Дискретна математика

доц. д-р Тодорка Глушкова,
Катедра „Компютърни технологии“, ФМИ

9

Машина на Тюринг

Съдържание

- Машина на Тюринг- въведение
- Машина на Тюринг като разпознаватели и преобразуватели
- Детерминирана машина на Тюринг
- Недетерминирана машина на Тюринг
- Универсална машина на Тюринг

Увод

- Alan M. Turing
  - Математик, а не е бил технически песимист
  - През 2-рата световна война работи по разсекретяване кода на вермахта „Енигма“ (прекрасният филм „Игра на кодове“)
  - 1936 год. (години преди съществуването на реални компютри) създава строга математическа характеристика на границите на компютрите

Машина на Тюринг

- **Машина на Тюринг** е въображаемо изчислително устройство, описано от английския математик Алън Тюринг през 1936г.
- Тюринг използва машината, за да даде първото точно определение на понятието алгоритъм. Машината се използва при доказването на основни резултати в компютърните науки, най-вече в областите изчислимост и сложност на алгоритмите, както и в математическата логика.

Машина на Тюринг

- Машините на Тюринг са абстрактни автомати с неограничена външна памет, които са организирани така, че всеки елемент на запомнена информация да бъде потенциално достъпен за прочитане и замяна.
- При тях изчислителния процес, подобно на останалите автомати е максимално разчленен на елементарни “механично” изпълними операции, като се получава стандартна, проста и същевременно най-обща схема за моделиране на произволен изчислителен процес.

Машините на Тюринг като разпознаватели и преобразуватели

- Тези машини могат да се разглеждат като:

- разпознаватели на клас от формални езици;
- преобразуватели, определящи стойностите на клас целочислени функции (функции, изчислими по Тюринг).

- Ще покажем, че съществува универсална машина на Тюринг, която може да моделира работата на коя да е машина на Тюринг над произволна лентова дума. От това ще следва, че съществуват нерешими алгоритмични проблеми.
- Тези машини са описани и изследвани от А. Тюринг през1936г. и независимо от него – от Е. Пост.

Определение

Машината на Тюринг се състои от четири компонента:

- ***Памет*** — безкрайна лента, състояща се от клетки, във всяка от които е записан символ от някаква крайна азбука. Азбуката съдържа специален *празен* символ (обикновено обозначаван с '0') и един или повече други символи. Във всеки момент от работата на машината лентата е крайна, но при нужда може да и залепяме отляво или отдясно нови клетки, съдържащи *празния* символ.

Определение

- ***Глава***, която във всеки момент от изчислението се намира над определена клетка от лентата. При всеки такт *главата* прочита символа от клетката, над която се намира, записва нов символ и се премества наляво или надясно по лентата в зависимост от изпълняваната инструкция и прочетения символ.

Определение

- ***Програма*** — краен списък от инструкции, който за разлика от съвременните компютри е отделен от паметта. Всяка инструкция е поредица от указания какво да се направи, ако *главата* е прочела i-тата буква от азбуката. Всяко указание съдържа информация какъв символ да се запише обратно върху лентата, коя инструкция ще се изпълнява на следващата стъпка и накъде (наляво или надясно) да се премести *главата*.

Определение

- ***Регистър***, съдържащ номера на активната в момента инструкция (програмен брояч). Една от инструкциите се приема за начална, т.е. изчислението започва със зареждането на номера й в програмния брояч. Има и крайна инструкция — при достигането й изчислението спира.

Принцип на действие

- Управляващото устройство чрез четящо и пишещо устройство във всеки момент може да прочете символа, записан в една клетка, да запише на негово място нов лентов символ и да се придвижи с една клетка наляво или надясно.
- Едно от вътрешните му състояния е <u>начално</u>, а част от вътрешните състояния са <u>заключителни</u>.
- Машината на Тюринг работи на дискретни моменти от време – тактове.

