Oblig TMA4106

Emil Jenius Gaustad

1st April 2025

$\boxed{1}$

Resultatene av simuleringen vises i figur 1. Koden til programmet er gitt i [1]. Den beste presisjonen ble oppnådd med $h = 10^{-8}$. Etter dette gikk presisjonen jevnt nedover.

$\boxed{2}$

Med tilnærmingen

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{1}$$

ble resultatene som vist i figur 2. Disse resultatene oppnås ved å kjøre funksjonen "oppgave2()" i [1]. Den beste presisjonen skjer ved $h = 10^{-5}$, og her er presisjonen cirka 100 ganger så god som den beste presisjonen i forrige oppgave. En kan dessuten se at feilen er omtrent proporsjonal med h^2: deler man h på 10, deles feilen på 100. Grunnen til dette kan man finne ved å taylorutvikle (1):

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} &= \frac{f(x) - f(x) + f'(x)h - f'(x)(-h) + f''(x)\frac{h^2}{2} - f''(x)\frac{(-h)^2}{2} + \dots}{2h} \\ \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} &= f'(x) + f^{(3)}\frac{h^2}{6} + f^{(5)}\frac{h^4}{120} + \dots. \end{aligned} \tag{2}$$

Dersom h er liten blir feilen til (1) omtrent proporsjonal med h^2.

$\boxed{3}$

Resultatene av tilnærmingen

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} \tag{3}$$

```
Fasit: 4.4816890703380645
h: 0.01         Approksimasjon: 4.5041723976187775          Feil: 0.022483327280713006
h: 0.001                Approksimasjon: 4.483930662007474               Feil: 0.002241591669409182
h: 0.0001               Approksimasjon: 4.481913162264206               Feil: 0.00022409192614158968
h: 1e-05                Approksimasjon: 4.4817114789097445              Feil: 2.2408571680010425e-05
h: 1e-06                Approksimasjon: 4.481691310509461               Feil: 2.2401713968278614e-06
h: 1e-07                Approksimasjon: 4.481689295232627               Feil: 2.2489456252827722e-07
h: 1e-08                Approksimasjon: 4.481689064306238               Feil: -6.0318265937553406e-09
h: 1e-09                Approksimasjon: 4.481689686031132               Feil: 6.156930671963323e-07
h: 1e-10                Approksimasjon: 4.481686133317453               Feil: -2.9370206116041686e-06
h: 1e-11                Approksimasjon: 4.481659487964862               Feil: -2.9582373202607926e-05
h: 1e-12                Approksimasjon: 4.481748305806832               Feil: 5.92354687674046e-05
h: 1e-13                Approksimasjon: 4.476419235288631               Feil: -0.005269835049433347
h: 1e-14                Approksimasjon: 4.440892098500626               Feil: -0.040796971837438356
h: 1e-15                Approksimasjon: 5.329070518200751               Feil: 0.8473814478626869
h: 1e-16                Approksimasjon: 0.0             Feil: -4.4816890703380645
h: 1e-17                Approksimasjon: 0.0             Feil: -4.4816890703380645
```

