

# Spectromètre

Travail préparatoire

PHS3910 – Techniques expérimentales et instrumentation  
Équipe L3

Émile Guertin-Picard  
2208363

Maxime Rouillon  
2213291

Marie-Lou Dessureault  
2211129

Philippine Beaubois  
2211153

**Résumé** – Modélisation d'un spectromètre  $4f$  avec une première lentille de focale  $f_1 = 50$  mm, un réseau de diffraction de pas  $\Lambda = 1/600$  mm dont la normale est orientée à  $30^\circ \pm 1^\circ$  de l'axe venant de la première lentille et diffractant la lumière à  $90^\circ$  vers une seconde lentille de focale  $f_2 = 25$  mm avant d'atteindre un capteur rectangulaire d'environ  $6,7 \pm 0,1$  mm de côté. L'intensité du champ électrique sur le capteur est de forme rectangulaire et la position d'un pic lumineux est proportionnelle à sa longueur d'onde.

## I. INTRODUCTION

Dans le cadre du cours PHS3910, en vue d'optimiser les coûts et la résolution d'un spectromètre réel, ce rapport présente la modélisation d'un spectromètre comprenant 2 lentilles, une fente et un réseau de diffraction. En suivant l'optique de Fourier pour un système  $4f$ , avec une onde restreinte en un rectangle au départ, la forme de l'onde dans l'espace de Fourier à la deuxième focale de la première lentille, de longueur focale  $f_1 = 50$  mm, est déterminée. Ensuite, le réseau de diffraction, d'un pas  $\Lambda = 1/600$  mm et qui forme un angle de  $30^\circ \pm 1^\circ$  entre sa normale et l'axe d'entrée du spectromètre, sépare les longueurs d'onde qui sont individuellement retransformées à la deuxième lentille, de focale  $f_2 = 25$  mm, avant de converger sur la caméra. Chaque longueur d'onde forme un pic d'une largeur de  $(0,05 \pm 0,01)$  mm lorsque la fente fait  $(10 \pm 1)\mu\text{m}$  de large à une position spécifique sur la caméra.

## II. MÉTHODES

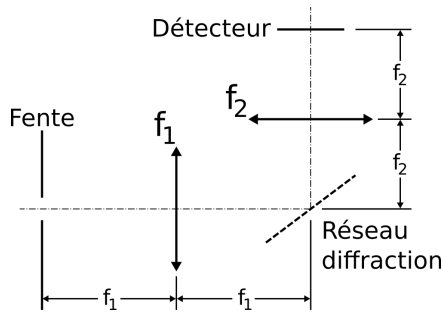


Figure 1 : Schéma simplifié du spectromètre avec toutes ses composantes [3].

Le système optique du spectromètre est schématisé dans la figure 1. Le parcours d'un faisceau passant à travers le spectromètre a été simulé à l'aide de l'optique de Fourier. Le champ initial a été modélisé par une fonction rectangle en deux dimensions, afin de modéliser la forme du champ après avoir traversé une fente. Celui-ci peut donc être décrit par :

$$U(x_0, y_0) = \text{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right) \text{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right),$$

où  $a$  et  $b$  sont la largeur et la hauteur de la fente respectivement. Le champ transmis par la première lentille a donc pu être déterminé :

$$U_1(x_1, y_1) \propto \mathcal{F}\{U(x_0, y_0)\} \left(\frac{x_1}{\lambda f_1}, \frac{y_1}{\lambda f_1}\right) \\ \propto \text{sinc}\left(\frac{y_1 b}{\lambda f_1}\right) * \text{sinc}\left(\frac{x_1 a}{\lambda f_1}\right),$$

où  $f_1$  est la longueur focale de la lentille. Le réseau de diffraction blasé modifie la forme du champ, ce qui a pu être modélisé à l'aide d'un masque [3] :

$$M(x_1, y_1) = \left(\text{comb}\left(\frac{x_1}{\Lambda}\right) * \text{rect}\left(\frac{x_1}{\Lambda}\right) e^{i\beta x}\right) \text{rect}\left(\frac{x_1}{N\Lambda}\right).$$

