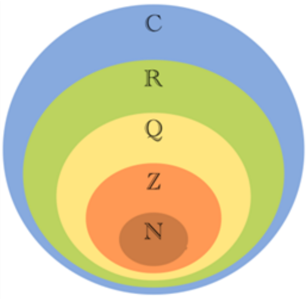
U ***Универсалното множество*** е множество на всички елементи.

$\mathbb{N}$ Множеството на ***естествените*** числа, т.е. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ Множеството на ***целите*** числа, т.е. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

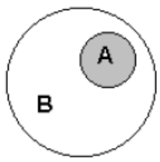
$\mathbb{Q}$ Множеството на ***рационалните*** числа.

$\mathbb{R}$ Множеството на ***реалните*** числа.



- <u>Дефиниция:</u> Нека A и B са множества. Казваме, че A е ***подмножество*** на B ($A \subseteq B$) тогава и само тогава, когато всеки елемент на A е елемент и на B. Множеството B се нарича супермножество на A.

- <u>Дефиниция:</u> Ако всеки елемент на A е елемент и от B, но в B има елементи, които не са от A, казваме, че A е ***истинско подмножество*** на B и бележим: $A \subset B$.



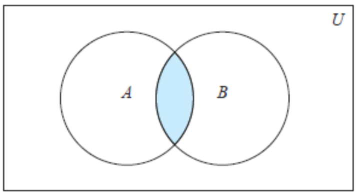
- <u>Дефиниция:</u> Множеството A е ***еквивалентно*** на множеството B $\Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е. $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

- <u>Дефиниция:</u> Множеството от всички подмножества на A се нарича ***обвивка*** на A. Означаваме я с $P(A)$ и $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.

- Ако множеството A има краен брой елементи, то A е <u>крайно</u> и ***мощността*** му е броя на тези елементи, т.е. $|A| = n$.

Операции с множества

- <u>Дефиниция:</u> ***Сечение*** на множествата A и B е множеството от всички обекти, участващи едновременно и в A, и в B.

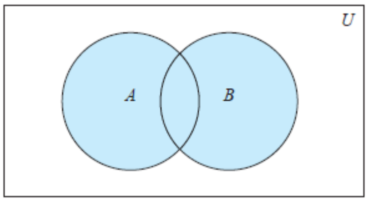


$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Пример: Сечението на множествата {1, 3, 5} и {1, 2, 3} е множеството {1, 3}, т.е.

$$\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}.$$

- <u>Дефиниция:</u> ***Обединение*** на множествата A и B е множеството от всички обекти, които са елементи или на A, или на B.



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

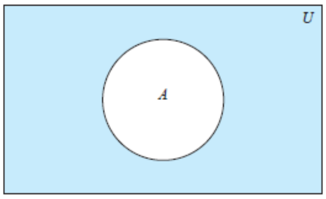
Пример: Обединението на множествата {1, 3, 5} и {1, 2, 3} е множеството {1, 2, 3, 5}, т.е.

$$\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}.$$

- <u>Дефиниция:</u> Две множества се наричат ***не пресичащи*** се, ако тяхното сечение е празното множество.

Пример: Нека са дадени множествата A = {1, 3, 5, 7, 9} и B = {2, 4, 6, 8, 10}. От това, че $A \cap B = \emptyset$, то A и B са не пресичащи се множества.

- <u>Дефиниция:</u> ***Допълнение*** (или комплимент) на множеството A е множеството от всички елементи на U, които не са в A.



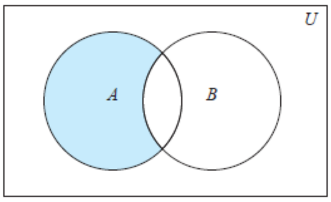
$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Пример: Нека A = {a, e, i, o, u} (тук универсалното множество е множеството от всички латински букви). Тогава

$$\overline{A} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}.$$

- <u>Дефиниция:</u> Разлика на множествата A и B е множеството от елементи на A, които не са от B.

$A - B = A \cap \overline{B}$ или $A - B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$



Пример: Нека A = {1, 3, 5} и B = {1, 2, 3}. Тогава:

$$A - B = \{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}.$$
$$B - A = \{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}.$$

- <u>Дефиниция:</u> Декартово произведение на множествата A и B е множеството от наредени двойки с първи елемент от A и втори – от B. Бележим с $A \times B$ и

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}.$$

Пример: Нека A представлява множеството на всички студенти в университета, а B представлява всички учебни курсове. Тогава декартовото произведение $A \times B$ се състои от наредена двойка *(студент, учебен курс)*

Задачи:

<u>Задача 1.</u> Дадени са множествата A={1, 3, 5, 12}; B={1, 5, 12, 35}; C={1, 3, 5, 12} и D={1, 5, 12, 35, 104}. Вярно ли е, че:

1. $A \subseteq B$ 2. $A \subseteq C$ 3. $A \subset C$ 4. $B \subset D$

<u>Задача 2.</u> Нека A={2, 3, 5, 11}. Образувайте множеството P(A) – обвивката на A.