Figure 1: Resultat fra oppgave 1, for ulike verdier av h.

```
Oppgave 2:
Fasit: 4.4816890703380645
h: 0.1          Approksimasjon: 4.489162287752206               Feil: 0.007473217414141864
h: 0.01         Approksimasjon: 4.481763765529401               Feil: 7.469519133618263e-05
h: 0.001                Approksimasjon: 4.4816898172856945              Feil: 7.46947629970407e-07
h: 0.0001               Approksimasjon: 4.481689077810991               Feil: 7.472926277785064e-09
h: 1e-05                Approksimasjon: 4.481689070434669               Feil: 9.660450217552352e-11
h: 1e-06                Approksimasjon: 4.481689069635308               Feil: -7.027560755545892e-10
h: 1e-07                Approksimasjon: 4.481689073188022               Feil: 2.8499576032459117e-09
h: 1e-08                Approksimasjon: 4.481689064306238               Feil: -6.0318265937553406e-09
h: 1e-09                Approksimasjon: 4.481689686031132               Feil: 6.156930671963323e-07
h: 1e-10                Approksimasjon: 4.481686133317453               Feil: -2.9370206116041686e-06
h: 1e-11                Approksimasjon: 4.481659487964862               Feil: -2.9582373202607926e-05
h: 1e-12                Approksimasjon: 4.481748305806832               Feil: 5.92354687674046e-05
h: 1e-13                Approksimasjon: 4.476419235288631               Feil: -0.005269835049433347
h: 1e-14                Approksimasjon: 4.440892098500626               Feil: -0.040796971837438356
h: 1e-15                Approksimasjon: 5.329070518200751               Feil: 0.8473814478626869
h: 1e-16                Approksimasjon: 0.0             Feil: -4.4816890703380645
h: 1e-17                Approksimasjon: 0.0             Feil: -4.4816890703380645
```

Figure 2: Resultat fra oppgave 2, for ulike verdier av h.

```
Oppgave 3:
Fasit: 4.4816890703380645
h: 0.1          Approksimasjon: 4.481674113579644               Feil: -1.4956758420225924e-05
h: 0.01         Approksimasjon: 4.481689068844186               Feil: -1.4938787984419832e-09
h: 0.001                Approksimasjon: 4.481689070337191               Feil: -8.730793865652231e-13
h: 0.0001               Approksimasjon: 4.48168907034215                Feil: 4.085620730620576e-12
h: 1e-05                Approksimasjon: 4.481689070390259               Feil: 5.219469301209756e-11
h: 1e-06                Approksimasjon: 4.481689069413264               Feil: -9.248006804796205e-10
h: 1e-07                Approksimasjon: 4.4816890739281705              Feil: 3.590105990269876e-09
h: 1e-08                Approksimasjon: 4.481689056904751               Feil: -1.3433313128530244e-08
h: 1e-09                Approksimasjon: 4.4816900561054736              Feil: 9.857674090341106e-07
h: 1e-10                Approksimasjon: 4.481686133317453               Feil: -2.9370206116041686e-06
h: 1e-11                Approksimasjon: 4.481629882017539               Feil: -5.9188320525649374e-05
h: 1e-12                Approksimasjon: 4.481674290938524               Feil: -1.4779399540643112e-05
h: 1e-13                Approksimasjon: 4.474938937922464               Feil: -0.006750132415600518
h: 1e-14                Approksimasjon: 4.426089124838957               Feil: -0.05559994549910 7406
h: 1e-15                Approksimasjon: 5.6991448597424705              Feil: 1.217455789404406
h: 1e-16                Approksimasjon: -1.4802973661668755             Feil: -5.96198643650494
h: 1e-17                Approksimasjon: -7.401486830834377              Feil: -11.883175901172441
```

Figure 3: Resultat fra oppgave 3, for ulike verdier av h.

er vist i figur 3, og kommer fra funksjonen "oppgave3()" i [1]. Resultatene viser at feilen er omtrent proporsjonal med h^4, for $0.1 \geq h \geq 10^{-3}$.

$\boxed{4}$

Et utklipp av animasjonen er vist i figur 4. For å se hele animasjonen kan funksjonen "oppgave4()" i [1] kjøres. Testing av ulike verdier for h og k viste at $h \leq 0.01$ fort gjorde programmet ustabilt, og at $k \geq 0.1$ førte til ustabiliteter. Velger man derimot k veldig liten, blir programmet tregt. En god konfigurasjon fant jeg til å være $h = 0.05, k = 10^{-3}$. Forresten brukte jeg initialverdien $u(x,0) = sin(\pi x)$ for at initialkravet skulle stemme med randkravet.

$\boxed{5}$

For å se animasjonen kan funksjonen "oppgave5()" i [1] kjøres. For å kunne lage programmet satte jeg inn den eksplisitte metoden for $u_{i+1,j+1}$ og $u_{i-1,j+1}$, og løste for $u_{i,j+1}$. Dette ga

$$u_{i,j+1} = \left(k^2 \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4} + u_{i,j}\right)\left(1 + \frac{k}{h^2}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Her fungerte det bra med $h = 0.05, k = 10^{-4}$.

