Курсова работа 4 по Геометрия

За специалност „Информатика“

2 курс, задочно обучение

Изготвил:Емил Медаров

ФН:2001262013

КУРСОВА РАБОТА 4 по ГЕОМЕТРИЯ за специалност ИНФОРМАТИКА II курс задочно обучение

1. Намерете уравненията на допирателната равнина и нормалата на повърхнината S в точка M, ако:

а) $S: \vec{r}(u^3 - 3uv, u, u^2 - 2v)$, $M(4,1,3)$;

б) $S: \vec{r}(2u - v, u^2 + v^2, u^3 - v^3)$, $M(u = 2, v = 1)$.

2. Дадена е повърхнината $S: \vec{r}(ucosv, usinv, u + v)$. Намерете:

а) първата и втората основна форма на S в произволна нейна точка;

б) ъгъла между кривите C_1 и C_2, които лежат върху повърхнината S, ако $C_1: u + v = 0$, $C_2: u = tgv$;

в) гаусовата и средна кривина на S в произволна нейна точка;

г) нормалната кривина на S в точка $M(u = 1, v = 0)$ по допирателното направление на кривата C_1.

3. Дадена е повърхнината $S: \vec{r}(u^2 + v^2, uv, u^2 - v^2)$. Намерете:

а) първата и втората основна форма на S в произволна нейна точка.

б) нормалната кривина на S в точка $M(u = 1, v = 1)$ по допирателното направление на кривата $C: v = u^2$ върху S;

в) гаусовата и средна кривина на S в произволна нейна точка.

г) асимптотичните линии през произволна точка на повърхнината и пра точка M.

Курсова работа 4 по Геометрия
за специалност Информатика
II курс, задочно обучение

Зад. 1
а) $S: \vec{r}(u^3-3uv; u; u^2-2v)$, $M(4;1;3)$

Ще диференцираме S относно u и v

$\vec{r}_u = (3u^2-3v, 1, 2u)$

$\vec{r}_v = (-3u; 0, -2)$

Пресмятаме вътр. координати на т. М от системата:

$\left|\begin{array}{l} u^3-3uv=4 \\ u=1 \\ u^2-2v=3 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} 1-3v=4 \\ \\ 1-2v=3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} -3v=3 \\ v=-1 \\ -2v=2 \\ v=-1 \end{array}$

Системата има единствено решение $u=1$, $v=-1$

За да получим колинеарен вектор на нормалния вектор на S пресмятаме $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$

Координатите на тези два вектора за т. P:

$\vec{r}_u(P) = (3.1^2-3.(-1), 1, 2.1) = (6;1;2)$

$\vec{r}_v(P) = (-3.1; 0; -2) = (-3; 0; -2)$

$\vec{r}_u^P \times \vec{r}_v^P =$

$\begin{array}{l}(6;1;2)\\(-3;0;-2)\end{array} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-2; 6; 3)$

Съставяме ур-ето на равнина през т. M $(4, 1, 3)$ и с нормален вектор с координати $(-2, 6, 3)$

$-2(x-4) + 6(y-1) + 3(z-3) = 0$
$-2x + 8 + 6y - 6 + 3z - 9 = 0$
$-2x + 6y + 3z - 7 = 0$
$2x - 6y - 3z + 7 = 0$ – ур-е към S в т. P

Нормалата $N_P S$ се задава с у-то на права, минаваща през т. P и имаща за колинеарен вектор същия вектор $\vec{r_u}(P) \times \vec{r_v}(P)$

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{3}$$

б) $S: \vec{r}(2u - v,\ u^2 + v^2,\ u^3 - v^3)$, $M(u=2, v=1)$

$\vec{r_u} = (2, 2u, 3u^2)$
$\vec{r_v} = (-1, 2v, -3v^2)$

Като вземем предвид вътр. координати на т. P намираме

$\vec{r_u}^P (2, 4, 12)$
$\vec{r_v}^P (-1, 2, -3)$

$$\vec{r_u}^P \times \vec{r_v}^P = \left(\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$
$= (-36, -6; 8)$

След заместване на вътр. координати на т. P в параметризацията на повърхнината установяваме коорд. на тази точка относно коор. система

