Дискретна математика

доц. д-р Тодорка Глушкова,
Катедра „Компютърни технологии“, ФМИ

7

АЗБУКИ, ДУМИ И ФОРМАЛНИ ЕЗИЦИ

Въведение

Теоретичната информатика се занимава с:

- формални езици,
- теория на автоматите,
- логика,
- разработка и анализ на алгоритми,
- формална семантика и дава основите за компилатори и математическото формализиране на проблеми.

Тя е формалният „гръбнак“ на информатиката. Формални системи, автомати, графи и синтактични диаграми се използват за точно описание на вътрешната логика на формални проблеми. Обикновено тази формална стъпка е основна част от решението на същинския проблем.

Формални езици

- В математиката, логиката и компютърните науки, **формален език** е това множество от думи с крайна дължина (тоест буквени низове) извлечено от дадена крайна азбука.
- Научната теория, за която формалните езици са обект на изучаване се нарича *теория на формалните езици*.

Формални езици

Например:*Азбука може да бъде {c,d} и низ към тази азбука може да бъде cddddc. Типичен език на тази азбука, съдържащ стринга cddddc, ще бъде множеството от всички стрингове, които съдържат същият брой c и d символи.*

- Празната дума (низ с нулева дължина) е разрешен и често означаван като *e*, ε или Λ. Докато азбуката е крайно множество и всеки стринг има крайна дължина, то езикът може съвсем спокойно да се състои от безкрайно много стрингове.

Формални езици

- Дефиниция : ***Азбука*** (или речник) се нарича всяко крайно множество от символи. ***Символите*** се наричат букви. Азбуките бележим с главните латински и гръцки букви K,V,W,Σ и др. Символите ще бележим с малките латински букви.
- Дефиниция: Всяка крайна редица от символи на дадена азбука ще наричаме ***дума*** над тази азбука. Думите ще бележим с малките гръцки букви: $\alpha,\beta,\chi\ldots$

Формални езици

- Броят на символите в думата определя нейната ***дължина***. Думата с дължина 0 е празната дума ε.
- <u>Дефиниция:</u> Две думи са ***равни***, когато имат една и съща дължина и еднакви първи, втори и т.н. букви, т.е. $\alpha=a_1a_2\ldots a_n$; $\beta=b_1b_2\ldots b_n$.
- Тогава $\alpha=\beta \Leftrightarrow a_i=b_i$ за всяко $i= 1\ldots n$.

Формални езици

- <u>Дефиниция:</u> ***Формален език*** над дадена азбука ще наричаме всяко множество от думи над тази азбука. Бележим с L.

- *<u>Пример:</u> Нека V={0,1} и W={if, then, else, for, do, a, b, c} са две азбуки. Тогава ε, 110101 и 00 са думи над V с дължина 0, 6,2.*
- *If b then for c do if b then a else c, if b then a else c - са думи над W с дължина 12 и 6.*

Други примери за формални езици

- множество на всички думи от {a,b}
- множество { a^n : n е естествено число по-голямо от единица} (където a^n означава a повторено n пъти)
- множество от синтактично правилни програми за даден програмен език.

Операции над думи и формални езици

Дефиниция: ***Конкатинация*** (съединение) на думите α и β ще наричаме непосредственото записване на β след α и ще означаваме $\alpha\beta$. Ако $\alpha=a_1\ldots a_n$; $\beta=b_1\ldots b_n$, то $\alpha\beta=a_1\ldots a_n b_1\ldots b_n$.

Очевидно получената дума $\alpha\beta$ е също дума над разглежданата азбука, следователно конкатенацията е вътрешна операция.

•Конкатенацията не е симетрична операция ($\alpha=00;\beta=11\Rightarrow\alpha\beta=0011$, а $\beta\alpha=1100$)

•За всеки три думи α,β,χ е изпълнено: $(\alpha\beta)\chi=\alpha(\beta\chi)$. Следователно тя е асоциативна операция.

