Диференциал на функция

Математически анализ

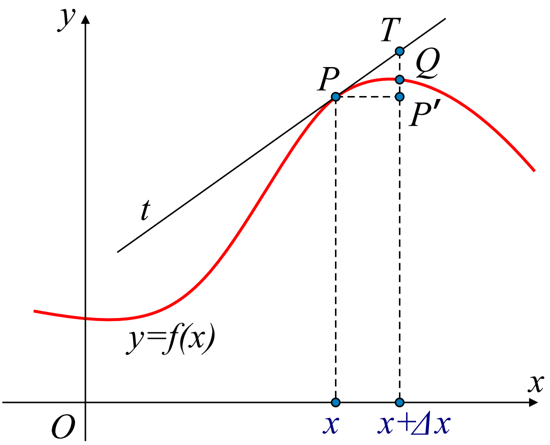
Информатика, I курс, задочно обучение
ФМИ, ПУ "Паисий Хилендарски"

Дефиниция на понятието диференциал и геометричен смисъл

- Понятието диференциал, което навремето се е считало за едно от основните понятия на диференциалното и интегрално смятане, днес играе второстепенна роля в анализа. Понятието производна се оказва достатъчно за формулиране на всички по-съществени резултати от тази част на анализа.

- Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в някоя околност на дадена точка x. Да вземем друга точка $x+h$, принадлежаща на същата околност. Числото h се нарича нарастване на аргумента и се бележи с Δx. Разликата между функционалните стойности $f(x+h)-f(x)$ се нарича нарастване на функцията и се бележи с $\Delta f(x)$, а ако сме положили $y=f(x)$, също и с Δy. Следователно имаме
$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x).$$

- Ако $f(x)$ е диференцируема в точката x, то както знаем, към нейната графика може да се прекара допирателна в точката $P(x, f(x))$ (Фигура 1). В близост до тази точка графиката на функцията не се отдалечава много от своята допирателна и с известно приближение можем да смятаме, че когато нарастването Δx е малко, графиката на функцията и допирателната съвпадат. Това означава, че заместваме истинската стойност на функцията $f(x + \Delta x)$ с една приближена стойност, отговаряща на съответната точка от допирателната.



Фигура 1: Нарастването Δy се дава с $P'Q$, а диференциалът dy – с $P'T$.

- Уравнението на допирателната е

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),$$

където Y и X са текущите координати. На точката $X = x + \Delta x$ от оста Ox отговаря точка от допирателната с ордината $Y = f(x) + f'(x)\Delta x$. Тази именно стойност приемаме за приближена функционална стойност. В такъв случай за нарастването на функцията получаваме следната приближена стойност:

$$f(x) + f'(x)\Delta x - f(x) = f'(x)\Delta x,$$

която наричаме диференциал на функцията $f(x)$ в точката x и която бележим с $df(x)$ или dy.

- И така имаме

$$df(x) = f'(x)\Delta x, \tag{1}$$

или

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

Ако вземем функцията $f(x) = x$, то равенството (1) се превръща в

$$\Delta x = dx,$$

което ни дава основание да запишем равенствата (1) и (2) във вида

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

или

$$dy = f'(x)\,dx,$$

или най-просто във вида

$$dy = y'dx.$$

- Оттук за y' получаваме

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

  което напълно се съгласува с един от приетите по-рано от нас начини за означаване на производната.

- Още веднъж да подчертаем, че макар Δx и dx да са равни помежду си, Δy и dy в общия случай не съвпадат и ние можем да заместваме Δy с dy само когато работим приближено.

Формули за диференциалите

1. $d[u+v] = du + dv$
2. $d[u-v] = du - dv$
3. $d(uv) = v\,du + u\,dv$
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

Диференциали от по-висок ред

- Диференциалът dy на една функция $y = f(x)$ се нарича още неин първи диференциал. Неговият диференциал пък се нарича втори диференциал на функцията y и се бележи d^2y.
- Аналогично се дефинират диференциалите от по-висок ред, които бележим с d^3y, d^4y и т.н.
- При това при намирането на втория диференциал, третия диференциал и т.н. на дадена функция, разглеждаме dx като константа. Така получаваме например

$$d^2y = d(dy) = (dy)'dx = (y'dx)'dx = (y''dx)dx = y''dx^2.$$

Забележете, че изразът $(dx)^2$ се бележи за краткост с dx^2. Той не бива да се бърка с диференциала на функцията x^2, който се бележи с $d(x^2)$.

- С помощта на принципа на математическата индукция лесно се установява следната формула за n-тия диференциал на една функция $y = f(x)$:

$$d^n y = y^{(n)} dx^n.$$