Figure 4: Skjermbilde fra animasjonen i oppgave 4. Er du programmerings-entusiast koker kanskje blodet ditt når du ser at jeg bruker pygame. Arrester meg.

$\boxed{6}$

Her brukte jeg samme fremgangsmåte som på oppgave 5 for "den implisitte delen", og fikk da

$$u_{i,j+1} = \frac{k^2 \frac{u_{i+2,j}-2u_{i+1,j}+2u_{i,j}-2u_{i-1,j}+u_{i-2,j}}{2h^2} + k\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{2} + h^2 u_{i,j}}{h^2+k}. \tag{5}$$

Funksjonen kan finnes på samme måte som tidligere. For å sammenlikne de tre metodene brukte jeg $h = 0.05, k = 10^{-4}$, og plottet $u(0.5, t)$ for alle metodene, sammen med den analytiske løsningen. Dette plottet vises i figur 5 og 6. Som forventet er den analytiske løsningen et sted mellom resultatet fra den eksplisitte og den implisitte metoden. Det som ikke var forventet var at den eksplisitte var mye nærmere, og at Crank-Nicholson nesten ikke var nærmere enn den implisitte. Pussig. Nå skal jeg legge meg.

Referanser

[1] E. Gaustad, *Obligtma4106kode*, https://github.com/emilgaus/TMA4106Oblig, Apr. 2025. (visited on 01/04/2025).