Ici, la forme du champ n'est pas limitée par la grandeur du réseau de diffraction, mais par les dimensions de la fente ; le terme  $\text{rect}(x_1/N\Lambda)$  a pu être négligé. Le champ à la sortie de la deuxième lentille revient à effectuer la transformée de Fourier de  $U_1(x_1, y_1)$  :

$$U_2 \propto \mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{y_1 b}{\lambda f_1}\right) * \text{sinc}\left(\frac{x_1 a}{\lambda f_1}\right) M\right\} \left(\frac{x_2}{\lambda f_2}, \frac{y_2}{\lambda f_2}\right) \\ \propto \text{rect}\left(\frac{y_2 f_1}{b f_2}\right) \text{rect}\left(\frac{x_2 f_1}{a f_2}\right) * \text{comb}\left(\frac{x_2 \Lambda}{\lambda f_2}\right) \\ \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Lambda}{\lambda f_2} \left(x_2 - \frac{\lambda f_2 \beta}{2\pi}\right)\right).$$

Pour évaluer le terme  $\text{rect}\left(\frac{x_2 f_1}{a f_2}\right) * \text{comb}\left(\frac{x_2 \Lambda}{\lambda f_2}\right)$ , la fonction  $\text{comb}$  a été remplacée par sa définition :

$$\text{rect}\left(\frac{x_2 f_1}{a f_2}\right) * \text{comb}\left(\frac{x_2 \Lambda}{\lambda f_2}\right) = \sum_{\infty} \text{rect}\left(\frac{f_1}{a f_2} \left(x_2 - \frac{n \lambda f_2}{\Lambda}\right)\right).$$

En rassemblant tous les termes, on a obtenu :

$$U_2(x_2, y_2) \propto \text{rect}\left(\frac{y_2 f_1}{b f_2}\right) \sum_{\infty} \text{rect}\left(\frac{f_1}{a f_2} \left(x_2 - \frac{n \lambda f_2}{\Lambda}\right)\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Lambda}{\lambda f_2} \left(x_2 - \frac{\lambda f_2 \beta}{2\pi}\right)\right).$$

On sait que  $\beta x = \phi$ , où  $\phi$  est le décalage de phase entre deux faisceaux à la sortie du réseau de diffraction. La différence de parcours  $\delta(x)$  est directement reliée au décalage de phase par  $\phi = 2\pi\delta(x)/\lambda$ , où  $\delta(x) = 2\tan\theta x$ . Ce résultat est illustré dans la figure 2.

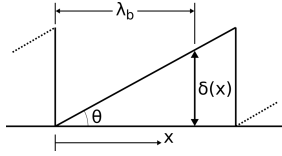


Figure 2 : Représentation de la différence de parcours de deux faisceaux sur un réseau de diffraction blasé. Ici,  $\lambda_B$  correspond à la longueur d'onde de Blaze.

En faisant l'approximation des petits angles  $\tan\theta \approx \theta$  :

$$\beta x = \frac{2\pi\delta(x)}{\lambda} \approx \frac{4\pi\theta x}{\lambda} \Rightarrow \beta \approx \frac{4\pi\theta}{\lambda}.$$

Avec l'équation de Bragg pour la diffraction, et en choisissant l'ordre  $m = 1$ , il se trouve que  $2\Lambda\sin\theta = \lambda_B \rightarrow \theta \approx \lambda_B/2\Lambda$ . On a donc :

