Module "Optimisation et contrôle"

◇

Projet sur les réseaux de distribution d'eau

Pierre Carpentier

pierre.carpentier@ensta-paristech.fr

Année 2014/2015

Site du cours : `cermics.enpc.fr/~jpc/optimisation.html`
Site du projet : `www.ensta.fr/~pcarpent/TP_Reseau/ENPC/`

Objectif et modalités du projet

Prendre prétexte d'un problème d'ingénierie (lié à l'hydraulique urbaine) pour faire apparaître un problème d'optimisation, puis mettre en œuvre sur ce problème les différentes approches et les différents algorithmes présentés dans le cours d'optimisation.

Dans la "vraie vie", il est rare d'écrire une méthode d'optimisation comme le gradient conjugué ou quasi-Newton, car c'est un travail de professionnel. Pour ce projet, vous êtes les professionnels. . .

Langage de programmation : SCICOSLAB

Travail en **binôme**.

Contrôle continu pour l'évaluation du projet.

Comptes rendus à l'issue des 1-ère et 3-ème séances.

Rapport final à l'issue de la dernière séance.

Objectif et modalités du projet

Prendre prétexte d'un problème d'ingénierie (lié à l'hydraulique urbaine) pour faire apparaître un problème d'optimisation, puis mettre en œuvre sur ce problème les différentes approches et les différents algorithmes présentés dans le cours d'optimisation.

Dans la "vraie vie", il est rare d'écrire une méthode d'optimisation comme le gradient conjugué ou quasi-Newton, car c'est un travail de professionnel. Pour ce projet, vous êtes les professionnels...

Langage de programmation : SCICOSLAB

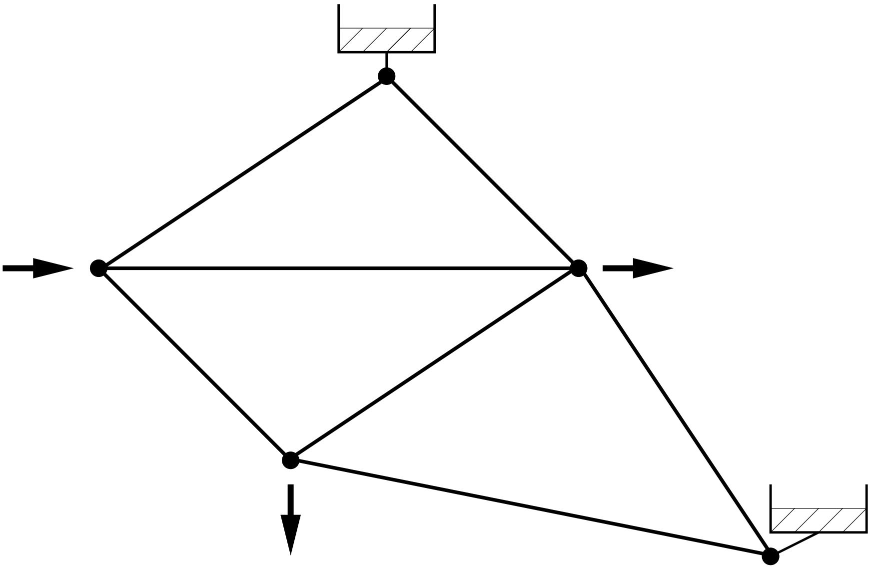
Travail en **binôme**.

Contrôle continu pour l'évaluation du projet.

Comptes rendus à l'issue des 1-ère et 3-ème séances.

Rapport final à l'issue de la dernière séance.

Schématique d'un réseau de distribution d'eau



Variables décrivant le réseau et notations

Tailles du réseau.

- n arcs (canalisations du réseau),
- m nœuds : m_r réservoirs, m_d consommateurs $(m = m_r + m_d)$.

Variables hydrauliques du réseau.

