Упражнение 3
Статистика

стр. 67

12.1. Нека случайната величина X е нормално разпределена със средна стойност 1,5 и дисперсия 4.

а) Намерете:

$P(X > 1,2)$,

$P(1,6 < X < 1,8)$,

$P(1,4 < X < 2)$,

$P(1,1 < X < 1,4)$.

б) Намерете точка, такава че 60% от стойностите на случайната величина да са по-малки от нея.

12.2.Нека T е t-разпределена случайна величина с 10 степени на свобода.

а) Намерете

$P(T > 2,76)$,

$P(0,7 < T < 2,76)$,

$P(-0,3 < T < 2,76)$,

$P(-2,76 < T < -1,81)$.

б) Намерете точка, такава че 60% от стойностите на случайната величина са по-малки от нея.

Доверителни интервали

доверителен интервал	при неизвестна дисперсия на популацията	при известна дисперсия на популацията σ^2
за средното μ на нормална популация	$\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Доверителен интервал

12.3. Нека е направена случайна извадка от 576 жители на дадена об-
ласт с цел да се установи количеството портокалов сок, консумирано от жителите дневно. Получено е, че средната дневна консумация на тези жи-
тели е 133 грама. Знае се, че дневната консумация е нормално разпределе-
на със стандартно отклонение 96 грама на ден.

а) Построите 90% доверителен интервал на дневната консумация.

б) Построите 99% доверителен интервал за дневната консумация.

в) Сравнете интервалите, построени в т.а) и в т. б)

г) Колко е нивото на доверие на доверителния интервал 133 +2.81 $\sqrt{86/574}$

доверителен интервал	*при неизвестна дисперсия на популацията*	*при известна дисперсия на популацията* σ^2
за средното $\boldsymbol{\mu}$ *на нормална популация*	$\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

12.5. За да се определи съдържанието на бактерии във водата на голямо езеро, се вземат 37 проби от по 100 милилитра вода от различни места на брега и в лабораторията се измерва количеството бактерии в пробите. Намерено е, че средното количество бактерии е 11,95 (в стотици) и стандартното отклонение е 11,8 (в стотици). Намерете 95% доверителен интервал за броя бактериите в 100 милилитра от водата в това езеро.

доверителен интервал	*при неизвестна дисперсия на популацията*	*при известна дисперсия на популацията* σ^2
за средното μ *на нормална популация*	$\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

12.7. Направена е случайна извадка от 10 пакетчета с бонбони, претеглени са и е намерено, че средното тегло на тези пакетчета е 56 грама. Ако е известно, че теглото на пакетчетата е нормално разпределена случайна величина с дисперсия 4, то построите 98% доверителен интервал на теглото на пакетчетата.

доверителен интервал	*при неизвестна дисперсия на популацията*	*при известна дисперсия на популацията* σ^2
за средното μ *на нормална популация*	$\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

12.8. Производител пакетира течен сапун в бутилки с тегло 500 мл. Избират се случайно 1219 бутилки и се претеглят. Намерено е, че средното тегло е 506 мл, а стандартното отклонение е 10 мл. Постойте 99% доверителен интервал на средното тегло на бутилките.

доверителен интервал	*при неизвестна дисперсия на популацията*	*при известна дисперсия на популацията* σ^2
за средното μ *на нормална популация*	$\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

12.9. От учебен отдел в Университета „Образование за всеки“ е направена случайна извадка от 25 първокурсници и е получено, че средния им успех от първия семестър е 5,06, а стандартното отклонение е 0,59. Знае се, че успехът е нормално разпределена случайна величина.

а) Параметър или точкова оценка е числото 0,59?

б) Намерете 90% доверителен интервал за средния успех на всички първокурсници в този университет основан на тази извадка. Кое разпределение ще използвате? Защо?