•Пример: (аз имам)компютър = аз(имам компютър)

Операции над думи и формални езици

- <u>Дефиниция:</u> Нека α е дума. Определяме ***степените*** на α така:

$$\alpha^0=\varepsilon;\ \alpha^1=\alpha;\alpha^2=\alpha\alpha \text{ и т.н.}$$

- Нека L1 и L2 са формални езици. Тогава:

а) обединението на езиците $L1\cup L2=\{w:w\in L1\vee w\in L2\}$, където w е дума

б) сечение на езиците $L1\cap L2=\{w:w\in L1\wedge w\in L2\}$;

в) разлика на езици $L1-L2 = \{w:w\in L1\wedge w\notin L2\}$;

г) произведение на езици $L1.L2=\{\alpha\beta:\ \alpha\in L1,\ \beta\in L2\}\Rightarrow$ от всяка конкатенация на думи от L1 и L2.

Примери

<u>Пример</u>: L1 = {0,01}; L2={1,11}

$L1 \cup L2=\{0,01,1,11\}$

$L1 \cap L2=\{\varnothing\}$

$L1-l2=\{0,01\}$

$L1.L2=\{01,011,0111\}$

<u>Забележка</u>: От факта, че конкатенацията е асоциативна, но не е комутативна следва, че произведението на езици е асоциативна, но не комутативна операция.

Операции над думи и формални езици

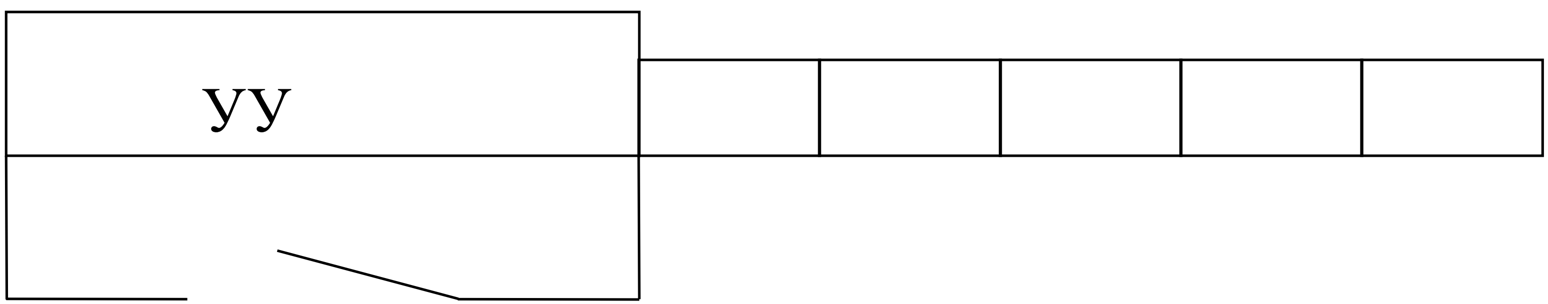
Дефиниция: Нека L е формален език. ***Степените на L*** се определят така: $L^0 = \{\varepsilon\}$; $L^1 = L$; $L^2 = L.L$;… $L^n = L^{n-1}.L$

Дефиниция: ***Итерация L**** на произволен език L ще наричаме обединението на всички степени на L. Т.е $L^* = \cup L^n$, $n \geq 0$.

Итерацията се състои от всички възможни конкатенации на произволен брой думи на L. Ако всички думи са с дължина 1,тогава L*=V* - всички думи над V.

Пораждащи граматики и пораждащи езици

Ще разгледаме един основен вид генератори на формални езици - т. нар. ***пораждащи граматики***. Да си представим абстрактно устройство от вида:



Състои се от клетки, във всяка от които има по една буква.

Пораждащи граматики и пораждащи езици

- Управляващото устройство се състои от краен брой вътрешни състояния, като в даден момент се намира само в едно от тях.
- При всяко включване на тока, УУ преминава в едно и също начално състояние.
- След определен брой дискретни тактове на УУ, върху лентата се изписва дума (всеки такт - една буква).
- Машината работи вероятностно (т.е. недетерминирано) и генерира думи.

Пораждащи граматики и пораждащи езици

- За всеки формален език, който може да се опише с крайни средства чрез някакъв автомат, съществува пораждаща го граматика.
- Освен това чрез процеса на пораждане, пораждащите граматики приписват съответна структура на думите от езика, поради което те намират голям брой приложения в математиката и информатиката - от езиците за програмиране и техния автоматичен превод, до моделирането на изчислителните процеси.