$Oxyz \quad P(2, 2-1, 2^2+1^2, 2^3-1^3)$

$P(3, 5, 7)$

$\Rightarrow$ Допирателната равнина в т. P е:

$-36(x-3) - 6(y-5) + 8(z-7) = 0$

$-36x + 108 - 6y + 30 + 8z - 56 = 0$

$-36x - 6y + 8z + 82 = 0$

$36x + 6y - 8z - 82 = 0 \quad |:2$

$\underline{\underline{18x + 3y - 4z - 41 = 0}}$

Нормалата N_pS

$$\frac{x-3}{18} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-4}$$

Зад. 2

$S: \vec{r}(u\cos v, u\sin v, u+v)$

а) Коефициентите на първата основна форма се ~~д~~ дефинират с равенствата

$g_{11} = \vec{r_u}^2 \quad g_{12} = g_{21} = \vec{r_u}\vec{r_v} \quad g_{22} = \vec{r_v}^2$

$\vec{r_u}(\cos v, \sin v, 1) \quad \vec{r_v}(-u\sin v, u\cos v, 1)$

$g_{11} = \vec{r_u}^2 = \cos^2 v + \sin^2 v + 1^2 = 1 + 1 = 2$

$g_{12} = \vec{r_u}\vec{r_v} = -u\cos v \cdot \sin v + u\sin v\cos v + 1 = 1$

$g_{22} = \vec{r_v}^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1^2 = u^2(\sin^2 v + \cos^2 v) + 1 = u^2 + 1$

Така за първата основна форма получаваме:

$ds^2 = I(du, dv) = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 = \underline{2du^2 + 2dudv + (u^2+1)dv^2}$

Намираме $\vec{r}_{uu} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}_u = \frac{\partial}{\partial u}(\cos v, \sin$

$= (0, 0, 0)$

$\vec{r}_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}_u = \frac{\partial}{\partial v}(\cos v, \sin v, 1) = (-\sin v, \cos v, 0)$

$\vec{r}_{vv} = \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}_v = \frac{\partial}{\partial v}(-u\sin v, u\cos v, 1) =$

$= (-u\cos v, -u\sin v, 0)$

Тогава за скаларните произведения ще имаме

$\underline{\vec{r}_{uu}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = 0}$ ($\vec{r}_{uu}$ е нулев вектор)

Пресмятаме $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \left(\begin{vmatrix} \sin v & 1 \\ u\cos v & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & \cos v \\ 1 & -u\sin v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u\sin v & u\cos v \end{vmatrix} \right)$

$\begin{pmatrix} \cos v, \sin v, 1 \\ -u\sin v, u\cos v, 1 \end{pmatrix} = (\sin v - u\cos v, -u\sin v - \cos v, u\cos^2 v + u\sin^2 v)$

$\underline{\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\sin v - u\cos v, -u\sin v - \cos v, u)}$

$\vec{r}_{uv}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = (-\sin v, \cos v, 0)(\sin v - u\cos v, -u\sin v - \cos v, u)$

$= \overbrace{-\sin^2 v} + \cancel{u\sin v\cos v} - \cancel{u\sin v\cos v} \overbrace{-\cos^2 v} + 0.u = -1$

$\vec{r}_{vv}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = (-u\cos v, -u\sin v, 0)(\sin v - u\cos v, -u\sin v - \cos v, u) =$

$= -\cancel{u\sin v\cos v} + u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v + \cancel{u\sin v\cos v} + 0.u = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2$

$|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = \sqrt{(\sin v - u\cos v)^2 + (-u\sin v - \cos v)^2 + u^2} =$

$= \sqrt{\sin^2 v - 2u\sin v\cos v + u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v +}$

$+ \overline{2u\sin v\cos v + \cos^2 v + u^2} =$

$= \sqrt{1 + u^2(\sin^2 v + \cos^2 v) + u^2} = \sqrt{1+u^2+u^2} =$

$= \sqrt{1+2u^2}$

Коефициентите на втората основна форма на S се определят от:

$h_{11} = \vec{n} \cdot \vec{r_{uu}}$, $h_{12} = h_{21} = \vec{n}\,\vec{r_{uv}}$, $h_{22} = \vec{n}\,\vec{r_{vv}}$