- flux aux nœuds : $f = \begin{pmatrix} f_r \\ f_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ à calculer, connus.
- pressions aux nœuds : $p = \begin{pmatrix} p_r \\ p_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ connues, à calculer.
- résistances des arcs : $r \in \mathbb{R}^n$ connues.
- débits dans les arcs : $q \in \mathbb{R}^n$ à calculer.

$\rightsquigarrow$ $(m+n)$ inconnues à déterminer.

Variables décrivant le réseau et notations

Tailles du réseau.

- n arcs (canalisations du réseau),
- m nœuds : m_r réservoirs, m_d consommateurs $(m = m_r + m_d)$.

Variables hydrauliques du réseau.

- flux aux nœuds : $f = \begin{pmatrix} f_r \\ f_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ à calculer, connus.
- pressions aux nœuds : $p = \begin{pmatrix} p_r \\ p_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ connues, à calculer.
- résistances des arcs : $r \in \mathbb{R}^n$ connues.
- débits dans les arcs : $q \in \mathbb{R}^n$ à calculer.

$\leadsto$ $(m + n)$ inconnues à déterminer.

Variables décrivant le réseau et notations

Tailles du réseau.

- n arcs (canalisations du réseau),
- m nœuds : m_r réservoirs, m_d consommateurs $(m = m_r + m_d)$.

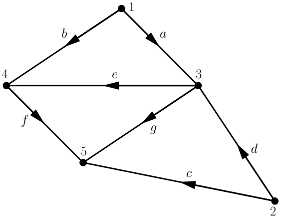
Variables hydrauliques du réseau.

- flux aux nœuds : $f = \begin{pmatrix} f_r \\ f_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ à calculer, connus.
- pressions aux nœuds : $p = \begin{pmatrix} p_r \\ p_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ connues, à calculer.
- résistances des arcs : $r \in \mathbb{R}^n$ connues.
- débits dans les arcs : $q \in \mathbb{R}^n$ à calculer.

$\rightsquigarrow$ $(m + n)$ inconnues à déterminer.

Matrice d'incidence et équations d'équilibre du réseau

Matrice d'incidence nœuds–arcs.



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrrrr} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

Équations décrivant l'état d'équilibre.

Noeud 4 : $q_b + q_e - q_f = f_4$.

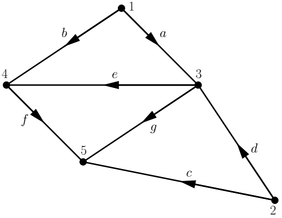
$\rightsquigarrow$ $Aq - f = 0$.

Arc f : $p_4 - p_5 = r_f q_f |q_f|$.

$\rightsquigarrow$ $A^\top p + r \bullet q \bullet |q| = 0$.

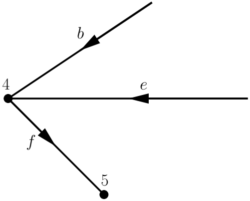
$\rightsquigarrow$ $(m+n)$ équations.

Matrice d'incidence nœuds–arcs.



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

Équations décrivant l'état d'équilibre.



Noeud 4 : $q_b + q_e - q_f = f_4$.

$\rightsquigarrow$ $Aq - f = 0$.

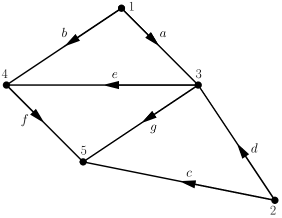
Arc f : $p_4 - p_5 = r_f q_f |q_f|$.

$\rightsquigarrow$ $A^\top p + r \bullet q \bullet |q| = 0$.

$\rightsquigarrow$ $(m+n)$ équations.

Matrice d’incidence et équations d’équilibre du réseau

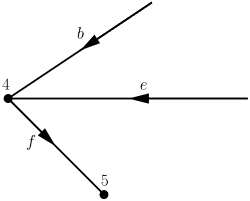
Matrice d’incidence nœuds–arcs.



$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccccccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{array}\right)\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

Équations décrivant l’état d’équilibre.