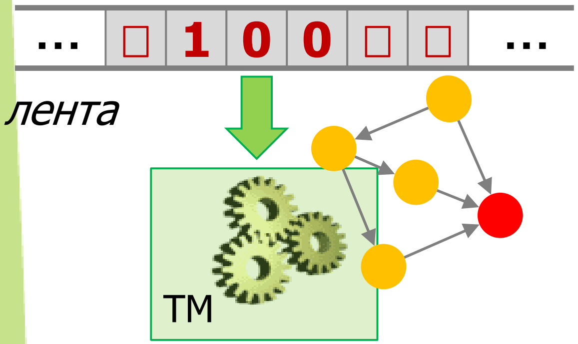
Принцип на действие

- Започва работа в начално вътрешно състояние, на лентата е записана дума от входни символи, а четящото и пишещото устройство се намират на определено място върху думата.
- При всеки такт УУ, в зависимост от вътрешното си състояние и прочетения лентов символ, определя в кое ново вътрешно състояние да премине, кой символ да запише в клетката на прочетения и коя нова клетка да прочете – лявата или дясната.

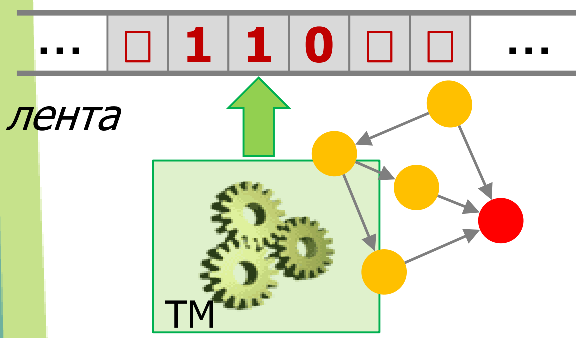
Принцип на действие

- Забележка: Движението вляво и вдясно е винаги възможно, защото при необходимост машината прибавя в края на лентата празна клетка.
- Машината на Тюринг спира работа, ако УУ няма инструкция как да продължи.
- За разлика от другите автомати, тя може да продължи да работи неограничено дълго време.
- В случай че спре, резултатът от работата и е това, дали е спряла в заключително състояние или не.

Операции на ТМ

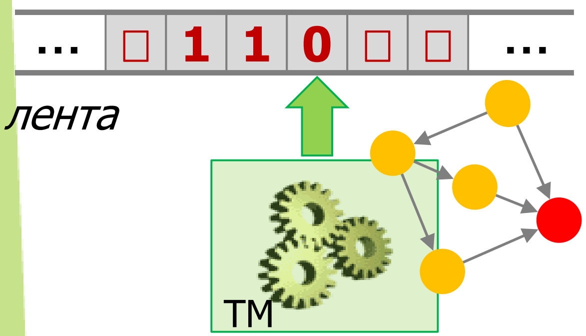


1. Главата чете актуалния символ от лентата σ
2. Изчислява функционалната стойност $(s', \sigma', r) = \delta(s, \sigma)$



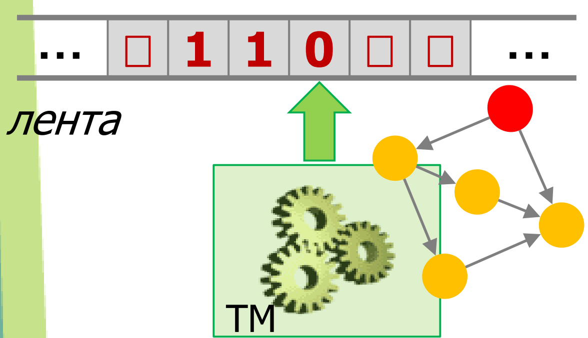
3. Актуалният символ се замества с σ'

