

Spectromètre

Travail préparatoire

PHS3910 – Techniques expérimentales et instrumentation
Équipe L3

Émile Guertin-Picard
2208363

Maxime Rouillon
2213291

Marie-Lou Dessureault
2211129

Philippine Beaubois
2211153

Résumé – yap yap

I. INTRODUCTION

yap yap

II. MÉTHODES

Le système optique du spectromètre est schématisé dans la figure 1.

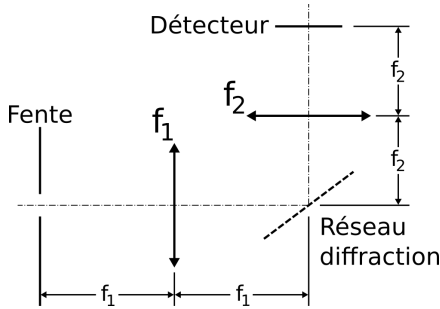


Figure 1 : Schéma simplifié du spectromètre avec toutes ses composantes.

Le parcours d'un faisceau passant à travers le spectromètre a été simulé à l'aide de l'optique de Fourier. Le champ initial a été modélisé par une fonction rectangle en deux dimensions, afin de modéliser la forme du champ après avoir traversé une fente. Celui-ci peut donc être décrit par :

$$U(x_0, y_0) = \text{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right)\text{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right),$$

où a et b sont la largeur et la hauteur de la fente respectivement. Le champ transmis par la première lentille a donc pu être déterminé :

$$\begin{aligned} U_1(x_1, y_1) &\propto \mathcal{F}\{U(x_0, y_0)\}\left(\frac{x_1}{\lambda f_1}, \frac{y_1}{\lambda f_1}\right) \\ &\propto \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right)\text{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\right\}\left(\frac{x_1}{\lambda f_1}, \frac{y_1}{\lambda f_1}\right) \\ &\propto \text{sinc}\left(\frac{y_1 b}{\lambda f_1}\right) * \text{sinc}\left(\frac{x_1 a}{\lambda f_1}\right), \end{aligned}$$

où f_1 est la longueur focale de la lentille. Le réseau de diffraction blazé modifie la forme du champ, ce qui a pu être modélisé à l'aide d'un masque :

$$M(x_1, y_1) = \left(\text{comb}\left(\frac{x_1}{\Lambda}\right) * \text{rect}\left(\frac{x_1}{\Lambda}\right)e^{i\beta x}\right)\text{rect}\left(\frac{x_1}{N\Lambda}\right).$$

Ici, la forme du champ n'est pas limitée par la grandeur du réseau de diffraction, mais par les dimensions de la fente ; le terme $\text{rect}(x_1/N\Lambda)$ a pu être négligé. Le champ à la sortie de la deuxième lentille revient à effectuer la transformée de Fourier de $U_1(x_1, y_1)$:

$$\begin{aligned} U_2 &\propto \mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{y_1 b}{\lambda f_1}\right) * \text{sinc}\left(\frac{x_1 a}{\lambda f_1}\right)M\right\}\left(\frac{x_2}{\lambda f_2}, \frac{y_2}{\lambda f_2}\right) \\ &\propto \text{rect}\left(\frac{y_2 f_1}{b f_2}\right)\text{rect}\left(\frac{x_2 f_1}{a f_2}\right) * \text{comb}\left(\frac{x_2 \Lambda}{\lambda f_2}\right) \\ &\quad \text{sinc}\left(\frac{x_2 \Lambda}{\lambda f_2}\right) * \delta\left(2\pi\left(x_2 - \frac{\beta}{2\pi}\right)\right) \\ &\propto \text{rect}\left(\frac{y_2 f_1}{b f_2}\right)\text{rect}\left(\frac{x_2 f_1}{a f_2}\right) * \text{comb}\left(\frac{x_2 \Lambda}{\lambda f_2}\right) \\ &\quad \text{sinc}\left(\frac{\Lambda}{\lambda f_2}\left(x_2 - \frac{\lambda f_2 \beta}{2\pi}\right)\right). \end{aligned}$$