Граматика-генератор (Пораждаща граматика)

<u>Дефиниция</u>: ***Граматика-генератор*** е наредена четворка от вида: Г=<V,W,S,P>, където:

- V е азбука на терминалните символи(азбука на пораждащия език)
- W е вътрешна нетерминална азбука от вътрешни състояния на УУ(синтактични категории в езика), като $V \cap W = \emptyset$. Нетерминалните символи играят роля на синтактични категории в езика
- $S \in W$ е начално състояние

Граматика-генератор (Пораждаща граматика)

- P е крайно множество от правила на пораждащата граматика, които представляват наредени двойки от думи, съставени от терминални и нетерминални символи $<\alpha,\beta>$ над $V \cup W$, като в α има поне един нетерминален символ (за β не е задължително).

Правилата на пораждащата граматика описват всеки процес на пораждане на изходната терминална дума от началния символ.

Граматика-генератор

Прието е правилата да се записват във вида $\alpha \to \beta$.

Дефиниция: Думата μ ***се извежда непосредствено*** от думата γ в Г=<V,W,S,P>, ако съществуват думи γ_1 и $\gamma_2 \in (V \cup W)$, такива че $\gamma_1 \alpha \gamma_2$, $\gamma_1 \beta \gamma_2$ и съществува правило $\alpha \to \beta$.

Пишем: $\gamma \vdash \mu$.

- Когато $\gamma \vdash \gamma 1 \vdash \gamma 2 \ldots \vdash \mu$., пишем $\gamma \models \mu$.

Граматика-генератор

- Дефиниция: Казваме, че думата α ***се поражда*** от граматиката Г, ако съществува извод $s \models \alpha$. Множеството думи, които Г генерира се наричат ***неин език.***

$$L(Г)=\{ \alpha \in V^*: \exists \text{ извод } s \models \alpha \}$$

- Дефиниция: Две граматики са ***еквивалентни***, ако L(Г1)=L(Г2).

Граматика-генератор

- *<u>Пример:</u>* $\Gamma=<\{0,1\},\{s\},s,\{s \rightarrow 01, s \rightarrow 0s1\}>$

Очевидно Г е граматика и $s \vdash 01$, *като* $01 \in L(\Gamma)$;

$$
\begin{array}{llll}
 & \vdash\ 0^2 1^2 & & \\
s \vdash 0s1 & \vdash\ 0^2 s 1^2 & \vdash 0^3 1^3 & \\
 & & \vdash 0^3 s 1^3 &
\end{array}
$$

Т.е. $L(\Gamma)=\{0^n 1^n;\ n=1,2..\}$

Пример

$\Gamma=\langle\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\{S\},S,\{S\rightarrow S0,\ S\rightarrow S1,\ S\rightarrow S2,\ S\rightarrow S3,\ S\rightarrow S4,\ S\rightarrow S5,\ S\rightarrow S6,\ S\rightarrow S7,\ S\rightarrow S8,\ S\rightarrow S9,\ S\rightarrow 1,\ S\rightarrow 2,\ S\rightarrow 3,\ S\rightarrow 4,\ S\rightarrow 5,\ S\rightarrow 6,\ S\rightarrow 7,\ S\rightarrow 8,\ S\rightarrow 9\}\rangle$

Тази граматика поражда десетичните записвания на естествените числа. Например числото 8797 се извежда така:

$$S \vdash S7 \vdash S97 \vdash S797 \vdash 8797$$

Видове граматики и формални езици

<u>От общ (нулев)тип</u>- Пораждащи граматики върху правилата, на които не се налагат никакви допълнителни условия, т.е. имат вида $\alpha A\beta\to w$ (като α,β,w са думи от терминални и нетерминални символи, а A е нетерминален символ).

- В този случай A се замества с w.

Видове граматики и формални езици

- <u>**От контекстен тип**</u> - Пораждаща граматика Г=<V,W,S,P>, всички правила на която имат вида: $\alpha A\beta=\alpha w\beta$, като $\alpha,\beta,w\in(V\cup W)^*$ $w\neq\varepsilon$, $A\in W$ се нарича контекстна граматика <u>(или от клас 1),</u> т.е. A се замества с w само в даден контекст $\alpha\to\beta$.

Видове граматики и формални езици

- **<u>От безконтекстен тип</u>-** Пораждаща граматика Г=$<V,W,S,P>$, всички правила на която имат вида $A \to w$ е от тип 2, като A е от W, $w \in (V \cup W)^*$.