доверителен интервал	*при неизвестна дисперсия на популацията*	*при известна дисперсия на популацията* σ^2
за средното μ *на нормална популация*	$\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

12.13.Разпределението на времето на престой на клиенти в даден ресторант е нормално със стандартно отклонение 30 минути. Чрез направени наблюдения над 41 случайно избрани клиента през текущата година, са пресметнати стойностите на средното време – 98 минути и на извадковото стандартно отклонение – 26 минути. Да се намери доверителен интервал за средното време на престой в ресторанта през текущата година с доверителна вероятност 0,98

доверителен интервал	*при неизвестна дисперсия на популацията*	*при известна дисперсия на популацията* σ^2
за средното μ *на нормална популация*	$\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Тестване на хипотези

Критичните области са представени в таблиците.

Контрахипотеза за популационното средно	Статистика при неизвестна дисперсия	Критична област
H_1: $\mu > \mu_0$	$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t(n-1)$	$\left(t_{1-\alpha}(n-1), \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty\right)$

Контрахипотеза за популационното средно	Статистика при известна дисперсия σ^2	Критична област
H_1: $\mu > \mu_0$	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$	$\left(z_{1-\alpha}, \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\alpha}\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$

13.2. Направена е случайна извадка от 576 жители на дадена област с цел да се установи дали консумираното количество портокалов сок в тази област е поне 150 грама дневно. Получено е, че средната дневна консумация на портокалов сок от тези жители е 133 грама. Знае се, че дневната консумация е нормално разпределена със стандартно отклонение 96 грама.

а/Тествайте хипотезата с ниво на значимост 0,05.

б) Тествайте хипотезата, като използвате р-стойност

Критичните области са представени в таблиците.

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при неизвестна дисперсия*	*Критична област*
H_1: $\mu>\mu_0$	$t=\frac{(\bar{x}-\mu_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\in t(n-1)$	$\left(t_{1-\alpha}(n-1),\infty\right)$
H_1: $\mu<\mu_0$		$\left(-\infty,-t_{1-\alpha}(n-1)\right)$
H_1: $\mu\neq\mu_0$		$\left(-\infty,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)\cup\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\infty\right)$

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при известна дисперсия* σ^2	*Критична област*
H_1: $\mu>\mu_0$	$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\in N(0,1)$	$\left(z_{1-\alpha},\infty\right)$
H_1: $\mu<\mu_0$		$\left(-\infty,-z_{1-\alpha}\right)$
H_1: $\mu\neq\mu_0$		$\left(-\infty,-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\cup\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}},\infty\right)$

13.4. За да се определи съдържанието на бактерии във водата на голямо езеро, за което се знае че е нормално разпределено, се вземат 37 проби от по 100 мililитра вода от различни места на брега и в лабораторията се измерва количеството бактерии в пробите. Намерено е, че средното количество бактерии е 11,95 (в стотици) и стандартното отклонение е 11,8 (в стотици). Има ли статистически значимо основание да се смята, че броят бактерии в 100 милилитра от водата в това езеро е повече от 1000?

Критичните области са представени в таблиците.

Контрахипотеза за популационното средно	Статистика при неизвестна дисперсия	Критична област
H_1: $\mu>\mu_0$	$t=\frac{(\bar{x}-\mu_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\in t(n-1)$	$\left(t_{1-\alpha}(n-1),\infty\right)$
H_1: $\mu<\mu_0$		$\left(-\infty,-t_{1-\alpha}(n-1)\right)$
H_1: $\mu\neq\mu_0$		$\left(-\infty,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)\cup\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\infty\right)$

Контрахипотеза за популационното средно	Статистика при известна дисперсия σ^2	Критична област
H_1: $\mu>\mu_0$	$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\in N(0,1)$	$\left(z_{1-\alpha},\infty\right)$
H_1: $\mu<\mu_0$		$\left(-\infty,-z_{1-\alpha}\right)$
H_1: $\mu\neq\mu_0$		$\left(-\infty,-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\cup\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}},\infty\right)$

13.6. Производител пакетира течен сапун в бутилки с тегло 500 мл. За да се провери дали машината за пълнене е регулирана добре се избират случайно 1219 бутилки и се претеглят. Намерено е, че средното тегло е 506 мл със стандартно отклонение 10 мл.Дават ли измерванията достатъчно основание да се настоява за пренастройка на машините?

Критичните области са представени в таблиците.