Операции на ТМ



4

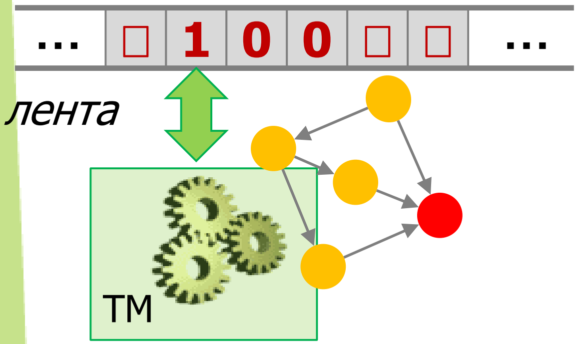
Главата се премества надясно или наляво (r = ‘←’) или надясно (r = ‘→’)



5

ТМ преминава в ново състояние s�

Прекъсване на изчисление



- Функцията на прехода δ е частична функция, което означава че не е дефинирана върху всички входни комбинации на множеството $S \times \Pi$
- Следователно ТМ може да попадне в състояние, което не допуска повече операции
- В такъв случай ТМ спира и изчислението се прекъсва

Машина на Тюринг

- Казваме , че машината на Тюринг ***разпознава*** дадена входна дума, ако след краен брой тактове спре в заключително състояние.
- Всички думи, които машината на Тюринг разпознава, образуват ***езика на машината на Тюринг.*** Те се наричат още рекурсивно номерируеми. Ако за всяка дума от езика машината на Тюринг спира след краен брой тактове, казваме, че езика е рекурсивен. Очевидно всеки рекурсивен език е рекурсивно номерируем. Вярно ли е обратното, ще дискутираме по-късно.

Пример

Да разгледаме машина, работеща с двубуквена азбука — буквите са **0** и **1**. Ще наречем нашата машина **Double**. Ето списъка от инструкциите й:

- A 0:(0,s,R) 1:(0,B,R)
- B 0:(1,C,L) 1:(1,B,R)
- C 0:(1,A,L) 1:(1,C,L)

Имената на инструкциите са големите латински букви **A**, **B** и **C**. С малка буква **s** сме означили специалната инструкция за спиране на изчислението. Всяка инструкция съдържа 2 указания — какво да прави при прочетена 0 или 1. Например **B** при прочетена 0 трябва да изпълни указанието (1,C,L), чието тълкуване е: запиши върху лентата 1, следващата активна инструкция ще е C, премести главата наляво.

Пример

- Предназначението на тази проста машина е да удвоява поредица от единици, при следните условия: в началото лентата съдържа поредица от няколко единици, а всички останали клетки са празни (т.е. заети от символа 0) и главата се намира над най-дясната единица и началната активна инструкция е **A**.
- Започвайки изчислението, машината в крайна сметка ще спре, като броят на единиците в поредицата ще е два пъти по-голям от началния им брой.
- Нека в началото на изчислението лентата съдържа 3 поредни единици. Ето цялото изчисление, стъпка по стъпка (с курсив е отбелязан символа, над който се намира главата):

Пример

ст.	инс.	лента
1	A	011**1**0000
2	B	0110**0**000
3	C	011**0**1000
4	A	01**1**11000
5	B	010**1**1000
6	B	0101**1**000
7	B	01011**0**00
8	C	0101**1**100
9	C	010**1**1100
10	C	01**0**11100
11	A	0**1**111100
12	B	00**1**11100
13	B	001**1**1100
14	B	0011**1**100
15	B	00111**1**00
16	B	001111**0**0
17	C	00111**1**10
18	C	0011**1**110
19	C	001**1**1110
20	C	00**1**11110
21	C	0**0**111110
22	A	**0**1111110
23	s	0**1**111110

Ако началната поредица съдържа **k** единици, машината **Double** ще спре след изпълнението на $\mathbf{2k^2+k+1}$ стъпки (без да броим инструкцията за спиране), на лентата ще има **2k** единици и главата ще е над най-лявата единица. Тези свойства на **Double** могат да бъдат доказани с използване на математическа индукция.