<u>Задача 3</u>. Нека A={2, 7, 3}, B={4, 1, 3}, C={7, 10, 2}, U={1, 2, … 10}. Намерете:

1. $M = A \bigcup B$ 2. $N = \overline{A} \bigcap C$ 3. $P = (A \bigcup B) \bigcap C$

4. $Q = (\overline{A \bigcup B}) \bigcap C$ 5. $L = U - B$

Определете мощността на всяко от получените множества.

<u>Задача 4</u>. Нека $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{x, y\}$. Намерете декартовото произведение $A \times B$ и $B \times A$.

<u>Задача 5.</u> Нека са дадени множествата A={1,5,7}, B={3,4,9} и C={2,3}. Образувайте:

а) $A \times B$; б) $A \times B \times C$; в) C^2.

<u>Задача 6.</u> Нека L={0,1} е азбука. Образувайте всички възможни низове с дължина 3 над L.

<u>Задача 7.</u> Даден е наредения списък (*a*, *a*, *b*, *a*, *c*). Напишете всички подпоследователности от този списък с дължина 3.

<u>Задача 8.</u> Дадени са множествата $A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{7, 4, 9, x\}$ и $C = \{x, y, 6, 10\}$. Да се намерят числата x и y така, че $A \cap B = \{5, 7\}$ и $A \subset C$.

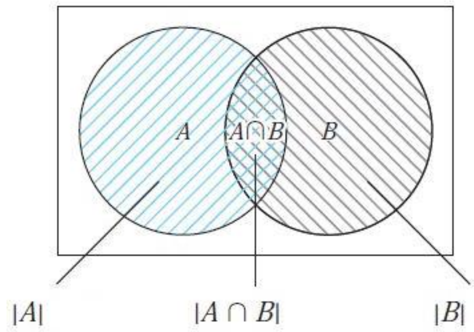
<u>Задача 9.</u> Нека $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 2\}$ и $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y \le 3\}$. Намерете декартовото произведение $A \times B$ и го онагледете геометрично.

<u>Задача 10.</u> Нека $A = \{n : n \in \mathrm{N} \text{ и } n = 3k + 5 \textit{ за някое } \mathrm{k} \in \mathrm{N}\}$. Проверете дали числата $23 \in A$ и $52 \in A$.

Принцип на включването и изключването

Определяне броя на елементите на обединението на две множества A и B.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

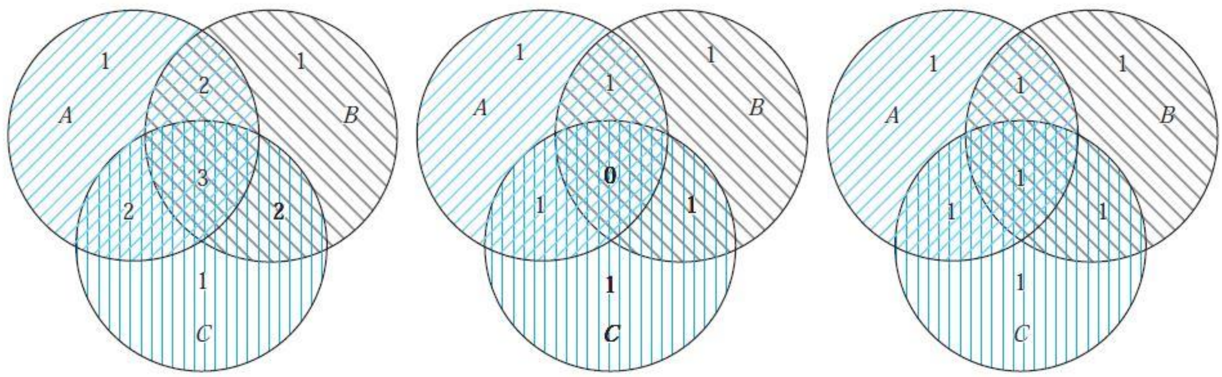


Задача 11. Колко естествени числа не надминаващи 1000 се делят на 7 или 11?

Задача 12. Във ФМИ 1807 второкурсници. От тях 453 посещават лекции по информатика, 567 посещават лекции по математика, а 299 посещават лекции и по двете и по информатика и по математика. Колко от тях не посещават лекции по информатика или по математика?

Определяне броя на елементите на обединението на три множества A, B и C.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



(a) $|A|+|B|+|C|$

(b) $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$

(c) $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

Задача 13. Общо 1232 студенти са преминали курс по испански, 879 са преминали курс по френски и 114 са взели курс по руски език. Освен това 103 са преминали курсове както по испански, така и по френски език, 23 са преминали курсове както по испански, така и по руски език, а 14 са взели курсове и по двата езика френски и руски. Ако 2092 студента са преминали поне един от курсовете по езиците испански, френски и руски, колко студента са преминали курс по трите езика?