$$\beta \approx \frac{2\pi\lambda_B}{\lambda\Lambda}.$$

En remplaçant ce terme dans la fonction  $\text{sinc}$ , il est possible de trouver  $\text{sinc}\left(\frac{\Lambda}{\lambda f_2} \left(x_2 - \frac{\lambda_B f_2}{\Lambda}\right)\right)$ . En comparant cette fonction  $\text{sinc}$  avec la fonction  $\text{rect}$  en  $x$ , il est possible de voir que le terme  $n = 1$  de la somme s'aligne parfaitement avec la fonction  $\text{sinc}$  lorsque  $\lambda = \lambda_B$ , où  $\lambda_B$  est la longueur d'onde de Blaze. Par conséquent, on considère que pour des longueurs d'onde proches de  $\lambda_B$ , l'ordre  $n = 1$  est aussi suffisamment aligné à la fonction  $\text{sinc}$ . La forme de  $\text{sinc}$  a permis d'éliminer tous les autres termes  $n \neq 1$ , et il a été obtenu :

$$U_2(x_2, y_2) \propto \text{rect}\left(\frac{y_2 f_1}{b f_2}\right) \text{rect}\left(\frac{f_1}{a f_2} \left(x_2 - \frac{\lambda f_2}{\Lambda}\right)\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Lambda}{\lambda f_2} \left(x_2 - \frac{\lambda f_2}{\Lambda}\right)\right).$$

Les largeurs du  $\text{sinc}$  et du  $\text{rect}$  en  $x$  sont proportionnelles à  $\lambda f_2/\Lambda$  et  $a f_2/f_1$ , respectivement, ce qui a permis de traiter  $\text{sinc} \approx 1$  parce que l'ordre de grandeur (pour les contraintes du projet) de  $\lambda/\Lambda$  est de  $\approx 10^{-1}$  alors que celui de  $a/f_1$  est de  $\approx 10^{-2}$ . La forme finale de  $U_2(x_2, y_2)$  est :

$$U_2(x_2, y_2) \propto \text{rect}\left(\frac{y_2 f_1}{b f_2}\right) \text{rect}\left(\frac{f_1}{a f_2} \left(x_2 - \frac{\lambda f_2}{\Lambda}\right)\right).$$

Le spectromètre est contraint à ce que la largeur du spectre d'ordre 1 capté par la caméra soit d'une largeur équivalente ou légèrement inférieure à la largeur de la caméra. Mathématiquement, ceci correspond à  $x(\lambda_{\text{bleu}}) - x(\lambda_{\text{rouge}}) \leq D_{\text{cam}}$ . On a pu approximer que  $x(\lambda)$  correspond au terme de décalage de la fonction  $\text{rect}$  en  $x$ . Les dimensions de la caméra utilisée pour le spectromètre sont de 1280 x 1024 pixels, chacun étant un carré de 5.2  $\mu\text{m}$  de côté. La zone sensible de la caméra est donc de  $((6, 6 \pm 0, 1) \text{ mm} \times (5.3 \pm 0, 1) \text{ mm})$  [5]. Par conséquent, il a été nécessaire d'optimiser la relation suivante en fonction des lentilles disponibles (10, 15, 20, 25, 30, 50 ou 100 mm de longueur focale) :

$$\frac{f_2}{\Lambda} (\lambda_{\text{bleu}} - \lambda_{\text{rouge}}) \leq 6.656 \text{ mm}. \quad (1)$$

Ayant une valeur de  $f_2$  déterminée, la résolution du spectromètre a pu ensuite être optimisée. La résolution a été trouvée en considérant que deux longueurs d'onde voisines,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , se touchent à une valeur de  $x$  qui correspond à :

$$x = \frac{a f_2}{2 f_1} + \frac{\lambda_1 f_2}{\Lambda} = -\frac{a f_2}{2 f_1} + \frac{\lambda_2 f_2}{\Lambda}.$$

$$\Rightarrow \frac{a f_2}{f_1} = \frac{f_2}{\Lambda} (\lambda_2 - \lambda_1) \Rightarrow \delta_\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\Lambda a}{f_1}. \quad (2)$$

