

PHS2223

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
GÉNIE PHYSIQUE

Expérience 4 : Filtrage Spatial

Auteurs :
Guillaume Sheehy
Fabien Picot
Tien Nguyen
Esmat Zamani

Sous la responsabilité de
Pr. Frédéric LEBLOND

27 août 2024

Table des matières

1	Introduction	2
2	Théorie	3
2.1	Optique de Fourier	3
2.2	Système $4f$	4
2.3	Signaux, images et filtrage	5
3	Expérience à réaliser	5
4	Travail Préparatoire	6
5	Rapport final	7

1 Introduction

Le traitement de signaux et d'images est une étape nécessaire et est un enjeu souvent crucial au succès d'une multitude de prises de mesures. Les données enregistrées par des appareils de laboratoire comme des spectromètres et des caméras, qui deviennent de plus en plus communs, sont d'ordinaire accompagnées par du bruit. Généralement, le bruit issu de processus aléatoires est de fréquence plus élevée que le signal d'intérêt et il est possible d'en réduire la contribution à l'aide de filtres fréquentiels. Un filtre permettant de couper les hautes fréquences est appelé passe-bas alors qu'un filtre qui coupe les basses fréquences est appelé passe-haut. Bien sûr, la majorité du traitement de signal est typiquement fait sur ordinateur une fois les signaux/images échantillonnés et enregistrés. Ce faisant, une fraction de l'information contenue par un signal est toujours définitivement perdue. Il est donc nécessaire de toujours s'assurer d'obtenir le meilleur signal possible avant son enregistrement par un instrument.

Dans cette expérience, vous serez amenés à explorer les fondements du traitement et filtrages numériques d'images dans le domaine de Fourier. Vous utiliserez un système $4f$ optique afin de transférer le signal optique d'une image dans son espace de Fourier. Par la suite, vous utiliserez un iris dont l'ouverture peut être ajustée afin de produire un filtre passe-bas. Finalement, vous pourrez enregistrer les images filtrées produites par le système afin de caractériser l'effet d'un filtre optique.

2 Théorie

2.1 Optique de Fourier

L'optique de Fourier consiste en l'étude des phénomènes d'optique classique en utilisant la transformée de Fourier. Pour ce faire, les fronts d'onde sont considérés comme des combinaisons, ou superpositions, d'ondes planes. L'optique de Fourier partage ainsi plusieurs éléments avec le principe de Huygens, où les fronts d'onde sont considérés comme des superpositions d'ondes sphériques. Pour commencer, il est utile de considérer l'équation d'onde homogène :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

où $u(\mathbf{r}, t)$ est la partie réelle de l'onde électro-magnétique se propageant dans le vide. Lorsque l'on considère de la lumière à une fréquence/énergie/longueur d'onde/couleur fixe (comme pour un laser),

$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \psi(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \}.$$

Pour une onde se propageant en \hat{z} , une solution générale de cette équation peut être formée par la superposition de toutes les ondes planes élémentaires tel que

$$\psi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{\pm i z \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y.$$

Si l'on considère

$$\psi_0(x, y) = \psi(x, y, z)|_{z=0},$$

alors

$$\psi_0(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (2)$$

En d'autres mots,

$$\Psi_0(k_x, k_y) = \mathcal{F} \{ \psi_0(x, y) \}$$

et

$$\psi_0(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ \Psi_0(k_x, k_y) \}$$

avec \mathcal{F} la transformée de Fourier. Ce résultat simple est le fondement même de l'optique de Fourier et implique que l'évolution spatiale d'une onde peut être entièrement décrite par sa composition fréquentielle initiale (fréquences spatiales k_x et k_y ici).

Considérons maintenant un faisceau de lumière d'intensité initialement uniforme modulé par une ouverture $A(x, y)$. L'amplitude complexe $U(x, y, z \rightarrow \infty)$ au champ lointain est donnée par l'équation de la diffraction de Fraunhofer et

$$U(x, y, z \rightarrow \infty) \propto \iint_{-\infty}^{+\infty} A(x', y') e^{-i(f_x x' + f_y y')} dx' dy'$$