Допълнителни задачи:

Задача 1. На мястото на $\square$ да се постави необходимият символ измежду $=, \in, \notin, \subset, \supset$, така че да се получи вярно твърдение:

а) $2 \square \{x \in \mathbb{N} | 1 \le x < 5\}$; б) $\{2,4\} \square \{x \in \mathbb{N} | 1 \le x \le 5\}$;

в) $\varnothing \square \{x \in \mathbb{N} | 1 \le x < 5\}$; г) $\{1,3,5\} \square \{x \in \mathbb{N} | 1 \le x \le 5\}$;

д) $\{1,2,3,4,5\} \square \{x \in \mathbb{N} | 1 \le x < 5\}$.

Задача 2. Нека $A = \{0,2,4,6,8,10\}$, $B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ и $C = \{4,5,6,7,8,9,10\}$. Намерете

а) $A \cap B \cap C$; б) $A \cup B \cup C$

в) $(A \cup B) \cap C$ г) $(A \cap B) \cup C$

Задача 3. Да се определят множествата $A \cup B$, $A \cap B$ и $A - B$, ако A и B са следните множества

а) $A = \{1,5,10,15, 20, 25\}$ и $B = \{1,\ 5,\ 10,\ 30\}$;

б) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid\ x \le 46\}$ и $B = \{x \in \mathbb{N} \mid\ 20 \le\ x < 37\}$;

в) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid\ -10 \le x < 16\}$ и $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid\ -5 <\ x < 17\}$;

г) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid\ |x| \le 2\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid\ |x-1| > \dfrac{3}{4}\}$.

Задача 4. Намерете множествата A и B, ако $A - B = \{1,5,7,8\}$, $B - A = \{2,10\}$ и $A \cap B = \{3,6,9\}$.

Задача 5. Нека $A = \{a,b,c\}$, $B = \{x, y\}$ и $C = \{0,\ 1\}$. Намерете

а) $A \times B \times C$; б) $C \times B \times A$;

в) $C \times A \times B$; г) $B \times B \times B$.

Задача 6. Намерете декартовото произведение $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$, $A \times B \times C$ и определете броя на елементите им, ако A, B и C са следните множества:

а) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{a,\ b,\ c\}$, $C = \{x,\ y\}$.

б) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid\ 3 < x \le 7\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid\ |y| < 2\}, C = \{z \in \mathbb{N} \mid\ |z| = 1\}$.

Задача 7. Намерете декартовото произведение $A \times B$ и го онагледете геометрично, ако

а) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \le x < 3\}$ и $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y \le 2\}$;

б) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x \le 7\}$ и $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid -2 \le y \le 2\}$

в) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0\}$ и $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \le 2\}$.

Задача 8. Нека са дадени множествата:

$A = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ е просто число не по} - \text{голямо от } 15\ \};$

$B = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ е нечетно число не по} - \text{голямо от } 15\ \};$

$C = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ е четно число не по} - \text{голямо от } 15\ \};$

$D = \{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ е число не по} - \text{голямо от } 15, \text{което се дели едновременно и на } 2, \text{и на } 3\ \}$

а) Вярно ли е, че :

i) A ⊂B ii) B ⊆ A iii) A ⊂ C iv) C ⊆ A

б) Пресметнете

i) $|\{A \cap B\} \times D|$; ii)$P(B - A)$

Задача 9. Нека $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 11\}$. Напишете всички подмножества на A, които

- Съдържат точно две четни и точно едно нечетно число;
- Съдържат точно пет елемента;
- Не съдържат четни елементи.

Задача 10. Представете графично следните множества:

а) $A \bigcup \overline{B}$; б) $\overline{A \bigcup B}$; в) $A \bigcap (B \bigcup C)$

г) $(A \bigcap B) \bigcup C$; д) $\overline{A} \bigcap B \bigcap \overline{C}$; е) $(A \bigcup B) - C$

Задача 11. Нека са дадени следните множества

$A = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ и } n = 2k + 1 \textit{ за някое } \mathrm{k} \in \mathbb{N}\}$,

$B = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ и } n = 4k + 1 \textit{ за някое } \mathrm{k} \in \mathbb{N}\}$ и

$C = \{m \in \mathbb{N} \text{ и } m = 2k - 1 \textit{ за някое } \mathrm{k} \in \mathbb{N} \textit{ и } k \geq 1\}$.

Проверете дали:

а) $35 \in A$; б) $35 \in B$; в) $35 \notin B$;

г) $A = C$; д) $B \subset C$; е) $B \subset A$.

Задача 12. Проучване на домакинствата показва, че 96% имат поне един телевизор, 98% имат домашен телефон, а 95% имат домашен телефон и поне един телевизор. Какъв процент от домакинствата нямат нито домашен телефон, нито един телевизор?

Задача 13. Има 2504 студенти по компютърни науки. 1876 са преминали курс по Java, 999 са преминали курс по Linux и 345 са преминали курс по C. Освен това, 876 са преминали курсове по Java и Linux, 231 са преминали курсове както по Linux, така и по C и 290 са преминали курсове по Java и C. Ако 189 от тези студенти са взели курсове по Linux, Java и C, колко от всичките 2504 студенти не са преминали курс по нито един от тези три езика за програмиране?