$\vec{n} = \dfrac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{\sqrt{(\vec{r_u} \times \vec{r_v})^2}}$

$h_{11} = \vec{r_{uu}} \cdot \dfrac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} = 0$

$h_{12} = \dfrac{\vec{r_{uv}} \cdot (\vec{r_u} \times \vec{r_v})}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{1+2u^2}}$

$h_{22} = \dfrac{\vec{r_{vv}} \cdot \vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} = \dfrac{u^2}{\sqrt{1+2u^2}}$

$\Rightarrow$ Втората основна форма

$II(du, dv) = h_{11}du^2 + 2h_{12}du\,dv + h_{22}dv^2$

$= 0\,du^2 + 2\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1+2u^2}}\right)du\,dv + \dfrac{u^2}{\sqrt{1+2u^2}}\,dv^2$

б) $C_1 : u + v = 0$

$C_2 : u = \operatorname{tg} v$

Намираме вътр. координати на точката на пресичане на C_1 и C_2 от системата:

$\begin{cases} u + v = 0 \\ u = \operatorname{tg} v \end{cases}$ $\quad u = -v$, $-v = \operatorname{tg} v$ $\quad \Rightarrow v = 0 \Rightarrow u = 0$

$P(0;0)$

$\vec{r_u}(\cos v, \sin v, 1)$ $\vec{r_v} = (-u\sin v, u\cos v, 1)$

$g_{11} = \vec{r}^2 = 2$
$g_{12} = \vec{r_u}\vec{r_v} = 1$
$g_{22} = u^2 + 1$

$$\cos\varphi = \frac{g_{11}\dot{u}_1\dot{u}_2 + g_{12}(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + g_{22}\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{g_{11}\dot{u}_1^2 + 2g_{12}\dot{u}_1\dot{v}_1 + g_{22}\dot{v}_1^2}\cdot\sqrt{g_{11}\dot{u}_2^2 + 2g_{12}\dot{u}_2\dot{v}_2 + g_{22}\dot{v}_2^2}}$$

където $g_{11}, g_{12}, g_{22}, \dot{u}_1, \dot{v}_1, \dot{u}_2, \dot{v}_2$ са пресметнати в т. P

$g_{11}(P) = 2$ $g_{12}(P) = 1$ $g_{22}(P) = 1$

От вътрешните ур-я на C_1 и C_2 виждаме, че двете криви могат да се параметризират относно v:

$C_1: (u_1 = -v_1, v_1)$ $C_2: (u_2 = \mathrm{tg}\, v_2, v_2)$

Тогава за доп. им вектори ще имаме:

$\dot{C}_1(-1; 1)$ и $\dot{C}_2\left(\frac{1}{\cos^2 v_2}; 1\right)$

в т. P ($v = v_1 = v_2 = 0$) получаваме

$\dot{C}_1(P) = (\underset{\dot{u}_1}{\underset{\shortparallel}{-1}}; \underset{\dot{v}_1}{\underset{\shortparallel}{1}})$ и $\dot{C}_2(P) = (\underset{\dot{u}_2}{\underset{\shortparallel}{1}}; \underset{\dot{v}_2}{\underset{\shortparallel}{1}})$

$$\cos\varphi = \frac{2.(-1).1 + 1.(-1.1 + 1.1) + 1.1.1}{\sqrt{2.(-1)^2 + 2.1.(-1)(1) + 1.1^2}.\sqrt{2.1^2 + 2.1.1.1 + 1.1^2}}$$

$$= \frac{-2+1}{\sqrt{2-2+1}.\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

в) Пресмятаме пълната (гаусова) кривина по ф-лата

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{0 \cdot \frac{u^2}{\sqrt{1+2u^2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{1+2u^2}}\right)^2}{2.(u^2+1) - 1^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{1+2u^2}}{2u^2+2-1} = -\frac{1}{(2u^2+1)(2u^2+1)} = \frac{1}{(2u^2+1)^2}$$

$$H = \frac{g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} + 2g_{12}h_{12}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} =$$

$$= \frac{2.\frac{u^2}{\sqrt{1+2u^2}} + (u^2+1).0 - 2.1\left(-\frac{1}{\sqrt{1+2u^2}}\right)}{2(2.(u^2+1) - 1^2)} =$$

$$= \frac{\frac{2u^2}{\sqrt{1+2u^2}} + \frac{2u^2}{\sqrt{1+2u^2}}}{2(2u^2+2-1)} = \frac{\frac{4u^2}{\sqrt{1+2u^2}}}{2(2u^2+1)} =$$

$$= \frac{\cancel{4}^{2}u^2}{\cancel{2}(2u^2+1)\sqrt{1+2u^2}} = \frac{2u^2}{(2u^2+1)\sqrt{1+2u^2}}$$