Pour évaluer le terme $\text{rect}\left(\frac{x_2 f_1}{a f_2}\right) * \text{comb}\left(\frac{x_2 \Lambda}{\lambda f_2}\right)$, la fonction comb a été remplacée par sa définition :

$$\begin{aligned} \text{rect}\left(\frac{x_2 f_1}{a f_2}\right) * \text{comb}\left(\frac{x_2 \Lambda}{\lambda f_2}\right) &= \text{rect}\left(\frac{y_2 f_1}{b f_2}\right) * \sum_{\infty} \delta\left(x_2 - \frac{n \lambda f_2}{\Lambda}\right) \\ &= \sum_{\infty} \text{rect}\left(\frac{f_1}{a f_2}\left(x_2 - \frac{n \lambda f_2}{\Lambda}\right)\right). \end{aligned}$$

En rassemblant tous les termes, on a obtenu :

$$\begin{aligned} U_2(x_2, y_2) &\propto \text{rect}\left(\frac{y_2 f_1}{b f_2}\right) \sum_{\infty} \text{rect}\left(\frac{f_1}{a f_2}\left(x_2 - \frac{n \lambda f_2}{\Lambda}\right)\right) \\ &\quad \text{sinc}\left(\frac{\Lambda}{\lambda f_2}\left(x_2 - \frac{\lambda f_2 \beta}{2\pi}\right)\right). \end{aligned}$$

On sait que $\beta x = \phi$, où ϕ est le décalage de phase entre deux faisceaux à la sortie du réseau de diffraction. La différence de parcours $\delta(x)$ est directement reliée au décalage de phase par $\phi = 2\pi\delta(x)/\lambda$, où $\delta(x) = 2\tan\theta x$. Ce résultat est illustré dans la figure 2.

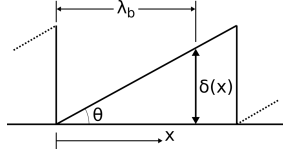


Figure 2 : Représentation de la différence de parcours de deux faisceaux sur un réseau de diffraction blazé. Ici, λ_B correspond à la longueur d'onde de Blaze.

En faisant l'approximation des petits angles $\tan\theta \approx \theta$, on retrouve :

$$\beta x = \frac{2\pi\delta(x)}{\lambda} \approx \frac{4\pi\theta x}{\lambda}$$

$$\beta \approx \frac{4\pi\theta}{\lambda}$$

Avec l'équation de Bragg pour la diffraction, et en choisissant l'ordre $m = 1$, on a trouvé que $2\Lambda\sin\theta = \lambda_B \rightarrow \theta \approx \lambda_B/2\Lambda$. On a donc :

$$\beta \approx \frac{2\pi\lambda_B}{\lambda\Lambda}.$$

En remplaçant ce terme dans la fonction *sinc*, on a $\text{sinc}(\frac{\Lambda}{\lambda f_2}(x_2 - \frac{\lambda_B f_2}{\Lambda}))$. En comparant cette fonction *sinc* avec la fonction *rect* en x , on a pu remarquer que le terme $n = 1$ de la somme s'aligne parfaitement avec la fonction *sinc* lorsque $\lambda = \lambda_B$, où λ_B est la longueur d'onde de Blaze. Par conséquent, on considère que pour des longueurs d'onde proches de λ_B , l'ordre $n = 1$ est aussi suffisamment aligné à la fonction *sinc*. La forme de *sinc* nous a permis d'éliminer tous les autres termes $n \neq 1$, et on a obtenu :

$$U_2(x_2, y_2) \propto \text{rect}\left(\frac{y_2 f_1}{b f_2}\right) \text{rect}\left(\frac{f_1}{a f_2}\left(x_2 - \frac{\lambda f_2}{\Lambda}\right)\right) \text{sinc}\left(\frac{\Lambda}{\lambda f_2}\left(x_2 - \frac{\lambda f_2}{\Lambda}\right)\right).$$

Les largeurs du *sinc* et du *rect* en x sont proportionnelles à $\lambda f_2/\Lambda$ et $a f_2/f_1$, respectivement, ce qui nous a permis de traiter $\text{sinc} \approx 1$ parce que l'ordre de grandeur (pour les contraintes du projet) de λ/Λ est de $\approx 10^{-1}$ alors que celui de a/f_1 est de $\approx 10^{-2}$. La forme finale de $U_2(x_2, y_2)$ est :

$$U_2(x_2, y_2) \propto \text{rect}\left(\frac{y_2 f_1}{b f_2}\right) \text{rect}\left(\frac{f_1}{a f_2}\left(x_2 - \frac{\lambda f_2}{\Lambda}\right)\right).$$