En d'autres mots,

$$U(x, y, z \rightarrow \infty) \propto \mathcal{F}(A(x, y))_{f_x f_y}.$$

Bien sur, l'équation de la diffraction de Fraunhofer est valide lorsque $U(x, y, z)$ est observé en champ lointain (à l'infini, $z \rightarrow \infty$), mais aussi observé au plan focale d'une lentille convergente. Dans ce cas, les fréquences spatiales f_x et f_y dépendent de la longueur d'onde du faisceau et de la longueur focale de la lentille utilisée tel que

$$f_x = \frac{x}{\lambda f} \quad \text{et} \quad f_y = \frac{y}{\lambda f}.$$

De plus, la fonction de modulation $A(x, y)$ doit être correctement définie pour décrire le type de modulation auquel le faisceau de lumière est soumis. Par exemple, une ouverture carrée de largeur L centrée sur l'axe optique ($x = 0, y = 0$) est décrite par une fonction de modulation

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x, y \in [-L/2, L/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De manière similaire, il est possible d'imprimer une fonction de modulation arbitrairement complexe (une image par exemple) sur une feuille de plastique transparent (acétate) et de s'en servir comme ouverture au travers de laquelle on fait passer un faisceau d'intensité initialement uniforme.

2.2 Système $4f$

Un système $4f$, parfois appelé corrélateur $4f$, est un dispositif constitué de 2 lentilles permettant le filtrage spectral (ou corrélation) d'une fonction $f(x, y)$ par une fonction $g(x, y)$. Le fonctionnement de ce dispositif est intimement lié aux résultats fondamentaux de l'optique de Fourier et de la diffraction de Fraunhofer. Le système $4f$ est constitué de deux lentilles de distances focales f . La première est placée à distance f du plan d'entrée du système. Un plan imaginaire, appelé *plan de Fourier*, se trouve à distance f de la première lentille. La seconde lentille est positionnée à distance f du *plan de Fourier* et le plan de sortie du système se trouve à f de la seconde lentille. La longueur totale du système est donc de $4f$, d'où son nom. La figure suivante illustre le fonctionnement et la configuration de base de ce système.

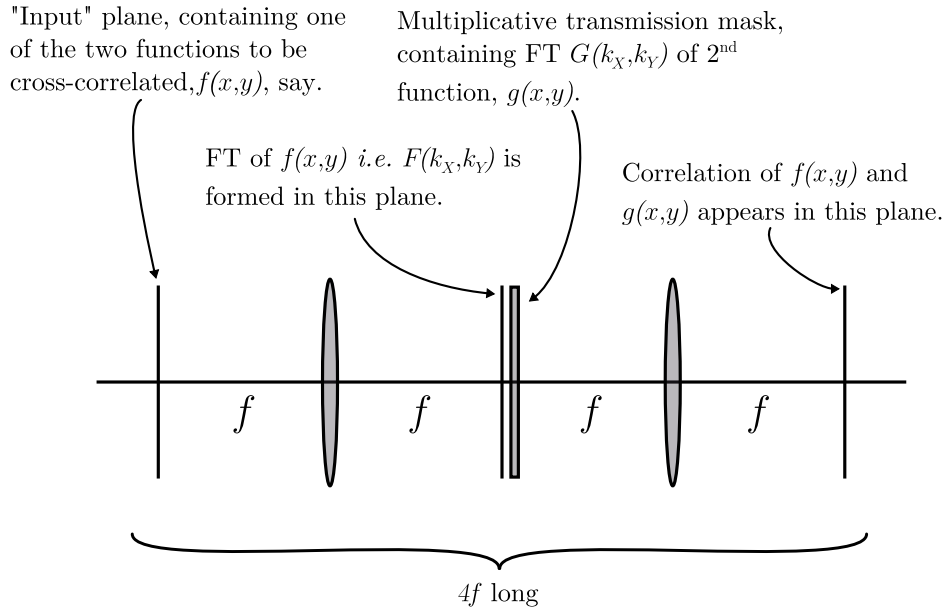


FIGURE 1 – Système $4f$

https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_optics#/media/File:4F_Correlator.svg

2.3 Signaux, images et filtrage

Référez vous au document *Demo - Fourier Transform.ipynb* pour en apprendre plus sur le filtrage de signaux et d'images à l'aide de la transformée de Fourier et de filtres.

3 Expérience à réaliser

Le but de cette expérience est d'utiliser un système $4f$ afin d'appliquer un filtre passe-bas sur une image dans le domaine de Fourier. Pour ce faire, vous allez assembler le système optique suivant (Figure 2). La première partie de ce système a pour but l'illumination uniforme (gaussienne) d'une image imprimée sur acétate et d'une cible de résolution. Pour ce faire, un laser 632 nm est utilisé comme source. Le faisceau est aligné à l'aide de deux miroirs et de leurs vis micrométriques. Un objectif de microscope permet de focaliser le faisceau du laser au centre d'un sténopé produisant un profil d'intensité gaussienne de qualité suffisante pour les besoins de cette expérience. Finalement, une lentille convergente (f_1) est utilisée afin de collimer le faisceau à une taille permettant d'illuminer l'entièreté de l'image acétate. La seconde partie du système correspond à un système $4f$ utilisant les lentilles f_2 et f_3 . Contrairement à un système $4f$ de base comme celui présenté précédemment, le système $4f$ ici utilise deux lentilles de focales différentes. Le choix de f_3 est fait en fonction du grossissement optique nécessaire pour produire une image de la taille du capteur de la caméra. Un mauvais choix produit une image trop petite causant des zones noires sur les images enregistrées ou une image trop grosse donnant ainsi un mauvais champ de vue.