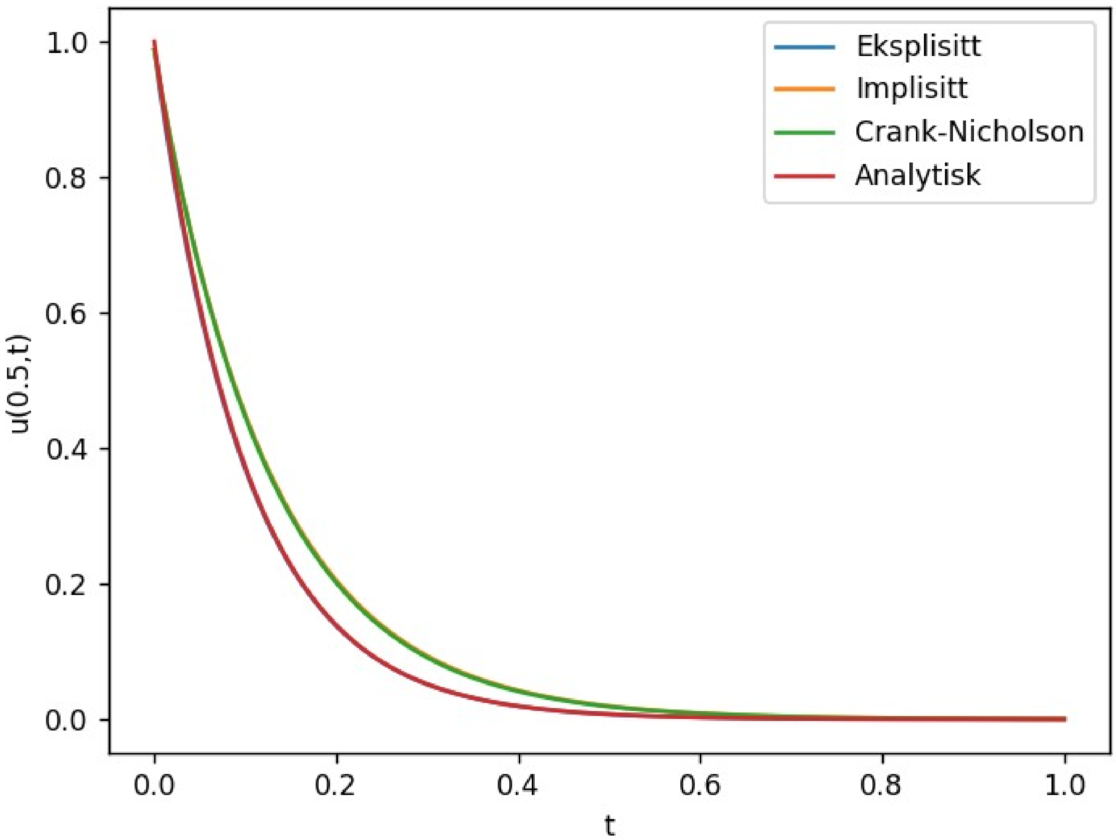

Figure 5: Plot av temperaturen i punktet $x = 0.5$ over tid for de ulike metodene, sammen med den analytiske løsningen.

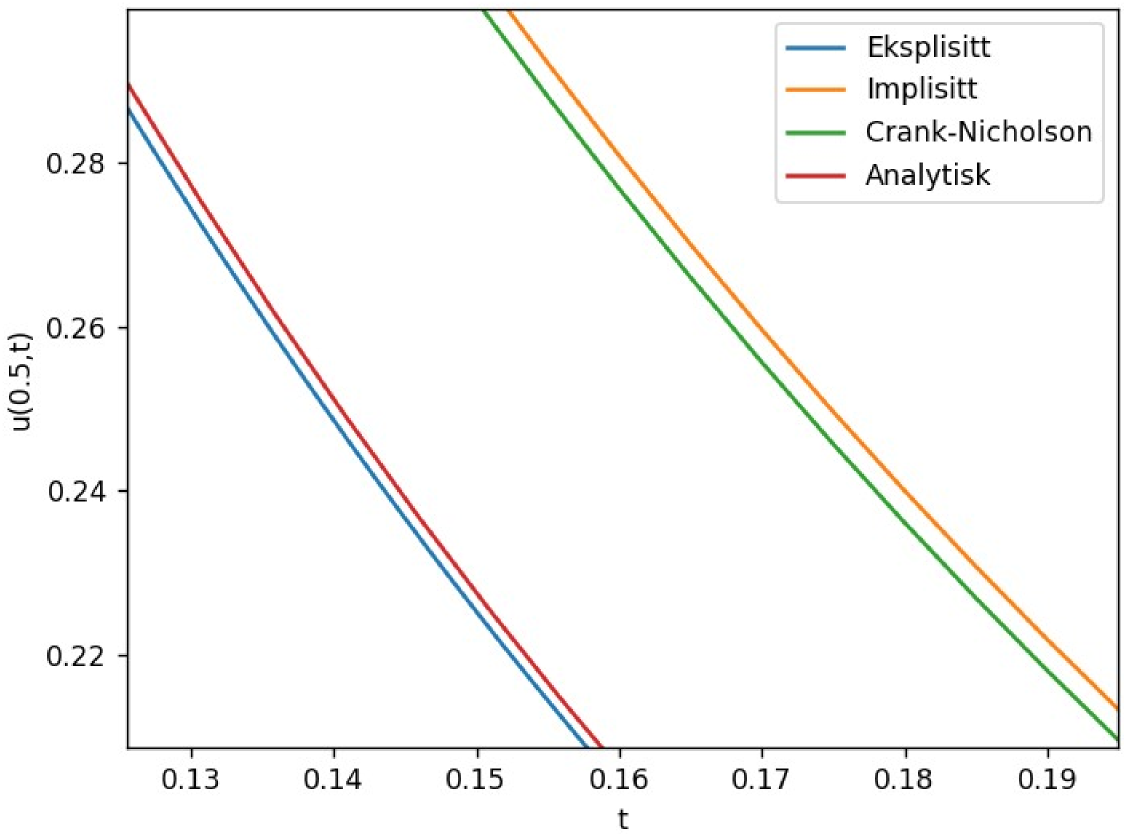

Figure 6: Det samme plottet som figur 5, zoomet inn.