Определен интеграл. Пресмятане с помощта на формулата на Нютон-Лайбниц

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ “Паисий Хилендарски”

Дефиниция на определен интеграл

- Нека е дадена функция $f(x)$, дефинирана и ограничена в някой интервал $[a, b]$. Ще казваме, че е дадено едно разделяне T на интервала $[a, b]$ на подинтервали, ако са дадени точките $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, за които

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

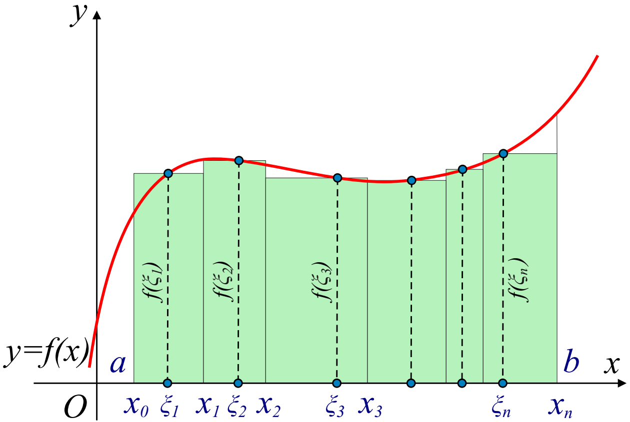
- Дължината на най-дългия подинтервал се означава с $d(T)$ и се нарича диаметър на разделянето T.

- Ако изберем точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, като $\xi_1 \in [x_0, x_1]$, $\xi_2 \in [x_1, x_2], \ldots, \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$, казваме, че е зададено попълнено разделяне $\widetilde{T}$ на интервала $[a, b]$. На него съответства сумата

$$\begin{aligned} S(\widetilde{T}) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}), \end{aligned}$$

  която се нарича интегрална сума или още сума на Риман на функцията $f(x)$, съответстваща на разделянето $\widetilde{T}$. Очевидно тя зависи както от начина на разделяне на $[a, b]$, т.е. от точките $x_0, x_1, \ldots, x_n$, така и от избора на точките $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.
- По дефиниция диаметърът на попълненото разделяне $\widetilde{T}$ е равен на диаметъра на разделянето T, т.е. $d(\widetilde{T}) = d(T)$.

- За да илюстрираме понятията, ще направим геометрично тълкуване на понятието интегрална сума. Да разгледаме криволинейния трапец F, който е образуван от графиката на непрекъснатата неотрицателната функция $f(x)$ в интервала $[a, b]$, абсцисната ос Ox и правите $x = a$ и $x = b$, перпендикулярни на абсцисната ос (Фигура 1). Тогава интегралната сума $S(\widetilde{T})$, отговаряща на избраното попълнено разделяне $\widetilde{T}$ (определено от точките $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и междинните точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$), представлява лицето на стъпаловидната фигура, оцветена в зелено на фигурата. Вижда се, че това лице е приблизително равно на лицето на криволинейния трапец F. При това, колкото по-голям е броят n на точките, толкова по-добро е приближението.



Фигура 1: Геометрично представяне на интегрална сума

Дефиниция 1

Границата I на интегралните суми $S(\widetilde{T})$ при $d(\widetilde{T}) \to 0$ се нарича определен интеграл на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$ и се означава с

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

- От дефиницията на Коши за граница на функция следва, че Дефиниция 1 може да се изкаже и по следния начин: I е определен интеграл на $f(x)$ в $[a, b]$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за произволно попълнено разделяне $\widetilde{T}$, удовлетворяващо условието $d(\widetilde{T}) < \delta$, е изпълнено неравенството
$$|I - S(\widetilde{T})| < \varepsilon.$$

- От дефиницията на Хайне за граница на функция следва, че Дефиниция 1 може да се изкаже така: I е определен интеграл на $f(x)$ в $[a, b]$, ако за всяка редица от попълнени разделяния $\{\widetilde{T}_m\}$, за която

$$\lim_{m\to\infty} d(\widetilde{T}_m) = 0,$$

съответната редица от интегралните суми $\{S(\widetilde{T}_m)\}$ е сходяща и клони към I при $m \to \infty$.

Основни свойства на определения интеграл

I. Ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, а k е едно реално число, то

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

II. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервала $[a, b]$, то

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

III. Ако $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, непрекъснати в $[a, b]$ и удовлетворяващи неравенството $f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

IV. Ако $f(x)$ е една функция, непрекъсната в $[a, b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

V. Ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и ако c е една вътрешна точка от този интервал, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

- Накрая ще добавим, че се оказва целесъобразно да дадем смисъл на символа $\int_a^b$ и когато долната граница е по-голяма от горната, и даже в случая, когато горната и долната граница са равни. Ако $a > b$, то дефинираме

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Тук в дясната страна на равенството имаме определен интеграл, разбиран в смисъла на нашата първоначална дефиниция.

Освен това дефинираме

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Формула на Нютон-Лайбниц

Следната важна теорема ни дава прост начин за пресмятане на определените интеграли от непрекъснати функции.

Теорема 1 (Формула на Нютон-Лайбниц)

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и $F(x)$ е една нейна примитивна в този интервал, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

За още по-голямо удобство при прилагането на формулата, записваме

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

- Формулата (1) остава в сила и когато $a \geq b$.
- Ще припомним, че да се намери примитивна функция $F(x)$ на функцията $f(x)$ означава да се пресметне неопределеният интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Така формулата на Нютон-Лайбниц ни казва, че за да пресметнем определения интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

е достатъчно да пресметнем съответния неопределен интеграл и след това да приложим формулата на Нютон-Лайбниц.

Примери:

$$1)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$2)\ \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+3}\right|\Big|_1^2 = \ln(2+\sqrt{7}) - \ln 3.$$

$$3)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\Big[\sin 2x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{4}(0-0) = \frac{\pi}{2}.$$