$Noeud\ 4 \quad : \quad q_b + q_e - q_f = f_4.$

$\leadsto \quad$ $Aq - f = 0.$

$Arc\ f \quad : \quad p_4 - p_5 = r_f q_f |q_f|.$

$\leadsto \quad$ $A^\top p + r \bullet q \bullet |q| = 0.$

$\leadsto \quad (m + n)$ équations.

Problème d'optimisation associé à l'équilibre

Les équations d'équilibre sont en fait les conditions d'optimalité du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{(q \in \mathbb{R}^n , f_r \in \mathbb{R}^{m_r})} \quad \frac{1}{3} \Big\langle q \,, r \bullet q \bullet |q| \Big\rangle + \Big\langle p_r \,, f_r \Big\rangle \,,$$

sous la contrainte :

$$Aq - f = 0 \,,$$

qui s'écrit après réduction (par élimination de variables) comme un problème d'optimisation sans contrainte :

$$\min_{q_C \in \mathbb{R}^{n-m_d}} \quad \frac{1}{3} \Big\langle q^{(0)} + Bq_C \,, r \bullet \big(q^{(0)} + Bq_C\big) \bullet \big|q^{(0)} + Bq_C\big| \Big\rangle + \Big\langle p_r \,, A_r \big(q^{(0)} + Bq_C\big) \Big\rangle \,.$$

C'est ce problème que l'on va résoudre (pour commencer) !

Problème d'optimisation associé à l'équilibre

Les équations d'équilibre sont en fait les conditions d'optimalité du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{(q\in\mathbb{R}^n, f_r\in\mathbb{R}^{m_r})} \quad \frac{1}{3}\Big\langle q \, , r \bullet q \bullet |q| \Big\rangle + \Big\langle p_r \, , f_r \Big\rangle \, ,$$

sous la contrainte :

$$Aq - f = 0 \, ,$$

qui s'écrit après réduction (par élimination de variables) comme un problème d'optimisation sans contrainte :

$$\min_{q_C\in\mathbb{R}^{n-m_d}} \quad \frac{1}{3}\Big\langle q^{(0)} + Bq_C \, , r \bullet \big(q^{(0)} + Bq_C\big) \bullet \big|q^{(0)} + Bq_C\big| \Big\rangle + \Big\langle p_r \, , A_r\big(q^{(0)} + Bq_C\big) \Big\rangle \, .$$

C'est ce problème que l'on va résoudre (pour commencer) !

Problème d'optimisation associé à l'équilibre

Les équations d'équilibre sont en fait les conditions d'optimalité du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{(q \in \mathbb{R}^n, f_r \in \mathbb{R}^{m_r})} \quad \frac{1}{3} \Big\langle q \, , r \bullet q \bullet |q| \Big\rangle + \Big\langle p_r \, , f_r \Big\rangle \, ,$$

sous la contrainte :

$$Aq - f = 0 \, ,$$

qui s'écrit après réduction (par élimination de variables) comme un problème d'optimisation sans contrainte :

$$\begin{aligned} \min_{q_C \in \mathbb{R}^{n-m_d}} \quad & \frac{1}{3} \Big\langle q^{(0)} + Bq_C \, , r \bullet \big(q^{(0)} + Bq_C\big) \bullet \big|q^{(0)} + Bq_C\big| \Big\rangle \\ & + \Big\langle p_r \, , A_r \big(q^{(0)} + Bq_C\big) \Big\rangle \, . \end{aligned}$$

C'est ce problème que l'on va résoudre (pour commencer) !