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при неизвестна дисперсия*	*Критична област*
H_1: $\mu > \mu_0$	$t = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} \in t(n-1)$	$\left(t_{1-\alpha}(n-1), \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty\right)$

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при известна дисперсия* σ^2	*Критична област*
H_1: $\mu > \mu_0$	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$	$\left(z_{1-\alpha}, \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\alpha}\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$

13.7. Производител на лютеница я пакетира в буркани с етикети, на които е записано нето 400 г. Известно е, че теглото е нормално разпределено със стандартно отклонение 15 грама. Направена е извадка от 16 буркана и е получено, че тяхното средно тегло е 412 г.

а) При ниво на значимост 0,05, трябва ли да се препоръча регулиране на машината?

б) Трябва ли да се препоръча регулиране на машината, ако се използва p-стойност?

Критичните области са представени в таблиците.

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при неизвестна дисперсия*	*Критична област*
H_1: $\mu > \mu_0$	$t = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t(n-1)$	$\left(t_{1-\alpha}(n-1), \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty\right)$

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при известна дисперсия* σ^2	*Критична област*
H_1: $\mu > \mu_0$	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$	$\left(z_{1-\alpha}, \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\alpha}\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$

13.8. От учебен отдел в Университета „Образование за всеки“ е направена случайна извадка от 25 първокурсници и е получено, че средния им успех от първия семестър е 5,06 със стандартно отклонение 0,59. Знае се, че успехът е нормално разпределена случайна величина.

а) Като използвате ниво на значимост 0,05, тествайте хипотезата, че успехът на студентите в този университет е над 5,00.

б) Като използвате p-стойност, тествайте хипотезата, че успехът на студентите в този университет е над 5,00.

Критичните области са представени в таблиците.

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при неизвестна дисперсия*	*Критична област*
H_1: $\mu > \mu_0$	$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t(n-1)$	$\left(t_{1-\alpha}(n-1), \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty\right)$

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при известна дисперсия* σ^2	*Критична област*
H_1: $\mu > \mu_0$	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$	$\left(z_{1-\alpha}, \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\alpha}\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$

13.11. Министерството на образованието решава да тества дали учениците със завършено начално образование могат да четат средно поне 150 думи в минута със стандартно отклонение от 15 думи. Избрани са по случаен начин 200 ученици, завършващи средното си образование и на всеки ученик е даден да прочете един и същ текст, като е измерено времето. Намерено е, че средно тези ученици четат по 156 думи в минута, а стандартното отклонение на извадката е 18 думи. Тази информация дава ли статистическо основание да се отхвърли твърдението при предположение за нормалност на изследваната популация?

Критичните области са представени в таблиците.

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при неизвестна дисперсия*	*Критична област*
H_1: $\mu > \mu_0$	$t = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t(n-1)$	$\left(t_{1-\alpha}(n-1), \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty\right)$

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при известна дисперсия* σ^2	*Критична област*
H_1: $\mu > \mu_0$	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$	$\left(z_{1-\alpha}, \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\alpha}\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$

13.12. Конструктор на микропроцесори решава на въведе нов процес за тяхното производство, като твърди, че по този начин ще се удължи времето на използване на микропроцесорите. Понастоящем средната продължителност на живот на микропроцесорите е 16 000 часа. Направена е извадка от 100 микропроцесора, произведени при новата технология, които са тествани. Изчислени са средната продължителност на използване 16 700 часа и стандартно отклонение 2500 часа. Дава ли ни тази информация достатъчно основание да отхвърлим новата технология при предположение за нормалност на изследваната популация?

Критичните области са представени в таблиците.

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при неизвестна дисперсия*	*Критична област*
H_1: $\mu > \mu_0$	$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t(n-1)$	$\left(t_{1-\alpha}(n-1), \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty\right)$

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при известна дисперсия* σ^2	*Критична област*
H_1: $\mu > \mu_0$	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$	$\left(z_{1-\alpha}, \infty\right)$
H_1: $\mu < \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\alpha}\right)$
H_1: $\mu \neq \mu_0$		$\left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$