Afin de modéliser l'équation trouvée et de la visualiser, un code python a été créé. Celui-ci recrée, à partir de l'équation de  $U_2$ , l'image apparaissant sur la caméra. Plusieurs longueurs d'onde du rouge au bleu ont été testées pour vérifier la fiabilité de l'équation avec les paramètres obtenus précédemment, soit les deux focales ainsi que les dimensions de la fente. Ce processus a également permis de prédire l'emplacement des différentes longueurs d'onde sur la caméra et ainsi de vérifier si le spectre complet de la lumière visible était présent. Il permet également d'observer les impacts des différents paramètres sur la forme et l'aspect des images obtenues. Concrètement, le code python prend l'équation de  $U_2$  et l'implémente sur une grille de la taille du capteur de la caméra. Cette partie permet d'obtenir la position et la forme de l'image. Par la suite, la fonction `wavelength_to_rgb` fournie avec le mandat permet de colorer l'image en fonction de la longueur d'onde envoyée. Ainsi, il est possible de visualiser l'emplacement, la forme et la couleur de l'image.

Pour déterminer à quel angle positionner le réseau de diffraction pour obtenir un axe optique diffracté à  $90^\circ$ , l'équation 3 a été utilisée [2] :

$$G m \lambda = \sin(\theta_i) + \sin(\theta'), \quad (3)$$

où  $G$  est le nombre de miroirs par mm,  $m$  est l'ordre de diffraction,  $\lambda$  est la longueur d'onde,  $\theta_i \geq 0$  est l'angle incident et  $\theta' \leq 0$  l'angle diffracté. Avec  $m = 1$  et  $G = 600 \text{ mm}^{-1}$ , on a obtenu les relations entre l'angle d'incidence et l'angle du rayon diffracté pour les deux

longueurs d'onde extrêmes. Avec la condition  $\theta_i - \theta' = 90$  et en minimisant la différence entre les angles de sortie, on a obtenu l'angle d'incidence optimal qui détermine le positionnement du réseau de diffraction. L'angle entre la longueur d'onde centrale et l'onde incidente ainsi que la longueur d'onde diffractée exactement sur l'axe optique ont pu être déterminés une fois l'angle d'incidence obtenu.

### III. RÉSULTATS

En considérant  $\lambda_{bleu} = 380$  nm et  $\lambda_{rouge} = 780$  nm, les largeurs des spectres obtenues avec l'équation (1) sont présentées dans le tableau I. Le terme  $\Delta_D$  correspond à l'écart entre le diamètre de la caméra et le diamètre du spectre.

Tableau I – Résultats des largeurs de spectres pour des lentilles ayant des longueurs focales  $f_2$  de 10, 15, 20, 25, 30, 50 ou 100 mm. Le réseau de diffraction a 600 lignes/mm, ce qui correspond à un pas de réseau de  $\Lambda = 1/600$  mm [4].

$\Lambda$ (mm)	$f_2$ (mm)	$D_{spectre}$ (mm)	$\Delta_D$ (mm)
1/600	10	2.40	-4.256
	15	3.60	-3.056
	20	4.80	-1.856
	25	6	-0.656
	30	7.20	0.544
	50	12	5.344
	100	24	17.344

La résolution a été déterminée avec l'équation (2) pour des valeurs de  $a$  allant de 0 à 3 mm et pour les lentilles disponibles. Les résultats sont présentés dans la figure 3.

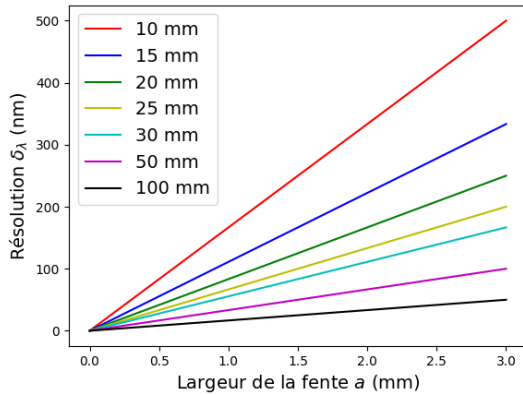


Figure 3 : Résolution du spectromètre en fonction de la largeur de la fente  $a$  et de la longueur focale  $f_1$

La figure 4 montre la simulation de l'équation pour  $U_2$  pour les paramètres suivants :  $f_1 = 50$  mm,  $f_2 = 25$  mm, largeur de la fente  $a = 0.1$  mm et longueur de la fente  $b = 20$  mm. Ce résultat est obtenu pour 60 longueurs d'onde différentes variant du rouge (780 nm) au bleu (380 nm).