Детерминирана машина на Тюринг

- Дефиниция:***Детерминирана машина на Тюринг*** се нарича седморката:

  $M=<K,V,W, \delta, s_0, B,F >$, където:

- $K\neq \varnothing$ е крайно множество от вътр. състояния;
- V-крайно множество вх.символи (вх. азбука);
- $W \neq \varnothing$ -крайно множество лентови символи (лентова азбука);
- δ - функция на преходите $D(\delta):D(\delta) \subseteq KxW;R(\delta): R(\delta) \subseteq KxWx(R,L), R,L\notin K\cup W$
- $s_0 \in K$ е начално вътрешно състояние;
- $B \in W-V$ е лентов символ за празна клетка;
- $F \subseteq K$ е множество от заключителните състояния.

Недетерминирана машина на Тюринг

- Ако областта на стойностите R(δ) на функцията на преходите се състои от <u>подмножества</u> на KxWx(R,L), то машината на Тюринг е ***недетерминирана.***

Универсална машина на Тюринг

- През 1936 година А. Тюринг описва машина, която може да изпълнява работата на всяка отделна машина на Тюринг.
- Тази машина U е наречена универсална и може по зададени кодирани описания на функцията на преходите δ на произволна машина M и на лентова дума ω за M да извърши изчислителен процес, породен от M за ω и да спре в заключително състояние $\Leftrightarrow$ M спира в заключително състояние

Универсална машина на Тюринг

- Универсалната машина на Тюринг може да се разглежда като предшественик и математически модел на всеки универсален компютър. Подобно на нея компютърът започва работа с програма, написана на някакъв език за програмиране и входни данни, преработва програмата и данните на машинен език и след това я изпълнява.
- Универсалната машина на Тюринг, обаче, може да имитира работата на всяка друга машина на Тюринг, докато универсалния компютър има ограничени възможности за реализация.

Използвана литература в курса

- D. W. Hoffmann, Theoretische Informatik, Hansen Verlag, 2009
- H. P. Gumm, M. Sommer, Einfuehrung in die Informatik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004
- J. W. Grossman, Discrete Mathematics, Macmillan Pub. Co., 1990
- К. Манев, Увод в дискретната математика, КЛМН, 2005
- Й. Денев, Р. Павлов, Я. Демирович. *Дискретна математика*. Наука и изкуство, София, 1984.

Използвана литература в курса

- Д. Байнов, С. Костадинов, Р. Павлов, Л. Луканова. *Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика.* Университетско издателство "Паисий Хилендарски", Пловдив, 1990.
- В.А. Успенский, *Машина Поста*, Москва, Наука, 1988, ISBN 5-02-013735-9.
- L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, *Discrete Mathematics – Elementary and Beyond*, Springer Verlag, New York, 2003, ISBN 0-387-95584-4.

Използвана литература в курса

- E. Bender, S. Williamson, *A Short Course in Discrete Mathematics*, Dover, 2006, ISBN 0-486-43946-1.
- P. Linz, An *Introduction to Formal Languages and Automata*, Jones and Bartlett Publishers, 6-th edition, Jones & Bartlett Publishers, ISBN-13: 9781284077247, 2016
- Kenneth H. Rosen, Kamala Krithivasan, Discrete mathematics and its application, McGraw-Hill Companies, 7-th edition, ISBN 978-0-07-338309-5, 2012

Използвана литература в курса

- Owen D. Byer, Deirdre L. Smeltzer, Kenneth L. Wantz, Journey into Discrete Mathematics, AMS, MAA Press, Providence Rhode Island, ISBN 9781470446963, 2018
- Christopher Rhoades, Introductory Discrete Mathematics, Willford Press, ISBN 1682854922, 9781682854921, 2018
- David Liben-Nowell, Discrete Mathematics for Computer Science, Wiley, 2017, ISBN 1119397197, 9781119397199, 2017.
- [***http://www.jflap.org/***](http://www.jflap.org/) - софтуерна среда