EDP : Analyse mathématique et principes de la méthode des éléments finis

Thomas BERBESSOU
Émile DE VOS

Département Sciences du Numérique - Deuxième année - Parcours HPC et Big Data
2023-2024

Table des matières

Table des figures

1 Introduction

1.1 Calcul d'une intégrale :

Pour effectuer le calcul d'une solution avec les conditions de Neumann, nous avons également dû calculer d'autres intégrales. Il faut en effet calculer les coefficients de la matrice de raideur M, ce qui nous donne 16 intégrales à calculer, mais la symétrie réduit ce nombre à 10.

On a en effet que :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_T \nabla\eta_i(x,y)^T \nabla\eta_j(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \nabla\phi_{jj}(J_{\phi_p}^T J_{\phi_p})^{-1}\nabla\phi_{ii}|J_{\phi_p}|\,d\xi\,d\zeta \end{aligned}$$

Posons $(J_{\phi_p}^T J_{\phi_p})^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

On peut poser la matrice directement de cette forme, car l'inverse d'une matrice symétrique et symétrique. On doit alors calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \int_0^1 \nabla\phi_{ij}(J_{\phi_p}^T J_{\phi_p})^{-1}\nabla\phi_{ij}|J_{\phi_p}|\,d\xi\,d\zeta$$

Nous allons ici traiter un exemple, On va utiliser les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi,\zeta) &= (1-\xi)(1-\zeta) \\ \phi_2(\xi,\zeta) &= \xi(1-\zeta) \end{aligned}$$

ainsi, nous allons calculer le terme $M_{21} = \int_0^1 \int_0^1 \nabla\phi_{11}(J_{\phi_p}^T J_{\phi_p})^{-1}\nabla\phi_{22}|J_{\phi_p}|\,d\xi\,d\zeta$

Nous avons alors :

$$\int_0^1 \int_0^1 \nabla\phi_{ij}(J_{\phi_p}^T J_{\phi_p})^{-1}\phi_{ij}|J_{\phi_p}|\,d\xi\,d\zeta = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} \zeta-1 \\ \xi-1 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1-\zeta \\ -\xi \end{bmatrix} \tag{1}$$

Les changements de variables $u = \zeta - 1$ et $v = \xi$ nous facilitent la tâche pour le calcul. L'intégrale précédente devient alors :

$$\int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} u \\ v-1 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -u \\ -v \end{bmatrix} \tag{2}$$

Une fois l'intégrale développée, cela revient à calculer l'intégrale suivante :

$$\iint_0^1 au^2 + bu(v-1) + buv + c(v-1)v \tag{3}$$

On peut alors calculer ces intégrales en les séparant pour plus de facilité :

$$\int_0^1 au^2du = \frac{a}{3}$$
$$\iint_0^1 bu(v-1)dudv = -\frac{b}{4}$$
$$\iint_0^1 b.u.vdudv = \frac{b}{4}$$
$$\int_0^1 cv(v-1)dv = -\frac{c}{6}$$

Il vient alors que :

$$M_{12} = \frac{\|J_{\phi_p}\|}{6}(2a + c)$$

2 Complément :

2.1 Introduction :

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant à l'aide de la méthode des éléments finis que nous avons implanté dans la partie 1 :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + c_0u(x,y) = f(x,y) & \text{sur } \Omega \\ u(x,y) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

2.2 Formulation Variationnelle

Ce problème admet donc la formulation mathématique suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + c_0 u(x,y) = f(x,y) & \text{sur } \Omega \\ \gamma_0(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

Or, si (4) est vrai, alors $u \in H^2(\omega), \forall w \in L^2(\omega)$ tel que :

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot w dx + c_0 \int_\Omega uw dx = \int_\Omega fw dx \tag{6}$$

En appliquant les formules de Green :

$$\int_\Omega \Delta uw dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w dx + \int_\Gamma \gamma_1(u)\gamma_0(w) d\gamma \tag{7}$$

Il vient en injectant (7) dans (6) l'égalité :

$$\forall v \in H_0^1(\omega), \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w dx + c_0 \int_\Omega uw dx = \int_\Omega fw dx \tag{8}$$