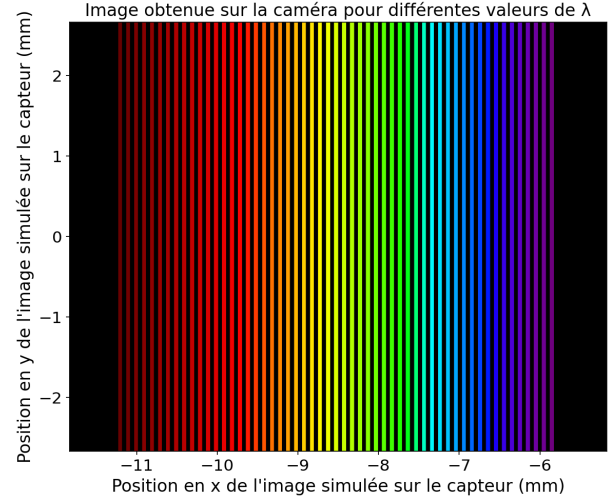


Figure 4 : Simulation de l'image au plan de la caméra.

L'angle d'incidence sur le réseau de diffraction obtenu avec l'équation (3) est  $30^\circ \pm 1^\circ$ . Les rayons rouge et bleu diffractés forment un angle par rapport au rayon incident de  $104^\circ \pm 1^\circ$  et  $76^\circ \pm 1^\circ$  respectivement. La largeur de l'onde diffractée est de 12,5 mm à une distance de 25,0 mm du réseau de diffraction et la lentille  $L_2$  positionnée à cette distance a un diamètre de 12,7 mm. La longueur d'onde dont les rayons incident et diffracté forment un angle droit est de 621 nm.

### IV. DISCUSSION

Tel que démontré mathématiquement dans la section II, l'ordre  $n = 1$  est optimal pour visualiser la diffraction du faisceau entrant. Physiquement, l'ordre  $n = 0$  n'est pas pertinent pour le contexte d'un spectromètre parce qu'il ne présente que la réflexion du faisceau. La diffraction est seulement visible pour les ordres  $|n| < 0$ , et ce, avec beaucoup plus d'intensité pour l'ordre  $n = 1$ . Par conséquent, l'axe optique à la sortie du réseau de diffraction doit être aligné avec l'ordre  $n = 1$  et non l'ordre  $n = 0$ , ce qui impose de positionner le réseau de diffraction à un angle de  $30^\circ \pm 1^\circ$  entre sa normale et l'axe optique. L'angle de l'ordre  $n = 1$  est de  $90^\circ$  entre l'onde incidente et l'onde diffractée à la longueur d'onde centrale de 621 nm qui correspond à du jaune orange. C'est donc cette couleur qui est au centre de la caméra ; les longueurs d'onde plus faibles ayant un angle plus élevé se retrouvent sur la gauche et inversement pour les longueurs d'onde plus élevées.

En évaluant les résultats des longueurs focales  $f_2$  et en considérant la condition initiale 1, les seules lentilles acceptables sont celles ayant une longueur focale inférieure ou égale à 25 mm. En raison des dimensions physiques des composants et de la position du capteur de la caméra, les lentilles ayant des longueurs focales inférieures à 25 mm ne peuvent pas être utilisées. Ceci élimine donc toutes

les lentilles sauf celle de longueur focale  $f_2 = 25$  mm, limitant ainsi le choix à celle-ci. Pour ce qui est du choix de la longueur focale de la première lentille  $f_1$ , la relation inversement proportionnelle entre la résolution et  $f_1$  (voir équation (2)) permet de déterminer qu'une longueur focale plus grande serait optimale. Cependant, les limites imposées par les dimensions de l'imprimante 3D disponible éliminent le choix de  $f_1 = 100$  mm. La deuxième longueur focale la plus grande, soit  $f_1 = 50$  mm, est donc choisie. Même si le pas du réseau de diffraction  $\Lambda$  est fixé, on peut remarquer que celui-ci améliore la résolution plus il est petit.