г) $S: \vec{r}(u\cos v, u\sin v, u+v)$

$C_1: u+v=0$ т. $M(u=1, v=0)$

$\vec{r_u} = (\cos v, \sin v, 1)$ $\quad \vec{r_v} = (-u\sin v, u\cos v, 1)$

$\vec{r_u}^M = (1,0,1)$ $\quad \vec{r_v}^M = (0,1,1)$

$\vec{r_{uu}} = (0,0,0)$ $\quad \vec{r_{uu}}^M = (0,0,0)$

$\vec{r_{uv}} = (-\sin v, \cos v, 0)$ $\quad \vec{r_{uv}}^M = (0,1,0)$

$\vec{r_{vv}} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$ $\quad \vec{r_{vv}}^M = (-1,0,0)$

$g_{11} = \vec{r_u}^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2 \quad g_{11}^M = 2$

$g_{12} = g_{21} = \vec{r_u}\vec{r_v} = 1 \quad g_{12}^M = 1$

$g_{22} = \vec{r_v}^2 = u^2 + 1 \quad g_{22}^M = 2$

Ще използваме ф-лата:

$$V = \frac{h_{11}\dot{u}^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}\dot{v}^2}{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}$$ по

направление на $\dot{C}_1$

Параметризираме $C_1: (u_1 = -v_1, v_1)$

$\dot{C}_1 = (-1, 1)$

$\dot{C}_1(P) = (\underset{\dot{u}_1}{\underset{\parallel}{-1}}; \underset{\dot{v}_1}{\underset{\parallel}{1}})$

От а) $\Rightarrow h_{11} = 0 \qquad h_{11}^M = 0$

$h_{12} = \frac{-1}{\sqrt{1+2u^2}} \qquad h_{12}^M = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$h_{22} = \frac{u^2}{\sqrt{1+2u^2}} \qquad h_{22}^M = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$V_C^M = \frac{0.(-1)^2 + 2.\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(-1)(1) + \frac{1}{\sqrt{3}}.1^2}{2.(-1)^2 + 2.1.(-1).1 + 2.1^2} =$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\cancel{2} - \cancel{2} + 2} = \frac{\frac{3}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Зад. 3

$$S: \vec{r}(u^2+v^2, uv, u^2-v^2)$$

а) $\vec{r_u} = (2u, v, 2u)$, $\vec{r_v} = (2v, u, -2v)$

$g_{11} = \vec{r_u}^2 = 4u^2 + v^2 + 4u^2 = 8u^2 + v^2$

$g_{12} = \vec{r_u}\vec{r_v} = 4uv + uv - 4uv = uv$

$g_{22} = \vec{r_v}^2 = 4v^2 + u^2 + 4v^2 = 8v^2 + u^2$

За първата основна форма получаваме

$\mathrm{I}(du, dv) = g_{11}du^2 + 2g_{12}du\,dv + g_{22}dv^2 =$

$= (8u^2+v^2)du^2 + 2uv\,du\,dv + (8v^2+u^2)dv^2$

Намираме $\vec{r_{uu}} = (2, 0, 2)$

$\vec{r_{uv}} = (0, 1, 0)$

$\vec{r_{vv}} = (2, 0, -2)$

$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = (-2v^2 - 2u^2, 4uv - 4uv, 2u^2 - 2v^2)$

$(2u, v, 2u)$

$(2v, u, -2v)$

$\Rightarrow \vec{r_u} \times \vec{r_v} = (-2u^2 - 2v^2, 8uv, 2u^2 - 2v^2)$

$\vec{r_{uu}}(\vec{r_u} \times \vec{r_v}) = (2, 0, 2)(-2u^2 - 2v^2, 8uv, 2u^2 - 2v^2) =$