Видове граматики и формални езици

- **Автоматна граматика** - Пораждаща граматика Г=<V,W,S,P>, чиито правила са от вида : $A \to aB$, $A \to a$, като ($A,B \in W$, $a \in V$) е автоматна или граматика от тип 3.

- **Дефиниция**: Един формален език е автоматен (тип 3), безконтекстен (тип 2), контекстен (тип 1) или от общ тип (тип 0) $\Leftrightarrow$ пораждащата го граматика е съответно от тип 3,тип 2, тип 1 или тип 0.

Примери:

- *Граматика с терминални символи {a, b}, нетерминални символи {S, A, B}, правила:*

  $S \longrightarrow ABS$
  $S \longrightarrow \varepsilon$ *(където ε обозначава празната дума)*
  $BA \longrightarrow AB$
  $BS \longrightarrow b$
  $Bb \longrightarrow bb$
  $Ab \longrightarrow ab$
  $Aa \longrightarrow aa$

  и аксиома S, дефинира генеративно езика на всички думи от вида $a^n \circ b^n$ *(т.е. n пъти a, последвани от m пъти b).*
- *Следната по-проста граматика дефинира генеративно същия език:*

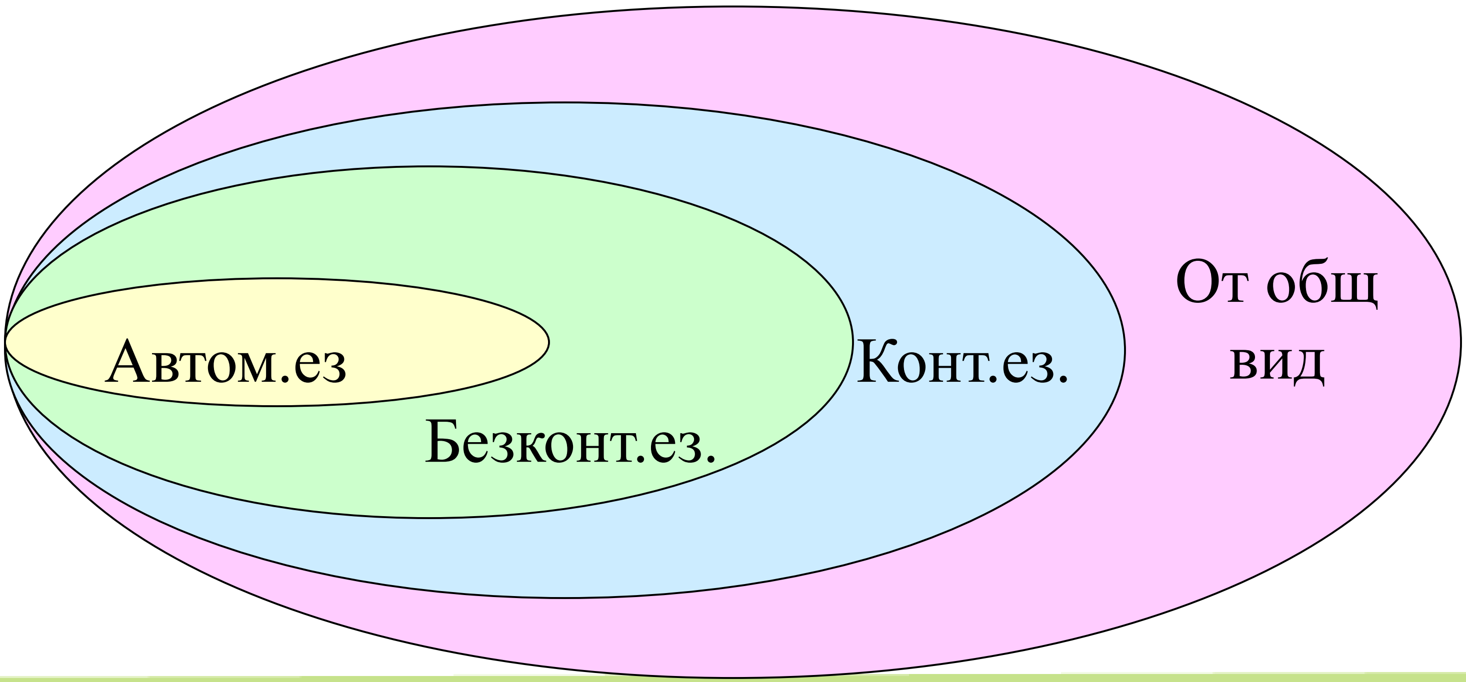
  Терминални символи {a, b}, нетерминални {S}, аксиома S, правила: $S \rightarrow aSb$
  $S \rightarrow \varepsilon$