La simulation de la modélisation mathématique donne un résultat satisfaisant. En effet, tout le spectre de la lumière visible est présent sur la caméra. Il est cependant important de mentionner qu'il a fallu ajuster la position de la caméra, car le modèle mathématique considère que c'est l'ordre 0 qui est placé à 90 degrés du rayon incident et il faut que ce soit l'ordre 1 qui corresponde à cet alignement. On remarque également qu'avec les paramètres utilisés, le spectre est plus étroit que le capteur. Cette situation n'est pas problématique, car il est préférable d'avoir le spectre complet plutôt que d'avoir la totalité du capteur utilisée avec une partie du spectre manquante.

La simulation montre que c'est le paramètre de la largeur de la fente d'entrée qui a le plus d'impact sur l'image, car elle a une incidence directe sur la largeur du rectangle sur l'image. C'est-à-dire que plus la fente est large, plus l'image rectangulaire (fente de sortie) sera elle aussi de plus en plus large. La hauteur de la fente n'a quant à elle pas eu d'impact visible sur l'image. Il est à noter que l'analyse avec les fonctions *rect* et les franges verticales n'aurait pas été possible sans frange, donc l'utilisation d'un trou ou l'absence d'obstacle ont été proscrites.

Il est possible de conclure que c'est la taille de l'image, soit la largeur de la fente de sortie, qui a le plus d'impact sur la résolution comparée, par exemple, au nombre de pixels, car même pour la largeur de fente d'entrée la plus petite (0.1 mm), la largeur de la fente de sortie reste beaucoup plus large que la largeur du pixel. Dans ce cas, la limitation de la résolution vient de la fente de sortie, car si deux longueurs d'onde sont trop proches, les images se superposent et rendent la distinction des longueurs d'onde difficile.

Puisque le système utilise des lentilles convergentes, l'impact de l'aberration sphérique sur la résolution est aussi à considérer [1]. En effet, lorsqu'un rayon lumineux passe par une lentille convergente, les rayons passant sur les extrémités de la lentille n'auront pas la même image que les rayons passant par le centre de la lentille. Donc, dans notre cas, ce sont les rayons dans le rouge ou dans le bleu qui subiront le plus cette aberration. Celle-ci a pour effet de légèrement courber l'image ainsi que de créer un flou dans la périphérie de celle-ci, ce qui diminue par conséquent la

résolution du système, surtout pour les longueurs d'onde extrêmes.

Cette aberration n'est pas la seule qui affecte différemment les longueurs d'onde à imager. En effet, le chromatisme des lentilles est également une source d'aberrations dans ce montage. Au niveau de la première lentille, ce phénomène fait converger les rayons de longueur d'onde plus faible un peu avant la focale théorique et ceux de longueurs d'onde plus élevées un peu après la focale théorique [6]. Puisque le réseau de diffraction est placé à la focale de la première lentille, les rayons ne frapperont pas cet élément optique exactement au même endroit, les rayons de longueur d'onde plus centrale frappant près de l'axe optique et ceux de longueur d'onde extrême frappant en périphérie. Cette aberration est due à la différence d'indice de réfraction de la lentille ressenti par chaque rayon de longueur d'onde différente [6]. Cette différence de position sur le réseau de diffraction entraîne les longueurs d'onde à se répartir de façon plus distancée dans la suite du parcours optique. Elles arrivent à différents endroits sur la lentille  $L_2$  ce qui implique que les aberrations causées par cette lentille affectent les ondes de différentes longueurs d'onde avec plus d'intensité pour les longueurs d'onde extrêmes, tel expliqué précédemment.

