Интегриране по части и смяна на променливата при определените интеграли

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

Интегриране по части

- Нека $u(x)$ и $v(x)$ са две функции, които имат непрекъснати първи производни в интервала $[a,b]$. Тогава формулата за интегриране по части при определените интеграли има следния вид:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x). \tag{1}$$

- Да припомним, че $du(x) = u'(x)\,dx$ и

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

- Формулата за интегриране по части се използва, когато желаем да пресметнем интеграла в лявата й страна, но интегралът, записан в дясната, е по-достъпен.

Примери:

$$1)\ \int_1^2 x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \ln x\,dx^3 \overset{(1)}{=} \frac{1}{3}\left[x^3 \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x^3\,d\ln x\right]$$

$$= \frac{1}{3}(8\ln 2 - 0) - \frac{1}{3}\int_1^2 x^3(\ln x)'\,dx$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}(8-1) = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

$$
\begin{aligned}
2)\ \int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx &\overset{(1)}{=} x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 x\, d \operatorname{arctg} x \\
&= \operatorname{arctg} 1 - 0 - \int_0^1 x (\operatorname{arctg} x)'\, dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx^2 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, d(x^2+1) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.
\end{aligned}
$$

Интегриране чрез смяна на променливата

При пресмятането на определените интеграли понякога е удобно да се прибегне към смяна на променливата. Тя се основава на следната

Теорема 1

Нека функцията $f(x)$ *е непрекъсната в интервала* $[a, b]$*, а функцията* $\varphi(t)$ *е диференцируема и притежава непрекъсната първа производна в един интервал* $[\alpha, \beta]$*, като нейните функционални стойности принадлежат на интервала* $[a, b]$*. Нека освен това*

$$\varphi(\alpha) = a, \qquad \varphi(\beta) = b.$$

Тогава е в сила равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t).$$

Примери:

1) Пресметнете

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Ще пресметнем интеграла I с помощта на субституцията

$$x = a \sin t, \quad \text{където } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Имаме

$$a \sin 0 = 0, \qquad a \sin \frac{\pi}{2} = a$$

и всички условия на теоремата за смяна на променливата са изпълнени. Тогава

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, d(a \sin t) \\
&= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\,(\sin t)'\,dt \\
&= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\, \cos t\,dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt \\
&= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt \\
&= \frac{a^2}{2} \Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{4} \Big[\sin 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} a^2.
\end{aligned}$$

2) Пресметнете

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$$

В случай, че подинтегралната функция е функция на $\sin x$ и $\cos x$, е удобно да се използва т.нар. универсална субституция

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}. \tag{2}$$

В търсения интеграл $x \in [0, \pi/2]$, откъдето получаваме $t \in [0, 1]$. Освен това от (2) следва, че $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$ и затова

$dx = d(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2}{1+t^2}\,dt$. Остана да изразим $\cos x$ с помощта на t. Имаме

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} \\
&= \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)} \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Аналогично може да се докаже, че

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

когато $\sin x$ участва в подинтегралната функция.

Сега вече сме готови за смяна на променливата. Имаме

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{2+2t^2+1-t^2} \\ &= 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}0\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}-0\right) \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$