Приложения на интеграла в геометрията

Математически анализ

Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

Лице на равнинна фигура

- Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати и удовлетворяват неравенството

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{за всяко } x \in [a, b]$$

Множеството M от всички точки (x, y) от равнината, за които са изпълнени неравенствата

$$\left| \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x), \end{array} \right.$$

се нарича криволинеен трапец с вертикални основи. Неговото лице се определя по формулата

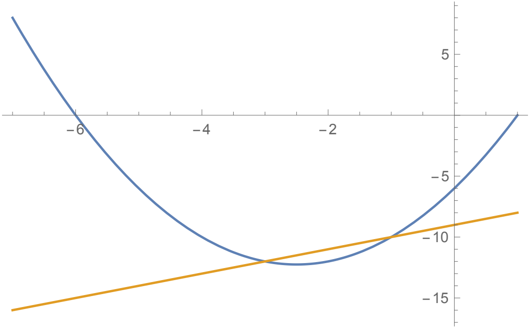
$$S(M) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx. \tag{1}$$

Пример: Ще намерим лицето на областта M, която е заключена между параболата $f(x) = x^2 + 5x - 6$ и правата $g(x) = x - 9$ (Фигура 1).

Първо трябва да намерим пресечните точки на двете криви. Решаваме уравнението $x^2 + 5x - 6 = x - 9$. Корените му са $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$. От (1) следва, че лицето на областта, заключена между правата и параболата, е равно на

$$\int_{-3}^{-1} [(x-9) - (x^2 + 5x - 6)]\, dx = \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3)\, dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - 3x\Big|_{-3}^{-1} = \frac{4}{3}.$$



Фигура 1: Правата $y = x - 9$ и параболата $y = x^2 + 5x - 6$.

- Нека функциите $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ са непрекъснати и удовлетворяват неравенството

$$\varphi(y) \leq \psi(y) \quad \text{за всяко } y \in [c, d].$$

Множеството M от всички точки (x, y) от равнината, за които са изпълнени неравенствата

$$\left|\begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \end{array}\right.$$

се нарича криволинеен трапец с хоризонтални основи. Неговото лице се определя по формулата

$$S(M) = \int_c^d (\psi(y) - \varphi(y))\, dy. \tag{2}$$

Дължина на дъга

- Ако кривата Γ има уравнение $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ и функцията $f(x)$ има непрекъсната производна, то дължината l_Γ на дъгата Γ се определя по формулата

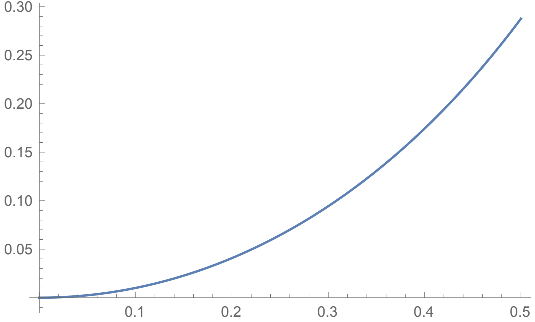
$$l_\Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (3)$$

Пример: Да намерим дължината на дъгата $\Gamma: \; y = -\ln(1-x^2)$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$ (Фигура 2). Имаме

$$y' = \frac{2x}{1-x^2}.$$

Тогава от (3) следва, че

$$\begin{aligned}
l_\Gamma &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4x^2}}{1-x^2}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(1+x^2)^2}}{1-x^2}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) dx \\
&= -\frac{1}{2} - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2} - \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$



Фигура 2: Кривата $y = -\ln(1 - x^2)$ при $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Обем на ротационно тяло

- Обемът V_x на тяло, получено от въртенето около оста Ox на криволинейния трапец

$$\left| \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x), \end{array} \right.$$

където $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати неотрицателни функции в интервала $[a, b]$, се пресмята по формулата

$$V_x = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]\, dx.$$

- Ако се върти около оста Oy трапец с хоризонтални основи

$$\left|\begin{array}{l} c \le y \le d \\ \varphi(y) \le x \le \psi(y), \end{array}\right.$$

където $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ са непрекъснати неотрицателни функции в интервала $[c, d]$, то обемът V_y се пресмята по формулата

$$V_y = \pi \int_c^d \left[\psi^2(y) - \varphi^2(y)\right] dy.$$

“Св. Климент Охридски” или „Св. Климент Охридски“