

Модели на реални процеси

Курсова работа 2 – ЛДУ,СЛДУ

Спец.“Информатика“,2021/2022

Изготвил : Емил Григоров Медаров

ФН:2001262013

МОДЕЛИ НА РЕАЛНИ ПРОЦЕСИ
КУРСОВА РАБОТА 2 – ЛДУ, СЛДУ
спец. Информатика, 2021/2022

Да се реши по един пример от всяка задача.

Задача 1.

- а) $y'' - 6y' + 8y = 0$
- б) $y''' - 2y'' + y' = 0$
- в) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$
- г) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.

Задача 2.

- а) $y'' - 2y' + 10y = 0$
- б) $y'' - 4y' + 8y = 0$
- в) $y''' - y'' + y' - y = 0$
- г) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

Задача 3.

- а) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^x}$
- б) $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$
- в) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \operatorname{tg} x$
- г) $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}$.

Задача 4.

- а) $y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}$
- б) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$
- в) $y'' + y = x \cos x$
- г) $y'' - 4y' + 13y = -9 \cos 2x$.

Задача 5.

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dot{x} = -5x - 6y \\ \dot{y} = 8x + 9y \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y \\ \dot{y} = 10x + 7y \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \dot{x} = 6x + y \\ \dot{y} = -16x - 2y. \end{cases}$$

Задача 6.

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = -4x + y + \frac{1}{te^t} \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -4x - y + \frac{e^t}{2\sqrt{t}}. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 37 \sin t \\ \dot{y} = -4x - 5y \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y - 2e^t \\ \dot{y} = x - y - e^t. \end{cases}$$

Модели на реални процеси
Курсова работа 2 - 160у, С12у
Спец. Информатика, 2021/2022

Да се реши по един пример от всяка
задача.

Заг. 1

а) $y'' - 6y' + 8y = 0$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 4$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} \rightarrow \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{2x}$$

б) $y''' - 2y'' + y' = 0$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = 1 - \text{двоен корен}$$

$$y = C_1 \cdot e^{0x} + C_2 \cdot e^x + C_3 x \cdot e^x$$

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^x + C_3 x \cdot e^x$$

в) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0$$

$$(\lambda + 2)^3 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$$

$$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x} + C_3 x^2 \cdot e^{-2x}$$

$$r) y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$$

$$(\lambda^2)_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \rightarrow 4$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda_{4,2} = \pm 2$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda_{3,4} = \pm 1$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$$

3 ag. 2

$$a) y'' - 2y' + 10y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

$$b) y'' - 4y' + 8y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = 2 \pm 2i$$

$$y = e^{2x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

$$b) y''' - y'' - y' - y = 0$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda-1) + \lambda-1 = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2+1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_{2,3} = \pm i$$

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

$$r) y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$$

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$$

$$(\lambda^2 + 4)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -4$$

двукратни корени

$$y = e^{0 \cdot x} [(C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x]$$

Заг. 3

$$d) y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$\lambda = -1$ е двукратен корен

$$e^{\lambda x} = e^{-x} = y_1$$

$$xe^{\lambda x} = xe^{-x} = y_2$$

$\{e^{-x}, xe^{-x}\}$ е фундаментална система рещ.

$$y_{\text{хом.}} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Търсим частно рещ.

$$y(x) = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) x e^{-x}$$

$$C_1' e^{-x} + C_2' x e^{-x} = 0 \quad | : e^{-x}$$

$$C_1'(e^{-x})' + C_2'(x e^{-x})' = \frac{1}{x e^x}$$

$$C_1' + C_2' x = 0$$

$$-C_1' e^{-x} + C_2'(4e^{-x} + x e^{-x}) = \frac{1}{x e^x}$$

$$C_1' + C_2' x = 0$$

$$-C_1' e^{-x} + C_2' e^{-x} - C_2' x e^{-x} = \frac{1}{x} e^{-x} \quad | : e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2'x = 0 \\ -C_1' + C_2' - C_2'x = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\cancel{C_1'} - \cancel{C_1'} + \cancel{C_2'}x + C_2' - \cancel{C_2'}x = \frac{1}{x}$$

$$C_2' = \frac{1}{x}$$

$$C_2 = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$C_1' + x \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$C_1' = -\frac{1}{x}$$

$$C_1 = \int -1 dx = -x$$

$$\Rightarrow \eta = (-x)e^{-x} + \ln|x|xe^{-x}$$

$$y_{\text{нечом}} = \eta + y_{\text{хом}} =$$

$$= -x \cdot e^{-x} + \ln|x|xe^{-x} + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

Заг. 4

$$\delta) y'' + 4y' + 4y = 2e^{2x} (x)$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$y_{\text{хом.}} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

$$\eta = a e^{2x} x^2, \quad \eta = a e^{2x} x^2$$

$$\begin{aligned}\eta' &= a (e^{2x})' x^2 + a e^{2x} (x^2)' = \\ &= a e^{2x} 2x^2 + a e^{2x} 2x = \\ &= 2a e^{2x} x^2 + 2a e^{2x} x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta'' &= (2a e^{2x})' x^2 + 2a e^{2x} (x^2)' + (2a e^{2x})' x \\ &\quad + 2a e^{2x} (x)' = \\ &= 2a e^{2x} 2x^2 + 2a e^{2x} 2x + 2a e^{2x} 2x + \\ &\quad 2a e^{2x} 1 = 4a e^{2x} x^2 + 4a e^{2x} x + 4a e^{2x} x + \\ &\quad 2a e^{2x} = 4a e^{2x} x^2 + 8a e^{2x} x + 2a e^{2x}\end{aligned}$$