$= -4u^2 - 4v^2 + 4u^2 - 4v^2 = -8v^2$

$\vec{r_{uv}}(\vec{r_u} \times \vec{r_v}) = (0, 1, 0)(-2u^2 - 2v^2, 8uv, 2u^2 - 2v^2) =$

$= 8uv$

$\vec{r_{vv}}(\vec{r_u} \times \vec{r_v}) = (2, 0, -2)(-2u^2 - 2v^2, 8uv, 2u^2 - 2v^2)$

$= -4u^2 - 4v^2 - 4u^2 + 4v^2 = -8u^2$

$|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = \sqrt{(-2u^2-2v^2)^2 + (8uv)^2 + (2u^2-2v^2)^2} =$

$= \sqrt{4u^4 + 8u^2v^2 + 4v^4 + 16u^2v^2 + 4u^4 - 8u^2v^2 + 4v^4} =$

$= \sqrt{8u^4 + 16u^2v^2 + 8v^4} = \sqrt{8(u^4 + 2u^2v^2 + v^4)} =$

$= \sqrt{8(u^2+v^2)^2} = 2(u^2+v^2).\sqrt{2}$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} = \left(\frac{-\cancel{2}(u^2+v^2)}{\cancel{2}(u^2+v^2)\sqrt{2}}, \frac{\overset{4}{\cancel{8}}uv}{\cancel{2}\sqrt{2}(u^2+v^2)}, \frac{\cancel{2}(u^2-v^2)}{\cancel{2}\sqrt{2}(u^2+v^2)} \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4uv}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}, \frac{u^2-v^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)} \right)$$

$$h_{11} = \vec{r_{uu}} \cdot \vec{n} = (2,0,2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4uv}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}, \frac{u^2-v^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)} \right)$$

$$= -\sqrt{2} + 0 + \frac{2(u^2-v^2)}{\sqrt{2}(u^2+v^2)} = -\sqrt{2} + \frac{2(u^2-v^2)}{\sqrt{2}(u+v^2)} =$$

$$= \frac{-\cancel{2u^2} - 2v^2 + \cancel{2u^2} - 2v^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)} = \frac{-4v^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}$$

$$h_{12} = \vec{r_{uv}}\,\vec{n} = (0,1,0)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4uv}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}, \frac{u^2-v^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)} \right) =$$

$$= 0 + \frac{4uv}{\sqrt{2}(u^2+v^2)} + 0 = \frac{4uv}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}$$

$$h_{22} = \vec{r_{vv}}\,\vec{n} = (2,0,-2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4uv}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}, \frac{u^2-v^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)} \right) =$$

$$= -\sqrt{2} + 0 - \frac{2(u^2-v^2)}{\sqrt{2}(u^2+v^2)} = \frac{-2(u^2+v^2) - 2(u^2-v^2)}{\sqrt{2}(u^2+v^2)} =$$

$$= \frac{-2u^2 - \cancel{2v^2} - 2u^2 + \cancel{2v^2}}{\sqrt{2}(u^2+v^2)} = \frac{-4u^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}$$

За втората основна форма получаваме

$$II(du,dv) = h_{11}du^2 + 2h_{12}du\,dv + h_{22}dv^2$$

$$= \frac{-4v^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}du^2 + 2 \cdot \frac{4uv}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}du\,dv + \frac{(-4u^2)}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}dv^2$$

$$= \frac{-4v^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}du^2 + \frac{8uv}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}du dv - \frac{4u^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}dv^2$$

б) $S: \vec{r}(u^2+v^2, uv, u^2-v^2)$

$C: v = u^2$ в/у S $\quad$ т. $M(u=1, v=1)$

$\vec{r_u} = (2u, v, 2u)$ $\quad$ $\vec{r_u}^M(2,1,2)$

$\vec{r_v} = (2v, u, -2v)$ $\quad$ $\vec{r_v}^M(2,1,-2)$

$\vec{r_{uu}} = (2,0,2)$, $\vec{r_{uv}} = (0,1,0)$, $\vec{r_{vv}} = (2,0,-2)$

$g_{11} = \vec{r_u}^2 = 9$

$g_{12} = \vec{r_u}\vec{r_v} = 1$

$g_{22} = \vec{r_v}^2 = 9$

Използваме формулата за нормалната кривина:

$$\nu = \frac{h_{11}\dot{u}^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}\dot{v}^2}{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}$$ по