But du projet

Écrire des méthodes génériques d'optimisation (recherche linéaire, gradient conjugué, quasi-Newton, Newton) qui ne communiquent avec le problème que par l'intermédiaire d'un oracle associé à :

$$F : q_c \mapsto \frac{1}{3}\Big\langle q^{(0)} + Bq_c \,,\, r \bullet \big(q^{(0)} + Bq_c\big) \bullet \big|q^{(0)} + Bq_c\big| \Big\rangle + \Big\langle p_r \,,\, A_r\big(q^{(0)} + Bq_c\big) \Big\rangle \; .$$

Oracle

Fonction qui pour tout q_c calcule $F(q_c)$, $\nabla F(q_c)$, $\nabla^2 F(q_c)$:

`[F,G,H] = Oracle(qc,ind)`.

Recherche linéaire

Fonction qui assure la décroissance de F dans une direction d.

Algorithme d'optimisation

Fonction qui minimise F en partant d'un point initial q_{ini} :

`[Fopt,qopt,Gopt] = Minimise(Oracle,qini)`.

Écrire des méthodes génériques d'optimisation (recherche linéaire, gradient conjugué, quasi-Newton, Newton) qui ne communiquent avec le problème que par l'intermédiaire d'un oracle associé à :

$$F : q_c \mapsto \frac{1}{3}\left\langle q^{(0)} + Bq_c \, , r \bullet \left(q^{(0)} + Bq_c\right) \bullet \left|q^{(0)} + Bq_c\right| \right\rangle + \left\langle p_r \, , A_r\left(q^{(0)} + Bq_c\right) \right\rangle .$$

Oracle

Fonction qui pour tout q_c calcule $F(q_c)$, $\nabla F(q_c)$, $\nabla^2 F(q_c)$:

`[F,G,H] = Oracle(qc,ind)`.

Recherche linéaire

Fonction qui assure la décroissance de F dans une direction d.

Algorithme d'optimisation

Fonction qui minimise F en partant d'un point initial q_{ini} :

`[Fopt,qopt,Gopt] = Minimise(Oracle,qini)`.

But du projet

Écrire des méthodes génériques d'optimisation (recherche linéaire, gradient conjugué, quasi-Newton, Newton) qui ne communiquent avec le problème que par l'intermédiaire d'un oracle associé à :

$$F : q_c \mapsto \frac{1}{3}\left\langle q^{(0)} + Bq_c \, , r \bullet \left(q^{(0)} + Bq_c\right) \bullet \left|q^{(0)} + Bq_c\right| \right\rangle + \left\langle p_r \, , A_r\left(q^{(0)} + Bq_c\right) \right\rangle .$$

Oracle

Fonction qui pour tout q_c calcule $F(q_c)$, $\nabla F(q_c)$, $\nabla^2 F(q_c)$:

`[F,G,H] = Oracle(qc,ind).`

Recherche linéaire

Fonction qui assure la décroissance de F dans une direction d.

Algorithme d'optimisation

Fonction qui minimise F en partant d'un point initial q_{ini} :

`[Fopt,qopt,Gopt] = Minimise(Oracle,qini).`

But du projet

Écrire des méthodes génériques d'optimisation (recherche linéaire, gradient conjugué, quasi-Newton, Newton) qui ne communiquent avec le problème que par l'intermédiaire d'un oracle associé à :

$$F : q_c \mapsto \frac{1}{3}\left\langle q^{(0)} + Bq_c \, , r \bullet \left(q^{(0)} + Bq_c\right) \bullet \left|q^{(0)} + Bq_c\right| \right\rangle + \left\langle p_r \, , A_r\left(q^{(0)} + Bq_c\right) \right\rangle .$$

Oracle

Fonction qui pour tout q_c calcule $F(q_c)$, $\nabla F(q_c)$, $\nabla^2 F(q_c)$:

`[F,G,H] = Oracle(qc,ind).`

Recherche linéaire

Fonction qui assure la décroissance de F dans une direction d.