Закростане $b(x)$

$$\begin{aligned}4a e^{2x} x^2 + 8a e^{2x} x + 2a e^{2x} - 4(2a e^{2x} x^2 + \\ 2a e^{2x} x) + 4(a e^{2x} x^2) &= 2e^{2x} / : e^{2x} \\ 4x^2 + 8x + 2a - 8x^2 - 8x + 4x^2 &= 2\end{aligned}$$

$$2a = 2$$

$$a = 1$$

$$\eta = e^{2x} x^2$$

$$y_{\text{нечом.}} = y_{\text{хом.}} + \eta = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + e^{2x} x^2$$

Заг. 5

$$a) \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

$$\rightarrow y = x' - 2x \Rightarrow y' = x'' - 2x'$$

Заместване в II

$$\begin{aligned} x'' - 2x' &= 3x + 4(x' - 2x) \\ x'' - 2x' &= \underline{3x} + 4x' - \underline{8x} \end{aligned}$$

$$x'' - 6x' + 5x = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 2 \rightarrow 5$$

$$\rightarrow 1$$

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} / y' = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t}$$

$$\text{от II } x = \frac{y' - 4y}{3} = \frac{C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} + 4(C_1 e^t + C_2 e^{5t})}{3} =$$

$$= \frac{C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 4C_1 e^t - 4C_2 e^{5t}}{3} =$$

$$= \frac{-3C_1 e^t + C_2 e^{5t}}{3} = -C_1 e^t + \frac{1}{3} C_2 e^{5t}$$

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^t + \frac{1}{3} C_2 e^{5t} \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \end{cases}$$

Заг. 6

a) $\begin{cases} x'' = -3x + y \\ y' = -4x + y + \frac{1}{te^t} \end{cases}$ Нехом. с-ма.

I $\begin{cases} y = 3x + x' \\ y' = 3x' + x'' \end{cases}$

Заместване в II

$$3x' + x'' = -4x + 3x + x' + \frac{1}{te^t}$$

$$x'' + 3x' + 4x - 3x - x' = \frac{1}{te^t}$$

$$(x'' + 2x' + x = \frac{1}{te^t}) \quad (*)$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow x_{\text{ном.}} = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

$\frac{1}{te^t} =$

II. Търсим частно решение на (*)
 $\eta(t) = C_1(t) e^{-t} + C_2 t e^{-t}$ с метод на Лагранж

$$\begin{cases} C_1' e^{-t} + C_2' t e^{-t} = 0 \\ C_1' (e^{-t})' + C_2' (t e^{-t})' = \frac{1}{te^t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' e^{-t} + C_2' t e^{-t} = 0 \\ C_1' (-1) + C_2' (1 e^{-t} + t e^{-t} (-1)) = \frac{1}{te^t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{-t} (C_1' + C_2' t) = 0 \quad | : e^{-t} \neq 0 \\ -C_1' + C_2' (1 - t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2' t = 0 \\ -C_1' + C_2' - C_2' t = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\cancel{C_1} - \cancel{C_1'} + \cancel{C_2} t + C_2' - \cancel{C_2'} t = \frac{1}{t}$$

$$C_2' = \frac{1}{t}$$

$$C_2 = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t|$$

$$C_1' + \frac{1}{t} = 0$$

$$C_1' = -\frac{1}{t}$$

$$C_1 = -\int \frac{1}{t} dt = -\ln|t|$$

$$\Rightarrow \eta = -te^{-t} + \ln|t|te^{-t}$$

$$\text{III } x = x_{\text{hom}} + \eta = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + (-te^{-t} + \ln|t|te^{-t})$$

$$y = 3x + x' = 3C_1 e^{-t} + 3C_2 t e^{-t} - 3te^{-t} + 3\ln|t|te^{-t} + C_1 e^{-t}(-1) + C_2 e^{-t} + C_2 t e^{-t}(-1) - (1e^{-t} + t \cdot (e^{-t})(-1) + (\frac{1}{t} + \ln|t|)e^{-t} + \ln|t| \cdot te^{-t}(-1))$$

$$x' = C_1 e^{-t}(-1) + C_2 e^{-t} + C_2 t(e^{-t})(-1) + (-te^{-t} + \ln|t|te^{-t})$$

$$x' = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} - C_2 t e^{-t} - (1e^{-t} + te^{-t}(-1) + (\frac{1}{t} + \ln|t|)e^{-t} + \ln|t| \cdot te^{-t}(-1))$$

$$y = 3x + x' = \underline{3C_1 e^{-t}} + \underline{3C_2 t e^{-t}} - \underline{3t e^{-t}} + \underline{3 \ln|t| t e^{-t}}$$

$$- \underline{C_1 e^{-t}} + \underline{C_2 e^{-t}} - \underline{C_2 t e^{-t}} - \underline{e^{-t}} + \underline{t e^{-t}} +$$

$$+ \underline{\frac{t}{t}} \cdot e^{-t} + \underline{\ln|t| e^{-t}} - \underline{\ln|t| t e^{-t}}$$

$$y = 2C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} + 2C_2 t e^{-t} - e^{-t} - 2t e^{-t}$$

$$+ \ln|t| e^{-t} + 2\ln|t| t e^{-t} + \underline{\frac{t}{t}} e^{-t}$$

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} - t e^{-t} + \ln|t| \cdot t e^{-t}$$

$$y = 2C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} + 2C_2 t e^{-t} - e^{-t} - 2t e^{-t}$$

$$+ \ln|t| e^{-t} + 2\ln|t| \cdot t e^{-t} + \underline{\frac{t}{t}} \cdot e^{-t}$$