Une contrainte du projet consiste à ce que la largeur du spectre d'ordre 1 capté par la caméra soit d'une largeur équivalente ou légèrement inférieure à la largeur de la caméra. Mathématiquement, ceci correspond à $x(\lambda_{bleu}) - x(\lambda_{rouge}) \leq D_{cam}$. On a pu approximer que $x(\lambda)$ correspond au terme de décalage de la fonction *rect* en x . Les dimensions de la caméra utilisée pour le spectromètre sont de 1280 x 1024 pixels, chacun étant un carré de 5.2 μm côté. La zone sensible de la caméra est donc de 6.656 x 5.323 mm [reference](#). Par conséquent, il a été nécessaire

d'optimiser la relation suivante en fonction des lentilles disponibles (25, 30, 50 ou 100 mm de longueur focale) :

$$\frac{f_2}{\Lambda}(\lambda_{bleu} - \lambda_{rouge}) \leq 6.656 \text{ mm}.$$

Ayant une valeur de f_2 déterminée, la résolution du spectromètre a pu ensuite être optimisée. La résolution a été trouvée en considérant que deux longueurs d'onde voisines, λ_1 et λ_2 , se touchent à une valeur de x qui correspond à :

$$x = \frac{a f_2}{2 f_1} + \frac{\lambda_1 f_2}{\Lambda} = -\frac{a f_2}{2 f_1} + \frac{\lambda_2 f_2}{\Lambda}$$

$$\frac{a f_2}{f_1} = \frac{f_2}{\Lambda}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\Lambda a}{f_1}$$

Afin de modéliser l'équation trouver et de la visualisé, un code python a été créé. Celui-ci recré, à partir de l'équation de U2, l'image apparaissant sur la caméra. Plusieurs longueur d'onde du rouge au bleu ont été testées pour vérifier la fiabilité de l'équation avec les paramètres obtenus précédemment soit les deux focales, ainsi que les dimensions de la fente. Ce processus a permis également de prédire l'emplacement des différentes longueurs d'onde sur la caméra et ainsi de vérifier si le spectre complet de la lumière visible était présent. Il permet également d'observer les impacts des différents paramètres sur la forme et l'aspect des images obtenues. Concrètement le code python prend l'équation de U2 et l'implémente sur une grille de la taille du capteur de la caméra. Cette partie permet d'obtenir la position et la forme de l'image. Par la suite, la fonction *wavelength_order* permet de colorier l'image en fonction de la longueur d'onde, ainsi il est possible de visualiser l'emplacement, la forme ainsi que la couleur de l'image.

III. RÉSULTATS

En considérant $\lambda_{bleu} = 380 \text{ nm}$ et $\lambda_{rouge} = 780 \text{ nm}$, les largeurs des spectres obtenues sont présentées dans le tableau I.

Tableau I – Résultats des largeurs de spectres pour des lentilles ayant des longueurs focales f_2 de 25, 30, 50 ou 100 mm. Le réseau de diffraction a 600 lignes/mm, ce qui correspond à un pas de réseau de $\Lambda = 1/600 \text{ mm}$ [rajouter citation fiche tech réseau diffraction](#).

Λ (mm)	f_2 (mm)	$D_{spectre}$ (mm)	Δ_D
1/600	25	6	-0.656
	30	7.20	0.544
	50	12	5.344
	100	24	17.344

La résolution a été déterminée pour des valeurs de a allant de 0 à 3 mm et pour les lentilles disponibles. Les résultats sont présentés dans la figure 3.

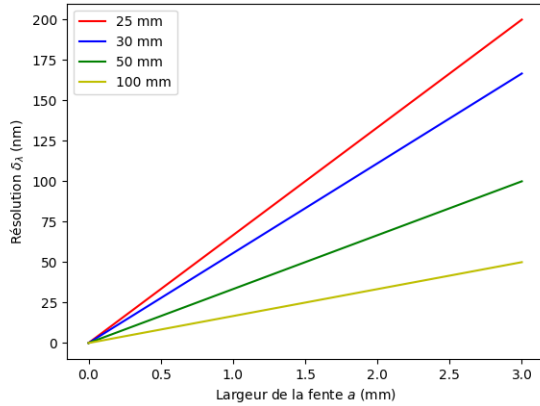


Figure 3 : Résolution du spectromètre en fonction de la largeur de la fente a et la longueur focale f_1 de la lentille

La figure suivante montre la simulation de L'équation U2 pour les parametres suivants : $f_1=50$ mm, $f_2=25$ mm, largeur de la fente=0.1mm, longueur de la fente=20mm. Ce résultats est obtenu pour 60 longueurs d'onde différentes variant du rouge(780nm) au bleu (390nm).