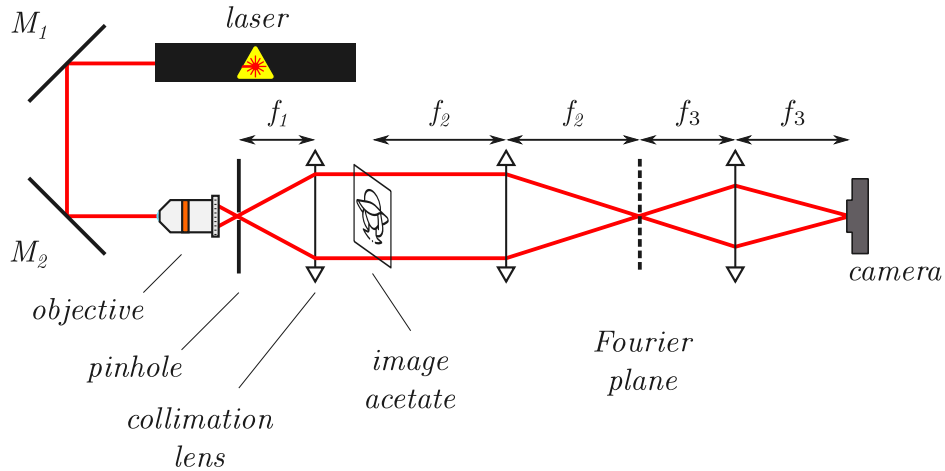


FIGURE 2 – Montage du système optique de filtrage spatial.

Les lentilles à utiliser sont ;

- f_1 Lentille convergente $\phi = 2''$ $f = 30$ cm
- f_2 Lentille convergente $\phi = 2''$ $f = 50$ cm
- f_3 Lentille convergente $\phi = 1''$ $f = 10$ cm

Une fois le système assemblé et aligné, placez une image (acétate) et un fond blanc sur le plan de Fourier afin de visualiser la transformée de Fourier de l'image. Vous pouvez prendre quelques instants et réaliser que vous venez de produire une transformée de Fourier à partir de photons. Lorsque le moment terminé, retirez le plan blanc et lancez le programme *ThorCam* et utilisez les configurations suivantes :

- Frame rate \rightarrow max
- Gain \rightarrow auto
- Gainboost \rightarrow on
- White balance \rightarrow auto

Vous devez ensuite prendre les images suivantes et **notez** la taille de l'ouverture de l'iris pour **chacune** ;

3 images de l'acétate

- Iris complètement ouvert au maximum.
- Iris partiellement fermé de sorte à faire disparaître les rayures verticales.
- Iris fermé au maximum.

10 images d'une cible de résolution

Pour celles-ci, vous devez placer la cible de résolution à 2 positions différentes. En premier, placez la cible afin de voir les bandes 1 à 7 dont les fréquences spatiales sont $f \in [1.25, 1.67, 2.08, 2.5, 2.86, 3.33, 3.85]$ mm^{-1} . Prenez une image pour les ouvertures d'iris $d \in [1, 2, 4]$ mm. Positionnez maintenant la cible afin de voir les bandes 8 à 14 dont les fréquences spatiales sont $f \in [4.17, 5, 6.67, 10, 12.5, 16.67, 26]$ mm^{-1} . Prenez une image pour les ouvertures d'iris $d \in [3, 4, 5, 7, 9, 16, 25]$ mm

Note importante

Puisque vous aurez à présenter plusieurs images dans vos rapports pour ce laboratoire, référez-vous au document *Demo - Subplot.ipynb* afin de le faire proprement sans trop de figures différentes. Présentez les images en sous-groupes de manière logique et bien identifiées.

4 Travail Préparatoire

Vous devez remettre la première moitié de votre rapport de laboratoire avant le début de la séance. Cette première partie devra être constituée des sections : introduction, théorie, méthodologie et hypothèse. La grille d'évaluation suivante sera utilisée pour noter cette partie du rapport.