Les tests effectués sur la table optique ont confirmé ces valeurs prédites. Il reste à mettre en œuvre un spectromètre à faible coût en suivant les recommandations proposées dans ce rapport, sous forme d'un spectromètre fabriqué par imprimante 3D réutilisant les lentilles et le capteur de la caméra. Ainsi, il sera possible d'évaluer la qualité de la résolution obtenue en pratique.

#### RÉFÉRENCES

- [1] EDMUND OPTICS. *How Aberrations Affect Machine Vision Lenses*. 2024. URL : [www.edmundoptics.fr/knowledge-center/application-notes/imaging/how-aberrations-affect-machine-vision-lenses/](http://www.edmundoptics.fr/knowledge-center/application-notes/imaging/how-aberrations-affect-machine-vision-lenses/).
- [2] PLYMOUTH GRATING LABORATORY. *The Grating Equation*. 2024. URL : <https://www.plymouthgrating.com/guidance/technical-notes/fundamentals/the-grating-equation/>.
- [3] Jean PROVOST, Lucien WEISS et Jérémie VILLENEUVE. *Mandat 2 : Spectromètre*. 2024. URL : <https://moodle.polymtl.ca/mod/resource/view.php?id=544674>.
- [4] THORLABS. *Visible Ruled Reflective Diffraction Gratings*. URL : [www.thorlabs.com/newgroupepage9.cfm?objectgroup\\_id=8626&pn=GR25-0605](http://www.thorlabs.com/newgroupepage9.cfm?objectgroup_id=8626&pn=GR25-0605).
- [5] THORLABS, INC. *DCC1545M CMOS Camera (Obsolete Product)*. 2020. URL : [www.thorlabs.com/catalogpages/obsolete/2020/DCC1545M.pdf](http://www.thorlabs.com/catalogpages/obsolete/2020/DCC1545M.pdf).
- [6] WIKIPÉDIA. *Aberration chromatique*. 2024. URL : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Aberration\\_chromatique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Aberration_chromatique).

## V. ANNEXES

### A. Preuve de correction par Antidote

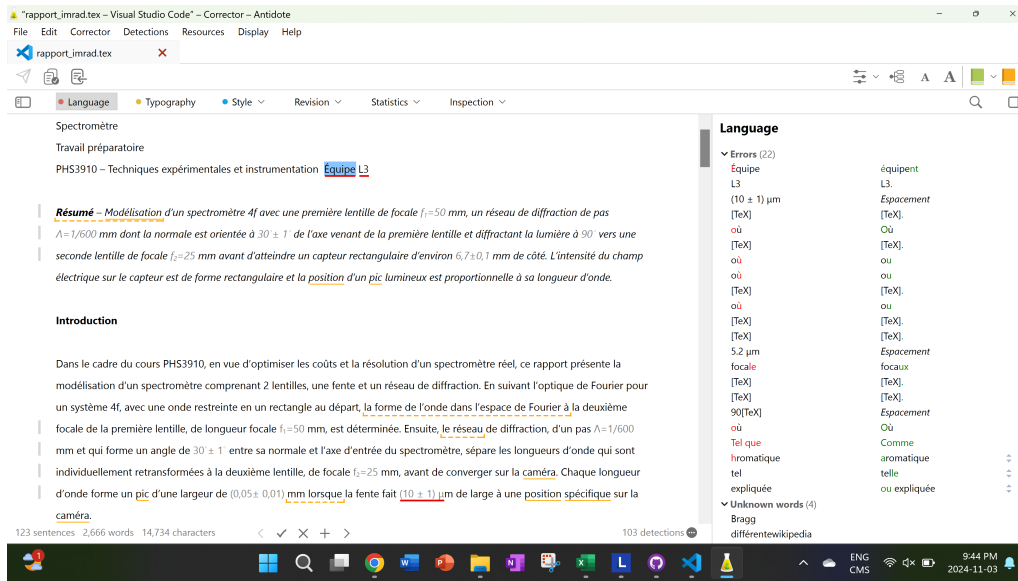


Figure 5 : Correction par Antidote