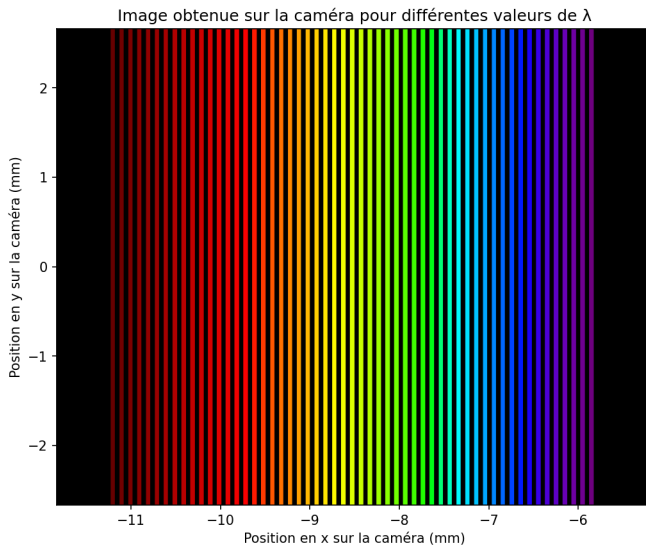


Figure 4 : Image appaissant sur la caméra

IV. DISCUSSION

La simulation de la modélisation mathématique donne un résultat satisfaisant. En effet, on remarque que tout le spectre de la lumière visible est présent sur la caméra. Il est cependant important de mentionner qu'il a fallu ajuster la position de la caméra. Cette manipulation était nécessaire car le modèle mathématique considère que c'est l'ordre 0 qui est placé à 90 degrés du rayon incident et il faut que ce soit l'ordre 1 qui soit placé dans le capteur. En effet, c'est à

l'ordre 1 qu'on peut observer la diffraction avec la plus forte intensité lumineuse. On remarque également qu'avec les paramètres utilisés, le spectre est plus étroit que le capteur. Cette situation n'est pas problématique car il est préférable d'avoir le spectre complet plutôt que d'avoir la totalité du capteur utilisée avec des bouts de spectre manquants.

Lors de la simulation, il a été remarqué que c'est le paramètre de la largeur de la fente d'entrée qui a le plus d'impact sur l'image car elle a une incidence directe sur la largeur du rectangle de l'image. C'est-à-dire que plus la fente est large, plus l'image rectangulaire (fente de sortie) sera elle aussi de plus en plus large. La longueur de la fente n'a quant à elle pas eu d'impact visible sur l'image. Les longueurs focales sont restées constantes car il s'agit déjà du choix le plus optimal possible.

On peut donc dire que c'est la taille de l'image, soit la largeur de la fente de sortie, qui a le plus d'impact sur la résolution comparée, par exemple, au nombre de pixels car même pour la largeur de fente d'entrée la plus petite (0.1 mm), la largeur de la fente de sortie reste beaucoup plus large que la largeur du pixel. Ainsi, dans ce cas, la limitation de la résolution vient de la fente de sortie car si deux longueurs d'onde sont trop proches, les images se superposeront et rendront ainsi la distinction entre les deux difficile.

Puisque le système utilise des lentilles convergentes, l'impact de l'aberration sphérique[Edmund Optics(2024)] est à considérer sur la résolution. En effet, lorsqu'un rayon lumineux passe par une lentille convergente, les rayons passant sur les extrémités de la lentille n'auront pas la même image que les rayons passant par le centre de la lentille. Donc, dans notre cas, ce sont les rayons dans le rouge ou dans le bleu qui subiront le plus cette aberration. Celle-ci a pour effet de légèrement courber l'image ainsi que de créer un flou dans la périphérie de celle-ci, ce qui affecte par conséquent la résolution du système, surtout pour les longueurs d'onde extrêmes.

V. ANNEXES

A. Développement mathématique détaillé

yap yap

RÉFÉRENCES

[Edmund Optics(2024)] Edmund Optics. How aberrations affect machine vision lenses, 2024. URL <https://www.edmundoptics.fr/knowledge-center/application-notes/imaging/how-aberrations-affect-machine-vision-lenses/>. Consulté le 2 novembre 2024.