направление на C

$C(u, v=u^2)$

$\dot{C}(u_1, v_1 = 2u_1)$ $\quad \dot{C}(M) = (\underset{\dot{u}}{1}; \underset{\dot{v}}{2})$

$$h_{11}^M = \frac{-4 \cdot 2^2}{\sqrt{2}(1^2+2^2)} = \frac{-16}{\sqrt{2} \cdot 5} = -\frac{16}{5\sqrt{2}}$$

$$h_{12} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 2}{5\sqrt{2}} = \frac{8}{5\sqrt{2}}$$

$$h_{22} = \frac{-4 \cdot 1^2}{5\sqrt{2}} = \frac{-4}{5\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \dot{v}_c^{H} = \frac{-\frac{16}{5\sqrt2}\cdot 1 + \frac{2\cdot 8}{5\sqrt2}\cdot 1\cdot 2 + \left(\frac{-4}{5\sqrt2}\right)\cdot 2^2}{9\cdot 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot 2 + 9\cdot 2^2} =$$

$$= \frac{-\frac{16}{5\sqrt2} + \frac{32}{5\sqrt2} - \frac{16}{5\sqrt2}}{9+4+36} = 0$$

в) $K = \dfrac{h_{11}\cdot h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} =$

Гаусовата кривина

$$= \frac{\frac{-4v^2}{\sqrt2(u^2+v^2)}\cdot\left(\frac{-4u^2}{\sqrt2(u^2+v^2)}\right) - \left(\frac{4uv}{\sqrt2(u^2+v^2)}\right)^2}{(8u^2+v^2)(8v^2+u^2) - (uv)^2} =$$

$$= \frac{\frac{16u^2v^2}{2(u^2+v^2)^2} - \frac{16u^2v^2}{2(u^2+v^2)}}{(8u^2+v^2)(8v^2+u^2) - u^2v^2} = 0$$

За средната кривина имаме:

$$H = \frac{g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} =$$

$$= \frac{(8u^2+v^2)\left(\frac{-4u^2}{\sqrt2(u^2+v^2)}\right) + (8v^2+u^2)\cdot\left(\frac{-4v^2}{\sqrt2(u^2+v^2)}\right) - 2uv\cdot\frac{4uv}{\sqrt2(u^2+v^2)}}{2((8u^2+v^2)(8v^2+u^2) - u^2v^2)}$$

$$= \frac{-32u^4 - 4u^2v^2 - 32v^4 - 4u^2v^2 - 8u^2v^2}{\sqrt2(u^2+v^2)\cdot 2(64u^2v^2 + 8u^4 + 8v^4 + \cancel{u^2v^2} - \cancel{u^2v^2})} =$$

$$= \frac{-32u^4 - 16u^2v^2 - 32v^4}{\sqrt2(u^2+v^2)\cdot 2(8u^4 + 8v^4 + 64u^2v^2)} =$$

$$= \frac{-\cancel{16}(2u^4 + u^2v^2 + 2v^4)}{\cancel{2}\sqrt2(u^2+v^2)\cdot \cancel{8}(u^4+v^4+8u^2v^2)} =$$

$$= \frac{-2u^4 + u^2v^2 + 2v^4}{\sqrt2(u^2+v^2)(u^4+v^4+8u^2v^2)}$$

г) Асимптотичните линии са решения на диф. ур-е

$$h_{11}du^2 + 2h_{12}\,du\,dv + h_{22}dv^2 = 0$$

$$-\frac{4v^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}du^2 + 2\cdot\frac{4uv\,du\,dv}{\sqrt{2}(u^2+v^2)} - \frac{4u^2}{\sqrt{2}(u^2+v^2)}dv^2 = 0$$

$$4v^2du^2 - 8uv\,du\,dv + 4u^2dv^2 = 0$$

$$v^2du^2 - 2uv\,du\,dv + u^2dv^2 = 0$$

$$h = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 =$$

$$= \frac{16u^2v^2}{2(u^2+v^2)^2} - \frac{16u^2v^2}{2(u^2+v^2)} = 0$$