Partie 1			
Sections	Eléments		
Introduction			/1
Théorie		0	/3
	Optique Fourier		/1
	Diffraction et système 4f		/1
	Signaux, images et filtres		/1
Méthodologie		0	/2
	présentation des montages		/1
	explications		/1
Hypothèse		0	/4
	filtrage im1.png		/1
	filtrage lena_clean.png		/1
	Top-hat vs gaussian		/1
	explications artefacts top-hat		/1
Total		0	/10

Écrivez une courte introduction dans laquelle vous présentez le but de l'expérience, ce que vous allez mesurer ainsi que comment vous allez le mesurer. Présentez un résumé de vos attentes ainsi que du contenu global du rapport. Entrez directement dans le vif du sujet et n'écrivez pas une introduction trop longue (max 1/2 page).

Pour la section théorie, vous devrez reprendre les éléments pertinents (pas tous) en lien avec l'optique de Fourier et la diffraction de Fraunhofer et comment ils mènent aux propriétés extraordinaires des systèmes 4f. Présentez aussi les éléments de base du filtrage spatial et comment cette pratique peut être réalisée à

l'aide des transformées de Fourier.

Pour la méthodologie, une simple présentation des montages ainsi qu'une explication des manipulations suffisent. Vous pouvez récupérer les figures de ce document, mais assurez vous de les citer proprement.

Pour votre hypothèse, vous aller utiliser des transformées de Fourier pour faire le filtrage et l'analyse d'images de référence que vous pouvez trouver dans le répertoire *Data*. Cela inclut les images *marvin_clean.png*, *marvin_stripped.png* et *im1_checkboard.png*.

Vous devez :

1. Filtrez les oscillations en \hat{y} sur l'image *im1_checkboard.png* présentant un patron d'échec (checkboard pattern). Présentez l'image d'origine, sa transformée de Fourier, la transformée que vous aurez filtrée et l'image filtrée.
2. Filtrez l'image de Marvin (*marvin_clean.png*) avec 3 filtres passe-bas top-hat ($f_c \in [50, 75, 100]$ pixel⁻¹). Présentez l'image d'origine et sa TF, les filtres utilisés et les images filtrées.
3. Filtrez l'image de Marvin (*marvin_clean.png*) avec filtre passe-bas top-hat et gaussien ayant la même fréquence de coupure ($f_c = 50$ pixels⁻¹) et comparez le résultat. Discutez des artefacts causés par le filtre top-hat et expliquez pourquoi le filtre gaussien n'en cause pas. Présentez l'image d'origine, les 2 filtres utilisés et les 2 images filtrées.

5 Rapport final

Vous devez remettre la seconde moitié de votre rapport de laboratoire une semaine après la séance. Cette seconde partie devra être constituée des sections : résultats, discussion et conclusion. La grille d'évaluation suivante sera utilisée pour noter cette partie du rapport.

Partie 2			
Sections	Eléments		
Résultats			/4
	images acétate		/1
	images cible résolution		/1
	fréquence de coupure vs iris		/2
Discussion		0	/5
	filtre numérique lena_stripped		/2
	comparaison avec image acétate		/1
	Q1		/1
	Q2		/1
Conclusion			/1
Total			/10

Pour votre section résultats, vous devez montrer les images prises de l'image sur l'acétate et de la cible de résolution. Vous devez ensuite déterminer la fréquence de coupure sur chaque image de la cible de résolution. Présentez un graphique de la fréquence de coupure vs l'ouverture de l'iris.

Pour votre discussion, commencez par reproduire l'effet du filtre passe-bas de l'iris numériquement. Pour ce faire, utilisez l'image (*marvin_stripped.png*) qui comporte des lignes verticales semblables à celles visibles sur les acétates. Présentez 6 images filtrées numériquement et essayez de reproduire les fréquences de coupures expérimentales. Comparez qualitativement vos résultats numériques et expérimentaux. Finalement, répondez aux questions suivantes ;

1. Quelle devrait être la fréquence de coupure du filtre de l'iris selon les paramètres physiques de l'expérience¹ ? Est-ce que vos résultats expérimentaux sont cohérents avec la théorie ?
2. Quel pourrait être l'utilité pratique d'un système $4f$? Donnez des exemples. Comment pourrait-on créer un filtre passe-haut (au lieu de passe-bas) avec ce système ?

1. Référez vous à la section théorie avec les équations de fréquences de coupure en x et en y . Formulez la fréquence de coupure totale à partir de ces deux équations, sachant que le filtre utilisé possède une symétrie circulaire.