Algorithme d'optimisation

Fonction qui minimise F en partant d'un point initial q_{ini} :

`[Fopt,qopt,Gopt] = Minimise(Oracle,qini).`

L'algorithme du gradient à pas fixe

```
function [fopt,xopt,gopt]=Gradient_F(Oracle,xini)

   alpha = 0.0005; x = xini;

   for k = 1:iter

      [F,G] = Oracle(x,ind);

      if norm(G) <= tol then
         kstar = k; break
      end

      x = x - (alpha*G);

      logG = [ logG ; log10(norm(G)) ]; Cout = [ Cout ; F ];

   end

   fopt = F; xopt = x; gopt = G;

endfunction
```

```
// Donnees du probleme
exec('Probleme_R.sce'); exec('Structures_R.sce');

// Fonction de visualisation du deroulement de l'algorithme
exec('Visualg.sci');

// Fonctions de verification des resultats
exec('HydrauliqueP.sci'); exec('Verification.sci');

// Oracle et algorithme d'optimisation
exec('Oracle.sci'); exec('Gradient_F.sci');

// Optimisation
xini = 0.1 * rand(n-md,1);
[fopt,xopt,gopt] = Gradient_F(Oracle,xini);

// Verification des resultats
[q,z,f,p] = HydrauliqueP(xopt); Verification(q,z,f,p);
```

Variables disponibles dans l'environnement Scilab

Description de la variable	Nom math.	Variable info.	Espace
Nombre total d'arcs	n	`n`	$\mathbb{N}$
Nombre total de nœuds	m	`m`	$\mathbb{N}$
Nombre de nœuds de demande	m_d	`md`	$\mathbb{N}$
Nombre de nœuds réservoir	m_r	`mr`	$\mathbb{N}$
Flux aux nœuds de demande	f_d	`fd`	$\mathcal{M}(m_d, 1)$
Pressions aux nœuds réservoir	p_r	`pr`	$\mathcal{M}(m_r, 1)$
Résistances des arcs	r	`r`	$\mathcal{M}(n, 1)$
Vecteur initial des débits	$q^{(0)}$	`q0`	$\mathcal{M}(n, 1)$
Matrice d'incidence nœuds-arcs	A	`A`	$\mathcal{M}(m, n)$
Sous-matrice "demande" de A	A_d	`Ad`	$\mathcal{M}(m_d, n)$
Sous-matrice "réservoir" de A	A_r	`Ar`	$\mathcal{M}(m_r, n)$
Sous-matrice "arbre" de A_d	$A_{d,T}$	`AdT`	$\mathcal{M}(m_d, m_d)$
Sous matrice "coarbre" de A_d	$A_{d,C}$	`AdC`	$\mathcal{M}(m_d, n - m_d)$
Matrice inverse de $A_{d,T}$		`AdI`	$\mathcal{M}(m_d, m_d)$
Matrice d'incidence arcs-cycles	B	`B`	$\mathcal{M}(n, n - m_d)$

Attention : en Scilab, les variables sont globales !

Programme de travail de cette première séance

1. Lire le document descriptif du TP ...

2. Récupérer les documents et les codes SCILAB du TP :
   $\rightsquigarrow$ http://www.ensta.fr/~pcarpent/TP_Reseau/ENPC/

3. Calculer le gradient et le hessien de la fonction :

$$
\begin{aligned}
F : \mathbb{R}^{n-m_d} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
q_C &\mapsto \frac{1}{3}\Big\langle q^{(0)} + Bq_C \, , r \bullet \big(q^{(0)} + Bq_C\big) \bullet \big|q^{(0)} + Bq_C\big| \Big\rangle + \\
&\qquad \Big\langle p_r \, , A_r\big(q^{(0)} + Bq_C\big)\Big\rangle \, .
\end{aligned}
$$

4. Écrire un oracle codant les expressions obtenues (en SCILAB), et tester cet oracle avec l'algorithme du gradient à pas fixe.

Pour la **prochaine séance** : avoir un oracle en état de marche ! ! !

Programmation du projet

1. **20 mars (10h00 — 11h45)**
2. **27 mars (10h00 — 11h45)**
3. **10 avril (10h00 — 11h45)**
4. **24 avril (08h30 — 11h45)**

Ce projet...

Le vrai problème. . .