Car si $u \in H_0^1$ alors $\gamma_0(u) = 0$ On a donc bien obtenu la forme variationnelle que nous souhaitions. Montrons maintenant que ce problème admet une unique solution.
Pour cela, notons :

$$\begin{aligned} a: \ & (H_0^1)(\mathbf{\Omega})^2 \to \mathbf{R} \\ & (u,v) \to \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w dx + c_0 \int_\Omega uw dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l: \ & H_0^1(\mathbf{\Omega}) \to \mathbf{R} \\ & v \to \int_\Omega fw dx \end{aligned}$$

2.3 Lax-Milgram

Propriété concernant l :
- l est linéaire par linéarité de l'intégrale
- l est continue :

On a $\forall w \in H_0^1(\Omega)$,

$$|l(w)| = |\int_\Omega fwdx| \tag{9}$$

Comme $f \in L^2(\mathbf{\Omega})$ et que $v \in H_0^1 \subset L^2(\mathbf{\Omega})$ On peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$|l(w)| < \|f\|_{L^2(\mathbf{\Omega})}\|w\|_{L^2(\mathbf{\Omega})} \tag{10}$$

Par application de l'inégalité de Poincaré, il vient que : (on note K la constante de Poincaré)

$$|l(w)| < K \times \|f\|_{L^2(\mathbf{\Omega})}\|w\|_{H_0^1(\mathbf{\Omega})} \tag{11}$$

Donc l est lipschitzienne et de ce fait continue. On a bien montré les deux propriétés nécessaires pour appliquer Lax-Milgram pour l'application l.

Propriétés concernant a :
- a est bilinéaire par linéarité de l'intégrale
- a est continue :

par inégalité triangulaire, on peut majorer à de la façon suivante

$$\forall (u,v) \in H_0^1(\Omega)^2, |a(u,v)| \leq |\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx| + | + |c_0 \int_\Omega uvdx| \tag{12}$$

Ainsi, il suffit donc de majorer chaque terme de la somme.
Dans un premier temps, on a :

$$|c_0 \int_\Omega uvdx| = |c_0| \cdot |(u|v)_{L^2(\Omega)}| \tag{13}$$

On peut ainsi appliquer l'inégalité de Cauchy Schwartz, ce qui nous donne que :

$$|c_0 \int_\Omega uvdx| < |c_0| \cdot \|u\|_{L^2(\mathbf{\Omega})}\|v\|_{L^2(\mathbf{\Omega})} \tag{14}$$

On peut ensuite appliquer l'inégalité de Poincaré deux fois, ce qui nous donne que

$$|c_0 \int_\Omega uvdx| < |K^2 c_0| \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{15}$$

Nous allons maintenant faire la majoration de l'autre partie de l'intégrale :

$$|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx| = |\int_\Omega \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}| \tag{16}$$

On peut alors inverser la somme et l'intégrale. Il vient que

$$|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx| = |\sum_{i=0}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}| \tag{17}$$

On reconnait alors le produit scalaire sur $L^2(\mathbf{\Omega})$. Il vient que :

$$|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx| = |\sum_{i=0}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j})|_{L^2(\mathbf{\Omega})} \tag{18}$$

et donc, par définition de $H_0^1(\Omega)$ on a :

$$|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w dx| = (u, v)_{H_0^1(\mathbf{\Omega})} \tag{19}$$

Il vient alors que :

$$|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w dx| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{20}$$

Ainsi :

$$\forall (u, v) \in H_0^1(\Omega)^2, |a(u, v)| \leq [|K^2 c_0| + 1] \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{21}$$

La fonction a est donc continue.

- Montrons maintenant la coercivité de a :
On a :

$$a(u, u) > min(1, c_0) \times |u|^2_{H_0^1(\mathbf{\Omega})} \tag{22}$$

Donc, on a bien la coercivité, d'où Lax-Milgram. Il existe ainsi une unique solution au problème qui nous est posé.

2.4 Forme variationnelle discrète :

Soit V_h un SEV de $H_0^1(\mathbf{\Omega})$.
On a alors par lemme de Céa qu'il existe un unique $u_h \in V_h$ tel que

$$\forall v \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h) \tag{23}$$

Ainsi, si on note n_h la dimension de V_h, et $(\eta_i) \in V_h^n$ une base de V_h. On a l'existence de $(\lambda_i) \in R_h^n$ tel que $u_h = \sum_{i=1}^{n_h} \lambda_i \eta_i$.