Йерархията на Чомски

- Това е йерархия от класове формални граматики, образуващи формални езици.
- Въведена е през 1956 г. от американския лингвист Ноам Чомски.
- Освен в лингвистиката, моделът на граматиките на Чомски намира широко приложение и в други науки, като информатиката (тясно свързано със съответствията с концепти от теорията на автоматите) и биологията (Нилс К. Йерне озаглавява нобеловата си лекция *„Генеративната граматика на имунната система*" и разглежда протеиновия строеж в такъв контекст).

Йерархия на формалните езици

- Автоматните, безконтекстните, контекстните и езиците от общ вид образуват йерархията на Чомски за формалните езици



Регулярни езици

- Множеството на регулярните езици е равно на множеството на езиците, разпознавани от крайни автомати, т.е. всеки език, разпознаван от краен автомат, е регулярен (теорема на Клини (Kleene)). Това означава, че всеки регулярен израз може да се представи като краен автомат и обратното.

Абстрактни машини

Типовете в йерархията съответстват на езиците, разпознавани от различни видове абстрактни машини:

Грама-тика	Език	Автомат
Тип 0	рекурсивно изброим	Машина на Тюринг
Тип 1	контекстен	линейно ограничена недетерминирана машина на Тюринг
Тип 2	Безконтекстен	Магазинен автомат
Тип 3	регулярен	Краен автомат

Твърдения

- <u>**Лема**:</u> Нека L е формален език от тип I (I=0..3). Тогава $L\cup\{\varepsilon\}$ и $L-\{\varepsilon\}$ са формални езици от същия тип.
- <u>**Теорема:**</u> Нека L1 и L2 са произволни автоматни езици. Тогава $L1\cup L2$ е също автоматен език.
- <u>**Теорема:**</u> Нека L1 и L2 са произволни автоматни езици. Тогава L1.L2 е също автоматен език.
- <u>**Теорема:**</u> Всеки краен език е автоматен. (например- българския език.)

Използвана литература в курса

- D. W. Hoffmann, Theoretische Informatik, Hansen Verlag, 2009
- H. P. Gumm, M. Sommer, Einfuehrung in die Informatik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004
- J. W. Grossman, Discrete Mathematics, Macmillan Pub. Co., 1990
- К. Манев, Увод в дискретната математика, КЛМН, 2005
- Й. Денев, Р. Павлов, Я. Демирович. *Дискретна математика*. Наука и изкуство, София, 1984.

Използвана литература в курса

- Д. Байнов, С. Костадинов, Р. Павлов, Л. Луканова. *Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика.* Университетско издателство “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 1990.
- В.А. Успенский, *Машина Поста*, Москва, Наука, 1988, ISBN 5-02-013735-9.
- L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, *Discrete Mathematics – Elementary and Beyond*, Springer Verlag, New York, 2003, ISBN 0-387-95584-4.

Използвана литература в курса

- E. Bender, S. Williamson, *A Short Course in Discrete Mathematics*, Dover, 2006, ISBN 0-486-43946-1.
- P. Linz, An *Introduction to Formal Languages and Automata,* Jones and Bartlett Publishers, 6-th edition, Jones & Bartlett Publishers, ISBN-13: 9781284077247, 2016
- Kenneth H. Rosen, Kamala Krithivasan, Discrete mathematics and its application, McGraw-Hill Companies, 7-th edition, ISBN 978-0-07-338309-5, 2012

Използвана литература в курса

- Owen D. Byer, Deirdre L. Smeltzer, Kenneth L. Wantz, Journey into Discrete Mathematics, AMS, MAA Press, Providence Rhode Island, ISBN 9781470446963, 2018
- Christopher Rhoades, Introductory Discrete Mathematics, Willford Press, ISBN 1682854922, 9781682854921, 2018
- David Liben-Nowell, Discrete Mathematics for Computer Science, Wiley, 2017, ISBN 1119397197, 9781119397199, 2017.
- ***http://www.jflap.org/*** - софтуерна среда