Ainsi, on a $\forall i \in [1, n_h], a(u_h, \eta_i) = l(\eta_i)$, ce qui est équivalent à :

$$a(\sum_{i=1}^{n_h} \lambda_i \eta_j, \eta_j) = l(\eta_i) \tag{24}$$

Ainsi, on doit simplement résoudre le système suivant :

$$Ax = b \text{ avec } [A]_{i,j} = a(\eta_j, \eta_i) \text{ et } b_i = l(\eta_i)$$

on a donc bien :

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \int_\Omega \nabla \eta_i^T \cdot \nabla \eta_j dx + c_0 \int_\Omega \eta_i \eta_j dx \\ b_i &= \int_\Omega f \eta_i dx \end{aligned}$$

Pour montrer que ce système admet une unique solution, nous allons montrer que A est une matrice symétrique définie positive.
- Dans un premier temps, il est évident par la définition des coefficients de la matrice A que $A_{i,j} = A_{j,i}$
- Dans un second temps, nous allons montrer que A est une matrice symétrique définie positive.

Soit $x \in R^{n_h} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} x^T A x &= \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} A_{i,j} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} a(\eta_i, \eta_j) x_i x_j \\ &= a(\sum_{i=1}^{n_h} \eta_i x_i, \sum_{j=1}^{n_h} \eta_j x_j) \\ &= a(w, w) \text{ avec } w = \sum_{i=1}^{n_h} \eta_i x_i \end{aligned}$$

Par coercivité, on a $\exists \alpha > 0, a(w, w) > \alpha \|w\|^2$. On en conclut donc que A est symétrique semi-définie positive, ainsi inversible. Il existe ainsi une unique solution au problème variationnelle discret.

2.5 Élément de référence

Il est donc nécessaire de faire le calcul de l'intégrale suivante :

$$c_0 \int_\Omega \eta_i \eta_j dx \tag{25}$$

Pour cela, on va utiliser la stratégie de l'élément de référence. On va alors faire des changements de variables afin de se ramener au triangle de référence à savoir T_u qui est le triangle définit par les sommets $A^1 = (0, 0), A^2 = (0, 1), A^3 = (1, 0)$.

Nous allons donc chercher un changement de variable ϕ_T tel qu'on ait : $\Phi_T(A^i) = A^i_T$.
On prend alors le changement de variable suivant :

$$\forall M \in T_u,\ \Phi_T(M) = (1 - x_1 - x_2)A^1_T + x_1 A^2_T + x_2 A^3_T \tag{26}$$

Notons que le déterminant de la jacobienne de cette transformation que nous noterons $|J_\Phi|$ vaut deux fois l'aire du triangle sur lequel nous faisons le calcul.

On peut de plus exprimer les coordonnées d'un point dans le triangle T_u par l'expression de ces coordonnées barycentriques. Les coordonnées barycentriques sont exprimées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda^T_1(M) = 1 - x_1 - x_2 \\ \qquad\qquad \lambda^T_1(M) = x_2 \\ \qquad\qquad \lambda^T_1(M) = x_1 \end{cases}$$

On sait de plus que les coordonnées barycentriques sont conservées par des changements de variables affines. On a alors :

$$\lambda^u_i(M) = \lambda^T_i(\Phi_T(M))$$

Enfin, on a $\lambda^T_i(A^i_T) = \delta_{i,j}$ et $\eta_i(x_j, y_j) = \delta_{i,j}$

On sait par le cours que les fonctions de référence sont définies uniquement par le point au sommet des triangles Ainsi, on a :

$$\eta_{i|T} = \lambda^T_i$$

Il vient finalement que l'intégrale peut se calculer comme suit :

$$\begin{aligned} c_0 \int_T \eta_i \eta_j dx &= c_0 \int_T \lambda^T_i(x)\lambda^T_j(x)dx \\ &= c_0 \int_{Tu} \lambda^T_i(\Phi_T(x))\lambda^T_j(\Phi_T(x))dx \quad \text{Par formule de changement de variable} \\ &= c_0 \int_{T_u} \lambda^u_i(x)\lambda^u_j(x)dx \end{aligned}$$

Il faut maintenant calculer toutes les intégrales, pour i et j valant 1,2 ou 3. prenons par exemple le cas i=1 et j=3 :

$$\begin{aligned}
\frac{M_{13}}{|J_\Phi|c_0} &=_0^1 \int_0^{1-u} (1-u-v)vdvdu \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} (1-u)v - v^2 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-u)^3 - \frac{(1-u)^3}{3} du \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 u^3 du \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

2.6 Résolution numérique

Les résultats sont disponibles sur le notebook